

$$= \frac{4\alpha^2}{(\alpha + \beta)^2} \cdot \frac{\beta}{\alpha}$$

বা,  $T = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2}$  ... .. 11.23

অন্যদিকে কণাস্রোতের প্রতিফলন গুণক,  $R = S'_1 / S_I = BB^*V_1 / AA^*V_1$

$$= \left(\frac{B}{A}\right)^2$$

বা,  $R = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^2$  ... .. 11.24

এবার ধরে নিই  $E < V_0$ । তাহলে  $\beta = i\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} = i\gamma$

11.21(b) সমীকরণের পরিবর্তে আমরা লিখতে পারি

$$\psi_2(x) = Ce^{-\gamma x} + De^{\gamma x}$$

এর মধ্যে  $De^{\gamma x}$  রাশিটির মান  $x \rightarrow \infty$  সীমায় অসীম। যেহেতু  $\psi_2(x)$  এর মান অসীম হতে পারে না,  $D = 0$ , এবং

$$\psi_2(x) = Ce^{-\gamma x}$$
 ... .. 11.25

11.21(a) ও 11.25 সমীকরণ দুটিতে  $\psi_1(x)$  ও  $\psi_2(x)$  এর যে রাশিমালা পাওয়া গেল সেগুলির ওপর আমরা 11.22(a) ও (b) সীমাকর্তগুলি আরোপ করতে পারি। অতএব,

$$A + B = C$$

$$i\alpha(A - B) = -\gamma C, \text{ বা, } A - B = i\frac{\gamma}{\alpha}C$$

সমাধান করে,  $A = \frac{C}{2}\left(1 + i\frac{\gamma}{\alpha}\right), B = \frac{C}{2}\left(1 - i\frac{\gamma}{\alpha}\right)$

সুতরাং  $\frac{B}{A} = \frac{\alpha - i\gamma}{\alpha + i\gamma}$  এবং  $\frac{C}{A} = \frac{2\alpha}{\alpha + i\gamma}$

এখন আমরা আগের মত কণাস্রোতের সংস্কারণ গুণক  $T$  ও প্রতিফলন গুণক  $R$  বার করতে পারি।

$$\text{কণাস্রোতের প্রতিফলন গুণক} = \frac{BB^*V_1}{AA^*V_1}$$

বা,  $R = \left(\frac{B}{A}\right)\left(\frac{B}{A}\right)^* = \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha^2 + \gamma^2} = 1$

যেহেতু  $R + T = 1, T = 0$

আপনি যদি  $\frac{C}{A}$  রাশির সাহায্যে  $T = \frac{CC^*V_2}{AA^*V_1}$

রাশির মান বার করেন তবে আপনি একটি কাল্পনিক মান পাবেন। এর অর্থ, আপতিত তরঙ্গের কিছু অংশ বিভব সোপানের মধ্যে প্রবেশ করলেও সেটি নিয়তই শোষিত এবং প্রথম মাধ্যমের দিকে প্রতিফলিত হয়। এর ফলেই প্রতিফলন গুণাঙ্কের মান 1 হয় অর্থাৎ আপতিত তরঙ্গটি সম্পূর্ণরূপে প্রতিফলিত হয়।

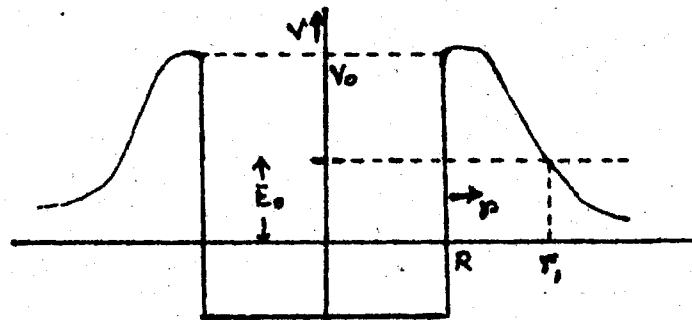
## অনুশীলনী —2

$E < V_0$  ধরে নিয়ে বিভব সোপানে আপতিত তরঙ্গের সঞ্চারণ গুণাঙ্কের রাশিমালাটি নির্ণয় করুন।

### 11.5 তেজস্ক্রিয় পরমাণুর নিউক্লিয়াস থেকে আলফা কণার নির্গমন

আপনি ইতিপূর্বে লক্ষ্য করেছেন যে সনাতন বলবিদ্যার হিসাবে কোন বস্তুকণা তার মোট যান্ত্রিক শক্তির চেয়ে অধিক উচ্চতার বিভব প্রাচীর পার হতে না পারলেও কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সিদ্ধান্ত অনুসারে তা অসম্ভব নয়। কণাটি যেন বিভবপ্রাচীরের মধ্যকার সুড়ঙ্গ দিয়ে নির্গত হয়, এই কল্পনা থেকে কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় এই প্রক্রিয়াকে সুড়ঙ্গ-প্রক্রিয়া (tunnel effect) বলা হয়।

কোন ভারী তেজস্ক্রিয় পরমাণুর নিউক্লিয়াস থেকে আলফা কণার নির্গমন সুড়ঙ্গ-প্রক্রিয়ায় হয়ে থাকে। আলফাকণা নির্গমনের ভাষে ধরা হয় যে নিউক্লিয়াসের মধ্যে দুটি প্রোটন ও দুটি নিউট্রন দিয়ে গঠিত আলফা কণার নিজস্ব একটি সন্ধা থাকে। নিউক্লিয়াসের বাকি অংশের কুলম্ব বিকর্ষণ থাকা সত্ত্বেও অত্যন্ত শক্তিশালী স্বল্পপাল্লার নিউক্লিয় বলের প্রভাবে আলফা কণাটি নিউক্লিয়াসের মধ্যে আবদ্ধ থাকে। এই আকর্ষণী নিউক্লিয় বলের প্রভাবে আলফা কণাটি একটি খাড়া দেওয়ালের বিভব গহ্বরের মধ্যে থাকে (চিত্র 11.3)। এই গহ্বরের ব্যাসার্ধকেই নিউক্লিয়াসের কার্যকরী ব্যাসার্ধ বলা যায়। গহ্বরের বাইরে নিউক্লিয়াসের পজিটিভ আধানের ফলে উৎপন্ন কুলম্ব বিভব ক্রিয়া করে যার মান নিউক্লিয়াসের কেন্দ্র থেকে দূরত্বের ব্যস্তানুপাতী।



চিত্র 11.3 আলোকের ব্যবর্তন ও ব্যতিচার

নিউক্লিয়াসের পারমাণবিক সংখ্যা যদি  $z$  হয় তবে  $\alpha$ -কণা ব্যতীত নিউক্লিয়াসের বাকি অংশের আধান  $(z - 2)e$ , কেননা  $\alpha$ -কণার আধান  $2e$ । সুতরাং নিউক্লিয়াসের কেন্দ্র থেকে  $r$  দূরত্বে বিভব গহ্বরের বাইরে  $\alpha$ -কণার স্থিতিশক্তি

$$V(r) = \frac{(z-2)e}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot 2e = \frac{2(z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$r$  এর মান যত কমতে থাকে,  $V(r)$  এর মান বর্ধিত হয়, যতক্ষণ না  $r$  এর মান নিউক্লিয়াসের ব্যাসার্ধের সমান হয়। নিউক্লিয়াসের ভরসংখ্যা  $A$  হলে সেটির ব্যাসার্ধ

$$R = R_0 A^{1/3}$$

যেখানে  $R_0 = 1.4 \times 10^{-15} m$ । এবার একটি পরিচিত নিউক্লিয়াসের কথা বিবেচনা করা যাক।  $Ra^{226}$  নিউক্লিয়াসটির ব্যাসার্ধ  $R = 1.4 \times 10^{-15} \times 226^{1/3} = 8.5 \times 10^{-15} m$  নিউক্লিয়াসটির কেন্দ্র থেকে  $R$  দূরত্বে কুলম্ব বিভবের মান

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{2(88-2)}{8.5 \times 10^{-15}} \cdot 9 \times 10^9 \cdot (1.6 \times 10^{-19})^2 \left( \because \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 N \cdot m^2 \cdot coul^{-2} \right) \\ &= 4.66 \times 10^{-12} J \\ &\cong 29 \text{ Mev} \quad (1 \text{ Mev} = 1.6 \times 10^{-13} J) \end{aligned}$$

কিন্তু এই রেডিয়াম পরমাণু থেকে যে আলফা কণা নির্গত হয় তার সর্বোচ্চ শক্তি  $E = 4.78 \text{ Mev}$ । সহজেই বোঝা যায় যে  $4.78 \text{ Mev}$  শক্তির আলফা কণার  $29 \text{ Mev}$  উচ্চতার বিভব প্রাচীর উল্লঙ্ঘনকে সনাতন বলবিদ্যার সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায় না।

কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় এই ঘটনাকে সুড়ঙ্গ-প্রক্রিয়া হিসাবে ব্যাখ্যা করা যায়। ধরা যাক নিউক্লিয়াসের কেন্দ্র থেকে  $r_1$  দূরত্বে কুলম্ব-বিভবের মান নির্গত আলফা কণার শক্তি  $E_0$  এর সমান। অর্থাৎ

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{2(z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} \\ \therefore r_1 &= \frac{2(z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 E_0} = \frac{2z'e^2}{4\pi\epsilon_0 E_0} \quad (z' = z - 2). \end{aligned}$$

$r = R$  থেকে  $r = r_1$  পর্যন্ত যে বিভব প্রাচীর আলফা কণাটিকে নির্গত হতে বাধা দেয়, তার গড় উচ্চতা

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \frac{1}{r_1 - R} \int_R^{r_1} \frac{2z'e^2}{4\pi\epsilon_0 r} dr \\ &= \frac{2z'e^2}{4\pi\epsilon_0 (r_1 - R)} \ln \frac{r_1}{R} \end{aligned}$$

বিভব প্রাচীরের বেধ  $a = r_1 - R = (52 - 8.5) \times 10^{-15} = 43.5 \times 10^{-15} m$

$$E_0 = 4.78 \text{ Mev} \text{ হলে } r_1 \text{ এর মান}$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{2 \cdot (88 - 2) \cdot 9 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{4.78 \times 1.6 \times 10^{-13}} \\
&= 52 \times 10^{-15} \text{ m.} \\
\therefore \langle V \rangle &= \frac{2 \times 86 \cdot (1.6 \times 10^{-19})^2 \times 9 \times 10^9}{(52 - 8.5) \times 10^{-15}} \ln \frac{52}{8.5} \\
&= 1.65 \times 10^{-12} \text{ J} \\
&= 10.3 \text{ Mev}
\end{aligned}$$

আলফা কণাটির বিভব প্রাচীর অতিক্রম করে সঞ্চারিত হওয়ার সম্ভাব্যতা সম্বন্ধে মোটামুটি একটি ধারণা পাওয়ার জন্য ধরা যাক বিভব-প্রাচীরটি আয়তাকার, যার বেধ  $a$  এবং উচ্চতা  $\langle V \rangle$ ।

11.6 সমীকরণে ব্যবহৃত  $\alpha^2$  রাশির মান

$$\alpha^2 = \frac{2M}{\hbar^2} (V_0 - E)$$

(এখানে  $M =$  আলফা কণার ভর  $= 6.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ )

$$= \frac{2 \times 6.66 \times 10^{-27}}{(1.055 \times 10^{-34})^2} (10.3 - 4.78) \times 1.6 \times 10^{-13}$$

$$= 1.06 \times 10^{30}$$

$$\therefore \alpha = 1.03 \times 10^{15} \text{ m}^{-1}$$

$$\alpha a = 1.03 \times 10^{15} \times 4.35 \times 10^{-15}$$

$$\cong 45$$

এখন সঞ্চারণের সম্ভাব্যতা  $T$  হলে, যেহেতু  $\alpha a \gg 1$ ,

$$\begin{aligned}
T &= \frac{16E}{V_0} \left( 1 - \frac{E}{V_0} \right) e^{-2\alpha a} \\
&= \frac{16 \times 4.78}{10.3} \left( 1 - \frac{4.78}{10.3} \right) e^{-2 \times 45} \\
&\approx 3.3 \times 10^{-39}
\end{aligned}$$

সঞ্চারণ-সম্ভাব্যতা  $T$  এর অতিক্রম মান থেকে বুঝতে পারছেন যে আলফা কণা রেডিয়াম-226 এর নিউক্লিয়াস থেকে সুড়ঙ্গ প্রক্রিয়ায় নির্গত হতে পারলেও তার জন্য বহুসংখ্যক প্রচেষ্টার প্রয়োজন হবে, অর্থাৎ নিউক্লিয়াসের আলফা কণার অর্ধায়ু অত্যন্ত দীর্ঘ হবে। পরীক্ষা দ্বারা রেডিয়াম-226 এর অর্ধায়ু 1602 বৎসর হতে দেখা যায়।

এবার ওপরের অনুচ্ছেদে যা পড়লেন তার ওপর একটি অনুশীলনীর জবাব দিন।

### অনুশীলনী — 3

নীচের উক্তিগুলির প্রত্যেকটির সঙ্গে যে বাক্যাংশগুলি দেওয়া আছে তার মধ্যে কোনটি সঠিক তা নির্ণয় করুন।

- (i) বিভবগহুরের মধ্যে আলফা কণার গতিশক্তি (ক) বাস্তব (খ) অবাস্তব (গ) শূন্য।
- (ii) আলফা কণাকে যে বিভব প্রাচীর অতিক্রম করতে হয় তার উৎপত্তির কারণ (ক) কেবলমাত্র নিউক্লিয় বল (খ) কেবলমাত্র কুলম্ব বিকর্ষণ (গ) নিউক্লিয় বল ও কুলম্ব বিকর্ষণ।
- (iii) পরমাণুর আলফা-ক্ষয় প্রমাণ করে যে নিউক্লিয়াসের মধ্যে আলফা কণার গতি ব্যাখ্যা করতে (ক) সনাতন বলবিদ্যা সম্পূর্ণ সক্ষম (খ) কোয়ান্টাম বলবিদ্যা সম্পূর্ণ সক্ষম (গ) সনাতন বা কোয়ান্টাম বলবিদ্যা, কোনটিই যথেষ্ট নয়।

---

## 11.6 সারাংশ

---

একমাত্রিক গতিসম্পন্ন মুক্ত বস্তুকণার ক্ষেত্রে শ্রোডিংগারের তরঙ্গ সমীকরণের প্রয়োগই এই এককের মুখ্য উদ্দেশ্য। সম্পূর্ণ সমবিভব ক্ষেত্র ছাড়াও এখানে যে অবস্থাগুলির সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে সেগুলি হল আয়তাকার বিভব-প্রাচীর, বিভব সোপান এবং নিউক্লিয়াসের অভ্যন্তরের নিউক্লিয় বল ও বাইরের কুলম্ব বিকর্ষণের সমাহারে সৃষ্ট বিভব-প্রাচীর। আয়তাকার বিভব প্রাচীর ও বিভব সোপানের ক্ষেত্রে আপতিত বস্তুকণার সঞ্চারণ ও প্রতিফলনের সম্ভাব্যতা নির্ণয় করা হয়েছে। নিউক্লিয়াসের বেটনকারী বিভব প্রাচীরের মধ্য দিয়ে আলফাকণার সঞ্চারণের মাধ্যমে সুড়ঙ্গ-প্রক্রিয়ার ব্যাখ্যা করা হয়েছে, যা কেবলমাত্র কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সাহায্যেই করা সম্ভব।

এই এককের সাহায্যে আপনি তরঙ্গ-অপেক্ষকের ক্ষেত্রে সীমাশর্তের প্রয়োগ, কণাশোভের প্রবাহমাত্রা নির্ণয় এবং সঞ্চারণ বা প্রতিফলনের সম্ভাব্যতা নির্ণয়ের পদ্ধতির প্রত্যক্ষ পরিচয় পেয়েছেন।

---

## 11.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

---

(i)  $x$ -অক্ষ বরাবর গতিশীল একটি বস্তুকণার জন্য শ্রোডিংগারের সময়-নিরপেক্ষ সমীকরণটি লিখুন ও তার এমন একটি সমাধান নির্ণয় করুন যেটি  $x$ -অক্ষ অভিমুখী তরঙ্গ নির্দেশ করে। এই তরঙ্গ অপেক্ষকটির প্রমাণীকরণ সম্ভব কি না তা আলোচনা করুন।

(ii)  $E$  শক্তি ও  $m$  ভরের একটি বস্তুকণা  $V_0$  উচ্চতা ও  $a$  বেধের একটি আয়তাকার বিভব-প্রাচীরের ওপর আপতিত হল। বস্তুকণাটির বিভব প্রাচীর থেকে প্রতিফলিত হওয়ার ও প্রাচীর অতিক্রম করে সঞ্চারিত হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন, যখন (ক)  $E > V_0$  এবং (খ)  $E < V_0$ ।

(iii)  $x$ -অক্ষ বরাবর  $E$  শক্তি নিয়ে চলনশীল একটি কণা  $V_0$  বিভবের একটি অঞ্চলের ওপর আপতিত হল, যেটি  $x = 0$  থেকে  $x = \infty$  পর্যন্ত বিস্তৃত।  $E > V_0$  ধরে নিয়ে কণাটির প্রতিফলিত হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন। দেখান যে  $E < V_0$  হলে কণাটি সম্পূর্ণরূপেই বিভবসোপান দ্বারা প্রতিফলিত হবে।

(iv) ভারী নিউক্লিয়াসের মধ্যে যে বিভব গহ্বরের মধ্যে আলফা কণা আবদ্ধ থাকে সেটি কীভাবে সৃষ্ট হয়? সুড়ঙ্গ-প্রক্রিয়া কী এবং এই প্রক্রিয়ায় কীভাবে আলফা কণার নির্গমন ঘটে তা ব্যাখ্যা করুন।

(v) ধরা যাক 5 Mev শক্তির একটি প্রোটন 6 Mev উচ্চতা ও  $10^{-14} m$  বেধের একটি আয়তাকার বিভব প্রাচীরে আপতিত হল। প্রোটনের ভর  $1.67 \times 10^{-27} kg$ ,  $\hbar = 1.055 \times 10^{-34} J.s$  ধরে নিয়ে  $\alpha \left( = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} \right)$ ,  $\alpha a$  এবং সঞ্চারণ গুণক  $T$  এর মান নির্ণয় করুন।

(vi) আগের প্রশ্নে প্রোটনের শক্তি 6 Mev এবং বিভব প্রাচীরের উচ্চতা 5 Mev হলে সঞ্চারণ গুণকের মান কত হত?

(vii) একটি  $E$  শক্তির ইলেকট্রন  $V_0$  উচ্চতার বিভবসোপানে আপতিত হওয়ায় ইলেকট্রনের সঞ্চারণ ও প্রতিফলনের সম্ভাব্যতা সমান হল।  $E$  ও  $V_0$  এর সম্পর্ক নির্ণয় করুন।

## 11.8 উত্তরমালা

### অনুশীলনী

1. এক্ষেত্রে ইলেকট্রনের শক্তি বিভব প্রাচীরের উচ্চতার তুলনায় অল্প অধিক। 11.16(a) সূত্রে ব্যবহৃত

$$\begin{aligned} \beta a &= \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_0)} \times a \\ &= \frac{0.5 \times 10^{-10}}{1.0546 \times 10^{-34}} \sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times (1.1 - 1.0) \times 1.6 \times 10^{-19}} \\ &= 0.081 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \beta a \ll 1 \text{ এবং আমরা 11.17(b) সূত্র ব্যবহার করতে পারি। ঐ সূত্র অনুযায়ী, } \frac{1}{R} &= 1 + \frac{zE\hbar}{mV_0^2 a^2} \\ &= 1 + \frac{2 \times 1.1 \times 1.6 \times 10^{-19} \times (1.0546 \times 10^{-34})^2}{9.1 \times 10^{-31} \times (1.0 \times 1.6 \times 10^{-19})^2 \times (0.5 \times 10^{-10})^2} = 68.2 \end{aligned}$$

$$\therefore R = .0147$$

$$2. T = \frac{CC^* V_2}{AA^* V_1} = \left( \frac{C}{A} \right) \left( \frac{C}{A} \right)^* \sqrt{\frac{E - V_0}{E}}$$

$$\frac{C}{A} = \frac{2}{1 + i \frac{\gamma}{\alpha}} \left( \frac{C}{A} \right)^* = \frac{2}{1 - i \frac{\gamma}{\alpha}} \frac{\gamma}{\alpha} = \sqrt{\frac{V_0 - E}{E}}$$

$$\therefore T = \frac{4}{1 + \frac{V_0^2}{\alpha^2}} \sqrt{\frac{E - V_0}{E}} = \frac{4i}{1 + \frac{V_0 - E}{E}} \sqrt{\frac{V_0 - E}{E}} = i \frac{4}{V_0} \sqrt{E(V_0 - E)}$$

স্পষ্টতই,  $T$  একটি কাল্পনিক রাশি।

3. (i) (ক), (ii) (গ), (iii) (খ)

সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(i) 11.2 অনুচ্ছেদে প্রশ্নটির উত্তর দেওয়া আছে।

(ii) 11.3 অনুচ্ছেদে উত্তরটি পাওয়া যাবে।

(iii) 11.4 অনুচ্ছেদে প্রশ্নটির উত্তর পাবেন।

(iv) 11.5 অনুচ্ছেদে প্রশ্নটির উত্তর পাবেন।

(v) এখানে  $m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $V_0 = 6 \text{ Mev}$ ,  $E = 5 \text{ Mev}$

$$\therefore \alpha = \frac{[2 \times 1.67 \times 10^{-27} (6 - 5) \times 1.6 \times 10^{-13}]^{1/2}}{1.055 \times 10^{-34}}$$

$$= 2.19 \times 10^{14}$$

$$\alpha a = 2.19 \times 10^{14} \times 10^{-14} = 2.19$$

$$\therefore \frac{1}{T} = 1 + \frac{6^2}{4 \times 5(6 - 5)} \sin^2 h^2(2.19)$$

$$\cong 36.$$

$$\therefore T = 0.028$$

(vi) এক্ষেত্রে  $V_0 = 5 \text{ Mev}$ ,  $E = 6 \text{ Mev}$ । পূর্বের মত,

$$\beta a = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \cdot a$$

$$= \frac{[2 \times 1.67 \times 10^{-27} \times (6 - 5) \times 1.6 \times 10^{-13}]^{1/2}}{1.055 \times 10^{-34}} \times 10^{-14} = 2.19$$

$$\therefore \frac{1}{T} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(E - V_0)} \sin^2 \beta a = 1 + \frac{5^2}{4 \times 6 \times (6 - 5)} \sin^2 (2.19) = 1.69$$

$$\therefore T = 0.59$$

(vii) সঞ্চারণ ও প্রতিফলনের সম্ভাব্যতা সমান হওয়ার অর্থ কণার শক্তি,  $E$ , বিভব-সোপানের উচ্চতা  $V_0$  অপেক্ষা বেশী, কেননা  $E < V_0$  হলে প্রতিফলন গুণক 1 এবং সঞ্চারণ গুণক শূন্য হয়।

যখন  $E > V_0$ ,  $T = R$ , অর্থাৎ  $\frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^2$

$$\therefore (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$$

$$\therefore \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 6\frac{\alpha}{\beta} + 1 = 0$$

বা,  $\frac{\alpha}{\beta} = 3 + 2\sqrt{2}$ , অর্থাৎ  $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{E}{E - V_0} = (3 + 2\sqrt{2})^2 = 34$ .

$$\therefore E = \frac{34}{33} V_0 = 1.03V_0$$

বোঝা যাচ্ছে এক্ষেত্রে কণার শক্তি বিভব সোপানের উচ্চতার তুলনায় সামান্যই বেশী।



---

## একক 12 □ শ্রোডিংগার সমীকরণের প্রয়োগ—আবদ্ধ অবস্থা

---

গঠন :

- 12.1 প্রস্তাবনা
  - উদ্দেশ্য
- 12.2 অত্যন্ত দেওয়াল যুক্ত একমাত্রিক অসীম বিভবের কূপে (বিভব বাজে) অবস্থিত কণা
- 12.3 ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিভব বাজে অবস্থিত কণা
- 12.4 একমাত্রিক আয়তাকার সসীম বিভবকূপে অবস্থিত কণা
- 12.5 রৈখিক সরল দোলক
- 12.6 সারাংশ
- 12.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি
- 12.8 উত্তরমালা

---

### 12.1 প্রস্তাবনা

---

আমরা দেখেছি যে সনাতন বলবিজ্ঞানের সূত্রগুলির সাহায্যে অণু অথবা পরমাণুর কোয়ান্টায়িত গতির কোন ব্যাখ্যা দেওয়া সম্ভব নয়। পুরনো কোয়ান্টাম তত্ত্বও এই ব্যাখ্যা দানে অপারগ। বৈজ্ঞানিক হাইসেন বার্গের তত্ত্ব অনুসারে এই ব্যর্থতার কারণ—পুরনো কোয়ান্টাম বলবিজ্ঞান সনাতন বলবিজ্ঞানের ধারণার ওপর গড়ে উঠেছে যেগুলি কোয়ান্টায়িত গতির ক্ষেত্রে অর্থহীন।

অতএব এমন একটি বলবিজ্ঞানের প্রয়োজন যেটি পর্যবেক্ষণযোগ্য রাশিগুলির ওপর ভিত্তি করে তৈরী হবে। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে—পরীক্ষার দ্বারা কোন অণুর গঠন জানতে আমরা ইলেকট্রনের অবস্থান অথবা গতি নির্ণয়ের চেষ্টা না করে বর্ণালী রেখার তরঙ্গ দৈর্ঘ্য মেপে অণুর বিভিন্ন অবস্থার শক্তি তা বর্ণালী রেখার তীব্রতা ইত্যাদি নির্ণয় করে থাকি।

এই তথ্যের ওপর ভিত্তি করে হাইসেনবার্গ (1925) ম্যাট্রিক্স (Matrix) বলবিজ্ঞানের প্রতিষ্ঠা করেন।

1926 সালে শ্রোডিংগার স্বাধীনভাবে ডি ব্রগলির (de Broglie) তরঙ্গ-কণা দ্বিচারিতা প্রকল্পের (wave-particle duality hypothesis) সাহায্য নিয়ে তরঙ্গ বলবিজ্ঞান প্রতিষ্ঠা করেন। ডি ব্রগলি যে ধারণার দ্বারা কণার গতি সম্বন্ধীয় চল রাশির (যেমন—ভরবেগ) সঙ্গে তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য সূচক ধর্মের (যেমন—তরঙ্গ দৈর্ঘ্য) সম্বন্ধ স্থাপন করেছিলেন সেই ধারণাকেই আর একটু বিস্তৃত করে শ্রোডিংগার সাধারণভাবে কোন কোয়ান্টাম তত্ত্বের গতির

বর্ণনা দেওয়ার জন্য একটি তরঙ্গ সমীকরণের উদ্ভব করেন। শ্রোডিংগারের সমীকরণ সম্বন্ধে আপনারা এতদিনে পড়ে ফেলেছেন এবং সেই সমীকরণের কিছু প্রয়োগ সম্বন্ধেও জেনেছেন।

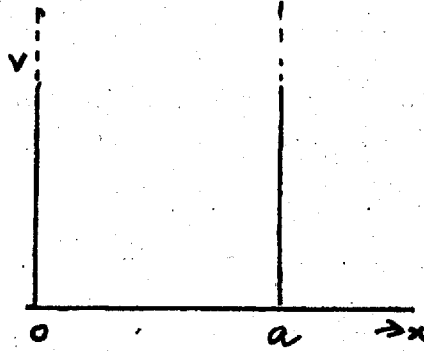
এই এককে আমরা কণার একটি বিশেষ গতীয় অবস্থায় শ্রোডিংগারের সমীকরণের প্রয়োগের কথা পড়ব। এই অবস্থাটিকে বলা হয় আবদ্ধ অবস্থা। যে কয়েকটি প্রয়োগের কথা জানব সেগুলি হল—

- (i) অভেদ্য দেওয়াল যুক্ত একমাত্রিক ও ত্রিমাত্রিক অসীম বিভব যুক্ত কুপে (বিভব বাস্তবে) অবস্থিত কণা।
- (ii) একমাত্রিক আয়তাকার সসীম বিভবের কুপে অবস্থিত কণা এবং (iii) রৈখিক সরল দোলক।

### উদ্দেশ্য :

- এই অংশটি পড়লে আপনারা বিভব দ্বারা আবদ্ধ অবস্থায় একটি কণার বিভিন্ন শক্তিস্তরের অবস্থান এবং সংলগ্ন তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি নির্ণয় করতে পারবেন।
- এই বিভবের মাত্রা বিভিন্ন হতে পারে, এখানে আপনারা অসীম বিভব কুপ এবং সসীম বিভব কুপে আবদ্ধ কণার বিষয়ে জানবেন।
- সবশেষে সরল দোলকের বিভিন্ন শক্তিস্তরের কথা পড়ে শূন্যাক্ষ শক্তি কাকে বলে জানবেন।

## 12.2 অভেদ্য দেওয়াল যুক্ত একমাত্রিক অসীম বিভবের কুপে অবস্থিত কণা



চিত্র 12.1

মনে করি  $x$ -অক্ষ বরাবর  $O$  থেকে  $a$  দূরত্বের মধ্যে একটি কণা রয়েছে। কণাটির শক্তির মান  $E$ ।  $x = 0$  এবং  $x = a$  বিন্দুতে দুটি অভেদ্য এবং অসীম উচ্চতার দৃঢ় বিভব দেওয়াল আছে। এই দুটি বিন্দুর মধ্যকার অঞ্চলে কণার স্থিতিশক্তির মান শূন্য। গাণিতিক ভাবে  $x = 0$  এবং  $x = a$  বিন্দুতে  $V = \infty$  এবং  $0 < x < a$  অঞ্চলে  $V = 0$ । কণাটির দেওয়ালে ধাক্কা খাওয়ার সময় দৃঢ় দেওয়াল হওয়ায় কণার কোন শক্তিক্ষয় হয় না। অর্থাৎ কণার মোট

শক্তি  $E$ -এর মান স্থির থাকে। কণাটিকে এই স্থান ত্যাগ করতে যে কার্যের প্রয়োজন তার মান অসীম। বাস্তবে সেটি সম্ভব নয়। সুতরাং  $x = 0$  এবং  $x = a$ -তে কণাটির অবস্থানের সম্ভাবনা শূন্য। তরঙ্গ বিস্তারের মাপাক্ষের (modulus squared of the wave amplitude) বর্গের সাহায্যে সম্ভাব্যতা (probability) মাপা হয়।

কাজেই আমরা বলতে পারি যে তরঙ্গ অপেক্ষক  $\psi(x)$  এর মান এই দুই বিন্দুতে শূন্য অর্থাৎ

$$\psi(0) = \psi(a) = 0$$

এই শর্তগুলি সীমাস্থ শর্ত (boundary condition)।

তরঙ্গ অপেক্ষক সর্বত্র একক মান বিশিষ্ট হওয়ার জন্য বাস্তবের বহিঃস্থ সববিন্দুতে অর্থাৎ  $x \leq 0$  এবং  $x \geq a$  অঞ্চলে  $\psi = 0$  হবে।

কণার তরঙ্গ সমীকরণ ও তার সমাধান : কণাটির স্থিতিশক্তি সময়ের ওপর নির্ভরশীল নয়। অতএব বাস্তবের মধ্যে  $0 < x < a$  অঞ্চলে (যেখানে স্থিতিশক্তি  $V(x) = 0$ ) শ্রোডিংগারের সময় নিরপেক্ষ সমীকরণের রূপ হবে

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x)$$

$$\text{অথবা } \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0 \quad \dots \dots (12.1)$$

$$\text{অথবা } \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2 \psi(x) = 0 \quad \dots \dots (12.2)$$

$$\text{যেখানে } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \dots \dots (12.3)$$

(12.2) নং সমীকরণের সাধারণ সমাধানের রূপ

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad \dots \dots (12.4)$$

এখানে  $A$  এবং  $B$  দুটি সমাকলন অচর (integration constant)। এদের নির্ণয় করার জন্য আমাদের সীমাস্থ শর্তগুলি ব্যবহার করতে হবে। শর্তদুটি হল—

$$(i) \quad x = 0 \text{ বিন্দুতে } \psi(x) = 0$$

$$\text{এবং } (ii) \quad x = a \text{ বিন্দুতে } \psi(x) = 0$$

প্রথম শর্ত থেকে আমরা পাই  $B = 0$

এই মান (12.4) সমীকরণে বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\psi(x) = A \sin kx \quad \dots \dots (12.5)$$

এখন দ্বিতীয় শর্ত ব্যবহার করলে

$$\psi(a) = A \sin ka = 0$$

$A = 0$  নেওয়া যায় না। কেননা তাহলে সমাধানের মান শূন্য হয়ে যায়।

অতএব  $\sin ka = 0$  হবে

অর্থাৎ  $\sin ka = \sin n\pi$

অথবা  $k = \frac{n\pi}{a}$  [যেখানে  $n = 1, 2, 3 \dots$ ] ... (12.6)

$n = 0$  মানটি গ্রহণযোগ্য নয় কেননা  $n = 0$  হলে  $k = 0$  হবে এবং সেক্ষেত্রে বাক্সের মধ্যে সর্বত্র  $\psi = 0$  হবে যেটি সম্ভব নয়। অতএব  $0 < x < a$  অঞ্চলের জন্য তরঙ্গ অপেক্ষকগুলির রূপ হবে

$$\psi_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \quad \dots \dots (12.7)$$

$$ka = n\pi$$

$$\text{বা, } \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} a = n\pi \text{ হতে } E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad \dots \dots (12.7(a))$$

দুইপ্রান্তে আবদ্ধ আন্দোলিত ভারের সমস্যার সমাধানের ন্যায় ওপরের আইগেন মানগুলি একটি স্বতন্ত্র সেট (discrete set) তৈরী করে।

এই সমীকরণটি শক্তির আইগেনমান নির্দেশ করে। এই মানগুলিকে কণাটির শক্তির বিভিন্ন স্তর (Energy levels) বলে অভিহিত করা হয়।

(i) (12.7a) সমীকরণে  $n = 1$  বসিয়ে কণার সর্বাপেক্ষা কম শক্তির মান পাওয়া যায় এবং সেটি হল

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad \dots \dots (12.8)$$

এটিকে বলা হয় ভৌম অবস্থায় শক্তিস্তরের মান (ground state energy level)

$E_1$  এর সাপেক্ষে  $E_n$  এর মান লেখা যায়

$$E_n = nE_1^2 \quad \dots \dots (12.9)$$

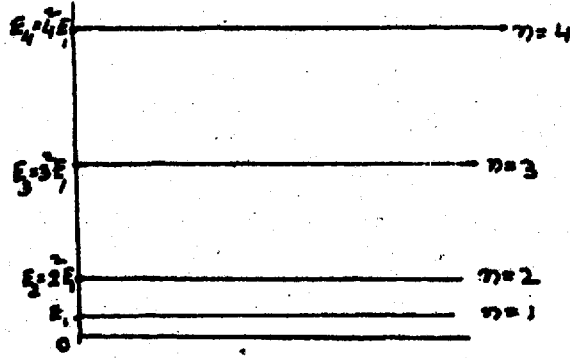
(ii) বিভব বাক্সে অবস্থিত কণাটির সম্ভাব্য শক্তিগুলির মান (12.7a) সমীকরণে  $n = 1, 2, 3$  বসিয়ে পাওয়া যাবে। লক্ষণীয় যে এই মানগুলি পরস্পর থেকে বিচ্ছিন্ন (discrete)

(iii) (12.7a) সমীকরণ অনুসারে  $n$  তম এবং  $(n + 1)$  তম শক্তিস্তরের মধ্যের দূরত্ব নীচের সম্পর্ক অনুযায়ী বৃদ্ধি পায়

$$(n + 1)^2 E_1 - n^2 E_1 = (2n + 1)E_1 = (2n + 1) \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad \dots \dots (12.10)$$

$n$  সংখ্যাটিকে শক্তিস্তর  $E_n$  এর কোয়ান্টাম সংখ্যা বলা হয়। (12.10) সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে যে  $a$ -র মান বৃদ্ধি পেলে শক্তিস্তরগুলির মধ্যের পার্থক্য হ্রাস পাবে এবং  $a \rightarrow \infty$  সীমায়  $\Delta E \rightarrow 0$ । সেক্ষেত্রে স্তরগুলি পরস্পর মিশে একটি অবিচ্ছিন্নতা সৃষ্টি করে এবং কণাটিকে মুক্ত বলা যায়।

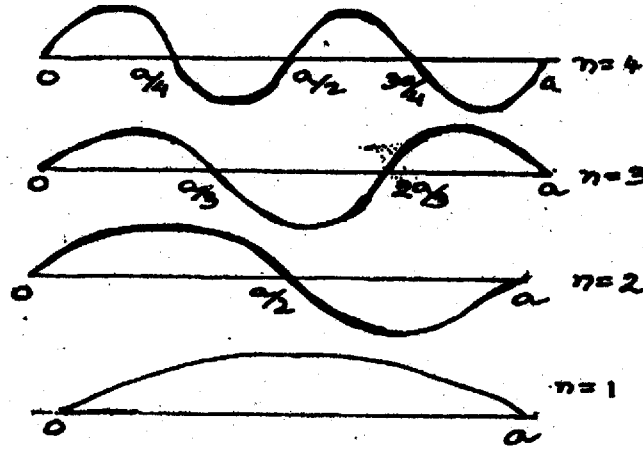
কণার বিভিন্ন স্তরগুলিকে (12.2) চিত্রে দেখানো হল।



চিত্র 12.2

$n$  এর বিভিন্ন মানের জন্য আইগেন অপেক্ষক  $\psi_n$  এর মানগুলির একটি তালিকা নীচে দেওয়া হল এবং সেই মান অনুসারে  $\psi_n$  এর রূপ (12.3) চিত্রে দেখানো হয়েছে।

$n$	$\psi_n(x)$	$\psi_n(x) = 0$ হওয়ার জন্য $x$ এর মান	$x = 0$ এবং $x = a$ বিন্দুর মধ্যে নিম্পদ বিন্দুর সংখ্যা
1	$A_1 \sin \frac{\pi x}{a}$	$0, a$	0
2	$A_2 \sin \frac{2\pi x}{a}$	$0, a/2, a$	1
3	$A_3 \sin \frac{3\pi x}{a}$	$0, a/3, 2a/3, a$	2
...	...	...	...
$n$	$A_n \sin \frac{n\pi x}{a}$	$0, a/n, 2a/n, \dots, a$	$n - 1$



চিত্র 12.3

আইগেন অপেক্ষক  $\psi_n(x)$  গুলিকে প্রমাণিকৃত (normalisation) সহজেই করা যায়।

আমরা জানি যে  $0 < x < a$  অঞ্চলে কণার গতির তরঙ্গ অপেক্ষকগুলির রূপ

$$\psi_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{a}$$

এবং  $x < 0$ , ও  $x > a$  অঞ্চলে এই রূপ

$$\psi_n(x) = 0$$

সুতরাং বাস্তবের মধ্যে যে কোন স্থানে কণার অবস্থানের মোট সম্ভাব্যতার মান একক। অর্থাৎ

$$\int_0^a |\psi_n(x)|^2 dx = 1 \quad \dots \dots (12.11)$$

$$\text{অথবা } \int_0^a |A_n|^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = 1$$

$$\therefore |A_n|^2 \int_0^a \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \frac{2n\pi x}{a} \right] dx = 1$$

$$\text{অথবা } |A_n|^2 \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin 2n\pi x / a}{2n\pi / a} \right]_0^a = 1$$

$$\text{অথবা } |A_n|^2 \frac{a}{2} = 1 \quad [ \because \text{অবকলিত দ্বিতীয় পদটির দুটি সীমাস্থ মানই শূন্য}]$$

$$\therefore A_n = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\text{এবং } \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad \dots \dots (12.12)$$

ধরা যাক,  $(0, a)$  অঞ্চলে কণাটির দুটি বিভিন্ন শক্তিস্তরের মান  $E_n$  এবং  $E_m$  এবং সেই স্তরগুলির তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি  $\psi_n(x)$  এবং  $\psi_m(x)$ । এই অপেক্ষকগুলির রূপ

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$\psi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

এখানে  $m$  ও  $n$  পূর্ণ সংখ্যা।

এই ক্ষেত্রে অপেক্ষকগুলি বাস্তব (real)

সুতরাং

$$\psi_n^*(x) = \psi_n(x)$$

$$\text{এবং } \psi_m^*(x) = \psi_m(x)$$

যখন  $m \neq n$  আমরা পাই

$$\begin{aligned} \int_0^a \psi_m^*(x) \psi_n(x) dx &= \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a \left[ \cos \frac{(m-n)\pi x}{a} - \cos \frac{(m+n)\pi x}{a} \right] dx \\ &= \frac{1}{a} \left[ \frac{a}{\pi(m-n)} \sin \frac{(m-n)\pi x}{a} - \frac{a}{\pi(m+n)} \sin \frac{(m+n)\pi x}{a} \right]_0^a \quad \dots \dots (12.13) \\ &= 0 \end{aligned}$$

অর্থাৎ  $(0, a)$  অঞ্চলে অপেক্ষকগুলি পরস্পর সমকোণীয় (orthogonal) তদুপরি এই অপেক্ষকগুলি পরিমিত। কোন একটি অঞ্চলে (interval) প্রমাণিকৃত এবং পরস্পর সমকোণীয় (normalised and mutually orthogonal) তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি সেই অঞ্চলে একটি সমকোণীয় সেট তৈরী করে। এই অঞ্চলের বাইরে তরঙ্গ অপেক্ষকগুলির মান শূন্য। কাজেই  $x$  এর সব মানের জন্য (অর্থাৎ  $x = -\alpha$  থেকে  $x = +\alpha$  পর্যন্ত) এই অপেক্ষকগুলি সমকোণীয় (orthonormal)।

$x$  অক্ষ বরাবর ভরবেগ  $p_n$  এর আইগেন মান

$$\begin{aligned} p_n^2 &= 2mE_n \\ &= 2m \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{a^2}$$

$$\text{অথবা } p_n = \frac{n\pi\hbar}{a}$$

$$\text{অথবা } p_n = \frac{nh}{2a} \quad \dots \dots (12.14)$$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে ভরবেগের আইগেন মানগুলি বিচ্ছিন্ন (discrete) এবং দুটি পরপর শক্তিস্তরের মধ্যের ভরবেগের পার্থক্যের মান  $\frac{h}{2a}$  (12.14 সমীকরণ দ্রষ্টব্য)  $x$  এবং  $x + dx$  এর মধ্যে একটি ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য কণার অবস্থানের সম্ভাব্যতা (Probability) :

কোয়ান্টাম বলবিজ্ঞান অনুসারে  $x$  অবস্থানে ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য  $dx$  এর মধ্যে একটি কণার থাকার সম্ভাব্যতা  $P(x)dx$  এর গাণিতিক রূপ

$$\begin{aligned} P(x)dx &= |\psi_n(x)|^2 dx \\ &= \frac{2}{a} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx \quad \dots \dots (12.15) \end{aligned}$$

সুতরাং একমাত্রিক গতির জন্য সম্ভাব্যতা ঘনত্ব (Probability density)

$$P(x) = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \quad \dots \dots (12.16)$$

সম্ভাব্যতা ঘনত্বের মান সবচেয়ে বেশী যখন

$$\frac{n\pi x}{a} = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$$

অর্থাৎ যখন

$$x = \frac{a}{2n}, \frac{3a}{2n}, \frac{5a}{2n} \quad \dots \dots (12.17)$$

$n = 1$  অবস্থায় কণাটির অবস্থানের সবচেয়ে বেশী সম্ভাব্য মান (most probable position)  $x = \frac{a}{2}$

$n = 2$  অবস্থায় এই মানগুলি  $x = \frac{a}{4}$  এবং  $x = \frac{3a}{4}$

$n = 3$  অবস্থায় এই মানগুলি  $x = \frac{a}{6}$ ,  $x = \frac{3a}{6}$  এবং  $x = \frac{5a}{6}$

12.3 চিত্র লক্ষ করলে ওপরের তথ্যগুলি বোঝা যাবে।

দেখতে পাওয়া যাচ্ছে যে কোয়ান্টাম বলবিজ্ঞান অনুসারে লব্ধ ফলের মান ক্লাসিক্যাল বলবিজ্ঞান অনুযায়ী লব্ধ মানের থেকে অনেক পৃথক।



ক্র্যাসিক্যাল বলবিজ্ঞান অনুযায়ী বিভব বাস্তব অবস্থিত কণাটি সমান বেগে এক দেওয়াল থেকে অন্য দেওয়ালে আঘাত পেয়ে পূর্ণ প্রতিফলিত হয়, সুতরাং বাস্তব অবস্থিত ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য  $dx$  এর মধ্যে কণাটিকে পাওয়ার সম্ভাব্যতা সর্বত্র সমান এবং এটির মান  $\frac{dx}{a}$  এবং সম্ভাব্যতা ঘনত্বের মান  $\frac{1}{a}$ ।

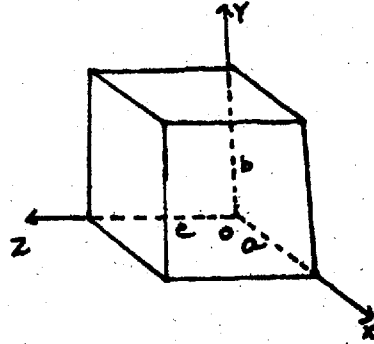
### অনুশীলনী—1

ওপরের সমস্যায় অভেদ্য বিভবের দেওয়াল দুটির অবস্থানের স্থানান্তর যদি  $(0, a)$ -র পরিবর্তে  $(-a/2, a/2)$  হয় তবে তরঙ্গ অপেক্ষকগুলির রূপ কি হবে?

### অনুশীলনী—2

12.2 বিভব কুপের  $x$  ও  $p_x$  এর প্রত্যাশিত মান নির্ণয় করুন।

## 12.3 ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিভব বাস্তব অবস্থিত কণা



চিত্র 12.4

একটি আয়তাকার বিভব বাস্তব কল্পনা করা হল। এই বাস্তবটির তিন বাহু  $a$ ,  $b$  এবং  $c$   $x$ ,  $y$  এবং  $z$  অক্ষের সমান্তরাল ভাবে অবস্থিত।

ধরা যাক,  $m$  ভরযুক্ত একটি কণা এই বাস্তবের মধ্যে গতিশীল।

মনে করি  $0 < x < a$

$0 < y < b$

$0 < z < c$

অঞ্চলে স্থিতিশক্তি  $V(x, y, z) = 0$

এবং বাহ্যের বাইরের অঞ্চলে  $V(x, y, z) = \alpha$

বাহ্যের ভিতর কণার জন্য শ্রোডিংগারের সময় নিরপেক্ষ ত্রিমাত্রিক সমীকরণের রূপ

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E \psi \quad \dots \dots (12.18)$$

$$\text{অথবা } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \quad \dots \dots (12.19)$$

মনে করি তরঙ্গ অপেক্ষক  $\psi(x, y, z)$  তিনটি স্বতন্ত্র অপেক্ষক  $X(x)$ ,  $Y(y)$  এবং  $Z(z)$  এর গুণফল। অতএব আমরা লিখতে পারি

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad \dots \dots (12.20)$$

(12.19) সমীকরণে ওপরের মান বসিয়ে

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + ZX \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} XYZ = 0 \quad \dots \dots (12.21)$$

$X$ ,  $Y$  এবং  $Z$  অপেক্ষকের প্রত্যেকে আলাদাভাবে একটিমাত্র চরের অপেক্ষক সেই কারণে আমরা আংশিক অবকলনের পরিবর্তে সাধারণ অবকলন ব্যবহার করা হয়েছে।

(12.21) সমীকরণকে  $XYZ$  দ্বারা ভাগ করে

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0 \quad \dots \dots (12.22)$$

গতিশক্তির একটি স্থির মানের জন্য ওপরের সমীকরণের  $\frac{2mE}{\hbar^2}$  পদটির মান স্থির থাকে। শক্তি  $E$ -কে তিনটি অঙ্ক বরাবর তিনটি উপাংশ  $E_x$ ,  $E_y$  এবং  $E_z$  এ বিভক্ত করা যায়

$$\text{অর্থাৎ } E = E_x + E_y + E_z \quad \dots \dots (12.23)$$

অতএব (12.22) এবং (12.23) থেকে আমরা পাই

$$\left( \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{2mE_x}{\hbar^2} \right) + \left( \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{2mE_y}{\hbar^2} \right) + \left( \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{2mE_z}{\hbar^2} \right) = 0$$

ওপরের সমীকরণটিকে তিনটি স্বতন্ত্র সমীকরণে ভাগ করা যায়

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{2mE_x}{\hbar^2} X = 0 \quad \dots \dots (12.24)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{2mE_y}{\hbar^2} Y = 0 \quad \dots \dots (12.25)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{2mE_z}{\hbar^2} Z = 0 \quad \dots \dots (12.26)$$

(12.24) সমীকরণটি আগে আলোচিত একমাত্রিক বাক্সের ক্ষেত্রের (12.1) সমীকরণের অনুরূপ।

এক্ষেত্রে সীমান্ত শর্তগুলি  $X(0) = X(a) = 0$

সুতরাং  $E_x$  এর আইগেন মানগুলি হবে

$$E_x = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n_x^2 \quad \dots \dots (12.27)$$

যেখানে  $n_x = 1, 2, 3 \dots \dots$

এবং প্রমাণিত আইগেন অপেক্ষকগুলির মান

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n_x \pi x}{a} \quad \dots \dots (12.28)$$

$Y$  এবং  $Z$  এর সাপেক্ষে অনুরূপভাবে আমরা পাই

$$E_y = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb^2} n_y^2$$

$$Y(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{n_y \pi y}{b} \quad \dots \dots (12.29)$$

এবং  $E_z = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mc^2} n_z^2$

$$Z(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin \frac{n_z \pi z}{c} \quad \dots \dots (12.30)$$

$E_x$ ,  $E_y$  এবং  $E_z$  এর মান (12.23)-তে বসিয়ে

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left[ \frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right] \quad \dots \dots (12.31)$$

এখানে  $n_x = 1, 2, 3 \dots \dots$

$n_y = 1, 2, 3 \dots \dots$

$n_z = 1, 2, 3 \dots \dots$

ওপরের সমীকরণ থেকে শক্তির আইগেন মানগুলি পাওয়া যায়। এগুলিকে কণার বিভিন্ন শক্তিস্তরের মান বলা হয়। (energy levels of the particle) অতএব স্থিরাবস্থায় (stationary state) বাক্সের মধ্যে প্রমাণিত সম্পূর্ণ তরঙ্গ অপেক্ষকের মান

$$\Psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$$

$$= \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{n_x \pi x}{a} \sin \frac{n_y \pi y}{b} \sin \frac{n_z \pi z}{c} \quad \dots \dots (12.32)$$

যেখানে  $n_x, n_y, n_z$  এর মান পূর্ণ সংখ্যা নির্দেশ করে। বাক্সের বাইরের অঞ্চলে তরঙ্গ অপেক্ষকের মান শূন্য। (12.31) এবং (12.32) সমীকরণ থেকে নীচের সিদ্ধান্তগুলিতে উপনীত হওয়া যায়।

(i) প্রত্যেকটি স্থিতিাবস্থাকে বিবৃত করতে তিনটি কোয়ান্টাম সংখ্যা  $n_x, n_y$  এবং  $n_z$  এর প্রয়োজন। এগুলির প্রত্যেকটির মানই ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা দ্বারা নির্দেশিত হয়। এগুলির কোনটির মানই শূন্য হতে পারে না, কেননা কোন একটির মান শূন্য হওয়ার অর্থ  $\psi(x, y, z) = 0$  অর্থাৎ বাক্সের মধ্যে কণাটি নেই।

(ii) নিম্নতম সম্ভাব্য শক্তি অর্থাৎ ভৌম অবস্থায় (ground state) শক্তির মান  $n_x = n_y = n_z = 1$  বসিয়ে পাওয়া যায় এবং এই মানটি  $a, b$  এবং  $c$  এর মানের ওপর নির্ভর করে।

(iii) কণাটি যদি একটি বর্গক্ষেত্রাকার বাক্সে অবস্থিত হয়, অর্থাৎ যদি  $a = b = c = L$  হয় তাহলে শক্তিস্তরগুলির মান

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad \dots \dots (12.33)$$

এবং ভৌম অবস্থায় কণাটির শক্তির মান

$$E_{111} = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad \dots \dots (12.34)$$

অন্য কোন অবস্থায় শক্তির এই মান পাওয়া যাবে না। সেই জন্য ভৌম অবস্থা এবং শক্তিস্তরকে অনপজট (non-degenerate) বলা হয়।

(iv) বর্গক্ষেত্রাকার বাক্সের ভিতর কণাটির শক্তি কোয়ান্টাম সংখ্যাগুলির বর্গের যোগফলের ওপর নির্ভর করে। ফলস্বরূপ উত্তেজিত অবস্থায় একই শক্তি সম্পন্ন কণার বিভিন্ন স্থিতিাবস্থা বা বিভিন্ন তরঙ্গ অপেক্ষক হওয়া সম্ভব। এই অবস্থাগুলি এবং শক্তিস্তরগুলিকে বলা হয় অপজাত (degenerate)।

উদাহরণ স্বরূপ প্রথম উত্তেজিত অবস্থায় (first excited state) কোয়ান্টাম সংখ্যাগুলির মান নিম্নরূপ হবে

$n_x$	$n_y$	$n_z$
2	1	1
1	2	1
1	1	2

সুতরাং আমরা তিনটি আইগেন অপেক্ষক পাব এবং স্থিতিাবস্থার সংখ্যাও তিনটি হবে।

প্রত্যেকটি অবস্থার শক্তির মান কিন্তু একই  $= \frac{6\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$ .

সেই হেতু প্রথম উত্তেজিত অবস্থাকে ত্রিমাত্রিক অপজাত (three fold degenerate) বলা হয়।

কোন শক্তিস্তরের স্থিতিাবস্থার বর্ণনার জন্য প্রয়োজনীয় স্বতন্ত্র তরঙ্গ অপেক্ষকের সংখ্যাকে সেই শক্তিস্তরের অপজাত বলা হয়।

পূর্বে বর্ণিত উপায়ে বর্গক্ষেত্রাকার বাসে অবস্থিত কণার ক্ষেত্রে বিভিন্ন উত্তেজিত অবস্থায় আপজাত্যের মাত্রা নির্ণয় করা যায়।

### অনুশীলনী —3

- (a) 1A বাহযুক্ত একটি বর্গক্ষেত্রাকার বিভব বাসে আছে একটি ইলেকট্রনের সর্বনিম্নশক্তির মান নির্ণয় করুন।

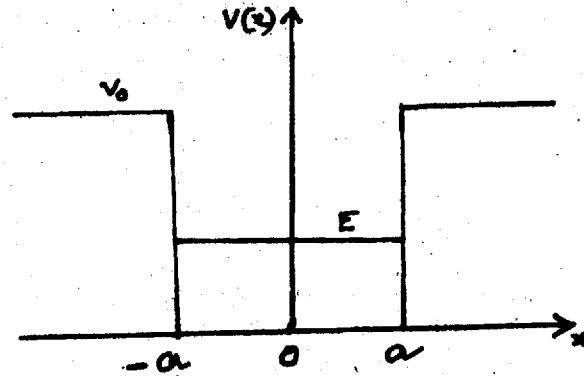
$$\left( \begin{array}{l} m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \\ h = 1.054 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{sec} \end{array} \right)$$

- (b) ইলেকট্রনের সর্বনিম্নশক্তির মান যে উষ্ণতায় আদর্শ গ্যাসের অণুর গড়শক্তির মানের সমান হয় সেই তাপমাত্রাটি নির্ণয় করুন। (দেওয়া আছে  $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J / } ^\circ\text{K}$ )

### অনুশীলনী —4

বর্গক্ষেত্রাকার একটি বিভববাসে অবস্থিত একটি কণার শক্তিস্তর  $\frac{14\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$  এর আপজাত্যের মাত্রা (degree of degeneracy) নির্ণয় করুন।

## 12.3 একমাত্রিক আয়তাকার সসীম বিভবকূপে অবস্থিত কণা



চিত্র 12.5, এখানে  $E < V_0$

(12.5) চিত্রে একটি আয়তাকার বিভব কূপ আঁকা হয়েছে। চিত্রে নির্দেশিত তিনটি অঞ্চলে বিভবের মান

I :  $(x \leq -a)$ -তে  $V = V_0$

II :  $(-a < x < a)$ -তে  $V = 0$

এবং III :  $(x \geq a)$ -তে  $V = V_0$

মনে করি  $m$  ভর এবং  $E(E > 0)$  শক্তিসম্পন্ন একটি কণা বিভব কূপের মধ্যে অর্থাৎ দ্বিতীয় অঞ্চলে আছে।

তিনটি ক্ষেত্রের সময় নিরপেক্ষ শ্রোডিংগার সমীকরণের রূপ

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + V_0 \psi_1 = E \psi_1 \quad \dots \dots (12.35)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} = E \psi_2 \quad \dots \dots (12.36)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_3}{dx^2} + V_0 \psi_3 = E \psi_3 \quad \dots \dots (12.37)$$

$\psi_1$ ,  $\psi_2$  এবং  $\psi_3$  তিনটি অঞ্চলের তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপ। কণাটির শক্তি  $E$ ,  $V_0$  অপেক্ষা বৃহত্তর অথবা কুহকতর উভয়ই হতে পারে।

প্রথম ক্ষেত্র যখন  $E < V_0$

$$\text{মনে করি } \alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \text{ এবং } \beta^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \quad \dots \dots (12.38)$$

এখানে  $\alpha$  এবং  $\beta$  উভয়েই বাস্তব (real)।

(12.35), (12.36) এবং (12.37) সমীকরণে এই মান বসিয়ে আমরা পাই

$$\frac{d^2 \psi_1}{dx^2} - \beta^2 \psi_1 = 0 \quad \dots \dots (12.39)$$

$$\frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + \alpha^2 \psi_2 = 0 \quad \dots \dots (12.40)$$

$$\frac{d^2 \psi_3}{dx^2} - \beta^2 \psi_3 = 0 \quad \dots \dots (12.41)$$

ওপরের তিনটি সমীকরণের সমাধানগুলি যথাক্রমে

$$\psi_1 = A \exp(\beta x) + B \exp(-\beta x) \quad \dots \dots (12.42)$$

$$\psi_2 = C \exp(i\alpha x) + D \exp(-i\alpha x) \quad \dots \dots (12.43)$$

$$\psi_3 = F \exp(-\beta x) + G \exp(\beta x) \quad \dots \dots (12.44)$$

অঞ্চল I  $x = -a$  থেকে  $x = -\alpha$  পর্যন্ত বিস্তৃত। সম্পূর্ণ অঞ্চলে  $\psi_1(x)$ -কে সদাচারী (well behaved) হতে হবে (সদাচারী : অপেক্ষক এবং তার প্রথম অবকলকে একমাত্রী, সসীম এবং সন্তত হতে হবে)। সেজন্য  $\psi_1(-\alpha) = 0$  হওয়া প্রয়োজন। (12.42) সমীকরণে  $B = 0$  বসালে এটি সম্ভব হবে।

অনুরূপভাবে অঞ্চল III  $x = +a$  থেকে  $x = \alpha$  পর্যন্ত বিস্তৃত। এখানে  $\psi_3(x)$ -কে সদাচারী হতে হলে  $\psi_3(\alpha) = 0$  হতে হবে, অর্থাৎ (12.44) সমীকরণে  $G = 0$  বসাতে হবে।

অতএব এই তিন অঞ্চলের সদাচারী সমাধানগুলি নিম্নের ম্যায়

$$\psi_1 = A \exp(\beta x) \quad \dots \dots (12.45)$$

$$\psi_2 = C \exp(i\alpha x) + D \exp(-i\alpha x) \quad \dots \dots (12.46)$$

$$\psi_3 = F \exp(-\beta x) \quad \dots \dots (12.47)$$

$x = -a$  এবং  $x = +a$ -তে সীমান্ত শর্তগুলি হল

$$\psi_1(-a) = \psi_2(-a) \quad \frac{d\psi_1}{dx}(-a) = \frac{d\psi_2}{dx}(-a) \quad \dots \dots (12.48)$$

$$\psi_2(a) = \psi_3(a) \quad \frac{d\psi_2}{dx}(a) = \frac{d\psi_3}{dx}(a) \quad \dots \dots (12.49)$$

[বিঃ দ্রঃ — অসীম বিভরযুক্ত কূপের ক্ষেত্রে (বিভব বাস্তবের ক্ষেত্রে) এই শর্তগুলি প্রযোজ্য হয় না]

সীমান্ত শর্ত (12.48) থেকে  $x = -a$ -তে আমরা লিখতে পারি

$$c \exp(-i\alpha a) + D \exp(i\alpha a) = A \beta \exp(-\beta a) \quad \dots \dots (12.50)$$

$$\text{এবং} \quad -ci\alpha \exp(-i\alpha a) + Di\alpha \exp(i\alpha a) = -A\beta \exp(-\beta a)$$

$$\text{অথবা} \quad c \exp(-i\alpha a) - D \exp(i\alpha a) = -\frac{i\beta}{\alpha} A \exp(-\beta a) \quad \dots \dots (12.51)$$

(12.50) এবং (12.51) সমীকরণকে যোগ, এবং (12.50) সমীকরণ থেকে (12.51) সমীকরণ বিয়োগ করলে পাওয়া যায়

$$2C \exp(-i\alpha a) = \left(1 - \frac{i\beta}{\alpha}\right) A \exp(-\beta a)$$

$$\text{এবং} \quad 2D \exp(i\alpha a) = \left(1 + \frac{i\beta}{\alpha}\right) A \exp(-\beta a)$$

ওপরের দুটি সমীকরণের অনুপাত নিলে

$$\frac{C}{D} \exp(-2i\alpha a) = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta}$$

$$\text{অথবা} \quad \frac{C}{D} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta} \exp(2i\alpha a) \quad \dots \dots (12.52)$$

আবার সীমান্ত শর্ত (12.49) থেকে  $x = +a$ -তে আমরা লিখতে পারি

$$C \exp(i\alpha a) + D \exp(-i\alpha a) = F \exp(-\beta a) \quad \dots \dots (12.53)$$

$$\text{এবং} \quad i\alpha C \exp(i\alpha a) - i\alpha D \exp(-i\alpha a) = -\beta F \exp(-\beta a)$$

$$\text{অথবা} \quad C \exp(i\alpha a) - D \exp(-i\alpha a) = \frac{i\beta}{\alpha} F \exp(-\beta a) \quad \dots \dots (12.54)$$

(12.53) এবং (12.54) সমীকরণ যোগ এবং (12.53) থেকে (12.54) সমীকরণ বিয়োগ করলে পাওয়া যায়

$$2C \exp(i\alpha a) = \left(1 + \frac{i\beta}{\alpha}\right) F \exp(-\beta a)$$

$$2D \exp(-i\alpha a) = \left(1 - \frac{i\beta}{\alpha}\right) F \exp(-\beta a)$$

দুটির অনুপাত নিলে পাওয়া যায়

$$\frac{C}{D} \exp(2i\alpha a) = \frac{(\alpha + i\beta)}{(\alpha - i\beta)}$$

$$\text{অথবা } \frac{C}{D} = \left(\frac{\alpha + i\beta}{\alpha - i\beta}\right) \exp(-2i\alpha a) \quad \dots \dots (12.55)$$

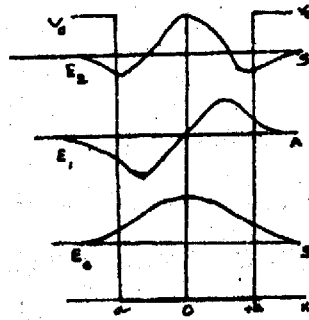
শক্তি  $E$ -এর বিশেষ করে একটি মান ছাড়া (12.52) এবং (12.55) সমীকরণ দুটির একত্রে সমাধান সম্ভব নয়। সেই মানগুলিকে নির্ণয়ের জন্য সমীকরণ দুটিকে গুণ করে আমরা পাই

$$\frac{C^2}{D^2} = 1 \text{ অথবা } \frac{C}{D} = \pm 1$$

কাজেই দুই ধরনের সমাধান পাওয়া যাবে, একটি ধনাত্মক চিহ্নের জন্য এবং অন্যটি ঋণাত্মক চিহ্নের জন্য।  $C = D$  হলে সমীকরণ (12.50) এবং (12.53) থেকে পাওয়া যায়  $A = F$  ... .. (12.56)

এবং (12.46) সমীকরণের রূপ হবে

$$\psi_2 = 2C \cos \alpha x \left[ \begin{array}{l} \because e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x \\ e^{-i\alpha x} = \cos \alpha x - i \sin \alpha x \end{array} \right] \quad \dots \dots (12.57)$$



চিত্র 12.6



চিত্র (12.6)-তে  $E_0$  এবং  $E_2$  শক্তির জন্য দেখা যায় যে আইগেন অপেক্ষকগুলি মধ্যবিন্দু  $x = 0$  এর উভয়দিকে সমভাবে বন্টিত (Symmetric)।

এক্ষেত্রে  $\psi(x) = \psi(-x)$  এবং এই আইগেন অপেক্ষকগুলি যুগ্ম প্যারিটি (even parity) সম্বলিত বলা হয়।

$$C = -D \text{ হলে সমীকরণ (12.50) এবং (12.53) থেকে আমরা পাই } A = -F \quad \dots \dots (12.58)$$

এবং (12.46) সমীকরণের রূপ হবে

$$\psi_2 = 2iC \sin \alpha x \quad \dots \dots (12.59)$$

চিত্র (12.6)-তে দেখা যাচ্ছে যে মধ্যবিন্দু  $x = 0$  এর উভয়দিকে আইগেন অপেক্ষকগুলি বিপ্রতিসম (anti symmetric) ভাবে অবস্থিত।

এক্ষেত্রে  $\psi(-x) = -\psi(x)$  এবং এই আইগেন অপেক্ষকগুলি অযুগ্ম প্যারিটি (odd parity) সম্বলিত।

ক্লাসিকাল তত্ত্ব অনুসারে  $E < V_0$  হলে কণাটি কুপের মধ্যে সম্পূর্ণ ভাবে আবদ্ধ থাকবে। কিন্তু কোয়ান্টাম বলবিদ্যা অনুযায়ী কণা অনুবর্তী তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি কুপের দেওয়াল ভেদ করে উভয় দিকে কিছুদূর পর্যন্ত বিস্তৃত হয় এবং সীমা ( $x = \pm a$ ) থেকে দূরত্ব বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে এক্সপোনেন্টি (exponentially) রূপে মান হ্রাস পায়। ভেদ্যতার পরিমাণ  $\beta$ -র মানবৃদ্ধি (অর্থাৎ  $E$  এর মান বৃদ্ধি)-র সঙ্গে বৃদ্ধি পায়।

আইগেনমান : — (12.52) এবং (12.55) সমীকরণ উভয়ই একই সঙ্গে সিদ্ধ হলে আমরা লিখতে পারি

$$\frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta} \exp(2i\alpha a) = \frac{\alpha + i\beta}{\alpha - i\beta} \exp(-2i\alpha a)$$

$$\text{অথবা } (\alpha + i\beta)^2 \exp(-2i\alpha a) = (\alpha - i\beta)^2 \exp(2i\alpha a)$$

$$\therefore (\alpha + i\beta) \exp(-i\alpha a) = \pm (\alpha - i\beta) \exp(i\alpha a) \quad \dots \dots (12.60)$$

সমীকরণের ডানদিকে ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক চিহ্ন দ্বারা প্রতিসম (Symmetrical) এবং বিপ্রতিসম (anti symmetric) সমাধান নির্দেশ করা হয়।

প্রতিসম সমাধানের ক্ষেত্রে

$$(\alpha + i\beta) \exp(-i\alpha a) - (\alpha - i\beta) \exp(i\alpha a)$$

$$\text{অথবা } \alpha \exp(-i\alpha a) + i\beta \exp(-i\alpha a) = \alpha \exp(i\alpha a) - i\beta \exp(i\alpha a)$$

$$\alpha [\exp(i\alpha a) - \exp(-i\alpha a)] = i\beta [\exp(i\alpha a) + \exp(-i\alpha a)]$$

$$\text{অথবা } i\alpha \sin(\alpha a) = i\beta \cos(\alpha a)$$

$$\text{অথবা } \alpha \sin(\alpha a) \cdot a = \beta \cos(\alpha a) \cdot a \quad \dots \dots (12.61)$$

$$\therefore \alpha a \tan(\alpha a) = \beta a \quad \dots \dots (12.62)$$

বিপ্রতিসম সমাধানের ক্ষেত্রে

$$(\alpha + i\beta)\exp(-i\alpha a) = -(\alpha - i\beta)\exp(i\alpha a)$$

$$\text{অথবা } \alpha \exp(-i\alpha a) + i\beta \exp(-i\alpha a) = i\beta \exp(i\alpha a) - \alpha \exp(i\alpha a)$$

$$\text{অথবা } \alpha[\exp(i\alpha a) + \exp(-i\alpha a)] = i\beta [\exp(i\alpha a) - \exp(-i\alpha a)]$$

$$\text{অথবা } 2\alpha \cos(\alpha a).a = -2\beta \sin(\alpha a).a \quad \dots \dots (12.63)$$

$$\text{অথবা } \alpha a \cot(\alpha a) = -\beta a \quad \dots \dots (12.64)$$

অথবা (12.38) সমীকরণ ব্যবহার করে আমরা লিখতে পারি

$$(\alpha^2 + \beta^2)a^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} a^2 \quad \dots \dots (12.65)$$

$\alpha a = \xi$  এবং  $\beta a = \eta$  লিখলে আমরা নীচের দুই জোড়া সমীকরণ পাই

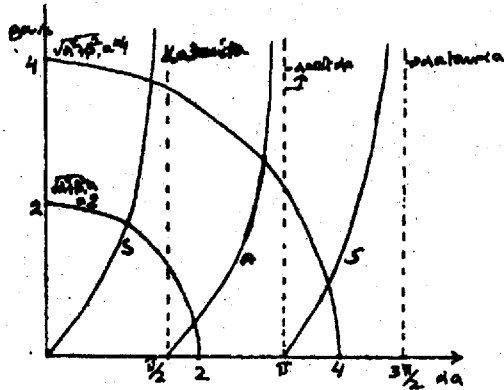
(i) প্রতিসম সমাধানের ক্ষেত্রে (12.62) এবং (12.65) সমীকরণ থেকে পাই

$$\eta = \xi \tan \xi \quad \text{এবং} \quad \xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \quad \dots \dots (12.66(a))$$

(ii) বিপ্রতিসম সমাধানের ক্ষেত্রে (12.64) এবং (12.65) সমীকরণ থেকে পাই

$$\eta = -\xi \cot \xi \quad \text{এবং} \quad \xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \quad \dots \dots (12.66(b))$$

ওপরের দুই জোড়া সমীকরণ থেকে প্রতিসম এবং বিপ্রতিসম ক্ষেত্রের সম্ভাব্য শক্তির আইগেনমানগুলি পাওয়া যায়



চিত্র 12.7

ওপরের দুই জোড়া  $\xi$  এবং  $\eta$  চরের সহসমীকরণের (simultaneous equations) গাণিতিকভাবে সমাধান সম্ভব নয়, একমাত্র লেখ চিত্রের সাহায্যে সম্ভব।  $V_0$  এবং  $a$ -র নির্দিষ্ট মানের জন্য যে কোন এক জোড়া সমীকরণ (i) অথবা (ii) লেখের ছেদবিন্দুগুলি সম্ভাব্য শক্তির মান নির্দেশ করে।

(12.7) লেখচিত্রটি লক্ষ করুন। এখানে দুটি বিশেষ ক্ষেত্রের সমাধানগুলি আঁকা হয়েছে।

মনে করি

$$(\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} \cdot a = 2$$

$$\text{এবং } (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} \cdot a = 4$$

প্রথম ক্ষেত্রে যখন  $\alpha = 0$  তখন  $\beta a = 2$  এবং যখন  $\beta = 0$  তখন  $\alpha a = 2$

অনুরূপে দ্বিতীয় ক্ষেত্রে যখন  $\alpha = 0$  তখন  $\beta a = 4$  এবং যখন  $\beta = 0$  তখন  $\alpha a = 4$

( $\alpha$  এবং  $\beta$ -র মান সব সময় ধনাত্মক হবে)

সুতরাং আমরা দুটি এককেন্দ্রীক বৃত্তের এক চূতর্থাংশ পাব (12.7 চিত্র দ্রষ্টব্য)। এই বৃত্তাংশগুলির সঙ্গে নিম্নের লেখগুলি

$$\eta = \xi \tan \xi \text{ অথবা } \beta a = \alpha a \tan \alpha a \text{ (প্রতিসম)}$$

$$\text{এবং } \eta = -\xi \tan \xi \text{ অথবা } \beta a = -\alpha a \cot \alpha a \text{ (বিপ্রতিসম)}$$

এর ছেদবিন্দুগুলি থেকে আমরা সম্ভাব্যশক্তির মান পাব। চিত্রে দেখা যাচ্ছে যে  $(\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = 2$  মানের জন্য একটি প্রতিসম এবং একটি বিপ্রতিসম সমাধান পাওয়া যায়।  $(\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = 4$  এর জন্য দুটি প্রতিসম এবং বিপ্রতিসম সমাধান পাওয়া যায়।

$V_0$  এবং  $a$ -র মান বৃদ্ধির সঙ্গে সম্ভাব্য শক্তিস্তরের সংখ্যা বৃদ্ধি পায়।

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \text{ বৃত্তটি } \xi \text{ অক্ষকে } \xi_m = \left( \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \right)^{1/2} \text{ বিন্দুতে ছেদ করে। } (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = 2 \text{ এর}$$

জন্য  $\xi_m = 2$

অতএব আমরা লিখতে পারি  $\frac{\pi}{2} < \xi_m < \pi$  (12.7 নং চিত্র থেকে) এবং ছেদ বিন্দুর সংখ্যা 2 অর্থাৎ এক্ষেত্রে বদ্ধ অবস্থার (bound state) সংখ্যা 2.

$$\text{আবার } (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} = 4 \text{ এর জন্য } \xi_m = 4$$

চিত্র থেকে লিখতে পারি  $\pi < \xi_m < \frac{3\pi}{2}$  এবং পূর্বের ন্যায় এক্ষেত্রে ছেদ বিন্দুর সংখ্যা 3 অর্থাৎ বদ্ধ অবস্থার সংখ্যা = 3 সাধারণভাবে লেখা যায়

$$\frac{n\pi}{2} < \xi_m < (n+1)\frac{\pi}{2} \text{ অবস্থায় বদ্ধ অবস্থার সংখ্যা } (n+1)$$

উচ্চতর শক্তিস্তরগুলির জন্য আইগেন অপেক্ষকগুলির নিস্পন্দবিন্দুগুলির সংখ্যা বৃদ্ধি পায়। যথা  $n$ -তম আইগেন অপেক্ষকের  $(n-1)$  সংখ্যক নিস্পন্দবিন্দু বর্তমান। ওপরের আলোচনা থেকে এটি স্পষ্ট হল যে কোন

কণার সংশ্লিষ্ট শ্রোডিংগার সমীকরণের সমাধানগুলি বিভিন্ন অঞ্চলে সীমাস্থ শর্তপূরণ করে সদাচারী হওয়া প্রয়োজন। এই কারণেই বিভব কূপে অবস্থিত কণার সম্ভাব্য শক্তির আইগেন মানগুলি বিচ্ছিন্ন (discrete) হয়।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে

যখন  $E > V_0$

মনে করি আয়তক্ষেত্রাকার কূপটি  $x = 0$  থেকে  $x = a$  পর্যন্ত বিস্তৃত। সুতরাং তিনটি অঞ্চলে শ্রোডিংগারের সমীকরণের রূপ হবে

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k_1^2\psi_1 = 0$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k_2^2\psi_2 = 0$$

$$\frac{d^2\psi_3}{dx^2} + k_1^2\psi_3 = 0$$

$$\text{যেখানে } k_1^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \quad \dots \dots (12.67a)$$

$$\text{এবং } k_2^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \dots \dots (12.67b)$$

তৃতীয় অঞ্চলে বামদিক থেকে কোন তরঙ্গ আসছে না সেই হেতু সমাধানগুলির রূপ হবে

$$\psi_1 = A \exp(ik_1x) + B \exp(-ik_1x) \quad \dots \dots (12.68a)$$

$$\psi_2 = C \exp(ik_2x) + D \exp(-ik_2x) \quad \dots \dots (12.68b)$$

$$\psi_3 = F \exp(ik_1x) \quad \dots \dots (12.68c)$$

সীমাস্থ শর্তগুলি হ'ল

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \quad \frac{d\psi_1(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(0)}{dx} \quad \dots \dots (12.69a)$$

$$\psi_2(a) = \psi_3(a) \quad \frac{d\psi_2(a)}{dx} = \frac{d\psi_3(a)}{dx} \quad \dots \dots (12.69b)$$

সীমাস্থ শর্ত (12.69a) প্রয়োগ করলে

$$A + B = C + D \quad \text{যখন } \psi_1(0) = \psi_2(0)$$

$$\text{এবং } ik_1(A - B) = ik_2(C - D) \quad \text{যখন } \frac{d\psi_1(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(0)}{dx}$$

ওপরের দুটি শর্ত থেকে লিখতে পারি

$$\text{যোগ করে } A \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) + B \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) = 2C \quad \dots \dots (12.70a)$$

এবং বিয়োগ করে  $A\left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) - B\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) = 2D$  ... .. (12.70b)

আবার (12.69b) শর্ত প্রয়োগ করে পাই

$$C \exp(ik_2a) + D \exp(-ik_2a) = F \exp(ik_1a)$$

এবং  $ik_2C \exp(ik_2a) - ik_2D \exp(-ik_2a) = ik_1F \exp(ik_1a)$

ওপরের দুটি সম্পর্ক থেকে লিখতে পারি

$$\text{যোগ করে } 2C \exp(ik_2a) = \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) F \exp(ik_1a)$$

$$\text{অথবা } 2C = \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) F \exp\{i(k_1 - k_2)a\} \quad \dots \dots (12.71a)$$

এবং বিয়োগ করে  $2D \exp(-ik_2a) = \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) F \exp(ik_1a)$

$$\text{অথবা } 2D = \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) F \exp\{i(k_1 + k_2)a\} \quad \dots \dots (12.71b)$$

(12.71a) সমীকরণের মান (12.70a)-তে এবং (12.71b) এর মান (12.70b)-তে বসিয়ে পাই

$$A\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) + B\left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) = F\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) \exp\{i(k_1 - k_2)a\} \quad \dots \dots (12.72)$$

$$A\left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) + B\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) = F\left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) \exp\{i(k_1 + k_2)a\} \quad \dots \dots (12.73)$$

অঞ্চল I এবং অঞ্চল II এ আপতিত এবং প্রতিফলিত তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপ

$$\text{(আপতিত তরঙ্গ অপেক্ষক} = \psi_{in}$$

$$\text{প্রতিফলিত তরঙ্গ অপেক্ষক} = \psi_r$$

$$\text{উত্তীর্ণ তরঙ্গ অপেক্ষক} = \psi_t)$$

$$\psi_{1in} = A \exp(ik_1x); \psi_{1r} = B \exp(-ik_1x) \quad \dots \dots (12.74)$$

$$\psi_{2in} = C \exp(ik_2x); \psi_{2r} = D \exp(-ik_2x) \quad \dots \dots (12.75)$$

অঞ্চল III এ উত্তীর্ণ (transmitted) তরঙ্গ অপেক্ষক

$$\psi_{3t} = F \exp(ik_1x) \quad \dots \dots (12.76)$$

আপতিত এবং উত্তীর্ণ সম্ভাব্যতা প্রবাহ ঘনত্বের (incident and transmitted probability current density) রূপ

$$j_{1 \text{ in}} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi_{1 \text{ in}} \psi_{1 \text{ in}}^* - \psi_{1 \text{ in}}^* \psi_{1 \text{ in}}) = \frac{\hbar}{m} k_1 |A|^2 \quad \dots \dots (12.77)$$

$$j_{3 \text{ t}} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi_{3 \text{ t}} \psi_{3 \text{ t}}^* - \psi_{3 \text{ t}}^* \psi_{3 \text{ t}}) = \frac{\hbar}{m} k_1 |F|^2 \quad \dots \dots (12.78)$$

$$\text{উত্তরণ গুণক } T = \frac{j_{3 \text{ t}}}{j_{1 \text{ in}}} = \frac{|F|^2}{|A|^2} \quad \dots \dots (12.79)$$

সরলীকরণের পরে  $T$  এর মান

$$T = \frac{4k_1^2 k_2^2}{4k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2 k_2 a}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E - V_0)} \sin^2 k_2 a} \quad \dots \dots (12.80)$$

বিশেষ ক্ষেত্র : মনে করি কুপের বিস্তার  $a =$  ডি ব্রগলি তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের অর্ধেক।

$$\text{সেক্ষেত্রে } a = \frac{\lambda_2}{2} = \frac{\pi}{k_2}$$

$$\therefore k_2 a = \pi \text{ অর্থাৎ } \sin k_2 a = 0$$

অতএব (12.80) সমীকরণ অনুসারে আমরা পাই  $T = 1$

অর্থাৎ এখানে আপতিত তরঙ্গের শতকরা ১০০ ভাগই বিভিন্ন কুপের মধ্য দিয়ে উত্তীর্ণ হবে।

$x = 0$  এবং  $x = a$ -তে সীমান্ত শর্তগুলি থেকে পাওয়া যায় ( $\because \exp(ik_2 a) = -1$ )

$$A + B = C + D \quad A - B = \frac{k_2}{k_1} (C - D)$$

$$C + D = -F \exp(ik_1 a) \quad (C - D) = -\frac{k_1}{k_2} F \exp(ik_1 a)$$

এই সম্পর্কগুলি থেকে পাই  $B = 0$

$$\text{অতএব } A = -F \exp(ik_1 a)$$

অর্থাৎ  $|A|^2 = |F|^2 \rightarrow$  এই সম্পর্ক থেকে শতকরা ১০০ ভাগ উত্তরণের প্রমাণ পাওয়া যায়। তবে আপতিত এবং উত্তীর্ণ তরঙ্গে দশা এক নয়।

দেখা গেছে যে একটি বিশেষ ক্রান্তীয় গতিশক্তি যুক্ত ইলেকট্রনের কাছে ক্রিপটন (Krypton), আরগন (Argon), জেনন (Xenon) গ্যাসগুলি সম্পূর্ণ স্বচ্ছ মাধ্যমের ন্যায় আচরণ করে। ওপরের তত্ত্বের সাহায্যে এই ঘটনার ব্যাখ্যা দেওয়া যায়।

## 12.4 রৈখিক সরল দোলক

রৈখিক সরল দোলকের সমস্যাটি ক্লাসিকাল (সনাতন) এবং কোয়ান্টাম উভয় বলবিদ্যাতেই যথেষ্ট গুরুত্বপূর্ণ স্থান অধিকার করে আছে। বহু জটিল সমস্যাকে ফুরিয়ে (Fourier) বিশ্লেষণের সাহায্যে বিভিন্ন কম্পাঙ্কের কতকগুলি সরল দোলকের সমষ্টি হিসাবে প্রকাশ করা যায়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় কঠিন বস্তুর আপেক্ষিক তার নির্ণয়ের জন্য ডিভাই (Debye) কেলাসিত বস্তুটির অনুগুলির গতিকে কতকগুলি সুসমঞ্জ সরল দোলকের (বিভিন্ন কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট) সমষ্টি হিসাবে প্রকাশ করেছিলেন।

ক্লাসিকাল তত্ত্ব অনুসারে  $m$  ভর বিশিষ্ট একটি কণা যার ওপর  $x$ -অক্ষ বরাবর প্রত্যানয়ক বল  $F = -m\omega^2x$  ক্রিয়া করছে তাকেই সরল দোলক বলা যায়।

এক্ষেত্রে গভীয় সমীকরণটির রূপ হবে

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

এবং এই সমীকরণের সমাধান হিসাবে লেখা যায়  $x = a \cos \omega t$ । এই সমাধান একটি 'a' বিস্তার এবং ' $\omega$ ' কৌণিক কম্পাঙ্কযুক্ত দোলন গতির রূপ।

বিভব এবং বলের মধ্যের সম্পর্ক

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

অতএব আমরা লিখতে পারি  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

এবং দোলনী গতির মোট শক্তি = যে কোন প্রান্তবিন্দুতে কণাটির মোট স্থিতিশক্তি অর্থাৎ  $E = \frac{1}{2}ma^2\omega^2$

এবার আমরা কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সাহায্যে এই সমস্যার সমাধানের চেষ্টা করব।

শ্রোডিংগারের সময় নিরপেক্ষ আইগেনমান সমীকরণ নিম্নরূপ

$$Hu = Eu$$

এখানে স্থিতাবস্থায় মোট শক্তি  $E$ , তরঙ্গ অপেক্ষক  $= u$  এবং  $H =$  হ্যামিলটোনিয়ান  $= \frac{p^2}{2m} + V$

সরল দোলকের ক্ষেত্রে

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \quad \dots \dots (12.81)$$

এখানে  $k =$  কেন্দ্রবিন্দু থেকে কণার প্রতি একক সরণের জন্য বল ক্লাসিকাল তত্ত্ব অনুসারে কণাটি  $\frac{w}{2\pi}$  কম্পাঙ্কে দোলে যেখানে  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ । সুতরাং আমরা লিখতে পারি  $k = m\omega^2$  অতএব শক্তির আইগেনমান সমীকরণের রূপ

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right) u = Eu \quad (\because p = i\hbar \text{ grad}) \quad \dots \dots (12.82)$$

ওপরের সমীকরণটিকে আমরা একটি মাত্রাহীন সমীকরণ রূপে প্রকাশ করতে পারি। সমীকরণটির দুই দিককে  $\frac{2}{\hbar\omega}$  দিয়ে গুণ করলে পাওয়া যায়

$$\frac{2}{\hbar\omega} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right] u = \frac{2E}{\hbar\omega} u.$$

$$\text{বা,} \quad \left[ -\frac{\hbar}{m\omega} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega}{\hbar} x^2 \right] u = \frac{2E}{\hbar\omega} u.$$

$$\text{বা,} \quad \left[ \frac{-d^2}{dp^2} + p^2 \right] u = \lambda u. \text{ যেখানে } p = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \text{ এবং } \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{d^2 u}{dp^2} + (\lambda - p^2) u = 0 \quad \dots \dots (12.83)$$

লক্ষ করুন  $p$  এবং  $\lambda$  রাশি দুটি মাত্রাহীন। শক্তি  $E$  এবং  $\lambda$  এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য আমরা (12.83) সমীকরণের ভিন্ন ভিন্ন সমাধান পেতে পারি। কিন্তু সমাধানগুলি  $x$  অথবা  $p$  চলরাশিটির অসীম মানের জন্য অপসারী হলে চলবে না, বরং অসীম দূরত্বে  $u$  এর মান ক্রমশঃ শূন্য হতে হবে।

$\alpha$  এর বৃহত্তর মানে অর্থাৎ  $p \rightarrow \pm \alpha$  সীমায়  $p^2$  এর মান  $\lambda$  এর তুলনায় বেশী হওয়ায় 12.83 সমীকরণের রূপ হয়।

$$\frac{d^2 u}{dp^2} - p^2 u = 0 \quad \dots \dots (12.84)$$

$u = e^{\pm p^2/2}$  এর সমাধান হতে পারে। কিন্তু  $P = \pm \alpha$ ,  $u$  বস্তুর সসীম মানের হওয়া প্রয়োজন বলে গ্রহণযোগ্য সমাধান  $u = e^{-P^2/2}$ .

সেক্ষেত্রে যে কোন  $P$  এর জন্য 12.83 এর সাধারণ সমাধানকে নিম্নরূপ রাশিমালা দ্বারা প্রকাশ করা যায়

$$u = H(p)e^{-P^2/2} \quad \dots \dots (12.85)$$

এখানে  $H(p) - p$  এর সসীমক্রমের বহুপদশ্রেণী 12.83 সমীকরণে এই সমাধান বসিয়ে পাই

$$(H''P - 2PH' + (\lambda - 1)H)e^{-P^2/2} = 0$$

$$\text{বা,} \quad H''P - 2PH' + (\lambda - 1)H = 0 \quad \dots \dots (12.86)$$

$$\text{এখানে } H'' = \frac{d^2 H}{dp^2} \text{ এবং } H' = \frac{dH}{dp}.$$



অনুশীলনী—5

দেখান যে  $\frac{d^2u}{dp^2} + (\lambda - p^2)u = 0$  সমীকরণে  $u$  এর মান  $u = e^{-p^2/2} H(p)$  বসালে আমরা

$$H'' - 2pH' + (\lambda - 1)H = 0 \text{ সমীকরণ পাই}$$

একটি ঘাত শ্রেণীর সাহায্যে ওপরের সমাকল সমীকরণটির সমাধান করা যায়। মনে করা যাক শ্রেণীটির রূপ

$$H(p) = p^s \sum_i a_i p^i \quad \dots \dots (12.87)$$

এখানে  $i = 0, 1, 2, \dots$ ;  $s$  একটি বাস্তব সংখ্যা, এটির মান নীচের উপায়ে নির্ণয় করা যায়।

(12.87) সমীকরণকে অবকল করলে

$$H'(p) = p^s \sum_i (s+i) a_i p^{(i-1)}$$

$$H''(p) = p^s \sum_i (s+i)(s+i-1) a_i p^{(i-2)}$$

(12.86) সমীকরণে ওপরের মানগুলি বসিয়ে

$$\sum_i [(s+i)(s+i-1) a_i p^{(i+s-2)} - 2(s+i) a_i p^{(i+s)} + (\lambda-1) a_i p^{(i+s)}] = 0$$

ওপরের সম্পর্কটি  $p$  এর সব মানের জন্যই সত্য অতএব  $p$  এর প্রত্যেক ঘাতের সহগগুলি পৃথকভাবে শূন্য হবে।  $i = 0$  এবং  $i = 1$  এর জন্য দুটি সূচক সম্বন্ধীয় (indicial) সমীকরণ পাওয়া যায় যেখান থেকে এর মান নির্ণয় করা যায়।

$$i = 0\text{-র জন্য } p^{s-2} \text{ এর সহগ} = s(s-1)a_0 = 0 \quad \dots \dots (12.88)$$

$$\text{এবং } i = 1\text{-র জন্য } p^{s-1} \text{ এর সহগ} = s(s+1)a_1 = 0 \quad \dots \dots (12.89)$$

$i$  এর যেকোন সাধারণ মানের জন্য  $p^{s+i}$  এর সহগের মান নীচের সম্পর্কের থেকে নির্ণয় করা যায়

$$(s+i+2)(s+i+1)a_{i+2} - 2(s+i)a_i + (\lambda-1)a_i = 0 \quad \dots \dots (12.90)$$

ওপরের সম্পর্ক থেকে  $a_i$  সহগগুলির একটি আবৃত্ত সম্পর্ক (recurring relation) পাওয়া যায়

$$\frac{a_{i+2}}{a_i} = \frac{2s+2i+1-\lambda}{(s+i+2)(s+i+1)} \quad \dots \dots (12.91)$$

এই আবৃত্ত সম্পর্কটির সাহায্যে  $a_i$  জানা থাকলে  $a_{i+2}, a_{i+4}$  ইত্যাদি একান্তর (alternate) সহগগুলির মান নির্ণয় করা যায়।

এখন যদি (12.87) শ্রেণীটি অসীম সংখ্যক পদ থাকে তাহলে  $i$  এর বৃহৎ মানের জন্য (12.91) থেকে আমরা পাই

$$\frac{a_{i+2}}{a_i} \rightarrow \frac{2i}{i^2} \rightarrow \frac{2}{i} \quad \dots \dots (12.92)$$

$\frac{a_{i+2}}{a_i}$  এর মান  $e^{p^2}$  এর শ্রেণী প্রসারণের (series expansion) যে কোন দুটি পদ  $p^{2i+2}$  এবং  $p^{2i}$  এর সহগের অনুপাতের সমান। সুতরাং অসীম শ্রেণীতে  $p$  এর উচ্চতর মানের জন্য  $H$  এর শ্রেণী  $e^{p^2}$  এর ন্যায় আচরণ করবে এবং (12.85) সমাধানে  $e^{-\frac{p^2}{2}}$   $H$  রাশিটি  $e^{\frac{p^2}{2}}$  ন্যায় আচরণ করবে। এটি একটি সদাচারী (well behaved) অপেক্ষক নয়, সেইজন্য এটিকে তরঙ্গ অপেক্ষক হিসাবে গণ্য করা যায় না। কাজেই আমাদের শক্তির আইগেন মানগুলি এমন ভাবে বেছে নিতে হবে যাতে  $H$  এর শ্রেণীটি নির্দিষ্ট কিছু সংখ্যক পদের পরে সমাপ্ত হয়।

$p$  এর ঘাত  $s$  এর যে সম্ভাব্য মানগুলির সাহায্যে (12.87) শ্রেণীটি সসীম হয় সেই মানগুলি (12.88) এবং (12.89) সম্পর্ক থেকে পাওয়া যায়।

(12.88) থেকে পাই সম্ভাব্য মান দুটি  $s = 0$  অথবা  $s = 1$  [কিন্তু  $a_0 \neq 0$ ]  $s = 0$  নিলে যুগ্ম ঘাত যুক্ত পদের (যেগুলির সহগ  $a_0, a_2, a_4 \dots$ ) শ্রেণীটি বর্তমান থাকবে। এটিকে সসীম হতে গেলে মনে করি শ্রেণীটি  $a_i$  তে সমাপ্ত হয় যেখানে  $i = 2\tau$  ( $\tau = 0, 1, 2 \dots$ ) অর্থাৎ শ্রেণীটিতে  $(\tau + 1)$  সংখ্যক  $p$  এর যুগ্মঘাত যুক্ত পদ থাকবে। তাহলে আবৃত্ত সম্পর্ক (12.91) থেকে বলা যায়

$$a_{i+2} = 0 \text{ অথবা } 2s + 2i + 1 - \lambda = 0$$

$$\text{যেহেতু এখানে } s = 0 \therefore \lambda - 1 = 2i = 2\tau$$

$$\text{অথবা } \lambda = 4\tau + 1$$

... .. (12.93a)

$$\lambda \text{ র সম্ভাব্য মানগুলি } \lambda = 1, 5, 9, 13$$

এবং শক্তির আইগেনমানগুলি

$$E = \frac{\hbar\omega}{2}, 5 \frac{\hbar\omega}{2}, 9 \frac{\hbar\omega}{2}$$

... .. (12.93b)

লক্ষণীয়  $s = 0$ -র জন্য  $a_1$  শূন্য হতে পারে নাও হতে পারে।  $a \neq 0$  হলে  $u(p)$  এর শ্রেণীটিতে  $p$  এর যুগ্ম ঘাতযুক্ত পদ ছাড়া অন্য বিযুগ্ম ঘাত যুক্ত পদও থাকতে পারে। যার ফলে বর্গ সমাকল করা কঠিন হবে।

এই অসুবিধা দূর করার জন্য  $a_1 = 0$  নেওয়া হয়। সেক্ষেত্রে বিযুগ্ম সহগ  $a_3, a_5 \dots$  গুলি শূন্য হবে।

সুতরাং  $s = 0$  এবং  $a_0 \neq 0$  র জন্য আমরা পাই

$$H(p) = H_0(p) = a_0 + a_2p^2 + a_4p^4 + \dots + a_{2\tau}p^{2\tau} \quad \dots \dots (12.94)$$

আবৃত্ত সম্পর্ক (12.91) ব্যবহার করে সহগ  $a_2, a_4$  ইত্যাদি নির্ণয় করা যায় ( $a_0$  জানা থাকলে)।

এবার আমরা  $s = 1$  এবং  $a_1 = 0$  ক্ষেত্রটি আলোচনা করব।  $a_1 = 0$  হলে শ্রেণীর রূপ হবে

$$H(p) = H_1(p) = a_0p + a_2p^3 + a_4p^5 + \dots + a_{2\tau}p^{2\tau+1} \quad \dots \dots (12.95)$$

সদাচারী (well behaved) সমাধান হতে হলে ওপরের শ্রেণীটিকে কোন মান  $i = 2\tau$  ( $\tau = 0, 1, 2 \dots$ ) তে সমাপ্ত হতে হবে। সেক্ষেত্রে ওপরের শ্রেণীটি  $p$  এর বিজোড় ঘাত যুক্ত  $(\tau + 1)$  সংখ্যক পদের হবে।

(12.91) সম্পর্ক থেকে শ্রেণীটি সমাপ্ত হওয়ার শর্ত পাওয়া যায়  $\therefore s = 1$  সুতরাং

$$2s + 2\tau + 1 - \lambda = 0$$

অথবা  $2 + 4\tau + 1 = \lambda$

$$\therefore \lambda = 4\tau + 3$$

$\lambda$  এর সম্ভাব্য মানগুলি  $\lambda = 3, 7, 11, 15$

... .. (12.96a)

সুতরাং শক্তির সম্ভাব্য আইগেন মানগুলি হবে

$$E = 3 \frac{\hbar\omega}{2}, 7 \frac{\hbar\omega}{2}, 11 \frac{\hbar\omega}{2} \dots$$

... .. (12.96b)

(12.93) এবং (12.96) কে মিলিতভাবে একটি সাধারণরূপে লেখা যায়

$$\lambda_n = 4\tau + 2s + 1 \quad (s = 0 \text{ অথবা } 1)$$

$$= 2n + 1$$

... .. (12.97a)

এখানে  $n = s + 2\tau = 0, 1, 2, 3$  (কারণ  $\tau$  এর সম্ভাব্য মান  $0, 1, 2, 3 \dots$  এবং  $s$  এর মান  $0$  অথবা  $1$ )

অতএব শক্তিস্তরের আইগেন মানগুলি

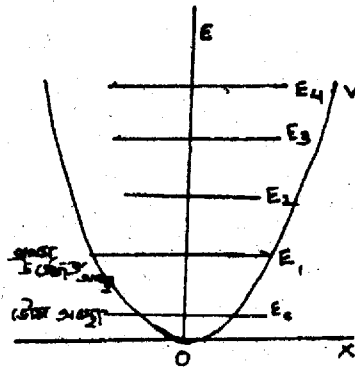
$$E_n = \lambda_n \frac{\hbar\omega}{2} = (n + 1/2) \hbar\omega$$

... .. (12.97b)

(12.97b) থেকে দেখা যাচ্ছে যে শক্তিস্তরগুলি বিচ্ছিন্ন এবং সমদূরত্বে অবস্থিত।

পুরানো কোয়ান্টাম তত্ত্বের প্ল্যাঙ্কের প্রকল্পের (যে শক্তিস্তরের মানগুলি বিচ্ছিন্ন এবং সমদূরত্বে অবস্থিত) সঙ্গে এর মিল আছে। পুরানো কোয়ান্টাম তত্ত্বের ফলের সঙ্গে ওপরের ফলের তুলনা করলে দেখা যায় যে, প্ল্যাঙ্কের কোয়ান্টাম তত্ত্ব অনুসারে শক্তিস্তরগুলির রূপ  $E_n = n\hbar\omega$  এবং (12.97a) অনুসারে।

$$E_n = (n + 1/2) \hbar\omega$$



চিত্র 12.8

প্ল্যাঙ্কের কোয়ান্টাম অনুসারে  $n = 0$  র জন্য  $E_0 = 0$  অর্থাৎ ভৌম অবস্থায় শক্তির মান শূন্য। কিন্তু (12.97a) অনুযায়ী  $n = 0$  র জন্য  $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ । অর্থাৎ সাম্যাবস্থায় স্থির থাকলেও সরল দোলকের কিছু শক্তি থাকে। এই শক্তিকে বলা হয় শূন্যাত্মক শক্তি (zero point energy)। (চিত্র 12.8 দেখুন)। এই শূন্যাত্মক শক্তির অস্তিত্ব হাইসেনবার্গের অনিশ্চয়তা প্রকল্পের প্রয়োগের একটি উদাহরণ। পুরানো কোয়ান্টাম তত্ত্ব অনুসারে যদি ভৌম অবস্থায় (ground state)  $E_0 = 0$  হয় তার অর্থ এই অবস্থায় দোলকের স্থিতিশক্তি এবং গতিশক্তি উভয়েই শূন্য হবে এবং সেই অবস্থায়  $x = 0$  হতে হবে অর্থাৎ অবস্থাটি বিভব কূপের নিম্নতম বিন্দু হবে।

অতএব দোলকের অবস্থান নিশ্চিতভাবে জানা যাবে অর্থাৎ  $\Delta x = 0$  এছাড়া দোলকের গতিশক্তি শূন্য হওয়ায় ভরবেগের মানও নিশ্চিত রূপে জানা যাবে অর্থাৎ  $\Delta p = 0$ ।

সুতরাং আমরা দেখলাম এক্ষেত্রে  $\Delta x$  এবং  $\Delta p$  উভয়েই শূন্য হবে যেটি অনিশ্চয়তার প্রকল্পের পরিপন্থী।

এবার আমরা দেখবো কি করে অনিশ্চয়তার প্রকল্পের সাহায্যে শূন্যাত্মক শক্তির ব্যাখ্যা দেওয়া যায়।

যদি দোলকের ভরবেগের বিস্তার  $\Delta p$  এবং স্থিতির বিস্তারকে  $\Delta x$  বলি তাহলে শক্তির মান লিখতে পারি

$$E = \frac{1}{2} \left[ \frac{(\Delta p)^2}{m} + k(\Delta x)^2 \right]$$

অনিশ্চয়তার প্রকল্প থেকে  $\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p}$

$$\text{সুতরাং } E = \frac{1}{2} \left[ \frac{(\Delta p)^2}{m} + \frac{k\hbar^2}{(\Delta p)^2} \right] \quad \dots \dots (12.98)$$

$$\text{ক্ষুদ্রতম মানের জন্য } \frac{dE}{dp} = 0 = \frac{\Delta p}{m} - \frac{k\hbar^2}{(\Delta p)^3}$$

$$\text{অথবা } \frac{\Delta p}{m} = \frac{k\hbar^2}{(\Delta p)^3}$$

$$\text{অথবা } (\Delta p)^4 = k\hbar^2 m$$

সুতরাং (12.98) সমীকরণে  $(\Delta p)^4$  এর পরিবর্তে  $k\hbar^2 m$  লিখে শক্তির ক্ষুদ্রতম মান পাওয়া যাবে।

$$\begin{aligned} \therefore E_{min} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(\Delta p)^4 + k\hbar^2 m}{m(\Delta p)^2} \right] = \frac{1}{2} \frac{k\hbar^2 m + k\hbar^2 m}{2m(k\hbar^2 m)^{1/2}} \\ &= \frac{(k\hbar^2 m)^{1/2}}{2m} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

$$\text{কিন্তু আমরা জানি } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\therefore E_{min} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

শূন্যাক শক্তির কারণ এই যে : বিভবের প্রভাবে কণাটি একটি নির্দিষ্ট স্থানের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে কাজেই অনিশ্চয়তার প্রকল্প অনুসারে কণাটির ভরবেগের মান নির্দিষ্ট করা যায় না। বিশেষ করে ভরবেগ শূন্য হতে পারে না, সুতরাং কোন অবস্থাতেই দোলকটির শক্তি অবলুপ্ত হবে না। দেখা যায় যে সরল দোলকের ভৌম অবস্থাটি অনিশ্চয়তার একটি ক্ষুদ্রতম অবস্থা (minimum uncertainty state), যেখানে  $\Delta x \Delta p_x$  এর ক্ষুদ্রতম মান  $\frac{\hbar}{2}$  হয়।

### প্যারিটি (Parity)—

আবৃত্ত সম্পর্ক (12.91) থেকে আমরা দেখেছি যে (12.87) সমীকরণে  $H$  এর ঘাত শ্রেণীটিকে সসীম রূপ দিতে গেলে শ্রেণীটিকে  $a_i$  সহগযুক্ত পদে সমাপ্ত হতে হবে এবং সেই পদে  $p$  এর সর্বোচ্চ ঘাত হবে  $(s + i) = n$ . এখন যদি আমরা পলিনোমিয়াল (Polynomial) বা বহুপদ শ্রেণীটিকে  $H_n(p)$  দ্বারা প্রকাশ করি তাহলে  $n$  এর মান যুগ্ম অথবা অযুগ্ম সংখ্যা হলে এই শ্রেণীটিও যুগ্ম অথবা অযুগ্ম সংখ্যক পদের হবে। কারণ  $H_n(p) = (-1)^n H_n(-P)$  এবং  $n(p) = e^{-p^2/2} H(p)$  সমাধানে (12.85 সমীকরণ দ্রষ্টব্য) যেহেতু  $e^{-p^2/2}$  পদে বর্গ উপস্থিত থাকায় স্থান উৎক্রমণে (space reversal) এর কোন পরিবর্তন হবে না সুতরাং  $u(p)$  এর আইগেন অপেক্ষকগুলির প্যারিটি এবং  $H(p)$  এর প্যারিটি একই হবে।

(12.86) সমীকরণ  $H'' - 2pH' + (\lambda - 1)H = 0$  তে  $\lambda = 2n + 1$  বসিয়ে পাই

$$H''_n - 2pH'_n + 2n H_n = 0 \quad \dots \dots (12.99)$$

ওপরের সমীকরণের সমাধান একটি  $n$  ক্রমের (order) বহুপদ শ্রেণী (polynomial)। এটিকে  $n$  ক্রমের হারমাইট পলিনোমিয়াল  $H_n(p)$  বলা হয়।

$H_n(p)$  এর ধর্ম বিস্তৃতভাবে আলোচনা করার জন্য এটিকে একটি জনক অপেক্ষকের (Generating function) সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। অপেক্ষকটিকে  $G(p, s)$  লিখলে

$$G(p, s) = \sum_n \frac{1}{n!} H_n(p) s^n = e^{p^2 - (s-p)^2} = e^{-s^2 + 2sp} \quad \dots \dots (12.100)$$

$s$  এর মান যে কোন বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। (12.100) সম্পর্কতে প্রকাশিত  $H_n$  এর মান (12.99) সমীকরণকে সন্তুষ্ট করে দেখানোর জন্য (12.100) সমীকরণকে প্রথমে  $P$  এবং পরে  $s$  এর সাপেক্ষে অবকল করা হল

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial p} &= 2se^{-s^2 + 2ps} = \sum_n 2s \frac{s^n}{n!} H_n(p) = \sum_n 2 \frac{s^{n+1}}{n!} H_n(p) \\ &= \sum_n \frac{s^n}{n!} H'_n(p) \\ \frac{\partial G}{\partial s} &= (-2s + 2P)e^{-s^2 + 2sP} = \sum_n (-2s + 2P) \frac{s^n}{n!} H_n(P) \end{aligned}$$

$$= \sum_n \frac{n s^{n-1}}{n!} H_n(P) = \sum_n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} H_n(P)$$

সুতরাং আমরা পাই

$$\frac{\partial G}{\partial P} = \sum_n \frac{2s^{n+1}}{n!} H_n(P) = \sum_n \frac{s^n}{n!} H'_n(P)$$

$$\text{এবং } \frac{\partial G}{\partial s} = \sum_n \frac{(-2s + 2p)s^n}{n!} H_n(P) = \sum_n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} H_n(P)$$

ওপরের দুটি সমীকরণে যদি  $s$  এর সমান ঘাতযুক্ত পদগুলিকে উভয়দিকে সমান লিখি তাহলে

প্রথম সমীকরণে  $s^n$  যুক্ত পদগুলিকে সমান লিখে

$$\frac{2s^n}{(n-1)!} H_{n-1}(P) = \frac{s^n}{n!} H'_n(P)$$

$$\text{অথবা } H'_n = \frac{n!}{(n-1)!} 2H_{n-1}$$

$$\text{অথবা } H'_n = 2n H_{n-1}$$

দ্বিতীয় সমীকরণে  $s^n$  যুক্ত পদগুলিকে সমান লিখে

$$\frac{-2s^n}{(n-1)!} H_{n-1}(P) + \frac{2ps^n}{n!} H_n(P) = \frac{s^n}{n!} H_{n+1}(P)$$

$n!$  দ্বারা গুণ করে পাই

$$-2n H_{n-1}(P) + 2p H_n(P) = H_{n+1}(P)$$

$$\text{অথবা } -2n H_{n-1} + 2p H_n = H_{n+1}$$

অতএব আমরা যে দুটি সম্পর্ক পেলাম সে দুটি হল

$$H'_n = 2n H_{n-1} \quad \dots \dots (12.101a)$$

$$\text{এবং } H_{n+1} = 2p H_n - 2n H_{n-1} \quad \dots \dots (12.101b)$$

(12.101a) থেকে পাই

$$H'_n = 2n H_{n-1}$$

$$\text{অথবা } H''_n = 2n H'_{n-1} = 2n \times 2(n-1) H_{n-2}$$

(12.101b) কে লেখা যায়

$$H_{n+1} - 2p H_n + 2n H_{n-1} = 0$$

ওপরের সম্পর্ককে নীচের রূপেও লেখা যায়

$$H_n - 2PH_{n-1} + 2(n-1)H_{n-2} = 0$$

$2H_{n-1}$  এবং  $2(n-1)H_{n-2}$  এর মান বসিয়ে

$$H_n - p \frac{H_n'}{n} + \frac{H_n''}{2n} = 0$$

অথবা  $H_n'' - 2pH_n' + 2nH_n = 0 \dots$  এটিই 12.99 সমীকরণের রূপ, এই সমীকরণটি এবং সরল রৈখিক দোলক সমস্যার সমাধানের জন্য যে সমীকরণের সাহায্য নিয়েছি তা অভিন্ন। অতএব এই সমীকরণে যে বহুপদ শ্রেণীটি ব্যবহার করা হয়েছে সেটি হারমাইট পলিনোমিয়াল  $H_n(P)$ ।

$H_n(P)$  এর নির্দিষ্ট রূপটি নির্ণয় করতে হলে আমাদের  $G(p, s)$  এর সাহায্য নিতে হবে।

আমরা জানি যে

$$G(P, s) = \sum_n \frac{H_n(P)s^n}{n!} = e^{p^2 - (s-p)^2}$$

দেখা যাবে যে ওপরের সম্পর্কে  $s$  এর সাপেক্ষে  $-n$  সংখ্যকবার অবকল করে  $s = 0$  বসালে যে মানটি পাওয়া যাবে সেটি  $H_n(P)$

$$\therefore \frac{\partial^n G}{\partial s^n} = \frac{\partial^n}{\partial s^n} \sum_s \frac{H_n(P)s^n}{n!} = (\text{নীলঘাতের পদগুলি শূন্য হবে})$$

$$+ \frac{n!}{n!} H_n(P) + \text{সহগ} \times s H_{n+1}(P) + \text{সহগ} \times s^2 H_{n+2}(P) + \dots$$

ওপরের সম্পর্কে  $s = 0$  বসালে

$$\frac{\partial^n G}{\partial s^n} = H_n(P)$$

এখন অপেক্ষক  $f(s-p)$  এর ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি  $\frac{df}{ds} = -\frac{df}{dp}$

$$\therefore \frac{\partial^n G}{\partial s^n} = e^{p^2} \frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{-(s-p)^2} = e^{p^2} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial p^n} e^{-(s-p)^2}$$

এখন  $s = 0$  বসিয়ে আমরা  $n$  ক্রমের হারমাইট পলিনোমিয়ালের রূপ পাই

$$\frac{\partial^n G}{\partial s^n} = H_n(p) = e^{p^2} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial p^n} e^{-p^2} \dots \dots (12.102)$$

খুব সহজেই দেখানো যায় যে  $n$  এর বিভিন্ন যুগ্ম এবং অযুগ্ম মানের জন্য (12.94) এবং (12.95) সমীকরণে ব্যবহৃত শ্রেণী দুটি (একটি ধ্রুবক গুণিতক (multiplication const) ছাড়া) এবং ওপরের পলিনোমিয়ালটি অভিন্ন।

$n$  এর বিভিন্ন মানের জন্য হারমাইট পলিনোমিয়ালের রূপ

$$H_0(P) = 1 \quad H_1(P) = 2P \quad H_2(P) = 4P^2 - 2 \quad H_3(P) = 8P^3 - 12$$

সরল রৈখিক দোলকের তরঙ্গ অপেক্ষকের প্রমাণিকৃত (normalized) রূপ

$$\psi_n(P) = N_n e^{-p^2/2} H_n(P) \quad \dots \dots (12.103)$$

এখানে  $N_n$  = প্রমাণিকরণ ধ্রুবক (normalisation const)

$$= \left( \frac{1}{\sqrt{\pi n! 2^n}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$n$  এর যুগ্ম এবং অযুগ্ম বিভিন্ন মানের জন্য কয়েকটি  $\psi_n(P)$  এর মান নীচে দেওয়া হল

$$\psi_0(P) = \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{p^2}{2}}$$

$$\psi_1(P) = \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} p e^{-\frac{p^2}{2}}$$

$$\psi_2(P) = \left( \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} (2p^2 - 1) e^{-\frac{p^2}{2}}$$

$$\psi_3(P) = \left( \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} (2p^3 - 3p) e^{-\frac{p^2}{2}} \quad \dots \dots (12.104)$$

লক্ষ্যীয় যে  $p$  এর সীমিত (finite) মানের জন্য  $\psi_0$ -তে কোন নিস্পন্দ বিন্দু নেই।  $n$ -এর উচ্চমানের জন্য নিস্পন্দ বিন্দুর সংখ্যা  $n$  এর সঙ্গে বৃদ্ধি পায়। উদাহরণস্বরূপ  $\psi_1$  এ  $p = 0$  তে একটি নিস্পন্দ বিন্দু আছে  $\psi_2$  এর  $P = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$  এ দুটি নিস্পন্দ বিন্দু আছে।

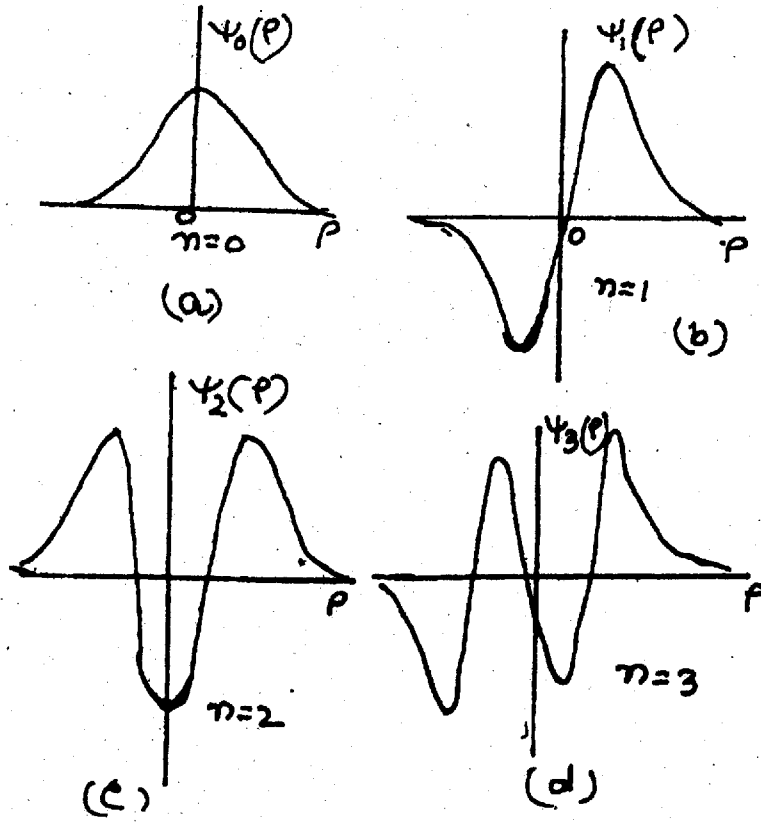
(12.104) এর তালিকাভুক্ত তরঙ্গ অপেক্ষকগুলিকে দুটি ভাগে ভাগ করা যায়। এগুলি হয়  $p$  এর যুগ্ম অপেক্ষক অথবা অযুগ্ম অপেক্ষক।

$P$  কে  $-p$  তে পরিবর্তিত করলে  $\psi(p)$ ,  $\psi(-p)$  তে পরিবর্তিত হয়। (12.104) সম্পর্কগুলিতে দেখা যায় যে

$n = 0$  অথবা যুগ্ম সংখ্যা হলে  $\psi(-p) = \psi(p)$  হবে অর্থাৎ পরিবর্তনে তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপ অপরিবর্তিত থাকবে এবং  $n =$  অযুগ্ম সংখ্যা হলে  $\psi(-p) = -\psi(p)$  হবে অর্থাৎ পরিবর্তনে তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপের চিহ্নের পরিবর্তন হবে, তরঙ্গ অপেক্ষকের এই ধর্মকে প্যারিটির সাপেক্ষে বলা হয় যে  $n = 0$  অথবা যুগ্ম মানের জন্য  $\psi(p)$  এর যুগ্ম প্যারিটি (even parity) এবং  $n =$  অযুগ্ম মানের জন্য  $\psi(p)$  এর অযুগ্ম প্যারিটি (odd parity) হয়।

চিত্রে (12.9) এ সরল রৈখিক দোলকের কয়েকটি প্রমাণিকৃত তরঙ্গ অপেক্ষকের চিত্ররূপ দেখানো হল।





চিত্র 12.9

## 12.6 সারাংশ

এই অংশটি পড়ে আমরা শ্রোডিংগার সমীকরণের আবদ্ধ অবস্থায় কিছু প্রয়োগের কথা জানলাম।

প্রথম প্রয়োগটি হচ্ছে একমাত্রিক অসীম বিভবকূপে অবস্থিত কোন কণার সম্ভাব্য বিভিন্ন তরঙ্গ অপেক্ষক এবং শক্তির নির্ণয় করা। অসীম বিভবের দেওয়াল দুটির অবস্থান যদি  $0$  এবং  $a$  তে ধরা হয় তবে কণা সংলগ্ন তরঙ্গ অপেক্ষকগুলির প্রমাণিত রূপ

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad n = 1, 2, \dots \dots \text{এবং শক্তির মান } E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

বিভব বাহুরি ত্রিমাত্রিক হলে প্রমাণিত তরঙ্গ অপেক্ষকের মান হয়

$$\Psi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{n_x \pi x}{a} \sin \frac{n_y \pi y}{b} \sin \frac{n_z \pi z}{c} \text{ এবং}$$

$$\text{শক্তির মান } E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left[ \frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right]$$

$$\text{যেখানে } n_x = 1, 2, 3 \dots$$

$$n_y = 1, 2, 3 \dots$$

$$n_z = 1, 2, 3 \dots$$

কণাটি যদি একটি বর্গক্ষেত্রাকার বাস্কে অবস্থিত হয় অর্থাৎ  $a = b = c = L$  তাহলে শক্তিস্তরগুলির মান হবে

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

দেখা যাচ্ছে যে কণাটির শক্তি কোয়ান্টাম সংখ্যাগুলির বর্গের যোগফলের ওপর নির্ভর করে। কাজেই উত্তেজিত অবস্থায় একই শক্তি সম্পন্ন কণার বিভিন্ন স্থিরাবস্থা বা বিভিন্ন তরঙ্গ অপেক্ষক হওয়া সম্ভব। এই অবস্থাগুলি এবং শক্তিস্তরগুলিকে বলা হয় অপজাত (degenerate)। এই ক্ষেত্রে কেবল মাত্র ভৌম অবস্থা (ground state) শক্তিস্তর কণার একটি তরঙ্গ অপেক্ষক বা একটি স্থিরাবস্থা সম্ভব। সেইজন্য ভৌম অবস্থাটি অপজাত নয়।

একমাত্রিক আয়তাকার বিভব কূপটি যদি সসীম হয় তাহলে দুটি ক্ষেত্রের আলোচনা প্রয়োজন— (a) যখন  $E < V_0$  তখন দুটি ধরনের তরঙ্গ অপেক্ষক পাওয়া যায়। যুগ্ম মানের শক্তিস্তরের তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি কূপের মধ্যবিন্দুর উভয়দিকে প্রতিসমভাবে অবস্থিত থাকে (symmetric); এবং অযুগ্মমানের শক্তিস্তরের তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি বিপ্রতিসম ভাবে অবস্থিত থাকে (antisymmetric)। (b) যখন  $E > V_0$  — তখন আপতিত তরঙ্গের কিছু অংশের বিভবকূপের ভিতর দিয়ে উত্তীর্ণ হওয়া সম্ভব। এই উত্তরণ গুণকের রূপ

$$T = \frac{j_{3t}}{j_{1 \text{ in}}} \quad \text{যেখানে } j_{1 \text{ in}} = \text{আপতিত সম্ভাব্যতা প্রবাহের ঘনত্ব}$$

$$\text{এবং } j_{3t} = \text{উত্তীর্ণ সম্ভাব্যতা প্রবাহের ঘনত্ব}$$

বিশেষ একটি ক্ষেত্রে কূপের বিভার ডি-ব্রাগলি তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের অর্ধেক হলে আপতিত তরঙ্গের শতকরা ১০০ ভাগেরই বিভবকূপের ভিতর দিয়ে উত্তীর্ণ হওয়া সম্ভব।

সবশেষে সরল রৈখিক দোলকের কথা আলোচনা করে আপনারা শূন্যাক শক্তির বিষয়ে জেনেছেন যে সাম্যাবস্থায় স্থির থাকলেও সরল দোলকের কিছু শক্তি থাকে। এই শক্তিকে বলা হয় শূন্যাক শক্তি এবং এটির মান  $\frac{\hbar \omega}{2}$ । এই শূন্যাক শক্তির অস্তিত্ব হাইসেনবার্গের অনিশ্চয়তা প্রকল্পকে প্রমাণ করে।

## 12.7 সর্বশেষ প্রণাবলি

(1)  $m$  ভর বিশিষ্ট একটি সরল দোলকের স্থিতিশক্তির মান  $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$  যেখানে  $\omega =$  দোলকটির কৌণিক কম্পাঙ্ক

(a) সরল দোলকটির জন্য শ্রোডিংগারের সময় নিরপেক্ষ সমীকরণটি লিখুন

(b) দেওয়া আছে ভৌম অবস্থায় দোলকের হ্যামিলটোনিয়ানের আইগেন অপেক্ষকের রূপ

$$\psi_0 = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2/2} \text{ যেখানে } \alpha = \frac{m\omega}{\hbar} \text{ দোলকটির ভৌম অবস্থায় শক্তির আইগেন মান নির্ণয়}$$

করুন।

(2) দেখান যে নীচের ঘাত শ্রেণীটি

$$\begin{aligned} H(y) &= A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n y^n \end{aligned}$$

যদি  $n$  এর কোন একটি মান গিয়ে শূন্য না হয় তাহলে তরঙ্গ অপেক্ষক  $\psi = e^{-y^2/2} H(y)$  এর মান  $y$  এর অতি উচ্চমানের জন্য অসীম হবে; অর্থাৎ  $y \rightarrow \infty$  হলে  $\psi \rightarrow \infty$  হবে

(দেওয়া আছে যে ঘাত শ্রেণীর একান্তর সহগগুলি  $A_{n+2} = \frac{(2n+1-\lambda)}{(n+1)(n+2)} A_n$  সম্পর্ক দ্বারা পরস্পরের সঙ্গে যুক্ত)

## 12.8 উত্তরমালা

### অনুশীলনী 1

একত্রে অভেদ্য দেওয়াল দুটির স্থানাঙ্ক  $-\frac{a}{2}$  এবং  $\frac{a}{2}$  সুতরাং সীমাহীন শর্তগুলি হবে

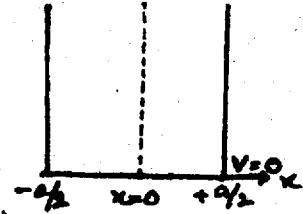
$$-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \text{ অঞ্চলে } V = 0 \text{ এবং } x = \pm \frac{a}{2} \text{ তে } V = \alpha$$

তরঙ্গ অপেক্ষকের সাপেক্ষে লিখতে পারি  $\psi\left(-\frac{a}{2}\right) = \psi\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ .

আমরা জানি বাস্তব ভিতর শ্রোডিংগারের সমীকরণের সাধারণ সমাধানের রূপ

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx.$$

... (A)



A এবং B কে নির্ণয় করতে সীমান্ত শর্ত দুটি ব্যবহার করলে

$$x = \frac{a}{2} \text{ বিন্দুতে } \psi(x) = 0$$

$$x = -\frac{a}{2} \text{ বিন্দুতে } \psi(x) = 0$$

$$\text{অর্থাৎ } A \sin \frac{ka}{2} + B \cos \frac{ka}{2} = 0$$

$$\text{এবং } -A \sin \frac{ka}{2} + B \cos \frac{ka}{2} = 0$$

$$\text{ওপরের দুটি সমীকরণকে যোগ করে } 2B \cos \frac{ka}{2} = 0 \text{ অর্থাৎ হয় } B = 0 \text{ অথবা } \cos \frac{ka}{2} = 0$$

$$\text{এবং সমীকরণ দুটির বিয়োগ ফল নিয়ে } 2A \sin \frac{ka}{2} = 0 \text{ অর্থাৎ হয় } A = 0 \text{ অথবা } \sin \frac{ka}{2} = 0$$

A ও B একই সঙ্গে শূন্য হতে পারে না আবার E ও a-র একটি মানের জন্য  $\sin \frac{ka}{2}$  এবং  $\cos \frac{ka}{2}$  একই

সঙ্গে শূন্য হতে পারে না। কাজেই দুটি শ্রেণীর সম্ভাব্য সমাধান পাওয়া যেতে পারে যেগুলি হল

$$(i) \quad A = 0 \quad \text{এবং} \quad \cos \frac{ka}{2} = 0$$

$$\text{অথবা } (ii) \quad B = 0 \quad \text{এবং} \quad \sin \frac{ka}{2} = 0$$

প্রথম শ্রেণীর সমাধান থেকে আমরা পাই

$$\frac{ka}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \left( \because \cos \frac{ka}{2} = 0 \right) \quad \dots (B)$$

$$= \frac{n\pi}{2} \text{ যেখানে } n = \text{অযুগ্ম সংখ্যা}$$

এবং দ্বিতীয় শ্রেণীর সমাধান থেকে পাই

$$\frac{ka}{2} = \pi, 2\pi, \frac{6\pi}{2}, \dots \left( \because \sin \frac{ka}{2} = 0 \right)$$

$$= \frac{2\pi}{2}, \frac{4\pi}{2}, \frac{6\pi}{2}, \dots$$

$$= \frac{n\pi}{2} \text{ যেখানে } n = \text{যুগ্ম সংখ্যা} \quad \dots (C)$$

ওপরের মান দুটি অর্থাৎ (B) ও (C) কে (A) তে বসালে তরঙ্গ সমীকরণের সাধারণ সমাধানের রূপগুলি

হবে

$$\psi_n = B \cos \frac{n\pi x}{a} \quad (\text{যখন } n = 1, 3, 5 \dots) \quad \dots (D)$$

$$\text{এবং } \psi_n = A \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (\text{যখন } n = 2, 4, 6 \dots) \quad \dots (E)$$

(D) সমীকরণে  $\psi_n$  কে প্রমাণিকরণ (normalise) করা হলে

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} B^2 \cos^2 \frac{n\pi x}{a} dx = 1$$

$$\text{বা, } \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{B^2}{2} \left[ 1 + \cos \frac{2n\pi x}{a} \right] dx = 1$$

$$\text{বা, } \frac{B^2}{2} \left[ \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right] = 1.$$

$$\text{অথবা } B^2 = \frac{2}{a} \therefore B = \sqrt{\frac{2}{a}}.$$

অনুরূপে (E) সমীকরণে  $\psi_n$  কে প্রমাণিকরণ করলে পাওয়া যায়

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\therefore \text{প্রমাণিকৃত তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি } \psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a} \quad (n = 1, 3, 5 \dots)$$

$$\text{এবং } \psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (n = 2, 4, 6 \dots)$$

## অনুশীলনী 2

$$\text{আমরা জানি } \langle x \rangle = \int_{-a}^{+a} \psi^* x \psi dx$$

$$\text{এখানে } \psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad \text{যখন } 0 < x < a$$

$$\text{এবং } \psi_n = 0 \quad \text{যখন } x \leq 0 \text{ এবং } x \geq a.$$

$$\begin{aligned} \therefore \langle x \rangle &= \frac{2}{a} \int_0^a x \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a x \left( 1 - \cos^2 \frac{n\pi x}{a} \right) dx \\ &= \frac{1}{a} \left[ \int_0^a x dx - \int_0^a x \cos^2 \frac{n\pi x}{a} dx \right] \\ &= \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{অনুরূপে } \langle p_x \rangle &= \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} \left\{ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \left( \sin \frac{n\pi x}{a} \right) \right\} dx \\
&= \frac{2}{a} (-i\hbar) \cdot \frac{n\pi}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

### অনুশীলনী 3

(a) বর্গক্ষেত্রাকার বাক্সের বাহুর দৈর্ঘ্য  $a$  হলে দেওয়া আছে  $a = 10^{-10}m$  বাক্সের মধ্যে অবস্থিত একটি কণার সম্ভাব্য শক্তিস্তরগুলির মান

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

সর্বনিম্ন শক্তিস্তরের জন্য  $n_x = n_y = n_z = 1$ .

$$\begin{aligned}
\therefore E_1 &= \frac{3\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{3\pi^2 \times (1.054 \times 10^{-34})^2}{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times (10^{-10})^2} J \\
&= \frac{32.85 \times 10^{-17}}{18.22} J = 18.03 \times 10^{-18} J
\end{aligned}$$

(b) মনে করি  $T^\circ K =$  নির্ণয় উষ্ণতা

$$\therefore \frac{3}{2} KT = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

এবং আমরা পেয়েছি  $\frac{3\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = 18.03 \times 10^{-18} J$ .

$$\text{সুতরাং } \frac{3}{2} KT = 18.03 \times 10^{-18} J.$$

$$\text{বা, } T = \frac{2 \times 18.03 \times 10^{-18}}{3 \times 1.38 \times 10^{-23}}$$

$$= 8.71 \times 10^5 K.$$

### অনুশীলনী 4

বর্গক্ষেত্রাকার বাক্সে কণার শক্তিস্তরের প্রতিক্রম

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

এক্ষেত্রে দেওয়া আছে

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{14\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

অর্থাৎ  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 14$  অতএব  $n_x, n_y, n_z$  এর সম্ভাব্য মানগুলি হবে

$n_x$	$n_y$	$n_z$	$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$
1	2	3	14
1	3	2	14
2	1	3	14
2	3	1	14
3	1	2	14
3	2	1	14

সুতরাং আপজাতের মাত্রা 6.

### অনুশীলনী 5

(12.83) সমীকরণের রূপ

$$\frac{d^2u}{dp^2} + (\lambda - p^2)u = 0$$

দেওয়া আছে  $u(p) = e^{-p^2/2} H(p)$

$$\therefore \frac{du}{dp} = H'e^{-p^2/2} - Hpe^{-p^2/2}$$

$$\frac{d^2u}{dp^2} = H''e^{-p^2/2} - H'pe^{-p^2/2} - He^{-p^2/2} + Hp^2e^{-p^2/2}$$

সুতরাং  $\frac{d^2u}{dp^2} + (\lambda - p^2)u = 0$  কে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$(H'' - 2H'p + Hp^2 + \lambda H - p^2H - H)e^{-p^2/2} = 0$$

যেহেতু  $e^{-p^2/2} \neq 0$

$$\therefore H'' - 2H'p + (\lambda - 1)H = 0 \rightarrow \text{নির্ণয় সমীকরণ}$$

সর্বশেষ প্রমাণ

(1) দোলকটির হ্যামিলটোনীয় কারকের রূপ

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

(a) অতএব সরল দোলকের শ্রোডিংগারের সময় নিরপেক্ষ সমীকরণের রূপ

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right] \psi(x) = E \psi(x) \quad \dots (1)$$

(b) ভৌম অবস্থায় শ্রোডিংগারের সমীকরণ

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right] \psi_0 = E_0 \psi_0$$

দেওয়া আছে  $\psi_0 = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha x^2/2}$

$$\therefore \frac{d\psi_0}{dx} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha x^2/2} (-\alpha x)$$

$$= -\alpha x \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha x^2/2}$$

$$= -\alpha x \psi_0$$

$$\text{এবং } \frac{d^2\psi_0}{dx^2} = -\alpha x \frac{d\psi_0}{dx} - \alpha \psi_0 = -\alpha x(-\alpha x \psi_0) - \alpha \psi_0$$

$$= \alpha^2 x^2 \psi_0 - \alpha \psi_0$$

ওপরের সমীকরণকে  $-\frac{\hbar^2}{2m}$  দিয়ে গুণ করে

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_0}{dx^2} = -\frac{\hbar^2}{2m} \alpha^2 x^2 \psi_0 + \frac{\hbar^2}{2m} \alpha \psi_0$$

$$\alpha = \frac{m\omega}{\hbar} \text{ পসিয়ে পাই}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_0}{dx^2} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} x^2 \psi_0 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{m\omega}{\hbar} \psi_0$$

$$\text{বা, } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_0}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \psi_0$$



$$\text{বা, } \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right] \psi_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \psi_0 \quad \dots (2)$$

(1) এবং (2) এর তুলনা করে  $E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega \rightarrow$  ভৌম অবস্থায় শক্তি

(2)  $u$  এর মান খুব বড় হলে আবৃত্ত সম্পর্ক

$$A_{n+2} = \frac{(2n+1-\lambda)}{(n+1)(n+2)} A_n \text{ এ } n \text{ এর তুলনায় অন্য পদগুলিকে নগন্য হিসাবে নেওয়া যায়}$$

$$\therefore A_{n+2} = \frac{2n}{n^2} A_n = \frac{2}{n} A_n \quad \dots (A)$$

$$\text{আমরা জানি } e^{y^2} = 1 + y^2 + \frac{y^4}{2!} + \dots + \frac{y^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!} + \frac{y^{n+2}}{\left(\frac{n+2}{2}\right)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} B_n y^n \text{ যেখানে } n = \text{যুগ্ম সংখ্যা।} \quad \dots (B)$$

$y_n$  এবং  $y_{n+2}$  পদের সহগ  $B_n$  এবং  $B_{n+2}$  এর মান

$$B_n = \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \text{ এবং } B_{n+2} = \frac{1}{\left(\frac{n+2}{2}\right)!}$$

অতএব (B) শ্রেণীর সহগগুলির মধ্যে সম্পর্ক

$$\begin{aligned} \frac{B_{n+2}}{B_n} &= \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n+2}{2}\right)!} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2}+1\right)!} = \frac{\frac{n!}{2}}{\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{n}{2}+1} \end{aligned}$$

$n$  এর খুব বড় মানের জন্য

$$\frac{B_{n+2}}{B_n} = \frac{2}{n} \therefore B_{n+2} = \frac{2}{n} B_n \quad \dots (C)$$

(A) সমীকরণকে (C) দ্বারা ভাগ করলে

$$\frac{A_{n+2}}{B_{n+2}} = \frac{A_n}{B_n} = C \text{ যেখানে } C = \text{একটি ধ্রুবক}$$

$$\therefore A_n = C B_n$$

∴  $n$  এর বৃহৎ মানের জন্য

$$\sum A_n Y_n = \sum C B_n Y^n = C \sum B_n Y^n = C e^{Y^2}$$

∴  $H(y) = f(y) + C e^{Y^2} \rightarrow$  যেখানে  $f(y) =$  শ্রেণীটির  $y$  এর নিম্নখাতযুক্ত পদগুলির সমষ্টি

∴ সম্পূর্ণ তরঙ্গ অপেক্ষকের রূপ

$$\psi(y) = e^{-y^2/2} H(y)$$

$$= e^{-y^2/2} [f(y) + C e^{Y^2}]$$

$$= e^{-y^2/2} f(y) + C e^{Y^2/2} \quad \dots (D)$$

(D) সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে যে  $y$  এর মান অসীম হলে  $C e^{Y^2/2}$  এর মানও অসীম হবে। অতএব  $y$  এর যে কোন মানের জন্য  $\psi(y)$  এর মান সসীম হতে হলে  $H(y)$  এর ঘাত শ্রেণীটিকে নির্দিষ্ট সসীম সংখ্যক পদের পরে শূন্য হতে হবে যাতে কেবল মাত্র প্রথম পদটি  $e^{-y^2/2} f(y)$  (D) সমীকরণে থাকে।