একক 2 ❑ নির্দেশাঙ্কের লরেন্ৎসীয় পরিবর্তন

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা

বর্তমান পাঠক্রমের প্রথম এককে আপনি গ্যালিলিয়ো পরিবর্তন ও আপেক্ষিকতার সনাতন তত্ত্বের পরিচয় পেয়েছেন। আপনি দেখেছেন যে বলবিদ্যার সাধারণ ঘটনাগুলি যদি কোনো একটি নির্দেশতন্ত্রে নিউটনীয় গতিবিদ্যাসূত্র মেনে চলে তবে ঐ নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে সমবেগে চলনশীল কোনো নির্দেশতন্ত্রেও যেগুলি নিউটনীয় গতিসূত্র প্রতিপালন করে। এই নির্দেশতন্ত্রগুলিকে আমরা জড়ত্বীয় ফ্রেম নামে অভিহিত করেছি।

বিভিন্ন জড়ত্বীয় ফ্রেমের মধ্যে কোনো একটি ফ্রেম পরম স্থির এবং অন্যগুলি ঐ বিশেষ ফ্রেমের সাপেক্ষে গতিশীল এরূপ একটি ধারণা বিজ্ঞানীদের মধ্যে তৈরি হয়েছিল। এবং তার ফলে তাঁরা ঐ পরম স্থির ফ্রেমের সাপেক্ষে স্থির থাকে এমন একটি মাধ্যম কল্পনা করেছিলেন। এই কল্পিত মাধ্যমের নাম দেওয়া হয়েছিল ইথার। যার সাপেক্ষে শূন্য মাধ্যমে আলোর বেগ c অর্থাৎ 3×10^8 মি/সে। ইথার মাধ্যমের অস্তিত্ব প্রমাণের জন্য নানা পরীক্ষা করা হয়েছিল কিন্তু পরীক্ষার ফল ইথারের অস্তিত্বকে সমর্থন না করায় শেষ পর্যন্ত ইথার প্রকল্পটিকে বর্জন করা হয়।

অন্যদিকে এও দেখা যায় যে ম্যাক্সওয়েলের তড়িৎচুম্বকীয় সমীকরণগুলি নির্দেশাঙ্কের গ্যালিলিয়ো রূপান্তরণে ভিন্ন রূপ গ্রহণ করে। অর্থাৎ সেগুলি এক জড়ত্বীয় ফ্রেমে সত্য হলে অন্য জড়ত্বীয় ফ্রেমে সত্য থাকে না।

বিভিন্ন পরীক্ষা-নিরীক্ষার ফলাফল এবং অ্যালবার্ট আইনস্টাইনের অসামান্য বিশ্লেষণ ক্ষমতা ও অন্তর্দৃষ্টি, এই দুই-এর মিলনে 1905 খিস্টাব্দে প্রকাশিত হয়েছিল আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব। এই তত্ত্ব বিভিন্ন পরীক্ষার ফল, তথা তড়িৎচুম্বকীয় ঘটনাবলী ও আলোর বেগ সম্বন্ধীয় যাবতীয় জটিলতার সম্পূর্ণ ব্যাখ্যা দিতে সমর্থ হয়েছিল।

এই এককে আমরা আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের অঙ্গীকারগুলি কীভাবে আমাদের নির্দেশতন্ত্রের গ্যালিলিয়ো পরিবর্তনের একটি উপযুক্ত বিকল্পে উপনীত করে সেটি আলোচনা করব। নির্দেশতন্ত্রের এই আপেক্ষিকতাবাদী পরিবর্তনই হল লরেন্‌ৎসীয় পরিবর্তন। এই পরিবর্তনের সমীকরণগুলি ব্যবহার করে আমরা দৈর্ঘ্য ও সময়ের অন্তরাল বিভিন্ন জড়ত্বীয় ফ্রেমে কীভাবে পরিবর্তিত হয় সেগুলির লক্ষ করব। মোটের ওপর আপনার কাছে এই এককটি হবে আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের সিংহদ্বার।

উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়লে আপনার যে সমস্ত কাজ করার ক্ষমতা জন্মাবে সেগুলি হল—

- আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের মূল অঙ্গীকারগুলি বিবৃত ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- লরেন্‌ৎসীয় পরিবর্তন সূত্রগুলি লিখতে পারবেন এবং সেগুলি গাণিতিকভাবে প্রতিষ্ঠিত করতে পারবেন।
- দৈর্ঘ্যের লরেন্‌ৎসীয় সংকোচন ও সময়ের দীর্ঘায়ন ব্যাখ্যা করতে পারবেন এবং এগুলির সূত্র প্রতিষ্ঠিত করতে পারবেন।
- মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষার নঞর্থক ফলের প্রকৃত আপেক্ষিকতাবাদী ব্যাখ্যা দিতে পারবেন।
- দুই যমজের রহস্যটি বিবৃত করতে ও তার ব্যাখ্যা দিতে পারবেন।

2.2 আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের মূল অঙ্গীকার

এই পাঠক্রমের প্রথম এককে আপনি দেখেছেন, গতিবিদ্যার সাধারণ সূত্রগুলি কোনো একটি নির্দেশতন্ত্রে সত্য হলে গ্যালিলিয়ো পরিবর্তনের মাধ্যমে লব্ধ অন্য নির্দেশতন্ত্রেও সত্য থাকে। এজন্য এই দুটি নির্দেশতন্ত্রকেই আমরা জড়ত্বীয় ফ্রেম বলে থাকি। কিন্তু ম্যাক্সওয়েলের তড়িৎচুম্বকীয় সমীকরণগুলির উপর গ্যালিলিয়ো পরিবর্তন আরোপ করলে সেগুলির রূপ একেবারেই বদলে যায়, অর্থাৎ একটি ফ্রেমে c বেগে সঞ্চারিত আলোকতরঙ্গের সমীকরণ পাওয়া গেলেও অন্য ফ্রেমে তা পাওয়া যায় না। গ্যালিলিয়ো

পরিবর্তন, অর্থাৎ সনাতন আপেক্ষিকতা-তত্ত্ব যদি সত্য হত তবে আমরা নানা ফ্রেমে আলোর বেগের পরিমাপ করে কোন্ ফ্রেমে সেটির মান c হয় তা বার করতে পারতাম এবং তা থেকে কোন্ ফ্রেমটি পরম স্থির সেটিও জানতে পারতাম। আপনি আগেই জেনেছেন, এই পরম স্থির ফ্রেমের অনুসন্ধান ব্যর্থতায় পর্যবসিত হয়েছিল।

1905 খ্রিস্টাব্দে আইনস্টাইন "On the Electrodynamics of Moving Bodies" বা 'গতিশীল বস্তুর তড়িতীয় গতিবিদ্যা' নামের গবেষণাপত্রে যে আপেক্ষিকতা তত্ত্ব উপস্থাপন করেন তা দুটি মৌলিক অঙ্গীকারের উপর প্রতিষ্ঠিত। এগুলি হল ঃ

● **প্রথম অঙ্গীকার ঃ** পদার্থবিদ্যার সমস্ত নিয়ম সব জড়ত্বীয় ফ্রেমে সমানভাবে প্রযোজ্য।

এই অঙ্গীকারকে আমরা 'আপেক্ষিকতার নীতি' বলব। বলা বাহুল্য এখানে তড়িৎচুম্বকীয় ঘটনাবলীর সূত্রগুলিও পদার্থবিদ্যার নিয়মের অন্তর্ভুক্ত, যার ফলে গ্যালিলিয়ো পরিবর্তন সূত্রগুলি গ্রহণযোগ্য থাকে না।

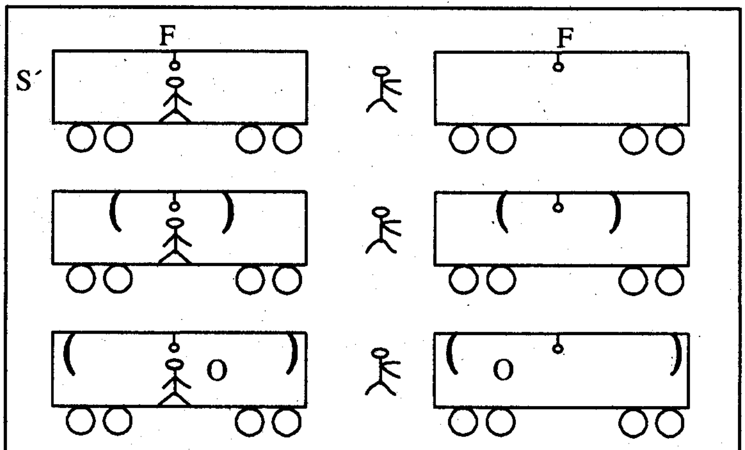
● **দ্বিতীয় অঙ্গীকার ঃ** শূন্যে আলোকের বেগ সব জড়ত্বীয় ফ্রেমেই সমান। এর অর্থ শূন্যে আলোকের বেগ c একটি ধ্রুবরাশি এবং শূন্যে আলোকের বেগের পরিমাপ করে কোনো একটি জড়ত্বীয় ফ্রেমকে অন্য একটি থেকে পৃথক করা যাবে না।

আপেক্ষিকতা-তত্ত্বের অঙ্গীকার দুটির তাৎপর্য বুঝতে নিশ্চয়ই আগ্রহী হবেন। প্রথম অঙ্গীকারটিতে পদার্থবিদ্যার নিয়ম বলতে কী বোঝানো হয়েছে? ধরা যাক কোনো একটি জড়ত্বীয় ফ্রেমে সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রে x, y ও z কোন একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক। ঐ বিন্দুতে যদি t সময়ে কোনো ঘটনা ঘটে তবে x, y, z, t, এই রাশিগুলি ঐ ঘটনার স্থানকাল নির্দেশ করবে। অনুরূপভাবে অন্য একটি জড়ত্বীয় S′ ফ্রেমে ঐ একই ঘটনার স্থানকাল ধরুন x′, y′, z′, t′। লক্ষ করুন, আমরা শুধু স্থানাঙ্কই নয়, সময়কেও দুই জড়ত্বীয় ফ্রেমে স্বতন্ত্র রাশি t ও t′ দিয়ে নির্দেশ করেছি। দুই জড়ত্বীয় ফ্রেমে কোনো বস্তুর দৈর্ঘ্য, ভর, বেগ, ভরবেগ, গতিশক্তি প্রভৃতি ভিন্ন হতে পারে, কেননা এগুলি ঐ বস্তুর ধর্ম, পদার্থবিদ্যার কোনো নিয়ম নয়। যদি দুই ফ্রেমে কোনো বস্তুর দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে ভিন্ন মান পাওয়া যায় তাহলেও ফ্রেম দুটির কোনো একটি স্থির এবং অন্যটি গতিশীল এমন বলা যাবে না। কেননা বস্তুটির পরম স্থির ফ্রেমে "প্রকৃত দৈর্ঘ্য" বলে কোনো রাশি আমাদের কাছে অজ্ঞাত। কিন্তু ভরবেগের সংরক্ষণ, স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে গতিশক্তির সংরক্ষণ, দুটি তড়িৎ আধানের মধ্যে কুলম্ব আকর্ষণ বা বিকর্ষণ, এগুলি পদার্থবিদ্যার নিয়ম এবং দুই জড়ত্বীয় ফ্রেমেই এগুলি প্রতিপালিত হতে দেখা যাবে।

দ্বিতীয় অঙ্গীকার থেকে বোঝা যায় যে শূন্যে আলোকতরঙ্গের চরিত্র বায়ুতে শব্দতরঙ্গ বা জলের উপর ঢেউ থেকে সম্পূর্ণ আলাদা। মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষার প্রত্যাশিত গণনায় (একক 1) আমরা ইথার মাধ্যমে আলোর বেগ $c \pm V$ ধরেছিলাম। বর্তমান অঙ্গীকার অনুযায়ী এটি একেবারেই ভুল।

গ্যালিলিয়ো নির্দেশতন্ত্র পরিবর্তনের সূত্রের মধ্যে আরও একটি গুরুত্বপূর্ণ ত্রুটি ছিল। S এবং S' এই দুই জড়ত্বীয় ফ্রেমে কোনো একটি ঘটনার সময় আমরা যথাক্রমে t ও t' ধরেছি এবং $t = t'$ ধরে নিয়েছি। যদি S ফ্রেমে দুটি ঘটনা t_1 ও t_2 সময়ে ঘটে তবে $t_1 = t_2$ হলে সে দুটিকে সমকালীন (simultaneous) বলে মনে করা হবে। S' ফ্রেমে যদি ঘটনা দুটি t_1' ও t_2' সময়ে ঘটে, তবে যেহেতু $t_1' = t_1$ এবং $t_2' = t_2$, অতএব $t_1' = t_2'$ হবে অর্থাৎ S' ফ্রেমেও ঘটনা দুটিকে সমকালীন বলে ধরতে হবে। কিন্তু বাস্তবে তা হয় কিনা সেটি পরীক্ষা করা যাক।

ধরে নিন একটি ট্রেনের কামরার মধ্যে দুই প্রান্তের দেওয়াল থেকে সমদূরত্বে একটি ফ্লাশগান F রয়েছে [চিত্র 2.1]। ট্রেনের কামরায় পর্যবেক্ষক O' এবং কামরার বাইরে প্ল্যাটফর্মে দাঁড়ানো পর্যবেক্ষক O, দুজনেই ফ্ল্যাশগান থেকে বার হওয়া আলোর অবস্থান লক্ষ করতে সক্ষম। ফ্ল্যাশগান থেকে একটি অতি স্বল্পস্থায়ী আলোর ঝলক হলে O' পর্যবেক্ষক আলোক তরঙ্গকে c বেগে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে একই সময়ে কামরার সামনের ও পিছনের দেওয়ালে আপতিত হতে দেখবেন। অর্থাৎ দুই দেওয়ালে আলোর আপতিত হওয়ার ঘটনা দুটি O'-এর কাছে সমকালীন (simultaneous) বলে মনে হবে। ধরে নিন আলোর ঝলক নির্গত হওয়ার মুহূর্তে O ও O' একই স্থানে ছিলেন।



চিত্র 2.1

প্ল্যাটফর্মে দাঁড়ানো পর্যবেক্ষক O-এর কাছেও আলোর বেগ c বলেই মনে হবে। কিন্তু তার কাছে কামরার পিছনের দেওয়াল কিছুটা এগিয়ে আসার ফলে এবং সামনের দেওয়াল ফ্ল্যাশগান থেকে দূরে সরে যাওয়ার ফলে আলোকতরঙ্গ পিছনের দেওয়ালে অপেক্ষাকৃত আগে আপতিত হল বলে মনে হবে। অর্থাৎ O-এর কাছে আলো দুই দেওয়ালে আপতিত হওয়ার ঘটনা দুটি সমকালীন বলে মনে হবে না।

উপরের আলোচনা থেকে নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে সমকালীনতা (simultaneity) বিষয়টি আপেক্ষিক এবং এক পর্যবেক্ষকের কাছে দুটি ঘটনা সমকালীন মনে হলেও অন্য জড়ত্বীয় ফ্রেমের পর্যবেক্ষকের কাছে সেগুলি সমকালীন নাও হতে পারে। সাধারণভাবে বলা যায় যে দুটি জড়ত্বীয় ফ্রেমে সময় t ও t'-কে সমমান বলে ধরে নেওয়া যায় না। গ্যালিলিয়ো নির্দেশতন্ত্র পরিবর্তনের সূত্রের কোনো সঠিক বিকল্প প্রতিষ্ঠা করতে হলে সেখানে t ও t'-কে স্বতন্ত্র ধরতে হবে। পরবর্তী অংশে আমরা এই বিকল্প সূত্র সম্বন্ধে আলোচনা করব।

2.3 লরেন্‌ৎসীয় পরিবর্তন সূত্র

পূর্ববর্তী এককের মতো ধরে নিন S ও S' দুটি সমকোণী কার্তেজীয় নির্দেশতন্ত্র। তাদের অক্ষগুলি যথাক্রমে x, y, z ও x', y', z' এবং সেগুলি পরস্পর সমান্তরাল। S এবং S' দুটিই জড়ত্বীয় এবং S-এর সাপেক্ষে S' x অথবা x' অক্ষ বরাবর v বেগে গতিশীল। দুই নির্দেশতন্ত্রেই সময়ের পরিমাপ করার ব্যবস্থা আছে এবং দুই নির্দেশতন্ত্রে সময়ের মান যথাক্রমে t ও t'। প্রাথমিক অবস্থায় দুই নির্দেশতন্ত্র সমাপতিত অবস্থায় ছিল এবং সেই মুহূর্তে t ও t' পরিমাপের ঘড়ি দুটি মেলানো হয়েছিল। যাতে $t = t' = 0$ হয়। এখন প্রশ্ন, পরবর্তীকালে x, y, z, t রাশিগুলির সঙ্গে x', y', z', t' রাশিগুলির সম্পর্ক কী হবে ?

এই সম্পর্কের সূত্রগুলি কেমন হবে সে সম্পর্কে আমাদের ইতিমধ্যেই কিছুটা ধারণা আছে। এ সম্বন্ধে আগেই আলোচনা করে নেওয়া যাক।

1. আপেক্ষিকতার অঙ্গীকার অনুযায়ী শূন্যে আলোর বেগ সব জড়ত্বীয় ফ্রেমেই c।

যদি $t = t' = 0$ মুহূর্তে S ও S'-এর মূলবিন্দুতে (O অথবা O') একটি আলোর ঝলক সৃষ্টি করা হয় তবে S ফ্রেমে পরবর্তী t সময়ে আলোর তরঙ্গমুখটি সবদিকেই ct দূরত্ব অতিক্রম করবে। অর্থাৎ ঐ তরঙ্গমুখটি হবে ct ব্যাসার্ধের একটি গোলক যার সমীকরণ ঃ

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \tag{2.1}$$

কিন্তু S' ফ্রেমেও ঐ তরঙ্গমুখটি c বেগে অগ্রসর হবে এবং t' সময়ে সেটি ct' দূরত্ব পার হবে। সুতরাং S' ফ্রেমে তরঙ্গমুখটি ct' ব্যাসার্ধের একটি গোলক রচনা করবে, যার সমীকরণ

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \tag{2.2}$$

আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে নির্দেশতন্ত্রের পরিবর্তন সূত্রগুলি এমন হতে হবে যাতে 2.1 ও 2.2 সমীকরণ দুটির যে কোনো একটি থেকে অন্যটিতে উপনীত হওয়া যায়।

2. নির্দেশতন্ত্র পরিবর্তনের সমীকরণগুলিকে রৈখিক (linear) হতে হবে। এর অর্থ কী ? ধরুন কেউ প্রস্তাব করলেন $x' = x^2$ সমীকরণটি ব্যবহার করা যাক। এবার একটি মিটার স্কেলকে x বা x' অক্ষের সঙ্গে সমান্তরালভাবে রাখা হল যাতে তার প্রান্তগুলি $x_1 = 0$ m এবং $x_2 = 1$ m স্থানাঙ্কে থাকে। S' ফ্রেমে স্কেলটির দৈর্ঘ্য হবে $\quad x_2' - x_1' = (x_2)^2 - (x_1)^2 = 1^2 - 0^2 = 1$ m

কিন্তু এবার যদি স্কেলটিকে সরিয়ে রাখা হয় যাতে $x_1 = -0.5$ m ও $x_2 = 0.5$ m হয় তাহলে S' ফ্রেমে সেটির দৈর্ঘ্য হবে $\quad x_2' - x_1' = (x_2)^2 - (x_1)^2 = (0.5)^2 - (-0.5)^2 = 0$ m

অর্থাৎ S' ফ্রেমের পর্যবেক্ষকের কাছে স্কেলটির দৈর্ঘ্য নির্ভর করবে S ফ্রেমে সেটির অবস্থানের উপর। একইভাবে আপনি দেখাতে পাররেন যে t ও t' সময়ের মধ্যে সম্পর্ক $t' = t^2$ হয় তবে একই ঘড়ির

টিক্-টিক্ শব্দের অন্তরাল S ফ্রেমে ঠিক সমান থাকলেও S' ফ্রেমে এক এক সময়ে এক এক স্থায়িত্বের বলে মনে হবে। আমাদের সাধারণ অভিজ্ঞতা থেকে আমরা জানি যে একটি মিটার স্কেলের দৈর্ঘ্য যেমন স্কেলটি কোথায় রাখা হয়েছে তার উপর নির্ভর করে না, তেমনিই ঘটির টিক্-টিক্ সর্বদাই সময়ের সমান অন্তরালে শোনা যায়।

3. পরিবর্তনের সমীকরণগুলি নিশ্চয়ই এমন হবে যাতে υ, অর্থাৎ S ফ্রেমে S' ফ্রেমের বেগ যখন শূন্যে আলোর বেগের তুলনায় খুবই ক্ষুদ্র তখন সেগুলি গ্যালিলিয়ো পরিবর্তনের সূত্রে পরিণত হবে। বিশেষত, যদি $\upsilon = 0$ হয় তবে S ও S' ফ্রেম দুটি সমাপতিত অবস্থায় থাকবে এবং সূত্রগুলি হবে

$$x' = x, y' = y, z' = z, t' = t \qquad (2.3)$$

এবার আমরা নির্দেশতন্ত্র পরিবর্তনের সাধারণ রৈখিক সমীকরণগুলি লিখতে পারি।

$$\begin{aligned} x' &= A_1x + A_2y + A_3z + A_4t \qquad (ক) \\ y' &= B_1x + B_2y + B_3z + B_4t \qquad (খ) \\ z' &= C_1x + C_2y + C_3z + C_4t \qquad (গ) \\ t' &= D_1x + D_2y + D_3z + D_4t \qquad (ঘ) \end{aligned} \qquad (2.4)$$

এখানে A, B, C ও D রাশিগুলি স্থির মানের সহগ, তবে সেগুলি υ-এর উপর নির্ভরশীল হতে পারে। 2.4 সমীকরণগুলিতে মোট ষোলোটি সহগ থাকলেও এগুলির অনেকটা সরলীকরণ সম্ভব। আগেই ধরে নেওয়া হয়েছে যে x ও x' অক্ষ দুটি সর্বদাই পরস্পর সংলগ্ন থাকে। অর্থাৎ $y = z = 0$ হলে $y' = z' = 0$ হবে। এই অবস্থায় 2.4(খ) ও (গ) সমীকরণ থেকে $B_1x + B_4t = 0$ এবং $C_1x + C_4t = 0$। যেহেতু x ও t-এর যে কোনও মানের জন্য এগুলি সত্য, অতএব B_1, B_4, C_1 ও C_4-এর মান শূন্য। সুতরাং (খ) ও (গ) সমীকরণ দুটির রূপ দাঁড়াল ঃ

$$y' = B_2y + B_3z$$
$$z' = C_2y + C_3z$$

আবার দেখুন, যেহেতু xy তল $(z = 0)$ ও $x'y'(z' = 0)$ তল সর্বদাই পরস্পর সংলগ্ন থাকে, $z = 0$ হলে $z' = 0$ হবে। একইভাবে xz তল $(y = 0)$ ও $x'z'$ তলও $(y' = 0)$ সর্বদা পরস্পর সংলগ্ন থাকে। যার ফলে $y = 0$ হলে $y' = 0$ হবে। এ থেকে বোঝা যায় যে B_3 ও C_2-এর মান শূন্য, অর্থাৎ $y' = B_2y, z' = C_3z$।

B_2 ও C_3 রাশি দুটির মান কত ? ধরুন S ফ্রেমে y-অক্ষ বরাবর একটি মিটার স্কেল রাখা আছে। S ফ্রেমে স্থির পর্যবেক্ষকের কাছে তার দৈর্ঘ্য 1 মিটার হলেও, S' ফ্রেমের স্থির পর্যবেক্ষকের কাছে সেটির দৈর্ঘ্য $\Delta y' = B_2\Delta y = B_2$ মিটার। অন্যদিকে স্কেলটি যদি y' অক্ষ বরাবর রাখা থাকে, তবে S ফ্রেমে স্থির

পর্যবেক্ষকের কাছে তার দৈর্ঘ্য হবে $\Delta y = \frac{1}{B_2}\Delta y' = \frac{1}{B_2}$ মিটার। যেহেতু S ও S′ ফ্রেমে স্থির দুই পর্যবেক্ষক পরস্পরের সাপেক্ষে একই বেগে গতিশীল, এই দুই দৈর্ঘ্য ভিন্ন হতে পারে না। সুতরাং $B_2 = \frac{1}{B_2}$ বা, $B_2 = 1$। একইভাবে আপনি দেখাতে পারবেন যে $C_3 = 1$। সুতরাং 2.4 (খ) ও (গ) সমীকরণগুলি সরলীকৃত হয়ে দাঁড়াল ঃ $y' = y$ ও $z' = z$।

এবার 2.4(খ) সমীকরণটির দিকে নজর দিন। S′ ফ্রেমে পরিমাপ করা সময় t′ কি y-এর উপর নির্ভর করতে পারে ? যদি S′ ফ্রেমে $y' = 1$ মিটার এবং $y' = -1$ মিটার স্থানাঙ্কে দুটি ঘড়ি রাখা থাকে তবে সে দুটির x স্থানাঙ্কও 1 মিটার ও -1 মিটার হবে, সুতরাং দুটির ক্ষেত্রে t′-এর মান ভিন্ন হবে। কিন্তু দুটি ঘড়িই S′ ফ্রেমে স্থির থাকায় এই ভিন্নতা অসম্ভব। সুতরাং D_2 সহগটির মান নিশ্চয়ই শূন্য। একই যুক্তি থেকে বলা যায় যে D_3 সহগটির মানও শূন্য। অর্থাৎ (ঘ) সমীকরণটির সরলীকৃত রূপ ঃ $t' = D_1 x + D_4 t$.

সবশেষে 2.4(ক) সমীকরণটি লক্ষ করা যাক। যেহেতু S′ ফ্রেম S ফ্রেমের সাপেক্ষে υ বেগে x অক্ষের অভিমুখে চলমান S′ ফ্রেমের মূলবিন্দুকে $x' = 0$ এবং $x = \upsilon t$ দুই সমীকরণ দিয়েই নির্দেশ করা যায়, সুতরাং (ক) সমীকরণটির রূপ হবে ঃ $x' = A_1(x - \upsilon t) = A_1 x - A_1 \upsilon t$

এর অর্থ, $A_2 = A_3 = 0$ এবং $A_4 = -A_1\upsilon$।

এখন আমরা 2.4(ক)-(ঘ) সমীকরণগুলির সরলীকৃত রূপগুলি লিখতে পারি ঃ

$$\begin{aligned} x' &= A_1 x - A_1 \upsilon t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= D_1 x + D_4 t \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.5 সমীকরণগুলিতে মোট তিনটি অজ্ঞাত রাশি আছে—A_1, D_1 ও D_4। এখন আমরা বিভিন্ন জড়ত্বীয় ফ্রেমে শূন্যে আলোর বেগের সমতার নীতিটি ব্যবহার করব। 2.2 সমীকরণে 2.5 সমীকরণের স্থানাঙ্ক পরিবর্তনটি বসিয়ে পাওয়া যায় ঃ

$$(A_1 x - A_1 \upsilon t)^2 + y^2 + z^2 - c^2(D_1 x + D_4 t^2) = 0$$

বা, $$(A_1{}^2 - c^2 D_1^2)x^2 + y^2 + z^2 + (A_1^2\upsilon^2 - c^2 D_4^2)t^2 - (2A_1{}^2\upsilon + 2c^2 D_1 D_4)xt = 0$$

এই সমীকরণটির সঙ্গে 2.1 সমীকরণের সরাসরি তুলনা করে পাওয়া যায় ঃ

$$\begin{aligned} A_1^2 - c^2 D_1^2 &= 1 \\ A_1^2\upsilon^2 - c^2 D_4^2 &= -c^2 \\ A_1^2\upsilon + c^2 D_1 D_4 &= 0 \end{aligned}$$

উপরের তিনটি সমীকরণের সাহায্যে তিনটি অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় করা যেতে পারে। প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে যথাক্রমে $c^2D_1^2 = A_1^2 - 1,\, c^2D_4^2 = A_1^2\upsilon^2 + c^2,$

দুটিকে গুণ করে, $c^4D_1^2D_4^2 = (A_1^2 - 1)(A_1^2\upsilon^2 + c^2)$

তৃতীয় সমীকরণ থেকে $c^2D_1D_4 = A_1^2\upsilon$, বা, $c^4D_1{}^2D_4^2 = A_1^4\upsilon^2$

$\therefore$ $c^4D_1^2D_4^2$ রাশির দুই মান থেকে $(A_1^2 - 1)(A_1^2\upsilon^2 + c^2) = A_1^4\upsilon^2$

সরল করে $A_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, যেখানে $\beta = \dfrac{\upsilon}{c}$ ।

2.6 সমীকরণগুলির দ্বিতীয়টি থেকে,

$$c^2D_4^2 = A_1^2\upsilon^2 + c^2 = \frac{\upsilon^2}{1-\beta^2} + c^2 = \frac{c^2}{1-\beta^2} \quad \text{বা,} \quad D_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

2.6 সমীকরণগুলির তৃতীয়টি থেকে, $D_1 = -\dfrac{A_1^2\upsilon}{c^2D_4} = -\dfrac{\upsilon/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$

2.5 সমীকরণগুলিকে এখন লেখা যেতে পারে ঃ $x' = A_1(x - \upsilon t) = \dfrac{x - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{-\upsilon/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.x + \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t - \upsilon x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

উপরের সমীকরণগুলিকে লরেন্‌ৎসীয় পরিবর্তন সমীকরণ বলা হয়। S ফ্রেমটি যেহেতু S′ ফ্রেমের সাপেক্ষে $-\upsilon$ বেগে গতিশীল, উপরের সমীকরণগুলিতে υ-এর স্থলে $-\upsilon$ লিখে বিপরীত পরিবর্তন সমীকরণগুলি পাওয়া যায়। নীচে লরেন্‌ৎসীয় সমীকরণগুলিকে সারণিবদ্ধভাবে লেখা হল। এখানে $\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ রাশিটিকে γ চিহ্ন দিয়ে নির্দেশ করা হয়েছে।

$x' = \gamma\,(x - \upsilon t)$	$x = \gamma\,(x' + \upsilon t')$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$
$t' = \gamma\,(t - \dfrac{\upsilon x}{c^2})$	$t = \gamma\,(t' + \dfrac{\upsilon x'}{c^2})$

(2.7)

একটি উদাহরণ থেকে আপনি সমীকরণগুলির ব্যবহার বুঝতে পারবেন।

উদাহরণ ঃ একটি ট্রেন 1.8×10^5 km/s বেগে যখন একটি স্টেশন পার হল তখন ট্রেনের ড্রাইভার ও প্ল্যাটফর্মে দাঁড়ানো স্টেশনমাস্টার, উভয়ের ঘড়িতে সময় বেলা 12টা। ড্রাইভার তাঁর ঘড়ির 10 s সময়ে একটি বিস্ফোরণ ঘটালেন। স্টেশনমাস্টারের কাছে ঐ বিস্ফোরণ কখন এবং কোথায় ঘটেছিল বলে মনে হবে?

এক্ষেত্রে S ফ্রেমটি প্ল্যাটফর্মের ও S' ফ্রেমটি ট্রেনের সংলগ্ন বলে ধরা যাক। বিস্ফোরণটির $x' = 0$, $t' = 10$ s এবং $\beta = \dfrac{1.8 \times 10^5}{3.0 \times 10^5} = 0.6, \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-.36}} = \dfrac{1}{0.8} = 1.25$।

$$\therefore \quad x = \gamma(x' + \upsilon t') = 1.25(0 + 1.8 \times 10^5 \times 10) = 2.25 \times 10^6 \text{ km}$$

$$\text{এবং } t = \gamma\left(t + \frac{\upsilon x'}{c^2}\right) = 1.25(10 + 0) = 12.5\text{s}$$

সুতরাং স্টেশন মাস্টারের কাছে বিস্ফোরণটি 2.25×10^6 km দূরে, 1.25s সময়ে ঘটেছে বলে মনে হবে।

এবার আপনি একটি অনুশীলনীর সমাধান করুন।

অনুশীলনী 1. লরেন্ৎসীয় সমীকরণ ব্যবহার করে দেখান যে 2.1 ও 2.2 সমীকরণ দুটির একটি পালিত হলে অন্যটিও প্রতিপালিত হবে।

2.4 লরেন্ৎসীয় পরিবর্তন প্রয়োগ

দুটি জড়ত্বীয় ফ্রেমের একটি যখন অপর একটির সাপেক্ষে শূন্যে আলোকের বেগের তুলনায় ক্ষুদ্র বেগে গতিশীল থাকে, তখন দুই ফ্রেমে স্থান কালের পরিমাপে কোনো পার্থক্য থাকে না। অর্থাৎ চলমান ট্রেনের একটি কামরার দৈর্ঘ্য কামরায় উপবিষ্ট যাত্রী এবং প্ল্যাটফর্মে দণ্ডায়মান ব্যক্তি — উভয়ের কাছেই সমান হবে যতক্ষণ ট্রেনের বেগ $\upsilon << c$। আবার চলমান কামরায় যদি স্প্রিং দিয়ে ঝোলানো একটি ভর এক সেকেন্ড পর্যায়কালে ওঠানামা করে তবে প্ল্যাটফর্মে দাঁড়ানো ব্যক্তির কাছেও তখন পর্যায়কাল এক সেকেন্ড বলেই মনে হবে। ট্রেনের বেগ c-এর সঙ্গে তুলনীয় হলে বেগের সমান্তরাল দৈর্ঘ্য এবং সময়ের অন্তরালের পরিমাপ দুই জড়ত্বীয় ফ্রেমে এক থাকে না। এই অংশে আমরা লরেন্ৎসীয় সমীকরণগুলি ব্যবহার করে দুই জড়ত্বীয় ফ্রেমে দৈর্ঘ্য ও সময়ের অন্তরালের পরিমাপের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করব।

2.4.1 দৈর্ঘ্যের লরেন্ৎসীয় সংকোচন (Lorentz Contraction) ঃ

ধরে নিন l_0 দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ড S' ফ্রেমে x' অক্ষের সমান্তরালে স্থিরভাবে রাখা আছে। দণ্ডটির দুই প্রান্তের x-স্থানাঙ্ক যদি x_1' ও x_2' হয় তবে $l_0 = x_2' - x_1'$। S নির্দেশতন্ত্রে স্থির আছেন, এমন কোনো

পর্যবেক্ষক যদি দণ্ডটির দৈর্ঘ্য মাপতে চান তবে তাঁকে একই সময়ে S ফ্রেমে দণ্ডটির দুই প্রান্তের x-স্থানাঙ্ক, অর্থাৎ x_1 ও x_2 মাপতে হবে। তিনি যদি $t = t_0$ সময়ে এই পরিমাপ করেন তবে লরেন্ৎসীয় সমীকরণ ব্যবহার করে লেখা যায়,

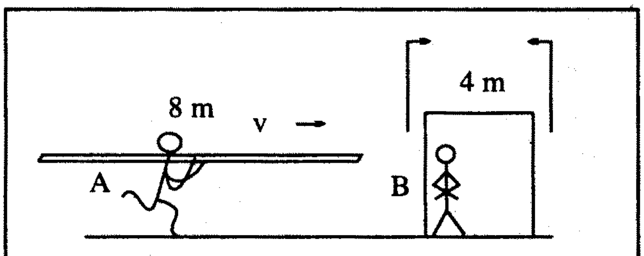
$$x_1' = \gamma\,(x_1 - \upsilon t_0)$$

$$\text{ও} \quad x_2' = \gamma\,(x_2 - \upsilon t_0)$$

$\therefore$ দ্বিতীয়টি থেকে প্রথমটি বিয়োগ করে, $x_2' - x_1' = \gamma\,(x_2 - x_1)$

কিন্তু $x_2 - x_1$ = S ফ্রেমে পরিমাপ করা দণ্ডের দৈর্ঘ্য, l।

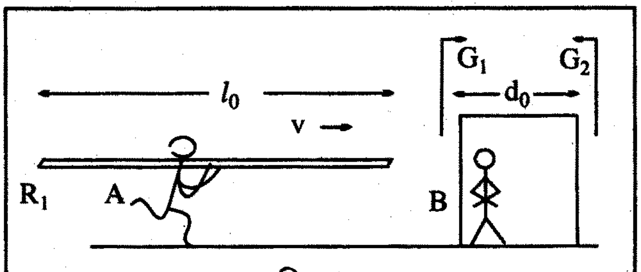
$$\text{সুতরাং} \quad l_0 = \gamma l \quad \text{বা,} \quad l = \frac{l_0}{\gamma} \qquad \ldots\ 2.8$$



চিত্র 2.2

যেহেতু $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, এর মান 1-এর চেয়ে বড়ো এবং $l < l_0$। সুতরাং S ফ্রেমে দণ্ডটির দৈর্ঘ্য, দণ্ডটির সাপেক্ষে স্থির পর্যবেক্ষক যে প্রকৃত দৈর্ঘ্য লক্ষ করবেন তার চেয়ে কম (চিত্র 2.2)। প্রকৃত দৈর্ঘ্যের তুলনায় আপাত দৈর্ঘ্যের এই হ্রাসকেই লরেন্ৎসীয় দৈর্ঘ্য সংকোচন বলা হয়।

আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পেরেছেন যে দণ্ডটি যদি x অক্ষের সঙ্গে সমকোণে রাখা থাকত তবে কোনো দৈর্ঘ্য সংকোচন ঘটত না। আবার সেটি যদি x অক্ষের সঙ্গে α কোণে অবনত থাকত তাহলে তার দৈর্ঘ্যের x-উপাংশ, অর্থাৎ $l_0 \cos\alpha$, S ফ্রেমের পর্যবেক্ষকের কাছে সংকুচিত হয়ে $l_0 \cos\alpha/\gamma$ বলে মনে হত যদিও x অক্ষের লম্বমুখে উপাংশ $l_0 \sin\alpha$-এর কোনো সংকোচন হত না [চিত্র 2.3]।



চিত্র 2.3

2.4.2 সময়ের দীর্ঘায়ন (Time Dilation)

এবার আমরা দেখব দৈর্ঘ্যের পরিমাপের মতো সময়ের অন্তরালের পরিমাপও বিভিন্ন জড়ত্বীয় ফ্রেমে স্থির রয়েছেন এমন পর্যবেক্ষকদের কাছে ভিন্ন হয় কিনা।

ধরা যাক S' ফ্রেমে একটি ঘড়ি রয়েছে যা নির্দিষ্ট সময় অন্তর একটি করে আলোর ঝলক বার হয়। যে পর্যবেক্ষক S' ফ্রেমে স্থির আছেন তিনি পর পর দুটি ঝলক t_1' ও t_2' সময়ে দেখলেন এবং তাঁর কাছে দুটি ঝলকের মধ্যে সময়ের অন্তরাল $t_2' - t_1' = \Delta t_0$, ধরুন।

এবার দেখা যাক, S ফ্রেমের পর্যবেক্ষক সময়ের ওই অন্তরাল কত দীর্ঘ বলে মনে করবেন। ধরুন ঘড়িটি S' ফ্রেমে সব সময়েই $x' = x_0'$ স্থানাঙ্কে রয়েছে। S ফ্রেমে স্থির থাকা পর্যবেক্ষক যদি যথাক্রমে t_1 ও t_2 সময়ে ঝলক দুটি লক্ষ করেন তবে লরেন্‌ৎসীয় পরিবর্তন সূত্র ব্যবহার করে ঃ

$$t_1 = \gamma\,(t_1' + \upsilon x_0'/c^2)$$
$$t_2 = \gamma\,(t_2' + \upsilon x_0'/c^2)$$

অর্থাৎ ঐ পর্যবেক্ষকের কাছে দুই ঝলকের মধ্যে সময়ের অন্তরাল

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\,(t_2' - t_1') = \gamma\,\Delta t_0 \qquad (2.9)$$

যেহেতু $\gamma > 1$, S ফ্রেমের পর্যবেক্ষকের কাছে সময়ের অন্তরালটি γ-গুণ দীর্ঘায়িত হয়েছে বলে মনে হবে। Δt_0 যদি এক সেকেন্ড হয় তবে তিনি মনে করবেন আলোর ঝলকগুলি γ সেকেন্ড অন্তর বার হচ্ছে, অর্থাৎ তাঁর সাপেক্ষে গতিশীল ঘড়িটি স্লো যাচ্ছে।

এবার আমরা একটি বাস্তব উদাহরণ সম্পর্কে আলোচনা করব, যা আপনাকে সময়ের দীর্ঘায়ন ও দৈর্ঘ্যের সংকোচন বিষয়গুলি বুঝতে সাহায্য করবে।

উদাহরণ ঃ

পৃথিবীর বাতাবরণের ঊর্ধ্বস্তরে কসমিক রশ্মির বিক্রিয়ার ফলে যে μ(মিউ)-কণার সৃষ্টি হয় তার প্রকৃত গড় আয়ু (অর্থাৎ গবেষণাগারে স্থির অবস্থায় থাকলে যে গড় আয়ু পরিদৃষ্ট হয়, 2.3×10^{-6} s। μ-কণাগুলির নিম্নমুখী বেগ যদি 0.99 c হয় তবে সেগুলির কত শতাংশ 10,000 m দূরত্ব অতিক্রম করে সমুদ্রতলের সমান উচ্চতায় এসে পৌঁছোবে?

আমরা দুভাবে অবস্থাটির বিশ্লেষণ করতে পারি।

1. পৃথিবীতে স্থির পর্যবেক্ষকের দৃষ্টিভঙ্গী থেকে ঃ

এক্ষেত্রে μ-কণার $\beta = 0.99, \gamma = (1 - 0.99^2)^{-1/2} = 7.09$

$\therefore$ সময়ের দীর্ঘায়নের ফলে μ-কণাগুলির আপাত গড়-আয়ু $\tau = 7.09 \times 2.3 \times 10^{-6}$ s

10,000 m দূরত্ব অতিক্রম করতে সময় লাগে $\dfrac{10{,}000}{0.99 \times 3 \times 10^8} = 3.367 \times 10^{-5}$ s

সুতরাং μ কণার যে অংশ ঐ দূরত্ব অতিক্রম করে সমুদ্রতলের উচ্চতায় পৌঁছোবে সেটি হল exp-$(3.367 \times 10^{-5} / 1.63 \times 10^{-5}) = 0.126.$ বা, 12.6 শতাংশ।

2. μ কণার সঙ্গে গতিশীল পর্যবেক্ষকের দৃষ্টিভঙ্গী থেকে :

এই পর্যবেক্ষকের কাছে 10,000 m দূরত্ব দৈর্ঘ্য সংকোচনের ফলে $1000/\gamma = 1000/7.09$ বা 1411 মিটার মনে হবে। μ কণার 1411 m অতিক্রম করতে $1411\text{m}/.99 \times 3 \times 10^8$ বা, 4.75×10^{-6} s সময় লাগবে। সময়ের এই অন্তরালের পর μ-কণাগুলির যে অংশ অবশিষ্ট থাকবে তা হল—

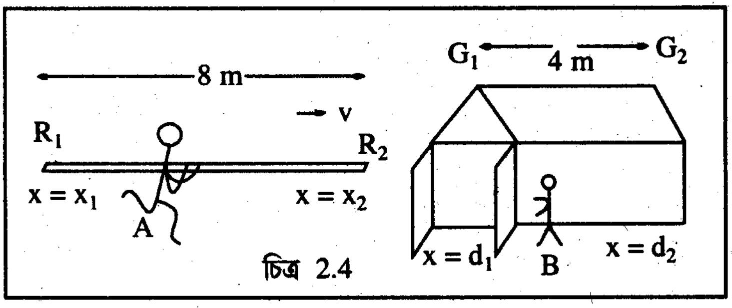
$$\exp - (4.75 \times 10^{-6} / 2.3 \times 10^{-6}) = 0.126 \quad \text{বা,} \quad 12.6 \text{ শতাংশ।}$$

অনুশীলনী 2

(ক) একটি মিটার স্কেলের দৈর্ঘ্য কোনও একটি গতিশীল নির্দেশতন্ত্রে 50 cm হতে দেখা গেল। ঐ নির্দেশতন্ত্রের বেগ স্কেলটির সাপেক্ষে কত ছিল?

(খ) 40 m দীর্ঘ একটি সুপারসনিক বিমান পৃথিবীর সাপেক্ষে 600 m/s বেগে উড়ে যাচ্ছে। পৃথিবীর উপর স্থির এমন পর্যবেক্ষকের কাছে বিমানটির দৈর্ঘ্য প্রকৃত দৈর্ঘ্য অপেক্ষা কতটা ছোটো বলে মনে হবে? পৃথিবীর ঘড়ির তুলনায় বিমানের ঘড়ি 1 μs পেছিয়ে পড়তে কত সময় লাগবে?

(গ) 4 m লম্বা একটি চালাঘরের দুই প্রান্তের দরজা তোলা আছে। এক ব্যক্তি (A) 8 m লম্বা একটি দণ্ড অনুভূমিকভাবে তার গতির দিক বরাবর ধরে নীচে এত বেশি বেগে ঐ চালাঘরের মধ্য দিয়ে দৌড়ে যাচ্ছেন যে দণ্ডটির দৈর্ঘ্য লরেন্‌ৎসীয় সংকোচনের ফলে চালাঘরের পাশে দাঁড়ানো ব্যক্তি B-এর কাছে 4 m মনে হচ্ছে। B কি চালাঘরের দুই দরজা নামিয়ে বন্ধ করে A-কে দণ্ডসমেত চালাঘরের মধ্যে আটকে ফেলতে পারবেন? (চিত্র 2.4)



চিত্র 2.4

(ঘ) লরেন্‌ৎসীয় পরিবর্তন সূত্রগুলি প্রতিষ্ঠা করতে গিয়ে আমরা A_1-এর নেগেটিভ মান অর্থাৎ $\left(-1/\sqrt{1-\beta^2}\right)$-কে বর্জন করেছি। এর কারণ কী?

2.5 আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের আলোকে মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষা

এই পাঠক্রমের প্রথম এককে আপনি মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষা সম্বন্ধে পড়েছেন। আপনি দেখেছেন যে ইথার নামে আলোর এক মাধ্যম কল্পনা করে ঐ পরীক্ষার যে ফল আশা করা গিয়েছিল, বাস্তবে তা

দেখা যায়নি। দেখা যাক, আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব অনুযায়ী আমরা ঐ পরীক্ষার কী ফল আশা করি।

আমরা জেনেছি, যে কোনো জড়ত্বীয় ফ্রেমে আলোর বেগ শূন্য মাধ্যমে সব দিকেই c-এর সমান। সুতরাং গবেষণাগারের ফ্রেমে আলোর রশ্মি বিভাজক থেকে দুই দর্পণে যেতে ও ফিরে আসতে যথাক্রমে $\frac{2l_1}{c}$ ও $\frac{2l_2}{c}$ সময় লাগবে, যেখানে l_1 ও l_2 যথাক্রমে রশ্মিবিভাজক থেকে প্রথম ও দ্বিতীয় দর্পণের দূরত্ব। এই সময়ের পার্থক্য সর্বদাই $\frac{2}{c}(l_1 - l_2)$ হবে, যার ফলে ব্যতিচার পটির কোনো সরণ ঘটবে না।

অপরপক্ষে, যদি এমন কোনো পর্যবেক্ষক পরীক্ষাটি লক্ষ করেন যিনি সূর্যের সাপেক্ষে স্থির আছেন এবং যাঁর নির্দেশতন্ত্র পৃথিবী তথা ইন্টারফেরোমিটারটি υ বেগে ধাবমান, তবে তাঁর কাছে ইন্টারফেরোমিটারের বেগের সমান্তরাল বাহুটি γ অনুপাতে সংকুচিত মনে হবে। ফলে তিনিও মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষায় কোনো পটির সরণ লক্ষ করবেন না।

2.6 দুই যমজের রহস্য

এবার আমরা সময়ের দীর্ঘায়নের ফলে সৃষ্ট একটি আপাত রহস্যের বিষয়ে আলোচনা করব। আমরা সকলেই জানি, দুই যমজের বয়স সর্বদাই এক থাকে। কিন্তু কল্পনা করুন, দুই যমজ ভাই-এর একজন, যার নাম মধু সে রইল পৃথিবীতে আর অন্যজন, যার নাম রতন, সে রকেটে চলে গেল মহাকাশ ভ্রমণে। রকেট মধুর হিসাবে দশ বছর 0.8 c বেগে সরলরেখায় চলে, তাপপর বেগের দিক বিপরীত করে আরও দশ বছর পরে পৃথিবীতে এসে পৌঁছোল। মধুর বয়স ইতিমধ্যে কুড়ি বছর বেড়ে গিয়েছে। কিন্তু রকেটের ঘড়ি সময়ের দীর্ঘায়নের ফলে ধীরে চলেছে। পৃথিবীর ঘড়িতে কুড়ি বছর কেটে গেলেও রকেটের ঘড়িতে সময়ের অন্তরাল 2.9 সমীকরণ অনুযায়ী, যেহেতু $\frac{\upsilon}{c} = 0.8$।

$$\Delta t_0 = \Delta t/\gamma = \Delta t\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = 20\sqrt{1-0.64} = 12 \text{ বছর।}$$

সুতরাং ঐ সময়ে রতনের বয়স বেড়েছে 12 বছর। অর্থাৎ দুই যমজের একজন অন্যজনের চেয়ে আট বছরের ছোটো রয়ে গেছে।

রহস্যের এখানেই শেষ নয়। রতনের দৃষ্টিকোণ থেকে দেখলে পৃথিবীবাসী মধু তার কাছ থেকে তার হিসাবে দশ বছর ধরে 0.8c বেগে বিপরীত দিকে গেছে এবং তার পর বেগ বিপরীত করে আরও দশ বছর পরে তার রকেটে ফিরে এসেছে। সুতরাং রতনের বয়স যখন কুড়ি বছর বেড়েছে তখন মধুর বয়স 12 বছর বেড়ে থাকা উচিত। আগের সিদ্ধান্তের সঙ্গে এই সিদ্ধান্তের গরমিল অত্যন্ত স্পষ্ট।

এই রহস্যের উৎপত্তির কারণ এই যে আমরা পৃথিবীর নির্দেশতন্ত্র আর রকেটের সাপেক্ষে স্থির নির্দেশতন্ত্রকে সমতুল্য ধরে নিয়েছি। পৃথিবীর নির্দেশতন্ত্র মোটামুটিভাবে জড়ত্বীয়। কিন্তু রকেটকে শূন্য বেগ থেকে ত্বরিত হয়ে 0.8c বেগে পৌঁছোতে হয়েছে, তার বেগ মন্দিত হয়ে শূন্য এবং তারপর বিপরীত দিকে ত্বরণ ঘটার ফলে – 0.8c হয়েছে, অবশেষে পৃথিবীতে অবতরণ করার আগে আবার মন্দিত হয়ে রকেটের বেগ শূন্য হয়েছে। সুতরাং রকেটের সাপেক্ষে স্থির নির্দেশতন্ত্রকে মোটেই জড়ত্বীয় বলা যায় না। রকেট ও পৃথিবীর পারস্পরিক আপেক্ষিক বেগের যে প্রতিসাম্য আমরা ধরে নিয়েছি তাও সঠিক নয়।

তবে মধুর বয়সের তুলনায় রতনের বয়সের বৃদ্ধি কম হওয়া অপ্রত্যাশিত নয়। 2.4.2 অংশে আলোচিত উদাহরণে আমরা μ-কণার গড় আয়ুর বৃদ্ধির পরিচয় পেয়েছি। গবেষণাগারে স্বল্পস্থায়ী মৌল কণার গতিবিধি সংক্রান্ত পরীক্ষায় সর্বদাই সেগুলির গড় আয়ু বেগের সঙ্গে বৃদ্ধি পেতে দেখা যায়।

2.7 সারাংশ

এই এককটিতে আপেক্ষিকতার মৌলিক অঙ্গীকারগুলির উপর ভিত্তি করে লরেন্‌ৎসীয় পরিবর্তন সূত্রগুলি প্রতিষ্ঠিত করা হয়েছে। এই মৌলিক অঙ্গীকারগুলি হল সব জড়ত্বীয় ফ্রেমে পদার্থবিজ্ঞানের সব নিয়মের সমান প্রযোজ্যতা এবং শূন্যে আলোকের বেগের সমতা। লরেন্‌ৎসীয় পরিবর্তন সূত্রগুলি ব্যবহার করে আমরা লরেন্‌ৎসীয় দৈর্ঘ্য সংকোচন ও সময়ের দীর্ঘায়ন সূত্রগুলিও নির্ণয় করেছি। এগুলির সাহায্যে মাইকেলসন-মর্লি পরীক্ষার ফলের ব্যাখ্যা করা হয়েছে। সময়ের দীর্ঘায়নের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট 'দুই যমজের রহস্য'টিও বিবৃত করা হয়েছে এবং সেটির প্রকৃত ব্যাখ্যা আলোচিত হয়েছে।

2.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(ক) আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের মূল অঙ্গীকারগুলি লিখুন। বিভিন্ন স্থানে সংঘটিত দুটি ঘটনা কোনো এক জড়ত্বীয় ফ্রেমে সমকালীন বলে মনে হলেও অন্য একটি জড়ত্বীয় ফ্রেমে সেগুলি সমকালীন নাও হতে পারে—উক্তিটি ব্যাখ্যা করুন।

(খ) লরেন্‌ৎসের নির্দেশতন্ত্র পরিবর্তনের সূত্রগুলি প্রতিষ্ঠিত করুন। দেখান যে যখন $v << c$, তখন সূত্রগুলি গ্যালিলিয়ো পরিবর্তনের সূত্রে পরিণত হয়।

(গ) দৈর্ঘ্যের লরেন্‌ৎসীয় সংকোচন ও সময়ের দীর্ঘায়ন বলতে কী বোঝায় ? স্থির পর্যবেক্ষকের কাছে $\frac{c}{2}$ বেগে চলমান একটি 1 cm ব্যাসার্ধের গোলকের আয়তন কত মনে হবে ?

2.9 উত্তরমালা

অনুশীলনী 1

ধরে নিন 2.2 সমীকরণটি প্রতিপালিত হয়, অর্থাৎ

$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$। 2.7 সমীকরণগুলি থেকে x', y', z' ও t'-এর মানগুলি বসিয়ে পাওয়া যায় ঃ

$$\gamma^2(x - \upsilon t)^2 + y^2 + z^2 - c^2\gamma^2(t - \upsilon x/c^2)^2 = 0$$

$$\text{বা,}\quad \gamma^2x^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 - \gamma^2t^2(c^2 - \upsilon^2) + 2\upsilon\gamma^2 . xt(-1 + 1) = 0$$

$$\text{বা,}\quad x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0. \qquad [\because \gamma^2 = \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1}]$$

অনুশীলনী 2

(ক) 2.8 সূত্র থেকে $50 \text{ cm} = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \text{m}$ অর্থাৎ $\gamma = \frac{1 \text{ m}}{50 \text{ cm}} = 2$

সুতরাং $1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} = \gamma^{-2} = \frac{1}{4}$, বা, $\upsilon^2 = \frac{3}{4}c^2$ বা, $\upsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$

(খ) এক্ষেত্রে $\beta = \frac{600 \text{ m/s}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 2 \times 10^{-6}, \gamma^{-1} = (1 - \beta^2)^{+1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\beta^2$ ও $\gamma \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2$

$\therefore$ বিমানটির দৈর্ঘ্য সংকোচন $= l_0 - \frac{l_0}{\gamma} = l_0 . \frac{1}{2}\beta^2$

$$= 40 \text{ m} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 10^{-12}$$

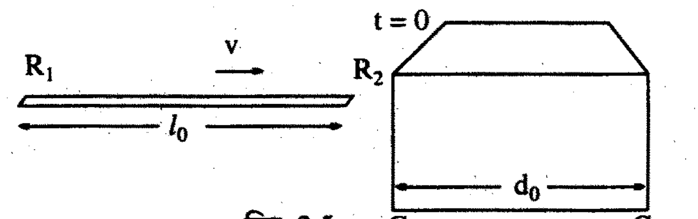
$$= 8 \times 10^{-11} \text{ m} \quad \text{বা,} \quad .08 \text{ nm}$$

বিমানের ঘড়ি প্রতি সেকেন্ডে $(\gamma - 1)$ সেকেন্ড পেছিয়ে পড়বে। সুতরাং 1 μs পেছিয়ে পড়তে সময় লাগবে $\frac{1}{\gamma - 1}$ সেকেন্ড।

কিন্তু $\frac{1}{\gamma - 1} = 2\beta^{-2} = 2(2 \times 10^{-6})^{-2} = 5 \times 10^{11}\text{s} = 3.8 \times 10^6 \gamma$

এই উদাহরণটি থেকে আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে আমাদের দৈনন্দিন অভিজ্ঞতায় আপেক্ষিকতাবাদী দৈর্ঘ্য সংকোচন বা সময়-দীর্ঘায়নের কোনো প্রভাব থাকে না।

(গ) ঘটনাটিকে B পর্যবেক্ষকের ফ্রেমে দেখা যাক। ধরে নিন চালাঘরের দৈর্ঘ্য $G_1G_2 = d_0$, দণ্ডের প্রকৃত দৈর্ঘ্য $R_1R_2 = l_0$, ও দণ্ডের বেগ υ। দণ্ডের R_2 প্রান্ত যখন চালাঘরের G_1 দরজায়, তখন B পর্যবেক্ষকের ঘড়িতে সময় $t = 0$ এবং তার ফ্রেমে দণ্ডের আপাত দৈর্ঘ্য l_0/γ, যেখানে $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$। সুতরাং দণ্ডের R_1 প্রান্তটি G_1 দরজায় পৌঁছোনোর সময়। G_1-এর পাশে দাঁড়ানো পর্যবেক্ষক R_1 প্রান্তটি G_1 দরজায় পৌঁছোনোমাত্র G_2 দরজায় আলোক সংকেত পাঠালেন যাতে G_2 দরজাটি বন্ধ হয়। এই সংকেত G_2-তে পৌঁছোতে সময় লাগবে $\frac{d_0}{c}$। সুতরাং G_2 দরজা বন্ধ হবে $t_1 = \frac{l_0}{\gamma\upsilon} + \frac{d_0}{c}$ সময়ে।



চিত্র 2.5

কিন্তু দণ্ডের R_2 প্রান্তটি G_2 দরজায় পৌঁছোবে $t_2 = \frac{d_0}{\upsilon}$ সময়ে। যেহেতু G_2 দরজা এই সময়ের আগেই বন্ধ হতে হবে, অতএব দণ্ডটিকে চালাঘরের মধ্যে আটকে ফেলার শর্ত $t_1 < t_2$, অর্থাৎ $\frac{l_0}{\gamma\upsilon} + \frac{d_0}{c} < \frac{d_0}{\upsilon}$,

বা, $l_0 < \gamma\upsilon\left(\frac{d_0}{\upsilon} - \frac{d_0}{c}\right)$

$$\text{কিন্তু } \gamma\upsilon\left(\frac{d_0}{\upsilon} - \frac{d_0}{c}\right) = \gamma\, d_0\left(1 - \frac{\upsilon}{c}\right) = d_0\,\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = d_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad (\text{চিত্র } 2.3)$$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্তটি হল $l_0 < d_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$।

প্রশ্ন অনুযায়ী $\gamma = \frac{8}{4} = 2$, বা, $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = 0.268$

$\therefore$ দণ্ডটিকে আটকানোর শর্ত $l_0 < 0.268\, d_0$।

$l_0 = 8$ m, $d_0 = \Delta$m হলে এই শর্ত পালিত হয় না। সুতরাং দণ্ডটিকে চালাঘরের মধ্যে আটকানো যাবে না।

ঘটনাটিকে A পর্যবেক্ষকের ফ্রেমে দেখলে আরও সহজে এই সিদ্ধান্তে আসা যাবে।

A পর্যবেক্ষকের ফ্রেমে চালাঘরের দৈর্ঘ্য সংকোচনের ফলে 2m মনে হবে। 8 m লম্বা দণ্ডটিকে তার মধ্যে আটকানো সম্ভব নয়।

(ঘ) $\upsilon << c$ হলে লরেন্ৎসীয় পরিবর্তন সূত্রগুলি গ্যালিলিয়ো পরিবর্তন সূত্রে পরিণত হওয়া উচিত। A_1-এর নেগেটিভ মান নিলে 2.5-এর প্রথম সূত্রটি $x' = -x + \upsilon t$ রূপ গ্রহণ করবে, যা গ্রহণযোগ্য নয়। এজন্যই A_1-এর নেগেটিভ মানটি বর্জন করা হয়েছে।

সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(ক) 2.2 অংশে এই প্রশ্নের উত্তর আলোচিত হয়েছে।

(খ) প্রথম অংশের উত্তর 2.3 অংশে পাওয়া যাবে।

দ্বিতীয় অংশের উত্তরের জন্য যখন $\upsilon << c$ বা $\beta << 1$, তখন $\gamma \to 1$ ধরা যেতে পারে। এবার আপনি নিজেই প্রশ্নটির উত্তর দিন।

(গ) প্রথম অংশের উত্তরের জন্য 2.4.1 ও 2.4.2 অংশগুলি দেখুন। দ্বিতীয় অংশের জন্য লক্ষ করুন, গোলকটির ব্যাস গতির সমান্তরাল দিকে দৈর্ঘ্য সংকোচনের ফলে $\frac{1}{\gamma}$ cm মনে হবে।

যেখানে $\gamma = (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}, \beta = \frac{1}{2}$ বা $\gamma = 0.866$।

সুতরাং গোলকের আয়তন হবে $\frac{4}{3}\pi . 1 . 1 . 0.866 = 3.63 \text{ cm}^3$।

একক 3 ❑ আপেক্ষকীয় সৃতিবিদ্যা

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

পূর্ব এককে আপনি আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতার সূত্র এবং লরেন্টজীর রূপান্তর বিষয়ে অধ্যয়ন করেছেন। এই এককে বেগের যোগ, তারার অপেরণ, ডপলার ক্রিয়া প্রভৃতি সনাতন সৃতিবিদ্যার বিভিন্ন সমীকরণগুলির ক্ষেত্রে লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রয়োগ করলে যে পরিবর্তন ঘটে, সে বিষয়ে আলোচনা করা হবে।

এই একককটি পাঠ করলে আপনি

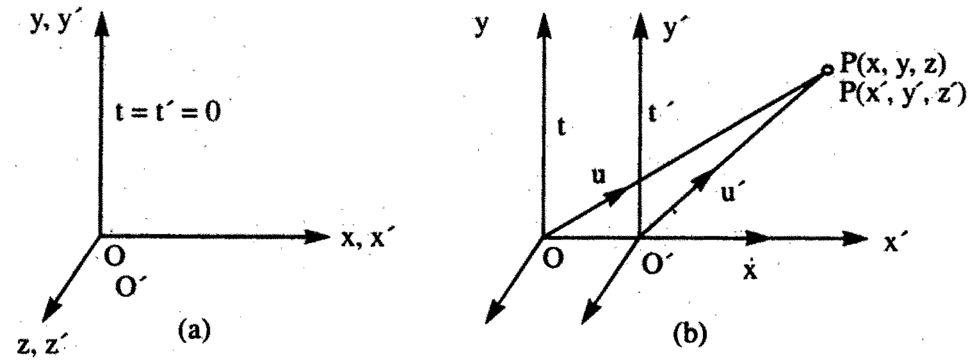
- আপেক্ষিক বেগের আপেক্ষিকীয় সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করতে পারবেন।

● লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা তারার অপেরণের সনাতন সমীকরণের সংশোধন করতে পারবেন।

● লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা ডপলার ক্রিয়ার সনাতন সমীকরণের সংশোধন করতে পারবেন।

3.2 বেগ সংযোজন সূত্র (Law of Addition of Velocities)

ধরা যাক, S (x, y, z) কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে S′ (x′, y′, z′) কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রটি x অক্ষ অভিমুখে v বেগে চলছে (চিত্র: 3.1)। ধরা যাক, $t = t' = 0$ সময়ে S′ নির্দেশতন্ত্রটি S নির্দেশতন্ত্রকে অতিক্রম করে এবং সেই মুহূর্তে নির্দেশতন্ত্র দুটির x-অক্ষ x′-অক্ষের সঙ্গে, y-অক্ষ y′ অক্ষের সঙ্গে, z-অক্ষ z′-অক্ষের সঙ্গে এবং O-মূলবিন্দু O′-মূলবিন্দুর সঙ্গে সম্পূর্ণ মিশে যায় (অর্থাৎ ঐ মুহূর্তে নির্দেশতন্ত্রদুটির পরস্পরের উপর উপরিপাতন ঘটে।



চিত্র 3.1 বেগের সংযোজন

ধরা যাক, যে মুহূর্তে S ও S′ মিলিত হয়, সেই মুহূর্তে O বিন্দুর সাপেক্ষে স্থির একজন নিরীক্ষক O বিন্দু থেকে u বেগে একটি বস্তু নিক্ষেপ করে এবং তা নিরীক্ষকের ঘড়ি অনুযায়ী t সময় পর P (x, y, z) বিন্দুতে পৌঁছোয়। ধরা যাক, S′ নির্দেশতন্ত্রের O′-বিন্দুতে স্থির একজন নিরীক্ষকের ঘড়ি অনুযায়ী বস্তুটি u′ বেগে t′ সময়ে P বিন্দুতে পৌঁছোয়। ধরা যাক, O′-এর সাপেক্ষে P-র স্থানাঙ্ক P(x′, y′, z′)।

এখন x, y, z অক্ষগুলির দিকে u-র উপাংশগুলি যথাক্রমে u_x, u_y ও u_z ধরলে এবং x′, y′, z′ অক্ষগুলির দিকে u′-এর উপাংশগুলি যথাক্রমে u'_x, u'_y ও u'_z ধরলে আমরা পাই

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \tag{3.1}$$

এবং
$$u' = \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2} \tag{3.2}$$

এখন আমরা u এবং u´-র মধ্যে সম্পর্ক বার করব। যদি সনাতন গ্যালিলিয়ো রূপান্তর বিবেচনা করা হয়, তবে আমরা জানি

$$x' = x - vt,\ y' = y,\ z' = z$$

$$\text{এবং} \quad t' = t \tag{3.3}$$

সুতরাং x', y' ও z'-এর সমীকরণগুলিকে $t' = t$-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করলে পাওয়া যায়

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - \upsilon, \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}, \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} (\because dt' = dt)$$

$$\text{বা,} \quad u'_x = u_x - v, u'_y = u_y, u'_z = u_z \tag{3.4}$$

(3.4) সমীকরণের এই মানগুলি আমরা (3.2) সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$u' = \sqrt{(u_x - \upsilon)^2 + u_y^2 + u_z^2} \tag{3.5}$$

$$= \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_x^2 + (u_x - \upsilon)^2}$$

$$= \sqrt{u^2 - \upsilon(2u_x + \upsilon)} \tag{3.6}$$

(3.5) বা (3.6) সমীকরণকে আমরা u´ ও u-র মধ্যে সম্পর্কের সমীকরণ হিসাবে ধরতে পারি। এটিকে দুটি বেগের সংযোজন সূত্র বা u বেগযুক্ত কণার সাপেক্ষে v বেগযুক্ত কণার আপেক্ষিক (relative) বেগের সমীকরণও বলা হয়।

এখন (3.5) সমীকরণে $u_y = u_z = 0$ এবং $u_x = u$ ধরলে আমরা পাই,

$$u' = u - v \tag{3.7}$$

(3.7) সমীকরণটি হল সনাতন সৃতিবিদ্যা অনুযায়ী u বেগে ভ্রমণশীল A কণার সাপেক্ষে একই দিকে v বেগে ভ্রমণশীল B কণার আপেক্ষিক বেগ।

যদি কণাগুলির বেগ u ও v আলোকের বেগ c-র তুলনায় অত্যন্ত কম হয়, তবে সনাতন সৃতিবিদ্যার উপরোক্ত সূত্র বা সমীকরণগুলি প্রযোজ্য হয়। কিন্তু u ও v আলোকের বেগের সঙ্গে তুলনীয় হলে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর সমীকরণগুলি প্রযোজ্য হয় না এবং সেক্ষেত্রে লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণ ব্যবহার করতে হয়। ফলে বেগ সংযোজনের সূত্রগুলিও ভিন্ন রূপ পায়।

এখন দেখা যাক, লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণগুলি ব্যবহার করলে বেগ সংযোজনের সূত্রগুলি কিরূপ হয়। লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণগুলি হল

$$x' = \gamma(x - \upsilon t),\ \ y' = y, z' = z$$

$$\text{এবং} \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon x}{c^2}\right), \ \text{যেখানে} \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} \tag{3.8}$$

(3.8) সমীকরণের x´, y´ ও z´ কে t-এর সাপেক্ষে এবং t´-কে t-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে আমরা পাই

$$\frac{dx'}{dt'} = \gamma\left(\frac{dx}{dt}.\frac{dt}{dt'} - v.\frac{dt}{dt'}\right)$$

$$= \gamma\left(\frac{dx}{dt} - v\right)\frac{dt}{dt'}$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dt'}$$

$$\frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dt'}$$

এবং $$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{dx}{dt}\right) \qquad (3.9)$$

(3.9) সমীকরণে আমরা $\frac{dx}{dt} = u_x, \frac{dy}{dt} = u_y, \frac{dz}{dt} = u_z$

$\frac{dx'}{dt'} = u'_x, \frac{dy'}{dt'} = u'_y$ এবং $\frac{dz'}{dt'} = u'_z$ মানগুলি বসিয়ে পাই

$$u'_x = \gamma(u_x - \upsilon).\frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}\right)}$$

$$= \frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}\right)} = \frac{u_y\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}{1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}\right)} = \frac{u_z\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}{1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}}$$

এবং $$\frac{dt}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{\upsilon u_x}{e^2}\right) = \frac{1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} \qquad (3.10)$$

আপনি নিশ্চয় লক্ষ করেছেন যে S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে S'-এর আপেক্ষিক বেগ v, x-অক্ষ অভিমুখে ধরায় গ্যালিলিয়ো এবং লরেন্টজীয় উভয় রূপান্তর সমীকরণেই $y' = y$ এবং $z' = z$। কিন্তু বেগের ক্ষেত্রে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর দ্বারা $u'_y = u_y$ এবং $u'_z = u_z$ হলেও লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা u'_y ও u'_z যথাক্রমে u_y ও u_z-এর সমান নয়। এর কারণ S-এর সাপেক্ষে S' কাঠামোতে ঘড়ির গতি সমান নয় (অর্থাৎ $t' \neq t$ বা $dt' \neq dt$)।

যদি v ও u_x c-র তুলনায় খুব ক্ষুদ্র হয়, তবে (3.10) সমীকরণ থেকে আমরা লিখতে পারি

$$\frac{\upsilon u_x}{c^2} \approx 0 \quad \text{এবং} \quad \frac{\upsilon^2}{c^2} \approx 0$$

সুতরাং,
$$u'_x \approx u_x - \upsilon$$
$$u'_y \approx u_y$$
$$u'_z \approx u_z.$$
এবং
$$dt' \approx dt \tag{3.11}$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে (3.11) সমীকরণগুলি গ্যালিলিয়ো রূপান্তরকে অনুসরণ করে।

(3.10) সমীকরণগুলির সাহায্যে আমরা u′ ও u-র মধ্যে সম্পর্ক পাই।

$$u'^2 = u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z$$

$$= \frac{(u_x - \upsilon)^2 + (u_y^2 + u_z^2)\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}\right)^2}$$

$$= \frac{(u_x - \upsilon)^2 + (u^2 - u_x^2)\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\upsilon u_x}{c^2}\right)^2} \tag{3.12}$$

(3.10) এবং (3.12) সমীকরণগুলিকে S' নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে দুটি আপেক্ষিকীয় বেগের সংযোজন সূত্র বলে। যদি u এবং v উভয়েই x অক্ষের সমান্তরাল হয়, তবে

$$u_x = u, u_y = 0, u_z = 0$$

সুতরাং (3.10) বা (3.12) সমীকরণ থেকে পাই

$$u' = u'_x = \frac{u - \upsilon}{1 - \frac{u\upsilon}{c^2}}; u'_y = 0, u'_z = 0 \tag{3.13}$$

(3.13) সমীকরণকে S'-এর সাপেক্ষে আপেক্ষিকীয় আপেক্ষিক বেগের সূত্র বলা যায়। এই সূত্রে $u << c, v << c$ ধরলে, আমরা সনাতন আপেক্ষিক বেগের সূত্র অর্থাৎ সমীকরণ (3.7) পাই।

(3.10) সমীকরণগুলি থেকে বিপরীতক্রমে u_x, u_y, u_z রাশিগুলির মান বার করলে আমরা পাই,

$$u_x = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon u'_x}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}{1 + \frac{\upsilon u'_x}{c^2}}$$

এবং
$$u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}{1 + \frac{\upsilon u'_x}{c^2}} \tag{3.14}$$

আপনি লক্ষ করে দেখুন যে, এই সমীকরণগুলি (3.10) সমীকরণগুলির বাঁদিকের রাশিগুলির উপর থেকে ড্যাশ (dash) চিহ্নগুলি তুলে সেগুলিকে ডানদিকের অনুরূপ রাশিগুলির উপর বসিয়ে এবং v কে $-\upsilon$ দ্বারা প্রতিস্থাপিত করেও সহজে পাওয়া যায়।

যদি u' ও v পরস্পর সমান্তরাল হয়, তবে (3.13) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

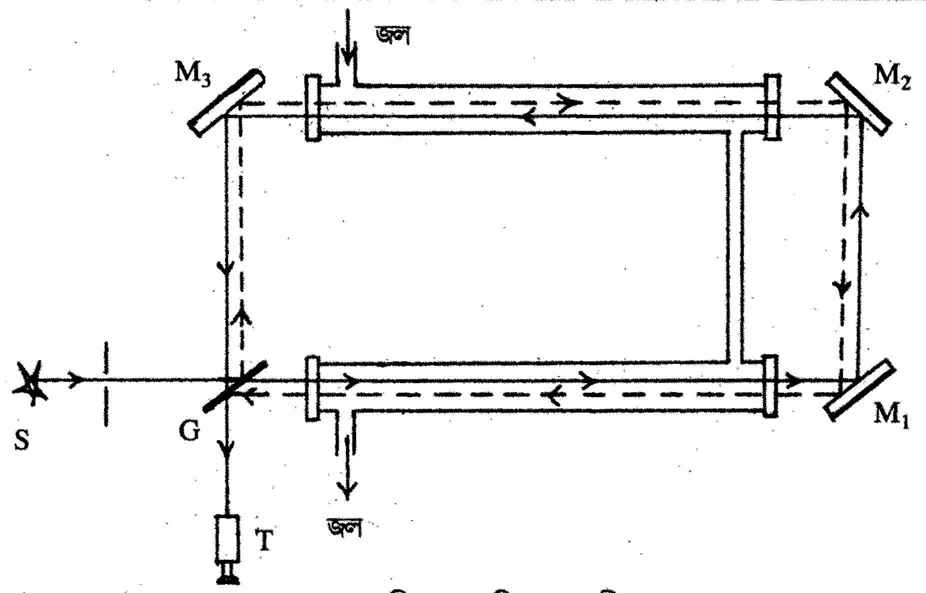
$$u = \frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{u'\upsilon}{c^2}} \tag{3.15}$$

3.3 গতিশীল মাধ্যমে আলোকের বেগের পরিবর্তন (Dragging of Light by a Moving Medium) ঃ

আপনি আপেক্ষিকতা তত্ত্বের পটভূমিকার (প্রথম) এককে ইথার তত্ত্বের আলোচনা পেয়েছেন এবং লক্ষ করেছেন যে ইথারের সাপেক্ষে পৃথিবীর বেগের মান নির্ণয়ের না-ধর্মী পরীক্ষাগুলি ফ্রেনেলের (Fresnel) ইথার টান প্রকল্পদ্বারা (ether drag hypothesis) মোটামুটি ব্যাখ্যা করা যায়। ইথার টান প্রকল্প সরাসরি পরীক্ষার জন্য 1851 খ্রিস্টাব্দে ফিজো (Fizeau) একটি নলের মধ্য দিয়ে উচ্চবেগে জলের প্রবাহ পাঠিয়ে ঐ গতিশীল জলের মাধ্যমে আলোকের বেগ নির্ণয় করেন (চিত্র 3.2)। তিনি লক্ষ করেন যে এই বেগ স্থির হলে আলোকের বেগের যে মান হয়, তার চেয়ে কিছু বেশি। যদি শূন্য

মাধ্যমে আলোকের বেগ c এবং জলের প্রতিসরাঙ্ক n ধরা হয়, তবে স্থির জলে আলোকের বেগ হয় $\frac{c}{n}$। কিন্তু ফিজোর পরীক্ষাকে ইথার টান প্রকল্প দ্বারা ব্যাখ্যা করলে আলোকের প্রাপ্ত বেগ হয়

$$u = \frac{c}{n} + fv \qquad (3.16)$$



চিত্র 3.2 ফিজোর পরীক্ষা

এখানে v হল জলের প্রবাহের বেগ এবং f ইথার টান গুণাঙ্ক। ফিজোর পরীক্ষা থেকে f-এর যে মান পাওয়া যায়, তা হল

$$f \approx 0.48 \qquad (3.17)$$

কিন্তু ফ্রেনেলের প্রকল্প অনুযায়ী

$$f = 1 - \frac{1}{n^2} \qquad (3.18)$$

সুতরাং জলের ক্ষেত্রে n = 1.33 বসালে আমরা পাই

$$f \approx 0.44 \qquad (3.19)$$

কাজেই পরীক্ষার ভ্রম সীমার মধ্যেই f-এর মান আছে ধরা যায়।

সুতরাং ফিজোর পরীক্ষাকে ফ্রেনেলের ইথার টান প্রকল্পের সমর্থনসূচক বলে গণ্য করা যায়।

পরবর্তীকালে দেখা যায় যে ফ্রেনেলের ইথার টান প্রকল্পের বহু ত্রুটি রয়েছে। এই ত্রুটি দূর করার জন্য লরেন্টজ (Lorentz) তাঁর ইলেকট্রন তত্ত্ব উপস্থাপিত করেন। এই তত্ত্বে তিনি ধরে নেন

যে গতিশীল বস্তুমাধ্যম ইথারকে টেনে নিয়ে যায় না। অপরপক্ষে বস্তুর মধ্যে স্পন্দনশীল ঋণাত্মক তড়িৎধর্মী ইলেকট্রনগুলি নিজেরাই তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ উৎপন্ন করে এবং এই তরঙ্গের সঙ্গে আপতিত আলোক-তরঙ্গের ব্যতিচার ঘটে। ফলে যদি বস্তুমাধ্যম স্থির থাকে, তবে উৎপন্ন তরঙ্গের বেগ হয় $\frac{c}{n}$। কিন্তু বস্তুমাধ্যম আলোকের বিপরীত দিকে v বেগে গতিশীল হলে আলোকের দশার বেগ ফ্রেনেলের প্রকল্প অনুসরণ করে এবং সেজন্য ঐ মাধ্যমে আলোকের বেগ হয়

$$u = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{3.20}$$

অর্থাৎ, লরেন্টজের ইলেকট্রন তত্ত্ব ফ্রেনেলের ইথার টান প্রকল্প বাদ দিয়েও ফিজোর পরীক্ষা ব্যাখ্যা করতে পারে। কিন্তু এই ইলেকট্রন তত্ত্বের অসুবিধা হল যে এটি স্থির ইথার তত্ত্বকে স্বীকার করে যা আপেক্ষিকতা তত্ত্বের বিরোধী। তাছাড়া লরেন্টজের ইলেকট্রন তত্ত্বের আরও নানা জটিলতা রয়েছে, যেগুলির সঠিক ব্যাখ্যা করা কঠিন।

আমরা এখন দেখব যে লরেন্টজের রূপান্তর থেকে প্রাপ্ত বেগের সংযোজন সূত্রদ্বারা ফিজোর পরীক্ষার ফল সরাসরি সহজে প্রমাণ করা যায়।

ধরা যাক, পরীক্ষাগারে একটি নলের মধ্যদিয়ে x-অক্ষের দিকে প্রবাহিত জলের বেগ v এবং পরীক্ষাগারে অবস্থিত একজন নিরীক্ষকের কাছে ঐ জলের মধ্যদিয়ে আগত আলোকের বেগ u_x। এখন যদি নিরীক্ষকের সাপেক্ষে স্থির পরীক্ষাগারের নির্দেশতন্ত্রকে S এবং এই নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে v বেগে গতিশীল জলের নির্দেশতন্ত্রকে S′ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তবে এই S′ নির্দেশতন্ত্রে আলোকের বেগ হবে $u'_x = \frac{c}{n}$ কারণ এই নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে জল স্থির আছে এবং এর প্রতিসরাঙ্ক (ধরা হয়েছে) n।

সুতরাং আপেক্ষিকীয় বেগ সংযোজনের সূত্র প্রয়োগ করে আমরা পাই

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon u'_x}{c^2}} \\ &= \frac{\frac{c}{n} + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{cn}} \\ &= \left(\frac{c}{n} + \upsilon\right)\left(1 + \frac{\upsilon}{cn}\right)^{-1} \\ &\approx \left(\frac{c}{n} + \upsilon\right)\left(1 - \frac{\upsilon}{cn}\right) \\ &\approx \frac{c}{n} + \upsilon\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \tag{3.21}$$