ছুঁড়ে দেয়, তাহলে দেখবে যে সেটি তার হাতে ফিরে আসছে না, সামনের দিকে এগিয়ে গিয়ে মেঝেতে পড়ে যাচ্ছে।

আমরা যেকোনও বস্তুর একটি বিন্দুর মধ্য দিয়ে তিনটি পরস্পর সমকোণী অক্ষবিশিষ্ট কার্টেজীয় (বা অন্য কোনও) নির্দেশতন্ত্র গঠন করতে পারি। একটি বস্তু অন্য একটি বস্তুর সাপেক্ষে গতিশীল হলে এদের নির্দেশতন্ত্র দুটিও একে অপরের সাপেক্ষে গতিশীল হয়। উপরের উদাহরণে আমরা রেলগাড়ির বাইরে স্থির নিরীক্ষকের জন্য ঐ স্থানে একটি নির্দেশতন্ত্র S এবং চলন্ত রেলগাড়ির কামরাতে একটি নির্দেশতন্ত্র S′ স্থাপন করতে পারি। যদি এই দুটি নির্দেশতন্ত্রের x ও x′-অক্ষ দুটি রেলগাড়ির বেগের অভিমুখে হয় এবং পৃথিবীর সাপেক্ষে রেলগাড়ির বেগ v হয়, তবে আমরা বলতে পারি যে S′ নির্দেশতন্ত্র S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে v বেগে চলছে। অনুরূপে পৃথিবীর সাপেক্ষে যদি রেলগাড়ির মন্দন (বা ত্বরণ) a হয়, তবে আমরা বলব যে S নির্দেশতন্ত্র S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে a মন্দন (বা ত্বরণ) নিয়ে চলেছে। পৃথিবীর আহ্নিক ও বার্ষিক গতি এবং আকর্ষণ উপেক্ষা করলে আমরা দেখাতে পারি যে S নির্দেশতন্ত্রে নিউটনের গতিসূত্রগুলি সত্য। অনুরূপে, S′ নির্দেশতন্ত্র S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে v সমবেগে চলতে থাকলে, সেখানেও নিউটনের গতিসূত্রগুলি সমভাবে সত্য হয়। অপর পক্ষে যদি S′ নির্দেশতন্ত্রের কোনও ত্বরণ বা মন্দন থাকে, তবে এই নির্দেশতন্ত্রে নিউটনের গতিসূত্রগুলি সত্য হয় না।

যে নির্দেশতন্ত্রগুলিতে নিউটনের গতিসূত্রগুলি সত্য হয়, সেই নির্দেশতন্ত্রগুলিকে **জ্যাড্যিক নির্দেশতন্ত্র** (Inertial frame of reference) বলে। আর যে নির্দেশতন্ত্রগুলিতে নিউটনের গতিসূত্রগুলি খাটে না, সেগুলিকে **অজাড্যিক নির্দেশতন্ত্র** (Non-inertial frame of reference) বলে।

সূক্ষ্মদৃষ্টিতে লক্ষ করলে পৃথিবীকে একটি প্রকৃত স্থির জ্যাড্যিক নির্দেশতন্ত্র বলা যায় না। কারণ, পৃথিবীর উপরস্থ প্রত্যেক বস্তুর উপর এর অভিকর্ষজ বল ক্রিয়া করে। তাছাড়া এর আহ্নিক ও বার্ষিক গতির জন্য আরও দুটি কেন্দ্রাতিগ বল প্রত্যেক বস্তুর উপর ক্রিয়া করে। এজন্য নিউটনও পৃথিবীকে একটি জাড্যিক নির্দেশতন্ত্র হিসাবে গ্রহণ করেননি। তাছাড়া নিউটনের মহাকর্ষ তত্ত্ব অনুযায়ী মহাবিশ্বের প্রত্যেক বস্তুই অপর বস্তুকে আকর্ষণ করে। সুতরাং মহাবিশ্বের কোনও বস্তুই প্রকৃত জ্যাড্যিক নির্দেশতন্ত্র নয়। তবুও তিনি বিশ্বাস করতেন যে মহাশূন্যে একটি পরম স্থির নির্দেশতন্ত্র আছে এবং সেখানে তাঁর গতিসূত্রগুলি পরম সত্য। শূন্যের মধ্য দিয়েও আলোক তরঙ্গ যেতে পারে। কিন্তু তরঙ্গ বিস্তারের জন্য একটি মাধ্যম দরকার—এই ধারণা থেকেই ধরে নেওয়া হয় যে মহাশূন্যও 'ইথার' (Ether) নামক একটি মাধ্যম দ্বারা পরিপূর্ণ। ম্যাক্সওয়েলের তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ তত্ত্ব দ্বারাই এই 'ইথার' তত্ত্ব নূতনভাবে প্রতিষ্ঠা লাভ করে। তখন ধরা হয় যে ইথারই হল সেই পরম স্থির নির্দেশতন্ত্র, যার সাপেক্ষে পৃথিবী বা অন্য প্রত্যেক বস্তুর একটি পরম বেগ আছে। পরবর্তীকালে মাইকেলসন ও মর্লে

আয়নার সাহায্যে আলোকের প্রতিফলন ঘটিয়ে ইথারের সাপেক্ষে পৃথিবীর পরম বেগ নির্ণয়ের পরীক্ষা করেন। কিন্তু তাঁদের প্রচেষ্টা ব্যর্থ হন। আইনস্টাইন তাঁর আপেক্ষিকতা তত্ত্বে মাইকেলসন-মর্লের পরীক্ষার ফল গ্রহণ করেন এবং ইথার তত্ত্ব সহ বস্তুর পরম বেগের ধারণা পরিত্যাগ করেন। এ বিষয়ে দ্বিতীয় পরিচ্ছেদে আপনারা বিশদ আলোচনা পেয়েছেন।

4.3 নিউটনের গতিসূত্রগুলির সনাতন বা গ্যালিলিয়ো রূপান্তর (Classical or Galilean Transformation & Newton's Laws of Motion) :

বিভিন্ন জাড্যিক নির্দেশতন্ত্রের ধারণা প্রথম গ্যালিলিয়ো প্রতিষ্ঠা করেন। তিনি সময়কে নির্দেশতন্ত্র নিরপেক্ষ একটি রাশি (অর্থাৎ পরম রাশি) হিসেবে ধরে ছিলেন। ফলে $s(x, y, z)$ নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে $S'(x', y', z')$ নির্দেশতন্ত্র x, x' অক্ষের অভিমুখে v সমবেগে চলতে থাকলে, S' নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে স্থির একটি বিন্দু $P(x', y', z')$-এর স্থানাঙ্কগুলি S-এর সাপেক্ষে হবে

$$\begin{aligned} x' &= x - \upsilon t, \\ y' &= y, \\ z' &= z \\ \text{এবং}\quad t' &= t \end{aligned} \qquad \ldots(4.5)$$

এগুলিকেই আমরা গ্যালিলিয়ো রূপান্তর সমীকরণ বলেছি। আমরা এখন দেখাব যে এই রূপান্তর দ্বারা নিউটনের গতিসূত্রগুলি অপরিবর্তিত থাকে।

প্রথম গতি সূত্রের রূপান্তর পরীক্ষা :

ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রে একটি কণা $\vec{u}$ সমবেগে চলছে এবং বাইরে থেকে এর উপর কোনো বল ক্রিয়া করছে না। ধরা যাক পূর্বের সংজ্ঞা অনুযায়ী S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে S' নির্দেশতন্ত্র x, x' অভিমুখে v সমবেগে যাচ্ছে। ধরা যাক, S' নির্দেশতন্ত্রে t' সময়ে কণাটির বেগ $\vec{u}'$। এখন আমরা (4.5) সমীকরণগুলি থেকে $t' = t$-র সাপেক্ষে x', y' ও z'-এর অন্তরকলন করে পাই

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= \frac{dx}{dt} - v \quad \text{বা,}\quad u'_x = u_x - \upsilon \\ \frac{dy'}{dt} &= \frac{dy}{dt} \quad \text{বা,}\quad u'_y = u_y \\ \text{এবং}\quad \frac{dz'}{dt} &= \frac{dz}{dt} \quad \text{বা,}\quad u'_z = u_z \end{aligned} \qquad \ldots(4.6)$$

যেখানে u_x, u_y ও u_z হল যথাক্রমে x, y ও z অক্ষের দিকে $\vec{u}$-র উপাংশ এবং অনুরূপ u'_x, u'_y ও u'_z হল $\vec{u}'$-এর উপাংশ। এখন x, x' অক্ষের দিকে একক ভেক্টর $\vec{i} = \vec{i}'$, y, y' অক্ষের দিকে একক ভেক্টর $\vec{j} = \vec{j}'$ এবং z, z' অক্ষের দিকে একক ভেক্টর $\vec{k} = \vec{k}'$ ধরলে আমরা পাই—

$$\vec{u}' = \vec{i}'u'_x + \vec{j}'u'_y + \vec{k}'u'_z = \vec{i}(u_x - \upsilon) + \vec{j}\,u_y + \vec{k}\,u_z$$

$$= \vec{i}\,u_x + \vec{j}\,u_y + \vec{k}\,u_z - \vec{i}\,\upsilon = \vec{u} - \vec{\upsilon} = \text{সমবেগ} \qquad \text{...(4.7)}$$

কারণ $\vec{u}$ ও $\vec{v}$ উভয়েই সমবেগ।

কাজেই S নির্দেশতন্ত্রে নিউটনের প্রথম গতিসূত্র সত্য হলে, S' নির্দেশতন্ত্রেও গতিসূত্রটি সত্য।

দ্বিতীয় গতি সূত্রের রূপান্তর পরীক্ষা ঃ

ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রে কণাটির ভর m, বেগ $\vec{u}$ এবং ভরবেগ $\vec{p} = m\vec{u}$। যদি কণাটির এই বেগের পরিবর্তন হয়, তবে এর ভরবেগও পরিবর্তিত হবে। যদি কণার উপর প্রযুক্ত বল $\vec{F}$ হয়, তবে দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$= m\left(\vec{i}\frac{du_x}{dt} + \vec{j}\frac{du_y}{dt} + \vec{k}\frac{du_z}{dt}\right) \qquad \text{...(4.8)}$$

এখান আমরা ভরের সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী ধরে নিয়েছি যে m ধ্রুবক অর্থাৎ এটি বেগের উপর নির্ভর করে না।

এখানে S' নির্দেশতন্ত্রে যদি কণাটির উপর প্রযুক্ত বল $\vec{F}'$ ধরা হয়, তবে আমরা (4.8) সমীকরণ অনুসরণ করে লিখতে পারি

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt} = m\left(\vec{i}'\frac{du'_x}{dt} + \vec{j}'\frac{du'_y}{dt} + \vec{k}'\frac{du'_z}{dt}\right) \qquad \text{...(4.9)}$$

এখানেও আমরা ভরের সংরক্ষণ সূত্র আরোপ করে ভরকে নির্দেশতন্ত্র নিরপেক্ষ ধরেছি।

এখানে প্রত্যেক অক্ষযুগল $x' \parallel x, y' \parallel y$ এবং $z' \parallel z$ ধরে নিলে একক ভেক্টর $\vec{i}' = \vec{i}, \vec{j}' = \vec{j}$

এবং $\vec{k}' = \vec{k}$ হবে। তাছাড়া গ্যালিলিয়ো রূপান্তর দ্বারা প্রাপ্ত (4.6) সমীকরণের মানগুলি (4.9) সমীকরণে বসালে আমরা পাই

$$\vec{F}' = m\left\{\vec{i}\,\frac{d}{dt}(u_x - \upsilon) + \vec{j}\,\frac{du_y}{dt} + \vec{k}\,\frac{du_z}{dt}\right\}$$

$$= m\left(\vec{i}\,\frac{du_x}{dt} + \vec{j}\,\frac{du_y}{dt} + \vec{k}\,\frac{du_z}{dt}\right) = \vec{F} \qquad ...(4.10)$$

কারণ v সমবেগ হওয়ায় $\frac{dv}{dt} = 0$

(4.10) সমীকরণ থেকে আমরা দেখতে পাচ্ছি যে S ও S′ উভয় নির্দেশতন্ত্রেই বলের মান অপরিবর্তিত থাকছে। অর্থাৎ ভরের সংরক্ষণ সূত্র ধরে নিলে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর দ্বারা নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রের কোনও পরিবর্তন হয় না।

তৃতীয় গতিসূত্রের রূপান্তর পরীক্ষা ঃ

এখন দেখা যাক, তৃতীয় গতিসূত্রের ক্ষেত্রে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর প্রয়োগ করলে কী ফল হয়। আমরা পূর্বেই উল্লেখ করেছি যে তৃতীয় সূত্রটি হল আসলে দুই বা ততোধিক বস্তুর মধ্যে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার ক্ষেত্রে মোট ভরবেগ সংরক্ষণের সূত্র। অবশ্য এই ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার ক্ষেত্রে ধরা হয় যে মোট ভর সংরক্ষিত (অর্থাৎ অপরিবর্তিত) আছে। আমরা গণনার সরলতার জন্য মাত্র দুটি বস্তুর ভরবেগ বিবেচনা করব। অবশ্য বস্তুর সংখ্যা দুই-এর চেয়ে বেশী হলেও শেষ পর্যন্ত একই সিদ্ধান্তে আসা যায়।

এখন ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রে m_1 ও m_2 ভরের দুটি বস্তুর বেগ যথাক্রমে $\vec{u}_1$ ও $\vec{u}_2$ এবং ভরবেগ যথাক্রমে $\vec{p}_1$ ও $\vec{p}_2$। যেহেতু বেগ ও ভরবেগগুলি বিভিন্ন দিকে হতে পারে, সেজন্য এগুলিকে এখানে আমরা ভেক্টর হিসাবে বিবেচনা করব।

যদি বস্তু দুটির লব্ধি ভরবেগ $\vec{p}$ হয়, তবে তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার দ্বারা এর পরিবর্তন হবে না। অর্থাৎ

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = \text{ধ্রুবক} \qquad ...(4.11)$$

এখন ধরা যাক, x, y ও z অক্ষ অভিমুখে একক ভেক্টরগুলি যথাক্রমে $\vec{i}, \vec{j}$ ও $\vec{k}$। (4.11) সমীকরণটিকে এই একক ভেক্টরগুলির সাপেক্ষে লিখলে দাঁড়ায়

$$\vec{p} = \vec{i}(m_1u_{1x} + m_2u_{2x}) + \vec{j}(m_1u_{1y} + m_2u_{2y}) + \vec{k}(m_1u_{1z} + m_2u_{2z}) \qquad ...(4.12)$$

এখানে u_{1x}, u_{1y} ও u_{1z} হল যথাক্রমে x, y ও z অক্ষের দিকে $\vec{u_1}$ বেগের উপাংশ।

অনুরূপে u_{2x}, u_{2y} ও u_{2z} হল যথাক্রমে x, y ও z অক্ষের দিকে $\vec{u_2}$ বেগের উপাংশ।

এখন দেখা যাক যে (4.12) সমীকরণটি S' নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে কিরূপে পরিবর্তিত হয়। ধরা যাক, S' নির্দেশতন্ত্রটি S' নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে x, x' অক্ষ অভিমুখে $\vec{\upsilon}$ বেগে যাচ্ছে। তাহলে গ্যালিলিয়োর বেগের রূপান্তর সমীকরণ (4.6) প্রয়োগ করে

S' নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে বস্তু দুটির লব্ধি ভরবেগ $\vec{p'}$ হবে

$$\vec{p'} = m_1\vec{u'}_1 + m_2\vec{u'}_2$$

$$= \vec{i}(m_1u'_{1x} + m_2u'_{2x}) + \vec{j}(m_1u'_{1y} + m_2u'_{2y}) + \vec{k}(m_1u'_{1z} + m_2u'_{2z})$$

$$= \vec{i}\{m_1u_{1x} + m_2u_{2x} - (m_1 + m_2)\upsilon\} + \vec{j}(m_1u_{1y} + m_2u_{2y}) + \vec{k}(m_1u_{1z} + m_2u_{2z})$$

$$= \vec{p} - \vec{i}(m_1 + m_2)\upsilon$$

$$= \vec{p} - (m_1 + m_2)\vec{\upsilon} = \text{ধ্রুবক} \qquad ...(4.13)$$

কারণ, $\vec{P}, (m_1 + m_2)$ এবং $\vec{\upsilon}$ প্রত্যেকটিই ধ্রুবক। অর্থাৎ S নির্দেশতন্ত্রের মোট ভরবেগ সংরক্ষিত হবে। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে তৃতীয় সূত্রটির পরিবর্তন হচ্ছে না।

4.4 নিউটনের গতিসূত্রগুলির লরেন্টজীয় রূপান্তর (Lorentzion Transformation of Newton's Laws of Motion) :

আমরা পূর্ব অনুচ্ছেদে দেখেছি যে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর সমীকরণগুলি দ্বারা নিউটনের গতিসূত্রের সমীকরণগুলি পরিবর্তন করলে, হয় সেগুলি অপরিবর্তিত থাকে (যথা, দ্বিতীয় গতিসূত্র) না হয়তো এমনভাবে পরিবর্তিত হয়, যাতে সমীকরণগুলির রূপ একই থাকে এবং গতিসূত্রগুলিও অপরিবর্তিত থাকে। নিউটনের প্রথম ও তৃতীয় গতিসূত্র এই প্রকারের। উপরের প্রথম প্রকারের সমীকরণগুলিকে বলা হয় ইনভ্যারিয়েন্ট (invariant) বা 'অপরিবর্তনীয়' আর দ্বিতীয় প্রকারের সমীকরণগুলিকে বলা হয় কোভ্যারিয়েন্ট (covariant) বা 'সমরূপী'।

আমরা এখন নিউটনের গতিসূত্রগুলির উপর লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণ প্রয়োগ করে দেখব যে গতিসূত্রের সমীকরণগুলি অপরিবর্তনীয় বা সমরূপী হয় কিনা।

প্রথম সূত্র ঃ এই সূত্র অনুযায়ী ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রে একটি কণা $\vec{u}$ সমবেগে কোনও এক দিকে একই সরলরেখা ধরে চলছে এবং কণাটির উপর বাইরের কোনও বল ক্রিয়া করে না। ধরা যাক x, y ও z অক্ষগুলির উপর $\vec{u}$-র উপাংশ যথাক্রমে u_x, u_y ও u_z এবং এই অক্ষগুলির দিকে তিনটি একক ভেক্টর হল যথাক্রমে $\vec{i}, \vec{j}$ ও $\vec{k}$.

$$\text{সুতরাং}\quad \vec{u} = \vec{i}u_x + \vec{j}u_y + \vec{k}u_z = \text{ধ্রুবক} \qquad ...(4.14)$$

এখন ধরা যাক, S′ নির্দেশতন্ত্র S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে x-অক্ষ অভিমুখে $\vec{\upsilon}$ বেগে চলছে। আমরা আরও ধরছি যে y′-অক্ষ ‖ y-অক্ষ, z′-অক্ষ ‖ z-অক্ষ এবং x′-অক্ষ x-অক্ষের উপর আছে। যদি S′ নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে ঐ বেগ $\vec{u}'$ হয় এবং u'_x, u'_y ও u'_z যথাক্রমে x′, y′ ও z′ অক্ষগুলির দিকে এর উপাংশ হয়, তবে এই অক্ষগুলির দিকে একক ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{i}', \vec{j}'$ ও $\vec{k}'$ ধরলে আমরা পাই—

$$u' = \vec{i}'u'_x + \vec{j}'u'_y + \vec{k}'u_z \qquad ...(4.15)$$

এখন লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণগুলি হল—

$$x' = \gamma(x - \upsilon t)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\text{এবং}\quad t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon x}{c^2}\right) \qquad ...(4.16)$$

$$\text{যেখানে}\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}$$

এই রূপান্তর সমীকরণগুলির সাহায্যে 3নং এককে আমরা দেখিয়েছি যে—

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{u_x\upsilon}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}{1 - \frac{u_x\upsilon}{c^2}} \qquad ...(4.17)$$

এবং $u'_z = \dfrac{u_z\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}}$

(4.17) সমীকরণগুলি থেকে u'_x, u'_y ও u'_z-এর মান (4.15) সমীকরণে বসালে আমরা পাই—

$$u' = \vec{i'}\frac{u_x-\upsilon}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}} + \vec{j'}\frac{u_y\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c}} + \vec{k'}\frac{u_z\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}} \qquad ...(4.18)$$

এখন যেহেতু υ $\vec{i'}$-এর অভিমুখে আছে, সুতরাং এই একক ভেক্টরটির লরেন্টজীয় সংকোচন হবে, কিন্তু $\vec{j'}$ ও $\vec{k'}$ ভেক্টরগুলির এই সংকোচন হবে না।

সুতরাং

$$\vec{i'} = i\sqrt{1-\upsilon^2/c^2},\ \vec{j'} = \vec{j},\ \vec{k'} = \vec{k} \qquad ...(4.19)$$

(4.18) ও (4.19) সমীকরণগুলি থেকে এখন আমরা পাই—

$$u = \left\{\vec{i}(u_x-\upsilon) + \vec{j}\,u_y + \vec{k}\,u_2\right\}\frac{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}}$$

$$= \left(\vec{u}-\vec{\upsilon}\right)\frac{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}}$$

এই সমীকরণে $\vec{\upsilon} = \vec{i}\upsilon$ = x-অক্ষ অভিমুখে S′ নির্দেশতন্ত্রের বেগ। কিন্তু পূর্বেই আমরা ধরে নিয়েছি যে $\vec{u}$ এবং $\vec{\upsilon}$ উভয়েই ধ্রুবক (সমবেগ)।

সুতরাং,

$$\vec{u}-\vec{\upsilon} = \text{ধ্রুবক}$$

এবং $\dfrac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\dfrac{u_x v}{c^2}}$ = ধ্রুবক

অর্থাৎ

$$u' = \text{ধ্রুবক} \qquad ...(4.21)$$

সুতরাং নিউটনের প্রথম গতিসূত্র S নির্দেশতন্ত্রেও সত্য। এখানে লক্ষণীয় যে $u \neq u'$, কিন্তু উভয়েই স্ব স্ব নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে ধ্রুবক। সুতরাং এই সমীকরণগুলি সমরূপী (covariant)।

দ্বিতীয় সূত্র ঃ

এখন দেখা যাক, দ্বিতীয় গতিসূত্রে লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রয়োগ করলে কী ফল পাওয়া যায়। ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রে m ভরের একটি বস্তুর উপর $\vec{F}$ বল প্রয়োগ করা হল।

সুতরাং

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{u}) \qquad ...(4.22)$$

যেখানে $m\vec{u}$ = বস্তুর ভরবেগ এবং $\vec{u}$ -এর t সময়ের বেগ (লক্ষ করুন এখানে $\vec{u}$ সমবেগ নয়)। যদি ভরকে আমরা ধ্রুবক ধরি, তবে (4.22) সমীকরণ থেকে আমরা পাই—

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{u}}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\vec{i}\,u_x + \vec{j}\,u_y + \vec{k}\,u_z\right)$$

$$= m\left(\vec{i}\,\frac{du_x}{dt} + \vec{j}\,\frac{du_y}{dt} + \vec{k}\,\frac{du_z}{dt}\right) \qquad ...(4.23)$$

এখন S′ নির্দেশতন্ত্রে যদি ঐ বস্তুর ভর m′ এবং বেগ $\vec{u'}$ হয়, তবে বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল হবে

$$\vec{F} = \frac{d}{dt'}\left(m'\vec{u'}\right)$$

যদি m′ ধ্রুবক ধরা হয়, তবে

$$\vec{F} = m'\frac{d}{dt'}\left(\vec{i'}\,u'_x + \vec{j'}\,u'_y + \vec{k'}\,u'_z\right)$$

$$= m'\left(\vec{i'}\,\frac{du'_x}{dt'} + \vec{j'}\,\frac{du'_y}{dt'} + \vec{k'}\,\frac{du'_z}{dt'}\right)$$

$$= m'\left(\vec{i'}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,\frac{du'_x}{dt'} + \vec{j'}\,\frac{du'_y}{dt'} + \vec{k'}\,\frac{du'_z}{dt'}\right) \qquad ...(4.25)$$

কারণ, প্রথম সূত্রের আলোচনায় আপনারা দেখেছেন যে

$$\vec{i}' = \vec{i}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2},\ \vec{j}' = \vec{j},\ \vec{k}' - \vec{k}$$

এখন $\dfrac{du_x'}{dt'} = \dfrac{d}{dt'}\dfrac{u_x - \upsilon}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}}$ [(3.10) সমীকরণ দ্রষ্টব্য]

$$= \frac{d}{dt}\frac{u_x - \upsilon}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}}\frac{dt}{dt'}$$

$$= \left\{\frac{\dfrac{du_x}{dt}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}} + \frac{(u_x-\upsilon)\dfrac{\upsilon}{c^2}\dfrac{du_x}{dt}}{\left(1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}\right)^2}\right\}\frac{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}} \quad \text{...(4.26)}$$

অনুরূপে $\dfrac{du_y'}{dt'} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{u_y\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}}\cdot\dfrac{dt}{dt'}$

$$= \left\{\frac{\dfrac{du_y}{dt}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}} + \frac{u_y\dfrac{\upsilon}{c^2}\dfrac{du_x}{dt}}{\left(1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}\right)^2}\right\}\frac{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}} \quad \text{...(4.27)}$$

এবং $\dfrac{du_z'}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{u_z\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}}\cdot\dfrac{dt}{dt'}$

$$= \left\{\frac{\dfrac{du_z}{dt}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}} + \frac{u_z\dfrac{\upsilon}{c^2}\dfrac{du_x}{dt}}{\left(1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}\right)^2}\right\}\frac{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}{1-\dfrac{u_x\upsilon}{c^2}} \quad \text{...(4.28)}$$

(4.26), (4.27) ও (4.28) সমীকরণগুলির মান এখন (4.25) সমীকরণে বসালে আমরা পাই

$$F' = m'\left[\vec{i}\left\{\frac{\frac{du_x}{dt}}{1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}} + \frac{(u_x-\upsilon)\frac{\upsilon}{c^2}\frac{du_x}{dt}}{\left(1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}\right)^2}\right\}\frac{1-\upsilon^2/c^2}{1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}}\right.$$

$$+\vec{j}\left\{\frac{\frac{du_y}{dt}}{1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}} + \frac{u_y\frac{\upsilon}{c^2}\frac{du_x}{dt}}{\left(1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}\right)^2}\right\}\frac{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}{1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}}$$

$$\left.+\vec{k}\left\{\frac{\frac{du_z}{dt}}{1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}} + \frac{u_z\frac{\upsilon}{c^2}\frac{du_x}{dt}}{\left(1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}\right)^2}\right\}\frac{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}{1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}}\right]$$

$$= m'\left[\left(\vec{i}\frac{du_x}{dt}+\vec{j}\frac{du_y}{dt}+\vec{k}\frac{du_z}{dt}\right)+\left(\vec{i}u_x+\vec{j}u_y+\vec{k}u_z\right)\frac{\frac{\upsilon}{c^2}\frac{du_x}{dt}}{\left(1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}\right)}\right.$$

$$\left.-\vec{i}\,\upsilon\frac{\frac{\upsilon}{c^2}\frac{du_x}{dt}}{1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}}\right]\frac{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}{\left(1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}\right)^2} \qquad ...(4.29)$$

যদি উভয় নির্দেশতন্ত্রে ভর অপরিবর্তনীয় হয় $(m = m')$, তবে (4.29) সমীকরণ থেকে পাই

$$\vec{F'} = \left[\left(1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}\right)\vec{F}+\frac{\upsilon F_x}{c^2}\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\right]\frac{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}{\left(1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}\right)^3} \qquad ...(4.30)$$

যেহেতু $\vec{u}$ পরিবর্তনশীল বেগ, সুতরাং এর x উপাংশ u_x-ও পরিবর্তনশীল হবে। সুতরাং (4.30) সমীকরণে $\vec{F}$ এবং এর উপাংশ F_x ধ্রুবক ধরলেও $\vec{F'}$ ধ্রুবক বা সমরূপী হবে না। অর্থাৎ লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অপরিবর্তনীয় থাকে না।

তৃতীয় সূত্র ঃ

ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রে একটি বস্তুর ভরবেগ $\vec{p}_1$ এবং দ্বিতীয় বস্তুর ভরবেগ $\vec{p}_2$ । নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী যদি এই দুটি বস্তুর মধ্যে সংঘর্ষ ঘটে এবং সংঘর্ষের পরও বস্তুদুটির মোট ভর অপরিবর্তিত থাকে, তবে এদের মোট ভরবেগও অপরিবর্তিত থাকবে। অর্থাৎ

$$m_1 + m_2 = \text{ধ্রুবক হলে}$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = \text{ধ্রুবক}$$

$$= \vec{i}(m_1u_{1x} + m_2u_{2x}) + \vec{j}(m_1u_{1y} + m_2u_{2y}) + \vec{k}(m_1u_{1z} + m_2u_{2z})$$

আপনি লক্ষ করে দেখুন যে এখানে (4.11) ও (4.12) সমীকরণ দুটিই আবার লেখা হয়েছে।

অনুরূপে S′ নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে ঐ ভরবেগ $\vec{p'}$ ধরলে আমরা পাই

$$\vec{p'} = m'_1\vec{u'}_1 + m'_2\vec{u'}_2$$

$$= \vec{i'}(m'_1u'_{1x} + m'_2u'_{2x}) + \vec{j'}(m'_1u'_{1y} + m'_2u'_{2y}) + \vec{k'}(m'_1u'_{1z} + m'_2u'_{2z}) \quad ...(4.31)$$

(4.31) সমীকরণ এখন লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রয়োগ করলে পাই

$$\vec{P'} = \sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\,\vec{i}\left\{m'_1\frac{u_{1x}-\upsilon}{1-\frac{u_{1x}\upsilon}{c^2}} + m'_2\frac{u_{2x}-\upsilon}{1-\frac{u_{2x}\upsilon}{c^2}}\right\}$$

$$+\vec{j}\left\{m'_1\frac{u_{1y}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\frac{u_{1x}\upsilon}{c^2}} + m'_2\frac{u_{2y}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\frac{u_{2x}\upsilon}{c^2}}\right\}$$

$$+\vec{k}\left\{m_1'\frac{u_{1z}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\frac{u_{1x}\upsilon}{c^2}}+m_2'\frac{u_{2y}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1-\frac{u_{2x}\upsilon}{c^2}}\right\}$$

$$=\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\left(m_1'\frac{\vec{i}\,u_{1x}+\vec{j}\,u_{1y}+\vec{k}\,u_{1z}}{1-\frac{u_{1x}\upsilon}{c^2}}-\frac{\vec{i}\,m_1'\upsilon}{1-\frac{u_{1x}\upsilon}{c^2}}\right.$$

$$\left.+m_2'\frac{\vec{i}\,u_{2x}+\vec{j}\,u_{2y}+\vec{k}\,u_{2z}}{1-\frac{u_{2x}\upsilon}{c^2}}-\frac{\vec{i}\,m_2'\upsilon}{1-\frac{u_{2x}\upsilon}{c^2}}\right)$$

$$=\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\left\{\frac{m_1'(\vec{u}_1-\vec{\upsilon})}{1-\frac{u_{1x}\upsilon}{c^2}}+\frac{m_2'(\vec{u}_2-\vec{\upsilon})}{1-\frac{u_{2x}\upsilon}{c^2}}\right\} \qquad ...(4.32)$$

(4.32) সমীকরণটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। কারণ এই সমীকরণ থেকে আমরা দেখতে পাচ্ছি যে যদি ভর সংরক্ষণ সূত্র সঠিক হয় অর্থাৎ $m'_1 = m_1$ এবং $m'_2 = m_2$ হয়, তবে $\vec{p}'$ ধ্রুবক হবে না। কারণ, $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ ধ্রুবক হলেও u_{1x} ও u_{2x}-এর বিভিন্ন মান হতে পারে। এক্ষেত্রে নিউটনের ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্রকে গ্রহণ করা যায় না। অপরপক্ষে যদি আমরা ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র গ্রহণ করি, তবে (4.32) সমীকরণকে ধ্রুবক করতে হবে। সেক্ষেত্রে ভরের সংরক্ষণ সূত্র পরিত্যাগ করতে হবে এবং ভরকে বেগের উপর নির্ভরশীল ধরতে হবে।

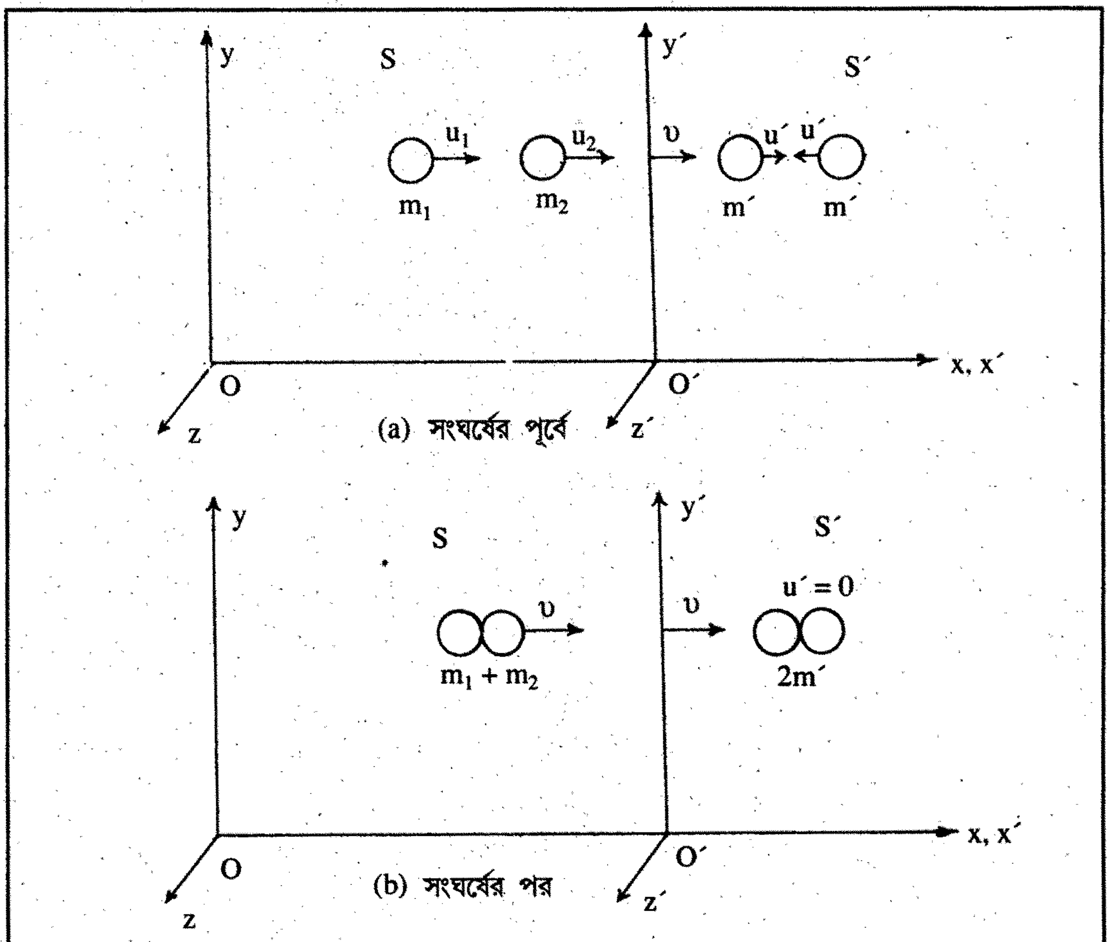
আইনস্টাইন তাঁর আপেক্ষিকতা তত্ত্বে দ্বিতীয় বিকল্পটিই গ্রহণ করলেন। অর্থাৎ তিনি ধরে নিলেন যে সকল জাড্যিক নির্দেশতন্ত্রেই বস্তুগুলির মোট ভরবেগ সংরক্ষিত হয়। এর কারণ, ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র পদার্থবিদ্যার একটি অতি প্রয়োজনীয় ও গুরুত্বপূর্ণ সূত্র। এরদ্বারা গতিবিজ্ঞানের বহু দুরূহ প্রশ্নের সমাধান করা যায়। তাই ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রকে পদার্থবিদ্যার একটি মৌলিক সূত্র বলা হয়। তাছাড়া আইনস্টাইন তাঁর এই প্রকল্পদ্বারা দেখালেন যে এর ফলে নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রও সকল জ্যাডিক নির্দেশতন্ত্রে সত্য হয়।

কিন্তু আইনস্টাইনের এই সিদ্ধান্তের ফলে তাঁকে বস্তুর ভরের সংরক্ষণ সূত্র পরিত্যাগ করতে হল এবং তাঁকে মেনে নিতে হল যে বস্তুর ভর তার বেগের উপর নির্ভরশীল। আমরা এখন বেগের উপর ভরের এই নির্ভরতার সূত্র নির্ণয় করব।

4.5 বেগের উপর ভরের নির্ভশীলতার সূত্র (Relation for Variation of Mass with Velocity) ঃ

ধরা যাক, S′ নির্দেশতন্ত্রে দুটি সমান ভরের বস্তু x′ অক্ষের সমান্তরাল u′ ও –u′ বেগে পরস্পারের সঙ্গে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ ঘটায় এবং তার ফলে পরস্পর যুক্ত হয়ে স্থির হয়ে যায়। যদি প্রত্যেক বস্তুর ভর m′ ধরা হয়, তবে ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী (চিত্র 4.1)

$$m'u' - m'u' = 0 \quad \ldots(4.32)$$



চিত্র 4.1 বস্তুর ভর ও বেগের সম্বন্ধ

ধরা যাক, S′ নির্দেশতন্ত্র S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে x, x′ অক্ষের দিকে υ বেগে চলে। ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে স্থির একজন নিরক্ষকের নিকট সংঘর্ষের পূর্বে ঐ বস্তুদুটির বেগ যথাক্রমে u_1 ও u_2 এবং এদের ভর যথাক্রমে m_1 ও m_2। সংঘর্ষের পর বস্তুদুটি পরস্পর যুক্ত হয়ে

S নির্দেশতন্ত্রে স্থির হয়ে যায়। সুতরাং S নির্দেশতন্ত্রের নিরীক্ষকের নিকট যুক্ত বস্তুটির বেগ υ (কারণ, S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে S' নির্দেশতন্ত্রের বেগ υ)। সুতরাং ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র থেকে আমরা লিখতে পারি—

$$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)\upsilon \qquad ...(4.34)$$

বা, $$m_1(u_1 - \upsilon) = -m_2(u_2 - \upsilon) \qquad ...(4.35)$$

এখন বেগ সংযোজনের (3.15) সমীকরণ অনুযায়ী আমরা লিখতে পারি

$$u_1 = \frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{u'\upsilon}{c^2}}$$

এবং $$u_2 = \frac{-u' + \upsilon}{1 - \frac{u'\upsilon}{c^2}} \qquad ...(4.36)$$

(4.36) সমীকরণগুলি (4.35) সমীকরণে বসালে আমরা পাই

$$m_1\left(\frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{u'\upsilon}{c^2}} - \upsilon\right) = -m_2\left(\frac{-u' + \upsilon}{1 - \frac{u'\upsilon}{c^2}} - \upsilon\right)$$

বা $$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{1 + \frac{u'\upsilon}{c^2}}{1 - \frac{u'\upsilon}{c^2}} \qquad ...(4.37)$$

(4.37) সমীকণের ডানদিক u' ও v-র সাপেক্ষে আছে। এই বেগগুলিকে u_1 ও u_2 বেগের সাপেক্ষে পরিবর্তন করার জন্য ধরা যাক,

$$\frac{u'\upsilon}{c^2} = \alpha \qquad ...(4.38)$$

তাহলে (4.36) সমীকরণ দুটি থেকে আমরা লিখতে পারি

$$u_1(1 + \alpha) = u' + \upsilon$$

এবং $$u_2(1 - \alpha) = -u' + \upsilon$$

এই সমীকরণ দুটির উভয় দিক বর্গ করে আমরা পাই

$$u_1^2(1 + 2\alpha + \alpha^2) = (u' + \upsilon)^2 = u'^2 + 2u'\upsilon + \upsilon^2$$

এবং $$u_2^2(1 - 2\alpha + \alpha^2) = (-u' + \upsilon)^2 = u'^2 - 2u'\upsilon + \upsilon^2$$

এই সমীকরণ দুটির বিয়োগফল হল—

$$u_1^2(1+2\alpha+\alpha^2)-u_2^2(1-2\alpha+\alpha^2)=4u'\upsilon$$

$$=4c^2\frac{u'\upsilon}{c^2}=4c^2\alpha\quad\left[\because \frac{u'\upsilon}{c^2}=\alpha\right] \qquad ...(4.39)$$

(4.39) সমীকরণকে α-র দ্বিঘাত সমীকরণরূপে লিখলে আমরা পাই

$$\left(u_1^2-u_2^2\right)\alpha^2+2(u_1^2+u_2^2-2c^2)\alpha+u_1^2-u_2^2=0 \qquad ...(4.40)$$

(4.40) দ্বিঘাত সমীকরণ থেকে আমরা α-র দুটি মান পাই

$$\alpha=\frac{2c^2-u_1^2-u_1^2\pm2\sqrt{\left(c^2-u_1^2\right)\left(c^2-u_2^2\right)}}{u_1^2-u_2^2} \qquad ...(4.41)$$

যেহেতু $\frac{u'\upsilon}{c^2}<<1$, অতএব (4.41) সমীকরণ থেকে α-র প্রকৃত মান হল,

$$\alpha=\frac{2c^2-u_1^2-u_2^2-2\sqrt{(c^2-u_1^2)(c^2-u_2^2)}}{u_1^2-u_2^2} \qquad ...(4.42)$$

(4.42) সমীকরণ থেকে $\alpha\left(=\frac{u'\upsilon}{c^2}\right)$-র এই মান (4.37) সমীকরণে বসালে আমরা পাই

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}=\frac{\sqrt{1-\frac{u_2^2}{c^2}}}{1-\frac{u_1^2}{c^2}} \qquad ...(4.43)$$

(4.43) সমীকরণ থেকে উভয় দিকে কোণাকুণি গুণ করে পাওয়া যায়

$$m_1\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}=m_2\sqrt{1-\frac{u_2^2}{c^2}}=k\text{ (ধরি)} \qquad ...(4.44)$$

(4.44) সমীকরণটি বিশেষ তাৎপর্যপূর্ণ। কারণ, এই সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে যে যদি S' নির্দেশতন্ত্রে দুটি অভিন্ন ভরের বস্তুর মধ্যে সংঘর্ষের ফলে এদের ভরবেগ সংরক্ষিত হয়, তবে S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষেও ঐ অভিন্ন বস্তুদুটির ভরবেগ সংরক্ষিত ধরতে হলে, এদের উভয়ের জন্যই (4.44) সমীকরণের শর্ত প্রযোজ্য হবে।

সুতরাং সাধারণভাবে বস্তুদুটির যে কোনোও একটির ভর m ও বেগ υ ধরলে (4.44) সমীকরণ অনুযায়ী আমরা পাই

$$m\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = k \qquad ...(4.45)$$

এখন যদি $\upsilon = 0$ হয় এবং তখন $m = m_0$ ধরা হয়, তবে (4.45) সমীকরণ থেকে পাই

$$m_0 = k \qquad ...(4.46)$$

সুতরাং সাধারণভাবে আমরা লিখতে পারি

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \qquad ...(4.47)$$

এটিই আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী ভর ও বেগের সম্বন্ধ। এই সম্বন্ধ অনুযায়ী m_0 হল নিরীক্ষকের সাপেক্ষে একটি স্থির বস্তুর ভর এবং m হল ঐ বস্তুর υ বেগে গতিশীল অবস্থার ভর।

যদি $\frac{\upsilon}{c}$ অত্যন্ত ক্ষুদ্র হয় $\left(\frac{\upsilon}{c} << 1\right)$ তাহলে আমরা $\frac{\upsilon^2}{c^2}$ কে উপেক্ষা করতে পারি। সেক্ষেত্রে (4.47) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$m \simeq m_0 \qquad ...(4.48)$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে আমরা সনাতন ভর সংরক্ষণের সূত্র পাই। কিন্তু $\frac{\upsilon^2}{c^2}$ যদি উপেক্ষণীয় না হয়, তবে v-এর মান যত বাড়বে, ভর m ও তত বাড়বে। আবার যদি $\upsilon = c$ ধরা হয়, তবে আমরা পাই

$$m = \infty \qquad ...(4.49)$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে ভর অসীম, সুতরাং অবাস্তব। কাজেই আমরা সিদ্ধান্ত করতে পারি যে, কোনও বস্তুর পক্ষেই আলোকের বেগের সমান বেগে যাওয়া সম্ভব নয়।

এখন প্রশ্ন হল, কোনও বস্তুর বেগ কি c-এর চেয়ে বেশি হওয়া সম্ভব? যদি (4.47) সমীকরণে আমরা $\upsilon > c$ বসাই, তবে m-এর মান একটি কল্পিত রাশি হয়। 1962 খ্রিস্টাব্দে বিজ্ঞানী সুদর্শন প্রথম কল্পনা করেন যে, অতিক্ষুদ্র এরূপ কল্পিত ভরের বস্তু থাকা সম্ভব এবং তিনি এই কল্পিত ভরের বস্তুর নাম দেন 'ট্যাকিয়ন' (tachyon)। ট্যাকিয়ন প্রকল্প বিজ্ঞানীমহলে যথেষ্ট আগ্রহ সৃষ্টি করে, এবং পরীক্ষাগারে এই কণাটি আবিষ্কারের জন্য নানা পরীক্ষা করা হয়। কিন্তু এখনও পর্যন্ত এই কণাটির অস্তিত্ব প্রমাণ করা সম্ভব হয়নি।

এখানে আরেকটি কথা বলা প্রয়োজন। আমরা উপরে শূন্য মাধ্যমে আলোকের বেগ c নিয়ে আলোচনা করেছি। কিন্তু আলোক যখন জল, কাঁচ প্রভৃতি কোনও ঘনতর মাধ্যমে প্রবেশ করে, তখন তার বেগ কমে যায়। আপনারা জানেন যে শূন্য মাধ্যমে ও ঘনতর মাধ্যমে আলোকের দুটি বেগের অনুপাতকেই আমরা ঐ মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক বলি। ঘনতর মাধ্যমে ইলেকট্রন, মিউয়ন প্রভৃতি বহু

মৌলিক কণার বেগ ঐ মাধ্যমে আলোকের বেগের চেয়ে বেশি হতে পারে। কিন্তু তা হলেও এগুলির ভর কখনোই কল্পিত রাশি হয় না। কারণ, এইসব ঘনতর মাধ্যমেও কোনও কণার ভর ঐ মাধ্যমে আলোকের বেগের মানদ্বারা নির্ধারিত হয় না, শূন্য মাধ্যমে আলোকের বেগ c-র দ্বারাই নির্ধারিত হয়। ফলে ঐ মাধ্যমেও (4.47) সমীকরণটির পরিবর্তন হয় না এবং সেজন্য $\frac{\upsilon}{c}$ সর্বদাই 1-এর কম হয় $\left(\frac{\upsilon}{c} < 1\right)$।

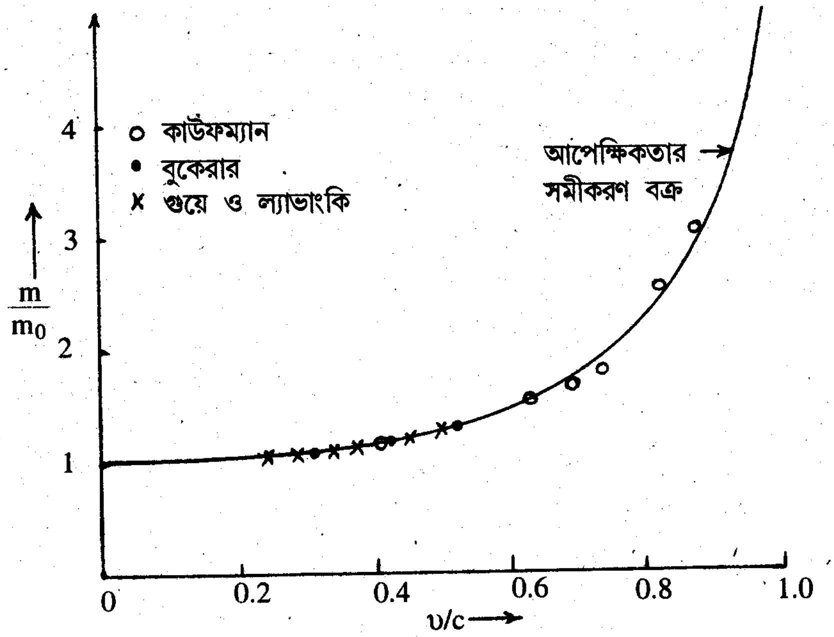
4.6 বেগের উপর ভরের নির্ভরশীলতার সূত্রের পরীক্ষা (Experimental Verification of Dependence of Mass on Velocity) :

1897 খ্রিস্টাব্দে জে জে টমসন প্রথম ক্যাথোড রশ্মির ইলেকট্রনের তড়িৎ আধান ও ভরের অনুপাত $\left(\frac{e}{m}\right)$ নির্ণয় করেন এবং লক্ষ করেন যে এই অনুপাত ইলেকট্রনের বেগের উপর নির্ভরশীল। যেহেতু ইলেকট্রনের গতির জন্য একটি তড়িৎ প্রবাহ ও চৌম্বক ক্ষেত্র উৎপন্ন হয়, তাই প্রথম মনে করা হয়েছিল যে এর ফলেই ঐ আধান ও ভরের অনুপাতের পরিবর্তন ঘটে। এ বিষয়ে আব্রাহাম (Abraham) একটি গাণিতিক সূত্র নির্ণয় করেন। এর কারণ, তখনও আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব উদ্ভাবিত হয়নি। 1901 খ্রিস্টাব্দে কাউফম্যান (Kaufmann) জে জে টসমনের ধনাত্মক রশ্মির ধর্ম বিশ্লেষণের পদ্ধতি অনুসরণ করে ইলেকট্রনের বিভিন্ন বেগের জন্য এর $\frac{e}{m}$ নির্ণয় করেন এবং লক্ষ করেন যে এই পরীক্ষার ফলদ্বারা আব্রাহামের গাণিতিক সূত্র মোটামুটি ব্যাখ্যা করা যায়। কিন্তু 1905 খ্রিস্টাব্দে আপেক্ষিক তত্ত্ব প্রকাশিত হওয়ার পর বোঝা গেল যে কাউফম্যানের পরীক্ষার ফল আসলে আব্রাহাম নয়, আইনস্টাইনের ভর ও বেগের সম্বন্ধকেই অনুসরণ করে।

1908 খ্রিস্টাব্দে বুকেরার (Bucherer) একটি গতিশীল ইলেকট্রনের উপর নির্দিষ্ট তড়িৎ ক্ষেত্র ও চৌম্বক ক্ষেত্র প্রয়োগ করে কাউফম্যানের চেয়ে আরও নির্ভুলভাবে এর বেগ ও $\frac{e}{m}$ পরিমাপের ব্যবস্থা করেন। তাঁর এই পরীক্ষার ফল আইনস্টানের ভর ও বেগের সমীকরণকে আরও ভালোভাবে প্রতিষ্ঠা করে। তবে বুকেরার পরীক্ষার একটি ত্রুটি ছিল। এখানে দুটি সমান্তরাল ধাতব পাত দ্বারা তড়িৎ ক্ষেত্র উৎপন্ন করা হয়েছিল। ফলে পাতদুটির প্রান্তে তড়িৎ বলরেখাগুলির বক্রতার জন্য ইলেকট্রনের গতিপথ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে সামান্য ত্রুটি ঘটত।

বুকেরারের পরীক্ষার ত্রুটি দূর করার জন্য 1915 খ্রিস্টাব্দে গুয়ে (Guye) এবং ল্যাভাংকি (Levanchy) বুকেরারের মতোই একটি পরীক্ষায় একই পথ দিয়ে একটি কমবেগ সম্পন্ন ইলেকট্রন ও একটি বেশি বেগ সম্পন্ন ইলেকট্রন পাঠিয়ে এদের বেগের অনুপাত ও ভরের অনুপাত নির্ণয় করেন। এর ফলে ভর ও বেগের সম্বন্ধটি আরও নির্ভুলভাবে প্রতিষ্ঠিত হয়।

উপরে বর্ণিত এই তিনটি পরীক্ষার ফল (4.2) চিত্রে দেখানো হল। চিত্রে টানা বক্ররেখাটি আইনস্টাইনের ভর ও বেগের গাণিতিক সম্বন্ধদ্বারা আঁকা হয়েছে এবং বিভিন্ন বিন্দু, বৃত্ত ও কাটা চিহ্নের দ্বারা পরীক্ষার ফলগুলি দেখানো হয়েছে। দেখা যাচ্ছে যে এই ফলগুলি আইনস্টাইনের গাণিতিক সমীকরণটিকে যথার্থ হিসাবেই প্রমাণ করছে।



চিত্র 4.2 আইনস্টাইনের ভর ও বেগের সমীকরণের সত্যতা পরীক্ষা

এরপর 1940 খ্রিস্টাব্দে রোজার্স (Rogers) ও তাঁর সহকর্মীগণ তাঁদের পরীক্ষায় মাত্র শতকরা একভাগ ভ্রমসীমার মধ্যে এবং 1963 খ্রীস্টাব্দে মেয়ার (Mayer) ও তাঁর সহকর্মীগণ তাঁদের পরীক্ষায় মাত্র 0.05% ভ্রমসীমার মধ্যে অতি উচ্চ বেগের $\left(\frac{\upsilon}{c} \geq 0.8\right)$ ইলেকট্রনের ভর পরিমাপ করে আইনস্টাইনের ভর ও বেগের সম্বন্ধটির সত্যতা প্রমাণ করেন।

আইনস্টানের এই ভর ও বেগের সম্বন্ধ এর পরও আরও বহু পরীক্ষায় এবং ইলেকট্রন ছাড়াও আরও অন্যান্য মৌলিক কণার ক্ষেত্রে যথার্থ বলে প্রমাণিত হয়েছে। তাছাড়া ভর ও বেগের এই সম্বন্ধ ব্যবহার করে আইনস্টাইন ভর ও শক্তির মধ্যে অতি গুরুত্বপূর্ণ একটি সম্বন্ধ নির্ণয় করেন। বিভিন্ন পরীক্ষার দ্বারা এই ভর ও শক্তির সম্বন্ধও যথার্থ বলে প্রমাণিত হয়েছে। আধুনিক পদার্থবিদ্যায় বহু জটিল সমস্যার সমাধানে এই ভর ও শক্তির সম্বন্ধ ব্যবহার করা হয়। কিন্তু এখনও পর্যন্ত কোনও

ক্ষেত্রেই এর কোনও ত্রুটি ধরা পড়েনি। সুতরাং আইনস্টাইনের ভর ও বেগের সম্বন্ধ এবং ভর ও শক্তির সম্বন্ধ যে যথার্থ সে বিষয়ে কোনও সন্দেহ নেই।

4.7 আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির সম্বন্ধ (Einestein's Mass and Energy Relation) ঃ

ধরা যাক, m ভরের একটি বস্তুর উপর F বল dt সময়ের জন্য ক্রিয়া করে এবং তার ফলে বস্তুটির dx সরণ হয়। সুতরাং সংজ্ঞা অনুযায়ী বস্তুর উপর কৃতকার্য = Fdx এবং এর ফলে বস্তুটির গতীয় শক্তির বৃদ্ধি,

$$dT = Fdx \qquad ...(4.50)$$

কিন্তু বলের সংজ্ঞা আনুযায়ী

$$F = \frac{d}{dt}(m\upsilon) \qquad ...(4.51)$$

যেখানে v হল ঐ সময়ে বস্তুর বেগ এবং mv হল বস্তুর ভরবেগ। কাজেই

$$dT = \frac{d}{dt}(m\upsilon)dx$$

$$= m\frac{d\upsilon}{dt}dx + \upsilon\frac{dm}{dt}dx$$

$$= m\upsilon d\upsilon + \upsilon^2 dm \quad \left(\because \frac{dx}{dt} = \upsilon\right) \qquad ...(4.52)$$

কিন্তু বেগের উপর ভরের নির্ভরশীলতার সূত্র [সমীকরণ (4.47)] থেকে আমরা পাই

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

বা, $$m\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = m_0 \qquad ...(4.53)$$

যেখানে m_0 হল বস্তুর স্থির অবস্থার ভর এবং c হল শূন্য মাধ্যমে আলোকের বেগ। সুতরাং (4.53) সমীকরণের উভয় পক্ষকে বর্গ করে আমরা পাই

$$m^2c^2 - m^2\upsilon^2 = m_0^2c^2 \qquad ...(4.54)$$

(4.54) সমীকরণের উভর দিক অন্তরকলন করে আমরা পাই

$$2mdmc^2 - 2m^2\upsilon d\upsilon - 2mdm\upsilon^2 = 0$$

বা, $$m\upsilon d\upsilon + \upsilon^2 dm = c^2 dm \qquad ...(4.55)$$

(4.52) এবং (4.55) সমীকরণ দুটি থেকে আমরা পাই

$$dT = c^2 dm$$

বা, $$\int_0^T dT = c \int_{m_0}^{m} dm \qquad ...(4.56)$$

বা, $$T = c^2(m - m_0) \qquad ...(4.57)$$

(4.56) এবং (4.57) সমীকরণে আমরা ধরে নিয়েছি যে, স্থির অবস্থায় বস্তুটির গতীয় শক্তি শূন্য এবং বস্তুটির বেগ যখন υ, তখন তার ভর m এবং গতীয় শক্তি T।

(4.57) সমীকরণ থেকে আমরা দেখতে পাচ্ছি যে, যখন কোনও বস্তুর ভর m_0 থেকে বৃদ্ধি পেয়ে m হয়, তখন তার গতীয় শক্তি হয় T। (4.57) সমীকরণকে আমরা লিখতে পারি

$$mc^2 = T + m_0c^2 \qquad ...(4.58)$$

যেহেতু একটি বস্তুর মোট শক্তি

E = গতীয় শক্তি + স্থৈতিক শক্তি

বা E = T + স্থৈতিক শক্তি ...(4.59)

সুতরাং (4.59) সমীকরণকে (4.58) সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে আমরা বলতে পারি যে,

বস্তুর স্থৈতিক শক্তি $= m_0c^2$ ...(4.60)

এবং মোট শক্তি, $E = mc^2$ ...(4.61)

(4.61) সমীকরণটিই হল আইনস্টাইনের বিখ্যাত ভর ও শক্তির তুল্যতার সূত্র। এই সূত্র অনুযায়ী আমরা m ভরের একটি বস্তুকে মোট E শক্তির আধার হিসাবে ধরতে পারি, যেখানে এই শক্তির মান হল বস্তুর ভর ও আলোকের শূন্যস্থানের বেগের বর্গের গুণফল। যদি বস্তুটির গতীয় শক্তি শূন্য হয় (T = 0), তবে এর মোট শক্তি,

E_0 = স্থৈতিক শক্তি $= m_0c^2$ ...(4.62)

এখন ধরা যাক, বস্তুটির স্থৈতিক ভর Δm_0 হ্রাস পায়। তাহলে (4.62) সমীকরণ অনুযায়ী এর স্থৈতিক শক্তিও ΔE_0 হ্রাস পাবে। যেখানে

$$\Delta E_0 = \Delta m_0 c^2 \qquad (4.63)$$

আইনস্টাইন (4.63) সমীকরণটির ব্যাখ্যা এভাবে করলেন যে প্রকৃতিতে এই ΔE_0 স্থৈতিক শক্তির অপচয় হবে না এবং তা সম পরিমাণ গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হবে। অনুরূপে বলা যায় যে যদি কোনও বস্তুর গতিশক্তি ΔE_0 হ্রাস পায়, তবে তা বস্তুর সমপরিমাণ স্থৈতিক শক্তিতে রূপান্তরিত হবে এবং তার ফলে বস্তুর স্থির ভর $\frac{\Delta E_0}{c^2} = \Delta m_0$ বৃদ্ধি পাবে।

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, আইনস্টাইনের ব্যাখ্যা অনুযায়ী বস্তুর (স্থির) ভর সংরক্ষিত হচ্ছে না (এটি আমাদের সনাতন ধারণার পরিপন্থী)। কিন্তু যদি কোনও বস্তুর ভর হ্রাস পায়, তবে তা তুল্য পরিমাণ (গতীয়) শক্তিতে রূপান্তরিত হবে এবং বিপরীত পক্ষে যদি কোনও বস্তুর (গতীয়) শক্তি হ্রাস পায়, তবে তা বস্তুর (স্থির) ভর তুল্য পরিমাণ বৃদ্ধি করবে। এখানে তুল্য পরিমাণ বলতে (4.63) সম্বন্ধটির কথা বলা হচ্ছে। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে ভর বা শক্তি এককভাবে সংরক্ষিত হচ্ছে না। কিন্তু এরা যুগ্মভাবে সংরক্ষিত হচ্ছে। একেই আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির যুগ্ম সংরক্ষণ সূত্র বলে।

আইনস্টাইনের উপরোক্ত সূত্রগুলি তাত্ত্বিক বলবিদ্যা সম্বন্ধে মানুষের নিউটনীয় বা সনাতন ধারণাকে সম্পূর্ণ বদলে দিয়েছে। বিশেষত তাঁর ভর ও শক্তির তুল্যতার সূত্র, স্থৈতিক ভরকে বস্তুর মোট সঞ্চিত শক্তির বহিঃপ্রকাশ হিসাবে বিবেচনা করা এবং বাইরে থেকে কোনও বল ক্রিয়া না করলে বস্তুর ভর ও শক্তির যুগ্মভাবে সংরক্ষণ আধুনিক তাত্ত্বিক পদার্থবিদ্যায় সম্পূর্ণ অভিনব সংযোজন।

আইনস্টাইনের আপেক্ষিকীয় গতিবিদ্যার সূত্রগুলি বস্তুর সকল বেগের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। তবে সনাতন গতিবিদ্যার সূত্রগুলি থেকে আপেক্ষিকীয় গতিবিদ্যার সূত্রগুলির পার্থক্য কেবল তখনই ধরা পড়ে, যখন বস্তুর বেগ আলোকের বেগের সমতুল্য হয় $(\upsilon \sim c)$। বস্তুর বেগ আলোকের বেগের তুলনায় তুচ্ছ হলে $\left(\frac{\upsilon}{c} << 1\right)$, আপেক্ষিকীয় গতিবিদ্যার সূত্রগুলি সনাতন গতিবিদ্যার সূত্রে পরিণত হয়।

এই বিষয়টি প্রমাণ করার জন্য গতিশক্তির সমীকরণটি ধরা যাক। (4.57) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$T = c^2(m - m_0) = c^2\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - m_0\right)$$

$$= m_0c^2\left\{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right\}.$$

$$= m_0c^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^3 + \ldots - 1\right]$$

$$= m_0c^2\left[\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^2 + \frac{5}{16}\left(\frac{\upsilon^2}{c^3}\right)^3 + \ldots\right] \tag{4.64}$$

এই সমীকরণটি আমরা বীজগণিতের $(1+x)^n$ অপেক্ষকের প্রসারণ সূত্র অনুযায়ী প্রসারিত করে পাই।

এখন যদি আমরা মনে করি যে বস্তুর বেগ আলোকের বেগের তুলনায় অত্যন্ত ক্ষুদ্র $\left(\frac{\upsilon}{c} << 1\right)$ তবে (4.64) সমীকরণে আমরা কেবল $\frac{\upsilon^2}{c^2}$-এর প্রথম ঘাতটি রেখে এর উচ্চতর ঘাতগুলি (ক্রমশ আরও অত্যন্ত ক্ষুদ্র হওয়ায়) উপেক্ষা করতে পারি। সুতরাং এক্ষেত্রে বস্তুর গতীয় শক্তির সমীকরণটি হয়

$$T \simeq \frac{1}{2} m_0 \upsilon^2 \qquad (4.65)$$

তাছাড়া আমরা পূর্বেই উল্লেখ করেছি যে $\frac{\upsilon}{c} << 1$ হলে

$m \simeq m_0$ [(4.48) সমীকরণ দ্রষ্টব্য]

অতএব $$T \simeq \frac{1}{2} m\upsilon^2 \qquad (4.66)$$

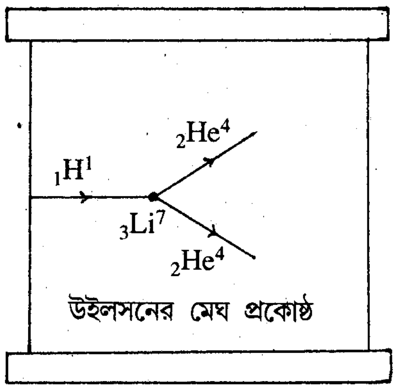
সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে $\frac{\upsilon}{c} << 1$ হলে আমরা সনাতন গতিবিদ্যার ভর সংরক্ষণের সূত্র এবং গতীয় শক্তির সূত্র ফিরে পাই। এ কারণে আমরা সনাতন গতিবিদ্যার সূত্রগুলিকে আপেক্ষিকীয় গতিবিদ্যার সূত্রগুলির **বিশেষ ক্ষেত্র** বা **সীমায়িত সূত্র** বলতে পারি।

4.8 আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির তুল্যতা সূত্রের সত্যতার পরীক্ষা (Verification of Einestien's Mass and Energy Relation)

বহু পরীক্ষার দ্বারা আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির সম্বন্ধ প্রমাণ করা হয়েছে। আমরা এখানে মাত্র কয়েকটি পরীক্ষার কথা উল্লেখ করব।

4.8.1 ককক্রফট্ (Cockroft) ও ওয়াল্টনের (Walton) পরীক্ষা

প্রথম দিকে ভর ও শক্তির সম্বন্ধের সত্যতা নির্ণয়ের যেসব পরীক্ষা হয়েছিল, ককক্রফট্ ও ওয়াল্টনের পরীক্ষা সেগুলির অন্যতম। তাঁরা 1932 খ্রিস্টাব্দে লক্ষ করেন যে যদি একটি উচ্চবেগ সম্পন্ন প্রোটন অর্থাৎ হাইড্রোজেন কেন্দ্রক $({}_1H^1)$ দ্বারা একটি লিথিয়াম নিউক্লিয়াস (অর্থাৎ লিথিয়াম কেন্দ্রক, ${}_3Li^7$-কে আঘাত করা যায়, তাহলে ঐ প্রোটন লিথিয়াম নিউক্লিয়াসটির সঙ্গে যুক্ত হয়ে দুটি আলফা কণিকা (অর্থাৎ হিলিয়াম নিউক্লিয়াস ${}_2He^4$) গঠন করে (চিত্র 4.3) এবং সেই সঙ্গে



চিত্র 4.3 ককক্রফ্ট ও ওয়ালটনের পরীক্ষা

কিছু শক্তি (Q) উদ্ভূত হয়, যা আলফা কণাদুটির গতীয় শক্তিরূপে প্রকাশ পায়। এই প্রক্রিয়াটিকে একটি কৃত্রিম নিউক্লীয় বিভাজন বিক্রিয়া বলে এবং উইলসনের মেঘ প্রকোষ্ঠ (Willson Cloud Chamber) ব্যবহার করে বিক্রিয়ায় অংশগ্রহণকারী তড়িৎযুক্ত কণিকাগুলি যে পথ অবলম্বন করে চলে, তার চিত্র গ্রহণ করা যায়।

উপরের বিক্রিয়াটিকে একটি সমীকরণের আকারে লিখলে দাঁড়ায়

$$ {}_3Li^7 + {}_1H^1 \rightarrow {}_2He^4 + {}_2He^4 + Q \tag{4.67} $$

এখন এই বিক্রিয়ায় অংশগ্রহণকারী কণিকাগুলির স্থির ভর হল

$M_{Li} = 7.01822$ a. m. u.

$M_H = 1.00812$ a. m. u.

এবং $M_{He} = 4.00390$ a. m. u.

(এখানে a.m.u. হল পারমাণবিক ভর পরিমাপের একক, যা দ্বারা একটি অক্সিজেন পরমাণুর ভরকে 16 ধরা হয়)

সুতরাং (4.67) সমীকরণের বাঁদিকের কণিকাগুলির মোট ভর = 8.02634 a.m.u.

এবং ডান দিকের 2টি He কণিকার মোট ভর = 8.00780 a.m.u.

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে এই বিক্রিয়ার দ্বারা মোট $8.02634 - 8.00780 = 0.01854$ a.m.u. ভর বিনষ্ট হয়েছে। আইনস্টাইনের $\Delta E_0 = \Delta m_0 c^2$ সমীকরণ দ্বারা দেখানো যায় যে 1 a.m.u. = 931 MeV (মনে রাখবেন, 1 MeV = 1মিলিয়ন ইলেকট্রন ভোল্ট = 10^6 eV এবং 1 eV = 1.602×10^{-12} erg = 1.602×10^{-19} Joules)

সুতরাং এই বিক্রিয়ায় যে ভর বিনষ্ট হয়েছে, আইনস্টাইনের তত্ত্বদ্বারা তা থেকে উদ্ভূত গতীয় শক্তির মান হবে

$$ Q = 0.01854 \times 931 = 17.26\text{MeV} = 27.65 \times 10^{-6}\,\text{erg} $$

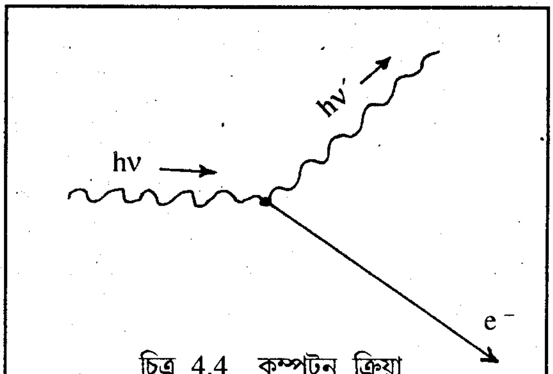
ককক্রফট্ ও ওয়ালটনের পরীক্ষায় দেখা যায় আলফা কণিকাদুটির বায়ুতে পাল্লা 8 cm.। কিন্তু বায়ুতে 1 cm যেতে একটি আলফা কণিকার মোট প্রায় 1.08 MeV শক্তি ব্যয় হয়। সুতরাং উক্ত বিক্রিয়ায় উৎপন্ন দুটি আলফা কণিকার $({}_2He^4)$ মোট গতীয় শক্তি ছিল প্রায় $2 \times 8 \times 1.08 = 17.28$ MeV। উক্ত পরীক্ষায় Li নিউক্লিয়াসটি স্থির ছিল। কিন্তু যে প্রোটন কণিকাটি তাকে আঘাত করে, তার গতীয়শক্তি ছিল 0.25 MeV। সুতরাং এই বিক্রিয়ায় প্রকৃতপক্ষে যে শক্তি উদ্ভূত হয়েছে, তার পরিমাণ

$$ 17.28 - 0.25 = 17.03\text{ MeV} = 27.28 \times 10^{-6}\,\text{erg} $$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে আইনস্টাইনের তত্ত্বদ্বারা গণনালব্ধ ফল পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে পরীক্ষার ভ্রমসীমার মধ্যে চমৎকার মিলে যাচ্ছে।

4.8.2 কম্পটন ক্রিয়া (Compton Effect)

এ বিষয়ে আপনারা পূর্বে পাঠগ্রহণ করেছেন। এই ক্রিয়ায় (চিত্র 4.4) একটি $h\gamma$ শক্তির ফোটন একটি স্থির ইলেকট্রনকে ধাক্কা দেয়। এই সংঘর্ষের ফলে ফোটনের শক্তি হ্রাস পায় এবং ইলেকট্রনের শক্তি বৃদ্ধি পেয়ে তা গতিশীল হয়। কম্পটনের পরীক্ষায় দেখা যায় যে ইলেকট্রনের গতিশক্তি যে পরিমাণে বৃদ্ধি পায়, তা আপতিত ফোটন ও বিক্ষেপিত ফোটনের শক্তির ($h\gamma'$) পার্থক্যের সমান।



চিত্র 4.4 কম্পটন ক্রিয়া

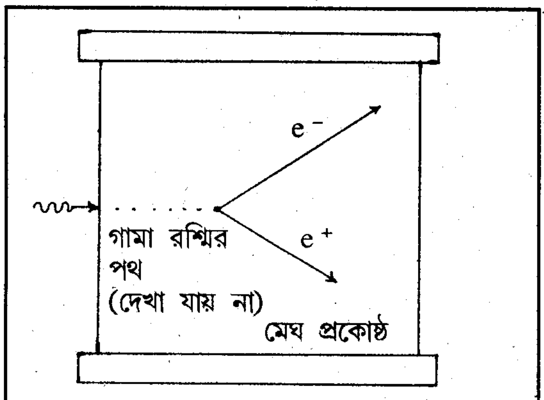
অর্থাৎ

$$h(\gamma - \gamma') = T = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1\right) \tag{4.68}$$

এখানে γ, γ' ফোটনের সংঘর্ষের পূর্বের ও পরের কম্পাঙ্ক, h প্ল্যাংকের ধ্রুবক এবং m_0 ও υ হল যথাক্রমে বিক্ষেপিত ইলেকট্রনের স্থির ভর ও বেগ।

4.8.3 শক্তির জড়ত্বপ্রাপ্তি (Materialisation of Energy)

একটি বিশেষ শক্তির গামা রশ্মি (ফোটন) যখন কোনও নিউক্লিয়াসকে ধাক্কা দেয়, তখন ঐ গামারশ্মি থেকে একটি ইলেকট্রন ও একটি পজিট্রন যুগলের সৃষ্টি হয় (চিত্র 4.5)। [পজিট্রন হল ইলেকট্রনের প্রতিকণা, যার ভর ও তড়িৎ আধানের মান যথাক্রমে ইলেকট্রনের ভর ও তড়িৎ আধানের মানের সমান, কিন্তু ঐ তড়িৎ আধানের প্রকৃতি ধনাত্মক। অর্থাৎ ইলেকট্রনের স্থির ভর m_0 এবং তড়িৎ আধান e^- ধরলে, পজিট্রনেরও স্থির ভর m_0, কিন্তু তড়িৎ আধান হল e^+।] এই ক্রিয়াকে শক্তির জড়ত্বপ্রাপ্তি বলা হয়। একটি উইলসনের মেঘ প্রকোষ্ঠে গামা রশ্মি পাঠিয়ে এরূপ ইলেকট্রন-পজিট্রন যুগল সহজেই সৃষ্টি করা যায়। প্রকোষ্ঠে ইলেকট্রন ও পজিট্রনের গতিপথ যে তলে থাকে, তার সমকোণে একটি চৌম্বক ক্ষেত্র প্রয়োগ করলে, ইলেকট্রন ও পজিট্রনের গতিপথ দুটি বিপরীত বৃত্তাকারে বেঁকে যায়। এ থেকে এদের আধানের প্রকৃতি



চিত্র 4.5 ইলেকট্রন-পজিট্রন যুগল সৃষ্টি

এবং গতিশক্তি নির্ণয় করা যায়। যদি এই দুটি গতিশক্তির যোগফল T হয় এবং গামা রশ্মির শক্তি $h\gamma$ হয়, তা হলে দেখা যায় যে

$$h\gamma - T = 1.022 \text{ MeV} \qquad (4.69)$$

কিন্তু আমরা জানি যে একটি ইলেকট্রনের স্থৈতিক শক্তি $m_0c^2 = 0.511$ MeV। সুতরাং একটি ইলেকট্রন ও একটি পজিট্রনের মোট স্থৈতিক শক্তি হবে

$$2m_0c^2 = 2 \times 0.511 = 1.022 \text{ MeV} \qquad (4.70)$$

(4.69) এবং (4.70) সমীকরণ দুটিরই ডানদিক সমান।

সুতরাং $$h\gamma - T = 2m_0c^2 \qquad (4.71)$$

কাজেই এই পরীক্ষার দ্বারা আইস্টাইনের ভর ও শক্তির তুল্যতা সূত্র প্রমাণিত হচ্ছে। এই পরীক্ষায় আরও বিশেষভাবে লক্ষ করার বিষয় যে, $h\gamma \geq 2m_0c^2$ না হলে ঐ গামা রশ্মি থেকে কখনওই ইলেকট্রন-পজিট্রন যুগল গঠিত হয় না। এটি আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির যুগ্ম নিত্যতা (সংরক্ষণ) সূত্রকেই প্রমাণ করে।

4.8.4 নিউক্লীয় ফিসন, পারমাণবিক বোমা ও নিউক্লীয় রিঅ্যাক্টর (Nuclear Fission, Atomic Bomb and Nuclear Reactor)

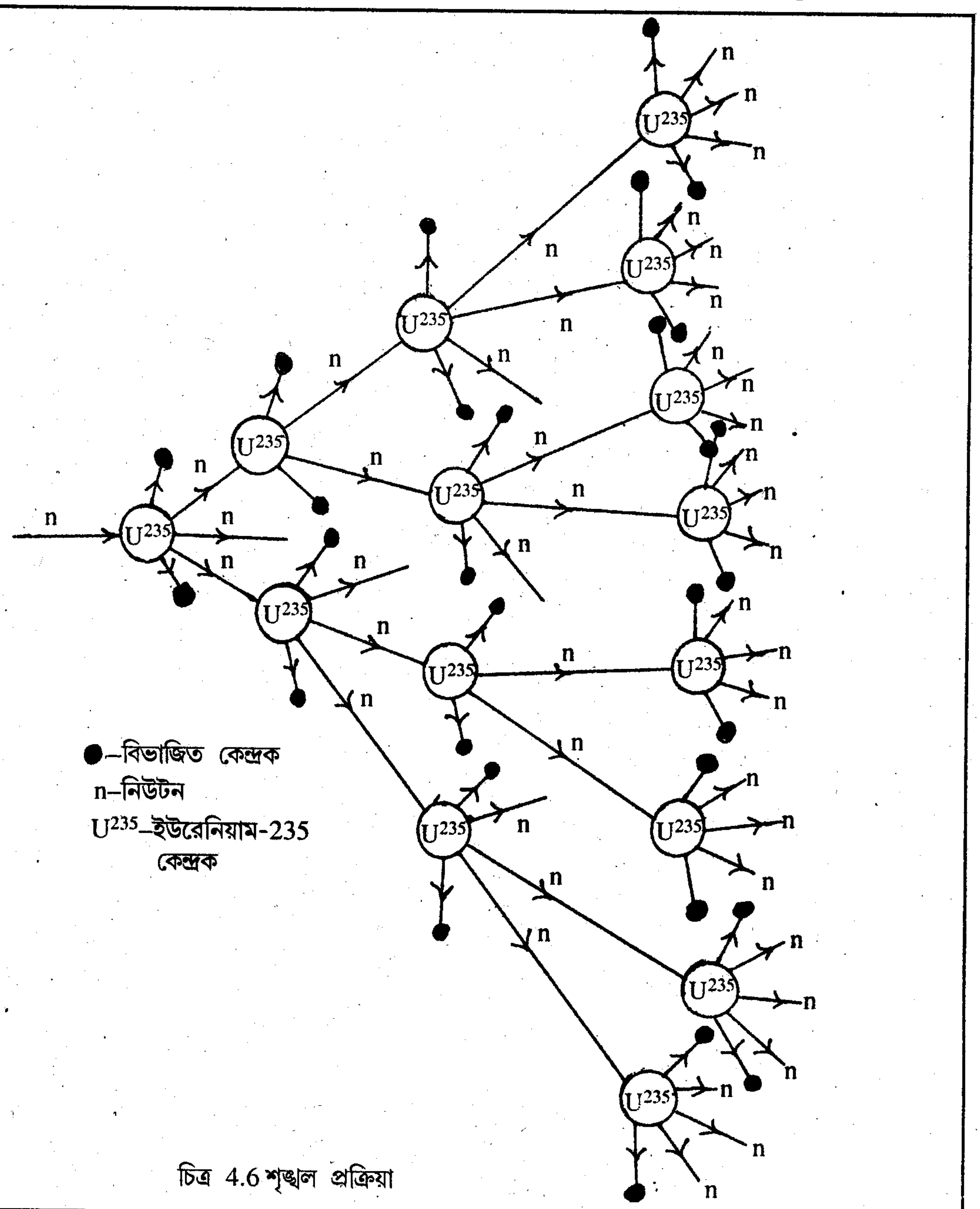
1938 খ্রিস্টাব্দে অটো হান (Otto Hahn) লক্ষ করেন যে একটি নিউট্রনের ($_0n^1$) সঙ্গে একটি ইউরেনিয়াম-235 ($_{92}U^{235}$) আইসোটোপের সংঘাত ঘটলে আইসোটোপটি প্রায় সমান দুভাগে বিভাজিত হয় এবং সেই সঙ্গে 3টি নিউট্রন ও প্রচুর শক্তি নির্গত হয়। একে **নিউক্লীয় ভাঙ্গন** (Nuclear Fission) বলে। এই বিক্রিয়াটি এরূপ

$$_0n^1 + {}_{92}U^{235} \rightarrow {}_{56}Ba^{141} + {}_{36}Kr^{92} + 3{}_0n^1 + Q \qquad (4.72)$$

এই সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে ডান দিকের কণিকাগুলির মোট ভর বাঁদিকের কণিকাগুলির মোট ভরের চেয়ে প্রায় 0.2154 a.m.u. কম। ফলে এই ভরের বিনাশ থেকে আইনস্টাইনের সূত্র অনুযায়ী $Q = 0.2154 \times 931 = 200.5$ MeV শক্তি উৎপন্ন হয়।

একটি পারমাণবিক বোমায় বিশুদ্ধ U^{235} ব্যবহার করা হয়। প্রথমে কোনও একটি প্রাকৃতিক নিউট্রনের আঘাতে একটি U^{235} পরমাণু ভেঙে যায়, এবং তা থেকে উপরি উক্ত শক্তি ও 3টি নিউট্রনের উৎপত্তি হয়। এই নিউট্রনগুলির দুটি বা তিনটি সমসংখ্যক U^{235} পরমাণু ভেঙে দেয়। ফলে মুক্ত নিউট্রনের সংখ্যা 4 থেকে 9 পর্যন্ত হতে পারে। এই নিউট্রনগুলি যখন আবার সমসংখ্যক U^{235} পরমাণুকে ভেঙে দেয়, তখন মুক্ত নিউট্রনের সংখ্যা আগের 3 গুণ বৃদ্ধি পায়। এভাবে যতই পারমাণবিক ভাঙন ঘটতে থাকে, নিউট্রনের সংখ্যাও ততই দ্রুতহারে বাড়তে থাকে এবং তার ফলে

পারমাণবিক ভাঙনও সেই হারেই বাড়তে থাকে। (চিত্র. 4.6) এভাবে ক্রমবর্ধমান হারে বিক্রিয়ার বৃদ্ধিকে শৃঙ্খল বিক্রিয়া (Chain reaction) বলে। এই শৃঙ্খল বিক্রিয়া চলার জন্য U^{235}-এর পরিমাণ



চিত্র 4.6 শৃঙ্খল প্রক্রিয়া

একটি নির্দিষ্ট ভরের চেয়ে বেশি হওয়া প্রয়োজন। এই ভরকে বলে সংকট ভর (Critical mass)। পারমাণবিক বোমায় এই শৃঙ্খল বিক্রিয়া অবাধে চলে, ফলে প্রায় মুহূর্তের মধ্যে বোমার ভিতরের

প্রায় যাবতীয় U^{235} ভেঙে গিয়ে প্রচণ্ড শক্তির উদ্ভব ঘটে। হিসাব করে দেখা গেছে যে 1 Kg U^{235} থেকে প্রায় 20,000 TNT শক্তি উৎপন্ন করা যায় এবং এ থেকে আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির সম্বন্ধ প্রমাণিত হয়।

নিউক্লীয় রিঅ্যাকটরে বিশুদ্ধ U^{235}-এর পরিবর্তে U^{238} ও U^{235} দুটি আইসোটোপের সংমিশ্রণ নেওয়া হয় এবং শৃঙ্খল বিক্রিয়াকে নিয়ন্ত্রণ করার জন্য ক্যাডমিয়াম বা বোরনের দণ্ড ব্যবহার করা হয়। এতে শৃঙ্খল বিক্রিয়া ধীরে ধীরে চলে এবং শক্তিও নিয়ন্ত্রিতভাবে উৎপন্ন হয়। এই শক্তিকে তখন বিদ্যুৎশক্তি উৎপাদনের জন্য ব্যবহার করা যায়।

4.8.5 নিউক্লীয় সংযোজন ও হাইড্রোজেন বোমা (Nuclear Fusion and Hydrogen Bomb)

অতি উচ্চ উষ্ণতায় 4টি হাইড্রোজেন পরমাণু ধাপে ধাপে পরস্পরের সঙ্গে যুক্ত হয়ে একটি হিলিয়াম পরমাণু গঠন করতে পারে। একে নিউক্লীয় সংযোজন বলে। আরও অধিক উষ্ণতায় হাইড্রোজেন অন্যান্য মৌলের (যেমন কার্বন, নাইট্রোজেন, অক্সিজেন প্রভৃতি) সঙ্গে মিলিত হয়েও নিউক্লীয় সংযোজন ঘটাতে পারে। সাধারণভাবে বলা যায় দুটি কম ভরের মৌল নিউক্লীয়ভাবে যুক্ত হয়ে যদি অপর একটি অধিকতর ভারী মৌল গঠন করে, তবে তাকেই নিউক্লীয় সংযোজন বলে।

নিউক্লীয় সংযোজনে নিউক্লীয় ভাঙনের চেয়ে অধিকতর বেশি শক্তি উৎপন্ন হয়। এর কারণ সংযোজনকারী মৌলগুলির মোট ভর ও সংযোজিত মৌলটির ভরের মধ্যে পার্থক্য নিউক্লীয় ভাঙনের তুলনায় অনেক বেশি হয়। এর ফলে পারমাণবিক বোমার চেয়ে হাজার গুণ শক্তিশালী হাইড্রোজেন বোমা তৈরি করা সম্ভব হয়েছে। সূর্য ও অসংখ্য নক্ষত্র থেকে যে প্রচন্ড তাপ ও আলোকের উৎপত্তি হয়, তাও বিভিন্ন মৌলের মধ্যে নিউক্লীয় সংযোজনের ফল।

ফিসন ও ফিউসন বিক্রিয়ার মধ্যে নিম্নলিখিত সাদৃশ্য ও পার্থক্যগুলি দেখা যায়।

(1) ফিসন বিক্রিয়া ইউরেনিয়াম, থোরিয়াম প্রভৃতি প্রকৃতিতে প্রাপ্য সবচেয়ে ভারী আইসোটোপগুলির মধ্যে সংঘটিত হয়। কিন্তু ফিউশন বিক্রিয়া হাইড্রোজেন, ডয়টেরিয়াম, হিলিয়াম প্রভৃতি প্রকৃতিতে প্রাপ্য সবচেয়ে হাল্কা মৌলগুলির মধ্যে সংঘটিত হয়।

(2) ফিসন বিক্রিয়া শুরুর জন্য এক বা একাধিক প্রাকৃতিক নিউট্রন প্রয়োজন হয়। ফিউসনের জন্য প্রাথমিকভাবে অতি উচ্চ উষ্ণতা উৎপন্ন করতে হয়।

(3) ফিসন চলাকালে প্রচুর নিউট্রন, অন্যান্য অপেক্ষাকৃত হাল্কা তেজস্ক্রিয় মৌল ও প্রভূত তাপের উদ্ভব ঘটে। কিন্তু ফিউসনের ফলে তেজস্ক্রিয় মৌলের উদ্ভব হয় না। অপেক্ষাকৃত ভারী মৌল ও প্রচণ্ড তাপের উদ্ভব ঘটে।

(4) ফিসনকে নিয়ন্ত্রিত ও মন্থর করা যায় এবং তাদ্বারা পারমাণবিক রিঅ্যাকটর তৈরি করা যায়। সুতরাং ফিসন যুদ্ধ (পারমাণবিক বোমা তৈরি) ও শান্তি উভয় কাজে লাগে। কিন্তু হাইড্রোজেন পরমাণুর ফিউসন দ্বারা হাইড্রোজেন বোমা তৈরি করা সম্ভব হলেও এই বিক্রিয়াকে এখনও নিয়ন্ত্রণ করা সম্ভব হয়নি। ফলে এখনও একে কোনও শান্তিপূর্ণ কাজে ব্যবহার করা যায় না। তবে ফিউসনই হল সূর্য ও নক্ষত্রগুলির তাপ ও আলোকের উৎস।

4.9 কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ আপেক্ষিকীয় সমীকরণ (Important Relativistic Formulae)

আধুনিক পদার্থবিদ্যাকে প্রধানত তিনভাগে বিভক্ত করা যায়। যেমন, (ক) পারমাণবিক পদার্থবিদ্যা, (খ) নিউক্লীয় পদার্থবিদ্যা ও (গ) কণা পদার্থবিদ্যা। এই বিভাগগুলিতে ক্রমান্বয়ে সূক্ষ্ম থেকে সূক্ষ্মতর কণা আবিষ্কৃত হয়েছে এবং দেখা গেছে এই কণাগুলির বেগ শূন্য থেকে আলোকের বেগের সমান (যেমন, ফোটন ও নিউট্রিনোর বেগ আলোকের বেগের সমান) পর্যন্ত হতে পারে। সুতরাং এই কণাগুলির বহু ক্রিয়া ও বিক্রিয়া আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যা ছাড়া আলোচনা করা যায় না। এজন্য আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যার কয়েকটি সমীকরণ খুবই ব্যবহার করার প্রয়োজন হয়। আমরা এই গুরুত্বপূর্ণ সমীকরণগুলি এখানে উল্লেখ করতে পারি।

4.9.1 ভর ও বেগের সমীকরণ

এই সমীকরণটি আমরা ইতিপূর্বেই নির্ণয় করেছি [সমীকরণ (4.47)]। বলা যায় এই সমীকরণটিই আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যার ভিত্তি। কারণ, এই সমীকরণটির উপর নির্ভর করেই এই বলবিদ্যার অন্যান্য সমীকরণগুলি গঠিত হয়েছে। সেজন্য এই (4.47) সমীকরণটি এখানে আর একবার উল্লেখ করা হল।

$$m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = m_0(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} = m_0\gamma \qquad (4.73)$$

[যেখানে $\beta = \frac{\upsilon}{c}$ এবং $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$]

4.9.2 গতীয় শক্তির সমীকরণ

এই সমীকরণটিও আমরা পূর্বেই পেয়েছি [সমীকরণ (4.57)]

$$T = c^2(m - m_0) = c^2\Delta m \quad (m - m_0 = \Delta m \text{ ধরলে})$$

$$= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1\right) = m_0c^2(\gamma - 1) \qquad (4.74)$$

4.9.3 স্থৈতিক শক্তির সমীকরণ ও ভর ও শক্তির নিত্যতা সূত্র

(4.60) এবং (4.62) সমীকরণ দুটি থেকে আমরা পাই

স্থৈতিক শক্তি, $E_0 = m_0c^2$

এবং স্থৈতিক শক্তির এই সমীকরণ থেকে স্থৈতিক ভরের হ্রাস বা বৃদ্ধির সমীকরণ হল [সমীকরণ (4.63)]

$$\Delta E_0 = \Delta m_0 c^2$$

এই সমীকরণটিকে বলা হয় আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির যুগ্ম নিত্যতা (সংরক্ষণ) সূত্র। কারণ এই সমীকরণের অর্থ হল যে যদি কোনও বস্তুর স্থৈতিক ভর Δm_0 হ্রাস পায়, তবে তার দ্বারা বস্তুর শক্তি $\Delta m_0c^2 = \Delta E_0$ পরিমাণ বৃদ্ধি পাবে অথবা যদি কোনও বস্তুর স্থৈতিক ভর Δm_0 বৃদ্ধি পায়, তবে ঐ বস্তুর শক্তি $\Delta m_0c^2 = \Delta E_0$ পরিমাণ হ্রাস পাবে, অর্থাৎ বস্তুর স্থৈতিক ভরের হ্রাস-বৃদ্ধিতে বস্তুর মোট শক্তির কোনও হ্রাস-বৃদ্ধি হয় না।

আপনি (4.57) ও (4.74) সমীকরণের সঙ্গে (4.63) সমীকরণের পার্থক্য লক্ষ করুন। (4.57) বা (4.74) সমীকরণে বস্তুর স্থৈতিক ভরের পরিবর্তন হচ্ছে না এবং এই সমীকরণটি বোঝাচ্ছে যে বস্তুর গতীয় শক্তি (এবং মোট শক্তি) যত বৃদ্ধি পাবে, বস্তুটির ভরও সেই অনুপাতে (Δm) বৃদ্ধি পাবে। বাইরে থেকে বল বা শক্তি প্রয়োগ হলে তবেই বস্তুর এরূপ ভরসহ গতীয় ও মোট শক্তির বৃদ্ধি ঘটে।

অপর পক্ষে (4.63) সমীকরণ বোঝাচ্ছে যে বস্তুর স্থৈতিক ভরের হ্রাস বা বৃদ্ধি হলে বস্তুটির গতীয় শক্তিও যথাক্রমে বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে এবং এই হ্রাস-বৃদ্ধির ক্ষেত্রে বস্তুর মোট শক্তির কোনও পরিবর্তন হবে না, যদি না বাইরে থেকে কোনও বল বা শক্তি বস্তুর উপর প্রযুক্ত হয়। সুতরাং এটিকে বস্তুর মোট শক্তির নিত্যতা সূত্রও বলা যায়।

4.9.4 বস্তুর মোট শক্তির সমীকরণ

আপনারা পূর্বেই লক্ষ করেছেন যে (4.47) সমীকরণটির উভয়দিক বর্গ করে আমরা নীচের (4.54) সমীকরণটি পাই

$$m^2c^2 - m^2\upsilon^2 = m_0c^2$$

$$\text{বা, } m^2c^2 = m^2\upsilon^2 + m_0^2c^2 \qquad (4.75)$$

আমরা (4.61) সমীকরণে বস্তুর মোট শক্তি, $mc^2 = E$ ধরেছিলাম। তাছাড়া বস্তুর ভরবেগ $p = m\upsilon$ ধরলে E ও p-র সাপেক্ষে (4.75) সমীকরণের রূপ হবে

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m_0^2c^2$$

$$\text{বা, } E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \qquad (4.76)$$

(4.76) সমীকরণটি আপেক্ষিকীয় কণা পদার্থবিদ্যায় বহুল ব্যবহৃত হয়। সাধারণত যেসব কণার স্পিন 0 বা 1, 2, 3 প্রভৃতি কোনও পূর্ণসংখ্যা (যেমন, ফোটন, পায়ন, কেয়ন প্রভৃতি ; এই ধরনের কণাগুলিকে বিজ্ঞানী সত্যেন বোসের নামানুসারে 'বোসন' বলা হয়), সেগুলির ক্ষেত্রে এই সমীকরণটি বিশেষভাবে প্রযোজ্য।

আমরা জানি ফোটনের ভর নেই ($m_0 = 0$)। আবার কোনও কণা যখন প্রায় আলোকের বেগে চলে, তখন তার ভরবেগ $p >> m_0c$। সুতরাং এই উভয় ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি

$$E^2 = p^2c^2$$

$$\text{বা, } E = mc^2 = pc \tag{4.77}$$

(এখানে লক্ষ করুন, ভরবেগ p ভেক্টর হলেও আমরা এখানে কেবল এর মানের কথা বলছি, কারণ E একটি স্কেলার)

4.9.5 ডিরাকের সমীকরণ (Dirac's Equation)

কণা পদার্থবিদ্যায় বোসন ছাড়াও আরেক ধরনের কণা পাওয়া যায়, যাদের স্পিন $\frac{1}{2}$ বা এর কোনও গুণিতক ($\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ ইত্যাদি)। ইলেকট্রন, প্রোটন, নিউট্রন, নিউট্রিনো ইত্যাদি এই ধরনের কণার উদাহরণ। বিজ্ঞানী ফের্মির নামানুসারে এই কণাগুলিকে 'ফের্মিয়ন' বলে। বিজ্ঞানী ডিরাক (Dirac) লক্ষ করেন যে ফের্মিয়নগুলির ক্ষেত্রে (4.76) সমীকরণ সরাসরি ব্যবহার করা যায় না। এজন্য 1928 খ্রিস্টাব্দে একে তিনি যেভাবে পরিবর্তন করেন, তা আমরা এখানে উল্লেখ করতে পারি। (4.76) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \tag{4.78}$$

যেহেতু $\vec{p}$ একটি ভেক্টর রাশি, সেজন্য ডিরাক (4.78) সমীকরণের সমাধান হিসাবে ধরে নিলেন যে

$$E = \pm\left(\vec{\alpha}.\vec{p}c + \beta m_0c^2\right) \tag{4.79}$$

যেখানে $\vec{\alpha}$ একটি অজানা ভেক্টর এবং β একটি অজানা স্কেলার।

এখন ধরা যাক $\vec{p}$ ভেক্টরের তিনটি উপাংশ হল p_x, p_y, p_z। অনুরূপে আমরা যদি $\vec{\alpha}$ ভেক্টরের তিনটি উপাংশ $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ধরি, তবে (4.79) সমীকরণটি হবে

$$E = \pm\left(\alpha_x p_x c + \alpha_y p_y c + \alpha_z p_z c + \beta m_0 c^2\right) \tag{4.80}$$

এখন $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ও β-র মান জানার জন্য (4.80) সমীকরণের উভয় দিকের বর্গ করে পাই

$$E^2 = \left(\alpha_x p_x c + \alpha_y p_y c + \alpha_z p_z c + \beta m_0 c^2\right)\left(\alpha_x p_x c + \alpha_y p_y c + \alpha_z p_z c + \beta m_0 c^2\right)$$

$$\begin{aligned}
&= c^2(\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_x p_x \alpha_y p_y + \alpha_x p_x \alpha_z p_z + \alpha_x p_x \beta m_0 c \\
&\qquad + \alpha_y p_y \alpha_x p_x + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_y p_y \alpha_y p_z + \alpha_y p_y \beta m_0 c \\
&\qquad + \alpha_z p_z \alpha_x p_x + \alpha_z p_z \alpha_y p_z + \alpha_z^2 p_z^2 + \alpha_y p_y \beta m_0 c \\
&\qquad + \beta m_0 c \alpha_x p_x + \beta m_0 c \alpha_y p_y + \beta m_0 c \alpha_z p_z + \beta^2 m_0^2 c^2) \\
&= c^2\{\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2 + \beta^2 m_0^2 c^2 + (\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x) p_x p_y \\
&\qquad + (\alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y) p_y p_z + (\alpha_z \alpha_x + \alpha_x \alpha_z) p_z p_x \\
&\quad + (\alpha_x \beta + \beta \alpha_x) p_x m_0 c + (\alpha_y \beta + \beta \alpha_y) p_y m_0 c + (\alpha_z \beta + \beta \alpha_z) p_z m_0 c\}
\end{aligned} \tag{4.81}$$

এখন p_x, p_y, p_z যেহেতু $\vec{p}$ -র উপাংশ, সুতরাং

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \tag{4.82}$$

সুতরাং সমীকরণ (4.81) ও সমীকরণ (4.76) অভিন্ন হবে। যদি আমরা বসাই

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = 1 \\
&\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x = 0 \\
&\alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y = 0 \\
&\alpha_z \alpha_x + \alpha_x \alpha_z = 0 \\
&\alpha_x \beta + \beta \alpha_x = 0 \\
&\alpha_y \beta + \beta \alpha_y = 0 \\
&\alpha_z \beta + \beta \alpha_z = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4.83}$$

(4.83)-র শর্তগুলিকে ডিরাকের শর্ত বলা হয় এবং এই শর্তগুলির দ্বারাই $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ও β-র মান নির্ধারিত হয়। ইলেকট্রন স্পিনের ধর্মগুলির সঙ্গে ডিরাকের শর্তগুলি মিলে যায়। এজন্য (4.80) সমীকরণটিকে ডিরাকের আপেক্ষিকীয় ইলেকট্রনের সমীকরণ বলা হয়।

(4.80) সমীকরণে আর একটি বিষয় লক্ষ করুন। এখানে E-র মান ধনাত্মক (+) বা ঋণাত্মক (−) দুইই হতে পারে। ডিরাক E-র ধনাত্মক মানের সমীকশটিকে ইলেকট্রনের গতির সমীকরণ হিসাবে ধরলেন। এখন তা হলে প্রশ্ন হল যে E-র ঋণাত্মক মানের সমীকরণটির অর্থ কী? ডিরাক যখন এই সমীকরণ গঠন করেন, তখন কোনও প্রতিকণা (anti particle)-র আবিষ্কার হয়নি। ডিরাক ভেবে

দেখলেন যে যদি ইলেকট্রনের একটি প্রতিকণা আছে, এরূপ ধরে নেওয়া হয়, তবে ঋণাত্মক শক্তির সমীকরণটির দ্বারা ঐ প্রতিকণার গতি ব্যাখ্যা করা যেতে পারে। ডিরাক এই তাত্ত্বিক প্রতিকণাটির নাম দিলেন 'পজিট্রন'। কেননা, প্রতিকণা হল কণার বিপরীত উপাদান, যা কণার সঙ্গে মিলিত হলে উভয়ের বিনাশ হয় এবং এদের মোট ভর শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। কাজেই যেহেতু ইলেকট্রনের তড়িৎ আধান e ঋণাত্মক (e^-), এর প্রতিকণা পজিট্রনের তড়িৎ আধান হবে ধনাত্মক e (e^+)। তাছাড়া এই প্রতিকণার ভর ও স্পিন হবে ইলেকট্রনের ভর ও স্পিনের সমান।

ডিরাকের এই তাত্ত্বিক ভবিষ্যদ্বাণী সত্য হিসাবে প্রতিষ্ঠিত হয়, যখন 1932 খ্রিস্টাব্দে প্রথম অ্যানডারসন (Anderson) ও তারপর ব্ল্যাকেট (Blackett) উইসনের মেঘপ্রকোষ্ঠ দ্বারা মহাজাগতিক রশ্মিদ্বারা সৃষ্ট পজিট্রন আবিষ্কার করেন।

4.10 মিনকওস্কির চর্তুমাত্রিক জগত (Four Dimentional World of Minkowski)

আমরা এ পর্যন্ত আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যার সূত্রগুলি নিয়ে যে আলোচনা করেছি, তারপরই হয়তো এই এককটির পরিসমাপ্তি করা যেত। কিন্তু তাহলে আপনাদের মনে একটি প্রশ্ন থেকেই যেত। সেটা হল নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রের লরেন্টজীয় রূপান্তর নিয়ে যে সমস্যার সৃষ্টি হয়েছিল, তার কোনও সমাধানের কথা তো বলা হলো না।

নিউটনের গতিসূত্র গঠনের বহু পূর্বেই গ্যালিলিও বলেছিলেন যে কোনও বস্তুর সমবেগ গতি ও স্থিতির বিষয়টি সম্পূর্ণ আপেক্ষিক, কারণ বস্তুর এই দুই অবস্থার যেকোনও একটিতে ঐ বস্তুর উপর যে প্রাকৃতিক নিয়ম প্রজোয্য, অপর অবস্থার ক্ষেত্রেও ঐ নিয়মগুলিই প্রযোজ্য হয়, কোনও ব্যতিক্রম হয় না।

এরপর নিউটন যে তিনটি গতিসূত্র দিয়েছেন, আমরা দেখেছি যে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর দ্বারা সেগুলির কোনও পরিবর্তন হয় না। এদ্বারা জাড্যিক নির্দেশতন্ত্রের সংজ্ঞাও দেওয়া হয়েছিল। কিন্তু তারপর আইনস্টাইন লক্ষ করলেন যে আলোকের সমীকরণের ক্ষেত্রে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর খাটে না বটে, কিন্তু লরেন্টজীয় রূপান্তর খাটে এবং তা মাইকেলসন-মর্লের পরীক্ষার ফল যথার্থরূপে ব্যাখ্যা করতে পারে। তাছাড়া তিনি আরও লক্ষ করলেন যে নিউটনের প্রথম গতিসূত্রটিও লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তিত থাকে।

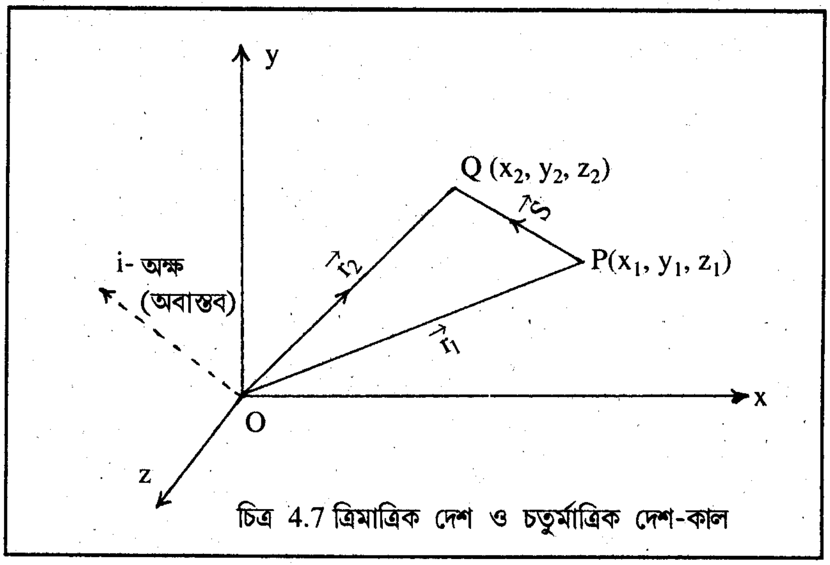
এ থেকে আইনস্টাইন তাঁর বিশেষ আপেক্ষিকতার প্রথম সূত্রেই গ্যালিলিয়োর আপেক্ষিকতার সূত্রকে আরও বিস্তৃত করে বললেন যে সকল জাড্যিক নির্দেশতন্ত্রেই তড়িচ্চুম্বকীয় সহ বলবিদ্যার সকল সূত্রই অপরিবর্তিত থাকবে এবং সূত্রগুলির সমীকরণ এক নির্দেশতন্ত্র থেকে অন্য জাড্যিক নির্দেশতন্ত্রে

সমরূপে পরিবর্তিত (covariant) হবে। আইনস্টাইনের প্রথম ও দ্বিতীয় সূত্র থেকে লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণগুলি পাওয়া যায়। সুতরাং আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতার প্রথম সূত্র অনুযায়ী নিউটনের তিনটি সূত্রই লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা সমরূপে পরিবর্তিত হওয়া আবশ্যক। কিন্তু বাস্তবে দেখা যাচ্ছে যে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা সমরূপে পরিবর্তিত হয় না। তৃতীয় সূত্রের ক্ষেত্রেও অনুরূপ সমস্যার সৃষ্টি হয়েছিল। কিন্তু আপনারা দেখেছেন যে বেগের উপর বস্তুর ভরের নির্ভরশীলতা ধরে নিয়ে আইনস্টাইন কিভাবে ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রকে অপরিবর্তিত রেখেছেন।

আমরা এখন দেখব যে মিনকওস্কির চতুর্মাত্রিক জ্যামিতিদ্বারা আইনস্টাইন কিভাবে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের সংশোধন করেছেন, যাতে সেটি লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা অপরিবর্তিত থাকে।

4.10.1 ত্রিমাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশ ও জ্যামিতি (Three-Dimensional Euclidean Space and Geometry)

আমরা জানি, x, y, z ত্রিমাত্রিক কার্টেজীয় দেশে P ও Q দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $P(x_1, y_1, z_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2)$ হলে নিউক্লিডীয় জ্যামিতি অনুযায়ী (চিত্র 4.7)



চিত্র 4.7 ত্রিমাত্রিক দেশ ও চতুর্মাত্রিক দেশ-কাল

সরণ ভেক্টর, $$\overrightarrow{PQ} = \vec{s} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \vec{i}(x_2 - x_1) + \vec{j}(y_2 - y_1) + \vec{k}(z_2 - z_1) \quad (4.84)$$

যেখানে $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ যথাক্রমে x, y, z অক্ষের দিকে একক ভেক্টর এবং $\vec{r_1}$ ও $\vec{r_2}$ P ও Q বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর। এই সরণের মান s (স্কেলার) ধরলে

$$\therefore \qquad s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \tag{4.85}$$

বা,
$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{4.86}$$

কারণ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ প্রত্যেকে প্রত্যেকের সমকোণে থাকায়

$$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1, \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$$

আমরা এখন দেখাতে পারি যে গ্যালিলিয়ো রূপান্তরের সাপেক্ষে s **অপরিবর্তনীয়** (invariant) থাকে।

ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে S´ নির্দেশতন্ত্র x, x´ অক্ষ অভিমুখে υ বেগে চলছে। ধরা যাক, S´ নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে স্থির দুটি বিন্দু $P(x_1', y_1', z_1')$ ও $Q(x_2', y_2', z_2')$ -র মধ্যে দূরত্ব s´। তাহলে আমরা পাই

$$s' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2} \tag{4.87}$$

ধরা যাক, S নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে স্থির একজন নিরীক্ষকের নিকট t সময়ে ঐ দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $P(x_1, y_1, z_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2)$। যদি এই নিরীক্ষকের সাপেক্ষে এই দুটি বিন্দুর দূরত্ব s হয়, তাহলে, আমরা (4.85) সমীকরণ থেকে পাই

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

এখন t সময়ে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর সমীকরণগুলি হবে

$$x_1 = x_1' + \upsilon t, \ y_1' = y_1', \ z_1 = z_1'$$

এবং
$$x_2 = x_2' + \upsilon t, \ y_2 = y_2', \ z_2 = z_2' \tag{4.88}$$

সুতরাং এই সমীকরণগুলি থেকে আমরা পাই

$$x_2 - x_1 = x_2' - x_1', \ y_2 - y_1 = y_2' - y_1', \ z_2 - z_1 = z_2' - z_1' \tag{4.89}$$

(4.89) সমীকরণের এই মানগুলি (4.85) সমীকরণে বসালে আমরা পাই

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2} \\ &= s' \end{aligned} \tag{4.90}$$

অর্থাৎ গ্যালিলিয়ো রূপান্তর দ্বারা s স্কেলারটির মান অপরিবর্তনীয়।

যদি P ও Q-র দূরত্ব অত্যল্প হয়, তবে s-কে আমরা ds দ্বারা প্রতিস্থাপিত করতে পারি। এক্ষেত্রে ds-এর উপাংশগুলিও অত্যন্ত ক্ষুদ্র হবে এবং সেজন্য আমরা ধরতে পারি

$$x_2 - x_1 = dx,\ y_2 - y_1 = dy,\ z_2 - z_1 = dz$$

(4.85) ও (4.86) সমীকরণে আমরা এই মানগুলি বসিয়ে পাই

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (4.91)$$

এবং
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \qquad (4.92)$$

4.10.2 চতুর্মাত্রিক ছদ্ম-ইউক্লিডীয় দেশ-কাল ও জ্যামিতি (Four Dimensional Pseudo-Euclidean Space-time and Geometry)। মিনকওস্কির জগত।

মিন্‌কওস্কি ত্রিমাত্রিক দেশের সঙ্গে কাল মাত্রা যোগ করে একটি চতুর্মাত্রিক দেশ-কালের কল্পনা করেন। এজন্য তিনি x, y, z অক্ষগুলির প্রত্যেকটির সঙ্গে সমকোণে কল্পিত i-অক্ষ কল্পনা করেন (চিত্র 4.7) এবং এই অক্ষের উপর দেশ-কাল ভেক্টরের উপাংশ ct ধরে নেন (যেখানে c = আলোকের বেগ ও t = সময় বা কালাঙ্ক। t-কে c-দ্বারা গুণ করার কারণ হল যাতে এটিও দেশ স্থানাঙ্কগুলির মতো একই দৈর্ঘ্যের মাত্রা পায়।) যেহেতু কল্পিত সংখ্যা i-এর বর্গের মডিয়ুল $|i^2| = 1$, সুতরাং i-কে i-অক্ষের দিকে একক ভেক্টর হিসাবে কল্পনা করা যায়। (লক্ষ করুন, মিনকওস্কির চতুর্মাত্রিক দেশ-কাল ত্রিমাত্রিক দেশের ধারণার একটি গাণিতিক প্রসারণ মাত্র। এর কোনও বাস্তব উপলব্ধি আমাদের পক্ষে সম্ভব নয়।)

অতএব চতুর্মাত্রিক দেশ-কালে P ও Q বিন্দুর নির্দেশাঙ্ক যথাক্রমে $P(x_1, y_1, z_1, ct_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2, ct_2)$ ধরে নিলে চতুর্মাত্রিক ব্যাসার্ধ ভেক্টর দুটি হবে

$$\vec{R}_1 = \vec{i}\,x_1 + \vec{j}\,y_1 + \vec{k}\,z_1 + ict_1$$

এবং
$$\vec{R}_2 = \vec{i}\,x_2 + \vec{j}\,y_2 + \vec{k}\,z_2 + ict_2 \qquad ...(4.93)$$

এখানে লক্ষণীয় যে $\vec{i}$ হল x-অক্ষ অভিমুখে একক ভেক্টর, কিন্তু (ভেক্টরের তীর চিহ্ন বর্জিত) i হল কল্পিত i-অক্ষের দিকে একক কল্পিত ভেক্টর এবং এর মান $i = \sqrt{-1}$।

চতুর্মাত্রিক সরণ $\vec{S}$ দেশ-কালে ঘটে। এজন্য একে দুটি ঘটনার অবকাশ বলে।

সুতরাং অবকাশ,

$$\vec{S} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 = \vec{i}\,(x_2 - x_1) + \vec{j}\,(y_2 - y_1) + \vec{k}\,(z_2 - z_1) + ic(t_2 - t_1) \qquad ...(4.94)$$

সুতরাং এই অবকাশের মানের বর্গ হবে—

$$S^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \quad ...(4.95)$$

বা, $$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2} \quad ...(4.96)$$

কারণ, $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i.\vec{i} = i.\vec{j} = i.\vec{k} = 0$ (যেহেতু i-কে $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ প্রত্যেক ভেক্টরের সমকোণে ধরা হয়েছে।)

(4.95) ও (4.96) সমীকরণ থেকে অত্যল্প অবকাশের ক্ষেত্রে আমরা পাই

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 \quad ...(4.97)$$

এবং $$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2} \quad ...(4.98)$$

(4.94) সমীকরণে আমরা $\vec{S}$-কে x, y, z বাস্তব অক্ষগুলির দিকে ধরেছি। যদি $dt = 0$ হয়, তবে dS দ্বারা আমরা দৈর্ঘ্যের মান পাই। এজন্য এই অবকাশকে **দেশতুল্য** (space like) বলা হয়। অপরপক্ষে এই অবকাশকে আমরা কল্পিত i-অক্ষের দিকেও ধরতে পারতাম। সেক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি

$$i\vec{S}_t = i\left(\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right) = \vec{i}(x_2 - x_1) + \vec{j}(y_2 - y_1) + \vec{k}(z_2 - z_1) + ic(t_2 - t_1) \quad ...(4.99)$$

সুতরাং এখান থেকে আমরা পাই—

$$-S_t^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2$$

বা, $$S_t^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad ...(4.100)$$

এবং $$dS_t^2 = c^2dt^2 - dx - dy^2 - dz^2 \quad ...(4.101)$$

সুতরাং আমরা পাচ্ছি $S^2 = -S_t^2$ এবং $dS^2 = -dS_t^2$ ...(4.102)

(4.99) সমীকরণে অবকাশকে সময় অক্ষের দিকে ধরা হয়েছে। যদি $dx = dy = dz = 0$ হয়, তবে dS_t দুটি ঘটনার মধ্যে সময়ের পার্থক্য নির্দেশ করে। এজন্য এই অবকাশকে সাধারণত কালতুল্য অবকাশ (time like interval) বলা হয়

লক্ষণীয় যে ত্রিমাত্রিক দেশে $dx = dy = dz = 0$ হলে, (4.88) সমীকরণ অনুযায়ী $ds = 0$। কিন্তু কালতুল্য অবকাশের ক্ষেত্রে [সমীকরণ (4.101)] আমরা $dx = dy = dz = 0$ বসালে পাই

$$dS_t = cdt > 0 \quad ...(4103)$$

আবার দেশতুল্য অবকাশের সমীকরণে $dt = 0$ বসালে আমরা পাই

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds > 0 \quad ...(4104)$$

সুতরাং আমরা দেখতে পাচ্ছি যে শুধুমাত্র কালাঙ্ক বা শুধুমাত্র স্থানাঙ্কগুলির মান শূন্য নিলেও অবকাশের মান শূন্য হয় না। কিন্তু যদি

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2t^2 \qquad ...(4105)$$

ধরা হয়, তবে আমরা পাই $dS = dS_t = 0$ এবং সেক্ষেত্রে (4.105) বা (4.97) বা (4.101) সমীকরণ আলোকের বিস্তারের সমীকরণে রূপান্তরিত হয়।

চতুর্মাত্রিক দেশ-কালকে **মিনকওস্কির জগত** বলে। এই জগতে অবকাশের মান ইউক্লিডীয় পদ্ধতি অনুসরণ করে নির্ণয় করা হয়েছে। এতৎসত্ত্বেও মিনকওস্কির জগতকে সম্পূর্ণ ইউক্লিডীয় বলা যায় না। কারণ আপনি নিশ্চয় লক্ষ করেছেন যে ইউক্লিডীয় ত্রিমাত্রিক সরণের বর্গ তিনটি ধনাত্মক রাশির যোগফল। কিন্তু মিনকওস্কির চতুর্মাত্রিক জগতে অবকাশের বর্গ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয় প্রকার রাশির যোগফল। ফলে মিনকওস্কির জগতের অনেক ধর্ম ইউক্লিডীয় জ্যামিতির দ্বারা ব্যাখ্যা করা যায় না। এজন্য এই জগতকে **ছদ্ম ইউক্লিডীয় দেশ** (Pseudo Euclidean Space) বলা হয়।

লক্ষ করুন, ত্রিমাত্রিক ও চতুর্মাত্রিক রাশিগুলির (ব্যাসার্ধ ভেক্টর, সরণ, অবকাশ) মধ্যে পার্থক্য বোঝাবার জন্য আমরা এখানে ত্রিমাত্রিক রাশির ক্ষেত্রে ছোটো রোমান অক্ষর (r, s প্রভৃতি) ও চতুর্মাত্রিক রাশির ক্ষেত্রে বড়ো রোমান অক্ষর (R, S প্রভৃতি) ব্যবহার করেছি। পরবর্তীকালে বেগ, ত্বরণ, বল, ভরবেগ ইত্যাদির ক্ষেত্রেও আমরা এই নীতি ব্যবহার করব। তাছাড়া ত্রিমাত্রিক ও চতুর্মাত্রিক সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদির মধ্যে পার্থক্য বোঝাবার জন্য অনেক সময় (ত্রিমাত্রিকের ক্ষেত্রে) 3-সরণ, 3-বেগ, 3-ত্বরণ ইত্যাদি এবং চতুর্মাত্রিক ক্ষেত্রে 4-সরণ, 4-বেগ, 4-ত্বরণ ইত্যাদি শব্দ ব্যবহার করা হয়।

4.10.3. চতুর্মাত্রিক অবকাশের লরেন্টজীয় রূপান্তর (Lorentzeon Transformation of Four Dimensional Interval)

এখন আমরা প্রমাণ করতে পারি যে লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা S (বা S_t) স্কেলারটির মান অপরিবর্তিত থাকে।

ধরা যাক্ L′ নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে স্থির একজন নিরীক্ষক এই নির্দেশতন্ত্রে স্থির দুটি বিন্দু $P(x_1', y_1', z_1')$ ও $Q(x_2', y_2', z_2')$ -তে দুটি ঘটনা যথাক্রমে t_1' ও t_2' সময়ে ঘটতে দেখে। সুতরাং এই নিরীক্ষকের সাপেক্ষে P ও Q বিন্দুর 4-দূরত্ব S′ ধরলে (4.95) সমীকরণ অনুযায়ী আমরা পাই

$$S'^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 \qquad ...(4.105)$$

যদি L′ নির্দেশতন্ত্র L নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে x, x′ অক্ষ অভিমুখে v সমবেগে চলে এবং $t = t' = 0$ সময়ে নির্দেশতন্ত্র দুটির সমাপতন হয়ে থাকে, L নির্দেশতন্ত্রের নিরীক্ষক ঐ ঘটনা দুটি

$P(x_1, y_1, z_1)$ ও $Q(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দুতে যথাক্রমে t_1 ও t_2 সময়ে ঘটতে দেখবে। সুতরাং এই নিরীক্ষকের কাছে (4.95) সমীকরণ অনুযায়ী এই ঘটনা দুটির অবকাশের মান হবে

$$S^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \quad ...(4.106)$$

এখন এই দুটি নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণগুলি হল

$$x_1 = \gamma(x_1' + \upsilon t_1'),\ y_1 = y_1',\ z_1 = z_1',\ t_1 = \gamma\left(t_1' + \frac{\upsilon x_1'}{c^2}\right)$$

$$\text{এবং}\quad x_2 = \gamma(x_2' + \upsilon t_2'),\ y_2 = y_2',\ z_2 = z_2',\ t_2 = \gamma\left(t_2' + \frac{\upsilon x_2'}{c^2}\right)$$

$$\text{যেখানে}\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \quad ...(4.107)$$

(4.107) সমীকরণগুলি থেকে L নির্দেশতন্ত্রের নির্দেশাঙ্কের মানগুলি (4.106) সমীকরণে বসালে আমরা পাই

$$S^2 = \gamma^2\left\{(x_2' - x_1') + \upsilon(t_2' - t_1')\right\}^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2$$
$$-c^2\gamma^2\left\{(t_2' - t_1') + \frac{\upsilon}{c^2}(x_2' - x_1')\right\}^2$$

$$= \gamma^2\left\{(x_2' - x_1')^2 + \upsilon^2(t_2' - t_1')^2 + 2\upsilon(x_2' - x_1')(t_2' - t_1')\right\} + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2$$
$$-\gamma^2\left\{c^2(t_2' - t_1')^2 + \frac{\upsilon^2}{c^2}(x_2' - x_1')^2 + 2\upsilon(x_2' - x_1')(t_2' - t_1')\right\}$$

$$= \gamma^2\left\{(x_2' - x_1')^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) + (t_2' - t_1')^2(\upsilon^2 - c^2)\right\} + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2$$

$$= \gamma^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left\{(x_2' - x_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2\right\} + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2$$

$$= (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2$$

$$\left[\text{যেহেতু}\ \gamma^2 = \frac{1}{1 - \upsilon^2/c^2}\right]$$

$$= S'^2 \quad ...(4.108)$$

সুতরাং লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা S (এবং অনুরূপে S_t) অপরিবর্তনীয়।

4.10.4. চতুর্মাত্রিক বেগ (4-বেগ) নির্ণয় (Determination of 4-Velocity)

আমরা ত্রিমাত্রিক দেশে সময়ের সাপেক্ষে সরণের পরিবর্তনের হারকে বেগ বলি।

$$\vec{u} = \frac{d\vec{s}}{dt} \qquad ...(4.109)$$

সুতরাং $\vec{u}$-র তিনটি উপাংশ হল $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$, $u_z = \frac{dz}{dt}$

4-বেগের ক্ষেত্রে আমরা $\vec{s}$ এর পরিবর্তে $\vec{S}$ ধরব। কিন্তু এক্ষেত্রে সময় t-র সাপেক্ষে $\vec{S}$-এর পরিবর্তনের হারকে 4-বেগ হিসাবে ধরা যায় না। কারণ ত্রিমাত্রিক দেশে সময় একটি স্কেলার এবং তা গ্যালিলিয়ো রূপান্তর নিরপেক্ষ (অর্থাৎ এই রূপান্তর দ্বারা অপরিবর্তনীয়)। কিন্তু 4-মাত্রিক দেশ কালে সময় হল আপেক্ষিক যা স্থান ও কাল উভয়ের উপর নির্ভর করে। সুতরাং এটি স্কেলার নয় এবং লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা এর মান পরিবর্তিত হয়। এখন দেখা যাক, এই সময়ের পরিবর্তে এর তুল্য অপরিবর্তনীয় স্কেলার রাশি কিভাবে পাওয়া যায়।

(4.108) সমীকরণ অনুযায়ী আমরা লিখতে পারি

$$S_t^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$
$$= c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 \qquad ...(4.110)$$

এখন (4.110) সমীকরণে $x'_2 - x'_1 = y'_2 - y'_1 = z'_2 - z'_1 = 0$ ধরলে এবং $t'_2 - t'_1 = \tau$ বসালে আমরা পাই

$$S_t^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 = c^2\tau^2$$

বা, $$\tau = \frac{S_t}{c}$$

যেহেতু S_t ও c উভয়েই লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় ও স্কেলার, সুতরাং τ-ও লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় ও স্কেলার। τ-কে যথার্থ বা প্রকৃত সময় (proper time) বলা হয়। কারণ L′ নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে স্থির নিরীক্ষক ঐ নির্দেশতন্ত্রের একটি বিন্দুতে t'_1 ও t'_2 সময়ে পরপর দুটি ঘটনা ঘটতে দেখে, যার অন্তর স্থান নিরপেক্ষ এবং সেজন্য তা কেবল তার নিজের ঘড়ির সময় দ্বারা পরিমাপ করা যায়।

সুতরাং আমরা এই প্রকৃত সময় τ-এর সাপেক্ষে $\vec{S}$-এর পরিবর্তনের হারকে 4-বেগ বলতে পারি। অর্থাৎ

$$\text{4-বেগ,} \quad \vec{U} = \frac{d\vec{S}}{d\tau} \qquad ...(4.112)$$

এখন $d\vec{S}$-এর চারটি উপাংশ হল d_x, d_y, d_z এবং cdt। সুতরাং $\vec{U}$-র চারটি উপাংশ হবে

$$\left.\begin{aligned}
U_x &= \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \frac{u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\\
U_y &= \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \frac{u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\\
U_z &= \frac{dz}{d\tau} = \frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \frac{u_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\\
U_i &= \frac{cdt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}
\end{aligned}\right\} \qquad ...(4.113)$$

কারণ (4.109) সমীকরণ অনুযায়ী $\frac{dx}{dt} = u_x, \frac{dy}{dt} = u_y, \frac{dz}{dt} = u_z$ হল 3-বেগ $\vec{u}$-র তিনটি উপাংশ। অধিকন্তু (4.111) এবং (4.101) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\begin{aligned}
\frac{d\tau}{dt} = \frac{dS_t}{cdt} &= \frac{\sqrt{c^2dt^2-(dx^2+dy^2+dz^2)}}{cdt}\\
&= \sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)}\\
&= \sqrt{1-\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{c^2}}\\
&= \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \qquad ...(4.114)
\end{aligned}$$

(4.113) সমীকরণ থেকে আপানি নিশ্চয় লক্ষ করবেন যে এখানে u হল L নির্দেশতন্ত্রে বস্তুর ত্রিমাত্রিক বেগ। সুতরাং এটিকে এই নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে L' নির্দেশতন্ত্রের বেগ υ-র সঙ্গে মিশিয়ে ভুল করবেন না।

(4.113) সমীকরণে $\frac{u}{c} << 1$ ধরলে $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \simeq$ হয়। সুতরাং এক্ষেত্রে 4-বেগের দৈশিক উপাংশগুলি 3-বেগের অনুরূপ উপাংশগুলির সমান হয় এবং কালিক উপাংশটি c-র সমান হয়।

অর্থাৎ $$U_x = u_x, \; U_y = u_y, \; U_z = u_z, \; U_t = c \qquad ...(4.115)$$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে আপেক্ষিকীয় বেগের সীমায়িত রূপ থেকে সনাতন বেগের সংজ্ঞা পাওয়া যায়।

4.10.5. চতুর্মাত্রিক ত্বরণ (4-ত্বরণ) নির্ণয় (Determination of 4-acceleration)

সময়ের সাপেক্ষে 3-বেগের পরিবর্তনের হারকে আমরা 3-ত্বরণ বলি। সুতরাং এই ত্বরণকে a-দ্বারা প্রকাশ করলে আমরা পাই,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} \qquad ...(4.116)$$

সুতরাং এই ত্বরণের তিনটি উপাংশ হল—

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{du_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y &= \frac{du_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z &= \frac{du_2}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \qquad ...(4.117)$$

অনুরূপে যথার্থ সময় (τ)-এর সাপেক্ষে 4-বেগের পরিবর্তনের হারকে আমরা 4-ত্বরণ বলতে পারি। সুতরাং এই ত্বরণের চিহ্ন A ধরলে

$$\vec{A} = \frac{d\vec{U}}{d\tau} = \frac{d\vec{U}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} \qquad ...(4.118)$$

$$\left[\because \text{(4.114) সমীকরণ অনুযায়ী } \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \right]$$

সমীকরণ (4.118) ও (4.113) ব্যবহার করে আমরা এখন $\vec{A}$-র চারটি উপাংশ নির্ণয় করতে পারি।

$$A_x = \frac{dU_x}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{dU_x}{dt};$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left[\frac{\frac{du_x}{dt}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + \frac{1}{2}\frac{u_x \frac{2u}{c^2}\frac{du}{dt}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\left[\frac{du_x}{dt} + \frac{\frac{uu_x}{c^2}\cdot\frac{du}{dt}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\right]$$

বা $$A_x = \frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\left[a_x + \frac{\frac{uu_x}{c^2}a}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\right] \qquad ...[4.119(i)]$$

অনুরূপে $$A_y = \frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\left[a_y + \frac{\frac{uu_y}{c^2}a}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\right] \qquad ...[4.119(ii)]$$

$$A_z = \frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\left[a_z + \frac{\frac{uu_z}{c^2}a}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\right] \qquad ...[4.119(iii)]$$

$$A_i = \frac{dU_t}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{dU_t}{dt}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \frac{d}{dt}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \frac{\frac{u}{c^2}\frac{du}{dt}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{ua}{c\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2} \qquad \text{...[4.119(iv)]}$$

এখানে $a = \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ ...(4.120)

4-ত্বরণকে 3-ত্বরণের সঙ্গে তুলনা করার জন্য (4.119) সমীকরণগুলিতে এই উপাংশগুলির সীমায়িত ক্ষেত্র $\cdot\left(\frac{u}{c} \sim 0\right)$ বিবেচনা করা যায়। তাহলে আমরা পাই—

$$A_x = a_x,\ A_y = a_y,\ A_z = a_z \qquad \text{...(4.121)}$$

এবং $A_i = 0$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে আমরা পুনরায় সনাতন ত্বরণের মানগুলি পাচ্ছি।

4.10.6. চতুর্মাত্রিক ভরবেগ বা 4-ভরবেগ (Four Momentum)

নিউটনীয় গতিবিদ্যায় ভর ও বেগের গুণফলকে ভরবেগ বলে। যেহেতু ভর (m) একটি অপরিবর্তনীয় স্কেলার রাশি, সেজন্য বেগের অভিমুখই ভরবেগের অভিমুখ। অর্থাৎ,

$$\vec{p} = m\vec{u} \qquad \text{...(4.122)}$$

চতুর্মাত্রিক গতিবিদ্যায় আমরা একইভাবে ভরবেগের সংজ্ঞা নিরূপণ করতে পারি। তবে এক্ষেত্রে বস্তুর ভর m যেহেতু বেগের উপর নির্ভরশীল, সেজন্য এটি লরেন্টজীয় রূপান্তরদ্বারা অপরিবর্তনীয় থাকে না। বেগ নির্ণয়ের ক্ষেত্রেও আমাদের সময় নিয়ে অনুরূপ সমস্যার সৃষ্টি হয়েছিল। কিন্তু আমরা দেখেছি যে যেহেতু প্রকৃত সময় τ লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা পরিবর্তিত হয় না, সেজন্য 4-বেগকে τ-র সাপেক্ষে সংজ্ঞায়িত করা হলে সমস্যার সমাধান হয়। অনুরূপে, ভরের ক্ষেত্রেও আমরা দেখতে পাই যে m-এর পরিবর্তে m_0 গ্রহণ করা হলে 4-ভরবেগ সংজ্ঞায়িত করার সমস্যা দূর হয়। কারণ m_0

হল বস্তুর স্থিরভাব যা লরেন্টজীয় রূপান্তরদ্বারা পরিবর্তিত হয় না। সুতরাং 4-ভরবেগ হবে

$$\vec{P} = m_0 \vec{U} \qquad \text{...(4.123)}$$

এক্ষেত্রে $\vec{P}$-র চারটি উপাংশের মান (4.113) সমীকরণ অনুযায়ী পাওয়া যায়।

$$\left.\begin{aligned}
P_x &= m_0 U_x = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\
P_y &= m_0 U_y = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\
P_z &= m_0 U_z = \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\
P_i &= m_0 U_i = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{...(4.124)}$$

যদি $\frac{u}{c} \sim 0$ ধরি, তবে (4.124) সমীকরণের সীমায়িত মানগুলি হবে

$$P_x = m_0 u_x,\ P_y = m_0 u_y,\ P_z = m_0 u_z,\ P_i = m_0 c \qquad \text{...(4.125)}$$

সনাতন বলবিজ্ঞানে $m = m_0$। সুতরাং (4.125) সমীকরণের P_x, P_y, P_z মানগুলি সনাতন বলবিজ্ঞান অনুযায়ী 3-ভরবেগের মান নির্দেশ করে। অবশ্য ভরবেগের চতুর্থ উপাংশ $P_t = m_0 c$ সমীকরণের কোনও অর্থ সনাতন বলবিজ্ঞান থেকে পাওয়া যাবে না।

4.10.7. চতুর্মাত্রিক বল বা 4-বল (Four Dimensional Force)

চতুর্মাত্রিক বলের সংজ্ঞা নির্ধারণের ক্ষেত্রেও আমরা উপরের পদ্ধতি অনুসরণ করতে পারি। নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী 3-বল হবে

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{u} = m\frac{d\vec{u}}{dt} = m\vec{a} \qquad \text{...(4.126)}$$

এই বলের তিনটি উপাংশ হল

$$\left.\begin{aligned} f_x &= m\frac{du_x}{dt} = ma_x \\ f_y &= m\frac{du_y}{dt} = ma_y \\ f_z &= m\frac{du_z}{dt} = ma_z \end{aligned}\right\} \qquad ...(4.127)$$

অনুরূপে, 4-বলের সমীকরণ হবে

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{d\tau} = m_0\frac{d\vec{U}}{d\tau} = m_0\vec{A} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{d\vec{U}}{dt} \qquad ...(4.128)$$

(4.128) সমীকরণ থেকে আমরা 4-বলের চারটি উপাংশের মান লিখতে পারি। এগুলি হল

$$F_x = m_0A_x = \frac{m_0}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\left[a_x + \frac{uu_xa}{c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\right] \qquad ...[4.128(i)]$$

$$F_y = m_0A_y = \frac{m_0}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\left[a_y + \frac{uu_ya}{c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\right] \qquad ...[4.128(ii)]$$

$$F_z = m_0A_z = \frac{m_0}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\left[a_z + \frac{uu_za}{c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\right] \qquad ...[4.128(iii)]$$

$$F_i = m_0A_z = \frac{m_0ua}{c\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2} \qquad ...[4.128(iv)]$$

(4.128) সমীকরণগুলি থেকে দেখা যাচ্ছে যে এই সমীকরণগুলিতে $m = m_0$ এবং $\frac{u}{c} \sim 0$ বসিয়ে আমরা বলের সনাতন সূত্র পাই। এক্ষেত্রে আরও লক্ষ করুন যে $F_i = 0$। অর্থাৎ সনাতন বলের ক্ষেত্রে কল্পিত অক্ষের উপর বলের (এবং ত্বরণের) কোনও উপাংশ নেই।

4.11 মিনকওস্কির জগতে নিউটনের গতিসূত্রগুলির লরেন্টজীয় রূপান্তর ((Lorentzean Transformation of Newton's Laws of Motion in Minkowski's World)

এখন আমরা মিনকওস্কির জগতে নিউটনের গতিসূত্রগুলির চতুর্মাত্রিক সমীকরণগুলির উপর লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রয়োগ করে দেখব যে এই সমীকরণগুলি বিভিন্ন জ্যাড্যিক নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে সমরূপ থাকে কিনা।

4.11.1. প্রথম গতিসূত্র

ধরা যাক, L' নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে একটি বস্তুকণা $\vec{U}'$ 4-সমবেগে চলছে। তাহলে $\vec{U}'$ = ধ্রুবক। সুতরাং এর উপাংশগুলি (U'_x, U'_y, U'_z, U'_i) ও প্রত্যেকটি ধ্রুবক হবে। অর্থাৎ U'_x = ধ্রুবক, U'_y = ধ্রুবক, U'_z = ধ্রুবক এবং U'_i = ধ্রুবক। যদি L নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে L' নির্দেশতন্ত্র x, x' অক্ষ অভিমুখে $\vec{\upsilon}$ সমবেগে চলে এবং L নির্দেশতন্ত্রে স্থির একজন নিরীক্ষকের নিকট ঐ বস্তুকণার 4-বেগ $\vec{U}$ হয়, তাহলে এই বেগের উপাংশগুলি (U_x, U_y, U_z, U_i)-র উপর লরেন্টজীয় রূপান্তর আরোপ করে আমরা পাই

$$\begin{aligned} U_x &= \gamma(U'_x + \beta U'_i) = \text{ধ্রুবক} \\ U_y &= U'_y = \text{ধ্রুবক} \\ U_z &= U'_z = \text{ধ্রুবক} \\ U_i &= \gamma(U'_i + \beta U'_x) = \text{ধ্রুবক} \end{aligned} \qquad \ldots(4.129)$$

কারণ $\beta = \frac{\upsilon}{c}$ এবং $\gamma - (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ উভয়েই ধ্রুবক। সুতরাং $\vec{U}$ 4-বেগে ভেক্টরটিও একটি ধ্রুবক (= সমবেগ)। কাজেই L নির্দেশতন্ত্রেও নিউটনের প্রথমসূত্র অপরিবর্তনীয় থাকছে।

এখানে লক্ষ করুন যে (4.129) সমীকরণটি যেকোনও ভেক্টরের উপাংশগুলির লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাধারণরূপ। কারণ (4.94) সমীকরণ অনুযায়ী যদি L নির্দেশতন্ত্রে $\vec{S}$ ভেক্টরের উপাংশগুলি

$S_x = (x_2 - x_1)$, $S_y = (y_2 - y_1)$, $S_z = (z_2 = z_1)$, $S_i = c(t_2 - t_1)$ ধরা হয় এবং অনুরূপে যদি L' নির্দেশতন্ত্রে $\vec{S'}$ ভেক্টরের উপাংশগুলি $S'_x = (x'_2 - x'_1), S'_y = (y'_2 - y'_1)$, $S'_z = (z'_2 - z'_1)$, $S'_i = c(t'_2 - t'_1)$ ধরা হয়, তবে L' নির্দেশতন্ত্র L নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষ x, x′ অক্ষ অভিমুখে υ বেগে চললে লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণগুলি (4.107) সমীকরণগুলির দ্বারা নির্ণয় করা যায়। অর্থাৎ

$$\begin{aligned} S_x &= \gamma\left(S'_x + \frac{\upsilon}{c}S'_i\right) = \gamma(S'_x + \beta S'_i) \\ S_y &= S'_y \\ S_z &= S'_z \end{aligned} \qquad ...(4.130)$$

এবং $$S_i = \gamma\left(S'_i + \frac{\upsilon}{c}S'_x\right) = \gamma(S'_i + \beta S'_x)$$

হয়।

এখন (4.130) সমীকরণে S-কে U-দ্বারা প্রতিস্থাপিত করলে আমরা (4.129) সমীকরণগুলি পাই।

4.11.2. দ্বিতীয় গতিসূত্র

ধরা যাক, L' মিনকওস্কির নির্দেশতন্ত্রে m_0 স্থির ভরের একটি বস্তু $\vec{A'}$ সমত্বরণে চলছে। সুতরাং 4-বলের সংজ্ঞা অনুযায়ী $\vec{F'}$ বলের মান হবে

$$\vec{F'} = m_0 \vec{A'} \text{ ধ্রুবক } (\because m_0 \text{ এবং } \vec{A'} \text{ উভয়ে ধ্রুবক}) \qquad ...(4.131)$$

ধরা যাক, L নির্দেশতন্ত্রের একজন নিরীক্ষকের নিকট ঐ বলের মান

$$\vec{F} = m_0 \vec{A} \qquad ...(4.132)$$

এখন যদি L' L-এর সাপেক্ষে x, x′ অক্ষ অভিমুখে υ বেগে যায়, তবে, লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা $\vec{A}$ ও $\vec{A'}$ ভেক্টরগুলির উপাংশগুলির সম্পর্ক হবে

$$\begin{aligned} A_x &= \gamma(A'_x + \beta A_i) = \text{ ধ্রুবক} \\ A_y &= A'_y = \text{ধ্রুবক} \\ A_z &= A'_z = \text{ ধ্রুবক} \end{aligned} \qquad ...(4.133)$$

এবং $$A_i = \gamma(A'_i + \beta A'_x) = \text{ ধ্রুবক}$$

কারণ $\overrightarrow{A'}$ সমত্বরণ (ধ্রুবক) হওয়ায় এর উপাংশগুলির প্রত্যেকটি ধ্রুবক এবং υ সমবেগ হওয়ায় β ও γ উভয়েই ধ্রুবক।

সুতরাং $\overrightarrow{F}$ বলের উপাংশগুলির মান হবে

$$\begin{aligned} F_x &= m_0 A_x = \text{ধ্রুবক} \\ F_y &= m_0 A_y = \text{ধ্রুবক} \\ F_z &= m_0 A_z = \text{ধ্রুবক} \\ F_i &= m_0 A_i = \text{ধ্রুবক} \end{aligned} \qquad ...(4.134)$$

সুতরাং $\overrightarrow{F}$ বলটিও ধ্রুবক। অর্থাৎ মিনকওস্কির চতুর্মাত্রিক জগতে লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অপরিবর্তনীয়।

4.11.3. তৃতীয় গতিসূত্র

ধরা যাক, L নির্দেশতন্ত্রে $m_{01}, m_{02}, m_{03}, \ldots m_{0n}$ সংখ্যক স্থির ভরবিশিষ্ট বস্তু আছে এবং কোনও সময়ে এদের মধ্যে পারস্পরিক ক্রিয়া ঘটে। ধরা যাক, এই ক্রিয়ার পূর্বে এদের 4-বেগের মান যথাক্রমে $\overrightarrow{U'_1}, \overrightarrow{U'_2}, \overrightarrow{U'_3}, \ldots \overrightarrow{U'_n}$ । সুতরাং 4-ভরবেগের সংজ্ঞা অনুযায়ী এদের মধ্যে k-তম বস্তুর 4-ভরবেগ হবে

$$\overrightarrow{P'_k} = m_{0k}\, \overrightarrow{U'_k} \qquad ...(4.135)$$

এবং এদের মোট 4-ভরবেগ হবে

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{P'_k} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k}\, \overrightarrow{U'_k} \qquad ...(4.136)$$

বস্তুগুলির মধ্যে পারস্পরিক ক্রিয়ার ফলে প্রতিক্রিয়া হবে এবং তারফলে প্রত্যেক ক্রিয়াশীল বস্তুর পূর্বের 4-ভরবেগের পরিবর্তন ঘটবে। কিন্তু L' নির্দেশতন্ত্রে নিউটনের তৃতীয় ও দ্বিতীয় সূত্র প্রযোজ্য হলে বস্তুগুলির মধ্যে পারস্পরিক ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়ার পরও মোট 4-ভরবেগ সংরক্ষিত হবে। অর্থাৎ

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{P'_k} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k}\, \overrightarrow{U'_k} = \text{ধ্রুবক} \qquad ...(4.137)$$

(4.137) সমীকরণের শর্ত অনুযায়ী আমরা পাই যে L' নির্দেশতন্ত্রের প্রত্যেক অক্ষের উপর ঐ বস্তুগুলির আনুষঙ্গিক 4-ভরবেগের উপাংশগুলির সমষ্টিও ধ্রুবক হবে। অর্থাৎ

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} P'_{kx} &= \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'_{kx} = \text{ধ্রুবক} \\
\sum_{k=1}^{n} P'_{ky} &= \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'_{ky} = \text{ধ্রুবক} \\
\sum_{k=1}^{n} P'_{kz} &= \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'_{kz} = \text{ধ্রুবক} \\
\sum_{k=1}^{n} P'_{ki} &= \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'_{ki} = \text{ধ্রুবক}
\end{aligned} \quad \text{...(4.138)}$$

এখন যদি ধরা হয় যে L' নির্দেশতন্ত্রটি L নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে x, x' অক্ষ অভিমুখে v সমবেগে গতিশীল, তাহলে L নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে স্থির একজন নিরীক্ষকের নিকট বস্তুগুলির মোট 4-ভরবেগ হবে

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} \vec{U}_k \quad \text{...(4.139)}$$

যদি k-তম বস্তুর $\vec{U}_k$ 4-ভরবেগের উপাংশগুলি $U_{kx}, U_{ky}, U_{kz}, U_{ki}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তবে এগুলির উপর লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রয়োগ করে আমরা পাই

$$\begin{aligned}
U_{kx} &= \gamma(U'_{kx} + \beta U'_{ki}) \\
U_{ky} &= U'_{ky} \\
U_{kz} &= U'_{kz}
\end{aligned} \quad \text{...(4.140)}$$

এবং $U_{ki} = \gamma(U'_{ki} + \beta U'_{kx})$

সুতরাং L নির্দেশতন্ত্রের প্রত্যেক অক্ষের উপর বস্তুগুলির 4-ভরবেগের উপাংশগুলির সমষ্টি হবে

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} P_{kx} &= \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U_{kx} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} \gamma(U'_{kx} + \beta U'_{ki}) \\
&= \gamma \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'_{kx} + \gamma\beta \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'_{ki} = \text{ধ্রুবক}
\end{aligned} \quad \text{...(4.141)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ky} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U_{ky} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'_{ky} = \text{ ধ্রুবক}$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kz} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U_{kz} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'_{kz} = \text{ ধ্রুবক} \qquad ...(4.142)$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ki} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U_{ki} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} \gamma (U'_{ki} + \beta U'_{kx})$$

$$= \gamma \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'ki + \gamma\beta \sum_{k=1}^{n} m_{0k} U'_{kx} = \text{ ধ্রুবক}$$

লক্ষ করুন, এই সমীকরণগুলি নির্ণয়ের জন্য আমরা (4.138) সমীকরণগুলি ব্যবহার করেছি। তাছাড়া আপনারা জানেন, $\upsilon =$ ধ্রুবক হওয়ায় $\beta = \frac{\upsilon}{c} =$ ধ্রুবক এবং $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} =$ ধ্রুবক।

সুতরাং (4.140) শর্তগুলি থেকে আমরা পাই

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{P_k} = \sum_{k=1}^{n} m_{0k} \vec{U_k} = \text{ ধ্রুবক} \qquad ...(4.143)$$

আমরা আগেই দেখিয়েছি, লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা 4-বলের সূত্র অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং (4.142) সমীকরণ থেকে প্রমাণিত হচ্ছে যে নিউটনের তৃতীয় সূত্রও মিনকওস্কির জগতে লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় থাকে।

4.12. 4-ভরবেগ সমীকরণদ্বারা ভর ও বেগের সম্বন্ধ নির্ণয় (Determination of the Relation between Mass and Velocity by the 4-Momentum Equation)

ত্রিমাত্রিক দেশে লরেন্টজীয় রূপান্তরের ক্ষেত্রে নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র ধরে নিয়ে আমরা পূর্বে ভর ও বেগের সম্বন্ধ নির্ণয় করেছি [সমীকরণ (4.47)]। আপেক্ষিকতা তত্ত্বে এই সমীকরণটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। কারণ, এই সমীকরণদ্বারা গতিশক্তির জন্য ভরের বৃদ্ধি, আপেক্ষিকীয় গতিশক্তির মান, ভর ও মোট শক্তির তুল্যতা, ভর ও শক্তির যুগ্মভাবে সংরক্ষণ সূত্র প্রভৃতি উচ্চশক্তির কণাবিজ্ঞানে প্রয়োজনীয় বহু সমীকরণ পাওয়া যায়। এখন আমরা দেখব যে 4-ভরবেগের সংজ্ঞা থেকে ভর ও বেগের সম্বন্ধের এই সমীকরণটি অতি সহজেই পাওয়া যায়।