ত্রিমাত্রিক দেশে নিউটনের ভরবেগের সংজ্ঞা হল

$$\vec{p} = m\vec{u} \quad \text{[সমীকরণ (4.122)]}$$

এর তিনটি উপাংশ হল

$$p_x = mu_x, p_y = mu_y, p_z = mu_z \tag{4.144}$$

অপর পক্ষে চতুর্মাত্রিক দেশে 4-ভরবেগের সংজ্ঞা হল

$$\vec{P} = m_0\vec{U} \quad \text{[সমীকরণ (4.123)]}$$

এই ভরবেগের চারটি উপাংশ হল

$$\left.\begin{aligned}
P_x &= m_0U_x = \frac{m_0u_x}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\\
P_y &= m_0U_y = \frac{m_0u_y}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\\
p_z &= m_0U_z = \frac{m_0u_z}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\\
P_i &= m_0U_i = \frac{m_0c}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}
\end{aligned}\right\} \quad \text{[সমীকরণ (4.124)]}$$

এখন যদি (4.124) সমীকরণগুলির ডানদিকের রাশিগুলি (4.143) সমীকরণের অনুরূপে ভর ও বেগের গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা হয়, তাহলে আমরা পাই

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

যা (4.47) সমীকরণের সঙ্গে অভিন্ন।

4.13 সারাংশ (Summary)

এই এককে আমরা আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যার অতি গুরুত্বপূর্ণ সূত্রগুলি নিয়ে আলোচনা করেছি। নিউটনের গতিসূত্রগুলিই সনাতন বলবিদ্যার ভিত্তি। এই সূত্রগুলি গ্যালিলিয়ো রূপান্তর দ্বারা অপরিবর্তিত থাকে। কিন্তু বিশেষ আপেক্ষিকতার তত্ত্বে গ্যালিলিয়ো রূপান্তর খাটে না। কারণ এখানে

সময় একটি পরম (absolute) রাশি যা সকল জাড্যিক তন্ত্রেই অভিন্ন। সুতরাং আলোকের আপেক্ষিক বেগ নিরীক্ষকের গতির উপর নির্ভরশীল হবে। কিন্তু মাইকেলসন ও মর্লের পরীক্ষার দ্বারা প্রমাণিত হয় যে আলোকের এরূপ আপেক্ষিক বেগ মাপা যায় না এবং এক্ষেত্রে লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রযোজ্য। আইনস্টাইন সেজন্য তাঁর বিশেষ আপেক্ষিকতার সূত্র এমনভাবে প্রস্তুত করেন, যা থেকে লরেন্টজীয় রূপান্তর-সূত্র নিরূপণ করা যায়। আইনস্টাইন লক্ষ করেন যে তড়িৎ-চুম্বকীয় তত্ত্বে লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রয়োগ করা যায়। এমনকি নিউটনের প্রথম গতিসূত্রও লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তিত থাকে। কিন্তু দ্বিতীয় ও তৃতীয় সূত্র লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা অপরিবর্তিত রাখা যায় না। আইনস্টাইন তখন একটি মৌলিক সিদ্ধান্ত নিলেন যে প্রকৃতির সকল তত্ত্বেই লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রযোজ্য। সেজন্য তিনি নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র থেকে প্রাপ্ত ভরবেগের সংরক্ষণ মেনে নিয়ে এবং সেখানে লরেন্টজীয় রূপান্তর প্রয়োগ করে বেগের উপর ভরের নির্ভরতার সূত্র নির্ণয় করেন। অর্থাৎ এর ফলে এককভাবে ভরের নিত্যতা সূত্র বর্জিত হল এবং ভর একটি আপেক্ষিক রাশি হিসাবে প্রতিষ্ঠিত হল। ভর ও বেগের এই সূত্রকে অবলম্বন করে সনাতন গতীয় শক্তির সূত্র পরিবর্তিত হল এবং ভর ও শক্তির তুল্যতা সূত্র প্রতিষ্ঠিত হল। সে সঙ্গে এও দেখা গেল যে বস্তুর স্থির ভরও তুল্য শক্তির আধার, যার ক্ষয় দ্বারা তুল্য শক্তির উদ্ভব হয় বা বৃদ্ধির দ্বারা তুল্য শক্তি ব্যয়িত হয়। এ থেকে আইনস্টাইন ভর ও শক্তির যুগ্মভাবে নিত্যতা সূত্র বিবৃত করেন। আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির বিভিন্ন সূত্রগুলি বিভিন্ন পরীক্ষার দ্বারা প্রমাণিত হয়েছে এবং এর ফলে তাঁর বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের যথার্থতা প্রশ্নাতীতভাবে প্রতিষ্ঠিত হয়েছে। পরবর্তীকালে ডিরাক তাঁর শক্তির সমীকরণের নূতন সমাধান উদ্ভাবন করে ইলেকট্রনের প্রতিকণা পজিট্রনের তত্ত্ব গঠন করেন। পরে অ্যান্ডারসন পরীক্ষার দ্বারা পজিট্রন আবিষ্কার করে ডিরাকের প্রতিকণার তত্ত্ব প্রমাণিত করেন।

এরপর আইনস্টাইন মিনকওস্কির চতুর্মাত্রিক সমীকরণদ্বারা নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের এমনভাবে সংশোধন করেন, যার ফলে দেখা যায় যে এটিও লরেন্টজীয় রূপান্তর দ্বারা অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং বলা যায় যে আইনস্টাইনের আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যা মিনকওস্কির চতুর্মাত্রিক সমীকরণ ও লরেন্টজীয় রূপান্তরের উপর প্রতিষ্ঠিত।

4.14 প্রশ্নাবলি

আপনি 4 এককটি পাঠ করে কতটা জ্ঞান অর্জন করতে পেরেছেন, তা নিজেই যাতে যাচাই করে দেখতে পারেন, তার জন্য নীচের প্রশ্নগুলি দেওয়া হল। এই প্রশ্নগুলি 'সংক্ষিপ্ত উত্তর' ও 'বিস্তৃত উত্তর' এই দুটি ভাগে বিভক্ত। প্রশ্নগুলির উত্তর আপনি পরের (4.15) অনুচ্ছেদে পাবেন। প্রথমে এই উত্তরগুলি না দেখে নিজেই প্রশ্নগুলির উত্তর লিখুন। পরে আপনার উত্তর (4.15) অনুচ্ছেদে দেওয়া

উত্তর বা ইঙ্গিত অনুসারে মিলিয়ে নিন। যদি আপনার উত্তর ভুল হয়ে থাকে, তবে সঠিক উত্তরটি আবার তৈরি করে নিন। তা হলেই এই এককটি আপনার সম্পূর্ণ আয়ত্ত হয়ে যাবে।

4.14.1 সংক্ষিপ্ত উত্তরের প্রশ্নাবলি

1. নিউটনের প্রথম গতিসূত্রটি বিবৃত করুন। এ থেকে বলের কী সংজ্ঞা দেওয়া যায়?
2. দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী বলের সমীকরণটি লিখুন।
3. বল কি একটি ভেক্টর বা স্কেলার রাশি?
4. দ্বিতীয় সূত্র থেকে বলের দিক কি পাওয়া যায়?
5. জাড্য কাকে বলে?
6. জাড্য কিসের উপর নির্ভর করে ও কিভাবে এর পরিমাপ হয়?
7. নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র কী?
8. ভরবেগ কাকে বলে? এটি কী স্কেলার না ভেক্টর?
9. ভরবেগের সংরক্ষণ কী?
10. সনাতন বলবিদ্যা কাকে বলে?
11. সনাতন বলবিদ্যা কোন্ ক্ষেত্রে প্রযোজ্য?
12. আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যা কাকে বলে?
13. আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যা কোন্ ক্ষেত্রে প্রযোজ্য?
14. জাড্যিক নির্দেশতন্ত্র কী?
15. গ্যালিলিয়ো রূপান্তরের সমীকরণগুলি লিখুন।
16. গ্যালিলিয়ো রূপান্তর সূত্রগুলি কোন্ সূত্রের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য?
17. লরেন্টজীয় রূপান্তর সমীকরণগুলি লিখুন।
18. নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের ক্ষেত্রে কি লরেন্টজীয় রূপান্তর খাটে?
19. আইনস্টাইন ভরের সংরক্ষণ সূত্র ও ভরবেগের সংরক্ষণের সূত্রের মধ্যে কোন্‌টি গ্রহণ করলেন?
20. ভরের নিত্যতা বর্জন করার ফল কী?
21. বেগের উপর ভরের নির্ভরশীলতার সমীকরণটি লিখুন।
22. 'ট্যাকিয়ন' কী?

23. দুজন বিজ্ঞানীর নাম বলুন যাঁরা প্রথম বেগের উপর ভরের নির্ভরশীলতার সূত্র পরীক্ষা করেছিলেন।
24. আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির তুল্যতার সম্বন্ধটি লিখুন।
25. বস্তুর স্থৈতিক শক্তি কী?
26. ভর ও শক্তির যুগ্মভাবে নিত্যতার সূত্র কী?
27. আপেক্ষিকীয় গতীয় শক্তির সমীকরণটি লিখুন।
$\upsilon/c << 1$ হলে এই সূত্রটির কী পরিবর্তন হয়?
28. আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির তুল্যতার সূত্রের পরীক্ষা প্রথম কে করেন?
29. কম্পটন ক্রিয়া কী?
30. শক্তির জড়ত্ব প্রাপ্তি কাকে বলে?
31. পজিট্রন ও ইলেকট্রনের মধ্যে প্রভেদ কী?
32. একটি ইলেকট্রনের স্থৈতিক শক্তি কত?
33. 'ফিসন' ক্রিয়া কাকে বলে?
34. নিউক্লিয়ার ফিউসন কী?
35. বস্তুর মোট শক্তির সমীকরণটি লিখুন।
36. মিনকওস্কির জগতে অবকাশের বর্গের সমীকরণটি লিখুন।
37. অবকাশের বর্গ কি লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয়?
38. 4-বেগ, 4-ভরবেগ ও 4-বলের সংজ্ঞা দিন।

4.14.2 বিস্তৃত উত্তরের প্রশ্নাবলি

1. নিউটনের গতিসূত্র তিনটি বিবৃত করুন এবং বলের সমীকরণটি লিখুন। ভরবেগের সংরক্ষণসূত্র কিভাবে পাওয়া যায়? জাড্যিক নির্দেশতন্ত্র কাকে বলে?
2. গ্যালিলিয়ো রূপান্তর দ্বারা প্রমাণ করুন যে নিউটনের তিনটি গতিসূত্রই অপরিবর্তিত থাকে।
3. গ্যালিলিয়ো ও লরেন্টজীয় রূপান্তর সূত্রগুলি লিখুন। এই দুই প্রকার রূপান্তর সূত্রের মধ্যে পার্থক্যের কারণ কী? কোন্ শর্তে লরেন্টজীয় রূপান্তর সূত্রগুলি গ্যালিলিয়ো রূপান্তর সূত্রের সঙ্গে অভিন্ন হয়?
4. আইনস্টাইন কেন ভরের সংরক্ষণ সূত্র পরিত্যাগ করেন? বেগের উপর ভরের নির্ভরশীলতার সূত্রটি নির্ণয় করুন।

5. বেগের উপর ভরের নির্ভরশীলতার যেসব পরীক্ষা হয়েছে, তার সংক্ষিপ্ত বিবরণ দিন।

6. আইনস্টাইনের ভর ও মোট শক্তির সম্বন্ধে সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

7. আইনস্টাইনের ভর ও শক্তির তুল্যতা সূত্রের সত্যতা নির্ণয়ের একটি পরীক্ষা বর্ণনা করুন।

8. পারমাণবিক বোমা ও হাইড্রোজেন বোমার তত্ত্ব আলোচনা করুন। সূর্য ও নক্ষত্রগুলির শক্তির উৎস কী?

9. বস্তুর মোট শক্তি ও ভরবেগের সম্বন্ধের সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

10. 'বোসন' ও 'ফেরমিয়ন' কণা কী? ইলেকট্রন ও পজিট্রন কণার পার্থক্য কী? পজিট্রনকে প্রতিকণা বলার অর্থ কী? পজিট্রনের তত্ত্ব কিভাবে পাওয়া যায়? এই কণা কিভাবে আবিষ্কৃত হয়? এটি কী ফেরমিয়ন না বোসন?

11. মিনকওস্কির চতুর্মাত্রিক জগত কাকে বলে? এই জগতে দেশকালের সম্বন্ধের সমীকরণ কী? এই জগতকে ছদ্ম-ইউক্লিডীয় দেশ বলার কারণ কী? প্রমাণ করুন যে এই জগতে অবকাশের বর্গ লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয়।

12. 4-বেগ ও 4-ত্বরণের সংজ্ঞা লিখুন এবং 3-বেগ ও 3-ত্বরণের উপাংশগুলির সাপেক্ষে এদের উপাংশগুলির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

13. 4-বলের সংজ্ঞা লিখুন। প্রমাণ করুন যে এটি লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয়।

14. লরেন্টজীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে 4-ভরবেগ সংরক্ষণের সূত্রটি প্রমাণ করুন। 4-ভরবেগ থেকে কিভাবে ভর ও বেগের সম্বন্ধটি নির্ণয় করা যায়?

4.15.1 সংক্ষিপ্ত উত্তর

(4.14.1) অনুচ্ছেদের প্রশ্নাবলীর সংক্ষিপ্ত উত্তর।

1. (a) (4.2) অনুচ্ছেদ দেখুন।

   (b) বাইরে থেকে প্রযুক্ত যে ক্রিয়ার জন্য একটি স্থির বস্তুর গতি শুরু হয় (বা গতির বাধা হ্রাস হয়) বা গতিশীল একটি বস্তুর বেগের মান বা দিকের পরিবর্তন হয় বা বস্তুটি স্থির হয়, তাকেই বল বলে।

2. $F = \frac{dp}{dt} = ma.$

3. ভেক্টর

4. ভরবেগের পরিবর্তন যে দিকে হয় (বা হওয়ার চেষ্টা হয়), বল সেদিকেই ক্রিয়া করে।
5. বস্তুর যে ধর্মের জন্য স্থির বস্তু স্থির থাকতে চায় বা গতিশীল বস্তু তার বেগের মান ও দিক বজায় রাখতে চায়, তাকেই বস্তুর জাড্য বলে।
6. জাড্য বস্তুর ভরের উপর নির্ভর করে। বস্তুর ভর যত বেশি হয়, জাড্যও তত বেশি হয়। এজন্য ভর দ্বারাই জাড্য পরিমাপ করা হয়।
7. অনুচ্ছেদ (4.2) দ্রষ্টব্য।
8. বস্তুর ভর ও বেগের গুণফলকে ভরবেগ বলে। এটি ভেক্টর।
9. ক্রিয়ার পূর্বে এক বা একাধিক বস্তুর মোট ভরবেগ, ক্রিয়ার পর মোট ভরবেগের সমান।
10. গ্যালিলিয়ো ও নিউটন যে বলবিদ্যার সূচনা করেন, তাকেই সনাতন বলবিদ্যা বলে।
11. বস্তুর বেগ যখন আলোকের বেগের তুলনায় উপেক্ষণীয় হয়।
12. আইনস্টাইনের বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের দ্বারা যে বলবিদ্যা তৈরি হয়েছে।
13. আপেক্ষিকীয় বলবিদ্যা বস্তুর যেকোনও বেগের জন্যই প্রযোজ্য। তবে $\upsilon/c << 1$ হলে এ থেকে সনাতন বলবিদ্যার সমীকরণগুলিই পাওয়া যায়। কিন্তু $\upsilon/c \sim 1$ হলে সনাতন বলবিদ্যা খাটে না।
14. যে নির্দেশতন্ত্রে নিউটনের গতিসূত্রগুলি সত্য, তাকেই জাড্যিক নির্দেশতন্ত্র বলে।
15. (4.5) সমীকরণ।
16. সনাতন গতিবিদ্যার সূত্রগুলির ক্ষেত্রে।
17. (4.16) সমীকরণ
18. না।
19. ভরবেগের সংরক্ষণ
20. ভর বেগের উপর নির্ভর করবে। (4.47) সমীকরণ।
21. (4.47) সমীকরণ।
22. (4.5) অনুচ্ছেদ দেখুন।
23. (4.6) অনুচ্ছেদ দেখুন। (কাউফম্যান, বুকেরার)।
24. $E = mc^2$ [সমীকরণ (4.61)]
25. (4.7) অনুচ্ছেদ দেখুন।
26. (4.7) অনুচ্ছেদ দেখুন।
27. (4.7) অনুচ্ছেদ দেখুন।
28. (4.8) অনুচ্ছেদ (ককক্রফ্‌ট ও ওয়ালটন)।
29. (4.8.2) অনুচ্ছেদ দেখুন।

30. (4.8.3) অনুচ্ছেদ দেখুন।

31. (4.8.3) অনুচ্ছেদ দেখুন।

32. $m_0c^2 = 0.511$ MeV [(4.8.3) অনুচ্ছেদ]

33. (4.8.4) অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য।

34. (4.8.5) অনুচ্ছেদ দেখুন।,

35. (4.76) সমীকরণ।

36. (4.95) ও (4.100) সমীকরণ।

37. হ্যাঁ।

38. (4.112), (4.123), (4.128) সমীকরণগুলি দেখুন।

4.15.2 বিস্তৃত উত্তর

4.14.2 প্রশ্নাবলীর বিস্তৃত উত্তর ও উত্তরের ইঙ্গিত।

1. (4.2) অনুচ্ছেদ দেখুন।
2. (4.3) অনুচ্ছেদ দেখুন।
3. (4.3) ও (4.4) অনুচ্ছেদ দুটি দেখুন।
4. প্রশ্নের প্রথম অংশের উত্তর (4.4) অনুচ্ছেদে এবং দ্বিতীয় অংশের উত্তর (4.5) অনুচ্ছেদে পাবেন।
5. (4.6) অনুচ্ছেদ দেখুন।
6. (4.7) অনুচ্ছেদ দেখুন।
7. (4.8) অনুচ্ছেদ দেখুন।
8. (4.8.4) ও (4.8.5) অনুচ্ছেদ দেখুন।
9. (4.9.4) অনুচ্ছেদ দেখুন।
10. (4.9.4) অনুচ্ছেদ দেখুন।
11. (4.10.2) ও (4.10.3) অনুচ্ছেদ দেখুন।
12. (4.10.4) ও (4.10.5) অনুচ্ছেদ দেখুন।
13. (4.10.7) ও (4.11) অনুচ্ছেদ দেখুন।
14. (4.11) ও (4.12) অনুচ্ছেদ দেখুন।

একক 5 ❑ ল্যাগ্রাঞ্জীয় এবং হ্যামিল্টনীয় পদ্ধতি

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

5.2 নিউটনের গতি সমীকরণ এবং এই সমীকরণের অসুবিধা

5.3 স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা, প্রতিবন্ধ গতি

5.4 ডা' ল্যামবার্টের নীতি

5.5 ব্যাপক নির্দেশাঙ্ক ও ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ

5.6 হ্যামিল্টনিয়ান চাক্রিক নির্দেশাঙ্ক ও সংরক্ষণ নীতি

5.7 সারাংশ

5.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

5.9 উত্তরমালা

5.10 পরিশিষ্ট

5.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

আপনারা এতদিন নিশ্চয়ই জেনেছেন যে, নিউটনের গতিসূত্র সংক্রান্ত সমীকরণটি প্রকৃতপক্ষে একটি ভেক্টর অবকলন সমীকরণ এবং এর কার্যকর রূপটি হল—

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{\upsilon}, \vec{t}) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad .... (5.1)$$

গতিবিদ্যা সংক্রান্ত সমস্যার সমাধানের জন্য এই ভেক্টর সমীকরণটির প্রত্যেকটি উপাংশ দুবার সমাকলন করে $\vec{r}$ -কে t-এর একটি অপেক্ষক হিসেবে পেতে হয়। যেহেতু দুবার সমাকলন করতে হয়, সেজন্য প্রতিটি উপাংশের জন্য দুটি করে অনির্দিষ্ট সমাকলন ধ্রুবক আসে। এই ধ্রুবকগুলির মান নির্দিষ্ট করতে হলে আমাদের অতিরিক্ত কিছু উপাত্ত দরকার হয়, তবেই সমস্যাটির পূর্ণ সমাধান সম্ভব হয়। আপনাদের নিশ্চয়ই অজানা নয় যে কোনও নির্দেশতন্ত্রে নিউটনের সমীকরণ ব্যবহার করতে হলে ঐ তন্ত্রে তা ত্বরণের উপাংশ হিসেব করতে হয়। এখন সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র ছাড়া অন্য নির্দেশতন্ত্রে ত্বরণের রাশিমালা বেশ জটিল। এছাড়া প্রতিবন্ধকতা সম্পন্ন গতির (constrained motion) ক্ষেত্রে প্রতিবন্ধ বল নির্ণয় করা অনেক ক্ষেত্রে বেশ কঠিন অথবা অসম্ভব। সুতরাং সেই ক্ষেত্রে প্রতিবন্ধ বল নির্ণয় করতে না পারার দরুণ নিউটনের গতি সমীকরণটির সমাধান অসম্ভব।

তাই আমাদের উদ্দেশ্য হবে এমন কোনও সমীকরণের প্রতিষ্ঠা করা যা যে কোনও নির্দেশতন্ত্রে সরাসরি ব্যবহার করা চলে। এতে গাণিতিক জটিলতা অনেক কমে যাবে। এই এককে আপনারা জানতে পারবেন যে, ল্যাগ্রাঞ্জীয় ও হ্যামিলটনীয় পদ্ধতিতে উচ্চতর গতিবিদ্যায় আমরা ঠিক এই লক্ষ্যেই পৌঁছোতে পেরেছি।

এখানে আর একটা বিষয় বলে নেওয়া দরকার। এই পরিচ্ছেদে এবং পরবর্তী পরিচ্ছেদে আমরা আরো ভেক্টর সূচকের ক্ষেত্রে আইনস্টাইনের সমষ্টিগত প্রকরণ (Einstein's Summation Convention) ব্যবহার করব। এই প্রসঙ্গে কিছু উদাহরণ আপনারা পরিশিষ্টে পাবেন, যাতে প্রয়োজনে আপনাদের পাঠের সুবিধে হয়।

উদ্দেশ্য ঃ

এই এককটি পাঠ করলে আপনি

- নিউটনের গতি সমীকরণের অসুবিধার দিকগুলি বুঝতে পারবেন।
- ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণের প্রয়োজনীয়তার কথা উপলব্ধি করতে পারবেন।
- সূচক চিহ্নের সাহায্যে ভেক্টর সমীকরণ লিখতে পারবেন।
- আইনস্টাইনের সমষ্টিকরণ প্রকরণটি সম্বন্ধে জানতে পারবেন।
- সংরক্ষণ নীতির একটি সাধারণ উপপাদ্য প্রতিষ্ঠা করতে পারবেন।

5.2 নিউটনের গতি সমীকরণ ও এই সমীকরণের অসুবিধা

উচ্চতর গতিবিদ্যায় নিউটনের গতি সমীকরণ (5.1) প্রত্যক্ষভাবে ব্যবহার না করে গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে গতি সমীকরণকে এমন রূপ দেওয়া হয় যার ফলে অনেক জটিল সমস্যা নিউটনের পদ্ধতির তুলনায় অনেক সহজে সমাধান করা যায়। কিন্তু মনে রাখতে হবে কেবলমাত্র সরলীকরণের জন্য এই উচ্চতর গাণিতিক পদ্ধতির উদ্ভাবন হয়নি। নিউটনের গতি সমীকরণের কিছু জটিলতা আছে। সেই বিষয়ে আমরা এখন আলোচনা করব।

আপনারা নিশ্চয়ই জানেন যে নিউটনের গতি সমীকরণের রূপ সমস্ত নির্দেশতন্ত্রে (5.1) সমীকরণের মতো হয় না। যে সমস্ত নির্দেশ তন্ত্রে নিউটনের গতি সূত্রের রূপ (5.1) সমীকরণের মতো হয়, সেই তন্ত্রগুলিকে জ্যাড্যিক নির্দেশতন্ত্র বলা হয়। দেখা গেছে দুটি আপেক্ষিক সমগতিসম্পন্ন নির্দেশতন্ত্রে নিউটনের গতীয় সমীকরণের চেহারা (5.1) সমীকরণের মতো হয়। অর্থাৎ এক্ষেত্রে দুটি তন্ত্রই জাড্যিকতন্ত্র। অর্থাৎ জ্যাড্যিকতন্ত্রের মধ্যে অনন্যতা নেই। জাড্যিক নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে ত্বরণসম্পন্ন

তন্ত্রে অলীক বলের অবতারণা আসে এবং ত্বরণ যত জটিল হয় এই অলীক বলের জটিলতাও তত বাড়ে। আশ্চর্যের কথা এই যে নিউটনের সূত্রে কোথাও তিনি এই জাড্যিকতন্ত্রের গুরুত্বের কথা উল্লেখ করেননি।

এখন জাড্যিকতন্ত্রের সঙ্গে সমত্বরণে গতিশীল অথবা কৌণিক গতিতে গতিশীল কোনও তন্ত্রে (5.1) সমীকরণের রূপ দুটি হবে যথাক্রমে

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - m\vec{a}$$

এবং
$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - m\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) - 2m\vec{w} \times \vec{\upsilon} - m\frac{d\vec{w}}{dt} \times \vec{r}$$

অলীক বলের এই জটিলতা দেখে স্বাভাবিকভাবেই মনে আসে যে যদি আমরা এমন কোনও গাণিতিক কাঠামো খাড়া করতে পারি যা সব ধরনের নির্দেশতন্ত্রে একই ধরনের সমীকরণ দেয়, তবে আমরা নিউটনীয় গতিবিদ্যার পদ্ধতিগত জটিলতা এড়াতে পারি। ভেক্টরের আলোচনার সময় আপনারা নিশ্চয়ই জেনেছেন যে একমাত্র স্কেলার রাশিগুলি নির্দেশতন্ত্র নিরপেক্ষ (invariant)। সুতরাং আমাদের উদ্দেশ্য হবে (5.1) সমীকরণের পরিবর্তে কোনও স্কেলার সমীকরণ খোঁজা যেটি নির্দেশতন্ত্র নিরপেক্ষ হবার সাথে সাথে গতিবিদ্যার সমস্যাগুলিও সমাধান করতে সক্ষম হবে। অলীক বল ছাড়া নিউটনীয় গতিবিদ্যায় আরও কিছু জটিলতা দেখা যায় যেখানে গতি অবাধ নয়, অর্থাৎ যেখানে প্রতিবন্ধক বল ক্রিয়া করে। উচ্চতর গতিবিদ্যার জন্য নির্দেশতন্ত্র নিরপেক্ষ সমীকরণ খোঁজার আগে আমরা প্রতিবন্ধ গতির কথা আলোচনা করব।

5.3 স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা, প্রতিবন্ধ গতি (Degrees of freedom, Constrained motion)

সাধারণভাবে কোনও একটি তন্ত্রের (system) অবস্থান নির্দিষ্টভাবে জানার জন্য ন্যূনতম যে কয়টি প্রাচলের (parameter) প্রয়োজন হয় সেই সংখ্যাকে ঐ তন্ত্রটির স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা বলে। যেমন, একটি মুক্ত বিন্দু-ভরের ক্ষেত্রে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হল তিন (3)। কারণ বিন্দু-ভরের অবস্থান নির্দেশ করতে ত্রিমাত্রিক তলে তিনটি স্থানাঙ্কের প্রয়োজন। কিন্তু বাস্তবে কোনও বস্তু যদি এমনভাবে গতিশীল হয়, যাতে বস্তুটির স্থানাঙ্ক বা গতি কোনও গাণিতিক সম্পর্ক মেনে চলে তবে সেই গতিকে প্রতিবন্ধ গতি বলা হয়।

মুক্ত অবস্থায় তন্ত্রের স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা থেকে প্রতিবন্ধ সমীকরণ সংখ্যার অন্তরফলকে সাধারণভাবে প্রতিবন্ধ গতির স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা বলা হয়। যেমন সরল দোলকের প্রতিবন্ধক সমীকরণটি হল আলম্বন থেকে বিন্দুভরের দূরত্ব সমান থাকা। এর ফলে সরল দোলকের ভরবিন্দুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হল দুই। সাধারণভাবে তাই লেখা যায়, স্বাতন্ত্র সংখ্যা $f = 3n - r$ ... (5.2)

যেখানে n হল ভরবিন্দুর সংখ্যা এবং r হল পরস্পর নিরপেক্ষ প্রতিবন্ধক সংখ্যা। অবশ্য n বা r অসীম হলে (5.2) সমীকরণটি অর্থহীন হয়ে পড়ে। এর একটি উদাহরণ হল দৃঢ়বস্তু। দৃঢ়বস্তুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা আমরা পরবর্তী পরিচ্ছেদে আলোচনা করব। এই প্রসঙ্গে আরও একটি কথার উল্লেখ করা প্রয়োজন। যে সমস্ত প্রতিবন্ধককে বীজগাণিতিক সমীকরণ দ্বারা লেখা যায় সেই সমস্ত প্রতিবন্ধকের দরুণই স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা কমে। কিন্তু যে সমস্ত প্রতিবন্ধককে এক বা একাধিক অসমতা সম্বন্ধে দিয়ে প্রকাশ করা হয় সেই ক্ষেত্রে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যার কোনও হ্রাস হয় না।

উদাহরণস্বরূপ আমরা দুটি ভর-বিন্দুর গতি আলোচনা করতে পারি যাদের মধ্যে এমন একটি কঠিন বন্ধন আছে যার ফলে বিন্দু দুটির পারস্পরিক দূরত্ব সর্বদা ধ্রুবক থাকে। এখানে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হবে পাঁচ কারণ প্রথম বিন্দুর অবস্থান তিনটি স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দিষ্ট হয়ে যাবার পর দ্বিতীয় বিন্দুটির অবস্থান নিরূপণ করতে আর তিনটি স্থানাঙ্কের দরকার হয় না, যে কোনও দুটি স্থানাঙ্কই দ্বিতীয় বিন্দুটিকে নির্দিষ্ট করতে যথেষ্ট।

একটু আগেই আমরা উল্লেখ করেছি অপূর্ণ প্রতিবন্ধকের (non-holonomic Constraints) দরুণ স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হ্রাস পায় না, যেমন একটি গোলাকার আবদ্ধ পাত্রে গ্যাস রাখলে অণুগুলি পাত্রের বাইরে যেতে পারে না। এই প্রতিবন্ধকতার প্রকাশ করা হয়।

$$|\vec{r_i}| \leq \vec{R}$$

এই অসমতা সম্বন্ধ দিয়ে। গোলকের কেন্দ্রস্থল থেকে গ্যাসের i-তম অণুর অবস্থান দূরত্ব $\vec{r_i}$ ভেক্টর দিয়ে প্রকাশ করা হয়েছে এবং $\vec{R}$ হল $\vec{r_i}$-এর দিকে গোলকের ব্যাসার্ধ। এই ক্ষেত্রে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যার কোনওরকম হ্রাস হয় না। অনেক সময় প্রতিবন্ধককে একটি অবকলন সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা যায় ; কিন্তু সেই অবকলন সমীকরণটি সমাকলন করা যায় না। এই ক্ষেত্রেও স্বাতন্ত্র্য সংখ্যার হ্রাস ঘটে না। একটি বৃত্তাকার চাকতি অনুভূমিক সমতলের ওপর গড়িয়ে চললে এই ধরনের প্রতিবন্ধকতা হয়।

গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করলে প্রতিবন্ধকের রূপ নানা ধরনের হতে পারে। প্রতিবন্ধকের এই নানা ধরণের শ্রেণীবিভাগ আমরা নীচের সারণিতে দেব। সমস্ত ধরনের প্রতিবন্ধক নিয়ে আমরা নীচের সারণিতে দেব। সমস্ত ধরনের প্রতিবন্ধক নিয়ে আমরা এই স্বল্প পরিসরে আলোচনা করব না, করবার দরকারও নেই। কারণ, আমরা উচ্চতর গতিবিদ্যায় যে ধরনের সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করতে চলেছি, সেখানে এই প্রতিবন্ধক বলের মান বার না করেও তন্ত্রটির গতি সম্বন্ধে আমরা অনেক কিছু জানতে পারব।

সারণি 5.1 প্রতিবন্ধক বলের শ্রেণিবিভাগ

প্রতিবন্ধক বল

[i] হয় সময় নিরপেক্ষ (scleronomic) নতুবা সময়ের ওপর নির্ভরশীল (rheonomic)

[ii] হয় বীজগাণিতিক সম্পর্ক দ্বারা প্রকাশিতব্য এবং বেগ নিরপেক্ষ (holonomic) নতুবা গাণিতিক সমীকরণ দ্বারা প্রকাশিতব্য নয় এবং বেগ নিরপেক্ষও নয় (non-holonomic)

এবং [iii] হয় সংরক্ষী অর্থাৎ তন্ত্রের মোট শক্তির কোনো হেরফের হয় না এবং প্রতিবন্ধক বল কোনো কার্য করে না। (conservative) নতুবা, অসংরক্ষী, অর্থাৎ তন্ত্রের মোট শক্তির পরিবর্তন হয়, প্রতিবন্ধক বলও কার্য করে (non-conservative)।

অনুশীলনী 5.3

1. একটি হাইড্রোজেন অণুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা কত ?

সূত্র : একটি হাইড্রোজেন অণু দুটি পরমাণু দ্বারা গঠিত এবং তাদের মধ্যে একটি বন্ধন আছে।

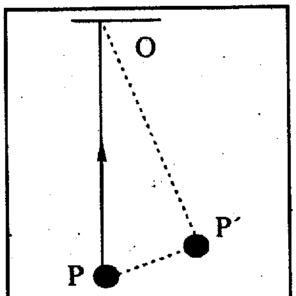
2. একটি গোলকের মধ্যে একটি দণ্ড এমনভাবে আছে যে তার দুটি প্রান্ত গোলকের তল স্পর্শ করে আছে। দৈর্ঘ্য অপরিবর্তনীয় হলে দণ্ডটির স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা কত ?

5.4 ডা' লামবার্টের নীতি (D'Alembert's principle)

আগের সারণিতে আমরা প্রতিবন্ধক বল সম্বন্ধে সাধারণ শ্রেণিবিভাগ করে দেখিয়েছি। এইবার আমরা বিশেষ কিছু প্রতিবন্ধক বল দ্বারা কৃতকার্য আলোচনা করব।

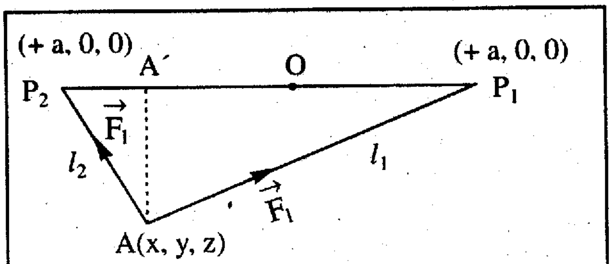
(a) **সরল দোলক :**

[5.1] চিত্রে প্রতিবন্ধক বল হল সুতো কর্তৃক প্রদত্ত টান। PP′ একটি বৃত্তের অংশ। সুতোর টান হল সবসময়ই কেন্দ্র O অভিমুখী, সরণ হল বৃত্তের চাপ বরাবর। কাজেই সরণ ও প্রতিবন্ধক বল পরস্পর লম্ব, ফলে কৃতকার্যের মান শূন্য।



চিত্র 5.1

(b) **দুটি সুতো দিয়ে বিলম্বিত বস্তুকণা :**



চিত্র 5.2

[চিত্র 5.2] চিত্রে ভরবিন্দু A সুতো দিয়ে দুটি বিন্দু P_1 এবং P_2-এর সঙ্গে আটকানো আছে। P_1P_2-কে x-অক্ষ ধরে P_1P_2-র মধ্যবিন্দুকে মূলবিন্দু O ধরা হলে প্রতিবন্ধক সমীকরণ হবে

(i) $(x + a)^2 + y^2 + z^2 = l_1^2$ (ধ্রুবক)

(ii) $(x - a)^2 + y^2 + z^2 = l_2^2$ (ধ্রুবক)

প্রতিবন্ধক বল দুটি সুতোর দৈর্ঘ্য বরাবর কাজ করবে। প্রতিবন্ধক বল দুটি হল,

$$\text{(i)}\ \vec{F_1} = \lambda_1 \hat{i}_1 = \frac{\lambda_1}{l_1}\vec{l_1} = \frac{\lambda_1}{l_1}\left[(x+a)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right] \text{ এবং}$$

$$\text{(ii)}\ \vec{F_2} = \lambda_2 \hat{i}_2 = \frac{\lambda_2 \vec{l_2}}{l_2} = \frac{\lambda_2}{l_2}\left[(x-a)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right]$$

প্রতিবন্ধক সমীকরণ দুটি থেকে পাওয়া যায়,

$$(x+a)dx + y\,dx + z\,dz = 0$$

$$\text{এবং}\quad (x-a)dx + y\,dx + z\,dz = 0$$

প্রতিবন্ধক বল দুটির কৃতকার্য হল

$$\vec{F}_1 . d\vec{r} = \frac{\lambda_1}{l_1}\left[(x+a)dx + yd_y + zd_z\right] = 0$$

$$\vec{F}_2 . d\vec{r} = \frac{\lambda_2}{l_2}\left[(x-a)dx + yd_y + zd_z\right] = 0$$

(c) দৃঢ় বস্তু

যে বস্তুর যে কোনো দুটি কণার ভিতরকার দূরত্ব সর্বদাই সমান থাকে সেই বস্তুকে দৃঢ় বস্তু বলে। i-তম ও k-তম বস্তুকণার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r_i}$ এবং $\vec{r_k}$ হলে দৃঢ় বস্তুর শর্ত হল

$$|\vec{r_i} - \vec{r_k}|^2 = \text{ধ্রুবক}$$

অবকলন করে পাই,

$$(\vec{r_i} - \vec{r_k}).(d\vec{r_i} - d\vec{r_k}) = 0$$

এখন ধরা যাক i-তম বস্তুকণার ওপর k-তম বস্তুকণার অভ্যন্তরীণ প্রতিবন্ধক বল হল $\vec{F}_{ik}$, নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী, আমরা বলতে পারি

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$$

এখন i-তম কণার ওপর মোট বল হবে $\sum\limits_k \vec{F}_{ik}$, তবে এখানে মনে রাখতে হবে বস্তুকণার নিজের ওপর নিজের জন্য কোনও প্রভাব বস্তুকণার গতি পরিবর্তন করতে অক্ষম। তাই সমষ্টি চিহ্নে $k = i$ হবে না। সুতরাং i-তম কণার ওপর কৃতকার্যের পরিমাণ

$$dw_i = \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} . d\vec{r_i}$$

∴ মোট কৃতকার্যের পরিমাণ

$$dw = \sum_i dw_i = \sum_i \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} . d\vec{r_i} = \sum_k \sum_{i \neq k} \vec{F}_{ki} . d\vec{r_k} = -\sum_k \sum_{i \neq k} \vec{F}_{ik} . d\vec{r_k}$$

$$\therefore \quad dw = \frac{1}{2}\left(\sum_i dw_i + \sum_k dw_k\right) = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} \cdot \left(d\vec{r_i} - d\vec{r_k}\right)$$

সাধারণতঃ আমরা যে সমস্ত বলের সাথে পরিচিত, তারা কেন্দ্রস্থ অর্থাৎ i-তম ও k-তম কণার মধ্যে অভ্যন্তরীণ বল, সংযোগকারী ভেক্টর রেখা $(\vec{r_i} - \vec{r_k})$ বরাবর ক্রিয়াশীল। অর্থাৎ

$$\vec{F}_{ik} = \lambda_{ik}(\vec{r_i} - \vec{r_k})$$

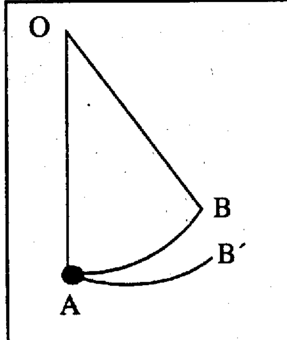
$$\therefore \quad d_w = \frac{1}{2}\sum\sum \lambda_{ik}(\vec{r_i} - \vec{r_k}).(d\vec{r_i} - d\vec{r_k})$$

$$= 0$$

অর্থাৎ প্রতিবন্ধক বল ছাড়া কৃতকার্যের পরিমাপ দৃঢ়বস্তুর বেলাতেও শূন্য।

এই সমস্ত উদাহরণ থেকে মনে হতে পারে তবে কি সমস্ত ক্ষেত্রেই পূর্ণ প্রতিবন্ধক বল দ্বারা কৃতকার্যের পরিমাণ শূন্য ? উত্তর হল না। ঘর্ষণের ক্ষেত্রে সরণ হল বলের বিপরীতমুখী। ঘর্ষণের ক্ষেত্রে তাই অন্ততঃ কৃতকার্যের পরিমাণ শূন্য হয় না। আর একটি সহজ ক্ষেত্রে আমরা দেখাতে পারি যে, কৃতকার্যের পরিমাণ শূন্য নয়।

ধরা যাক, একটি সরল দোলক যে সুতো দিয়ে ঝোলানো হয়েছে, তা স্থিতিস্থাপক। অর্থাৎ দোলকের লম্ব অবস্থানে সুতোর দৈর্ঘ্য সর্বোচ্চ, অন্য অবস্থানে এই দৈর্ঘ্য পরিবর্তনশীল। সুতরাং এক্ষেত্রে দোলকটি AB´ বৃত্তচাপ বরাবর না গিয়ে সুতোর দৈর্ঘ্য পরিবর্তনের জন্য AB বরাবর যাবে [চিত্র 5.3]। যেহেতু গতিপথ এবং সুতো পরস্পরের লম্ব নয়, সুতরাং প্রতিবন্ধক বল এক্ষেত্রে কাজ করবে।



চিত্র 5.3

এই ধরনের প্রতিবন্ধক বল সময়-নিরপেক্ষ নয়। তাই মনে করা হয় এই ধরনের অসুবিধার উৎস সময়ের পরিবর্তন। যদি সময়কে স্থির রাখা যেত, তাহলে সুতোর দৈর্ঘ্যও পরিবর্তিত হত না, এবং দোলকও AB´ চাপ বরাবর (অর্থাৎ সুতোর লম্ব-অভিমুখে) চলত। এই ধরনের সরণকে বলা হয় অলীক সরণ, এবং এই অলীক সরণের কার্যকে বলা হয় অলীক কার্য যার মান শূন্য। নতুন শিক্ষার্থী হিসাবে আপনার কাছে অলীক সরণের মতো অবাস্তব ধারণা বিস্ময়কর মনে হতে পারে, কিন্তু এই অলীক সরণের ধারণা থেকে প্রতিবন্ধক বলের অপনয়ন সম্ভব। নীচের গাণিতিক বিশ্লেষণ থেকে এই ধারণা আরও স্পষ্ট করে বোঝা যাবে।

কোনও তন্ত্রে যে কোনও একটি কণার জন্য নিউটনের গতি সমীকরণ হল,

$$m_{(i)} \frac{d^2 \vec{r}_{(i)}}{dt^2} = \vec{F}_{(i)} = \vec{F}_{(i)}{}^{a} + \vec{F}_{(i)}{}^{c}$$

সূচক i বিশেষ কণাটিকে নির্দেশ করছে। ভেক্টরের কোনও উপাংশ নির্দেশ করছে না সেটা বোঝানোর জন্য i-কে বন্ধনীর ভেতরে রাখা হয়েছে, $\vec{F}_{(i)}$ বলতে দুভাগে ভাগ করে লেখা হয়েছে—$\vec{F}_{(i)}{}^{(c)}$ হল প্রতিবন্ধক বল এবং $\vec{F}_{(i)}{}^{a}$ হল বাকি বল। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, দোলকের উদাহরণের ক্ষেত্রে $\vec{F}_{(i)}{}^{a}$ হবে অভিকর্ষজ বল এবং $\vec{F}_{(i)}{}^{c}$ হবে সুতোর টান। এখন অলীক সরণ $\delta\vec{r}_{(i)}$ ধরে উপরের সমীকরণের স্কেলার গুণ করে পাই,

$$m_{(i)}\frac{d^2\vec{r}_{(i)}}{dt^2}.\delta\vec{r}_{(i)} = \vec{F}_{(i)}{}^{a}.\delta\vec{r}_{(i)} + \vec{F}_{(i)}{}^{c}.\delta\vec{r}_{(i)}$$

সমস্ত বস্তুকণার জন্য এই সমীকরণটি যোগ করে পাই,

$$\sum_i m_{(i)}\frac{d^2\vec{r}_{(i)}}{dt^2}.\delta\vec{r}_{(i)} = \sum_{(i)}\vec{F}_{(i)}{}^{a}.\delta\vec{r}_{(i)} + \sum\vec{F}_{(i)}{}^{c}.\delta\vec{r}_{(i)}$$

যেহেতু ধরে নেওয়া হয়েছে অলীক সরণ দ্বারা কোনও কার্য হয় না, সুতরাং ডানদিকের দ্বিতীয় রাশিটির মান শূন্য হবে।

$$\therefore \quad \sum_i\left[\vec{F}_{(i)}{}^{a} - m_{(i)}\frac{d^2\vec{r}_{(i)}}{dt^2}\right].\delta\vec{r}_{(i)} = 0 \qquad \dots (5.3)$$

এই সমীকরণটি ডা' লামবার্টের নীতি বলে পরিচিত। এই সমীকরণে দেখুন অজানা প্রতিবন্ধক বল আর নেই, কিন্তু বিভিন্ন কণাগুলির গতি সমীকরণ ভিন্ন ভিন্ন ভাবে এই সমীকরণে আর নেই। সব কণার গতি জট পাকিয়ে গেছে। আপনার সুবিধার জন্য ডা' লামবার্টের নীতির সাহায্যে কয়েকটি সমস্যা সমাধানের উদাহরণ দেওয়া হচ্ছে। আশা করা যায় কিছুটা চর্চার পর আপনারা এই আপাত বিস্ময়কর আলোচনার তাৎপর্য উপলব্ধি করতে পারবেন। এই পদ্ধতিতে (5.3) সমীকরণের সঙ্গে প্রতিবন্ধক সমীকরণও ব্যবহার করতে হয়।

উদাহরণ 1. সরল দোলক। এখানে দোলকের গতি একটি সমতলে সীমাবদ্ধ বলে ধরে নেওয়া হয়েছে।

উল্লম্ব অক্ষকে z, দোলকের আলম্বন বিন্দুকে মূলবিন্দু এবং দোলকের গতি $z-x$ সমতল বরাবর হচ্ছে ধরে নিলে [5.3] সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x - \left(mg + m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0 \quad \dots \quad [5.4(a)]$$

আবার প্রতিবন্ধক সমীকরণ থেকে অলীক সরণ কল্পনা করে পাওয়া যায়,

$$x\,\delta x + z\,\delta z = 0 \quad \ldots \quad [5.4(b)]$$

$$z = -\sqrt{l^2 - x^2} = -l\left(1 - x^2/l^2\right)^{1/2} \simeq -l\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2} + \cdots\right)$$

$$\simeq -l \text{ (কারণ } x/l << 1]$$

কাজেই, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$-কে উপেক্ষণীয় ধরা হলে,

[5.4(a)] সমীকরণটি দাঁড়ায়

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x - mg\,\delta z = 0$$

এবং [5.4(b)] সমীকরণকে লেখা যায়,

$$x\delta x - l\delta z = 0 \quad \text{বা,} \quad \delta x = \frac{l}{x}\delta z$$

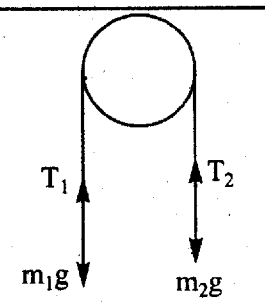
$$\therefore \quad m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{l}{x}\delta z + mg\,dz = 0$$

$$\text{বা,} \quad \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x\right)\delta z = 0 \quad \text{বা,} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0$$

সুতরাং এক্ষেত্রে আমরা সরল দোলকের সুপরিচিত সমীকরণ পাই।

উদাহরণ-2. অ্যাটউড মেশিন (Atwood machines) ঃ

দুটি বস্তুকণা যাদের ভর m_1 ও m_2, টানলে বাড়ে না এমন একগাছা সুতো দিয়ে বেঁধে মসৃণ একটি পুলির ওপর দিয়ে ঘোরানোর তন্ত্রের নামই অ্যাটউড মেশিন। অভিকর্ষ ক্রিয়ার ফলে কণা দুটির ত্বরণ বার করতে হবে।



চিত্র 5.4

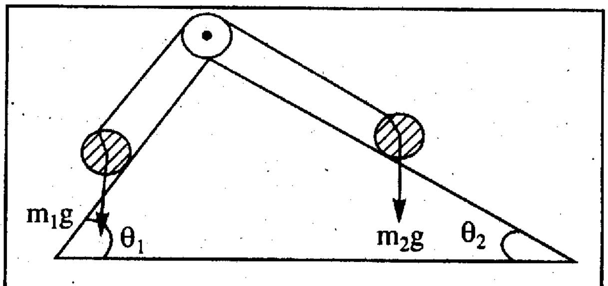
এখানে প্রযুক্ত বল $m_1\vec{g}$ ও $m_2\vec{g}$ তারের টান $\vec{T}_1$ ও $\vec{T}_2$ বাধাজনিত বল। কিন্তু ডা' লামবার্টের সূত্রের প্রয়োগ করলে এই প্রতিবন্ধক বলের কোনো প্রয়োজন নেই। কণা দুটির ত্বরণ $\vec{a}_1$ ও $\vec{a}_2$ হলে (5.3) সমীকরণ অনুসারে

$$(m_1\vec{g} - m_1\vec{a}_1).\delta\vec{r}_1 + (m_2\vec{g} - m_2\vec{a}_2).\delta\vec{r}_2 = 0 \quad \ldots\ [(5.5(a)]$$

এখানে কল্পিত অলীক সরণ $\delta\vec{r}_1$ এবং $\delta\vec{r}_2$ ওপর দিকে ধনাত্মক ধরা হয়েছে। সুতোর দৈর্ঘ্য বদলায় না। ফলে $\delta\vec{r}_1 = -\delta\vec{r}_2$ এবং $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$.

$$\therefore\ \vec{a}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{g} \quad \ldots [5.5(b)]$$

উদাহরণ-3. টানলে বাড়ে না এমন একগাছি সুতোর দুই মাথায় m_1, m_2 ভরের দুটি কণা বেঁধে θ_1, θ_2 কোণে আনত দুটি মসৃণ তলের উপর রাখা হয়েছে। কণা দুটির গতি পর্যালোচনা করা যাক।



চিত্র 5.5

এক্ষেত্রে (5.3) সমীকরণটি হল,

$$(m_1\vec{g} - m_1\ddot{\vec{r}}_1).\delta\vec{r}_1 + (m_2\vec{g} - m_2\ddot{\vec{r}}_2).\delta\vec{r}_2 = 0$$

একে লেখা যায়

$$(m_1 g\sin\theta_1 - m_1\ddot{r}_1)\delta r_1 + (m_2 g\sin\theta_2 - m_2\ddot{r}_2)\delta r_2 = 0$$

যেহেতু সুতোটি অপ্রসারণীয়, $r_1 + r_2 =$ ধ্রুবক অর্থাৎ $\delta r_1 = -\delta r_2$ এবং $\ddot{r}_1 = \ddot{r}_2$ এই দুটি শর্ত ওপরের সমীকরণে বসালে

$$\ddot{r}_1 = \frac{m_1 g\sin\theta_1 - m_2 g\sin\theta_2}{m_1 + m_2} \quad \ldots [5.5(c)]$$

অনুশীলনী 5.4

1. উল্লম্ব তলে r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার একটি তারের ওপর m ভরের একটি কণা বাধাহীনভাবে গড়িয়ে পড়ছে। যদি তারের তলটিকে $x-y$ তল ধরা হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $y\ddot{x} - x\ddot{y} + gx = 0$.

2. বিস্তার যদি অতি ক্ষুদ্র না হয় তবে সরল দোলকের গতি কিরূপ হবে ডা' লামবার্টের নীতির সাহায্যে আলোচনা করুন।

5.5 সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক ও ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ (Generalised co-ordinates and Lagrange's Equation)

দেখা গেছে যে কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র ব্যবহার করে বস্তুকণার গতি নিরূপণ সর্বদা সুবিধাজনক নয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, কেন্দ্রগ বলের ক্ষেত্রে গতি সমীকরণ বিশ্লেষণের সময় কার্টেজীয় তন্ত্রের চেয়ে

গোলীয় ধ্রুবীয় (spherical polar) নির্দেশতন্ত্রের ব্যবহার অনেক সুবিধাজনক। পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে দেখা গেছে যে পূর্ণ প্রতিবন্ধক থাকলে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা কমে যায়, ফলে কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্কগুলি আর পরস্পর, নিরপেক্ষ থাকে না। কোনো কোনো ক্ষেত্রে এই অপ্রয়োজনীয় রাশিগুলি অযথা জটিলতার সৃষ্টি করে। শুধু তাই নয়, ক্ষেত্র বিশেষে আলোচনা প্রায় অসম্ভব হয়ে দাঁড়ায়। তাই আমরা এখানে যে উচ্চতর গণিত আলোচনা করতে চলেছি, সেখানে নির্দেশাঙ্কের উপর কেবল দুটি শর্ত আরোপ করব—

(i) এদের সংখ্যা আলোচ্য তন্ত্রের স্বাতন্ত্র্য সংখ্যার সমান হবে।

(ii) এদের প্রত্যেকে পরস্পরের নিরপেক্ষ হবে।

উপরের দুটি শর্ত মেনে যে গাণিতিক নির্দেশাঙ্ক আমরা ব্যবহার করব সেগুলির বাস্তব বা জ্যামিতিক তাৎপর্য না থাকলেও চলবে। এরকম নির্দেশাঙ্কের নামই সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক (generalised co-ordinates)। কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্ক এবং এই সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্কগুলি পরস্পরের অপেক্ষক হয় এবং এই নির্দেশাঙ্কগুলির অঞ্চল (domain) সবসময়ই $-\infty$ থেকে $+\infty$ হয়। $q_1, q_2, \ldots q_r$ দিয়ে সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্কগুলি চিহ্নিত করা হলে (r হল তন্ত্রের স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা) এবং কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্কগুলিকে $x_1, x_2, \ldots x_{3n}$ (n হল তন্ত্রের কণার সংখ্যা)-দ্বারা লেখা হলে

$$x_i = x_i(q_k, t) \quad \left.\begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,3n \\ k = 1,2,\ldots r \end{array}\right\} \quad \ldots.\ (5.6)$$

কোনও পূর্ণ প্রতিবন্ধক না থাকলে $r = 3n$, অন্যথায় $r = 3n - p$ যেখানে p হল তন্ত্রের পূর্ণ প্রতিবন্ধক সংখ্যা। x_i গুলি প্রত্যক্ষভাবে সময়ের উপর নির্ভরশীল হবে যদি পূর্ণ প্রতিবন্ধকটি সময়ের উপর নির্ভরশীল হয়, অথবা q নির্দেশতন্ত্র ও x নির্দেশতন্ত্রের মধ্যে আপেক্ষিক বেগ থাকে।

(5.6) সমীকরণের অবকলন রূপ থেকে পাওয়া যায়,

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt$$ [এখানে k হল মূল সূচক (dummy index) যা একই রাশিতে দুবার ব্যবহৃত হওয়ায় আইনস্টাইনের রীতিতে ওই রাশির সমষ্টিকরণ বোঝাচ্ছে।]

$$\therefore \quad v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad \ldots.\ (5.7)$$

$\dot{q}_k$-গুলিকে বলা হয় সাধারণীকৃত বেগ (generalised velocity)। $\frac{dx_i}{dt}$ এবং $\frac{\partial x_i}{\partial t}$-এর মধ্যে পার্থক্য লক্ষ করুন— দুটো কিন্তু এক মানের নয়। এছাড়া একটি বিষয়ও লক্ষ করা দরকার। (5.7) সমীকরণে $\frac{\partial}{\partial q_k}$ সংকারক (operator) লেখা হলেও $\frac{\partial}{\partial x_k}$ সংকারকটি অর্থপূর্ণ নয়। কারণ প্রতিবন্ধকতার

জন্য x_k গুলি পরস্পর নিরপেক্ষ নয়। অর্থাৎ (5.6) সমীকরণের বিপরীত রূপ $q_j = q_j(x_k, t)$ থেকে $\dot{q}_j = \frac{\partial q_j}{\partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial q_j}{\partial t}$ জাতীয় সমীকরণ লেখা যায় না।

এখন কণাগুলির মোট গতীয় শক্তি $T = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \upsilon_\alpha^2 = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\upsilon_\alpha)_k (\upsilon_\alpha)_k$ ..... [5.8(a)]

এখানে α-কে কণার সূচক হিসাবে নির্দেশ করা হয়েছে এবং k হল ভেক্টর সূচক। উভয় সূচকই দুবার বা ততোধিক ব্যবহৃত হওয়ার ফলে সমষ্টিকরণ বোঝাচ্ছে। আমরা এই অনুচ্ছেদে গ্রিক অক্ষর দ্বারা কণার সূচক এবং রোমান অক্ষর দ্বারা ভেক্টর সূচক বোঝাব। কিন্তু মূল সূচকের অক্ষর ইচ্ছামতো পরিবর্তন করা যায়। সেজন্য পরবর্তী অনুচ্ছেদে আমরা ঠিক বিপরীত অক্ষর ব্যবহার করব। আমাদের আশা এর ফলে আপনি ভেক্টরের সূচক প্রকরণে (index notation) পারদর্শী হয়ে উঠবেন।

$$\therefore T = \sum \frac{1}{2} m_\alpha \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_j}{\partial t}\right)_\alpha \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial x_j}{\partial t}\right)_\alpha$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_\alpha \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\right)_\alpha \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_m}\right)_\alpha (\dot{q}_k)_\alpha (\dot{q}_m)_\alpha + \sum m_\alpha \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\right)_\alpha \left(\frac{\partial x_j}{\partial t}\right)_\alpha (\dot{q}_k)_\alpha$$

$$+ \sum \frac{1}{2} m_\alpha \left(\frac{\partial x_j}{\partial t}\right)_\alpha^2 \quad \text{... [5.8(b)]}$$

এখানে দেখা যাচ্ছে, গতীয় শক্তির রাশিমালার মধ্যে বেশ জটিল কিছু পদ এসে গেছে। এর মূল কারণ হল দুটি নির্দেশতন্ত্রের মধ্যে যদি কোনও আপেক্ষিক বেগ থাকে তাহলে গতীয় শক্তির মান সেই দুটি নির্দেশতন্ত্রে সমান নয়।

[5.8(b)] সমীকরণে দেখা যাচ্ছে যে T কতকগুলি চলরাশি q_j, $\dot{q}_j$, $\frac{\partial x_j}{\partial t}$ এবং t-এর ওপর নির্ভরশীল। আমরা এগুলিকে পরস্পর নিরপেক্ষ চলরাশি বলে ধরে নেব। [5.8(b)] সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p} = \sum \frac{1}{2}\left(m \frac{\partial x_j}{\partial q_m}\frac{\partial x_j}{\delta q_m}\delta_{pk}\,\dot{q}_m + m\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\frac{\partial x_j}{\partial q_m}\dot{q}_u\,\delta p_m \right) \qquad [5.9(a)]$$

$$+ \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_k}\frac{\partial x_j}{\delta t}\delta k_p$$

[সমষ্টিকরণ বন্ধনীর মধ্য থেকে আমরা কণার সূচক α-কে উঠিয়ে দিলেও সমষ্টিকরণ বন্ধনী সমস্ত কণাগুলির সমষ্টি বোঝাচ্ছে। রোমান ভেক্টর সূচকগুলি পুনরাবৃত্তি হলে সমষ্টিকরণ এমনিতেই বোঝাবে বলে আগেই বলা হয়েছে।]

$$\therefore\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p} = \sum \frac{1}{2} m\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_p}\frac{\partial x_j}{\partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial x_j}{\partial q_k}\frac{\partial x_j}{\partial q_p}\dot{q}_k\right) + \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\frac{\partial x_j}{\partial t}$$

$$= \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\frac{\partial x_j}{\partial t}$$

$$= \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_j}{\partial t}\right)$$

$$= \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\upsilon_j \quad \therefore\ [5.9(b)]$$

অতএব $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p}\right) = \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\dot{\upsilon}_j + \sum m\upsilon_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_p}\right) \quad \ldots \quad [5.10(a)]$$

এখন $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_p}\right) = \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_m \partial q_p}\dot{q}_m + \frac{\partial^2 x_j}{\partial t\,\partial q_p}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_p}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial x_j}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial \upsilon_j}{\partial q_p} \quad \ldots.\ [5.10(b)]$$

অতএব [5.10(a)] সমীকরণটি এখন দাঁড়ায়

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p}\right) = \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\dot{\upsilon}_j + \sum m\upsilon_j \frac{\partial \upsilon_j}{\partial q_p}$$

$$= \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\dot{\upsilon}_j + \frac{1}{2}\sum m \frac{\partial}{\partial q_p}(\upsilon_j\, \upsilon_j)$$

$$= \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\dot{\upsilon}_j + \frac{\partial T}{\partial q_p}$$

$$\therefore \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_p} = \sum m \frac{\partial x_j}{\partial q_p} \dot{\upsilon}_j \qquad \text{.. [5.10(c)]}$$

সমীকরণ [5.10(c)]-কে আমরা সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক q_p-র কল্পিত সরণ δq_p দিয়ে গুণ করব এবং একই সূচকের পুনরাবৃত্তি হবার ফলে সমষ্টিকরণ প্রকরণ কার্যকর হবে। এভাবে পাওয়া যায়,

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_p}\right]\delta p_q = \sum m \dot{\upsilon}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\delta q_p = \sum m\dot{\upsilon}_j \,\delta x_j \qquad \text{[5.10(d)]}$$

আপনি লক্ষ করুন যে এক্ষেত্রে কল্পিত সরণ

$$\delta x_j = \frac{\partial x_j}{\partial q_p}\delta q_p \neq \frac{\delta x_j}{\delta q_k} dq_k + \frac{\delta x_j}{\delta t} dt$$

আবার, $\sum m\dot{\upsilon}_j \,.\, \delta x_j = F_j \dfrac{\delta x_j}{\delta q_p}\delta q_p = \phi_p \delta_q \quad \text{... [5.10(e)]}$

এখানে $\phi_p = F_j \dfrac{\partial x_j}{\partial q_p}$ -কে বলা হয় সাধারণীকৃত বল।

সুতরাং এখন, ডা' লামর্বাটের নীতিতে [সমীকরণ (5.3)] [5.10(d)] ও [5.10(e)] এবং (5.10c) সমীকরণ ব্যবহার করে লেখা যায়,

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_p} - \phi_p\right]\delta p_q = 0 \qquad \text{... [5.10(f)]}$$

(5.3) সমীকরণে কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্ক ব্যবহার করা হয়েছিল। প্রতিবন্ধকতার জন্য কল্পিত সরণ পরস্পর নিরপেক্ষ ছিল না। সেজন্য ডা' লামবার্টের নীতিতে $\delta\,\vec{r}$ -এর প্রত্যেক উপাংশের সহগর মান আলাদা করে শূন্য হবে সেকথা বলা যায়নি। কিন্তু সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্কগুলিকে আমরা প্রথম থেকেই পরস্পরের নিরপেক্ষ করে নিয়েছি। কাজেই [5.10(f)] সমীকরণে δp_q-র সহগগুলি আলাদা করে শূন্য হবে অর্থাৎ

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p}\right] - \frac{\partial T}{\partial q_p} - \phi_p = 0 \qquad \text{.... [5.11(a)]}$$

এরকম r সংখ্যক সমীকরণ আমরা পাব। যেখানে r হল তন্ত্রের স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা। সচরাচর আমরা সংরক্ষী বলের আলোচনা করে থাকি যে বল একটি বিভবের অবকল রূপে লেখা যায়।

বিভবকে V লিখে আমরা বলতে পারি,

$$\phi_p = -\frac{\partial V}{\partial q_p} \qquad \text{.... [5.11(b)]}$$

এবং $-\delta V = \phi_k \delta q_k = F_j \delta x_j$ একটি যথার্থ অবকল (perfect differential)। [5.11(a)] সমীকরণকে এবার লেখা যাবে,

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p} - \frac{\partial (T-V)}{\partial p_q}\right] = 0 \qquad \text{... [5.11(c)]}$$

যদি ধরা হয় যে স্থিতিশক্তি V বেগ $\dot{q}_p$-এর ওপরে নির্ভর করে না তবে ওপরের সমীরণটিকে একটু সাজিয়ে লেখা যায়,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_p}\right) - \frac{\partial £}{\partial q_p} = 0 \qquad \text{... [5.12(a)]}$$

যেখানে $£ \equiv T - V$ ... [5.12(b)]

£ অপেক্ষকটিকে বলা হয় লাগ্রাঞ্জিয়ান (Lagrangian) এবং [5.12(a)] সমীকরণটিকে বলা হয় ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ।

এই সমীকরণ ব্যবহার করবার আগে আমরা আপনাকে নিউটনের সমীকরণের সঙ্গে ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণের যোগসূত্র সম্বন্ধে একটি পরিষ্কার ধারণার প্রয়োজনীয়তা সম্বন্ধে আলোকপাত করব। এই সমীকরণের সঙ্গে নিউটনের সমীকরণের যোগসূত্র হল ডা' লামবার্টের নীতির মাধ্যমে। আবার ডা' লামবার্টের সমীকরণে ব্যবহৃত x_i হল একটি জাড্য নির্দেশতন্ত্রের নির্দেশাঙ্ক। কিন্তু সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক সম্বন্ধে কোনো তন্ত্রের অঙ্গীভূত হবার শর্ত আরোপ করা হয়নি। কাজেই q_p-দের জাড্য তন্ত্রের নির্দেশাঙ্ক হবার কোনও বাধ্যবাধকতা নেই। শুধু আমাদের বিশ্লেষণে গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির মান নির্দিষ্ট হবে একটি জাড্য নির্দেশতন্ত্রের মাধ্যমে।

সাধারণীকৃত বেগ ও বলের সংজ্ঞা দেওয়া হলেও সাধারণীকৃত ভরবেগের সম্বন্ধে আমরা কিন্তু এখনও কিছু বলিনি। সাধারণীকৃত ভরবেগের সংজ্ঞা হল $p_k = \frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}$ [5.12(c)]। এরকম অদ্ভুত সংজ্ঞার কারণ ক্রমশ পরিষ্কার হবে। ভরবেগের এই সংজ্ঞা [5.12(a)] সমীকরণে ব্যবহার করলে দাঁড়ায় $\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial £}{\partial q_p}$. এই সমীকরণের সঙ্গে নিউটনের সমীকরণের সাদৃশ্য $\left(\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$ সুস্পষ্ট।

আর একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়ের উল্লেখ আমরা এখানে করব। সেটি হল নিউটনের সমীকরণ $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi$ একটি ভেক্টর সমীকরণ এবং ভেক্টরের সংজ্ঞা অনুযায়ী একটি ভেক্টর সমীকরণ কোনো একটি নির্দেশতন্ত্রে সিদ্ধ হলে সব নির্দেশতন্ত্রেই সিদ্ধ হবে। অথচ আমরা জানি এই সমীকরণটি সরাসরি গোলীয় তন্ত্রে ব্যবহার করা যায় না। এই আপাত বিস্ময়কর পরিস্থিতির কারণ হল আমরা যখন অকার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র নিয়ে আসি তখন উপরের সমীকরণটিকে ঠিক ভেক্টর সমীকরণ বলা চলে না। সমীকরণের বাঁ পাশের রাশিটি বিষম পরিবর্তী ভেক্টর (contravariant vector) এবং ডান পাশের রাশি সমপরিবর্তী ভেক্টর (covariant vector)। তাদের অকার্টেজীয় তন্ত্রে রূপান্তর বিভিন্ন রকম। নিউটনের সমীকরণের এই ত্রুটি ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণে নেই। t একটি স্কেলার হওয়ায় q_k, $\dot{q}_k$ বিষম পরিবর্তী ভেক্টর। যেহেতু ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান £ একটি স্কেলার $\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}$ এবং $\frac{\partial £}{\partial q_k}$ দুটি সমপরিবর্তী ভেক্টর। সেজন্যই নির্দেশাঙ্ক নির্বিশেষে এই সমীকরণ ব্যবহার করা চলে।

ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণের ব্যবহারিক প্রয়োগ

উদাহরণ 1. একটিমাত্র বস্তুকণার গতি

(a) **কার্টেসীয় নির্দেশতন্ত্র অনুযায়ী**

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0.\ -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x,\ -\frac{\partial V}{\partial y} = F_y,\ -\frac{\partial V}{\partial z} = F_z$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y},\ \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},\ \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial V}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial V}{\partial \dot{z}} = 0$$

সুতরাং গতীয় সমীকরণ হল,

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x,\ \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y,\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z \qquad \text{.... [5.13(a)]}$$

এই সমীকরণগুলি নিউটনের গতীয় সমীকরণ।

(b) ধ্রুবীয় নির্দেশতন্ত্র অনুযায়ী (plane polar co-ordinates)

এই তন্ত্র অনুযায়ী $x = r\cos\theta$

এবং $y = r\sin\theta$

$$\therefore \quad \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta$$

$\therefore$ গতিশক্তি $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

ল্যাগ্রাঞ্জের r-সমীকরণটি হল,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial £}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial £}{\partial r}\right) = 0$$

বা, $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

বা, $$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\upsilon}^2 = -\frac{\partial V}{\partial r} = F_r$$

বা, $$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r \qquad [5.13(b)]$$

θ সমীকরণটি হল,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial £}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial £}{\partial \theta} = 0$$

বা, $$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$$

বা, $$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = -\frac{\partial v}{\partial \theta} = rF_\theta \qquad .... [5.13(c)]$$

উদাহরণ-2. সূর্যের মহাকর্ষক্ষেত্রে গ্রহের আবর্তন।

যেহেতু স্থিতিশক্তি V কেবলমাত্র r নির্দেশাঙ্কের ওপর নির্ভর করে আমরা গোলীয় নির্দেশাঙ্ক ব্যবহার করব।

এই নির্দেশাঙ্কে x, y, z এর সাথে r, θ, φ-এর রূপান্তর সমীকরণগুলি হল

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta\cos\phi$$
$$z = r\sin\theta\sin\phi$$

$\therefore$ গতিশক্তি $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\dot{\varphi}^2)$

ল্যাগ্রাঞ্জের r-সমীকরণটি হল

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial £}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial £}{\partial r} = 0$$

বা, $\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - m r\dot{\theta}^2 - m r \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$ ... [5.14(a)]

θ সমীকরণটি হল—

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - mr^2 \sin\theta\cos\theta\, \dot{\phi}^2 = 0 \quad \ldots \quad [5.14(b)]$$

এবং ϕ—সমীকরণ .

$$\frac{d}{dt}(mr^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2) = 0 \quad \ldots \quad [5.14(c)]$$

[5.14(c)] সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}$ = ধ্রুবক = h (ধরা যাক) ... [5.14(d)]

এখন এই ধ্রুবকটি এমনভাবে নিতে পারি যে, $\dot{\theta}$-র মান যখন শূন্য তখন θ-র মান $\frac{\pi}{2}$। তাহলে [5.12(a)] সমীকরণ থেকে দেখা যায় সেক্ষেত্রে $\ddot{\theta}$ এবং θ-র সমস্ত উচ্চতর অবকলজ (সময়ের সাপেক্ষে) (all higher order derivatives of θ with respect to time) শূন্য হবে। অর্থাৎ θ চিরকালই $\frac{\pi}{2}$ থেকে যাবে। যেহেতু $\theta = \frac{\pi}{2}$ নিরক্ষীয় সমতল নির্দেশ করে। এই সিদ্ধান্তের তাৎপর্য হল এক্ষেত্রে গতিপথ সর্বদাই একটি সমতলে থাকবে। $\theta = \frac{\pi}{2}$ হওয়ায় [5, 14(d)] সমীকরণের চেহারা হবে—

$r^2\dot{\varphi} = h$ [5.14(e)]

$\dot{\theta} = 0$ এবং $\theta = \frac{\pi}{2}$ [5.14(a)] সমীকরণে বসালে পাওয়া যায়,

$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \frac{dv}{dr} = 0$ ... [5.14(f)]

এই সমীকরণের তাৎপর্য বেশ সরল। $mr\dot{\phi}^2$ রাশিটি অপকেন্দ্র বল এবং $-\frac{dv}{dr}$ বিভব ক্ষেত্র জনিত বল।

5.6 হ্যামিল্টনীয়, চাক্রিক নির্দেশাঙ্ক ও সংরক্ষণ নীতি (Hamiltonian, Cyclic Co-ordinates and Conservation principles)

কোনও তন্ত্রের ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান যদি সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক q_k, সাধারণীকৃত বেগ $\dot{q}_k$ এবং সময় t-এর উপর নির্ভরশীল হয় তবে অবকল গণিতের উপপাদ্য অনুযায়ী লেখা যায়,

$$\frac{d£}{dt} = \frac{\partial £}{\partial t} + \frac{\partial £}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k$$

এখন ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ অনুযায়ী, $\frac{\partial £}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}\right)$

$$\therefore \frac{d£}{dt} = \frac{\partial £}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}\frac{d}{dt}(\dot{q}_k)$$

$$= \frac{\partial £}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)$$

বা, $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - £\right) = -\frac{\partial £}{\partial t}$$

যদি তন্ত্রটির ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানে সময়ের প্রত্যক্ষ নির্ভরতা না থাকে তবে,

$\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - £$ রাশিটি একটি সংরক্ষিত রাশি

সাধারণীকৃত ভরবেগ $p_k = \frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}$ ধরা হয় এবং $(p_k \dot{q}_k - £)$ এই সংরক্ষিত রাশিটিকে বলা হয় তন্ত্রের হ্যামিল্টনিয়ান।

$$\therefore \; H = p_k \dot{q}_k - £ \quad .... \quad [5.15]$$

এখানে আমরা সাধারণীকৃত ভরবেগের সংজ্ঞার একটা উৎস সন্ধান করব। ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান সমীকরণ থেকে দেখা যায়,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_p}\right) = \frac{\partial £}{\partial q_p} = -\frac{\partial V}{\partial q_p}$$

[পরিমিত গতিশক্তির রাশিমালায় T, q_p-এর ওপর প্রত্যক্ষভাবে নির্ভরশীল নয়]

উপরের সমীকরণে ডানদিকের রাশিটি একটি সংরক্ষী বল। সুতরাং তন্ত্রে বল প্রযুক্ত না হলে $\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_p}$ রাশিটি সংরক্ষিত হবে। নিউটনের সূত্রানুযায়ী বলের বিহনে ভরবেগ সংরক্ষিত হয়। তাই $\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_p}$ রাশিটিকে আমরা ভরবেগ বলব। অবশ্য এই রাশিটি কেবলমাত্র রৈখিক ভরবেগ নয়, বিভিন্ন সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্কের জন্য $\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_p}$ রাশিটি সাধারণীকৃত ভরবেগ নির্দেশ করবে। যেমন $\frac{\partial £}{\partial \dot{\theta}}$ রাশিটি কৌণিক ভরবেগ নির্দেশ করবে।

কখনও কখনও এমন ঘটে যে ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানে কোনও একটি নির্দেশাঙ্ক q_k নিজে অনুপস্থিত, কিন্তু তার সময়ের সাপেক্ষে অবকলজ আছে। তখন সেই নির্দেশাঙ্ককে চাক্রিক বা উপেক্ষণীয় (cyclic or ignorable) বলা হয়।

ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ [5.12(a)] থেকে এরকম উপেক্ষণীয় নির্দেশাঙ্কের ক্ষেত্রে পাওয়া যায়,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

$$\text{সুতরাং} \quad \frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k} = p_k = \text{ধ্রুবক} \qquad [5.16]$$

তাই সাধারণভাবে বলা হয় যদি q_k একটি চাক্রিক নির্দেশাঙ্ক হয়, তবে সেই নির্দেশাঙ্কের চাক্রিক প্রকৃতি ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানে একটি প্রতিসাম্য (symmetry) নির্দেশ করে এবং এই প্রতিসাম্যের জন্য তার প্রতিষঙ্গী (corresponding) সাধারণীকৃত ভরবেগ সংরক্ষিত হয়।

এই সিদ্ধান্তকে একটি উপপাদ্যের আকারে প্রথম প্রকাশ করেন মহিলা গাণিতবিদ এমি নোয়েদার (Emmy Noether) এবং এটি নোয়েদারের উপপাদ্য হিসাবে পরিচিত। উপপাদ্যের বিবৃতিটি এরকম ঃ

যদি ল্যাগ্রাঞ্জীয়ানে এমন কোনও চলরাশি (variable) η থাকে যে η'র অণু-পরিমাণ পরিবর্তনে ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানের কোনও পরিবর্তন হয় তবে একটি সংরক্ষণ সূত্র থাকবে।

5.7 হ্যামিল্টনের সমীকরণ

(5.15) নং সমীকরণ থেকে হ্যামিল্টনীয়ান H-এর সংজ্ঞা আমরা পেয়েছি।

$$H = p_k \dot{q}_k - £ \qquad \ldots [5.15]$$

সাধারণত $\dot{q}_k$-গুলিকে p_k, q_k-এর মাধ্যমে প্রকাশ করে H-কে কেবলমাত্র p_k, q_k এবং t-এর অপেক্ষক হিসেবে লেখা হয়। অর্থাৎ $H = H(p_k, q_k, t)$

$$\therefore \quad dH = \frac{\partial H}{\partial q_l} dq_l + \frac{\partial H}{\partial q_l} dp_l + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad \ldots . [5.17]$$

আবার সমীকরণ (5.15) থেকে পাওয়া যায়,

$$\begin{aligned} dH &= p_k d\dot{q}_k + \dot{q}_k dp_k - d£ \\ &= p_k d\dot{q}_k + \dot{q}_k dp_k - \frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial £}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial £}{\partial t} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial £}{\partial \dot{q}_l} d\dot{q}_l + \dot{q}_l dp_l - \frac{\partial £}{\partial \dot{q}_l} d\dot{q}_l - \frac{\partial £}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial £}{\partial t} dt$$

$$= \dot{q}_l \, dp_l - \frac{\partial £}{\partial q_l} dq_l - \frac{\partial £}{\partial t} dt \quad .... \; (5.18)$$

সমীকরণ (5.17) এবং (5.18) তুলনা করে পাওয়া যায়,

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} \quad ... \; [5.19(a)]$$

$$-\frac{\partial £}{\partial q_l} = \frac{\partial H}{\partial q_l} \quad ... \; [5.19(b)]$$

$$-\frac{\partial £}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad .... \; [5.19(c)]$$

[5.19(b)] সমীকরণটিতে ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ ব্যবহার করে পাওয়া যায়,

$$\frac{\partial H}{\partial q_l} = -\frac{\partial £}{\partial q_l} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial £}{\partial \dot{q}_l} = -\frac{dp_l}{dt} = -\dot{p}_l \quad .... \; [5.19(d)]$$

[5.19(a)] এবং [5.19(d)] সমীকরণ দুটিকে হ্যামিল্টনের সমীকরণ বলে।

যদি p_l, q_l, t-এর অপেক্ষক হিসেবে H জানা থাকে তবে [5.19(a)] এবং [5.19(d)] সমীকরণ দুটি p_l, q_l গুলির সাথে তাদের সময়ের সাপেক্ষে অবকলজদের সম্পর্ক প্রকাশ করবে। আগে ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণে আমাদের n সংখ্যক দ্বিতীয় ক্রমের অবকল সমীকরণের সাহায্যে গতিবিদ্যার সমস্যার সমাধান করতে হত এখন সেখানে 2n সংখ্যক প্রথম ক্রমের অবকল সমীকরণ এসেছে। একদিকে যেমন সমীকরণ সরলতর হয়েছে (ক্রম কমে যাবার ফলে) অন্যদিকে তেমনি সমীকরণের সংখ্যা বেড়ে যাবার ফলে জটিলতা আসতে পারে। [5.19(c)] নং সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে £ যদি প্রত্যক্ষভাবে সময় নির্ভর না হয় তবে H-ও প্রত্যক্ষভাবে সময় নির্ভর হবে না। আমরা আগেই দেখেছি $\frac{\partial £}{\partial t} = 0$ হলে হ্যামিল্টনীয়ান সংরক্ষিত হয়। কাজেই এখন আমরা বলতে পারি যদি $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ হয় তবে হ্যামিল্টনীয়ান সংরক্ষিত হবে।

$$\therefore \; \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \quad ... \; (5.20)$$

5.8 সারাংশ

এই এককটিতে আমরা অজাড্য নির্দেশতন্ত্রে (non-inertial frame) নিউটনের গতি সমীকরণের জটিল রূপের কথা উল্লেখ করে নির্দেশতন্ত্র নিরপেক্ষ একটি গাণিতিক সমীকরণের প্রয়োজনীয়তার কথা উল্লেখ

করেছি। (5.2) প্রতিবন্ধ গতির ক্ষেত্রে কী করে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা নিরূপণ করতে হয় ব্যাখ্যা করেছি। তন্ত্রে n সংখ্যক বস্তু থাকলে এবং r সংখ্যক প্রতিবন্ধক সমীকরণ থাকলে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হয় $f = 3n - r$ অদৃশ্য দৃঢ় বস্তুর ক্ষেত্রে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা এভাবে নিরূপণ করা যায় না। পরবর্তী পরিচ্ছেদে এই নিয়ে আমরা আলোচনা করব। (\$5.3)

প্রতিবন্ধক বল জানা না থাকলে নিউটনের গতি সমীকরণ থেকে আমরা কল্পিত সরণ ব্যবহার করে ডা' লামবার্টের নীতি নিরূপণ করেছি। সমীকরণটির রূপ হল

$$\sum_i [\vec{F}_{(i)} - m_{(i)} \frac{d^2 \vec{r}_{(i)}}{dt^2}] . \delta \vec{r}_{(i)} = 0$$

কিন্তু এক্ষেত্রে বিভিন্ন কণার গতি সমীকরণগুলি আলাদাভাবে পাওয়া যায় না। ডা' লামবার্টের নীতির কিছু সহজ ব্যবহারিক প্রয়োগও আমরা দেখিয়েছি। (\$5.4)

সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্কের প্রয়োজনীয়তার কথা উল্লেখ করে ডা' লামবার্টের নীতির সাহায্যে আমরা ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণ নির্ণয় করেছি।

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \pounds}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \pounds}{\partial q_k} = 0$$

ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণের সাহায্যে বিভিন্ন তন্ত্রের গতি সমীকরণ নির্ণয় করার পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করেছি। এই সমীকরণের তন্ত্র নিরপেক্ষতা নিয়ে আমরা আলোচনা করেছি। (\$5.5)

(\$5.6)-এ আমরা সংরক্ষণ নীতির একটি সাধারণ উপপাদ্য আলোচনা করেছি। সেই উপপাদ্যকে নোয়েদারের উপপাদ্য বলা হয়। উপপাদ্যের মূল কথা হল, যদি ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানে একটি চাক্রিক নির্দেশাঙ্ক থাকে তবে তার প্রতিষঙ্গী সাধারণীকৃত ভরবেগ সংরক্ষিত হবে।

$H = p_k \dot{q}_k - \pounds$ -কে কেবলমাত্র p এবং q-এর অপেক্ষক ধরে আমরা হ্যামিল্টনের সমীকরণ নির্ণয় করেছি এবং দেখিয়েছি

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \text{ হলে } \frac{dH}{dt} = 0 \text{ হয়।}$$

5.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. একটি অনুভূমিক সরলরেখার সাপেক্ষে উল্লম্ব তলে দোলনশীল একটি যৌগিক দোলকের ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান নির্ণয় করে যৌগিক দোলকের গতি সমীকরণ নির্ণয় করুন।
2. m ভরের একটি কণাকে অনুভূমিক রেখার θ কোণে v বেগে নিক্ষিপ্ত করা হলে ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানের সাহায্যে কণাটির গতি সমীকরণ নির্ণয় করুন।

3. বিভিন্ন নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে একটি মুক্ত কণার হ্যামিল্টনীয়ান নির্ণয় করুন।

4. একটি লাট্টুর ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান নিম্নরূপ

$$£ = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2}B(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 + c\cos\theta$$

চাক্রিক নির্দেশাঙ্কগুলির সাধারণীকৃত ভরবেগ নির্ণয় করুন এবং দেখান যে হ্যামিল্টনীয়ানের মান এক্ষেত্রে মোট যান্ত্রিক শক্তি।

5. যদি $\frac{d£}{dt} = 0$ হয় তবে দেখান £-এর বদলে f(£)-কে ল্যাগ্রাঞ্জীয়ান ধরে নিলেও ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণের কোনও পরিবর্তন হবে না।

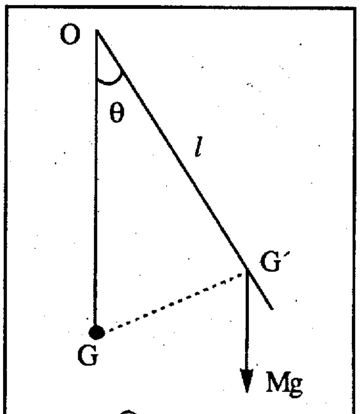
5.10 উত্তরমালা

1. ধরে নিই সাম্যাবস্থায় যৌগিক দোলকের ভারকেন্দ্র G বিন্দুতে এবং স্থানান্তরিত অবস্থায় G′ বিন্দুতে। G′ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে $x = l\sin\theta, y = l\cos\theta$,

$$\therefore\ T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2$$

$$V = -Mgl\cos\theta$$

$$\therefore\ £ = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2 + Mgl\cos\theta$$



চিত্র 5.6

ল্যাগ্রাঞ্জের θ সমীকরণটি দেয়

$$Ml^2\ddot{\theta} + Mgl\sin\theta = 0$$

বা, $$I\ddot{\theta} + Mgl\theta = 0\ (\theta \to 0)$$

$$\therefore\ \ddot{\theta} + \left(\frac{Mgl}{I}\right)\theta = 0$$

সুতরাং দোলনকাল $$= 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{M(k^2 + l^2)}{Mgl}}$$

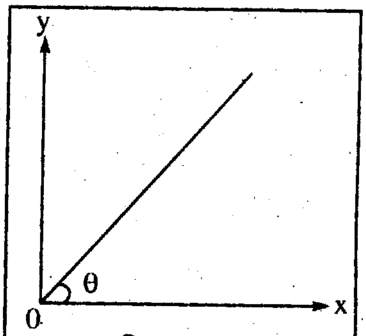
$$= 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + l^2}{gl}}$$

2. কণার গতিশক্তি

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

স্থিতিশক্তি $v = mg\,y.$

$\therefore$ ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান $£ = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mgy$



চিত্র 5.7

$\therefore$ x-সমীকরণটি

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial £}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial £}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 0 \Rightarrow x = at + b$$

y-সমীকরণটি

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial £}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \Rightarrow \ddot{y} = -g \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d$$

যদি আমরা ধরে নিই $t = 0$ হলে $x = y = 0$

$$\therefore \quad \dot{x} = \upsilon\cos\theta t, \quad \dot{y} = \upsilon\sin\theta t$$

$$\therefore \quad x = \upsilon\cos\theta t, \quad y = \frac{1}{2}gt^2 + \upsilon\sin\theta t$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}g\frac{x^2}{\upsilon^2\cos^2\theta} + x\tan\theta$$

অতএব কণাটি একটি অধিবৃত্তাকার (parabolic) পথে গতিশীল হবে।

3. যেহেতু মুক্ত কণার কথা বলা হয়েছে কণাটির স্থিতিশক্তি নেই। কার্টেসীয়ান, গোলীয় এবং বেলনাকার নির্দেশতন্ত্রে কণাটির ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান হল যথাক্রমে

$$£_{cartesian} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$£_{sph} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)$$

$$£_{cyl} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{z}^2)$$

$H = p_k\dot{q}_k - £$ [k দুবার ব্যবহৃত হওয়া সমষ্টিকরণ বোঝাচ্ছে]

$$= \frac{\partial £}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - £$$

এই সমীকরণ থেকে

$$H_{cart} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

$$H_{sph} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_Q^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)$$

$$H_{cyl} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p\theta^2}{r^2} + p_z^2\right)$$

4. এই ধরনের ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান থেকে চাক্রিক নির্দেশাঙ্কগুলির প্রতিষঙ্গী সাধারণীকৃত ভরবেগ আমরা পরবর্তী এককে নিরূপণ করব।

5. ধরি $\bar{£} = f(£)$

$$\therefore \quad \frac{\partial\bar{£}}{\partial\dot{q}_k} = \frac{\partial f(£)}{\partial\dot{q}_k} = f'(£)\frac{\partial £}{\partial\dot{q}_k}$$

এখন $\frac{d}{dt}f'(£) = f''(£)\frac{d£}{dt} = 0$

অতএব $\frac{d}{dt}\frac{\partial\bar{£}}{\partial\dot{q}_k} = f'(£)\frac{d}{dt}\frac{\partial £}{\partial q_k}$

এবং $\frac{\partial\bar{£}}{\partial q_k} = \frac{\delta f(£)}{\delta q_k} = f'(£)\frac{\partial £}{\partial q_k}$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\bar{£}}{\partial\dot{q}_k} - \frac{\partial\bar{£}}{\partial q_k} = f'(£)\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial £}{\partial\dot{q}_k} - \frac{\partial £}{\partial q_k}\right]$$

$$= 0$$

অতএব যদি $\frac{d£}{dt} = 0$ হয় তবে £-এর পরিবর্তে f(£)-কেও ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান হিসেবে লেখা যায়।

পরিশিষ্ট

ত্রিমাত্রিক দেশে একটি ভেক্টর $\vec{A}$-কে আমরা লিখি

$$\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$$

এবং $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যে স্কেলার গুণফলকে লেখা হয়,

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

$$= \sum_{j=1}^{3} A_jB_j = A_jB_j \qquad .... (A.1)$$

আইনস্টাইনের সমষ্টিগত প্রকরণ অনুযায়ী একটি ভেক্টর সূচকের দুবার ব্যবহার হলে সেক্ষেত্রে সমষ্টি বোঝাবে। এখানে j-কে বলা হয় মূক সূচক (dummy index), এই সূচকটি ইচ্ছেমতো ব্যবহার করা যেতে পারে, যেমন (A-1) সমীকরণে j-এর জায়গায় মূল সূচক হিসাবে l, m বা যা খুশি ব্যবহার করা যায়। যেমন $\vec{A}\,.\vec{B} = A_lB_l = A_mB_m$, মূক সূচকটি কখনই দুবারের বেশি ব্যবহার করা যাবে না, যেমন—

$$(\vec{A}\,.\vec{B})^2 \neq A_lB_lA_lB_l$$

লিখতে হবে,

$$(\vec{A}\,.\vec{B})^2 = A_lB_lA_mB_m$$

যে কোনো সূচকের ক্ষেত্রেই পুনরাবৃত্তি থাকলেই যে সমষ্টি বোঝাবে তা নয়। কেবলমাত্র ভেক্টর সূচকের ক্ষেত্রেই এই সমষ্টিকরণ বিধি প্রযোজ্য হয়। প্রথম প্রথম শিক্ষার্থীরা হয়ত এই প্রকরণটিতে একটু অসুবিধা বোধ করতে পারেন কিন্তু একটু অভ্যাস করলেই বিষয়টি সহজ হয়ে যাবে। এই এককটিতে আমরা ভেক্টর সূচক বোঝাতে রোমান অক্ষর i, j, k, l–ইত্যাদি ব্যবহার করেছি। কিন্তু এর পরবর্তী একককে আমরা ভেক্টর সূচক হিসাবে গ্রিক অক্ষর α, β ... ইত্যাদি ব্যবহার করব। এর ফলে আমাদের ধারণা সমষ্টিগত প্রকরণ বুঝতে নতুন শিক্ষার্থীদের সুবিধে হবে। দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের i-তম উপাংশকে আমরা লিখব $(\vec{A}\times\vec{B})_i = \epsilon_{ijk}\, A_jB_k$.

... (A.2)

এখানে j এবং k দুবার ব্যবহৃত হওয়ায় সমষ্টিকরণ বোঝাচ্ছে। ϵ_{ijk}-কে বল হয় একটি পূর্ণ বিপ্রতিসম সংকেত (completely anti-symmetric symbol)। এই সংকেতটির মান নিম্নরূপ ধরা হয়, $\epsilon_{ijk} = 0$ যদি i, j এবং k-এর মধ্যে যে কোনো দুটি সূচক সমান হয়

$= \pm 1$ যদি i, j, k তিনটি সূচকই ভিন্ন মানের হয় এবং ijk যদি 123 হতে চাক্রিক পরিবর্তনে পাওয়া যায় তবে + চিহ্ন হবে নতুবা – চিহ্ন হবে।

$$\therefore \quad \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$$

অন্য সব $\epsilon_{ijk} = 0$

এখন (A-2) সমীকরণ থেকে দেখা যায়,

$$(\vec{A}\times\vec{B})_1 = \in_{ijk} A_j B_k = \in_{12k} A_2 B_k + \in_{13k} A_3 B_k$$
$$= \in_{123} A_2 B_3 + \in_{132} A_3 B_2$$
$$= A_2 B_3 - A_3 B_2$$

একইভাবে আমরা লিখতে পারি,

$$(\vec{A}\times\vec{B})_2 = \in_{1jk} A_j B_k = \in_{12k} A_1 B_k + \in_{13k} A_3 B_k$$
$$= \in_{123} A_1 B_3 + \in_{132} A_3 B_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2$$

একইভাবে আমরা লিখতে পারি,

$$(\vec{A}\times\vec{B})_2 = \in_{2jk} A_j B_k = \in_{21k} K A_j B_k + \in_{23k} A_3 B_k$$
$$= \in_{213} A_1 B_3 + \in_{231} A_3 B_1 = A_3 B_1 - A_1 B_3$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1$$

$$\therefore\ \vec{A}\times\vec{B} = (A_2B_3 - A_3B_2)\,\hat{i} + (A_3B_1 - A_1B_3)\,\hat{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\,\hat{k}$$

$\vec{A}, \vec{B}$-এর ভেক্টর গুণফলের পরিচিত রূপ আমরা দেখতে পাচ্ছি।

এইবার আমরা দেখাব,

$$\in_{ijk}\in_{ilm} = \delta_{jl}\,\delta_{km} - \delta_{jm}\,\delta_{kl} \qquad \ldots \quad (A\text{-}3)$$

আমরা জানি,

$$|\vec{A}\times\vec{B}|^2 = A^2B^2 - A^2B^2\cos^2\theta$$

বা, $(\vec{A}\times\vec{B})_i\,(\vec{A}\times\vec{B})_i = A_kA_kB_jB_j - (\vec{A}.\,\vec{B})^2$

$$= A_kA_kB_jB_j - A_jB_jA_kB_k$$

বা, $\in_{ijk}A_jB_k\in_{ilm}A_lB_m = A_jA_jB_mB_m - A_jB_jA_lB_l$ (মূল সূচকগুলি পরিবর্তন করা যায়)

বা, $\in_{ijk}\in_{ilm}A_jA_lB_kB_m = \delta_{jl}A_jA_l\delta_{km}B_kB_m - \delta_{jm}A_jB_m\delta_{kl}A_lB_k$

$$= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})A_jA_lB_kB_m$$

বা, $[\in_{ijk}\in_{ilm} - (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})]A_jA_lB_kB_m = 0$

যেহেতু $\vec{A}, \vec{B}$ যে কোনও দুটি ভেক্টর, তাদের উপাংশগুলিও যা খুশি হতে পারে, অতএব, আমরা পাই—

$$\in_{ijk}\in_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

এই সম্পর্কটি আমরা দৃঢ়বস্তুর গতিবিজ্ঞানে আলোচনার সময় ব্যবহার করব।

একক 6 ❑ জ তা ামক জ তা ণক ও লা ুর গতি

গঠন

6.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

6.2 দৃঢ় বস্তুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা

6.3 দৃঢ় বস্তুর গতি সংক্রান্ত তথ্যাবলি

6.4 দৃঢ় বস্তুর গতিশক্তি ও জড়তা ভ্রামক

6.5 জড়তা ভ্রামক টেনসরের ধর্মাবলি

6.6 কয়েকটি প্রতিসম বস্তুর জাড্য ভ্রামক

6.7 অয়লারীয় কোণ, কৌণিক বেগ ও অয়লারের সমীকরণ

6.8 দৃঢ় বস্তুর মুক্ত আবর্তনের ফলে উদ্ভূত ধ্রুবক সমূহ

6.9 অয়লারের সমীকরণের ব্যবহারিক প্রয়োগ

6.10 প্রতিসম লাটিমের আবর্তনে ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণের প্রয়োগ

6.11 সারাংশ

6.12 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

6.13 উত্তরমালা

6.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

ল্যাগ্রাঞ্জীয় গতিবিদ্যার ব্যবহারিক প্রয়োগের একটি চমৎকার দৃষ্টান্ত হল দৃঢ় বস্তু। বস্তুতপক্ষে এর ব্যাপ্তি এত বেশি যে শুধুমাত্র এই বিষয়ের ওপর ভিত্তি করেই একটি গোটা বই লেখা হয়েছে। এখানে অবশ্য আমরা দৃঢ় বস্তুর গতি সংক্রান্ত কিছু মৌলিক আলোচনা করব এবং কয়েকটি সহজ উদাহরণ দেখাব।

সংজ্ঞানুসারে যে কণাগোষ্ঠীতে কণাগুলির পারস্পরিক দূরত্ব সর্বদা স্থির থাকে তাকে দৃঢ় বস্তু বলে। এখানে প্রথমেই বলে নেওয়া ভালো যে যথার্থ দৃঢ় বস্তুর বাস্তব কোনও ভিত্তি নেই, এটি একটি গাণিতিক কল্পনা মাত্র কারণ বল প্রয়োগে যে কোনও বস্তুর আকার বা আয়তনের পরিবর্তন হয়।

পূর্ববর্তী পরিচ্ছেদের মতো এই পরিচ্ছেদেও আমরা আইনস্টাইনের সমষ্টি প্রকরণ প্রযুক্ত হচ্ছে বলে ধরে নেব। কোনও ভেক্টর সূচক দুবার ব্যবহৃত হলে সমষ্টি বোঝাবে। যদি কোনও স্থলে ভেক্টর সূচক দুবার ব্যবহৃত হলেও সমষ্টি না বোঝায় সেই স্থলে আমরা সেটি বলে দেব। এই পরিচ্ছেদে আমরা সাধারণভাবে গ্রিক অক্ষরগুলিকে ভেক্টর সূচক এবং রোমান অক্ষরকে বস্তুকণার সূচক হিসেবে নির্দেশ করব। সূচকের

এই ধরনের পছন্দ পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের ঠিক বিপরীত। আমাদের উদ্দেশ্য হল, ভেক্টর সূচকের ওপর পাঠকের ধারণা স্পষ্ট করা।

উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে আপনি

[i] বিভিন্ন প্রতিসম বস্তুর জাড্য ভ্রামক নির্ণয় করতে পারবেন।

[ii] যদি আপনি প্রতিসম $I_{\alpha\beta}$ টেনসরের 6টি পরস্পর নিরপেক্ষ উপাংশ জানেন তবে অন্য যে কোনো অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুর জড়তা ভ্রামকের মান নির্ণয় করতে পারবেন।

[iii] কোনও সমীকরণের বিশ্লেষণী সমাধান না করতে পারলেও কোনও তন্ত্রের গতি সম্বন্ধে ধারণা কী করে করতে হয় তা আপনি জানতে পারবেন।

6.2 দৃঢ় বস্তুর স্বাতন্ত্র সংখ্যা

দৃঢ় বস্তুর দৃঢ় হবার মূল শর্ত হল (এটি প্রতিবন্ধকতা শর্ত হিসাবেও মনে করা যেতে পারে)।

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{ধ্রুবক} \quad \ldots \quad (6.1)$$

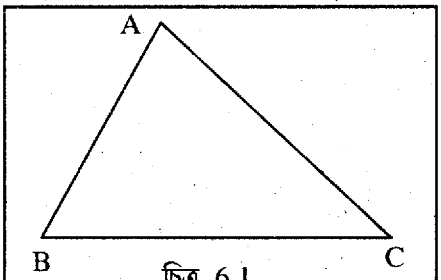
যদি দৃঢ় বস্তুতে N সংখ্যক বস্তুকণা থাকে তবে (6.1) সমীকরণের সংখ্যা হবে $^{N}C_2 = \dfrac{N(N-1)}{2}$

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে আমরা যেভাবে কোনও তন্ত্রের স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা নির্ণয় করেছি সেইভাবে দৃঢ় বস্তুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হবে $3N - \dfrac{N(N-1)}{2}$

কিন্তু এইভাবে যদি স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা নির্ণয় করা হয় তবে দেখা যাচ্ছে $N > 7$ হলেই স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা ঋণাত্মক হয়ে যাচ্ছে। সুতরাং স্পষ্টতই প্রতিবন্ধকগুলি নিরপেক্ষ নয়। এইজন্য আমরা একটু অন্যভাবে দৃঢ় বস্তুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা নির্ণয় করব। দৃঢ় বস্তুর কোনও বিন্দুকে নির্দিষ্ট করতে হলে সেই বিন্দু থেকে অন্য সমস্ত বিন্দুর দূরত্ব উল্লেখ করার দরকার হয় না। যে কোনও তিনটি অসমরেখ বিন্দুদের (non-collinear points) নির্দিষ্ট করলেই হয়। কারণ একটি বিন্দুকে নির্দিষ্ট করতে তিনটি প্রতিবন্ধক সমীকরণ প্রয়োজন, আর তিনটি প্রতিবন্ধক সমীকরণ পেতে গেলে তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দুর প্রয়োজন হয়। অতএব যদি দৃঢ় বস্তুর মধ্যে যে কোনও তিনটি অসমরেখ বিন্দু নির্দিষ্ট করে দেওয়া হয় তবে স্বভাবতই দৃঢ় বস্তুর সমস্ত বিন্দুই নির্দিষ্ট হয়ে যাবে।

অতএব তিনটি বিন্দু A, B, C নির্দিষ্ট করতে সর্বোচ্চ $3 \times 3 = 9$টি নির্দেশাঙ্ক লাগতে পারে। কিন্তু এই

তিনটি বিন্দুরও নিজেদের মধ্যে 3টি প্রতিবন্ধক সমীকরণ আছে। $r_{AB} = C_1, r_{BC} = C_2, r_{CA} = C_3$. অতএব দৃঢ় বস্তুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হবে $9 - 3 = 6$।



চিত্র 6.1

অতএব দৃঢ় বস্তুর অবস্থান ওরিয়্যান প্রকাশ করবার জন্য মোট 6টি নির্দেশাঙ্কের প্রয়োজন। তিনটি নির্দেশাঙ্কে দৃঢ় বস্তুটির যে কোনো বিন্দুর (সাধারণত ভরকেন্দ্রের) অবস্থান নির্দিষ্ট হয় এবং অন্য তিনটি নির্দেশাঙ্ক দ্বারা ঐ বিন্দু সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুটির কৌণিক বিন্যাস (orientation) নির্দিষ্ট হয়। এই প্রসঙ্গে উল্লেখ করা যেতে পারে, যে দৃঢ় বস্তুর গতির সম্পূর্ণ বিবরণ, পূর্বে উল্লিখিত 6টি নির্দেশাঙ্ক ছাড়া জড়তা ভ্রামক টেনসরের (এ প্রসঙ্গে পরে আলোচনা করা হবে)। নিরপেক্ষ 6টি উপাংশের সাহায্যে দেওয়া সম্ভব।

6.3 দৃঢ় বস্তুর গতি সংক্রান্ত তথ্যাবলি

দৃঢ়তা ধর্ম বজায় রেখে দৃঢ় বস্তুর গতি তিন ধরনের হতে পারে। (i) চলন, (ii) ঘূর্ণন এবং (iii) চলন ও ঘূর্ণনের সমন্বয়।

দৃঢ় বস্তুর যে কোনও কণার স্থান ভেক্টর $\vec{r}_i$ যদি এমনভাবে পরিবর্তিত হয় যে $\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{a}$ হয় তবে (6.1) নং সমীকরণ থেকে দেখা যায়,

$$|\vec{r}_i' - \vec{r}_j'| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$$

হয়। অর্থাৎ প্রত্যেক কণার সমান সরণ ঘটলে দৃঢ় বস্তুর দৃঢ়তা ধর্ম বজায় থাকে। প্রত্যেক বস্তু কণার সমান সরণকেই চলন বলা হয়।

এইবার আমরা একটি একঘাত (linear) রূপান্তরের ক্ষেত্রে দৃঢ়তা শর্তটি কী দাঁড়ায় সেটা দেখব। আমরা রূপান্তরটিকে লিখব,

$$(x_i)'_\alpha = a_{\alpha\beta}(x_i)_\beta \quad [\beta \text{ সূচকের ওপর সমষ্টিকরণ হচ্ছে}]$$

$(x_i)_\alpha$ হল, i-তম কণার স্থান ভেক্টর $\vec{r}_i$-এর α-তম উপাংশ। এখন দৃঢ়তা শর্তটিকে লেখা যায়,

$$\vec{r}_i - \vec{r}_j = \vec{C}_{ij} \qquad \therefore \quad (\vec{r}_i - \vec{r}_j).(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{C}_{ij} . \vec{C}_{ij}$$

$$\therefore \quad (\vec{r}_i - \vec{r}_j).(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = (\vec{C}_{ij})_\alpha . (\vec{C}_{ij})_\alpha$$

$$= [(\vec{x}_i)_\alpha - (\vec{x}_j)_\alpha][(\vec{x}_i)_\alpha - (\vec{x}_j)_\alpha]$$

এখন রূপান্তরিত দৃঢ়তা শর্তটি হল,

$$(\vec{r}_i' - \vec{r}_j').(\vec{r}_i' - \vec{r}_j') = [(x_i)_\alpha' - (x_j)_\alpha'][(x_i)_\alpha' - (x_j)_\alpha']$$
$$= [a_{\alpha\beta}\{(x_i)_\beta - (x_j)_\beta\}][a_{\alpha\gamma}\{(x_i)_\gamma - (x_j)_\gamma\}]$$
$$= [a_{\alpha\beta}\, a_{\alpha\gamma}\{(x_i)_\beta - (x_j)_\beta\}\{(x_i)_\gamma - (x_j)_\gamma\}]$$

এখন যদি আমরা ধরে নিই যে রূপান্তরটি একটি সমকোণী রূপান্তর (orthogonal transformation) হয়, তবে

$$a_{\alpha\beta}\, a_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma}$$

অতএব রূপান্তরিত দৃঢ়তা শর্তটি হল,

$$|\vec{r}_i' - \vec{r}_j'|^2 = [\delta_{\beta\gamma}\{(x_i)_\beta - (x_j)_\beta\}\{(x_i)_\gamma - (x_j)_\gamma\}]$$
$$= \{(x_i)_\gamma - (x_j)_\gamma\}\{(x_i)_\gamma - (x_j)_\gamma\}$$
$$= (\vec{r}_i - \vec{r}_j).(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

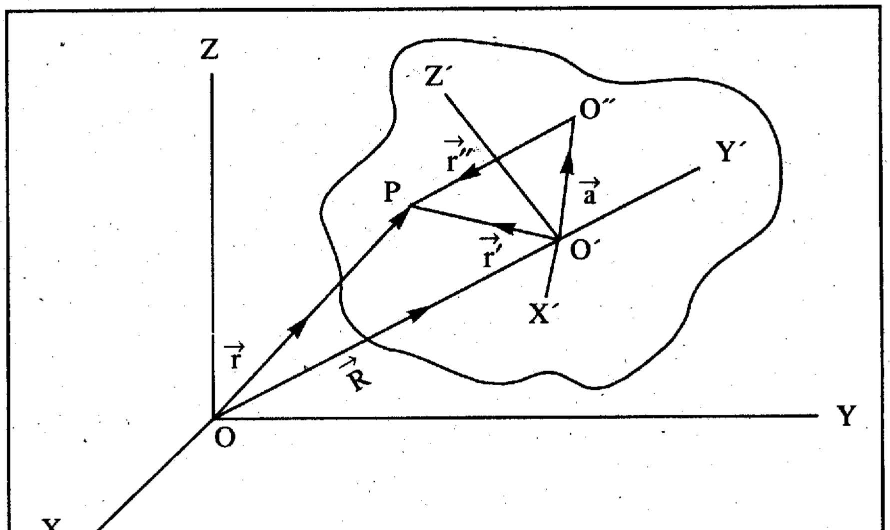
সুতরাং সমকোণী রূপান্তরের জন্য দৃঢ় বস্তুর দৃঢ়তা ধর্ম বজায় থাকে। এখন ত্রিমাত্রিক ইউক্লিডীয় জ্যামিতিক ক্ষেত্রে (3×3) সমকোণী রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্সকে (orthogonal tranformation matrix) একটি ঘূর্ণন দ্বারা চিহ্নিত করা যায়। সুতরাং ঘূর্ণনও দৃঢ় বস্তুর একটি সম্ভাব্য গতি হতে পারে। প্রসঙ্গত উল্লেখ্য $\vec{r}_i' \to (-\vec{r}_i)$ রূপান্তরিত (প্রতিফলন) দৃঢ় বস্তুর দৃঢ়তা ধর্ম মেনে চলবে। কিন্তু এটি সম্ভাব্য রূপান্তর হবে না। কারণ কোন এক তন্ত্র থেকে অবিচ্ছিন্নভাবে (continuously) (ঘূর্ণন অথবা অন্য কোনভাবে) $\vec{r}_i \to (-\vec{r}_i)$ রূপান্তর সম্ভব নয়।

যেহেতু চলন অথবা ঘূর্ণন আলাদাভাবে দৃঢ় বস্তুর সম্ভাব্য গতি চিহ্নিত করে, সুতরাং এই দুটির সম্মিলিত রূপও (combination) দৃঢ় বস্তুর সম্ভাব্য গতি হতে পারে। এটি অয়লারের উপপাদ্য নামে পরিচিত। সুতরাং আমরা দৃঢ়বস্তুর i-তম কণার সাধারণ বেগের রাশিমালা (expression)-কে লিখতে পারি

$$\vec{v}_i = \vec{u} + \vec{w} \times \vec{r}_i \qquad \dots (6.2)$$

এই রাশিমালাতে আপনি লক্ষ করুন যে চলনের বেগটি কণা নিরপেক্ষ এবং ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে কৌণিক বেগটিও (angular velocity) কণার ওপর নির্ভরশীল নয়। অর্থাৎ দৃঢ় বস্তুর প্রত্যেক কণার ক্ষেত্রেই কৌণিক বেগের মান ও দিক সমান। এই তথ্যটি প্রমাণ করতে হলে আমাদের দু ধরনের নির্দেশতন্ত্রের দরকার হবে। একটি স্থির তন্ত্র XYZ (যে তন্ত্রকে আমরা জাড্য তন্ত্র হিসেবে ধরব) এবং

অন্য একটি গতীয় তন্ত্র $X'Y'Z'$ (যেটিকে দৃঢ় বস্তুর সঙ্গে গতিশীল বলে ধরা হবে) [চিত্র (6.2)]। সুবিধের জন্য গতীয়তন্ত্রের মূলবিন্দুটি দৃঢ় বস্তুর ভরকেন্দ্রে অবস্থিত বলে ধরা যেতে পারে।



চিত্র 6.2

মনে করা যাক O' দৃঢ় বস্তুর ভরকেন্দ্র। চিত্রে নির্দেশতন্ত্র (X, Y, Z)-এর সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুর মধ্যে অবস্থিত যে কোনও বস্তুকণা P-এর স্থান ভেক্টর $\vec{r}$ । গতীয় নির্দেশতন্ত্র (X', Y', Z') এর সাপেক্ষে (যার মূলবিন্দু হল O') P বিন্দুর স্থান ভেক্টর হল $\vec{r}'$ । অতএব অয়লারের উপপাদ্য অনুযায়ী P বিন্দুর অণু পরিমাণ (infinitesimeal) সরণ হলে ভরকেন্দ্রের অণু পরিমাণ সরণ হবে এবং ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে একটি অণু পরিমাণ ঘূর্ণন হবে।

অর্থাৎ $$d\vec{r} = d\vec{R} + d\vec{\phi} \times \vec{r}' \qquad \text{... (6.3)}$$

সুতরাং P বস্তুকণার গতিকে লেখা যাবে, $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{R}}{dt} + \dfrac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{r}'$

$$\text{বা,} \quad \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \times \vec{r}' \qquad (6.3a)$$

এবার ধরা যাক, (X', Y', Z') গতীয় তন্ত্রটির মূলবিন্দু O' বিন্দুতে না হয়ে অন্য একটি O'' বিন্দুতে আছে। ধরা যাক $\vec{O'O''} = \vec{a}$ এবং O'' বিন্দুটির রৈখিক বেগ $\vec{u}'$ এবং O'' বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর নতুন কৌণিক গতিবেগ $\vec{w}'$ । সুতরাং এখন (6.3a) সমীকরণ দাঁড়ায়

$$\vec{v} = \vec{u}' + \vec{w}' \times \vec{r}'' \qquad \text{.... (6.36)}$$

যেখানে $\vec{r}''$ হল O'' বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর স্থান ভেক্টর।

কিন্তু (6.2) চিত্র অনুযায়ী $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$ ... (6.3c)

এখন, (6.3a) সমীকরণে $\vec{r}'$-এর এই মান বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$\vec{\upsilon} = \vec{u} + \vec{w} \times \vec{a} + \vec{w} \times \vec{r}' \qquad (6.3d)$$

(6.3b) ও (6.3d) দুটি সমীকরণ তুলনা করলে পাওয়া যায়

$$\vec{u}' = \vec{u} + \vec{w} \times \vec{a} \quad \text{এবং}$$

$$\vec{w} = \vec{w}' \qquad \ldots (6.4)$$

(6.4) সমীকরণ থেকে বোঝা যায় যে দৃঢ় বস্তুর কৌণিক বেগ নির্দেশতন্ত্র নিরপেক্ষ। দৃঢ় বস্তুর সঙ্গে গতিশীল যে কোনও নির্দেশতন্ত্র সর্বদা একই কৌণিক বেগ নিয়ে ঘোরে। অর্থাৎ আমরা পেলাম কোনও অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনের সময় দৃঢ় বস্তুর ওপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর বেগ সমান।

এখন ভেক্টরের ত্রিধা গুণন থেকে (triple product) পাওয়া যায়,

$$\frac{\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{w})}{w^2} = \vec{u} - \frac{\vec{w}(\vec{u}\,.\,\vec{w})}{w^2}$$

অতএব, (6.2) সমীকরণকে লেখা যায়,

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{u} + \vec{w} \times \vec{r}_i = \frac{\vec{w} \times (\vec{u}\,.\vec{w})}{w^2} + \vec{w} \times \frac{\vec{u} \times \vec{w}}{w^2} + \vec{w} \times \vec{r}_i$$

$$= \frac{\vec{w}(\vec{u}\,.\,\vec{w})}{w^2} + \vec{w} \times \left(\vec{r}_i + \frac{\vec{u} \times \vec{w}}{w^2} \right) \qquad \ldots (6.5)$$

অর্থাৎ দৃঢ় বস্তুর প্রত্যেক বিন্দুর সাধারণ বেগকে একটি পরিবর্তিত অক্ষের স্যাপক্ষে ঘূর্ণন এবং সেই অক্ষের দিকে চলন হিসাবে প্রকাশ করা যায়। একে তাই স্ক্রু গতিও (screw motion) বলা হয়। এই ঘটনাকে চেস্‌লের উপপাদ্য বলে (Chasles' theorem)।

6.4 দৃঢ় বস্তুর গতিশক্তি এবং জড়তা ভ্রামক

(6.2) সমীকরণের সাহায্যে দৃঢ় বস্তুর গতিশক্তির রাশিমালাটি হল,

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i(\upsilon_i)^2 = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{u} + \vec{w} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2}\sum m_i\{u^2 + 2\,\vec{u}\,.(\vec{w} \times \vec{r}_i) + (\vec{w} \times \vec{r}_i)^2\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i u^2 + \sum m_i \vec{u}(\vec{w}\times\vec{r_i}) + \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{w}\times\vec{r_i})^2$$

$$= \frac{1}{2}u^2\sum m_i + \sum m_i \vec{r_i}.(\vec{u}\times\vec{w}) = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{w}\times\vec{r_i})^2$$

$$= \frac{1}{2}M\upsilon^2(\vec{u}\times\vec{w}).\sum m_i \vec{r_i} + \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{w}\times\vec{r_i})^2 \qquad \text{... (6.6a)}$$

এই সমীকরণের প্রথম পদটি চলনের জন্য গতিশক্তি এবং শেষ পদটি ঘূর্ণনের জন্য গতিশক্তি এবং মাঝের পদটিকে চলন এবং ঘূর্ণনের জন্য সংমিশ্রিত গতিশক্তি বলে ধরা যেতে পারে। মূলবিন্দুকে যদি দৃঢ় বস্তুর ভরকেন্দ্রে ধরা হয় তবে ভরকেন্দ্রের সংজ্ঞানুসারে মধ্যপদটিকে বিলুপ্ত করা যায় এবং আমরা গতিশক্তির রাশিমালাতে কেবলমাত্র চলনের জন্য এবং ঘূর্ণনের জন্য আলাদাভাবে দুটি পদ পাব।

$$T = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{w}\times\vec{r_i})^2 \qquad (6.6b)$$

এখন আমরা এই সমীকরণের দ্বিতীয় পদটিকে আর একটু ভালোভাবে বিশ্লেষণ করতে চাই।

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{w}\times\vec{r_i})^2 = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{w}\times\vec{r_i})_\alpha(\vec{w}\times\vec{r_i})_\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i \in_{\alpha\beta\gamma} w_\beta(x_i)_\gamma \in_{\alpha\rho\sigma} w_\rho(x_i)_\sigma$$ [$\alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma$ সব কটি সূচক দুবার ব্যবহৃত হওয়ায় প্রত্যেক সূচকের ওপর সমষ্টিকরণ প্রকরণ বোঝাচ্ছে]

$$= \frac{1}{2}\sum m_i \in_{\alpha\beta\gamma} \in_{\alpha\rho\sigma} (x_i)_\gamma(x_i)_\sigma w_\beta w_\rho$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i(\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\sigma} - \delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\rho})(x_i)_r(x_i)_\sigma w_\beta w_\rho$$

[পঞ্চম এককের পরিশিষ্ট দ্রষ্টব্য]

$$= \frac{1}{2}\sum m_i(\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\sigma}(x_i)_\gamma(x_i)_\sigma - \delta_{\beta\sigma}(x_i)_\sigma\delta_{\gamma\rho}(x_i)_\gamma\}w_\beta w_\rho$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i\{(\delta_{\beta\rho}(x_i)_\gamma(x_i)_\gamma - (x_i)_\beta(x_i)_\rho\}w_\beta w_\rho$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i\{r_i^2.\delta_{\beta\rho} - (x_i)_\beta(x_i)_\rho\}w_\beta w_\rho$$

$$= \frac{1}{2} w_\beta w_\rho \sum m_i \{r_i^2 \delta_{\beta\rho} - (x_i)_\beta (x_i)_\rho\}$$

$$= \frac{1}{2} I_{\beta\rho} w_\beta w_\rho \qquad (6.7)$$

যেখানে $I_{\beta\rho} = \sum m_i \{r_i^2 \delta_{\beta\rho} - (x_i)_\beta (x_i)_\rho\}$ (6.8)

$I_{\beta\rho}$-কে বলা হয় জড়তা ভ্রামক টেনসর। এটি একটি দ্বিক্রম প্রতিসম টেনসর (symmetric tensor of rank two)। ত্রিমাত্রিক দেশে এর নিরপেক্ষ উপাংশ হল 6। আগেই বলা হয়েছে এই নিরপেক্ষ উপাংশ ছয়টির সাহায্যে দৃঢ় বস্তুর গতির সম্পূর্ণ বিবরণ দেওয়া সম্ভব। যে কোনও প্রতিসম টেনসরকে কর্ণীয় টেনসর (diagonal tensor) পরিণত করা যায়। (পরিশিষ্ট ২)। যে নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে এই $I_{\beta\rho}$ প্রতিসম টেনসরকে কর্ণীকরণ (diagonalisation) করা হয়, সেই নির্দেশতন্ত্রের অক্ষগুলিকে প্রধান অক্ষ (principal axes) বলা হয়। প্রধান অক্ষগুলির সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামকের মানগুলিকে প্রধান জড়তা ভ্রামক বলা হয়।

দৃঢ় বস্তুর পদার্থ অবিচ্ছিন্ন হলে যোগফলের বদলে সমাকলন নিতে হবে অর্থাৎ $I_{\beta\rho}$ জাড্য ভ্রামক টেনসরটি হবে,

$$I_{\beta\rho} = \int \rho \{r^2 \delta_{\beta\rho} - x_\beta x_\rho\} dv$$ (যেখানে ρ হল দৃঢ় বস্তুর ঘনত্ব) ..... (6.9)

এই টেনসরটির 6টি নিরপেক্ষ উপাংশ হল,

$$I_{11} = \int \rho (y^2 + z^2) dv, \quad I_{22} = \int \rho (z^2 + x^2) dv \quad I_{33} = \int \rho (x^2 + y^2) dv$$

$$I_{12} = - \int \rho xy\, dv, \quad I_{31} = -\int \rho\, zx dv \quad I_{23} = -\int \rho yz\, dv$$

কর্ণীয় উপাংশগুলিকে স্থির বিন্দুর সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক বলে এবং বিকর্ণীয় (non-diagonal) উপাংশগুলিকে জড়তা গুণফল (products of inertia) বলা হয়।

6.5 জড়তা ভ্রামক টেনসরের ধর্মাবলি

(a) চলনের ফলে জড়তা ভ্রামকের রূপান্তর

দৃঢ় বস্তুর মধ্যে অবস্থিত নির্দেশতন্ত্রটির কৌণিক বিন্যাস অপরিবর্তিত রেখে যদি মূলবিন্দুটির $\vec{a}$ পরিমাণ সরণ হয়, তবে প্রত্যেক বিন্দুরই সম পরিমাণ সরণ হবে এবং i-তম কণার পরিবর্তিত স্থান ভেক্টর দাঁড়াবে,

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{a}$$

ফলে জড়তা ভ্রামক টেনসরের উপ-পরিবর্তিত $(\alpha\beta)$ উপাংশ দাঁড়াবে,

$$I'_{\alpha\beta} = \sum m_i\left(r_i'^2\,\delta_{\alpha\beta} - (x_i')_\alpha (x_i')_\beta\right)$$

$$= \sum m_i[\{(\vec{r_i} - \vec{a}).(\vec{r_i} - \vec{a})\}\delta_{\alpha\beta} - \{(x_i)_\alpha - a_\alpha\}\{(x_i)_\beta - a_\beta\}]$$

$$= \sum m_i[\{r_i^2 - 2(\vec{r_i}.\vec{a}) + \vec{a}\}\delta_{\alpha\beta} - \{(x_i)_\alpha (x_i)_\beta - a_\beta (x_i)_\alpha - a_\alpha (x_i)_\beta + a_\alpha a_\beta\}]$$

$$\therefore \quad I'_{\alpha\beta} = \sum m_i[r_i^2\delta_{\alpha\beta} - (x_i)_\alpha (x_i)_\beta] + \sum m_i[a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta]$$

$$+\sum m_i[(x_i)_\alpha a_\beta + (x_i)_\beta a_\alpha] - 2\sum m_i(\vec{r_i}.\vec{a})\delta_{\alpha\beta}$$

$$= I_{\alpha\beta} + M(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta) - 2\vec{a}.M\vec{R}\,\delta_{\alpha\beta}$$

$$+ \left\{\sum m_i (x_i)_\alpha\right\}a_\beta + \left\{\sum m_i (x_i)_\beta\right\}a_\alpha$$

$$= I_{\alpha\beta} + M(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta) - 2\vec{a}.M\vec{R}\,\delta_{\alpha\beta} + \left\{M(\vec{R})_\alpha\right\}a_\beta + \left\{M(\vec{R})_\beta\right\}a_\alpha$$

সুতরাং প্রাথমিক মূলবিন্দুটি যদি ভরকেন্দ্রে অবস্থিত থাকে, তবে উপরের রাশিমালার শেষ তিনটি পদ শূন্য হয় এবং $I'_{\alpha\beta}$ রাশিটি দাঁড়ায়

$$I'_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} + M(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta) \qquad .....(6.10)$$

এই সমীকরণের $I_{\alpha\beta}$ রাশিটি হল ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুর জড়তা ভ্রামকের $(\alpha\beta)$ উপাংশ এবং $I'_{\alpha\beta}$ হল ভরকেন্দ্র থেকে মূলবিন্দুটির $\vec{a}$ সরণের পর জড়তা ভ্রামকের $(\alpha\beta)$ উপাংশ। এইবার আমরা যদি ধরে নিই যে ভরকেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরে নির্দেশাঙ্কটি প্রধান নির্দেশতন্ত্র নির্দেশ করে তবে $\alpha \neq \beta$ হলে $I_{\alpha\beta} = 0$ এবং যদি মূলবিন্দুর সরণটি যে কোনও একটি অক্ষ বরাবর হয় (ধরা যাক x-অক্ষ বরাবর), তবে $\vec{a} = (a, 0, 0)$ এবং (6.10) সমীকরণটি দাঁড়ায়

$$I_{\alpha\beta}' = I_{\alpha\beta} = 0 \; (\alpha \neq \beta)$$

$$I_{11}' = I_{11}$$

এবং $I_{22}' - I_{22} = I_{33}' - I_{33} = Ma^2$

(6.11) সমীকরণগুলি দৃঢ় বস্তুর সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য নির্দেশ করে।

(6.8) সমীকরণ থেকে আমরা অভিলম্ব অক্ষ উপপাদ্যটিও প্রমাণ করতে পারি। এই সমীকরণ থেকে আমরা পাই,

$$I_{11} = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_{22} = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2)$$

$$\therefore \quad I_{11} + I_{22} = \sum m_i (y_i^2 + x_i^2 + 2z_i^2) = I_{33} + 2\sum m_i z_i^2$$

ধরা যাক, দৃঢ় বস্তুর কণাগুলি একই সমতলে অবস্থিত অর্থাৎ সামতলিক। ধরা যাক সেই সমতলটি x-y সমতলে অবস্থিত। সেক্ষেত্রে সমতলটির সমীকরণ $z = 0$ ধরা যেতে পারে।

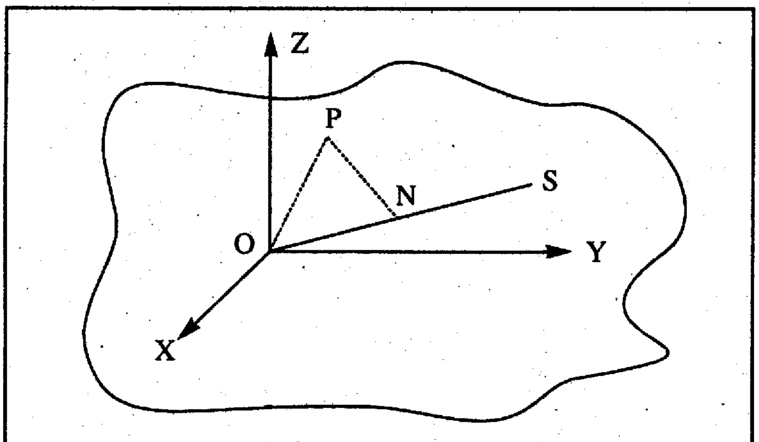
$\therefore$ এক্ষেত্রে $I_{33} = I_{11} + I_{22}$ .... (6.12)

এটিই জড়তা ভ্রামক সংক্রান্ত অভিলম্ব অক্ষের উপপাদ্য।

$\therefore$ সাধারণভাবে বলা যায় $I_{33} \leq I_{11} \leq I_{22}$

(b) মূলবিন্দুগামী যে কোনো অক্ষের সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক নির্ণয় ঃ

দৃঢ়বস্তুর সঙ্গে গতিশীল যেকোনো একটি নির্দেশতন্ত্র নেওয়া হল। নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দু হল O। যে কোনও একটি অক্ষ OS-এর সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক হল [চিত্র (6.3)]



চিত্র 6.3

$I_{OS} = \sum_{p} m_{[p]} PN^2$ (এখানে সম্ভাব্য সমস্ত বিন্দুর P-এর উপর সমষ্টিকরণ বোঝানো হচ্ছে।)

এখন $PN^2 = OP^2 \sin^2\theta$

$$= \frac{OP^2 . OS^2}{OS^2} \sin^2\theta = \frac{|\vec{OP} \times \vec{OS}|}{OS^2}$$

$\vec{OP} = \vec{r}$ এবং $\vec{OS} = \vec{s}$ হলে

$$I_{OS} = \frac{\sum m(\vec{r}\times\vec{s})^2}{s^2} = \frac{\sum m[r^2s^2 - (\vec{r}.\vec{s})^2]}{s^2}$$

$$\begin{aligned} \text{or, } I_{OS}\, s^2 &= \sum m\,[r^2 s_\alpha s_\beta \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha s_\alpha n_\beta s_\beta] \\ &= \sum m\,[r^2\,\delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta] s_\alpha s_\beta \\ &= I_{\alpha\beta} s_\alpha s_\beta \end{aligned}$$

$$\therefore \quad I_{os} = \frac{I_{\alpha\beta} s_\alpha s_\beta}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2}\,[I_{11}s_1{}^2 + I_{22}s_2{}^2 + I_{33}s_3{}^2 + 2I_{12}s_1s_2 + 2I_{23}s_2s_3 + 2I_{31}s_3s_1]$$

অর্থাৎ $I_{11}, I_{22}, I_{33}, I_{12}, I_{31}, I_{23}$ এই 6টি নিরপেক্ষ জড়তা ভ্রামকের উপাংশগুলি জানা থাকলে যে কোনও অক্ষ বরাবর দৃঢ় বস্তুর জড়তা ভ্রামক (6.13) সমীকরণ দ্বারা জানা যাবে।

(c) জড়তা ভ্রামকের উপগোলক (Ellipsoid of inertia) :

(6.13) সমীকরণে $s = \frac{1}{\sqrt{I_{OS}}}$ ধরলে পাওয়া যায় $I_{\alpha\beta}s_\alpha s_\beta = I_{os}\, s^2 = 1.$

অর্থাৎ $I_{11}s_1{}^2 + I_{22}s_2{}^2 + I_{33}s_3{}^2 + 2I_{12}s_1s_2 + 2I_{23}s_2s_3 + 2I_{31}s_3s_1 = 1$ ... (6.14)

এই সমীকরণটি একটি উপগোলকের সমীকরণ। $\vec{OS}$ ভেক্টরের মান $|\vec{OS}| = \frac{1}{\sqrt{I_{OS}}}$ ধরলে S বিন্দুর সঞ্চারপথটি হবে একটি উপগোলক। যদি নির্দেশতন্ত্রটি এরকম হয় যাতে $I_{12} = I_{23} = I_{31} = 0$, অর্থাৎ মুখ্য নির্দেশতন্ত্রের অক্ষগুলি প্রধান অক্ষ হয় তবে মুখ্য জাড্য অক্ষগুলিই ইলিপসয়েডের তিনটি মূল অক্ষ নির্দেশ করবে।

(d) কয়েকটি বিশেষ আকারের বস্তুর মুখ্য জাড্য অক্ষ

দৃঢ় বস্তুর যদি কোনও অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণন প্রতিসাম্য (rotational symmetry) থাকে, তবে মুখ্য অক্ষ হবে ঘূর্ণন অক্ষটি এবং তার লম্ব সমতলে অবস্থিত পরস্পর সমকোণী যে কোনও দুটি অক্ষ। নীচের যুক্তির সাহায্যে এই কথাটির সত্যতা বুঝতে পারা যাবে। ধরুন, কোনও দৃঢ় বস্তুর z-অক্ষ বরাবর একটি ঘূর্ণন প্রতিসাম্য আছে। ঐ অক্ষের সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুকে 180° ঘোরালে বস্তুটির সত্যিকার কোনও পরিবর্তন হবে না। কিন্তু x ও y নির্দেশাঙ্কের চিহ্ন উল্টে যাবে। অর্থাৎ $x \to -x$ এবং $y \to -y$ হবে।

$$\therefore \quad I_{31} = -\sum m\,zx = +\sum m\,xz = 0$$

$$I_{23} = -\sum m\,yz = +\sum m\,yz = 0$$

আবার z-অক্ষের সাপেক্ষে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে 90° ঘোরালে $x \to y$ এবং $y \to -x$ হবে। কাজেই

$$I_{12} = -\sum m\,xy = +\sum m\,xy = 0$$

সুতরাং এক্ষেত্রে জাড্য টেনসরটি কর্ণীয় টেনসর (diagonalised tensor) এবং z-অক্ষ ও তার সমকোণী সব অক্ষই মূল জাড্য অক্ষ।

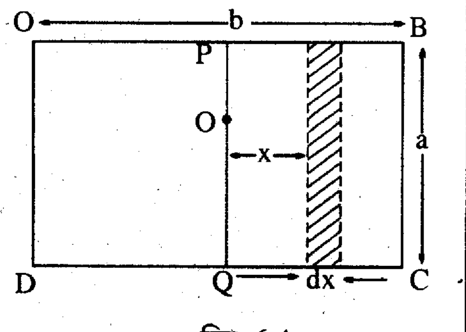
6.6 কয়েকটি প্রতিসম বস্তুর জাড্য ভ্রামক

বস্তু সমসত্ত্ব (homogeneous) ও সরল জ্যামিতিক আকারের হলে অনেকক্ষেত্রেই সমাকলনের সাহায্যে বিভিন্ন অক্ষের সাপেক্ষে সহজেই বস্তুর জাড্য ভ্রামক নির্ণয় করা সম্ভব। কয়েকটি উদাহরণ নীচে দেওয়া হল।

(a) আয়ত পাত (Rectangular lamina) ঃ

(1) অক্ষ একটি বাহুর সমান্তরাল এবং কেন্দ্রগ

(6.4) চিত্রে ABCD হল সমসত্ত্ব ভরের একটি আয়ত পাত ও O পাতটির কেন্দ্র। $BC = a$ এবং $AB = b$, PQ অক্ষ BC বাহুর সমান্তরাল ও কেন্দ্রগ। আমরা এই অক্ষটির সাপেক্ষে পাতটির জড়তা ভ্রামক নিরূপণ করব। PQ অক্ষের সমান্তরালভাবে পাতটিকে অনেকগুলি সরু সরু ফালিতে ভাগ করা হল। চিত্রে PQ থেকে x দূরত্বে dx চওড়া একটি ফালি দেখানো হয়েছে। যদি পাতটির ভর M ধরা হয় তবে এই ফালিটির ভর হবে $\frac{M}{b}dx$। ফালিটির সব কণাগুলিই PQ অক্ষ থেকে x দূরত্বে। ফলে PQ অক্ষের সাপেক্ষে ফালির জড়তা ভ্রামক হল $\left(\frac{M}{b}\right)dx \cdot x^2$। নির্ণেয় জড়তা ভ্রামক হবে



চিত্র 6.4

$$I = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{M}{b} x^2 dx = \frac{M}{b}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{1}{12} Mb^2 \qquad \text{... (6.15)}$$

অক্ষটি AB বাহুর সমান্তরাল হলে অনুরূপভাবে জড়তা ভ্রামক হত

$$I = \frac{1}{12} Ma^2 \qquad \dots (6.16)$$

(2) অক্ষ পাতের কিনারায়

অক্ষ AD বাহু বরাবর হলে সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য অনুযায়ী (সমীকরণ 6.11) জড়তা ভ্রামক হত

$$I = \frac{1}{12} Mb^2 + \frac{1}{4} Mb^2 = \frac{1}{3} Mb^2 \qquad \dots (6.17)$$

অনুরূপভাবে অক্ষ AB বাহু বরাবর হলে জড়তা ভ্রামক হত

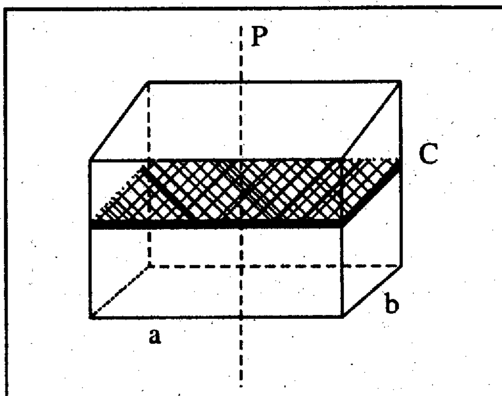
$$I = \frac{1}{12} Ma^2 + \frac{1}{4} Ma^2 = \frac{1}{3} Ma^2 \qquad \dots (6.18)$$

(3) অক্ষ কেন্দ্রগ এবং পাতের তলের অভিলম্বে

পাতের বাহুর সমান্তরাল ও কেন্দ্রগ দুই সমকোণী অক্ষে আমরা জড়তা ভ্রামক পেলাম $\frac{1}{12} Ma^2$ এবং $\frac{1}{12} Mb^2$ [(6.16) এবং (6.15) সমীকরণ অনুযায়ী]। অভিলম্ব অক্ষের উপপাদ্য অনুযায়ী (সমীকরণ 6.12) নির্ণেয় জড়তা ভ্রামক হবে

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2) \qquad \dots. (6.19)$$

(b) আয়তাকার বস্তু (Rectangular parallelopiped) : ধরা যাক, বস্তুটির তিনটি বাহু a, b এবং c। c বাহুর সমান্তরাল কেন্দ্রগ PQ অক্ষের সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক নির্ণয় করতে হবে। বস্তুটিকে PQ অক্ষের অভিলম্বে অনেকগুলি পাত্‌লা আয়তাকার পাতে ভাগ করা হল। PQ অক্ষের সাপেক্ষে যে কোনো পাতের জড়তা ভ্রামক $= \frac{\text{পাতের ভর}}{12}(a^2 + b^2)$ (6.19নং সমীকরণ অনুযায়ী)। অতএব বস্তুটির ভর M হলে PQ অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুটির মোট জাড্য ভ্রামক



চিত্র 6.5

$$I_c = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2) \qquad \dots (6.20c)$$

a বাহুর সমান্তরাল কেন্দ্রগ অক্ষে জড়তা ভ্রামক I_a এবং b বাহুর সমান্তরাল কেন্দ্রগ অক্ষ I_b দ্বারা সূচিত হয় তবে অনুরূপভাবে I_a এবং I_b-র মান হবে

$$I_a = \frac{M}{12}(b^2 + c^2) \quad \dots \quad (6.20a)$$

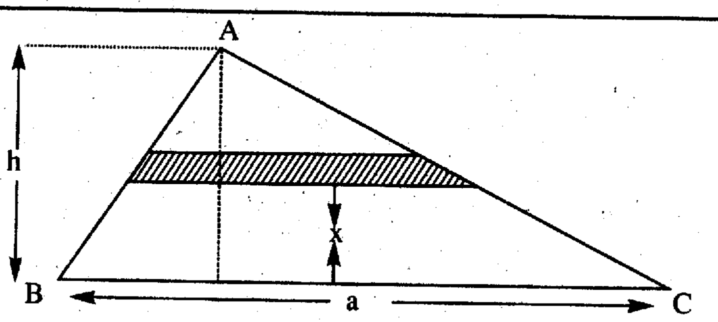
$$I_b = \frac{M}{12}(c^2 + a^2) \quad \dots \quad (6.20b)$$

এই তিনটি অক্ষেই বস্তুটি প্রতিসম বলে এই তিনটি অক্ষই কেন্দ্রগ বিন্দুতে জাড্য উপগোলকের মুখ্য অক্ষ।

(c) ত্রিভুজাকার পাত (triangular lamina) :

অক্ষ যে কোনও একটি বাহু।

ধরে নিই M ভরের সুষম ত্রিভুজাকার পাত ABC-র BC অক্ষ সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র 6.6

ত্রিভুজাকার পাতটিকে BC বাহুর সমান্তরালে সরু সরু ফালিতে ভাগ করা হল। BC থেকে x দূরত্বে dx প্রস্থের একটি ফালির দৈর্ঘ্য হবে $\frac{a(h-x)}{h}$ । পাতের একক ক্ষেত্রের ভর σ হলে ফালির ভর হল $\frac{\sigma a(h-x)}{h}dx$ । BC অক্ষ থেকে এই ফালিটির সব কণাই সম দূরত্বে আছে। অতএব এই ফালিটির জড়তা ভ্রামক $= \frac{\sigma a(h-x)}{h}x^2\,dx$ । সম্পূর্ণ পাতের জড়তা ভ্রামক

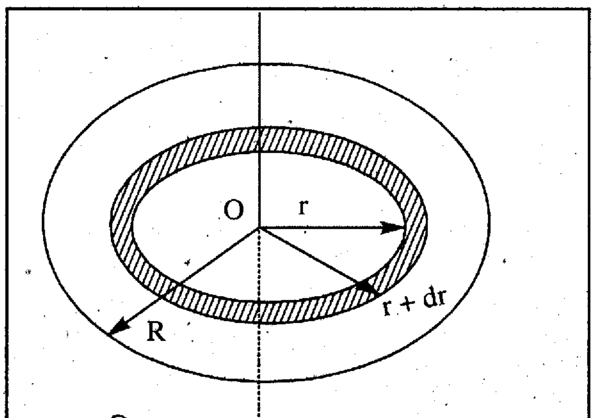
$$I = \frac{\sigma a}{h}\int_0^h (hx^2 - x^3)dx = \frac{1}{12}\sigma a h^3 = \frac{1}{6}Mh^2 \qquad (6.21)$$

কারণ, পাতের ভর $M = \sigma \times$ পাতের ক্ষেত্রফল $= \sigma \cdot \frac{1}{2}ah$ ।

(d) গোল (বা বৃত্তীয়) পাত (Circular lamina)

ধরা যাক, পাতের অভিলম্বে কেন্দ্রগ অক্ষ আছে। পাতের ভর M ও ব্যাসার্ধ R হলে প্রতি বর্গক্ষেত্রের

ভর $\sigma = M/\pi R^2$ । পাতকে অনেকগুলি সমকেন্দ্রিক সরু সরু বলয়ে ভাগ করা হল। ঐ বলয়গুলির যে কোনও একটির ব্যাসার্ধ r এবং $r + dr$ ধরলে এই বলয়ের ভর $dm = 2\pi r dr\sigma$ এবং প্রদত্ত অক্ষের সাপেক্ষে সরু বলয়টির জড়তা ভ্রামক হল $2\pi r^3 dr\sigma$। অতএব নির্ণেয় জড়তা ভ্রামক



চিত্র 6.7

$$I = 2\pi\sigma\int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2 \qquad (6.22)$$

অভিলম্ব অক্ষের সূত্র প্রয়োগ করলে দেখা যায় যে কোনো ব্যাসকে অক্ষ ধরলে জড়তা ভ্রামক হবে

$$I_d + I_d = \frac{1}{2}MR^2 \text{ বা } I_d = \frac{1}{4}MR^2 \qquad (6.23)$$

চওড়া বলয়ের ভিতরের ও বাইরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে R_1 ও R_2 হলে বলয়ের অভিলম্ব এবং কেন্দ্রগ অক্ষের সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক হবে

$$I = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r^3 \sigma dr = 2\pi\sigma\frac{R_2^4 - R_1^4}{4}$$

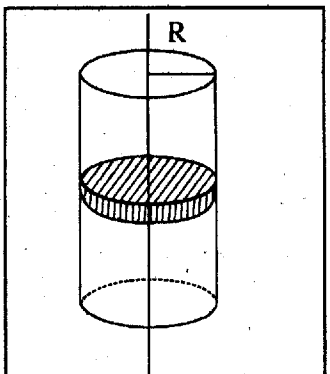
পাতের ভর M হলে $\sigma = \dfrac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$

অতএব, $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ (6.24)

যে কোনও ব্যাসে জড়তা ভ্রামক এই রাশিটির অর্ধেক।

(e) বেলন (Cyllinder)

(1) অক্ষ বেলনের অক্ষ।



চিত্র 6.8

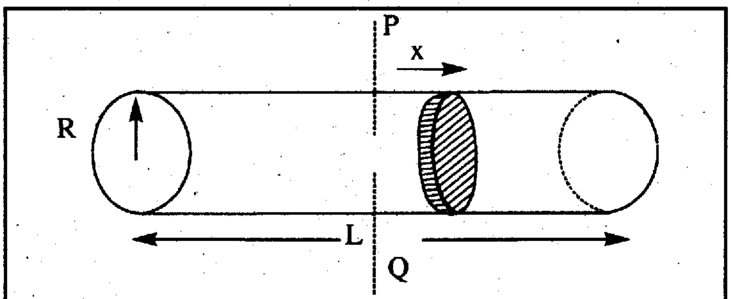
বেলনের অক্ষের অভিলম্বে বেলনকে সরু সরু গোল পাতে ভাগ করা হল। যে কোনও পাতের ব্যাসার্ধ R হল বেলনের ব্যাসার্ধের সমান।

যে কোনও পাতের জড়তা ভ্রামক হল [(6.22) সমীকরণ অনুযায়ী)] $\frac{1}{2}$ পাতের ভর $\times R^2$। সুতরাং বেলনের ভর M হলে বেলনের অক্ষের

সাপেক্ষে সমগ্র বেলনের জড়তা ভ্রামক হল

$$I = \frac{1}{2} MR^2 \tag{6.25}$$

(2) অক্ষ বেলনের অক্ষের অভিলম্বে এবং কেন্দ্রগা



চিত্র 6.9

চিত্র অনুযায়ী PQ অক্ষে বেলনের জাড্য ভ্রামক নির্ণয় করতে হবে। বেলনকে তার নিজের অক্ষের অভিলম্বে অনেকগুলি সরু গোলাকার পাতে ভাগ করা হল। এরকম যে কোনও একটি পাতের বেধ dx এবং PQ থেকে দূরত্ব x হলে পাতের ভর $m = \pi R^2 dx\rho$ (বেলনের ঘনত্ব $\rho = \frac{M}{\pi R^2 L}$)

PQ-র সমান্তরাল গোলকের পাতের ব্যাসে জড়তা ভ্রামক $\frac{mR^2}{4}$ [(6.23) সমীকরণ অনুযায়ী] এবং সমান্তরাল অক্ষের সূত্র অনুযায়ী PQ অক্ষের সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক

$$m\frac{R^2}{4} + mx^2 = \left(\frac{R^2}{4} + x^2\right)\pi R^2 \rho dx$$

অতএব নির্ণেয় জড়তা ভ্রামক হল PQ অক্ষের সাপেক্ষে সব পাতগুলির জড়তা ভ্রামকের সমষ্টি। বেলনের দৈর্ঘ্য $= L$।

$$\therefore I = \int_{-L/2}^{L/2} \left(x^2 + \frac{R^2}{4}\right)\pi R^2 \rho dx$$

$$= \pi R^2 \rho\left(\frac{L^3}{12} + \frac{R^2 L}{4}\right) = M\left(\frac{L^2}{12} + \frac{R^2}{4}\right) \tag{6.26}$$

(f) গোলীয় পাত **(Spherical Shell)**

অক্ষ হল যে কোনো ব্যাস বরাবর গোলকের ভর M এবং ব্যাসার্ধ R হলে খোলকের ক্ষেত্রফল $4\pi R^2$ এবং প্রতি একক ক্ষেত্রের ভর $\sigma = M/4\pi R^2$। যে কোনও ব্যাস PQ-র অভিলম্বে খোলককে অনেকগুলি