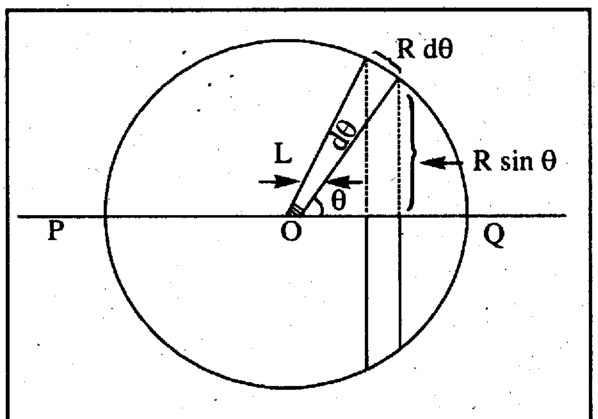
সরু বলয়ে ভাগ করা হল। এই রকম একটি বলয়ের ব্যাসার্ধ R sin θ, চওড়া Rdθ এবং বলয়ের ভর $= 2\pi\sigma R^2 \sin\theta\, d\theta$। এই বলয়ের প্রত্যেক কণাই PQ অক্ষ থেকে সমদূরত্বে। অতএব PQ অক্ষের সাপেক্ষে এই বলয়ের জড়তা ভ্রামক



চিত্র 6.10

$$= 2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta \times (R\sin\theta)^2$$

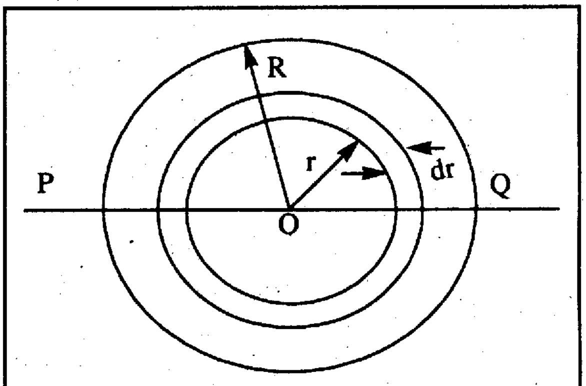
$$= 2\pi\sigma R^4 \sin^2\theta d\theta$$

সুতরাং নির্ণেয় গোলকের জড়তা ভ্রামক

$$I = 2\pi\sigma R^4 \int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta = \frac{2}{3} MR^2 \quad (6.27)$$

(g) **নিরেট গোলক :**

অক্ষ যে কোনো ব্যাস গোলককে সরু সরু অনেকগুলি সমকেন্দ্রিক গোলকে ভাগ করা যায়। যে কোনো একটি গোলকের ব্যাসার্ধ ধরুন r এবং r + dr_1ρ গোলকের ঘনত্ব হলে এই গোলকের ভর $m = 4\pi r^2 dr\rho$। (6.27) সমীকরণ অনুযায়ী যে কোনও ব্যাসে এই খোলকের জড়তা ভ্রামক,



চিত্র 6.11

$$= \frac{2}{3} . 4\pi r^2 dr\rho . r^2 = \frac{8\pi}{3} r^4 \rho dr \quad ।$$

এখানে $\rho = \frac{\text{ভর}}{\text{আয়তন}} = \frac{3M}{4\pi R^3}$

অতএব নির্ণেয় জড়তা ভ্রামক

$$I = \frac{8\pi\rho}{3}\int_0^R r^4\, dr = \frac{8\pi\rho}{3} . \frac{R^5}{5} = \frac{2}{5} MR^2 \qquad (6.28)$$

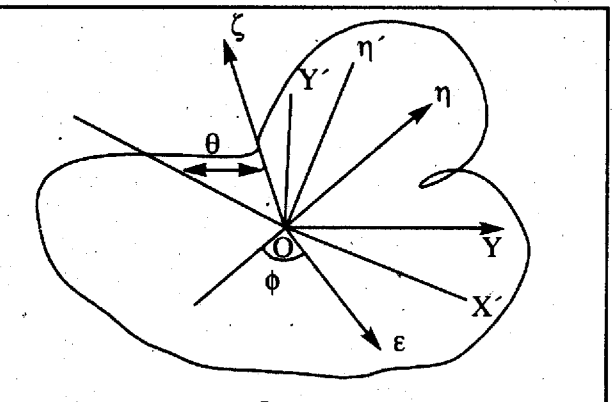
(h) **ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ।**

জাড্য ভ্রামকের মাত্রা (dimension) ML^2। এইজন্য জড়তা ভ্রামক রাশিটিকে বস্তুর ভর এবং উপযুক্ত দৈর্ঘ্য K-র বর্গের গুণফলরূপে প্রকাশ করা যায়। অর্থাৎ সব সময়ই লেখা যায় $I = MK^2$ যেখানে k-কে ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ (Radius of gyration) বলা হয়।

নিরেট গোলকের ক্ষেত্রে $K^2 = \frac{2}{5}R^2$ বা $K = \sqrt{\frac{2}{5}}R$

6.7 অয়লারীয় কোণ এবং কৌণিক বেগ ও অয়লারের সমীকরণ

আগেই বলা হয়েছে দৃঢ় বস্তুর অবস্থান ও বিন্যাস প্রকাশ করবার জন্য 6টি নির্দেশাঙ্কের প্রয়োজন। এর মধ্যে ভরকেন্দ্রের 3টি নির্দেশাঙ্ক দ্বারা দৃঢ় বস্তুর অবস্থান নির্দিষ্ট হয়। দৃঢ় বস্তুর কৌণিক বিন্যাস নির্দিষ্ট করবার জন্য অয়লার তিনটি কোণের উদ্ভাবন করেন। পদার্থ বিজ্ঞানে যেগুলি অয়লারীয় কোণ নামে পরিচিত। এই কোণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ। অর্থাৎ অন্য কোণ দুটিকে না বদলিয়ে যে কোনও একটি কোণ বদলানো যায়। এই কোণগুলি স্থির নির্দেশতন্ত্র (x, y, z)-এর সাপেক্ষে গতীয় নির্দেশতন্ত্র (x´, y´, z´)-এর কৌণিক বিন্যাস বোঝায়। যেহেতু আমরা (x, y, z) এবং (x´, y´, z´) দুটি নির্দেশতন্ত্রের মধ্যকার কোণ নিয়ে আগ্রহী, সেজন্য আমরা দুটি নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দু এক বলে ধরে নিতে পারি। এখন স্থির নির্দেশতন্ত্র (x, y, z) থেকে গতীয় নির্দেশতন্ত্র (x´, y´, z´) যেটি গতিশীল দৃঢ় বস্তুর সাথে আবদ্ধ তাতে আমরা নীচের রূপান্তরগুলির মাধ্যমে যেতে পারি।



চিত্র 6.12

(i) প্রথম (x, y, z) তন্ত্র থেকে (z) অক্ষের সাপেক্ষে বামাবর্তে (anticlockwise) ϕ কোণে ঘুরিয়ে (ξ, η, ζ) নির্দেশতন্ত্রে পৌঁছানো।

(ii) দ্বিতীয়, $O\xi$ অক্ষের সাপেক্ষে আবার বামাবর্তে θ কোণে ঘুরিয়ে (ξ, η, ζ) নির্দেশতন্ত্র থেকে (ξ', η', ζ') নির্দেশতন্ত্রে পৌঁছোনো। এক্ষেত্রে xy তল এবং (ξ', η') তলের ছেদ রেখা হল $O\xi$। একে পাতরেখা (line of nodes) বলা হয়।

(iii) তৃতীয় $O\eta'$ অক্ষের সাপেক্ষে (ξ', η', ζ') তন্ত্রটি আবার বামাবর্তে ψ কোণে ঘুরিয়ে (x´, y´, z´) গতীয় নির্দেশতন্ত্রে পৌঁছোনো।

θ, ϕ এবং ψ কোণ তিনটিকে অয়লারীয় কোণ বলে। অয়লারের কোণের উপরোক্ত সংজ্ঞানুসারে দেখা যায় যে

$\dot{\phi}$ হল ζ বা Z-অক্ষ সাপেক্ষে কৌণিক বেগ,

$\dot{\theta}$ হল ξ অক্ষ বা পাতরেখা সাপেক্ষে কৌণিক বেগ

এবং $\dot{\psi}$ হল η' (বা γ') অক্ষ সাপেক্ষে কৌণিক বেগ।

গতীয় নির্দেশতন্ত্রের সাথে স্থির নির্দেশতন্ত্রের সম্পর্ক হল নিম্নরূপ।

$$(x, y, z) \xrightarrow{D} (\xi, \eta, \zeta) \xrightarrow{C} (\xi', \eta', \zeta') \xrightarrow{B} (x', y', z')$$

B, C, D রূপান্তর ম্যাট্রিক্স চিহ্নিত করছে।

অর্থাৎ
$$\begin{aligned}(x', y', z') &= B(\xi', \eta', \zeta')\\ &= BC(\xi, \eta, \zeta)\\ &= BCD(x, y, z)\end{aligned}$$

যেখানে
$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.29a}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{6.29b}$$

এবং
$$B = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.29c}$$

গতীয় নির্দেশতন্ত্র (x´, y´, z´)-এর সাপেক্ষে কৌণিক বেগ হবে

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{x',y',z'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{x',y',z'} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\xi',\eta',\zeta'} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{\xi,\eta,\zeta}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{x',y',z'} + B\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{x',y',z'} + BC\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{x',y',z'}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\dot{\varphi} + \cos\dot{\theta} \\ \sin\theta \cos\dot{\varphi} - \sin\dot{\theta} \\ \cos\theta\dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{pmatrix} \qquad (6.30)$$

অতএব কেবলমাত্র ঘূর্ণনের জন্য দৃঢ় বস্তুর গতিশক্তিকে লেখা যায়,

$$T = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta$$

এখন যদি ধরা হয় যে, দৃঢ় বস্তুর সাথে আবদ্ধ গতীয় নির্দেশতন্ত্রটি প্রধান অক্ষগুলি (principal axes) নির্দেশ করে, তবে গতিশক্তিকে লেখা যায়

$$T = \frac{1}{2}\left(I_{11}w_1^2 + I_{22}w_2^2 + I_{33}w_3^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(I_1 w_1^2 + I_2 w_2^2 + I_3 w_3^2\right)$$

এখানে আমরা I_{11}, I_{22}, I_{33}-কে যথাক্রমে I_1, I_2, I_3 ধরে নিয়েছি।

অতএব ল্যাগ্রাঞ্জের ψ সমীকরণটিকে লেখা যায়,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial\alpha}{\partial\psi} = 0$$

বা, $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial\psi} = -\frac{\partial\upsilon}{\partial\psi} \qquad ...(6.31)$$

কারণ, সাধারণত স্থিতিশক্তি $\upsilon, \dot{\psi}$ নিরপেক্ষ হয়,

এখন $$\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial w_1}\frac{\partial w_1}{\partial\dot{\psi}} + \frac{\partial T}{\partial w_2}\frac{\partial w_2}{\partial\dot{\psi}} + \frac{\partial T}{\partial w_3}\frac{\partial w_3}{\partial\dot{\psi}}$$

$= I_3 w_3$ [(6.30) সমীকরণ থেকে]

আবার $$\frac{\partial T}{\partial\psi} = \frac{\partial T}{\partial w_1}\frac{\partial w_1}{\partial\dot{\psi}} + \frac{\partial T}{\partial w_2}\frac{\partial w_2}{\partial\psi} + \frac{\partial T}{\partial w_3}\frac{\partial w_3}{\partial\dot{\psi}}$$

$$I_1 w_1 w_2 - I_2 w_2 w_1 = (I_1 - I_2) w_1 w_2$$

$\therefore$ (6.31) সমীকরণটিকে এখন লেখা যায়,

$$\frac{d}{dt}(I_3 w_3) - (I_1 - I_2) w_1 w_2 = -\frac{\partial\upsilon}{\partial\psi} = \phi_\psi = \Gamma_3 \qquad ...(6.32a)$$

সাধারণীকৃত বল (generalised force) ϕ_ψ-কে আমরা গতীয় তন্ত্রের Z' দিকে টর্ক হিসেবে লিখতে পারি। এটা বুঝতে হলে প্রথমে ধরে নিন যে দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল সংরক্ষী। ফলে সাধারণীকৃত বল ϕ_ψ-কে লেখা যায়,

$$\phi_\psi = -\frac{\partial \upsilon}{\partial \psi} = \sum \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \psi}$$

এখন $d\vec{r}_i = d\vec{\psi} \times \vec{r}_i$ [(6.3) সমীকরণ দ্রষ্টব্য]

$= (\hat{n} \times \vec{r}_i) d\psi$ [$\hat{n}$ হল ঘূর্ণনের দিকে একক ভেক্টর]

$$\therefore \quad \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta \psi} = (\hat{n} \times \vec{r}_i)$$

$$\therefore \quad Q_\psi = \sum \vec{F}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i) = \hat{n} \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \hat{n} \cdot \vec{\Gamma} = \Gamma_3$$

কোনও দৃঢ় বস্তুর প্রধান অক্ষগুলিকে z' অক্ষ বা 3নং অক্ষ হিসেবে পছন্দ করার কোনও বাধ্যবাধকতা নেই। আমরা যদি অক্ষগুলির বিন্যাস বদল (অবশ্য অক্ষগুলির দক্ষিণাবর্তী) চরিত্র বজায় রেখে) করি তবে (6.32a) সমীকরণের মতো আরও দুটি সমীকরণ পাওয়া যায়,

$$\frac{d}{dt}(I_1 w_1) - (I_2 - I_3) w_2 w_3 = \Gamma_1 \qquad \text{...(6.32b)}$$

$$\frac{d}{dt}(I_2 w_2) - (I_3 - I_1) w_3 w_1 = \Gamma_2 \qquad \text{...(6.32c)}$$

[6.32(a), (b), (c)] সমীকরণ তিনটি একত্রে দৃঢ় বস্তুর গতীয় সমীকরণ প্রকাশ করে। এদের অয়লারের সমীকরণ বলা হয়। (a) সমীকরণটি ল্যাগ্রাঞ্জের ψ-সমীকরণ হলেও (b) ও (c) সমীকরণগুলির সাথে কিন্তু ল্যাগ্রঞ্জের θ ও φ সমীকরণের সম্পর্ক নেই।

স্থির নির্দেশতন্ত্র এবং ঘূর্ণন নির্দেশতন্ত্রের মধ্যে সময়ের অবকলের নিম্নলিখিত সম্পর্ক প্রযোজ্য

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{rot} + \vec{w} \times \vec{L} \qquad \text{...(6.33a)}$$

এবং $$\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{rot} + \vec{w} \times \vec{P} \qquad \text{...(6.33b)}$$

6.8 দৃঢ় বস্তুর মুক্ত আবর্তনের উদ্ভূত ধ্রুবকসমূহ

বলযুক্ত আবর্তনের ক্ষেত্রে অয়লারের গতীয় সমীকরণগুলি হয়

$$\frac{d}{dt}(I_1w_1)-(I_2-I_3)w_2w_3=0 \quad ...(6.34a)$$

$$\frac{d}{dt}(I_2w_2)-(I_3-I_1)w_3w_1=0 \quad ...(6.34b)$$

$$\frac{d}{dt}(I_3w_3)-(I_1-I_2)w_1w_2=0 \quad ...(6.34c)$$

সমীকরণ তিনটিকে যথাক্রমে w_1, w_2 এবং w_3 দিয়ে গুণ করে যোগ করলে

$$w_1\frac{d}{dt}(I_1w_1)+w_2\frac{d}{dt}(I_2w_2)+w_3\frac{d}{dt}(I_3w_3)=0$$

বা, $$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}I_1w_1^2+\frac{1}{2}I_2w_2^2+\frac{1}{2}I_3w_3^2\right]=0$$

অর্থাৎ, $$\frac{dT}{dt}=0 \quad ...(6.35)$$

বলযুক্ত আবর্তনে গতিশক্তি ধ্রুবক।

এখন (6.34a), (6.34b) ও (6.34c) সমীকরণগুলিকে যথাক্রমে I_1w_1, I_2w_2 ও I_3w_3 দিয়ে গুণ করে পাওয়া যায়,

$$I_1^2w_1\dot{w}_1+I_2^2w_2\dot{w}_2+I_3^2w_3\dot{w}_3=0$$

বা, $$\frac{d}{dt}(I_1^2w_1^2+I_2^2w_2^2+I_3^2w_3^2)=0$$

এখন (6.33) সমীকরণ অনুযায়ী কৌণিক ভরবেগ,

$$L_\alpha=I_{\alpha\beta}w_\beta$$

$\therefore\ L_1=I_{11}w_1=I_1w_1$ অনুরূপে $L_2=I_2w_2,\ L_3=I_3w_3$

যেহেতু আমরা দৃঢ় বস্তুর সাথে আবদ্ধ নির্দেশতন্ত্রটির অক্ষগুলিকে প্রধান অক্ষ ধরেছি।

এক্ষেত্রে ওপরের সমীকরণটি দাঁড়ায়

$$\frac{d}{dt}L^2 = 0$$

$$\text{বা,}\quad L^2 \text{ ধ্রুবক} \qquad \ldots(6.36)$$

যেহেতু $T = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta$

$$\text{বা,}\quad \frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \dot{w}_\alpha w_\beta + \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta$$

$$= I_{\alpha\beta} \dot{w}_\alpha w_\beta = w_\beta \frac{d}{dt}(I_{\alpha\beta} w_\alpha)$$

$$= w_\beta \frac{d}{dt} L_\beta = w_\beta \dot{L}_\beta$$

$$= \vec{w}.\dot{\vec{L}} = 0 \quad \text{[(6.36) নং সমীকরণ অনুসারে]}$$

অতএব $\vec{w}$ এবং $\vec{L}$ পরস্পর সমকোণী।

প্রসঙ্গত উল্লেখ করা যেতে পারে এই সমীকরণগুলি আমরা একটু অন্যভাবে পেতে পারি। ধরা যাক, আমরা দুটি নির্দেশতন্ত্র নিয়েছি যার একটি হল (S) পরীক্ষাগার সাপেক্ষে স্থির এবং অন্যটি (S´) দৃঢ় বস্তুর সাথে আবর্তনশীল। ধরা যাক, এই আবর্তনশীল নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দু দৃঢ় বস্তুর ভরকেন্দ্র এবং এরই সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুটি আবর্তনশীল। এই অবস্থায় দুটি নির্দেশতন্ত্রের কোনও ভেক্টরের সময়ের সাপেক্ষে অবকলন নীচের সমীকরণ দ্বারা নির্দিষ্ট

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S'} + \vec{w} \times \vec{A}$$

এখন $\vec{A}$ ভেক্টরটিকে কৌণিক ভরবেগ ভেক্টর ধরে নিলে আমরা পাই

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{S'} + \vec{w} \times \vec{L} \qquad \ldots(6.37)$$

সুতরাং মুক্তভাবে আবর্তনশীল দৃঢ়বস্তুর ক্ষেত্রে (6.37) নং সমীকরণটি হয়

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{S'} + \vec{w}\times\vec{L} = 0$$

বা, $$\vec{L}.\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{S'} + \vec{L}.(\vec{w}\times\vec{L}) = 0$$

বা, $$\vec{L}.\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{S'} = 0$$

বা, $$\left(\frac{dL^2}{dt}\right)_{S'} = 0$$

আবর্তনশীল অক্ষের সাপেক্ষে L^2 ধ্রুবক

আবার $$\vec{w}.\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{s'} = 0$$

বা, $$\frac{dT}{dt} = 0$$

অতএব গতিশক্তিও ধ্রুবক।

6.9 অয়লারের সমীকরণের ব্যবহারিক প্রয়োগ

I_1, I_2 এবং I_3-র মান অনুযায়ী দৃঢ় বস্তু বিভিন্ন ধরনের হয়। যেমন $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ হলে বস্তুটিকে অপ্রতিসম লাট্টু (asymmetrical top) বলে। যে কোনও দুটি জড়তা ভ্রামক সমান হলে (ধরা যাক, $I_1 = I_2 \neq I_3$) বস্তুটিকে প্রতিসম লাট্টু বলে। তিনটি জড়তা ভ্রামক সমান হলে বস্তুটিকে গোলীয় লাট্টু (spherical top) বলে।

কোন প্রতিসম বস্তু নিলে অয়লারের সমীকরণগুলি দাঁড়ায়

$$I_3\dot{w}_3 = 0 \qquad ...(6.88a)$$

$$I_1\dot{w}_1 - (I_1 - I_3)w_2w_3 = 0 \qquad ...(6.38b)$$

$$I_1\dot{w}_2 - (I_3 - I_1)w_3w_1 = 0 \qquad ...(6.38c)$$

(6.38a) সমীকরণ থেকে দেখা যায় w_3 = ধ্রুবক

(6.38b) এবং (6.38c) সমীকরণ দুটি থেকে পাওয়া যায়

$$\dot{w}_1 + kw_2w_3 = 0$$

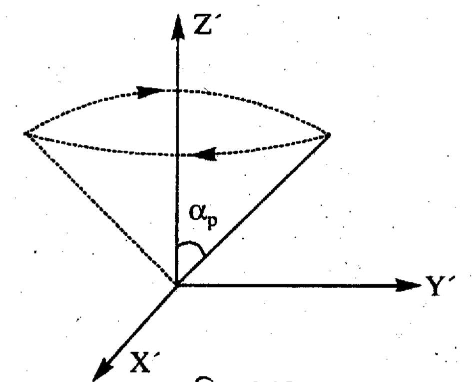
$$\dot{w}_2 - kw_1w_3 = 0$$

এখানে আমরা $I_1 = I_2 = A,\ I_3 = C$ এবং $\frac{C-A}{A} = k$ ধরেছি,

ওপরের দুটি সমীকরণকে আর একবার অবকলন করে পাওয়া যায়,

$$\ddot{w}_1 = -(k^2w_3^2)w_1 \qquad ...(6.39a)$$

$$\ddot{w}_2 = -(k^2w_3^2)w_2 \qquad ...(6.39b)$$



চিত্র 6.13

এই সমীকরণ দুটির সমাধান হল,

$$w_1 \pm iw_2 = Ae^{\pm ikw_3t}$$

$$\therefore \quad w_1^2 + w_2^2$$

$$= (w_1 + iw_2)(w_1 - iw_2) = A^2 = \text{ ধ্রুবক}$$

অতএব $w^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = A^2 + w_3^2 =$ ধ্রুবক

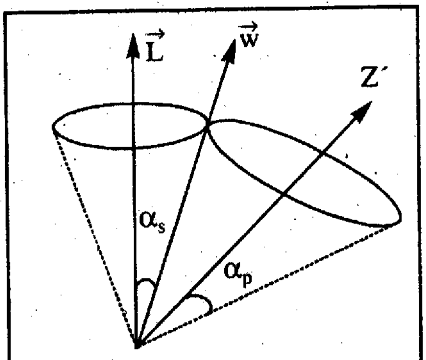
যেহেতু A^2 এবং w_3^2 উভয়েই ধ্রুবক সেইজন্য $\vec{w}$ ভেক্টরের সূচিমুখ প্রতিসম অক্ষ z'-এর সাপেক্ষে kw_3 বেগে ঘোরে। এর ফলে উৎপন্ন **দেহশঙ্কুর** (Body Cone) অর্ধ কোণ α_p হলে

$$\tan\alpha_p = \frac{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}{w_3} = \frac{A}{w_3}$$

এখন স্থির নির্দেশতন্ত্র (S)-এর সাপেক্ষে $\vec{L}$ ধ্রুবক $\left[\text{ যেহেতু } \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_S = 0 \right]$

এখন $\frac{\vec{w}.\vec{L}}{|\vec{w}||\vec{L}|} = \cos L\left(\vec{w}, \vec{L}\right) =$ ধ্রুবক

যেহেতু $2T = \vec{w}.\vec{L} =$ ধ্রুবক



চিত্র 6.14

অতএব এক্ষেত্রে $\vec{w}$ ভেক্টরের সূচিমুখ স্থির ভেক্টর $\vec{L}$ -এর সাপেক্ষে ঘুরে একটি **দেশশঙ্কু** (space cone) উৎপন্ন করবে যার

অর্ধ কোণ $\alpha_S = \cos^{-1}\left[\frac{\vec{w}.\vec{L}}{|\vec{w}||\vec{L}|}\right]$

অবশ্য এক্ষেত্রে $\vec{w}$ যে কৌণিক বেগে ঘুরবে তার মান kw_3 হবে না এবং সেই মান নির্ণয় করা সহজ নয়। এই ধরনের গতিকে **পুরঃসরণ** (precession) বলে। প্রমাণ করা যায় দেশশঙ্কু, দেহশঙ্কুর গা ঘেঁষে গড়িয়ে চলে। পৃথিবীর ক্ষেত্রে এই গাইরোস্কোপীয় ক্রিয়া আলোচনা করলে দেখা যায় পৃথিবীর নিরক্ষীয় ব্যাস দুই মেরুর দূরত্বের চেয়ে কিছু বড় বলে প্রতিসম অক্ষে জড়তা ভ্রামক I_3 নিরক্ষীয় ব্যাসে জড়তা ভ্রামক $I_1 = I_2$ অপেক্ষা একটু বড়ো। অতএব পূর্বে বর্ণিত সকল সিদ্ধান্তগুলিই পৃথিবীর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। পৃথিবীর ক্ষেত্রে $\frac{I_1 - I_3}{I_1} = \frac{A - C}{A} = 0.0033$

w_3 কার্যত পৃথিবীর দৈনিক আবর্তনের সমান।

$$\therefore \quad kw_3 = .0033 \text{ পাক / দিন}$$

$$= \frac{1}{300} \text{ পাক / দিন}$$

এর ফলে ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত দর্শকের মনে হবে পৃথিবীর দৈনিক আবর্তন অক্ষ উত্তর মেরুর চারদিকে বৃত্তাকার পথে প্রায় 300 দিনে 1 পাক ঘুরবে। স্যাণ্ডলার এই জাতীয় আবর্তনের যে পরীক্ষা করেছেন তাতে তিনি 300 দিনের জায়গায় প্রায় 427 দিনে পেয়েছেন। তত্ত্বীয় মান ও পর্যবেক্ষণ লব্ধ মানের এই পার্থক্যের জন্য নানা ধরনের ব্যাখ্যা আছে। অপ্রয়োজনীয় বোধে সেগুলি এখানে আর উল্লেখ করা হল না।

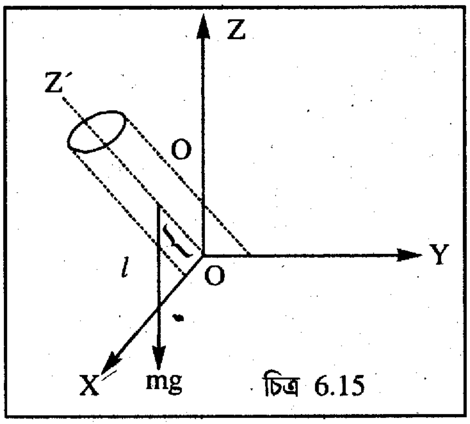
6.10 প্রতিসম লাটিমের আবর্তনে ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণের প্রয়োগ

(6.30) সমীকরণের সাহায্যে প্রতিসম লাটিমের গতিশক্তি হল—

$$T = \frac{1}{2}I_1\left(w_1^2 + w_2^2\right) + \frac{1}{2}I_3 w_3^2$$

$$= \frac{1}{2}A(\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}C(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2$$

প্রতিসমতার জন্য ভরকেন্দ্র z′ অক্ষের ওপর অবস্থিত এবং z অক্ষকে উল্লম্ব অক্ষ ধরা হয়েছে। মূলবিন্দুর সাপেক্ষে বস্তুর স্থিতিশক্তি



চিত্র 6.15

$v = mgl\cos\theta$। অতএব দৃঢ় বস্তুর ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান

$$\propto = \frac{1}{2}A(\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2)$$

$$+\frac{1}{2}C(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta \quad ...(6.40)$$

ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানের এই রাশিমালা φ, ψ এবং t পরস্পর নিরপেক্ষ। অতএব p_ϕ, p_ψ এবং হ্যামিল্টনিয়ান H, তিনটি ধ্রুব রাশি পাওয়া যাবে

$$p_\varphi = \frac{\partial\alpha}{\partial\dot{\varphi}} = A\sin^2\theta\dot{\varphi} + C(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\cos = b \quad ...(6.41a)$$

$$p_\psi = \frac{\partial\alpha}{\partial\dot{\psi}} = C(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = a \quad ...(6.41b)$$

এবং $$H = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \sin\theta\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}C(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta^2)^2 + mgl\cos\theta = E \quad ...(6.41c)$$

আর অগ্রসর হবার আগে আমরা লাটিমের গতি সম্বন্ধে কিছু সাধারণ সংজ্ঞা দিয়ে নেব। প্রতিসম অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুর আবর্তনকে আমরা ঘূর্ণন (spin) বলব। ঘূর্ণনবেগ হল w_3 এবং (6.41b) সমীকরণ অনুযায়ী বা পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের বর্ণনা অনুযায়ী এটি ধ্রুবক। উল্লম্ব অক্ষ OZ-এর সাপেক্ষে প্রতিসম অক্ষ θ অচর রেখে আবর্তন করতে পারে। এই আবর্তনকে বলা হবে **পুরঃসরণ** (precession)।

উলম্ব তলের সাথে আবর্তন অক্ষের কোণ অর্থাৎ θ সময়ের সঙ্গে বদলাবে। অর্থাৎ আবর্তন অক্ষের পুরঃসরণ শঙ্কুর সময়ের সঙ্গে পরিবর্তনকে **অক্ষ মিলন** (nutation) বলা হয়।

(6.41a) এবং (6.41b) সমীকরণ দুটির সাহায্যে লেখা যায়,

$$\dot{\varphi} = \frac{b - a\cos\theta}{A\sin^2\theta} \quad ...(6.42)$$

$\dot{\varphi}$ -এর এই মান (6.41c)-তে বসালে পাওয়া যায়,

$$\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A\frac{(b - a\cos\theta)^2}{A^2\sin^2\theta} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{C} + mgl\cos\theta = E \quad ...(6.41d)$$

উভয়দিকে $2\sin^2\frac{\theta}{2}$ দিয়ে গুণ করে পাওয়া যায়

$$\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2+\left(\frac{b-a\cos\theta}{A}\right)^2+\frac{a^2}{CA}\sin^2\theta+\frac{2mgl\cos\theta\sin^2\theta}{A}=\frac{2E}{A}\sin^2\theta$$

$\cos\theta = u$ প্রতিস্থাপন করে এবং

$$\frac{b}{A}=\mu \qquad \text{...(6.43a)}$$

$$\frac{a}{A}=\lambda \qquad \text{...(6.43b)}$$

$$\frac{2E}{A}-\frac{a^2}{CA}=\alpha \qquad \text{...(6.43c)}$$

$$2mgl/A=\beta \qquad \text{...(6.43d)}$$

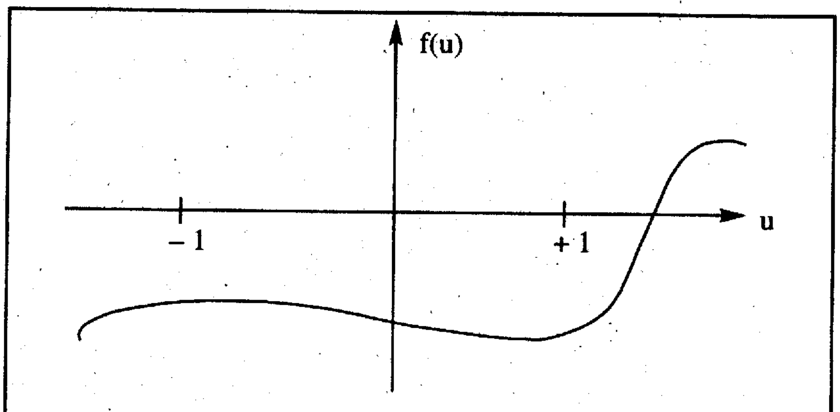
ধরলে উপরের সমীকরণকে লেখা যায়,

$$\dot{u}^2=-(\mu-\lambda u)^2+(\alpha-\beta u)(1-u^2) \qquad \text{...(6.44)}$$

$$\therefore \quad \int\frac{du}{\sqrt{f(u)}}=\int dt \qquad \text{...(6.45)}$$

যেখানে $f(u)\equiv(\alpha-\beta u)(1-u^2)-(\mu-\lambda u)^2$ ...(6.46)

দুর্ভাগ্যক্রমে (6.45) সমীকরণটির বিশ্লেষণী সমাধান করা যায় না। এই সমীকরণে θu অর্থাৎ θ-ই

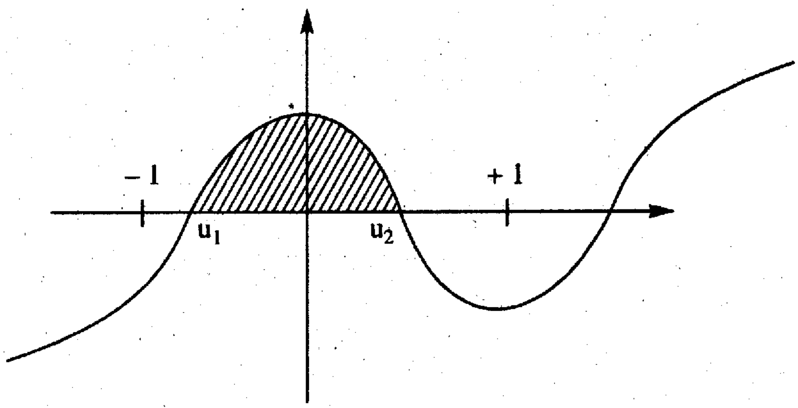


চিত্র 6.16

একমাত্র চলরাশি। t-এর সঙ্গে θ-র সম্পর্ক জানতে পারলে (6.42) সমীকরণের সাহায্যে $\dot{\phi}$ পাওয়া যায়

এবং $\dot{\theta}$ ও $\dot{\phi}$ জানতে পারলে (6.41b) সমীকরণের সাহায্যে $\dot{\psi}$ জানা যাবে। এই প্রকার সমাধান না করে অন্যভাবে আমরা এখন প্রতিসম লাটিমের গতি সংক্রান্ত বিশ্লেষণ করতে পারব।

$u = \cos\theta$ এর মান -1 এবং $+1$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ। কিন্তু আমরা যদি সেটা ভুলে গিয়ে u-কে $-\infty$ থেকে $+\infty$-র মধ্যে সীমাবদ্ধ ধরে নিই তাহলে দেখব, f(u)-র মধ্যে প্রধান পদটি হল βu^3। সেজন্য $u \to \pm\infty$ হলে $f(u) \to \pm\infty$ আবার যখন $u = \pm 1$, সেক্ষেত্রে $f(u) < 0$ (যদি $\mu = \pm\lambda$ না হয়)। এই দুটি সীমাবদ্ধতা মেনে নিলে u-এর সাথে f(u)-র লেখচিত্রটি 5 ধরনের হতে পারে।



চিত্র 6.17

যেহেতু (6.45) সমীকরণে $\sqrt{f(u)}$ পদটি আছে, বাস্তব θ অর্থাৎ যখন $-1 \le u \le +1$ -এর সীমাবদ্ধতা মেনে f(u) কে ধনাত্মক হতে হবে। তাই চিত্র (6.16) কোনও বাস্তব গতির বিবরণ দিতে পারবে না। কিন্তু চিত্র (6.17)-র আচ্ছাদিত অংশ লাটিমের গতির বিবরণ দিতে পারে। এক্ষেত্রে লাটিমের অয়নবিচলন $\theta_1 = \cos^{-1} u_1$ এবং $\theta_2 = \cos^{-1} u_2$-এর মধ্যে সীমাবদ্ধ।

● **গতির প্রারম্ভিক শর্ত (initial candities)**

আমরা লাটিমের গতির প্রকৃতি সংক্রান্ত কিছু মূল তথ্য সহজেই পেতে পারি। ধরে নেওয়া যায় গতির প্রারম্ভে $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0,\ \ \dot{\psi} \neq 0$। অর্থাৎ প্রথমে লাটিমটির কেবমলাত্র ঘূর্ণন আছে পুরঃসরণ বা অয়নবিচলন কিছু নেই। (6.42) সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$b = au_0$ যেখানে u_0 হল u-এর প্রারম্ভিক মান। আবার এই মান এবং (6. 43a) ও (6.43b) এর সাহায্যে পাওয়া যায় $\mu = \lambda u_0$ এবং (6.44) সমীকরণের সাহায্যে পাওয়া যায়, $\alpha = \beta u_0$। ফলে (6.44) সমীকরণকে লেখা যায়,

$$\dot{u}^2 = -\lambda^2 (u_0 - u)^2 + \beta (u_0 - u)(1 - u^2) \qquad ...(6.47)$$

এবার আমরা লাটিমের গতিকে আরও একটু বিশিষ্টতা দিয়ে নির্দিষ্ট করব। আমরা ধরে নেব লাটিমের ঘূর্ণন গতি খুবই বেশি, অর্থাৎ এর গতিশক্তি >> স্থিতিশক্তি

এখন স্থিতিশক্তি = $mgl\cos\theta \le mgl = \frac{A\beta}{2}$

প্রারম্ভিক গতিশক্তি

$$T_0 = \frac{1}{2}C\dot{\psi}^2 = \frac{a^2}{2C} = \frac{A^2\lambda^2}{2C}$$

দ্রুত ঘূর্ণনশীল লাটিম হবার জন্য $\frac{A\beta}{2} << \frac{A^2\lambda^2}{2C}$

$$\text{বা} \quad \frac{\beta}{\lambda^2} << \frac{A}{C} \qquad \ldots(6.48)$$

যদিও $A \ne C$ আমরা ধরে নেব $\frac{A}{C}$ খুব বড়ো নয়। সুতরাং (6.48) থেকে আমরা পাই $\frac{\beta}{\lambda^2} \to 0$।

এবার আমরা আবার ফিরে যাই সমীকরণ (6.47)-এ।

$\dot{u} = 0$ যখন $u = u_0$। ধরি $u = u_1$ হলে $\dot{u}$ আবার 0 হয়।

$$\therefore \quad -\lambda^2(u_0 - u_1)^2 + \beta(u_0 - u_1)(1 - u_1^2) = 0$$

$$\text{বা} \quad (u_0 - u_1) = \frac{\beta}{\lambda^2}(1 - u_1^2) \to 0$$

অর্থাৎ u_0 এবং u_1-র মধ্যে তফাৎ সামান্যই। ঘূর্ণনশীল লাটিমের ক্ষেত্রে অতি অল্পই অয়ন বিচলন হয়।

যেহেতু $(u_0 - u_1) \to 0$

আমরা ধরতে পারি $1 - u^2 \sim 1 - u_0^2 \sim \sin^2\theta_0$

$$\therefore \quad \dot{u}^2 = -\lambda^2(u_0 - u)^2 + \beta\sin^2\theta_0(u_0 - u)$$

$$= -\lambda^2\left[(u_0 - u) - \frac{\beta\sin^2\theta_0}{2\lambda^2}\right]^2 + \frac{\beta^2\sin^4\theta_0}{4\lambda^2}$$

$$= -\lambda^2(u - \bar{u})^2 + \frac{\beta^2\sin^4\theta_0}{4\lambda^2}$$

যেখানে $\bar{u} = u_0 - \dfrac{\beta \sin^2 \theta_0}{2\lambda^2}$

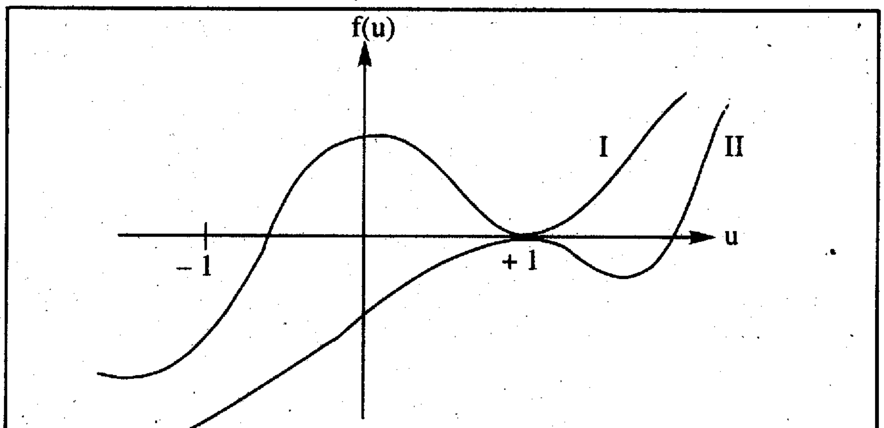
বা, $$\left[\frac{d}{dt}(u - \bar{u})\right]^2 + \lambda^2(u - \bar{u})^2 = \frac{\beta^2 \sin^4 \theta_0}{4\lambda^2}$$

এই সমীকরণটি সরল দোলগতির শক্তি সমীকরণ। অর্থাৎ ঘূর্ণনশীল লাটিমের অয়নবিচলন গতিটি সরল দোলগতি হয়।

এবার যদি আমরা প্রারম্ভিক শর্তকে আরও একটু সহজ করে দিই, যদি ধরে নিই $u_0 = 1$ অর্থাৎ লাটিমটি উল্লম্বভাবে ঘূর্ণন করেছে তবে (6.47) নং সমীকরণটিকে লেখা যায়

$$\dot{u}^2 = (1 - u)^2\left[-\lambda^2 + \beta(1 + u)\right] \quad \text{...(6.49)}$$

অর্থাৎ $f(u) = 0$ সমীকরণের তিনটি বীজের দুটি $u = 1$। অর্থাৎ এক্ষেত্রে $f(u) - u$ লেখচিত্রটি নীচের দুটির যে কোনও একটি হতে পারে। II নং বক্ররেখাটির ক্ষেত্রে লাটিমটির প্রারম্ভিক গতির কোনও পরিবর্তন হয় না। অর্থাৎ যদি (6.49)-এ u-এর মানটি 1 এর চেয়ে বেশি হয়, তবে সেটি ঘুমন্ত লাটিমের (sleeping top) শর্ত বোঝাবে। এক্ষেত্রে লাটিমের ঘূর্ণন (spin) ছাড়া অন্য কোনও গতিই সম্ভব নয়। $u > 1$ হবার শর্ত হল



চিত্র 6.18

$$1 + u_1 = \frac{\lambda^2}{\beta} > 2$$

বা, $\dfrac{C^2}{A}\dot{\psi}^2 > 4mgl$ বা, $\dot{\psi} > \left(\dfrac{4mglA}{C^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ (6.50)

ঘূর্ণন গতি $\left(\frac{4mglA}{C^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ -এর চেয়ে বড়ো হলেই ঘুমন্ত লাটিম পাওয়া যায়। কিন্তু ঘর্ষণ বলের জন্য ঘুমন্ত লাটিমের ঘুম ভাঙে অর্থাৎ পুরঃসরণ ও অয়নবিচলন শুরু হয়।

6.11 সারাংশ

এই এককটিতে আমরা দেখিয়েছি যে দৃঢ় বস্তুর স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হবে 6 এবং অয়লারের উপপাদ্য অনুযায়ী দৃঢ় বস্তুর সাধারণ গতিকে চলন এবং ঘূর্ণনের সমন্বয় হিসেবে ভাবা যায়। আমরা আরও দেখিয়েছি কোনো অক্ষ বা স্থির বিন্দুর সাপেক্ষে আবর্তনরত দৃঢ় বস্তুর প্রত্যেক বিন্দুর কৌণিক বেগ সমান। আবর্তনরত দৃঢ়বস্তুর গতিশক্তিকে লেখা যায়,

$$T = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta$$

জড়তা ভ্রামকের এই টেনসরটি একটি ক্রম প্রতিসম টেনসর। যে কোনও প্রতিসম টেনসরকে কর্ণীকরণ করা যায়। অতএব, এমন এক নির্দেশতন্ত্র পাওয়া সম্ভব যেখানে $I_{\alpha\beta}$ কে টেনসরে রূপান্তরিত করা যায়। যে নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে এই কর্ণীকরণ করা হয় তাকে প্রধান নির্দেশতন্ত্র বলে।

জড়তা ভ্রামকের সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য অনুসারে মূল বিন্দুর মধ্য দিয়ে কোনো অক্ষের সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক I হলে ঐ অক্ষ থেকে a দূরত্বে কোনো সমান্তরাল অক্ষের সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক হবে

$$I' = I + Ma^2$$

অভিলম্ব অক্ষের উপপাদ্য অনুসারে কোনো প্রতিসম বস্তুর প্রতিসম অক্ষে জড়তা ভ্রামক I_3 হলে এবং তার লম্ব সমতলে অবস্থিত অন্য দুই প্রধান অক্ষের জড়তা ভ্রামক I_1 এবং I_2 হলে

$$I_3 = I_1 + I_2 \text{ হবে।}$$

আমরা এই এককে প্রতিসম কিছু বিশেষ ধরনের বস্তুর জড়তা ভ্রামক নির্ণয় করেছি।

অয়লারীয় কোণের সংজ্ঞা দিয়ে দৃঢ় বস্তুর সঙ্গে গতিশীল অক্ষের সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুর কৌণিক বেগ নির্ণয় করেছি। তা হল

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{\text{body}} = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\psi\dot{\varphi} + \cos\psi\dot{\theta} \\ \sin\theta\cos\psi\dot{\varphi} - \sin\psi\dot{\theta} \\ \cos\dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

বলমুক্ত আবর্তনের ক্ষেত্রে আমরা অয়লারের গতীয় সমীকরণ পেয়েছি

$$\frac{d}{dt}(I_1w_1) - (I_2 - I_3)w_2w_3 = 0$$

$$\frac{d}{dt}(I_2w_2) - (I_3 - I_1)w_3w_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt}(I_3w_3) - (I_1 - I_2)w_1w_2 = 0$$

এই সমীকরণের সাহায্যে প্রতিসম বস্তুর ক্ষেত্রে আমরা দেশশঙ্কু এবং দেহশঙ্কুর সংজ্ঞা দিয়েছি। বিশ্লেষণী পদ্ধতিতে নির্ণীত ফল আমরা পৃথিবীর আবর্তনের ক্ষেত্রে মেলে কিনা যাচাই করেছি। পরিশেষে প্রতিসম লাট্টুর আবর্তন গতি আমরা ল্যাগ্রাঞ্জের সমীকরণের সাহায্যে বিশ্লেষণ করেছি। এই বিশ্লেষণে উদ্ভূত উপবৃত্তীয় সমাকল (elliptic integral) হল

$$\int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = \int dt$$

গাণিতিক সূত্রের সাহায্যে এর সমাধান পাওয়া যায় না। তাহলেও লেখচিত্রের সাহায্যে আমরা লাটিমের গতিশক্তি বিশ্লেষণ করতে সমর্থ হয়েছি।

6.12 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. a, b, c বাহুবিশিষ্ট আয়তাকার সমসত্ত্ব বস্তুর দুটি অনুরূপ বিপরীত কোণের যোগকারী রেখার সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক কত?

2. কৌণিক ভরবেগ এবং রৈখিক ভরবেগের ভ্রামকের সমান হবার শর্ত কি?

3. কৌণিক বেগ ভেক্টর $\vec{w}$ এবং কৌণিক ভরবেগ ভেক্টর $\vec{L}$ এর অভিমুখ কখন সমান হবে? সেই অবস্থায় জড়তা ভ্রামক এবং কৌণিক ভরবেগের সম্পর্ক কী হবে?

4. সুষম সমসত্ত্ব বেলনের দৈর্ঘ্য এবং ব্যাসার্ধের মধ্যে কী সম্পর্ক থাকলে জড়তা ভ্রামকের উপগোলীয় আকার গোলীয় হবে?

5. একটি লাটিমের ল্যাগ্রাঞ্জিয়নকে নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়। লাটিমের কার্যকরী স্থিতিবিভব নির্ণয় করুন।

$$\alpha = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2}C(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 - mgl\cos\theta$$

6. স্থির নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে কৌণিক বেগের মান কি হবে?

6.13 উত্তরমালা

1. (6.20a), (6.20b) এবং (6.20c) সমীকরণে মূলবিন্দুগামী তিনটি প্রধান অক্ষের জড়তা ভ্রামক দেওয়া হয়েছে। বিপরীত কোণ যোগকারী ভেক্টরটির একক ভেক্টর হবে $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\left(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}\right)$

অতএব এবার (6.13) সমীকরণ অনুযায়ী আলোচ্য অক্ষের সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক নির্ণয় করুন।

2. রৈখিক ভরবেগের ভ্রামক $\doteq \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

$$= \sum \left\{ \vec{r}_i \times m(\vec{u} + \vec{w} \times \vec{r}_i) \right\}$$

$$= \sum \vec{r}_i \times m\vec{u} + \sum \left\{ \vec{r}_i \times m(\vec{w} \times \vec{r}_i) \right\}$$

$$= \left(\sum m\vec{r}_i \right) \times \vec{u} + \sum \left\{ \vec{w} m r_i^2 - m\,\vec{r}_i\,(\vec{r}_i \,.\, \vec{w}_i) \right\}$$

$$= M\vec{R} \times \vec{U} + \sum \left\{ m\vec{r}_i^2\,\vec{w} - m(\vec{r}_i \,.\, \vec{w}_i)\,\vec{r}_i \right\}$$

যদি ভরকেন্দ্রে মূলবিন্দু ধরা হয় তবে,

$$\left(\sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i \right)_\alpha = \sum \left\{ m r_i^2 w_\alpha - m(x_i)_\beta w_\beta (x_i)_\alpha \right\}$$

$$= \sum \left\{ m r_i^2 \delta_{\alpha\beta} w_\beta - m(x_i)_\alpha (x_i)_\beta w_\beta \right\}$$

$$= w_\beta \sum m \left\{ r_i^2 \delta_{\alpha\beta} - (x_i)_\alpha (x_i)_\beta \right\}$$

$$= w_\beta I_{\alpha\beta}$$

ল্যাগ্রাঞ্জীয় পদ্ধতিতে কৌণিক ভরবেগ হল

$$L_\alpha = \frac{\partial L}{\partial w_\alpha} = \frac{\partial (T - V)}{\partial \omega_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial w_\alpha} - \frac{\partial V}{\partial w_\alpha}$$

$$= \frac{\partial}{\partial w_\alpha}\left(\frac{1}{2} I_{\beta\gamma} w_\beta w_\gamma\right) - \frac{\partial V}{\partial w_\alpha}$$

$$= \frac{1}{2} I_{\beta\gamma} \partial_{\alpha\beta} w_\gamma + \frac{1}{2} I_{\beta\gamma} w_\beta \partial_{\alpha\gamma} - \frac{\partial V}{\partial w_\alpha}$$

$$\therefore \quad L_\alpha = \frac{1}{2} I_{\alpha\gamma} w_\gamma + \frac{1}{2} I_{\beta\alpha} w_\beta - \frac{\partial V}{\partial w_\alpha}$$

$$= I_{\alpha\beta} w_\beta - \frac{\partial V}{\partial w_\alpha}$$

অতএব কৌণিক ভরবেগ এবং রৈখিক ভরবেগের ভ্রামক সমান হবে যদি $\frac{\partial V}{\partial w_\alpha} = 0$ হয়।

3. $L_\alpha = I_{\alpha\beta} w_\beta = n w_\alpha$ হবে যদি $I_{\alpha\beta} = n\delta_{\alpha\beta}$ হয়। (6.8) নং সমীকরণের সাথে তুলনা করলে দেখা যায়

$$n\delta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \sum_i m_i r_i^2 \text{ হচ্ছে}$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে $n = \sum m_i r_i^2$

$$\therefore \quad L_1 = \left(\sum m_i r_i^2\right) w_1 = I_{11} w_1$$

$$L_2 = \left(\sum m_i r_i^2\right) w_2 = I_{22} w_2$$

∴ এক্ষেত্রে কৌণিক বেগের উপাংশগুলির সাথে জড়তা ভ্রামক গুণ করলে কৌণিক ভরবেগ পাওয়া যাবে।

4. প্রতিসাম্যের জন্য বেলনের কেন্দ্রগ তিনটি প্রধান অক্ষগুলির একটি হল বেলনের অক্ষ, অন্য দুটি তার অভিলম্ব তলে কেন্দ্রগামী দুটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা। অর্থাৎ (6.24) এবং (6.25) নং সমীকরণ অনুযায়ী .

$$I_1 = \frac{1}{2} M R^2$$

$$I_2 = I_3 = M\left(\frac{L^2}{12} + \frac{R^2}{4}\right)$$

জড়তা ভ্রামকের উপগোলক হল

$$I_1 s_1^2 + I_2 s_2^2 + I_3 s_3^2 = 1$$

বা, $I_1 s_1^2 + I_2 (s_2^2 + s_3^2) = 1$

এই উপগোলকটি গোলীয় হবে যদি $I_1 = I_2 = I_3$ হয়

অর্থাৎ $\frac{1}{2}MR^2 = \frac{ML^2}{l_2} + \frac{MR^2}{4}$

বা, $\frac{1}{4}MR^2 = M\frac{L^2}{12}$ বা $R^2 = \frac{L^2}{3}$ $\therefore R = \frac{L}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}L}{3}$

5. লক্ষ করুন এই ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানটি (6.40) সমীকরণের ল্যাগ্রাঞ্জিয়ানের সাথে অবিকল এক। এই ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান থেকে দেখুন আমরা পেয়েছি (6.41d) সমীকরণ

$$\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A\frac{(b-a\cos\theta)^2}{A^2\sin^2\theta} + \frac{a^2}{2C} + mgl\cos\theta = E$$

বা $\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A\left(\frac{b-a\cos\theta}{A\sin^2\theta}\right)^2\sin^2\theta + mgl\cos\theta = E - \frac{a^2}{2C}$

$\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2$ কে θ-গতির দিকে গতিশক্তি ধরলে

আমরা একটা কার্যকরী বিভব

$V_{elf} = \frac{1}{2}A\left(\frac{b-a\cos\theta}{A\sin^2\theta}\right)^2\sin^2\theta + mgl\cos\theta$ পাই।

6. লক্ষ করুন, (6.30) নং সমীকরণ

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{body} = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\psi\dot{\phi} + \cos\psi\dot{\theta} \\ \sin\theta\cos\psi\dot{\phi} - \sin\psi\dot{\theta} \\ \cos\theta\dot{\phi} + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{body} = BCD\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{fixed}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{fixed} = (BCD)^{-1}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{body} = \tilde{D}\tilde{C}\tilde{B}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{body}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\dot{\theta} + \sin\theta\sin\phi\dot{\psi} \\ \sin\phi\dot{\theta} - \sin\theta\cos\phi\dot{\psi} \\ \dot{\phi} + \cos\theta\dot{\psi} \end{pmatrix}$$

একক 7 ❑ অতি অল্প বিস্তারের কম্পন

গঠন

7.1 প্রস্তাবনা

আমাদের চারদিকে দৃষ্টিপাত করলে আমরা কম্পনের বহু নিদর্শন দেখতে পাই। ঘড়ির পেন্ডুলাম বা গাছের ডালে ঝোলানো দোলনার দোলন, বাজনার তারের কম্পন, ওজনদাঁড়ির পাল্লার ওঠানামা এসব আপনি নিশ্চয়ই লক্ষ করেছেন। প্রকৃতিতে যে সব কম্পন দেখা যায় সেগুলিকে সবক্ষেত্রে ঠিক সরল দোলগতি বলা যায় না। প্রথমত, দোলনশীল বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বল সাম্যাবস্থা থেকে বস্তুর সরণের ঠিক সমানুপাতী হয় না, বরং সরণের উচ্চতর ঘাতের সঙ্গো সমানুপাতী কিছু বলও বস্তুর উপর ক্রিয়া করে। এক্ষেত্রে দোলনগতি একটিমাত্র কম্পাঙ্কে হয় না। কম্পনের মূলসুরের সঙ্গো উচ্চতর কম্পাঙ্কের অনেক উপসুর মিশ্রিত থাকে। দ্বিতীয়ত, কম্পনশীল বস্তু বা বস্তুতন্ত্রের উপর নানা ধরনের মন্দন বল ক্রিয়া করে। অন্যদিকে বস্তুতন্ত্রের অন্তর্গত এমন একাধিক অংশ থাকতে পারে যার প্রতিটি স্বতন্ত্রভাবে কম্পনক্ষম কিন্তু একে অপরের সঙ্গো যুগ্মিত থাকায় একটির কম্পন অন্যগুলির কম্পনকে প্রভাবিত করে।

এ জাতীয় বস্তুতন্ত্রের কম্পনের সার্বিক সমাধান আপনার কাছে নিশ্চয়ই এক জটিল গাণিতিক সমস্যা বলে মনে হচ্ছে। কিন্তু কয়েকটি সরলীকরণ মেনে নিলে এ ধরনের সমস্যার সুষ্ঠু সমাধান পাওয়া যেতে পারে। এক্ষেত্রে আমরা যে মূল অঙ্গীকারটি ধরে নেব তা হল, কম্পনের বিস্তার অতি অল্প মানে সীমিত থাকে। বিস্তার অতি অল্প হওয়ায় প্রত্যাবর্তী বলের মধ্যে যে অংশগুলি সরণের বর্গ, ঘন বা উচ্চতর ঘাতের সমানুপাতী হয়, সেগুলিকে উপেক্ষা করা যায় অর্থাৎ প্রত্যাবর্তী বল সরণের সমানুপাতী বলে ধরা যায়। এর ফলে কম্পনের মূলসুরের কম্পাঙ্ক ছাড়া অন্য কম্পাঙ্কগুলি অনুপস্থিত থাকে। কম্পনের বিস্তার অতি অল্প হলে বস্তুর বেগও অল্প হয় এবং স্বাভাবিকভাবেই মন্দনের প্রভাবও উপেক্ষা করা যায়।

এই এককে আমরা একাধিক স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার (degree of freedom) বস্তুতন্ত্রের গতির বিশ্লেষণ করব। এই বিশ্লেষণ পদ্ধতি যুগ্মিত কম্পন এবং স্বনবিদ্যার বিভিন্ন ক্ষেত্রে কম্পনশীল বস্তুর গতি বিশ্লেষণের কাজে লাগে। এই পদ্ধতিতে সনাতন বলবিদ্যার প্রয়োগ হলেও এটি একাধিক পরমাণুবিশিষ্ট অণুর কম্পন ও আণবিক বর্ণালির বিশ্লেষণেও কার্যকরী হয়।

উদ্দেশ্য

এই এককটির সাহায্যে আপনি অতি অল্প বিস্তারের কম্পনের তাত্ত্বিক বিশ্লেষণ পদ্ধতিটি আয়ত্ত করতে পারবেন। আপনি বিশেষ যে কাজগুলি করতে সক্ষম হবেন সেগুলি হল ঃ

- যে কোনো স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্রের ক্ষেত্রে লাগ্রাঞ্জীয় সমীকরণ ব্যবহার করে গতি সমীকরণগুলি নির্ণয় করতে পারবেন।
- যে কোনো সংখ্যক গতি সমীকরণ থেকে মেট্রিক্স পদ্ধতি ব্যবহার করে বস্তুতন্ত্রের স্বাভাবিক কম্পাঙ্কগুলি বার করতে পারবেন এবং সংশ্লিষ্ট সাধারণ কম্পনশৈলীগুলি বর্ণনা করতে পারবেন।
- দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্রের উদাহরণ হিসাবে যুগ্মিত দোলক, জোড়া দোলক ও প্রতিসম সরলরৈখিক ত্রিপরমাণুক অণুর কম্পনের বিশ্লেষণ করতে পারবেন।
- টান দেওয়া তারের সংলগ্ন দুই, তিন বা ততোধিক সংখ্যক অনুরূপ বিন্দুভরের কম্পনের বিশ্লেষণ করতে পারবেন।

7.2 দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্র

আমরা প্রথমে একটি সরল বস্তুতন্ত্র কল্পনা করব যেটি সংরক্ষী (conservative) এবং যার স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা দুই। x_1 ও x_2, এই দুই সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক (generalised coordinates) দিয়ে বস্তুতন্ত্রটির অবস্থা সম্পূর্ণরূপে বর্ণনা করা যায়।

প্রথমে বস্তুতন্ত্রের স্থৈতিক শক্তির কথা চিন্তা করা যাক। ধরে নিন, স্থৈতিক শক্তি V কেবলমাত্র x_1 ও x_2 এর উপর নির্ভরশীল (x_1, x_2 ইত্যাদির উপর নয়) এবং যখন $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}$, তখন V এর মান নিম্নতম। $V(x_1, x_2)$ কে (x_{10}, x_{20}) বিন্দুকে ঘিরে শ্রেণিতে প্রকাশ করা যায় ঃ

$$V(x_1, x_2) = V(x_{10}, x_{20}) + \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)_0 (x_1 - x_{10}) + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)_0 (x_2 - x_{20})$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right)_0 (x_1 - x_{10})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right)_0 (x_2 - x_{20}) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_0 (x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20})$$

$$+ \ldots \tag{7.1}$$

(7.1) সমীকরণটির বেশ কিছুটা সরলীকরণ করা যায়। লক্ষ করুন ঃ

(i) $V(x_{10}, x_{20})$ হল স্থৈতিক শক্তির নিম্নতম মান। এই মান যদৃচ্ছ (arbitrary) কেননা স্থৈতিক শক্তির পরিবর্তনই বস্তুর গতিকে নির্ধারিত করে, ঐ শক্তির প্রকৃত মান ইচ্ছামতো নেওয়া যায়। আমরা $V(x_{10}, x_{20}) = 0$ ধরে নেব।

(ii) x_1 ও x_2 নির্দেশাঙ্ক অভিমুখে বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বলের উপাংশ যথাক্রমে $-\frac{\partial V}{\partial x_1}$ ও $-\frac{\partial V}{\partial x_2}$। যদি (x_{10}, x_{20}) বিন্দুতে বস্তুতন্ত্রটির স্থৈতিক শক্তি সর্বনিম্ন হয়, তবে ঐ বিন্দুটি সেটির সাম্যবিন্দু এবং ঐ বিন্দুতে কোনো বল ক্রিয়াশীল থাকতে পারে না। সুতরাং $\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)_0 = 0$

(iii) এছাড়া (x_{10}, x_{20}) বিন্দুকে মূলবিন্দু হিসাবে ধরে নিয়ে আমরা দুটি নূতন নির্দেশাঙ্ক ব্যবহার করতে পারি ঃ $q_1 = x_1 - x_{10}$ এবং $q_2 = x_2 - x_{20}$। যেহেতু $dq_1 = dx_1, dq_2 = dx_2$।

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \text{ ও } \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}$$

এখন আপনি 7.1 সমীকরণটিকে নূতন রূপে লিখতে পারেন ঃ

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2} v_{11} q_1^2 + \frac{1}{2} V_{22} q_2^2 + V_{12} q_1 q_2 \tag{7.2}$$

এখানে আমরা $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}$ ও $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}$ এর জায়গায় যথাক্রমে V_{11}, V_{22} ও V_{12} লিখেছি। এছাড়া, যেহেতু আমরা কেবলমাত্র অতি অল্প বিস্তারের কম্পন নিয়ে আলোচনা করতে যাচ্ছি, সেজন্য q_1 ও q_2 এর দুই এর অধিক ঘাতের (যথা $q_1^3, q_1^2 q_2$ ইত্যাদি) রাশিগুলিকে আমরা উপেক্ষা করেছি।

(7.2) সমীকরণটিকে এভাবেও লেখা যায় ঃ

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j V_{ij} q_i q_j \tag{7.3}$$

এখানে $i, j = 1, 2$ এবং $V_{ij} = V_{ji}$ ।

বস্তুতন্ত্রের গতিশক্তিকেও একইভাবে লেখা যায়—

$$T(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j T_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j \tag{7.4}$$

এখানে T_{ij} সহগগুলি q_1 ও q_2 এর উপর নির্ভরশীল হতে পারে।

[উদাহরণস্বরূপ, সমতলীয় গোলীয় নির্দেশতন্ত্রে বস্তুকণার গতিশক্তি $T(\dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} mr^2\dot{\theta}^2$ । এখানে সহগগুলি $\frac{1}{2} m$ এবং $\frac{1}{2} mr^2$]

(7.3) ও (7.4) সমীকরণ দুটি থেকে আপনি লাগ্রাঞ্জীয় অপেক্ষক পাবেন—

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j T_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2}\sum_i \sum_j V_{ij} q_i q_j \tag{7.5}$$

এবার আপনি লাগ্রাঞ্জীয় গতি সমীকরণগুলি লিখতে পারেন—

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(T_{11}\dot{q}_1 + T_{12}\dot{q}_2) + (V_{11}q_1 + V_{12}q_2) = 0$$

বা, $$T_{11}\ddot{q}_1 + T_{12}\ddot{q}_2 + V_{11}q_1 + V_{12}q_2 = 0 \tag{7.6 (a)}$$

একই উপায়ে $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$ থেকে

$$T_{12}\ddot{q}_1 + T_{22}\ddot{q}_2 + V_{21}q_1 + V_{22}q_2 = 0 \tag{7.6 (b)}$$

(7.6 a) ও (7.6 b) সমীকরণদুটিকে একত্রিত করে মেট্রিক্স সমীকরণের রূপে লেখা যায়—

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0$$

বা $$T\ddot{q} + Vq = 0 \tag{7.7}$$

এখানে T ও V দ্বারা দুটি 2×2 বর্গমেট্রিক্স এবং $\ddot{q}$ ও q দ্বারা দুটি দুই সারির স্তম্ভ মেট্রিক্সকে বোঝানো হয়েছে।

(7.7) সমীকরণকে বাম দিক থেকে T^{-1} মেট্রিক্স দিয়ে গুণ করা যাক।

[আপনি নিশ্চয়ই জেনেছেন যে T এর অনোন্যক মেট্রিক্স T^{-1} এর সংজ্ঞা হল $T^{-1} = \mathrm{Adj}T / \mathrm{Det}\,T$

অর্থাৎ $(T^{-1})_{ij} = \mathrm{cof}\ T_{ij} / \mathrm{Det}\,T$

এক্ষেত্রে $$T^{-1} = \begin{pmatrix} T_{22} & -T_{12} \\ -T_{21} & T_{11} \end{pmatrix} / (T_{11}.T_{22} - T_{12}.T_{21})]$$

এখন আপনি পাবেন $T^{-1}T\ddot{q} + T^{-1}Vq = 0$

বা, $I\ddot{q} + Mq = 0$

যেখানে $T^{-1}\,T = I$ (I = একক মেট্রিক্স) এবং $M = T^{-1}V$ (7.8)

কোন বস্তুতন্ত্রে সবকটি সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক বরাবর একই কম্পাঙ্কে কম্পন হতে পারে। এই কম্পাঙ্ককে আমরা স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক (normal frequency) নামে অভিহিত করব। স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সংখ্যা স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার সমান হয়ে থাকে। আমরা যে দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্রের কথা আলোচনা করছি, তার ক্ষেত্রে q_1 ও q_2 স্বাভাবিক কম্পাঙ্কে আন্দোলিত হয়। অর্থাৎ এগুলিকে লেখা যায় $q_1 = q_{10}e^{iwt}$, $q_2 = q_{20}e^{iwt}$ রূপে, যেখানে $w = 2\pi \times$ স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক এবং q_{10}, q_{20} দুই নির্দেশাঙ্ক বরাবর কম্পনের বিস্তার।

এখন $\ddot{q}_1 = -w^2 q_1, \ddot{q}_2 = -w^2 q_2$

সুতরাং $\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} = -w^2 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ এবং (7.8) মেট্রিক্স সমীকরণটিকে লেখা যায় ঃ

$$-Iw^2 q + Mq = 0$$

বা, $$(M - w^2\,I)\,q = 0 \tag{7.9}$$

M ($=T^{-1}V$) মেট্রিক্সের পদগুলিকে M_{11}, M_{12} ইত্যাদি লিখে এই মেট্রিক্স সমীকরণটিকে লেখা যায় ঃ

$$\begin{pmatrix} M_{11} - w^2 & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad [7.10\,(a)]$$

7.10 (a) সমীকরণের অর্থ Det $(M - w^2 I) = 0$,

$$\text{বা, } (M_{11} - w^2)(M_{22} - w^2) - M_{12} M_{21} = 0 \qquad [7.10\,(b)]$$

এটি 'w^2'-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, যেটির সমাধান করে w^2 এর দুটি মান পাওয়া যেতে পারে। সুতরাং এক্ষেত্রে আপনি দুটি সাধারণ কম্পাঙ্ক পাবেন এবং এর যে কোনো কম্পাঙ্কে q_1 ও q_2 রাশিগুলি একত্রে কম্পিত হতে পারে।

আপনার মনে প্রশ্ন জাগতে পারে, এই দুই কম্পাঙ্কে q_1 ও q_2 এর কম্পাঙ্কের বিস্তার কত হবে? যে কোনো মুহূর্তে q_1 ও q_2 এর অনুপাত নির্ণয় করা মোটেই শক্ত নয়। ধরুন, w^2 এর যে মানগুলি আপনি 7.10 (b) সমীকরণ থেকে পেয়েছেন সেগুলি হল w_1^2 ও w_2^2। 7.10 (a) মেট্রিক্স সমীকরণ থেকে

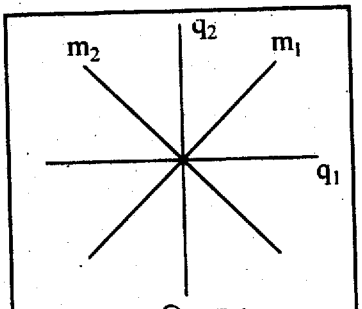
$$(M_{11} - w^2)q_1 + M_{12}q_2 = 0 \qquad \text{বা} \qquad \frac{q_1}{q_2} = -\frac{M_{12}}{M_{11} - w^2}$$

$$\text{এবং} \quad M_{21}q_1 + (M_{22} - w^2)q_2 = 0 \qquad \text{বা} \qquad \frac{q_1}{q_2} = -\frac{M_{22} - w^2}{M_{21}}$$

$\frac{q_1}{q_2}$ অনুপাতের যে দুটি রাশিমালা পাওয়া গেল, তার যে কোনো একটিতে w^2 এর জায়গায় w_1^2 ও w_2^2 বসিয়ে w^1 ও w_2 কৌণিক কম্পাঙ্কে কম্পনের ক্ষেত্রে q_1/q_2 অনুপাতের মান পাওয়া যায়। এই অনুপাত দুটি হল

$$q_1/q_2 = \frac{M_{12}}{w_1^2 - M_{11}} \qquad [7.11\,(a)]$$

$$\text{এবং} \qquad q_1/q_2 = \frac{w_2^2 - M_{22}}{M_{21}} \qquad [7.11\,(b)]$$



চিত্র 7.1

7.11 (a) ও (b) সম্বন্ধ দুটিকে একটি সমকোণী কার্তেজীয় নির্দেশাঙ্কে q_1 ও q_2 কে অক্ষ রূপে ধরে লেখচিত্র হিসাবে প্রকাশ করা যায় (চিত্র 7.1)। লেখচিত্র দুটি আসলে দুটি সরলরেখা, যেগুলির নতি w_1 ও w_2 স্বাভাবিক কৌণিক কম্পাঙ্কের ক্ষেত্রে যথাক্রমে $m_1 = (w_1^2 - M_{11}) / M_{12}$ ও $m_2 = M_{21} / (w_2^2 - M_{22})$। বস্তুতন্ত্রটি যখন w_1 অথবা w_2 কৌণিক কম্পাঙ্কে কম্পিত হয়, তখন q_1 ও q_2 নির্দেশাঙ্কগুলি এই সরলরেখা দুটির এক একটি বরাবর আন্দোলিত হতে

থাকে। বস্তুতন্ত্রের এই দুটি কম্পনশৈলীকে স্বাভাবিক কম্পনশৈলী (normal mode of oscillation) বলা হয়।

এ পর্যন্ত আপনি দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্রের অতি অল্প বিস্তারের কম্পন সম্বন্ধে জেনেছেন। এবার আমরা দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যায় সীমাবন্ধ না থেকে আরও সাধারণ একটি ক্ষেত্রের কথা বিবেচনা করব যেখানে স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার মান n।

7.3 n স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্র

আগের অনুচ্ছেদে আমরা বিশ্লেষণের যে পদ্ধতি অনুসরণ করেছি এক্ষেত্রেও আমরা সেটিই ব্যবহার করব। আমরা ধরে নিই যে বস্তুতন্ত্রটি সংরক্ষী এবং এর স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা n। অর্থাৎ বস্তুতন্ত্রের অবস্থা বোঝাতে $x_1, x_2, \ldots, x_n$, এই n সংখ্যক সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্কের প্রয়োজন।

পূর্বের মতো ধরা যাক এই বস্তুতন্ত্রের স্থৈতিক শক্তি $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ তখনই সর্বনিম্ন হয় যখন $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \ldots x_n = x_{n0}$। এখন আমরা V কে $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ বিন্দুর সন্নিহিত অঞ্চলে এভাবে প্রকাশ করতে পারি—

$$\begin{aligned}
&V(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \\
&+\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)_0 (x_1 - x_{10}) + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)_0 (x_2 - x_{20}) + \ldots + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)_0 (x_n - x_{n0}) \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right)_0 (x_1 - x_{10})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right)_0 (x_2 - x_{20})^2 + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2}\right)_0 (x_n - x_{n0})^2 \\
&+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_0 (x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20}) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3}\right)_0 (x_1 - x_{10})(x_3 - x_{30}) + \ldots
\end{aligned}$$

('0' পাদলিপিটি অবকলগুলির $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ বিন্দুতে নির্নীত মান বোঝাচ্ছে)

$$= V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) + \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_0 (x_i - x_{i0}) + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 (x_i - x_{i0})(x_j - x_{j0})$$

$+(x_i - x_{i0})$ এর উচ্চতর ঘাতের রাশিসমূহ (7.12)

এখন আপনি আগের অনুচ্ছেদের আলোচনা মতো $V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{40})$ কে শূন্য ধরে নিতে পারেন। উপরন্তু, সর্বনিম্ন স্থৈতিক শক্তির অবস্থাটিই সাম্যাবস্থা হওয়ায় এই অবস্থায় সাধারণীকৃত

বলের উপাংশগুলিকে, অর্থাৎ $\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_0$ প্রভৃতি রাশিকে আমরা শূন্য ধরতে পারি। এছাড়া $(x_i - x_{i0})$ কে q_i হিসাবে এবং $\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}$ রাশিকে V_{ij} হিসাবে নির্দেশ করে লেখা যায় ঃ

$$V(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j V_{ij} q_i q_j (i, j = 1, \ldots, n) \tag{7.13}$$

এখানে আমরা 'q' এর উচ্চতর ঘাতগুলিকে উপেক্ষা করেছি কেননা কম্পনের বিস্তার অতি অল্প বলে ধরা হয়েছে।

লক্ষ করুন, এই সমীকরণ 7.3 সমীকরণের অনুরূপ।

বস্তুতন্ত্রের গতিশক্তিকেও আগের মতো লেখা যায়

$$T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j (i, j = 1, \ldots, n) \tag{7.14}$$

এখন আমরা লাগ্রাঞ্জীয় অপেক্ষকটিকে লিখতে পারি ঃ

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j T_{ij}\, \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2}\sum_i \sum_j V_{ij} q_i q_j \tag{7.15}$$

আগের অনুচ্ছেদে আমরা দুটি লাগ্রাঁজীয় গতি সমীকরণ পেয়েছিলাম। কিন্তু এখন n-সংখ্যক সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক থাকায় আমরা n-সংখ্যক গতি সমীকরণ পেতে পারি ঃ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

এই সমীকরণে 7.15 সমীকরণ থেকে L-এর মান বসিয়ে আমরা পাই

$$\frac{d}{dt}\sum_j T_{ij}\dot{q}_j + \sum_j V_{ij} q_i = 0$$

$$\text{বা} \quad \sum_j T_{ij}\ddot{q}_j + \sum_j V_{ij} q_j = 0 \tag{7.16}$$

[আপনি ভাবতে পারেন 7.15 সমীকরণের $\frac{1}{2}$ উৎপাদকটি এই সমীকরণে অনুপস্থিত কেন। যখন $i = j$ তখন $\frac{1}{2} T_{ii}\, \dot{q}_i^2$ কে $\dot{q}_i$ দিয়ে অবকলনের ফলে $\frac{1}{2}$ উৎপাদকটি থাকে না। যখন $i \neq j$ তখন $\frac{1}{2} T_{ij}\, \dot{q}_i \dot{q}_j$ ও $\frac{1}{2} T_{ji}\, \dot{q}_j\, \dot{q}_i$ এই দুটি সমমান রাশি পাওয়া যায় যেগুলি যোগ করা হয়। সুতরাং সেক্ষেত্রেও $\frac{1}{2}$ উৎপাদকটি আর থাকে না।]

উপরের 7.16 সমীকরণটি আসলে n-সংখ্যক সমীকরণ কেননা $i = 1, 2, ..., n$। এগুলিকে আলাদা করে লিখলে পাবেন ঃ

$$T_{11}\ddot{q}_1 + T_{12}\ddot{q}_2 + \ldots + T_{1n}\ddot{q}_n + V_{11}q_1 + V_{12}q_2 + \ldots + V_{1n}q_n = 0$$

$$T_{21}\ddot{q}_1 + T_{22}\ddot{q}_2 + \ldots + T_{2n}\ddot{q}_n + V_{21}q_1 + V_{22}q_2 + \ldots + V_{2n}q_n = 0$$

$$T_{n1}\ddot{q}_1 + T_{n2}\ddot{q}_2 + \ldots + T_{nn}\ddot{q}_n + V_{n1}q_1 + V_{n2}q_2 + \ldots V_{nn}q_n = 0$$

উপরের n সংখ্যক সমীকরণকে আপনি সহজেই মেট্রিক্সের রূপে লিখতে পারেন ঃ

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \cdots & T_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \cdots \\ \ddot{q}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{n1} & V_{n2} & \cdots & V_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_n \end{pmatrix} = 0$$

বা $$T\ddot{q} + Vq = 0 \qquad (7.17)$$

যেখানে T ও V উভয়ই $n \times n$ বর্গমেট্রিক্স এবং $\ddot{q}$ ও q উভয়ই n সারির স্তম্ভমেট্রিক্স। 7.17 সমীকর টিকে বামদিক থেকে T^{-1} মেট্রিক্স দিয়ে গুণ করলে পাওয়া যাবে

$$T^{-1}T\ddot{q} + T^{-1}Vq = 0$$

বা $$I\ddot{q} + Mq = 0 \quad \text{যেখানে } T^{-1}T = I \text{ এবং } M = T^{-1}V \qquad (7.18)$$

এবার আমরা বস্তুতন্ত্রের স্বাভাবিক কম্পনশৈলীগুলি বিবেচনা করব। যদি কোন স্বাভাবিক কম্পনশৈলীর কৌণিক কম্পাঙ্ক w হয় তবে $q_1, q_2, \ldots q_n$ সবগুলিই ঐ কম্পাঙ্কে আন্দোলিত হতে থাকবে, অর্থাৎ প্রত্যেক q_i নির্দেশাঙ্কই e^{iwt} এর সমানুপাতী হবে। এক্ষেত্রে আমরা $\ddot{q} = -w^2q$ লিখতে পারি। (7.18) সমীকরণটির রূপ এখন হবে—

$$-Iw^2q + Mq = 0$$

বা, $$(M - w^2I)q = 0 \qquad 7.19\,(a)$$

যেখানে $I = n \times n$ একক মেট্রিক্স। 7.19 সমীকরণটির প্রকৃত রূপ হল ঃ

$$\begin{pmatrix} M_{11} - w^2 & M_{21} & \cdots & Mn_1 \\ M_{12} & M_{22} - w^2 & \cdots & Mn_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ M_{1n} & M_{2n} & \cdots & M_{nn} - w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ q_n \end{pmatrix} = 0 \qquad 7.19\,(b)$$

এই সমীকরণটি সিদ্ধ হওয়ার অর্থ $(M - w^2 I)$ মেট্রিক্স-এর ডিটারমিন্যান্টের মান শূন্য অর্থাৎ

$$|M - w^2 I| = 0 \qquad 7.20\,(a)$$

আপনি ইচ্ছা করলে 7.17 সমীকরণ থেকে সরাসরি পেতে পারেন

$$|V - w^2 T| = 0 \qquad 7.20\,(b)$$

7.19 (b) মেট্রিক্সটি লক্ষ করলে বুঝতে পারবেন যে এর ডিটারমিন্যান্টের একটি পদ হল

$$(M_{11} - w^2)(M_{22} - w^2)\ldots\ldots(M_{nn} - w^2)$$

যেটির মধ্যে 'w^2'-এর n তম ঘাত, অর্থাৎ $(w^2)^n$ পর্যন্ত রয়েছে।

সুতরাং $\text{Der}\,(M - w^2 I) = 0$ আসলে w^2 এর একটি n ডিগ্রির সমীকরণ। স্বভাবতই এর n সংখ্যক বীজ থাকবে। ধরা যাক এই বীজগুলি হল $w_1^2, w_2^2, \ldots, w_n^2$ । $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ই হল n সংখ্যক স্বাভাবিক কম্পনশৈলীর কৌণিক কম্পাঙ্ক।

w^2 এর বীজগুলি কি বাস্তব ?

এ প্রশ্ন আপনি নিশ্চয়ই করতে পারেন। 7.17 সমীকরণে $q \sim e^{iwt}$ ধরলে লেখা যায় $(V - w^2 T)q = 0$

এর অনুবন্ধী (conjugate) বিপর্যস্ত (transposed) সমীকরণটি হল

$$(V - \overline{w}_2 T)\overline{q} = 0$$

এখানে V ও T মেট্রিক্স দুটি প্রতিসম (symmetric) এবং বাস্তবরাশির দ্বারা গঠিত হওয়ায় এগুলি অপরিবর্তিত আছে। $\overline{w}_2$ রাশিটি w^2 এর অনুবন্ধী এবং $\overline{q}$ হল একটি সারি ও n স্তম্ভবিশিষ্ট একটি মেট্রিক্স যার পদগুলি q মেট্রিক্সের পদগুলির অনুবন্ধী। এখন উপরের দুটি মেট্রিক্স সমীকরণের প্রথমটিকে বামদিকে $\overline{q}$ দিয়ে এবং দ্বিতীয়টিকে বামদিকে q দিয়ে গুণ করলে পাওয়া যায়

$$\overline{q}\,V q - w^2\,\overline{q}\,T q = 0 \qquad 7.21\,(a)$$

$$q\,V\overline{q} - \overline{w}^2\,q\,T\,\overline{q} = 0 \qquad 7.21\,(b)$$

কিন্তু দেখুন, $q\,V\overline{q} = \sum_i q_i (V\overline{q})_i$

$$= \sum_i q_i \sum_j V_{ij}\overline{q}_j$$

$$= \sum_j \overline{q}_j \sum_i V_{ji} q_i \qquad (\because V_{ji} = V_{ij})$$

$$= \sum_j \overline{q}_j (V_q)_j = \overline{q}\,V q$$

$\therefore$ 7.21 (a) ও (b) সমীকরণ থেকে, $w^2 \bar{q} T q = \bar{w}^2 q T \bar{q}$

আগের মতো দেখানো যায় $\bar{q} T q = q T \bar{q}$ । উপরন্তু, T মেট্রিক্সের পদগুলির কোনটি নেগেটিভ নয়, বরং এক বা একাধিক পদ ধনাত্মক। সুতরাং $q T \bar{q} \neq 0$ । $\therefore w^2 = \bar{w}^2$ অর্থাৎ w^2 রাশিটি বাস্তব।

এবার আমরা স্বাভাবিক কম্পনশৈলীতে বিভিন্ন নির্দেশাঙ্ক বরাবর কম্পনের বিস্তারের অনুপাতগুলি নির্ণয় করব। আপনি আগেই দেখেছেন, n স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্রের n সংখ্যক স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক আছে। ধরা যাক, k-তম কম্পনশৈলীর ক্ষেত্রে w-এর মান w_k । i-তম নির্দেশাঙ্ক q_i এর সময়ের সঙ্গে পরিবর্তন এভাবে লেখা যায়

$$q_i = A_i e^{i w_k t}$$

যেখানে $A_i = q_i$ এর বিস্তার। 7.19 সমীকরণ থেকে আপনি পাবেন ঃ

$$\left(M - w_k^2 I\right) A = 0 \tag{7.22}$$

এখানে q এর মতো A একটি স্তম্ভ মেট্রিক্স।

7.22 সমীকরণটি আসলে n সংখ্যক রৈখিক সমীকরণ, যেগুলির মধ্যে $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ অজ্ঞাত। প্রতিটি সমীকরণের ডানদিকের রাশিটি শূন্য হওয়ায় কম্পনের বিস্তার $A_1, A_2, \ldots, A_n$ এর মান নির্দিষ্ট নয়। বরং প্রত্যেক সমীকরণকে A_1 (বা অন্য কোনো A_i) দ্বারা ভাগ করে $A_2/A_1, A_3/A_1, \ldots A_n/A_1$ নির্ণয় করা যায়। আমরা পরে নির্দিষ্ট সমস্যার সমাধানে এই কাজটি করব।

কোনো বস্তুতন্ত্র সাধারণভাবে একটিমাত্র স্বাভাবিক কম্পনশৈলীতে কম্পিত হয় না। বরং তার কম্পনে সব কম্পনশৈলী উপস্থিত থাকে এটি ধরে নেওয়াই ভালো। সেক্ষেত্রে t সময়ে কোনো এক নির্দেশাঙ্ক 'q_i' এর মান হবে।

$$q_i(t) = \sum_k A_{ik} e^{i w_k t}$$

এক্ষেত্রে A_{ik} = k-তম সাধারণ কম্পনশৈলীতে q_i এর বিস্তার। এই k-তম কম্পনশৈলীতে $q_1, q_2, \ldots q_n$ নির্দেশাঙ্কগুলির কম্পনের বিস্তার যথাক্রমে $A_{1k}, A_{2k}, \ldots, A_{nk}$ । ধরুন,

$$A_{1k}^2 + A_{2k}^2 + \ldots + A_{nk}^2 = \sum_i A_{ik}^2 = B_k^2$$

এবং $$A_{1k}/B_k = \alpha_{1k}, A_{2k}/B_k = \alpha_{2k}, \ldots, A_{nk}/B_k = \alpha_{nk}$$ ।

আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে $\sum \alpha_{ik}^2 = \sum A_{ik}^2/B_k^2 = 1$

অর্থাৎ কোনো এক n-মাত্রার নির্দেশতন্ত্রে B_k যেন একটি ভেক্টরের দৈর্ঘ্য, A_{ik} $(i = 1, 2 \ldots, n)$ তার উপাংশ এবং 'α_{ik}'-গুলি ঐ ভেক্টরের দিক-কোসাইন।

ভেক্টরের সঙ্গে তুলনাটি আরও কিছুদূর নিয়ে যাওয়া যায়। ধরুন, q_i নির্দেশাঙ্ক বরাবর একক দৈর্ঘ্যের ভেক্টর e_i। কোনো এক স্বাভাবিক কম্পনশৈলীতে বস্তুতন্ত্রের কম্পনকে যে n মাত্রার ভেক্টর দিয়ে নির্দেশ করা যায় তা হল ঃ

$$(A_{1k}e_1 + A_{2k}e_2 + \ldots + A_{nk}e_n)e^{iw_k t} = \left(\sum_i A_{ik}e_i\right)e^{iw_k t}$$

এই কম্পনের দিক বরাবর একক দৈর্ঘ্যের ভেক্টর পেতে হলে এর বিস্তার অর্থাৎ $\sum\limits_i A_{ik}e_i$ রাশিকে $\left[\sum A_{ik}^2\right]^{1/2}$ বা B_k দিয়ে ভাগ করতে হবে। এর ফলে আমরা পাই, k-তম কম্পনশৈলীর জন্য একক ভেক্টর

$$\sum (A_{ik}/B_k)e_i = \sum \alpha_{ik}e_i \qquad (7.23)$$

অতি অল্প বিস্তারের কম্পনকে বিশ্লেষণের সাধারণ পদ্ধতিটি আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পেরেছেন। এবার একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন। এর পর আমরা নির্দিষ্ট কয়েকটি ক্ষেত্রে পূর্বে আলোচিত পদ্ধতিটি ব্যবহার করব।

অনুশীলনী 1

(i) 7.6 (a, b) অথবা 7.16 সমীকরণগুলি অতি অল্প বিস্তারের কম্পনের গতি সমীকরণ। এগুলি কেবলমাত্র অতি অল্প বিস্তারের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য কেন?

(ii) w^2 এর মান ঋণাত্মক হতে পারে কি?

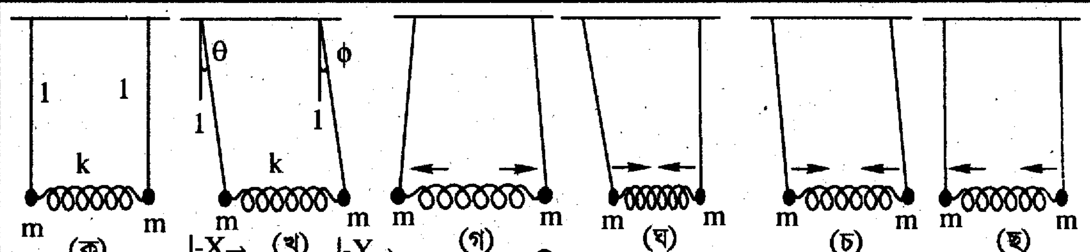
7.4 দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার যুগ্মিত দোলন

আগের অনুচ্ছেদে আপনি অতি অল্প বিস্তারের কম্পনের জন্য যে বিশ্লেষণ প্রণালী সম্বন্ধে জেনেছেন, এই অনুচ্ছেদে আমরা দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার কয়েকটি বস্তুতন্ত্রের ক্ষেত্রে তার প্রয়োগ করব।

7.4.1 যুগ্মিত দোলক

ধরা যাক, পাশাপাশি ঝোলানো দুটি অনুরূপ সরল দোলকের প্রতিটির দৈর্ঘ্য l এবং পিন্ডের ভর m। পিন্ডদুটি একটি ভরহীন স্প্রিং দ্বারা যুক্ত, যার স্প্রিং ধ্রুবক k। দোলক দুটি যখন খাড়াভাবে সাম্য অবস্থায় থাকে তখন স্প্রিংটি স্বাভাবিক অবস্থায় থাকে [চিত্র 7.2 (ক)]। যখন সেগুলি উল্লম্ব সমতলে থেকে আন্দোলিত হয়, তখন স্প্রিংটি প্রসারিত বা সংকুচিত হয়। যার ফলে পিণ্ডদুটির উপর সমমান ও বিপরীত বল ক্রিয়া করে। দোলকের সুতা ভরহীন ও অপ্রসার্য বলে ধরা হবে।

দোলক দুটির দোলনের বিস্তার অতি অল্প ধরে নিলে সাম্যাবস্থা থেকে পিন্ডদুটির সরণ x ও y কে অনুভূমিক বলে ধরে নেওয়া যায়। দোলনদুটির সাম্যাবস্থা থেকে কৌণিক সরণ θ ও ϕ কেও অতি ক্ষুদ্র কোণ বলে ধরা যায় [চিত্র 7.2 (খ)]।



চিত্র 7.2

দোলকের পিন্ড দুটির গতিশক্তি $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ ও $\frac{1}{2}m\dot{y}^2$ ।

সুতরাং বস্তুতন্ত্রের মোট গতিশক্তি

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

আমরা যদি x ও y কে দুটি সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক বলে ধরে নিই তবে T মেট্রিক্সটি লিখতে পারি ($T = \frac{1}{2}\sum\sum T_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ এর সঙ্গে তুলনা করে) ঃ

$$T = \begin{pmatrix} m & o \\ o & m \end{pmatrix}$$

দোলকদুটির স্থৈতিক শক্তির দুটি ভাগ আছে, একটি পিন্ডদুটির অভিকর্ষণ স্থৈতিক শক্তি, অপরটি প্রসারণ বা সংকোচনের ফলে স্প্রিং-এর স্থৈতিক শক্তি। প্রথমটির মান $\frac{1}{2}mgl(\theta^2 + \phi^2)$, যেখানে কোণ দুটির মান ক্ষুদ্র হওয়ায় $(1 - \cos\theta)$ ও $(1 - \cos\phi)$ কে যথাক্রমে $\theta^2/2$ ও $\phi^2/2$ লেখা হয়েছে। অন্যদিকে স্প্রিং-এর সংকোচনের মান $(x - y)$ এবং এর ফলে উদ্ভূত স্থৈতিক শক্তি $\frac{1}{2}k(x-y)^2$ । দুটিকে একত্রিত করে বস্তুতন্ত্রের স্থৈতিক শক্তি

$$V = \frac{1}{2}mgl(\theta^2 + \phi^2) + \frac{1}{2}k(x-y)^2$$

$$= \frac{mg}{2l}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}k(x-y)^2 \qquad (\because x = l\theta, y = l\phi)$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)(x^2 + y^2) - kxy$$

$\frac{g}{l} = w_0^2, \frac{h}{m} = w_1^2$ লিখে,

$$V = \frac{m}{2}\left(w_0^2 + w_1^2\right)\left(x^2 + y^2\right) - mw_1^2 xy$$

অর্থাৎ V মেট্রিক্সটি দাঁড়ায়

$$V = \begin{pmatrix} m\left(w_0^2 + w_1^2\right) & -mw_1^2 \\ -mw_1^2 & m\left(w_0^2 + w_1^2\right) \end{pmatrix}$$

$$\therefore (V - w^2T) = \begin{pmatrix} m\left(w_0^2 + w_1^2 - w^2\right) & -mw_1^2 \\ -mw_1^2 & m\left(w_0^2 + w_1^2 - w^2\right) \end{pmatrix}$$

আপনি আগেই দেখেছেন w^2 এর মান পাওয়া যায় $|V - w^2T| = 0$ সমীকরণ থেকে। এক্ষেত্রে

$$|V - w^2T| = \begin{vmatrix} m(w_0^2 + w_1^2 - w^2) & -mw_1^2 \\ -mw_1^2 & m\left(w_0^2 + w_1^2 - w^2\right) \end{vmatrix} = 0$$

অর্থাৎ, $\quad m^2\left(w_0^2 + w_1^2 - w^2\right)^2 - m^2 w_1^4 = 0$

বা $\quad w_0^2 + w_1^2 - w^2 = \pm w_1^2$

সুতরাং $w^2 = w_0^2$ অথবা $w^2 = w_0^2 + 2w_1^2 = w_2^2$ ধরুন।

x ও y সরণের বিস্তার যদি A_x ও A_y হয় তবে

$$(V - w^2T)\, q = 0$$

মেট্রিক্স সমীকরণে $q_1 = x = A_x e^{iwt}, q_2 = y = A_y e^{iwt}$ লিখে পাওয়া যায়

$$\frac{A_x}{A_y} = \frac{w_1^2}{w_0^2 + w_1^2 - w^2} \tag{7.24}$$

যখন $w^2 = w_0^2$, $A_x = A_y = A$ ধরুন

এবং যখন $w^2 = w_0^2 + 2w_1^2$, $A_x = -A_y = B$ ধরুন।

প্রথম ক্ষেত্রে দোলক দুটির সরণ সমীকরণ

$$x = A\cos w_0 t, \qquad y = A\cos w_0 t$$

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে

$$x = B\cos w_2 t, \qquad y = -B\cos w_2 t$$

দুই কম্পাঙ্কে দোলনগুলির উপরিপাতের ফলে লব্ধি সরণ হবে

$$x = A\cos w_0 t + B\cos w_2 t \qquad 7.25\ (a)$$

$$y = A\cos w_0 t - B\cos w_2 t \qquad 7.25\ (b)$$

A ও B এখানে অনির্দিষ্ট দুই ধ্রুবক। দোলক দুটির পিন্ডের প্রাথমিক অবস্থান ও বেগ জানা থাকলে ধ্রুবক দুটির মান জানা যাবে। ধরুন, যখন $t = 0, x = a, y = 0$।

7.25 (a) ও (b) সমীকরণে এই মানগুলি বসিয়ে পাবেন

$$a = A + B\ ;\ \ 0 = A - B$$

সুতরাং $A = B = \frac{a}{2}$

$$\therefore \qquad x = \frac{1}{2}a\left(\cos w_0 t + \cos w_2 t\right) \qquad 7.26\ (a)$$

$$y = \frac{1}{2}a\left(\cos w_0 t - \cos w_2 t\right) \qquad 7.26\ (b)$$

স্পষ্টই বোঝা যায়, x ও y এর মান দুটি পৃথক কম্পাঙ্কের সরল দোলগতির উপরিপাতনে ফলে উদ্ভূত। এ সম্বন্ধে আপনি EPH 03 পাঠক্রমে অনেকটাই জেনেছেন। স্প্রিংটি যদি খুব আলগা হয় অর্থাৎ যদি $\kappa << \frac{mg}{l}$ হয় তবে $w_1^2 << w_0^2$ লেখা যায় এবং w_0 ও w_2 এর পার্থক্য খুব কম হয়। এই অবস্থায় x ও y এর মান আপনি এভাবে লিখতে পারেন ঃ 7.26 (a) থেকে

$$x = a\cos\frac{w_0 + w_2}{2}t\ \cos\frac{w_2 - w_0}{2}t$$

এখন $\frac{w_0 + w_2}{2} = w_0'$ লেখা যাক, যেখানে $w_0' = w_0$ ও w_2 এর গড় মান।

আবার $w_2^2 = w_0^2\left(1 + 2\frac{w_1^2}{w_0^2}\right)$

বা $w_2 \approx w_0\left(1 + \frac{w_1^2}{w_0^2}\right)$ কেননা $w_1^2 << w_0^2$

$$\therefore \quad w_2 - w_0 = \frac{w_1^2}{w_0}$$

$$\therefore x = a\cos w_0' t\ \cos\frac{w_1^2}{2w_0}t \qquad 7.27(a)$$

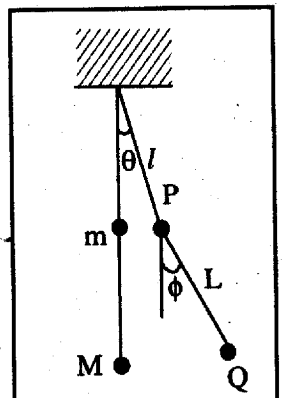
একই ভাবে 7.26 (b) থেকে $y = a \sin w'_0 t \ \sin \frac{w_1^2}{2w_0} t$ 7.27(b)

7.27 (a) ও (b) সমীকরণ দুটি থেকে বোঝা যায় যে দুটি দোলকই $\frac{w'_0}{2\pi}$ কম্পাঙ্কে আন্দোলিত হয় কিন্তু তাদের দোলনের বিস্তার $\frac{1}{2\pi}\frac{w_1^2}{2w_0}$ কম্পাঙ্কে বা $4\pi\frac{w_0}{w_1^2} = 4\pi\sqrt{\frac{g}{l}}.\frac{m}{k}$ পর্যায়কালে ওঠানামা করে।

আপনি নিশ্চয়ই লক্ষ করেছেন, এক্ষেত্রে বস্তুতন্ত্রের স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা 2। এবার আমরা দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার আর একটি বস্তুতন্ত্রের কথা বিবেচনা করব।

7.4.2 জোড়া দোলক (Double pendulum)

যখন একটি সরল দোলকের পিন্ড থেকে আর একটি দোলক ঝোলানো থাকে তখন সমগ্র ব্যবস্থাটিকে জোড়া দোলক বলা হয়। এক্ষেত্রে নীচের দোলকটির সুতার টান সরাসরি উপরের দোলকের পিন্ডের উপর ক্রিয়া করে। আবার উপরের পিন্ডটি নীচের দোলকের আলম্বন বিন্দু হওয়ায় সেটির সরণের ফলে নীচের দোলকের সুতার এবং তার পিন্ডের উপর ক্রিয়াশীল বলের দিক পরিবর্তিত হয়।



চিত্র 7.3

ধরা যাক, দৃঢ় আলম্ব থেকে ঝোলানো উপরের দোলকটির দৈর্ঘ্য L এবং পিন্ডের ভর M। এই পিন্ড থেকে ঝোলানো নীচের দোলকটির দৈর্ঘ্য l এবং পিন্ডের ভর m। উল্লম্ব অবস্থা থেকে উপরের ও নীচের দোলকের সুতার কৌণিক সরণ যথাক্রমে θ ও φ। আমরা ধরে নেব দোলকদুটি সর্বদা একই সমতলে থেকে আন্দোলিত হয় [চিত্র 7.3]।

θ কৌণিক সরণের ফলে উপরের পিন্ড P সাম্যাবস্থান থেকে $L(1 - \cos\theta)$ পরিমাণ উচ্চতা লাভ করে। নীচের পিন্ড Q φ কৌণিক সরণের ফলে $l(1 - \cos\phi)$ উচ্চতা লাভ করে আবার সেটির আলম্বন বিন্দু $L(1 - \cos\theta)$ পরিমাণ উঠে যাওয়ার ফলে সাম্যাবস্থান থেকে তার মোট উচ্চতা হয় $L(1-\cos\theta) + l\,(1-\cos\phi)$। দোলকের সুতাগুলি ভরহীন ও অপ্রসার্য হওয়ায় বস্তুতন্ত্রটির স্থৈতিক শক্তি হবে

$$V = MgL(1-\cos\theta) + mg\left[L(1-\cos\theta) + l(1-\cos\phi)\right]$$

$$= MgL.\theta^2/2 + mg\left[L.\theta^2/2 + l.\phi^2/2\right] \quad \text{(কেননা θ ও φ অতি ক্ষুদ্র কোণ।)} \quad (7.28)$$

বস্তুতন্ত্রের গতিশক্তি

$$T = \frac{1}{2}M\left(L\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(L\dot{\theta} + l\dot{\phi}\right)^2 \tag{7.29}$$

কেননা উপরের পিন্ডের বেগ $L\dot{\theta}$ এবং নীচের পিন্ডের বেগ = উপরের পিন্ডের বেগ + $l\dot{\phi} = L\dot{\theta} + l\dot{\phi}$ । উভয় বেগই অনুভূমিক বলে ধরা যায়। T এর রাশিমালার সরলীকরণের জন্য ধরুন

$$\dot{x}^2 = ML^2\dot{\theta}^2$$

এবং $$\dot{y}^2 = m\left(L\dot{\theta} + l\dot{\phi}\right)^2$$

অর্থাৎ $x = \sqrt{M}\,L\theta$ এবং $y = \sqrt{m}(L\theta + l\phi)$

x ও y কে আমরা সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক q_1 ও q_2 রূপে ধরতে পারি।

$\therefore$ x ও y এর হিসাবে, 7.29 সমীকরণ থেকে গতিশক্তি

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2$$

সুতরাং 7.4 অনুচ্ছেদের আলোচনা অনুযায়ী মেট্রিক্স $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

আবার, $$L\theta = x/\sqrt{M}$$

$$l\phi = y/\sqrt{m} - L\theta = y/\sqrt{m} - x/\sqrt{M}$$

লক্ষ করুন দোলক দুটির পিন্ডদ্বয়ের সাম্যাবস্থা থেকে সরণ যথাক্রমে $S = L\theta = x/\sqrt{M}$ এবং $s = L\theta + l\phi = y/\sqrt{m}$ ।

এখন 7.28 সমীকরণ থেকে উপরের $L\theta$ ও $l\phi$ এর মান বসিয়ে আমরা পাই

$$V = \frac{1}{2}Mg\frac{x^2}{ML} + \frac{1}{2}mg\left[\frac{x^2}{ML} + \frac{1}{l}\left(y/\sqrt{m} - x/\sqrt{M}\right)^2\right]$$

$$= \frac{g}{2}\left[\left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{1}{L} + \frac{m}{M}\frac{1}{l}\right]x^2 + \frac{g}{2l}y^2 - g\sqrt{\frac{m}{M}}\frac{1}{l}xy$$

এই সমীকরণে $\frac{m}{M} = e, \frac{g}{L} = w_1^2, \frac{g}{l} = w_2^2$ লিখে আমরা পাই

$$V = \frac{1}{2}\left[(1+e)w_1^2 + ew_2^2\right]x^2 + \frac{1}{2}w_2^2y^2 - \sqrt{e}w_2^2xy$$

এখন আমরা V মেট্রিক্সটি লিখতে পারি—

$$V = \begin{pmatrix} (1+e)w_1^2 + ew_2^2 & -\sqrt{e}w_2^2 \\ -\sqrt{e}w_2^2 & w_2^2 \end{pmatrix}$$

কাজেই জোড়া দোলকের মেট্রিক্স সমীকরণ হল

$$(V - w^2T)q = \begin{pmatrix} (1+e)w_1^2 + ew_2^2 - w^2 & -\sqrt{e}w_2^2 \\ -\sqrt{e}w_2^2 & w_2^2 - w^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad \ldots\ 7.30$$

কিন্তু এই সমীকরণটি সিদ্ধ হওয়ার অর্থ (পূর্ব অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য) ডিটারমিন্যান্ট

$$|\,V - w^2T\,| = 0$$

বা

$$\begin{vmatrix} (1+e)w_1^2 + ew_2^2 - w^2 & -\sqrt{e}w_2^2 \\ -\sqrt{e}w_2^2 & w_2^2 - w^2 \end{vmatrix} = 0$$

বা ডিটারমিন্যান্টের মান নির্ণয় করে,

$$w^4 - w^2(1+e)(w_1^2 + w_2^2) + (1+e)w_1^2w_2^2 = 0 \qquad (7.31)$$

এই সমীকরণ থেকে আপনি w^2 এর দুটি মান পেতে পারেন।

x ও y এর বিস্তার যদি A_x ও A_y হয়, তবে 7.30 মেট্রিক্স সমীকরণ থেকে পাবেন

$$\frac{A_x}{A_y} = \frac{\sqrt{e}w_2^2}{(1+e)w_1^2 + ew_2^2 - w^2} = \frac{w_2^2 - w^2}{\sqrt{e}w_2^2} \qquad (7.32)$$

দোলক দুটির প্রকৃত সরণের বিস্তারের অনুপাত

$$\frac{A_P}{A_Q} = \frac{A_x/\sqrt{M}}{A_y/\sqrt{m}} = \frac{A_x}{A_y}.\sqrt{e} = \frac{w_2^2 - w^2}{w_2^2} \qquad (7.33)$$

w^2 এর নির্ণীত মান ব্যবহার করে এই অনুপাতটি নির্ণয় করা যায়।

এবার আমরা কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্র বিবেচনা করব।

ক্ষেত্র I ঃ ধরুন, $M = m, l = L$। তাহলে $e = 1$, $w_1^2 = w_2^2 = w_0^2$ (ধরুন) 7.31 সমীকরণটি এখন দাঁড়ায়

$$w^4 - 4w^2w_0^2 + 2w_0^4 = 0$$

বা $w^2 = \frac{1}{2}\left[4w_0^2 + \left(16w_0^4 - 8w_0^4\right)^{1/2}\right] = w_0^2\left(2 \pm \sqrt{2}\right)$

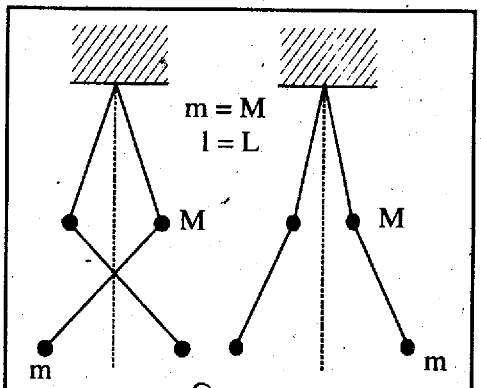
অর্থাৎ $w = 1.848\ w_0, 0.765 w_0$।

7.33 সমীকরণ থেকে উপর ও নীচের দোলকের পিন্ড দুটির সরণের অনুপাত

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{w_0^2 - w^2}{w_0^2}$$

$$= \frac{w_0^2 - w_0^2\left(2 + \sqrt{2}\right)}{w_0^2} = -2.414, \text{ যখন } w^2 = w_0^2\left(2 + \sqrt{2}\right)$$

এবং $$\frac{w_0^2 - w_0^2\left(2 - \sqrt{2}\right)}{w_0^2} = 0.414 \text{ যখন } w^2 = w_0^2\left(2 - \sqrt{2}_2\right)$$



চিত্র 7.4

প্রথম ক্ষেত্রে পিন্ড দুটির সরণ পরস্পর বিপরীত দিকে এবং তাদের অনুপাত 2.414 : 1। দ্বিতীয় ক্ষেত্রে তাদের সরণ একই দিকে এবং অনুপাত 0.414 : 1। 7.4 চিত্রে দোলনের প্রকৃতি দেখানো হয়েছে।

ক্ষেত্র II ঃ

ধরুন, $l = L$, কিন্তু $M >> m$ অর্থাৎ $w_1^2 = w_2^2 = w_0^2$ কিন্তু $e << 1$।

7.31 সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$w^4 - 2w^2w_0^2(1+e) + (1+e)w_0^4 = 0$$

$$\therefore w^2 = w_0^2\left[1 + e \pm \left\{(1+e)^2 - (1+e)\right\}^{1/2}\right]$$

$$\approx w_0^2\left[1 + e \pm \sqrt{e}\right]$$ (এখানে আমরা e^2 কে উপেক্ষা করেছি)

বা $w \approx w_0$

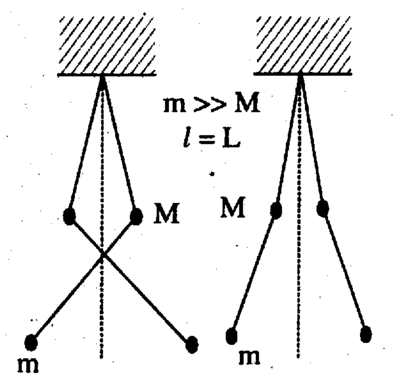
7.32 সমীকরণ থেকে, w^2 এর এই দুই মানের জন্য

$$A_x / A_y = \frac{w_0^2 - w^2}{\sqrt{e}\, w_0^2}$$

বা $A_p / A_Q = (A_x/A_y).\sqrt{e} = \frac{w_0^2 - w^2}{w_0^2} = 1 - \left[1 + e \pm \sqrt{e}\right]$

$$= -e \mp \sqrt{e} \approx \mp\sqrt{e} \quad \text{কেননা} \quad e << \sqrt{e}$$

লক্ষ করুন, w^2 এর দুই মানই প্রায় w_0^2 এর সমান। সুতরাং দুই ক্ষেত্রেই পিন্ডগুলি প্রায় w_0 কৌণিক কম্পাঙ্কে আন্দোলিত হবে। যখন $w = w_0\left[1 + e + \sqrt{e}\right]^{1/2}$, তখন নীচের Q পিণ্ডের সরণ উপরের P পিণ্ডের তুলনায় $\sqrt{\frac{M}{m}}$ গুণ বেশি ও বিপরীত দিকে হবে। আবার যখন $w = w_0\left[1 + e - \sqrt{e}\right]^{1/2}$, তখনও নীচের Q পিণ্ডের সরণ উপরেরটির তুলনায় $\sqrt{\frac{M}{m}}$ গুণ বেশি কিন্তু একই দিকে হবে। 7.5 চিত্র থেকে দোলনের প্রকৃতিটি আপনি বুঝতে পারবেন।



চিত্র 7.5

ক্ষেত্র III ঃ

এবার ধরুন $l = L, m >> M$। তখন $w_1^2 = w_2^2 = w_0^2$ কিন্তু $e >> 1$। e এর তুলনায় 1 কে উপেক্ষা করে 7.31 সমীকরণটিকে লেখা যায় ঃ

$$w^4 - 2ew^2w_0^2 + ew_0^4 = 0$$

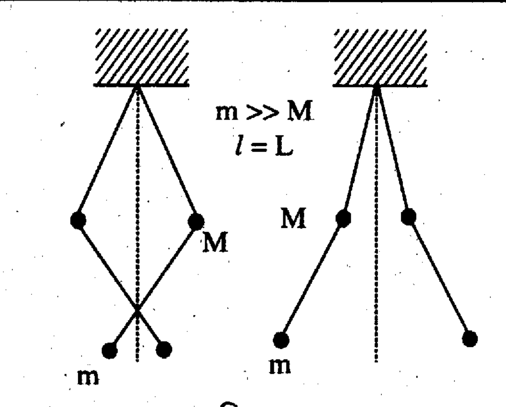
$$\therefore w^2 = ew_0^2 \pm \left(e^2w_0^4 - ew_0^4\right)^{1/2}$$

$$= w_0^2\left[e \pm \sqrt{e^2 - e}\right]$$

$$= ew_0^2\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{e}}\right]$$

$$= ew_0^2\left[1 \pm \left(1 - \frac{1}{2e}\right)\right]$$

$$= 2ew_0^2 \quad \text{অথবা} \quad \frac{1}{2}w_0^2$$



চিত্র 7.6

যখন $w^2 = 2ew_0^2$, উপরের ও নীচের পিন্ড দুটির সরণের অনুপাত

$$\frac{A_P}{A_Q} = \frac{w_0^2 - w^2}{w_0^2} = \frac{w_0^2 - 2ew_0^2}{w_0^2} = 1 - 2e \approx -2e \quad \text{বা} \quad -2\frac{m}{M}$$

এক্ষেত্রে P পিন্ডের সরণ Q পিণ্ডের তুলনায় 2m/M গুণ বেশি ও বিপরীতমুখী।

যখন $w^2 = \frac{1}{2}w_0^2$, $\qquad \frac{A_P}{A_Q} = \frac{w_0^2 - \frac{1}{2}w_0^2}{w_0^2} = \frac{1}{2}$

এক্ষেত্রে জোড়া দোলকটি 2l দৈর্ঘ্যের একটি সরল দোলকের মত আচরণ করে এবং স্বভাবতই p পিন্ডের সরণ Q এর অর্ধেক হয়। 7.6 চিত্রে দোলনের প্রকৃতি দেখানো হয়েছে।

7.4.3 প্রতিসম সরলরৈখিক ত্রিপরমাণুক অণু (Linear Symmetric Triatomic Molecule) :

কার্বন ডাই-অক্সাইড গ্যাসের একটি অণুর গঠন কেমন জানেন?

একটি কার্বন পরমাণুর দুপাশে 116 pm (1 pm = 10^{-12} m) দূরত্বে দুটি অক্সিজেন পরমাণু থাকে আর এই তিনটি পরমাণু থাকে এক সরলরেখায়। এবার আমরা এরকম একটি অণুর কম্পন সম্বন্ধে আলোচনা করব।

ধরুন, কেন্দ্রের M ভরের পরমাণুর সঙ্গে তার দুপাশে m ভরের দুটি পরমাণু দুটি স্প্রিং দিয়ে যুক্ত, যেগুলির স্প্রিং ধ্রুবক κ। সাম্যাবস্থান থেকে পরমাণুগুলির সরণ সংযোগকারী সরলরেখা বরাবর যথাক্রমে y_1, y_2 ও y_3 এবং এগুলিকে প্রাথমিকভাবে আমরা সাধারণীকৃত নির্দেশাঙ্ক হিসাবে ধরে নেব।

অণুটির মোট গতিশক্তি

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_3^2 \tag{7.34}$$

অণুর স্থৈতিক শক্তি দুটি স্প্রিং-এর সংকোচন ও প্রসারণ থেকে উদ্ভূত হয়। এই শক্তির মান

$$V = \frac{1}{2}\kappa(y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2}\kappa(y_3 - y_2)^2$$

$$= \frac{1}{2}\kappa\left(y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 - 2y_1y_2 - 2y_2y_3\right) \tag{7.35}$$

এখন আমরা T ও V মেট্রিক্সগুলি লিখতে পারি :

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad V = \kappa\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

এখন মেট্রিক্স

$$M = T^{-1}V = \kappa\begin{pmatrix} 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 1/M & 0 \\ 0 & 0 & 1/m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{m} & -\frac{\kappa}{m} & 0 \\ -\frac{\kappa}{M} & 2\frac{\kappa}{m} & -\frac{\kappa}{M} \\ 0 & -\frac{\kappa}{m} & \frac{\kappa}{m} \end{pmatrix}$$

স্বাভাবিক কম্পাঙ্কগুলি নির্ণয় করার জন্য আমরা $|M - w^2 I| = 0$ শর্তটি ব্যবহার করতে পারি। এর থেকে পাওয়া যায় $\left(\frac{\kappa}{m} = w_1^2, \frac{\kappa}{M} = w_2^2\right.$ লিখে)

$$\begin{vmatrix} \frac{\kappa}{m} - w^2 & -\frac{\kappa}{m} & 0 \\ -\frac{\kappa}{M} & 2\frac{\kappa}{M} - w^2 & -\frac{\kappa}{M} \\ 0 & -\frac{\kappa}{m} & \frac{\kappa}{m} - w^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1^2 - w^2 & -w_1^2 & 0 \\ -w_2^2 & 2w_2^2 - w^2 & -w_2^2 \\ 0 & -w_1^2 & w_1^2 - w^2 \end{vmatrix} = 0$$

অর্থাৎ $\left(w_1^2 - w^2\right)^2\left(2w_2^2 - w^2\right) - 2w_1^2 w_2^2\left(w_1^2 - w^2\right) = 0$

বা $\left(w_1^2 - w^2\right)\left(2w_1^2 w_2^2 - w_1^2 w^2 - 2w_2^2 w^2 + w^4 - 2w_1^2 w_2^2\right) = 0$

বা $w^2\left(w_1^2 - w^2\right)\left(w^2 - w_1^2 - 2w_2^2\right) = 0$ (7.36)

সুতরাং $w^2 = 0, w_1^2$ বা $w_1^2 + 2w_2^2$

প্রথম বীজটির দিকে লক্ষ করুন। যখন $w^2 = 0$ বা $w = 0$।

y_1, y_2 বা y_3 এর ক্ষেত্রে $\ddot{y}_i = 0$ অর্থাৎ অণুটির কোনো কম্পন ঘটার বদলে প্রতিটি পরমাণু একই বেগে সরতে থাকবে। এটি আসলে অণুর সার্বিক চলনগতি বোঝায়।

যখন $w^2 = w_1^2$ বা $w_1^2 + 2w_2^2$ তখন y_1, y_2 ও y_3 এর বিস্তার যথাক্রমে A_1, A_2 ও A_3 ধরা যাক। $(M - w^2 I)\,A = 0$, এই মেট্রিক্স সমীকরণ থেকে লেখা যায়

$$\begin{pmatrix} w_1^2 - w^2 & -w_1^2 & 0 \\ -w_2^2 & 2w_2^2 - w^2 & -w_2^2 \\ 0 & -w_1^2 & w_1^2 - w^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0$$

মেট্রিক্স গুণের পর,

$$\left(w_1^2 - w^2\right)A_1 - w_1^2 A_2 = 0$$

$$-w_2^2 A_1 + \left(2w_2^2 - w^2\right)A_2 - w_2^2 A_3 = 0$$

এবং
$$-w_1^2 A_2 + \left(w_1^2 - w^2\right)A_3 = 0$$

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \frac{w_1^2 - w^2}{w_1^2}$$

আবার $w_2^2 A_3 = -w_2^2 A_1 + \left(2w_2^2 - w^2\right)A_2$

$$= -w_2^2 A_1 + \left(2w_2^2 - w^2\right).\frac{w_1^2 - w^2}{w_1^2}.A_1$$

$$\therefore \frac{A_3}{A_1} = -1 + \left(2w_2^2 - w^2\right)\frac{w_1^2 - w^2}{w_1^2 w_2^2}$$

যখন $w^2 = w_1^2, \frac{A_2}{A_1} = 0, \frac{A_3}{A_1} = -1$ বা $A_2 = 0, A_3 = -A_1$

এর অর্থ এই, যে কেন্দ্রের পরমাণুটি অনড় থাকে এবং দুই প্রান্তের পরমাণুগুলির সরণ সমমান ও বিপরীতমুখী হয়।

অন্য একটি স্বাভাবিক কম্পনশৈলীতে $w^2 = w_1^2 + 2w_2^2$

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \frac{w_1^2 - w_1^2 - 2w_2^2}{w_1^2} = -\frac{2w_2^2}{w_1^2} = -2\frac{m}{M}$$

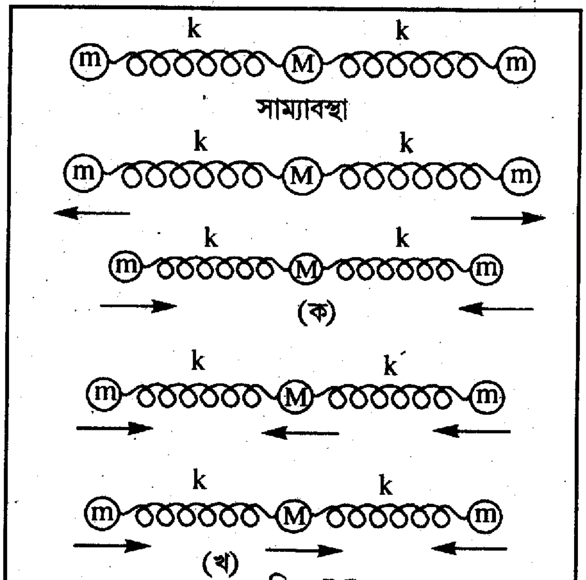
$$\frac{A_3}{A_1} = -1 + \left(2w_2^2 - w_1^2 - 2w_2^2\right)\frac{w_1^2 - w_1^2 - 2w_2^2}{w_1^2 w_2^2}$$

$$= -1 + 2 = 1$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে প্রান্তের পরমাণু দুটির সরণ অনুরূপ কিন্তু কেন্দ্রের পরমাণুটির সরণ এগুলির সরণের $\frac{2m}{M}$ গুণ এবং বিপরীতমুখী।

এই উদাহরণে যে বিষয়টি লক্ষ্যণীয় তা হল এই যে আমরা তিনটি পরমাণুর একটি করে নির্দেশাঙ্ক ধরে গণনা শুরু করলেও দুটিমাত্র স্বাভাবিক কম্পনশৈলী দেখতে পেয়েছি। এর কারণ,

নির্দেশাঙ্কগুলি একটি শর্ত পালন করে। শর্তটি এই যে অণুর ভরকেন্দ্রটি স্থির থাকে। 7.7 চিত্রে অণুর কম্পনশৈলীগুলি দেখানো হয়েছে, যার থেকে আপনি এই শর্তটি বুঝতে পারবেন।



চিত্র 7.7

এবার একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

অনুশীলনী 2

একটি ঘর্ষণহীন অনুভূমিক তলে $(0, \pm a)$ বিন্দুদ্বয়ে দুটি আধান q, q এবং $(\pm 2a, 0)$ বিন্দুদ্বয়ে দুটি আধান $6q, 6q$ রয়েছে। মূলবিন্দুতে $(0, 0)$ একটি m ভরের বিন্দুভর আছে যার আধান q।

(i) মূলবিন্দুর নিকটবর্তী অঞ্চলে (x, y) বিন্দুতে তড়িৎ-বিভব নির্ণয় করুন।

(ii) দেখান যে মূলবিন্দুতে বিন্দুভরটি সুস্থিত সাম্যে (stable equlibrium) থাকবে।

(iii) বিন্দুভরের স্বাভাবিক কম্পনশৈলীর কম্পাঙ্কগুলি নির্ণয় করুন।

7.5 দুই-এর অধিক স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্রের কম্পন

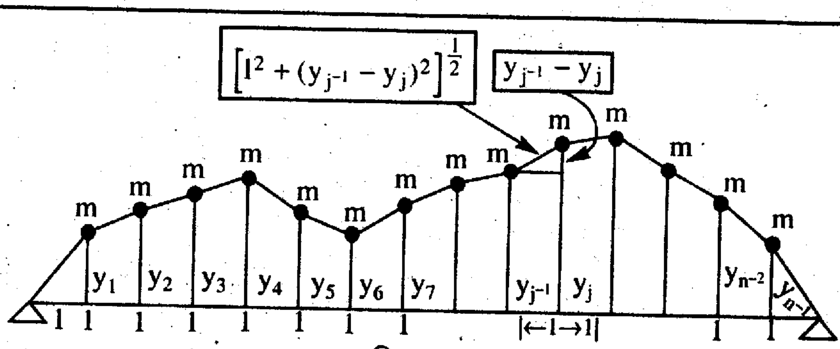
আগের অনুচ্ছেদে আপনি দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার কয়েকটি বস্তুতন্ত্রের অতি অল্প বিস্তারের কম্পন সম্বন্ধে জানতে পেরেছেন। এগুলির ক্ষেত্রে আমরা দুটি করে স্বাভাবিক কম্পনশৈলী দেখতে পেয়েছি। এবার আমরা অপেক্ষাকৃত জটিল বস্তুতন্ত্রের কথা আলোচনা করব, যার স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা দুই বা ততোধিক হতে পারে।

● **টান দেওয়া তারের সংলগ্ন n সংখ্যক অনুরূপ বিন্দুভর**

ধরা যাক, দুই প্রান্তে আবদ্ধ একটি ভরহীন তারের টান F এবং m ভরের n-সংখ্যক বিন্দুভর ঐ তারের সঙ্গে l দূরত্ব অন্তর সংলগ্ন আছে (চিত্র 7.8)। প্রথম ও শেষ বিন্দুভর দুটিও তারের দুই প্রান্ত থেকে l দূরত্বে আছে। বিন্দুভরগুলি এক নির্দিষ্ট সমতলে থেকে অনুপ্রস্থভাবে কম্পিত হয়। তারের মোট দৈর্ঘ্য স্পষ্টতই $(n+1)l$। বিন্দুভরগুলির সরণ যথাক্রমে $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ বলে ধরা যাক। স্বল্পবিস্তারের কম্পনের ক্ষেত্রে $y_i << l$। যেহেতু আবদ্ধ প্রান্ত দুটিতে সরণের মান শূন্য, আমরা y_0 এবং y_{n+1} কে শূন্য ধরব।

তারের প্রথম খণ্ডটির দৈর্ঘ্য l থেকে বেড়ে হয়

$$\left(l^2 + y_1^2\right)^{1/2} = l\left(1 + y_1^2/l^2\right)^{1/2} = l\left(1 + y_1^2/2l^2\right)$$



চিত্র 7.8

অর্থাৎ এই খণ্ডটির প্রসারণ $l\left(1 + y_1^2/2l^2\right) - l = y_1^2/2l$

এইভাবে তারের j-তম খণ্ডটির দৈর্ঘ্য বেড়ে হয়

$$\left[l^2 + \left(y_j - y_{j-1}\right)^2\right]^{1/2} = l\left[1 + \left(\frac{y_j - y_{j-1}}{l}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= l + \left(y_i - y_{j-1}\right)^2 / 2l$$

সুতরাং এই খণ্ডটির প্রসারণ $l + \left(y_i - y_{j-1}\right)^2 / 2l - l$

$$= \left(y_i - y_{j-1}\right)^2 / 2l$$

যেহেতু টান F এর মান স্থির থাকে, এই প্রসারণ ঘটাতে কৃতকার্য

$$= F\left(y_j - y_{j-1}\right)^2 / 2l$$

সুতরাং সমগ্র তারের স্থৈতিক শক্তি

$$V = \sum_{j=1}^{n+1} F\left(y_j - y_{j-1}\right)^2 / 2l \quad \text{যেখানে} \quad y_0 = y_{n+1} = 0 \tag{7.37}$$

বস্তুতন্ত্রটির গতিশক্তি বিন্দুভরগুলির গতিশক্তির যোগফলের সমান।

অর্থাৎ $T = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m\dot{y}_j^2$ (7.38)

V মেট্রিক্সটি লিখতে হলে 7.37 এর রাশিমালাটিকে ভেঙে লিখতে হবে ঃ

$$V = \frac{F}{2l}\left[y_1^2 + (y_2 - y_1)^2 + (y_3 - y_2)^2 + \ldots + (y_n - y_{n-1})^2 + y_n^2\right]$$

$$= \frac{F}{2l}\left[2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 + \ldots + 2y_n^2 - 2y_1y_2 - 2y_2y_3 - \ldots - 2y_ny_{n-1}\right]$$

আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে V মেট্রিক্সটি একটি $n \times n$ আকারের বর্গমেট্রিক্স। অনুরূপভাবে T মেট্রিক্সটিও একটি $n \times n$ বর্গমেট্রিক্স। এখন আমরা স্বাভাবিক কম্পাঙ্কগুলির জন্য সাধারণ সমাধান বার না করে, বিশেষ দুটি ক্ষেত্রে বস্তুতন্ত্রের কম্পনের বিশ্লেষণ করব।

যখন n = 2 ঃ

বিন্দুভরের সংখ্যা যখন 2, তখন স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার মানও 2। আগের অনুচ্ছেদে আপনি এই অবস্থার সঙ্গে পরিচিত হয়েছেন। এক্ষেত্রে $T = \frac{1}{2} m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2$, সুতরাং T মেট্রিক্সটি হল

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = mI \text{ এবং } T^{-1} = \frac{1}{m} I$$

অন্যদিকে $V = \frac{F}{2l}\left(2y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_1y_2\right)$

সুতরাং মেট্রিক্স $V = \frac{F}{l}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\therefore T^{-1}V - w^2 I = \frac{E}{ml}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - w^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2w_0^2 - w^2 & -w_0^2 \\ -w_0^2 & 2w_0^2 - w^2 \end{pmatrix} \tag{7.39}$$

এখানে আমরা $F/ml = w_0^2$ লিখেছি। w^2 এর মান পাওয়ার জন্য এই মেট্রিক্সের ডিটারমিন্যান্টটির মান শূন্য ধরতে হবে।

সুতরাং $\begin{vmatrix} 2w_0^2 - w^2 & -w_0^2 \\ -w_0^2 & 2w_0^2 - w^2 \end{vmatrix} = 0$

বা $\left(2w_0^2 - w^2\right)^2 - w_0^4 = 0$

বা $\left(2w_0^2 - w^2 + w_0^2\right)\left(2w_0^2 - w^2 - w_0^2\right) = 0$ (7.40)

সুতরাং $w^2 = 3w_0^2$ বা w_0^2 ।

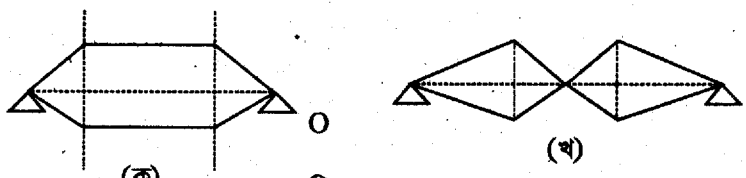
এখন আপনি 7.20 (a) সমীকরণটি ব্যবহার করে দুটি বিন্দুভরের কম্পনের বিস্তারের অনুপাত বার করতে পারেন। y_1 ও y_2 এর বিস্তার যথাক্রমে A_1 ও A_2 ধরলে

$$\left(2w_0^2 - w^2\right)A_1 - w_0^2 A_2 = 0$$

বা $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{w_0^2}{2w_0^2 - w^2}$ ।

যখন $w^2 = 3w_0^2$ তখন $A_1/A_2 = -1$ অর্থাৎ বিন্দুভর দুটির সরণ সমমান ও বিপরীতমুখী।

যখন $w^2 = w_0^2$, তখন $A_1/A_2 = 1$ অর্থাৎ বিন্দুভর দুটির সরণ একেবারেই অনুরূপ। 7.9 চিত্রে বিন্দুভর দুটির কম্পনের প্রকৃতি দেখতে পাবেন।



চিত্র 7.9

যখন n = 3 ঃ

এখন $T = \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_3^2$

সুতরাং মেট্রিক্স $T = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$

এক্ষেত্রে $V = \frac{F}{2l}\left(2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_1y_2 - 2y_2y_3\right)$

এবং মেট্রিক্স $V = \frac{F}{l}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\therefore T^{-1}V - w^2I = \frac{F}{ml}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix} - w^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2w_0^2 - w^2 & -w_0^2 & 0\\ -w_0^2 & 2w_0^2 - w^2 & -w_0^2\\ 0 & -w_0^2 & 2w_0^2 - w^2\end{pmatrix} \left(\frac{F}{ml} = w_0^2 \text{ লিখে}\right)$$

আগের মতো,
$$\begin{vmatrix}2w_0^2 - w^2 & -w_0^2 & 0\\ -w_0^2 & 2w_0^2 - w^2 & -w_0^2\\ 0 & -w_0^2 & 2w_0^2 - w^2\end{vmatrix} = 0 \tag{7.41}$$

বা, $\left(2w_0^2 - w^2\right)^3 - 2w_0^4\left(2w_0^2 - w^2\right) = 0$

বা $$\left(2w_0^2 - w^2\right)\left(w^4 - 4w_0^2w^2 + 2w_0^4\right) = 0 \tag{7.42}$$

এর বীজগুলি হল ঃ $w^2 = 2w_0^2, \quad w_0^2\left(2 \pm \sqrt{2}\right)$

সুতরাং স্বাভাবিক কম্পনশৈলীর কৌণিক কম্পাঙ্কগুলি w_1, w_2 ও w_3 হলে, $w_1^2 = 2w_0^2, w_2^2 = w_0^2\left(2+\sqrt{2}\right)$ এবং $w_3^2 = w_0^2\left(2-\sqrt{2}\right)$

কোনো একটি স্বাভাবিক কম্পনশৈলীতে y_1, y_2 ও y_3 এর বিস্তার যথাক্রমে A_1, A_2 ও A_3 হলে $(T^{-1}V - w^2I)A = 0$ মেট্রিক্স সমীকরণ থেকে লেখা যায় ঃ

$$\left(2w_0^2 - w^2\right)A_1 - w_0^2A_2 = 0$$

$$-w_0^2A_2 + \left(2w_0^2 - w^2\right)A_3 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{w_0^2}{2w_0^2 - w^2}, \frac{A_2}{A_3} = \frac{2w_0^2 - w^2}{w_0^2}$$

অর্থাৎ $A_1 : A_2 : A_3 :: w_0^2 : 2w_0^2 - w^2 : w_0^2$

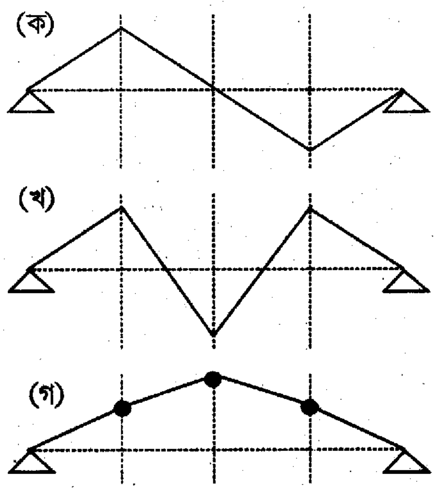
সুতরাং A_1, A_2 ও A_3 এর অনুপাত

যখন $w^2 = 2w_0^2$ তখন $1 : 0 : 1$

যখন $w^2 = w_0^2\left(2+\sqrt{2}\right)$ তখন $1 : -\sqrt{2} : 1$

যখন $w^2 = w_0^2\left(2-\sqrt{2}\right)$ তখন $1:\sqrt{2}:1$

7.10 চিত্রে তিনটি স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের জন্য কম্পনশৈলী দেখানো হয়েছে।



চিত্র 7.10

অনুশীলনী 3

আগের অনুচ্ছেদে টান দেওয়া তারে যখন তিনটি বিন্দুভর সংলগ্ন আছে, তখন মাঝের বিন্দুভরটির ভর m না হয়ে nm হল 7.41 সমীকরণের কী পরিবর্তন হত ?

7.6 সারাংশ

এই এককের প্রথমেই আপনি অতি অল্প বিস্তারের কম্পনের বিশ্লেষণ পদ্ধতির সঙ্গে পরিচিত হয়েছেন। বিষয়টি বোঝার সুবিধার জন্য আমরা প্রথমে মাত্র দুটি স্বতন্ত্র নির্দেশাঙ্কবিশিষ্ট বস্তুতন্ত্রের সম্বন্ধে আলোচনা করেছি এবং তার পরেই যে কোনো সংখ্যক স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার বস্তুতন্ত্রের ক্ষেত্রে বিশ্লেষণের একই পদ্ধতি প্রয়োগ করেছি। এই প্রসঙ্গে আপনি বস্তুতন্ত্রের সাধারণ কম্পনশৈলী ও স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের ধারণার সঙ্গে পরিচিত হয়েছেন।

অতি অল্পবিস্তারের কম্পনের উদাহরণ হিসাবে আমরা প্রথমে দুই স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার কয়েকটি বস্তুতন্ত্র সম্বন্ধে আলোচনা করেছি। এগুলি হল স্প্রিং দ্বারা যুগ্মিত দোলক, একটি দোলক থেকে অন্যটি আলম্বিত, এমন জোড়া দোলক এবং কার্বন ডাই-অক্সাইড অণুর মতো সরলরৈখিক ত্রিপরমাণুক অণু।

আরও বেশি সংখ্যক স্বাতন্ত্র্যের উদাহরণ হিসাবে টান দেওয়া তারে পরপর সমদূরত্বে সংলগ্ন বিন্দুভরসমূহের কম্পন আলোচনা করা হয়েছে।

7.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. কোনও একটি বস্তুতন্ত্রকে দুটি স্বতন্ত্র নির্দেশাঙ্ক দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বর্ণনা করা যায়। সাম্যাবস্থার নিকটবর্তী অঞ্চলে সেটির অতি অল্প বিস্তারের কম্পনের স্বাভাবিক কম্পনশৈলীর কম্পাঙ্কগুলি কীভাবে নির্ণয় করা যায়?

2. একজোড়া অনুরূপ দোলককে পাশাপাশি রেখে তার পিণ্ডগুলিকে ভরহীন স্প্রিং দিয়ে যুক্ত করে যুগ্মিত করা হল। দোলক দুটি এক উল্লম্ব সমতলে থাকে ধরে নিয়ে যেগুলির স্বাভাবিক কম্পনশৈলীগুলি নিরূপণ করুন।

   স্প্রিংটি অত্যন্ত দুর্বল হলে দোলনে কী বৈশিষ্ট্য দেখা যাবে?

3. একটি সরল দোলক অপর একটি সরল দোলকের পিন্ড থেকে আলম্বিত আছে। দোলক দুটি একই উল্লম্ব সমতলে অতি অল্প বিস্তারে আন্দোলিত হলে ঐ জোড়া দোলকের স্বাভাবিক কম্পনশৈলীগুলি নির্ণয় করুন।

   যখন দোলকের পিন্ডগুলির ভর সমান কিন্তু উপরের দোলকের দৈর্ঘ্য নীচের দোলকের দ্বিগুণ, তখন স্বাভাবিক কম্পাঙ্কগুলির মান নির্ণয় করুন।

4. একটি প্রতিসম সরলরৈখিক ত্রিপরমাণুক অণুর স্বল্পবিস্তারের কম্পনের কম্পাঙ্কগুলি নির্ণয় করন।

   CS_2 অণুর ক্ষেত্রে দুই কম্পাঙ্কের অনুপাত কত হবে?

5. কোনও বস্তুতন্ত্রের দুই-এর অধিক যে কোনও সংখ্যক স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা থাকলে তার স্বাভাবিক কম্পনশৈলীগুলি কীভাবে নির্ণয় করা যায়, ব্যাখ্যা করুন।

6. একটি টান দেওয়া তারে n-সংখ্যক বিন্দুভর পর পর সমান দূরত্বে সংলগ্ন আছে, যাতে তারটি $(n-1)$-সংখ্যক সমান দৈর্ঘ্যের অংশে বিভক্ত হয়। বিন্দুভরগুলি স্বল্প বিস্তারে এক সমতলে কম্পিত হলে সমগ্র বস্তুতন্ত্রটির T ও V মেট্রিক্সগুলি লিখুন। যখন বিন্দুভরের সংখ্যা 3, তখন স্বাভাবিক কম্পনের কম্পাঙ্কগুলি নির্ণয় করুন।