9.6 পরীক্ষার দ্বারা অনিশ্চয়তা নীতির প্রমাণ (Experimental Proof of Uncertainty Principle)

বিভিন্ন পরীক্ষার দ্বারা অনিশ্চয়তা নীতি প্রমাণ করা যায়। আমরা এখানে একটি কণার কেবল অবস্থান নির্ণয় বা কেবল ভরবেগ বা একসঙ্গে অবস্থান ও ভরবেগ নির্ণয়ের পরীক্ষাদ্বারা কিভাবে অনিশ্চয়তা নীতি প্রমাণিত হয়, তা আলোচনা করব।

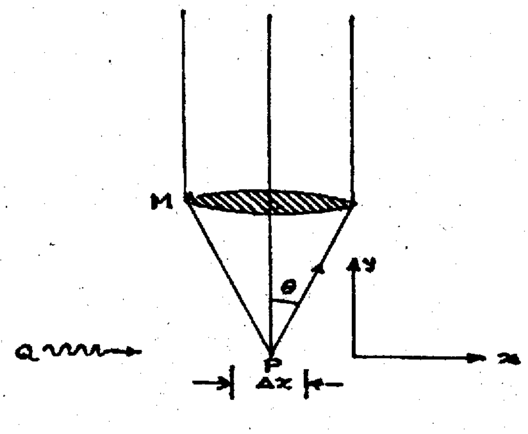
9.6.1 কণার অবস্থান নির্ণয়ের পরীক্ষা (Position Determination Experiment of a Particle)

ধরা যাক, x অক্ষের ওপর p বিন্দুতে একটি ইলেকট্রন স্থির আছে এবং এর এই অবস্থান নির্ণয়ের জন্য এর ওপর M মাইক্রোস্কোপটি (অনুবীক্ষণ যন্ত্র) ফোকাস করা হল (চিত্র 9.6.1)। ধরা যাক, x অক্ষের সমান্তরাল একটি রশ্মিগুচ্ছের একটি ফোটন Q, P বিন্দুতে অবস্থিত ইলেকট্রনটি দ্বারা বিক্ষেপিত হয়ে মাইক্রোস্কোপে প্রবেশ করে এবং এই বিক্ষিপ্ত আলোকদ্বারাই ইলেকট্রনটি দৃষ্টিগোচর হয় (লক্ষ্য করুন, এটি একটি কম্পটন ক্রিয়ার উদাহরণ)।

জ্যামিতিক আলোক বিজ্ঞান দ্বারা প্রমাণ করা যায় যে একটি আদর্শ মাইক্রোস্কোপ দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব $\frac{\lambda}{\sin\theta}$ অপেক্ষা কম হলে ঐ বিন্দু দুটিকে পৃথক করতে পারে না। এই দূরত্বকে মাইক্রোস্কোপের বিভক্তকরণ ক্ষমতা (resolving power) বলে। এখানে θ হল মাইক্রোস্কোপের উন্মেষ (aperture) p বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে তার অর্ধেক এবং λ হল আপতিত ফোটনের তরঙ্গদৈর্ঘ্য। সুতরাং বিক্ষেপিত ফোটনদ্বারা ইলেকট্রনের অবস্থান নির্ণয়ে যে অনিশ্চয়তা ঘটে, তা হল

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{\sin\theta} \qquad \ldots\ldots (9.6.1)$$

এখন p বিন্দু থেকে বিক্ষেপিত ফোটনটির উন্মেষের অক্ষের সঙ্গে θ কোণ করে যে শঙ্কু হয়, তারমধ্যে যেকোনও দিকেই মাইক্রোস্কোপে প্রবেশ করতে পারে।



চিত্র 9.6.1

ধরা যাক, ফোটনটির এই কোণ θ', প্রাথমিক ভরবেগ p এবং θ' অভিমুখে বিক্ষেপিত হলে এর ভরবেগ হয় p'। এখানে $0 \le \theta' \le \theta$ এবং $p' \approx p$। সুতরাং x-অক্ষ অভিমুখে p'-এর উপাংশ হল $p' \sin \theta'$ এবং বিক্ষেপিত ফোটনের ভরবেগের অনিশ্চয়তা হল

$$\Delta p_x = p' \sin \theta - p' \sin 0° = p' \sin \theta \approx p \sin \theta \qquad \ldots \ldots (9.6.2)$$

সুতরাং ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী x-অক্ষ অভিমুখে ইলেকট্রনটিরও একই ভরবেগের অনিশ্চয়তা হবে।

এখন যেহেতু $p = \frac{h}{\lambda}$, অতএব (9.6.1) ও (9.6.2) সমীকরণ দুটি যুক্ত করে আমরা পাই

$$\Delta p_x . \Delta x \approx p \sin \theta \frac{\lambda}{\sin \theta} \approx h \qquad \ldots \ldots (9.6.3)$$

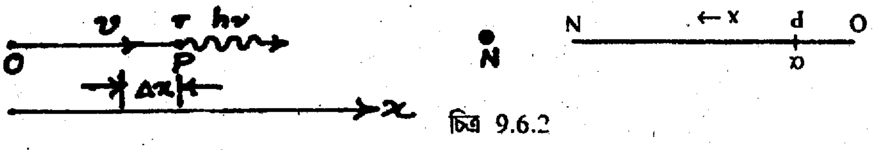
সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, একটি স্থির (অর্থাৎ ভরবেগ 0) ইলেকট্রনের অবস্থান পরিমাপ করতে চাইলে, ভরবেগ ও অবস্থান উভয় পরিমাপের মধ্যেই অনিশ্চয়তা দেখা দেয় এবং এই অনিশ্চয়তা দুটির গুণফল প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবকের প্রায় সমান। কাজেই ইলেকট্রনের অবস্থান নির্ণয়ের পরীক্ষা হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তার নীতিকে সমর্থন করে।

9.6.2 কণার ভরবেগ নির্ণয়ের পরীক্ষা (Momentum Determination Experiment of a Particle)

পূর্বের পরীক্ষায় ইলেকট্রনটি প্রথমে স্থির ছিল, অর্থাৎ এর প্রাথমিক ভরবেগ (= 0) নির্ভুলভাবে জানা ছিল। সেজন্য কেবল এর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য একটি আদর্শ মাইক্রোস্কোপ ব্যবহার করা হয়েছিল। কিন্তু এসত্ত্বেও দেখা গেল যে এই পরীক্ষায় কেবল যে ইলেকট্রনের অবস্থান পরিমাপের মধ্যেই কিছুটা অনিশ্চয়তা ঘটে শুধু তাই নয়; সেই সঙ্গে এর ভরবেগ পরিমাপের মধ্যেও অনিশ্চয়তার সৃষ্টি হয়, যারদ্বারা হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তার নীতি সমর্থিত হয়।

আমরা এখন এমন, একটি পরীক্ষাব্যবস্থার কথা আলোচনা করব, যেখানে পরীক্ষার প্রারম্ভেই কণার অবস্থান সঠিকভাবে জানা আছে এবং সেজন্য কেবল এর ভরবেগ সঠিকভাবে পরিমাপ করার চেষ্টা করা হবে। কিন্তু দেখা যাবে যে এক্ষেত্রেও হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তার নীতি প্রযোজ্য।

এক্ষেত্রে ধরা যাক, কণাটি হল একটি পরমাণু যা কোনও সময়ে x-অক্ষের O বিন্দুতে আছে (চিত্র 9.6.2)। বোহ্‌রের তত্ত্ব থেকে আমরা জানি যে পরমাণুর কোনও ইলেকট্রনকে উত্তেজিত করা হলে এটি উচ্চতর শক্তিকক্ষে স্থানান্তরিত হয় এবং এই অবস্থায় পরমাণুটিকে উত্তেজিত অবস্থার পরমাণু (atom in an excited state) বলে। কিন্তু পরমাণুটি উত্তেজিত অবস্থায় বেশীক্ষণ থাকতে পারে না, অর্থাৎ কিছু সময়, τ (টাউ) পরই ইলেকট্রনটি পূর্বেকার নিম্নতম শক্তিকক্ষে (ground energy level) ফিরে আসে এবং শক্তির এই পার্থক্য $E = h\nu$ (ফোটন)-রূপে বিকীর্ণ হয়। পরিসংখ্যান তত্ত্ব অনুযায়ী τ-এর মান 0 থেকে ∞ পর্যন্ত হতে পারে, তবে এর গড় মান $\bar{\tau} \approx 10^{-8}$ sec পাওয়া যায়।



চিত্র 9.6.2

ধরা যাক, x-অক্ষের N বিন্দুতে অবস্থিত একজন নিরীক্ষকের দিকে পরমাণুটির বেগ V এবং বিকীর্ণ ফোটনের কম্পাঙ্ক ν। কিন্তু ডপলার ক্রিয়ার জন্য (Doppler effect) এই কম্পাঙ্কে V বেগের ওপর নীচের সূত্র অনুযায়ী নির্ভরশীল হয়

$$\nu \simeq \nu_0\left(1+\frac{V}{c}\right) \qquad \ldots\ldots (9.6.4)$$

বা,
$$V \simeq c\left(\frac{\nu}{\nu_0}-1\right) \qquad \ldots\ldots (9.6.5)$$

যেখানে ν_0 হল নিরীক্ষকের সাপেক্ষে যখন পরমাণুটি স্থির থাকে, তখন তার দ্বারা বিকীর্ণ ফোটনের কম্পাঙ্ক এবং c হল আলোকের বেগ।

(9.6.5) সমীকরণের সাহায্যে আমরা ফোটনের কম্পাঙ্ক ν পরিমাপ করে নিরীক্ষককের সাপেক্ষ পরমাণুর বেগ V পরিমাপ করতে পারি। সুতরাং ν পরিমাপের মধ্যে যদি কোনও অনিশ্চয়তা ঘটে, তবে V-এর মানের মধ্যেও অনুরূপ অনিশ্চয়তা ঘটবে। যেহেতু পরমাণুটি উত্তেজিত অবস্থায় τ সময় পর্যন্ত থাকতে পারে, সেজন্য এরদ্বারা বিকীর্ণ ফোটনের কম্পাঙ্কের মধ্যেও অনিশ্চয়তা ঘটে এবং এটা দেখানো যায় যে এই অনিশ্চয়তার মান প্রায় $\frac{1}{\tau}$।

অর্থাৎ
$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau} \qquad \ldots\ldots (9.6.6)$$

কিন্তু (9.6.5) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\Delta V \approx c\,\frac{\Delta\nu}{\nu_0} \approx \frac{c}{\nu_0\tau} \approx \frac{c}{\nu\tau} \qquad \ldots\ldots (9.6.7)$$

$$\left[\text{কারণ } \nu_0 \approx \nu \text{ এবং } \Delta\nu \approx \frac{1}{\tau}\right]$$

(9.6.7) সমীকরণ অনুযায়ী x-অক্ষ অভিমুখে পরমাণুর ভরবেগের অনিশ্চয়তা

$$\Delta P_x = m\,\Delta V \approx \frac{mc}{\nu\tau} \qquad \ldots\ldots (9.6.8)$$

যেহেতু পরমাণুটি x-অক্ষ অভিমুখে $E = h\nu$ শক্তির ফোটন বিকিরণ করে, কম্পটনের সূত্র অনুযায়ী এই ফোটনটির ভরবেগ হল $\frac{h\nu}{c}$। ফোটন বিকিরণের পূর্বে পরমাণুর বেগ V এবং ভরবেগ হল mV। সুতরাং ফোটন বিকিরণের পর এই ভরবেগ হবে $mV - \frac{h\nu}{c}$ এবং বেগ হবে $V - \frac{h\nu}{mc}$।

যেহেতু পরমাণুটির ফোটন নিঃসরণের সময়ের অনিশ্চয়তা আছে, সুতরাং যদি τ সময়ের মধ্যে ফোটন নিঃসরণ না হয়, তবে τ সময়ে পরমাণুটি x-অক্ষের দিকে $V\tau$ দূরত্ব অতিক্রম করবে। কিন্তু ফোটনটি যদি τ সময়ের প্রারম্ভেই নিঃসৃত হয়, তবে পরবর্তী T সময়ে পরমাণুটি যে দৈর্ঘ্য অতিক্রম করবে, তা হল $\left(V - \frac{h\nu}{mc}\right)\tau$। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে ফোটন নিঃসরণের সময়ের অনিশ্চয়তার জন্য, পরমাণুটির অবস্থান নির্ণয়ে অনিশ্চয়তা ঘটবে এবং এই অনিশ্চয়তার মান

$$\Delta x = V\tau - \left(V - \frac{h\nu}{mc}\right)\tau = \frac{h\nu\tau}{mc} \qquad \ldots\ldots (9.6.9)$$

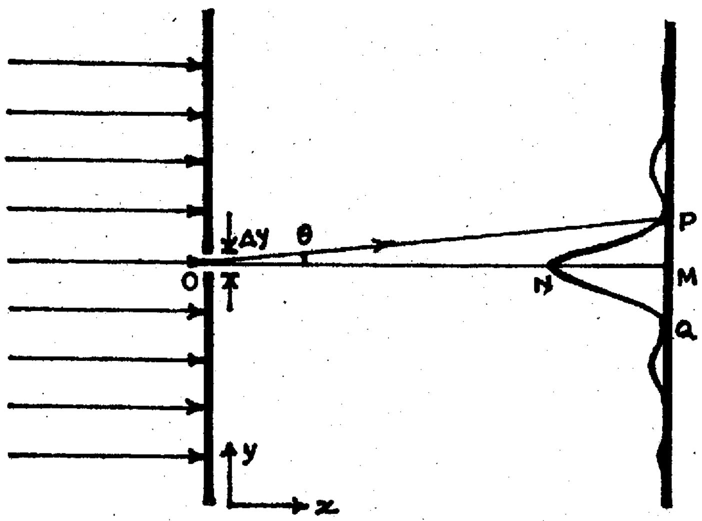
কাজেই (9.6.9) এবং (9.6.8) সমীকরণ দুটির গুণফল থেকে আমরা পাই,

$$\Delta p_x \, \Delta x \approx \frac{mc}{\nu\tau} \cdot \frac{h\nu T}{mc} \approx h \qquad \ldots\ldots (9.6.10)$$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে (9.6.10) সম্পর্কটিও হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তার নীতিকে সমর্থন করে।

9.6.3 একই সঙ্গে কণার ভরবেগ ও অবস্থান নির্ণয়ের পরীক্ষা (Experimental Determination of Both Momentum and Position of a Particle)

আলোকের তরঙ্গ তত্ত্ব থেকে আমরা জানি যে, একটি সমান্তরাল রশ্মিগুচ্ছ একটি সরু ছিদ্রের মধ্যদিয়ে গেলে ব্যবর্তিত হয় এবং এই ব্যবর্তিত আলোকের ব্যতিচারের ফলে ছিদ্রের উল্টোদিকে রাখা একটি পর্দার ওপর আলোক ও অন্ধকারের ঝালর (bright and dark fringes) তৈরী হয়। অনুরূপে ইলেকট্রনও যেহেতু তরঙ্গরূপে আচরণ করে (ডি ব্রগলির প্রকল্প দেখুন), সুতরাং একটি সমান্তরাল ইলেকট্রন রশ্মিগুচ্ছ (ক্যাথোর্ড রশ্মিগুচ্ছ) একটি সরু ছিদ্রের ওপর আপতিত হলে, ছিদ্রের মধ্যদিয়ে যাওয়ার সময় ব্যবর্তিত হবে এবং এই ব্যবর্তিত তরঙ্গ ব্যতিচারের ফলে পর্দার ওপর ইলেকট্রনের তীব্রতার ঝালর তৈরী করবে। ইলেকট্রনের এই ধর্মের দ্বারা আমরা একই সঙ্গে এর ভরবেগ ও অবস্থান নির্ণয়ের পরীক্ষা করব (অবশ্য ইলেকট্রনের পরিবর্তে ফোটন ধরলেও অবিকল একইভাবে এরও ভরবেগ ও অবস্থান নির্ণয় করা যাবে)।



চিত্র 9.6.3

(9.6.3) চিত্রে পরীক্ষা ব্যবস্থাটি দেখানো হল। A খাড়া পর্দার নিম্নবিন্দু থেকে y উচ্চতায় Δy বেধের একটি সরু ছিদ্র আছে। A পর্দার ওপর লম্বভাবে অর্থাৎ x-অক্ষের সমান্তরাল একটি ইলেকট্রনগুচ্ছ আপতিত হয় এবং এর কিছু ইলেকট্রন Δy ছিদ্র দিয়ে ব্যবর্তিত হয়ে B খাড়া পর্দার ওপর ইলেকট্রন তীব্রতার ঝালর গঠন করে। পর্দার M

বিন্দুটি ছিদ্রের ঠিক উল্টোদিকে আছে এবং এই স্থানেই ইলেকট্রনের তীব্রতা সর্বোচ্চ। এই তীব্রতা M বিন্দুর ওপরে ও নীচে ক্রমশ কমে গিয়ে P ও Q বিন্দু দুটিতে সর্বনিম্ন হয়। B পর্দার ওপর P থেকে Q পর্যন্ত ইলেকট্রন তীব্রতার ক্রমপরিবর্তন PNQ বক্ররেখা দ্বারা দেখানো হল। PNQ-কে ইলেকট্রন ব্যবর্তনের প্রথম বা মুখ্য ঝালর (first or primary fringe) বলা হয়। এই মুখ্য ঝালরের উভয় পার্শ্বে খুব কম তীব্রতার আরও কতগুলি ঝালর দেখা যায়, যেগুলিকে আমরা গৌণ (secondary) ঝালর বলতে পারি। আলোকের মতো ইলেকট্রনও একটি ফটোগ্রাফীর প্লেটকে কালো করতে পারে। সুতরাং B পর্দার স্থানে যদি একটি ফটোগ্রাফীর প্লেট রাখা যায়, তবে ঐ প্লেটের ওপর ইলেকট্রন তরঙ্গের তীব্রতা অনুযায়ী সাদা-কালোর ঝালর তৈরী হবে।

এখন আমরা যদি Δy ছিদ্রের মধ্যদিয়ে একটি মাত্র ইলেকট্রনের গতি বিবেচনা করি, তবে দেখতে পাই যে এটি Δy ছিদ্রের যেকোনও বিন্দু দিয়েই B পর্দার দিকে যেতে পারে। সুতরাং এটির y অভিমুখে অবস্থানের অনিশ্চয়তা দাঁড়ায় Δy। ইলেকট্রনটি O ছিদ্র থেকে বেরিয়ে B পর্দার যেকোনও একটি ঝালরের ওপর আপতিত হতে পারে। কিন্তু যেহেতু PMQ ঝালরটির তীব্রতাই সর্বাধিক, সুতরাং ইলেকট্রনটির এই ঝালরের কোনও স্থানে আপতিত হওয়ার সম্ভাবনাই সর্বাধিক। সুতরাং আমরা ধরতে পারি যে ইলেকট্রনটির কৌণিক অনিশ্চয়তা $= \angle POM = \theta$। ইলেকট্রনটি A পর্দার ছিদ্রের ওপর লম্বভাবে আপতিত হয় এবং ধরা যাক, এর বেগ V_x। কিন্তু ছিদ্রের মধ্যদিয়ে ব্যবর্তনের ফলে এর বেগ পরিবর্তিত হয়। ধরা যাক, ইলেকট্রনটি θ কোণে ব্যবর্তিত হলে OP অভিমুখে এর বেগ হয় V। চিত্র অনুযায়ী

$$V_x = V \cos \theta \qquad \ldots \ldots (9.6.11)$$

এবং $$V_y = V \sin \theta \qquad \ldots \ldots (9.6.12)$$

কিন্তু θ-র মান ক্ষুদ্র হওয়ায়, $\cos \theta \approx 1$ এবং $\sin \theta \approx \theta$। সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$$V_x \approx V \qquad \ldots \ldots (9.6.13)$$

এবং $$V_y \approx V\theta \approx V_x\theta \qquad \ldots \ldots (9.6.14)$$

কিন্তু ইলেকট্রনটি OM অভিমুখে গেলে $\theta = 0$ এবং সেজন্য $V_y = 0$। সুতরাং y-অভিমুখে বেগের অনিশ্চয়তা হল

$$\Delta V_y = V_x\theta - 0 = V_x\theta \qquad \ldots \ldots (9.6.15)$$

ইলেকট্রনটির ভর m ধরলে, y-অভিমুখে এর ভরবেগের অনিশ্চয়তা হয়

$$\Delta p_y = m\,\Delta V_y = mV_x\,\theta = p_x\theta \qquad \ldots \ldots (9.6.16)$$

কিন্তু P বিন্দুতে মুখ্য ঝালরটির সর্বনিম্ন তীব্রতা হয়। তরঙ্গ-তত্ত্ব অনুযায়ী এর শর্ত হল—

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{\Delta y} \qquad \ldots \ldots (9.6.17)$$

বা, $$\theta \approx \frac{\lambda}{\Delta y} \qquad \ldots \ldots (9.6.18)$$

যেখানে λ হল ইলেকট্রনের ডি ব্রগলির তরঙ্গদৈর্ঘ্য। (9.6.16) সমীকরণে θ-র এই মান বসালে আমরা পাই,

$$\Delta P_y \approx P_x \frac{\lambda}{\Delta y}$$

বা, $\Delta y . \Delta P_y \approx P_x \lambda$ ...... (9.6.19)

কিন্তু ডি ব্রগলির প্রকল্প অনুযায়ী $P_x = \frac{h}{\lambda}$। সুতরাং (9.6.19) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\Delta y . \Delta P_y \approx \frac{h}{\lambda} . \lambda \approx h \quad \text{...... (9.6.20)}$$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে এক্ষেত্রেও হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা তত্ত্ব প্রযোজ্য।

9.7 বোহ্‌রের পরিপূরকতার নীতি (Bohr's Complementarity Principle)

অনিশ্চয়তার নীতির তাৎপর্য আরও বাস্তবসম্মতভাবে বোঝার জন্য 1928 খ্রীষ্টাব্দে বোহর তাঁর পরিপূকতার নীতি উদ্ভাবন করেন। এই নীতিতে বলা হয় যে পারমাণবিক কোনও ঘটনার বর্ণনা সনাতন বলবিদ্যা যতটা সম্পূর্ণতার সঙ্গে দাবি করে, ততটা সম্পূর্ণতার সঙ্গে তা বর্ণনা করা যায় না। এর কারণ, যে রাশিগুলি (যেমন x ও P_x) কোনও ঘটনার সনাতন বর্ণনা গঠন করার জন্য পরিস্পরের পরিপূরক হিসাবে কাজ করে, সেগুলি আসলে পরস্পরের বাধাদায়ক (exclusive)। অথচ আমরা এই রাশিগুলি বাদ দিয়ে আর কোনও পরস্পরের পরিপূরক রাশি ব্যবহার করতে পারি না, কারণ কোয়ান্টাম বলবিদ্যাতেও এই রাশিগুলির সবই ব্যবহার করা হয়। কোনও পরীক্ষকের দৃষ্টিকোণ থেকে বিচার করলে পরিপূরকতার নীতি এই বোঝায় যে ঐ পরীক্ষকের কাছে যত সূক্ষ্ম বা নির্ভুল পরীক্ষা যন্ত্রই থাকুক না কেন, এই যন্ত্রগুলির এমনই ধর্ম যে অনিশ্চয়তার নীতিতে যতটা নির্ভুলভাবে কোনও পরিমাপের সীমা আছে, তারচেয়ে নির্ভুলভাবে কোনও পরিমাপই করা যায় না।

পরিমাপের এই অনিশ্চয়তা পরীক্ষক বা তাঁর যন্ত্রের কোনও ত্রুটির জন্য ঘটছে, এরূপ ভাবার কোনও কারণ নেই। পরীক্ষক বা যন্ত্রের জন্য কোনও ত্রুটি ঘটলে, তা পরীক্ষকের আরও সতর্কতার বা সূক্ষ্মতর যন্ত্রপাতির সাহায্য নিয়ে দূর করা যায়। কিন্তু অনিশ্চয়তা নীতির জন্য পরিমাপের যে ত্রুটি ঘটে, তা কখনও দূর করা যায় না। কারণ, প্রকৃতির নিয়মই এমন যে অবস্থান ও ভরবেগের এক জোড়া আনুশাসিত নির্দেশাঙ্কের কোনও একটিকে অধিকতর নির্ভুলতার সঙ্গে পরিমাপ করতে গেলেই অপরটির মান এমনভাবে পরিবর্তিত হয়ে যায় যে শেষ পর্যন্ত অনিশ্চয়তার নীতিই প্রযোজ্য থাকে। কোয়ান্টাম বলবিদ্যার এই দিকটি সনাতন বলবিদ্যা থেকে মৌলিকভাবে আলাদা। কারণ, সনাতন বলবিদ্যাতেও যখন কোনও রাশির পরিমাপ করা হয়, তখন রাশির তন্ত্রটিও সেই সঙ্গে বিঘ্নিত হয়, কিন্তু এই বিঘ্নের পরিমাপ করা যায় এবং এদ্বারা পরিমাপ্য রাশিটির মানের ত্রুটি সংশোধন করা যায়। কিন্তু পারমাণবিক তন্ত্রের ক্ষেত্রে দেখা যায় যে, এরূপ সংশোধন অসম্ভব। বোহ্‌রের পরিপূরকতার নীতি সনাতন বলবিদ্যার এই সীমাবদ্ধতাই নির্দেশ করে।

এখানে আরেকটি কথা উল্লেখযোগ্য যে, সূর্যের চারপাশে গ্রহগুলির ঘোরার ক্ষেত্রে কিংবা পৃথিবীর চারপাশে চাঁদের ঘোরার ক্ষেত্রে অনিশ্চয়তার নীতির কোনও মূল্য নেই। অর্থাৎ যেকোনও গ্রহ বা চাঁদের কক্ষপথ আমরা সনাতন বলবিদ্যার দ্বারাই যথেষ্ট নির্ভুলতার সঙ্গে পরিমাপ করতে পারি। এমনকি একটি ছোট ঢিলকে সুতোর সাহায্যে বেঁধে ঘোরালে এই গতিপথ নিরূপণে অনিশ্চয়তার নীতি প্রযোজ্য হয় না। কিন্তু একটি পরমাণুতে একটি ইলেকট্রন যখন নিউক্লিয়াসের চারপাশে ঘোরে তখন অনিশ্চয়তার নীতি পয়োজ্য হয়। এর কারণ অবশ্যই প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক h-এর মানের ক্ষুদ্রতা ($h = 6.6 \times 10^{-34}$ joule-sec)। সনাতন বলবিদ্যা কেবল পরমাণুর চেয়ে বহুগুণ বড় বস্তুর ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। কারণ, এইরূপ বস্তুর অবস্থান ও ভরবেগ নির্দেশাঙ্কগুলির মান খুবই বড় এবং সেজন্য এদের পরিমাপের অনিশ্চয়তাও h-র মানের চেয়ে বহুগুণ বড় হয়। সুতরাং এক্ষেত্রে আমরা h-কে শূন্য ধরতে পারি। অর্থাৎ এরূপ অনিশ্চয়তার ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি

$$\Delta x.\ \Delta P_x \approx 0$$

কাজেই, হয় $\Delta x \neq 0$, $\Delta P_x \simeq 0$ বা, $\Delta x \simeq 0$, $\Delta P_x \neq 0$, বা, $\Delta x \simeq \Delta P_x \simeq 0$। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে বৃহৎ বস্তুর ক্ষেত্রে অনিশ্চয়তার নীতি প্রযোজ্য হয় না এবং সেজন্য এদের ক্ষেত্রে x ও P_x একই সঙ্গে নির্ভুলভাবে পরিমাপ করা সম্ভব। এজন্য সনাতন বলবিদ্যাকে আমরা কোয়ান্টাম বলবিদ্যার একটি সীমায়িত (limiting) রূপ হিসাবে ধরতে পারি যেখানে $h \to 0$। বস্তুত h-ই হল মূল রাশি যা কোয়ান্টাম বলবিদ্যাকে সনাতন বলবিদ্যা থেকে পৃথক করে।

9.8 সারাংশ (Summary)

এই এককে হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতি বিস্তৃতভাবে আলোচনা করা হয়েছে। বলবিদ্যা হ্যামিলটনের সূত্রদ্বারা গঠন করা যায়। প্রকাশ্যভাবে সময় নিরপেক্ষ হ্যামিল্টনের সূত্রগুলি কেবল কণার অবস্থান ও ভরবেগ এবং সময়ের সাপেক্ষে এদের অন্তরকলনের ওপর নির্ভর করে। কোনও একদিকে এই দুটি রাশির উপাংশকে আনুশাসিত যুগ্মরাশি বলে। আবার প্রকাশ্যভাবে সময় নির্ভর হ্যামিল্টনীয় সমীকরণগুলি কেবল সময় ও কণার শক্তির ওপর নির্ভর করে। এজন্য এই দুটি রাশিকেও আনুশাসিত যুগ্মরাশি বলা হয়। সনাতন বলবিদ্যা অনুযায়ী এইরূপ দুটি যুগ্ম রাশিকে একই সঙ্গে যতইচ্ছা নির্ভুলতার সঙ্গে পরিমাপ করা সম্ভব। কিন্তু কোনও কণা যদি পরমাণুরূপ বা তা থেকে ক্ষুদ্রতর হয়, তখন এদের গতি সনাতন বলবিদ্যার দ্বারা নির্ধারিত হয় না। সেক্ষেত্রে কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সূত্র প্রয়োগ করতে হয়। হাইজেনবার্গ কোয়ান্টাম বলবিদ্যার দ্বারা প্রমাণ করেছেন যে দুটি আনুশাসিত যুগ্ম রাশি একই সঙ্গে যতইচ্ছা নির্ভুলতার সঙ্গে পরিমাপ করা যায় না। রাশিগুলির প্রাকৃতিক ধর্মই এমন যে একটি রাশিকে যত নির্ভুলভাবে পরিমাপের চেষ্টা করা হয়, এর যুগ্মরাশিটির পরিমাপের মধ্যে তত বেশী অনিশ্চয়তা দেখা দেয়, যারফলে এই দুই রাশির অনিশ্চয়তার গুণফল কোনওক্রমেই $h/2\pi$-এর চেয়ে কম হয় না।

একটি কণা বা ফোটনকে কোনও সময়ে একটি অত্যল্প স্থানে সীমাবদ্ধ তরঙ্গ-স্তূপ হিসাবে কল্পনা করলে হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তার নীতি প্রমাণ করা যায়। হাইজেনবার্গের নীতি বিভিন্ন কাল্পনিক পরীক্ষাদ্বারাও প্রমাণ করা

যায়। যেমন, অণুবীক্ষণের সাহায্যে একটি ইলেকট্রনের অবস্থান নির্ণয় করতে গেলে অনুবীক্ষণের কার্যনীতি অনুযায়ী ইলেকট্রনটির ভরবেগ পরিমাপের মধ্যে অনিশ্চয়তা দেখা দেয়, যা হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতির অনুসারী। তেমনি, কোনও অবস্থানে একটি পরমাণুর ভরবেগ নিরূপণ করতে গেলে এই উভয় রাশির পরিমাপের মধ্যেই অনিশ্চয়তা দেখা দেয় এবং এদের গুণফল হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতির অনুসারী। এমনকি একটি ইলেকট্রনের একই সঙ্গে অবস্থান ও ভরবেগ নির্ণয়ের পরীক্ষাতেও অনুরূপ পরিমাপের অনিশ্চয়তা থাকে।

বোহ্‌রের পরিপূরকতার নীতি অনিশ্চয়তার নীতিকে বুঝতে সাহায্য করে।

9.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

প্র. 9.1 হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তার নীতিটি বিবৃত করুন। আনুসাসিত যুগ্ম রাশি বলতে কি বোঝায়? সনাতন বলবিদ্যার অনিশ্চয়তার নীতি প্রযোজ্য হয় না কেন?

প্র. 9.2 একটি কণা বা ফোটনের তরঙ্গ-স্তূপ বলতে কি বোঝায়? এই তরঙ্গ স্তূপের ফুরিয়ার সমীকরণটি লিখুন। এই সমীকরণের সাহায্যে অনিশ্চয়তার নীতি প্রমাণ করুন।

প্র. 9.3 একটি মাইক্রোস্কোপের (অনুবীক্ষণ যন্ত্র) বিভক্তকরণ ক্ষমতা বলতে কি বোঝায়? এমন একটি পরীক্ষাব্যবস্থার বর্ণনা করুন যার দ্বারা দেখানো যায় যে একটি ইলেকট্রনের অবস্থান নির্ণয় করতে গেলে এর অবস্থান ও ভরবেগের পরিমাপের অনিশ্চয়তার গুণফল অন্তত h হয়।

প্র. 9.4 একটি পরমাণুর ভরবেগ নির্ণয়ের পরীক্ষায় ভরবেগ ও অবস্থানের পরিমাপের অনিশ্চয়তার গুণফল নির্ণয় করুন।

প্র. 9.5 ব্যবর্তন পরীক্ষায় একটি ইলেকট্রনের অবস্থান ও ভরবেগের পরিমাপের যে অনিশ্চয়তা হয়, তা নির্ণয় করুন এবং এদ্বারা অনিশ্চয়তার সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা করুন।

প্র. 9.6 বোহ্‌রের পরিপূরকতার নীতিটি বিবৃত করুন এবং এদ্বারা অনিশ্চয়তার নীতির যে ব্যাখ্যা পাওয়া যায়, তা সংক্ষেপে বলুন।

9.10 সর্বশেষ প্রশ্নাবলির উত্তর

উত্তর 9.1 প্রশ্নের প্রথম ও দ্বিতীয় অংশের উত্তরের জন্য (9.4) অনুচ্ছেদ দেখুন। তৃতীয় অংশের জন্য (9.7) অনুচ্ছেদের শেষাংশ দেখুন।

উত্তর 9.2 ঃ (9.5) অনুচ্ছেদ দেখুন।

উত্তর 9.3 ঃ (9.6.1) অনুচ্ছেদ দেখুন।

উত্তর 9.4 ঃ (9.6.2) অনুচ্ছেদ দেখুন।

উত্তর 9.5 ঃ (9.6.3) অনুচ্ছেদ দেখুন।

উত্তর 9.6 ঃ (9.7) অনুচ্ছেদ দেখুন।

একক 10 ☐ শ্রোডিংগার সমীকরণ

গঠন ঃ

10.1 প্রস্তাবনা

এই পর্যায়ের আগের দুই এককে আপনি দেখেছেন যে বড় আকারের কোন বস্তুখণ্ডের ক্ষেত্রে নিউটনের গতিসূত্র ও সনাতন গতিবিদ্যা যথেষ্ট হলেও অণু পরমাণুর গতিবিশ্লেষণে সনাতন গতিবিদ্যার পদ্ধতি যথেষ্ট নয়। মৌলকণা এবং সেগুলির আণবিক মাপের সমষ্টিগুলির গতিপ্রকৃতি কখনই সুনির্দিষ্ট করা যায় না, বরং সেগুলির আচরণ সম্ভাব্যতার মাধ্যমেই বর্ণনা করা যায়।

আদি কোয়ান্টাম তত্ত্বে আণবিক মাপের বস্তুকণার গতিবিধির ব্যাখ্যা করতে কয়েকটি 'কোয়ান্টাম সূত্র' ধরে নেওয়া হয়েছিল। আপনার মনে থাকতে পারে যে তাপীয় বিকিরণের বর্ণালি ব্যাখ্যা করতে গিয়ে প্লাঙ্ক (Planck)

আলোককণা বা ফোটনের শক্তিকে তার কম্পাঙ্ক 'ν' এর সমানুপাতী, অর্থাৎ $E = h\nu$ সূত্রটিকে ধরে নিয়েছিলেন। সমানুপাত ধ্রুবক h আমাদের কাছে প্লাঙ্কের ধ্রুবক নামে পরিচিত। বিজ্ঞানী নীল্‌স্ বোর (Neils Bohr) হাইড্রোজেন পরমাণুর বর্ণালির ব্যাখ্যা দিতে এই সূত্রের ব্যবহার করেন। উপরন্তু তিনি আরও যে অঙ্গীকারটি ধরে নেন তা হল ইলেকট্রনের এক একটি সুস্থিত বৃত্তাকার কক্ষপথের জন্য ইলেকট্রনের ভরবেগ এবং কক্ষপথের পরিধির গুণফল প্লাঙ্ক ধ্রুবকের এক একটি পূর্ণসংখ্যক গুণিতক। একথা অনস্বীকার্য যে আদি কোয়ান্টাম তত্ত্বের এই অঙ্গীকারগুলি আমাদের কিছু ভৌত ঘটনার সঠিক ব্যাখ্যা দিতে সাহায্য করেছিল এবং পদার্থের আচরণের এক নতুন চিত্র আমাদের চোখের সামনে উন্মীলিত করেছিল। কিন্তু এটিও আপনার মনে হয়ে থাকতে পারে যে এগুলি নেহাৎই গণনার সুবিধার জন্য উপযুক্ত যুক্তি ছাড়াই গ্রহণ করা হয়েছিল।

আমরা জানি, ইলেকট্রন, নিউট্রনের মত বস্তুকণাগুলি কখনও পদার্থ আবার কখনও তরঙ্গের মত আচরণ করে। কণাগুলির এই দ্বৈত আচরণ ডি ব্রগ্‌লি (Louis de Broglie)-কে প্রতিটি কণার একটি অনুষঙ্গী তরঙ্গের কল্পনা করতে অনুপ্রাণিত করেছিল। তিনি এই তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য $\lambda = h/p$ (p = কণার ভরবেগ) ধরে নিয়ে ছিলেন, যাতে কোন একটি কণার বেগ তার অনুষঙ্গী তরঙ্গের বেগের (group velocity) সমান হয়।

পদার্থতরঙ্গের এই ধারণাটি গৃহীত হলেও যেহেতু শব্দতরঙ্গ বা তড়িৎচুম্বকীয় তরঙ্গের মত যে কোন পরিচিত তরঙ্গেরই একটি তরঙ্গ-সমীকরণ থাকে, সেহেতু এই পদার্থ তরঙ্গেরও একটি সমীকরণের প্রয়োজন অনুভূত হয়েছিল। 1926 সালে শ্রোডিংগার (Erwin Schrödinger) ডি ব্রগলি তরঙ্গের ধারণার ভিত্তিতে প্রথম একটি তরঙ্গ-সমীকরণের উপস্থাপনা করেন। এই এককে আমরা শ্রোডিংগারের তরঙ্গ সমীকরণের উপস্থাপনা, বিভিন্ন অবস্থায় তার রূপ এবং তরঙ্গ অপেক্ষকের কয়েকটি ধর্ম নিয়ে আলোচনা করব।

এটি আমাদের মনে রাখতে হবে যে কোন তরঙ্গ সমীকরণই প্রমাণযোগ্য বিষয় নয়। এই সমীকরণের পালনীয় শর্তগুলি মনে রেখে আমরা তার একটি রূপ কল্পনা করতে পারি এবং বিভিন্ন ভৌত অবস্থায় সেটি প্রয়োগ করে তার কার্যকারিতা পরখ করতে পারি। ব্যবহারিক ক্ষেত্রে তরঙ্গ সমীকরণের সাফল্যই তার উপস্থাপনাকে সমর্থন করে।

উদ্দেশ্য

এই এককটির মূল উদ্দেশ্য কোয়ান্টাম বলবিদ্যার শ্রোডিংগার পদ্ধতির ভিত্তিস্বরূপ শ্রোডিংগারের তরঙ্গ-সমীকরণের সঙ্গে আপনার পরিচয় ঘটানো। এই এককটি পড়ার পর আপনি

- একমাত্রিক ও ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে শ্রোডিংগারের সময় নির্ভর ও সময়-নিরপেক্ষ সমীকরণগুলি প্রতিষ্ঠা করতে পারবেন।
- তরঙ্গ অপেক্ষকের বিশেষ গাণিতিক ধর্মগুলি বিবৃত করতে পারবেন।
- তরঙ্গ অপেক্ষকের ভৌত তাৎপর্য উদ্দিষ্ট বস্তুতন্ত্রের সম্ভাব্যতা ঘনত্ব এবং সম্ভাব্যতার প্রবাহ ঘনত্বের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- তরঙ্গ অপেক্ষকের প্রমাণীকরণ ও সমকৌণিকতা ব্যাখ্যা করতে পারবেন এবং সম্ভবপর ক্ষেত্রে অপেক্ষকের প্রমাণীকরণ সম্পন্ন করতে পারবেন।

- কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় ব্যবহৃত সংকারকগুলিকে চিহ্নিত করতে পারবেন এবং সেগুলি ব্যবহার করে কোয়ান্টাম বলবিদ্যার বিভিন্ন সমীকরণ লিখতে পারবেন।

- কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় তরঙ্গ অপেক্ষক ব্যবহার করে কীভাবে কোন ভৌতরাশির প্রত্যাশিত মান পাওয়া যায় তা বিবৃত করতে পারবেন এবং সনাতন বলবিদ্যার সমীকরণ থেকে ভৌতরাশির প্রত্যাশিত মান ব্যবহার করে কীভাবে কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সমীকরণে পৌঁছানো যায় তা বিবৃত করতে পারবেন।

10.2 শ্রোডিংগার সমীকরণ ও তরঙ্গ অপেক্ষক

আপনি ইতিপূর্বে দেখেছেন যে, কোন একটি বস্তুকণার ক্ষেত্রে বিভিন্ন তরঙ্গদৈর্ঘ্য (λ) বা তরঙ্গসংখ্যার $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$ অসংখ্য একমাত্রিক তরঙ্গ উপরিপাতিত হয়ে একটি তরঙ্গপুঞ্জ তৈরী করে এবং এই তরঙ্গপুঞ্জের দলীত বেগই কণাটির বেগ সূচিত করে। এই অসংখ্য তরঙ্গের মধ্যে কোন একটি তরঙ্গের কথা বিবেচনা করা যাক, যার কৌণিক কম্পাঙ্ক ω। তরঙ্গটি x দিকে সঞ্চারিত হলে আমরা তরঙ্গ অপেক্ষকটিকে লিখতে পারি ঃ

$$\psi(x, t) = Ae^{i(kx - wt)} \quad (t = \text{সময়}) \qquad \ldots\ldots 10.1$$

ψ রাশিটি কি ধরনের, এটি আপনার মনে হতে পারে। শব্দতরঙ্গের ক্ষেত্রে তরঙ্গ অপেক্ষকটি হল মাধ্যমের একটি বস্তুকণার সরণ, যার বর্গ তরঙ্গের শক্তিঘনত্ব বা তীব্রতার সমানুপাতী। তড়িৎচুম্বকীয় তরঙ্গের ক্ষেত্রেও তরঙ্গ অপেক্ষকটি তড়িৎক্ষেত্র বা চৌম্বকক্ষেত্রের প্রাবল্যের মান এবং সেখানেও তরঙ্গের তীব্রতা প্লাবল্যের বর্গের সমানুপাতী। তরঙ্গ-অপেক্ষক ψ এর নিজস্ব কোন ভৌত অর্থ দেওয়া না গেলেও তার বর্গ বস্তুকণার নির্দিষ্ট অঞ্চল থাকার সম্ভাব্যতা-ঘনত্ব বা কণাস্রোতের তীব্রতার সমানুপাতী হবে।

তরঙ্গ-অপেক্ষক ψ-এর সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করতে হলে সমীকরণটির চরিত্র সম্বন্ধে আগেই জানা দরকার। এই সমীকরণের প্রত্যাশিত বৈশিষ্ট্যগুলি নিম্নরূপ।

ক) তরঙ্গ-সমীকরণটি অবশ্যই রৈখিক হবে, যাতে ψ_1 ও ψ_2 যদি সেটির দুটি সমাধান হয় তবে ψ_1 ও ψ_2 এর যে কোনও রৈখিক সমবায়। অর্থাৎ $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ (c_1, c_2 = ধ্রুবক) এর মত কোন অপেক্ষকও সমীকরণটিকে সিদ্ধ করবে। এই শর্তটি তরঙ্গের উপরিপাতনের নীতিকে (principle of superposition) সমর্থন করে।

খ) তরঙ্গের অবকল সমীকরণটি সময় t-এর সাপেক্ষে প্রথম ক্রমের হতে হবে। কেননা $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ এর মান জানা গেলে তবেই কোন এক সময়ে ψ এর মান জানা থাকলে পরবর্তী কোন সময়ে এই অপেক্ষকের মান নির্ণয় করা সম্ভব হবে।

গ) তরঙ্গ সমীকরণটি থেকে যে সমস্ত সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যাবে সেগুলি ডিব্রগ্লির প্রকল্প এবং সনাতন গতিবিদ্যার সঙ্গে সুসঙ্গত হবে। অর্থাৎ ডি ব্রগলির পদার্থতরঙ্গের ধারণা থেকে যে সিদ্ধান্তে আসা যায় তার

সঙ্গে অথবা সনাতন গতিবিদ্যায় লব্ধ ফলের সঙ্গে তরঙ্গ সমীকরণের সমাধানের মিল থাকবে। এটিকে সুসঙ্গতির নীতি (correspondence principle) বলা হয়।

10.2.1 সময়নির্ভর শ্রোডিংগার সমীকরণ

ডি ব্রগ্‌লি তরঙ্গের সংজ্ঞা অনুযায়ী, বস্তুকণার ভরবেগ $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$ 10.2

বিভবহীন ক্ষেত্রে বিবরণশীল মুক্ত কণার ক্ষেত্রে কণার শক্তি (কণার বেগ আপেক্ষিক নয় ধরে নিয়ে) $E = \frac{p^2}{2m}$ $= \hbar^2 k^2 / 2m$ যা $h\nu$ বা $\hbar\omega$ এর সমান।

10.1 সমীকরণটিকে t এবং x এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাওয়া যায়

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega A e^{i(kx - \omega t)} = -i\omega\psi \qquad \text{...... 10.3}$$

এবং $$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = (ik)^2 A e^{i(kx - \omega t)} = -k^2\psi \qquad \text{...... 10.4}$$

10.3 ও 10.4 সমীকরণ থেকে,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hbar\omega . \psi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi$$

সুতরাং, $$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \qquad \text{...... 10.5}$$

এই সমীকরণ কে m ভরের মুক্তকণার জন্য, একমাত্রিক ও সময়নির্ভর শ্রোডিংগার্ তরঙ্গ সমীকরণ বলা হয়।

কণাটি যদি মুক্ত না হয়ে এমন একটি বলক্ষেত্রে বিচরণ করে যেটিকে $V(x)$ বিভবের মাধ্যমে বর্ণনা করা যায়, তাহলে কণার মোট শক্তির রাশিমালাটি হবে

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

আগের মত $E = \hbar\omega$ এবং $p = \hbar k$ লিখে

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(x)$$

বা, $$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi \qquad \text{(10.3 ও 10.4 ব্যবহার করে)} \qquad \text{...... 10.6}$$

এটি শ্রেডিংগারের একমাত্রিক ও সময় নির্ভর সাধারণ সমীকরণ। লক্ষ্য করুন যে 10.5 বা 10.6 সমীকরণ কণাটির কোন নির্দিষ্ট ভরবেগ বা গতীয় শক্তির জন্য প্রযোজ্য নয়। সুতরাং যখন বিভিন্ন ভরবেগের একমাত্রিক তরঙ্গ একটি তরঙ্গপুঞ্জ গঠন করে তখন প্রতিটি তরঙ্গই 10.5 বা 10.6 সমীকরণ পালন করে। এবং তার ফলে উপরিপাতনের ফলে উদ্ভুত তরঙ্গপুঞ্জও এই সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

10.6 সমীকরণটিকে এইভাবে লেখা যায় ঃ

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V\right)\psi \qquad \ldots\ldots 10.7$$

এই সমীকরণের ডানদিকের বন্ধনীর ভিতরের রাশিমালাটি ψ-এর ওপর ক্রিয়া শীল একটি সংকারক (Operator)। এটিকে হ্যামিল্টনীয় সংকারক, $\hat{H}$, নামে অভিহিত করা হয়। এখন আমরা 10.7 সমীকরণটিকে লিখতে পারি ঃ

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \qquad \ldots\ldots 10.8$$

সময়নির্ভর সমীকরণের ত্রিমাত্রিক রূপ ঃ

বস্তুকণার সংশ্লিষ্ট তরঙ্গটিকে এর আগে আমরা x-অভিমুখে সঞ্চরণশীল বলে ধরেছি। এখন যদি সেটিকে যে কোন দিকের অভিমুখী বলে ধরা যায় তবে তরঙ্গ অপেক্ষকটিকে লিখতে হবে

$$\psi(\underline{r}, t) = Ae^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

এখানে $\underline{k}$ ভেক্টরটি ভরবেগ $\underline{p}$ এর সমান্তরাল। $\underline{k}.\,\underline{r}$ গুণফলটির মান ঃ

$$\underline{k}\cdot\underline{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

যেখানে x, y ও z পাদাংক দিয়ে উপাংশগুলি বোঝানো হয়েছে।

লক্ষ্য করুন, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik_x.Ae^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)} = ik_x\psi$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = (ik_x)^2\psi = -k_x^2\psi$$

অনুরূপভাবে $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -k_y^2\psi$ ও $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -k_z^2\psi$

সুতরাং $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ বা, $\nabla^2\psi = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\psi = -k^2\psi$।

এখানে $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ একটি সংকারক এবং এটিকে লাপ্লাসীয় সংকারক (Laplacian operator) বলা হয়। এবার আপনি 10.6 সমীকরণের জায়গায় লিখতে পারেন

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi \qquad \ldots\ldots 10.9(a)$$

এটি শ্রোডিংগারের ত্রিমাত্রিক সময়নির্ভর সমীকরণ। এটিকে পূর্বের মত লেখা যায়

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi = H\psi \qquad \ldots\ldots 10.9(b)$$

হ্যামিল্টনীয় সংকারক H-এর স্বরূপটি কী সে সম্বন্ধে একটু আলোচনা করা যাক। আপনি দেখেছেন যে বস্তুকণার গতিশক্তি $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ এবং $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi = E\psi$

সুতরাং $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ সংকারকটি তরঙ্গ অপেক্ষকের ওপর ক্রিয়া করলে আমরা গতিশক্তি ও ψ এর গুণফলটি পাই। সুতরাং হ্যামিল্টনীয় সংকারকটি যখন ψ এর ওপর ক্রিয়া করে তখন আমরা ψ এবং $(E + V)$ রাশির গুণফল পাই। দ্বিতীয় রাশিটি হল বস্তুকণার গতিশক্তি ও স্থিতীয়শক্তির যোগফল, অর্থাৎ মোট শক্তি। সুতরাং হ্যামিল্টনীয় সংকারকটি বস্তুকণার মোট শক্তির মান সূচিত করে। এবার একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

অনুশীলনী—1

শ্রোডিংগারের সময় নির্ভর সমীকরণ সম্বন্ধে নীচের উক্তিগুলি সঠিক কিনা বলুন।

ক) সমীকরণটি আপেক্ষিক (relativistic) বস্তুকণার ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যায়।

খ) সমীকরণটি তখনই প্রযোজ্য যখন বস্তুকণাটি মুক্ত অথবা সংরক্ষী বলের ক্ষেত্রে বিচরণ করে।

গ) তরঙ্গ অপেক্ষকটি সময় ও স্থানাঙ্ক, উভয়েরই ওপর নির্ভরশীল।

10.2.2 সময়-নিরপেক্ষ শ্রোডিংগার সমীকরণ

একমাত্রিক সমীকরণ : আগের অনুচ্ছেদে আমরা যে একমাত্রিক সময়নির্ভর সমীকরণটি (10.7) পেয়েছিলাম, তাতে তরঙ্গ-অপেক্ষক ψ সময় ও স্থানাঙ্ক x, উভয়েরই অপেক্ষক। যদি ধরে নেওয়া যায় যে বিভব V সময় নির্ভর নয়, তবে বস্তুকণার মোট শক্তি E সময়ের সঙ্গে অপরিবর্তিত থাকবে এবং 10.7 বা 10.8 সমীকরণ থেকে পাওয়া যাবে

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi \quad (E = \text{সময় নিরপেক্ষ রাশি}) \qquad \ldots\ldots 10.10$$

এই সমীকরণ সমাকলনযোগ্য।

$$i\hbar\frac{d\psi}{\psi} = Edt. \text{ বা } hn\psi = -\frac{i}{\hbar}Et,$$

অর্থাৎ $\psi \sim e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

ধরাযাক ψ রাশিটি স্থানাঙ্ক নির্ভর রাশি $u(x)$ এবং সময় নির্ভর রাশি $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ এর গুণফল, অর্থাৎ $\psi(x, t) = cu(x)$ $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ $(c = \text{ধ্রুবক})$ ……. 10.11

10.7 সমীকরণে ψ এর এই রাশিমালাটি ব্যবহার করে,

$$ci\hbar\, u(x).\left(-\frac{iE}{\hbar}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}Et} = c\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2}+Vu\right)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

বা, $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} + Vu = Eu$

বা, $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)u = 0$ …… 10.12

10.12 সমীকরণটি শ্রোডিংগারের একমাত্রিক সময়-নিরপেক্ষ সমীকরণ। এর সমাধান থেকে $u(x)$ জানা গেলে 10.11 সমীকরণটি সম্পূর্ণ সমাধান সূচিত করবে। এই সমাধান অবশ্য বস্তুকণার নির্দিষ্ট শক্তি E এর জন্যই প্রযোজ্য। সেটি যদি ভিন্ন ভিন্ন শক্তির অবস্থায় থাকতে পারে তাহলে প্রতিটি অবস্থার জন্য তরঙ্গ অপেক্ষকটি নির্ণয় করে সেগুলির যোগফলের দ্বারা সম্পূর্ণ তরঙ্গ-অপেক্ষকটি সূচিত করতে হবে। এবং সেটিই হবে শ্রোডিংগার সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

সাধারণ সমাধান ঃ ধরা যাক আলোচ্য বস্তুকণাটি একাধিক কোয়ান্টাম অবস্থায় থাকতে পারে। যেগুলিতে কণার শক্তি $E_1, E_2, E_3, \ldots$ ইত্যাদি।

প্রথম অবস্থাটিতে তরঙ্গ অপেক্ষকটি হল $c_1u_1(x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t}$, দ্বিতীয়টিতে $c_2u_2(x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t}$, ইত্যাদি। সুতরাং সাধারণ সমাধান

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n u_n(x)\, e^{\frac{i}{\hbar}E_nt} \qquad \ldots\ldots 10.13$$

10.11 বা 10.13 সমাধানগুলি লক্ষ করলে আপনি বুঝতে পারবেন যে এগুলিতে আমরা সমাধানের সময় নির্ভর ও অবস্থান নির্ভর অংশগুলিকে আলাদা করতে সক্ষম হয়েছি।

ত্রিমাত্রিক সমীকরণ ঃ

এখন আমরা শ্রোডিংগারের ত্রিমাত্রিক সমীকরণ (10.9) এর সমাধানের সময় নির্ভর ও অবস্থান নির্ভর অংশগুলিকে আলাদা করার চেষ্টা করব। ধরে নিন এক্ষেত্রে তরঙ্গ অপেক্ষক E এর নির্দিষ্ট স্থির মানের জন্য

$$\psi(\vec{r}, t) = cu(\vec{r}).e^{-iEt/\hbar} \qquad \ldots\ldots 10.14$$

এখানে c একটি ধ্রুবক।

10.9 সমীকরণে $\psi(\vec{r}, t)$ এর এই মান ব্যবহার করে,

$$i\hbar.\ c.u(\vec{r}).\left(-\frac{iE}{\hbar}\right)e^{-iEt/\hbar} = c\left(-\frac{\hbar^2}{2m}.\nabla^2u + Vu\right)e^{-iEt/\hbar}$$

অর্থাৎ $Eu = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2u + Vu$

বা, $\nabla^2u + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)u = 0$ …… 10.15

এটি শ্রোডিংগারের ত্রিমাত্রিক সময়-নিরপেক্ষ সমীকরণ। এই সমীকরণের সমাধান জানা থাকলে 10.14 সূত্র অনুযায়ী নির্দিষ্ট মোট শক্তি E-এর জন্য সম্পূর্ণ তরঙ্গ অপেক্ষকটি জানা যেতে পারে। আবার কণার শক্তি যদি বিভিন্ন কোয়ান্টাম অবস্থায় $E_1, E_2, E_3 \ldots$ হয় তবে সাধারণ তরঙ্গ-অপেক্ষক হবে

$$\psi(\vec{r}, t) = C_n u_n(\vec{r})\, e^{-iE_n t/\hbar} \qquad \ldots\ldots 10.16$$

ইতিপূর্বে আপনি দেখেছেন যে কোন বস্তুকণা যখন $E_1, E_2, \ldots E_n$, প্রভৃতি বিভিন্ন শক্তির অবস্থায় থাকতে পারে তখন তার তরঙ্গ-অপেক্ষকটি 10.16 সূত্রানুযায়ী হয়ে থাকে। 10.13 সূত্রটি ব্যবহার করে কণাটির সম্ভাব্যতা-ঘনত্ব নির্ণয় করা যাক।

যদি $\psi(x, t) = \sum_n C_n u_n(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$ হয়, তবে

$$\psi^*(x, t) = \sum_n C^*_n u^*_n(x)\, e^{\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

$\therefore$ সম্ভাব্যতা ঘনত্ব $P(x, t) = \psi^*(x, t)\,\psi(x, t)$

$$= \sum_n C^*_n C_n u^*_n(x)\, u_n(x)$$

$$+ \sum_m \sum_n C^*_m C_n\, u^*_m(x)\, u_n(x)\, e^{\frac{i}{\hbar}(E_m - E_n)t} \quad (m \neq n) \qquad \ldots\ldots 10.17$$

10.17 সমীকরণ থেকে বুঝতে পারছেন যে বস্তুকণাটি যদি অন্তত দুটি শক্তির অবস্থায় থাকতে পারে। তবে $P(x, t)$ সময় নির্ভর হবে। কিন্তু যদি সেটি একটি মাত্র শক্তির অবস্থায় (E_l, ধরুন) থাকতে পারে তবে C_l ছাড়া সবগুলি C_n এর মান শূন্য হবে এবং সম্ভাব্যতা ঘনত্বের মান হবে

$$P(x, t) = c_l^* c_l\, u_l^*(x)\, u_l(x)$$

যা সময়-নিরপেক্ষ। এর থেকে বোঝা যায় যে কোন বস্তুকণা যদি একটি মাত্র শক্তির অবস্থায় থাকতে পারে তবে তার সম্ভাব্যতার বন্টন সর্বদা এক থাকে। এজন্য একটিমাত্র শক্তির অবস্থাকে 'স্থির অবস্থা' (steady state) বলা হয়।

10.2.3 তরঙ্গ-অপেক্ষকের ভৌত তাৎপর্য

আমরা আগেই আলোচনা করেছি, যে তরঙ্গ অপেক্ষকের নিজস্ব কোন ভৌত তাৎপর্য না থাকলেও তার বর্গ বস্তুকণার অবস্থানের সম্ভাব্যতা ঘনত্বের সমানুপাতী হয়। ψ রাশিটি জটিল (complex) হওয়ায় এই রাশি বা তার সরাসরি বর্গের কোন ভৌত অর্থ থাকতে পারে না। কিন্তু রাশিটিকে তার জটিল অনুবন্ধী (complex conjugate) রাশি দিয়ে গুণ করলে যে নূতন রাশিটি পাওয়া যায় তা বাস্তব। এই রাশিটি ψ-এর মডিউলাসের বর্গ এবং এই বাস্তব রাশিটি বস্তুকণার অবস্থানের সম্ভাব্যতা ঘনত্ব নির্দেশ করে বলে ধরা হয়।

ধরে নিন তরঙ্গ-অপেক্ষক $\psi = A + iB$ যেখানে A ও B বাস্তব। i এর স্থানে $-i$ লিখে ψ এর জটিল অনুবন্ধী রাশি, ψ^*পাওয়া যায়। সুতরাং $\psi^* = A - iB$

এখন $\psi^* \psi = |\psi|^2 = (A - iB)(A + iB) = A^2 + B^2$ স্পষ্টতই, $|\psi|^2$ রাশিটি বাস্তব।

t সময়ে যে কোন অতিক্ষুদ্র আয়তন dV এর মধ্যে বস্তুকণাটি থাকায় সম্ভাব্যতা

$$dp = |\psi(\vec{r}, t)|^2 \, dV$$

সুতরাং কোন সুনির্দিষ্ট আয়তন V এর মধ্যে বস্তুকণাটি থাকায় সম্ভাব্যতা ঐ সময়ে

$$p = \int_V |\psi(\vec{r}, t)|^2 \, dV \qquad \ldots\ldots 10.18$$

অবশ্য বস্তুকণাটি যদি একমাত্রিক গতিতে x দিক অভিমুখে গতিশীল হয় তবে $x = x_1$ থেকে $x = x_2$ এর মধ্যে বস্তুকণাটিকে পাওয়ার সম্ভাব্যতা হবে

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x, t)|^2 \, dx \qquad \ldots\ldots 10.19$$

তরঙ্গ-অপেক্ষকের কয়েকটি বিশেষ ধর্ম

আগের দুটি সমীকরণ 10.17 ও 10.18 থেকে নির্দিষ্ট ত্রিমাত্রিক বা একমাত্রিক আয়তনের মধ্যে একটি বস্তুকণাকে পাওয়ার সম্ভাব্যতার সঙ্গে তার তরঙ্গ অপেক্ষকের সম্পর্কটি বুঝতে পেরেছেন। এই সম্পর্কের ফলে তরঙ্গ-অপেক্ষকের কয়েকটি বিশেষ ধর্মের উদ্ভব হয়। এই ধর্মগুলির সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক।

1. সম্ভাব্যতার মান কোন বিন্দুতেই অসীম হতে পারে না। সুতরাং x, y, ও z এর যে কোন মানের জন্য ψ এর মান সীমিত (finite) হবে।

2. সম্ভাব্যতার ঘনত্ব এবং তার সঙ্গে সংশ্লিষ্ট অন্যান্য রাশি, যেমন কণার সংখ্যাঘনত্ব বা আধান ঘনত্ব, এগুলির প্রতিটিই ভৌত রাশি এবং যে কোন বিন্দুতে এগুলির একাধিক মান থাকতে পারে না। সুতরাং প্রত্যেক বিন্দুতেই ψ রাশির একটিমাত্র মান থাকবে, অর্থাৎ রাশিটি হবে একমানবিশিষ্ট (single-valued)।

3. সম্ভাব্যতা-ঘনত্বের মান সর্বত্রই সন্তত (continuous) হয়, যদিও যেখানে বিভবের মান অসীম সেখানে সম্ভাব্যতা ঘনত্বের মান শূন্য ও অসন্তত হতে পারে। এর থেকে এই সিদ্ধান্তে আসা যায় যে সে সব বিন্দুতে V-এর মান অসীম নয় সেখানে ψ এর মান সন্তত।

4. অসীম দূরত্বে ψ এবং ψ-এর নতি উভয়ই শূন্য হবে।

10.2.4 তরঙ্গ-অপেক্ষকের প্রমাণীকরণ (normalisation)

আপনি নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছেন যে তরঙ্গ অপেক্ষক ψ-এর রাশিমালায় (10.11 বা 10.14 সূত্র) একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক ব্যবহার করা হয়েছে। সম্ভাব্যতার ধারণা ব্যবহার করে আপনি এই ধ্রুবকটির মান নির্ণয় করতে পারেন। এটি কীভাবে করা যায়? ধরা যাক 10.11 সূত্রের তরঙ্গ-অপেক্ষকটি একটিমাত্র বস্তুকণার জন্য, যেটি $-\infty$ থেকে $+\infty$ এর মধ্যে x-এর যে কোন স্থানাঙ্কে থাকতে পারে। সুতরাং $-\infty \le x \le \infty$ সীমার মধ্যে বস্তুকণাটি থাকায় সম্ভাব্যতা 10.18 অনুযায়ী

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t).\psi(x,t).dx$$

$$= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x)^2.e^{-iEt/\hbar}.e^{iEt/\hbar}dx$$

$$= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x)^2 dx$$

$= c^2 I$. ধরা যাক, যেখানে সমাকলনটির মান I।

কিন্তু কণাটি $x = -\infty$ থেকে $x = \infty$। এই দুই সীমার মধ্যে থাকা সুনিশ্চিত হওয়ায় সম্ভাব্যতা P-এর মান 1। সুতরাং $c^2 I = 1$, বা $c = \frac{1}{\sqrt{I}}$। তখন 3.11 সূত্রের রাশিমালাটি লেখা যায়

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{I}} u(x)\, e^{-iEt/\hbar} \qquad \ldots\ldots 10.20$$

এই রাশিমালাটিকে আমরা কণাটির প্রমাণীকৃত (normalised) তরঙ্গ অপেক্ষক বলে থাকি।

10.14 সূত্রের প্রমাণীকরণের জন্য মনে রাখতে হবে যে বস্তুকণাটির নির্দিষ্ট আয়তনের মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা $P = 1$। এই আয়তন যদি V হয় তবে

$$P = \int_V |\psi(\vec{r},t)|^2 dV = \int_V \psi^*(\vec{r},t)\,\psi(\vec{r},t)\,dV$$

$$= c^2 \int_V u(\vec{r})^2 e^{-iEt/\hbar}.e^{iEt/\hbar} dV = c^2 \int_V u(\vec{r})^2 dV = c^2 I'$$

যেখানে I' = সমাকলনের মান।

$\therefore$ পূর্বের মত $c^2 I' = 1$, বা $c = \frac{1}{\sqrt{I'}}$।

এবং $$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{I'}} u(\vec{r}).e^{-iEt/\hbar} \qquad \ldots\ldots 10.21$$

এটি 10.14 সূত্রের তরঙ্গ অপেক্ষকের প্রমাণীকৃত রূপ।

প্রমাণীকরণের একটি উদাহরণ :

ধরা যাক x দিক বরাবর চলনশীল একটি বস্তুকণা $-\infty \le x \le \infty$ সীমার মধ্যে থাকে এবং তার তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi(x) = Ae^{-x^2/2 + ikx}$।

প্রমাণীকরণের মাধ্যমে A ধ্রুবকটির মান নির্ণয় করতে হবে।

এক্ষেত্রে $\psi^*(x) = Ae^{-x^2/2}e^{-ikx}$

$\therefore \quad \psi^*(x)\,\psi(x) = A^2 e^{-x^2}$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\ \psi(x)dx = A^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = A^2\sqrt{\pi}$$

কিন্তু এই সমাকলটি বস্তুকণার $x = -\infty$ থেকে $x = \infty$ সীমার মধ্যে থাকায় সম্ভাব্যতা, সুতরাং এর মান 1।

$$\therefore \quad A^2\sqrt{\pi} = 1, \text{ বা } A = \pi^{-\frac{1}{4}}$$

$\therefore$ প্রমাণীকৃত তরঙ্গ অপেক্ষকটি হল $\psi(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}\, e^{-x^2/2 + ikx}$

10.2.5 তরঙ্গ অপেক্ষকের সমকৌনিকতা (orthogonality)

ধরা যাক 10.11 সূত্রে যেমন একমাত্রিক তরঙ্গ অপেক্ষক লেখা হয়েছে, $\psi_m(x)$ ও $\psi_n(x)$ কোন একটি বস্তুকণার সেরূপ দুটি অপেক্ষক। এই দুই অবস্থায় কণাটির শক্তি যথাক্রমে Em ও En। Em ও En যদি ভিন্ন হয় তবে দেখা যায় $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*_m(x)\ \psi_n(x)\ dx = 0$ যদি $m \neq n$ হয়

$= 1$ যদি $m = n$ হয়।

তরঙ্গ অপেক্ষকের এই ধর্মকে অপেক্ষকগুলির সমকৌণিকতা বলা হয়। শ্রোডিংগার সমীকরণের সাহায্যে আমরা এটি প্রমাণ করতে পারি।

10.12 সমীকরণটিকে $ce^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ দিয়ে গুণ করে পাওয়া যায়ঃ

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0$$

Em ও En শক্তি-অবস্থার জন্য সমীকরণটি হল

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_m}{dx^2} + E_m\psi_m = V\psi_m \qquad \dots\dots 10.22(a)$$

$$\text{ও}\ \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + E_n\psi_n = V\psi_n \qquad \dots\dots 10.22(b)$$

10.22(a) সমীকরণের জটিল অনুবন্ধী সমীকরণটিকে ψ_n দিয়ে দুদিকে গুণ করলে পাওয়া যায়

$$\frac{\hbar^2}{2m}\psi_n\frac{d^2\psi^*_m}{dx^2} + E_m\psi_n\psi^*_m = V\psi_n\psi^*_m \qquad \dots\dots 10.23(a)$$

10.22(b) সমীকরণকে ψ^*_m দিয়ে গুণ করে পাওয়া যায়

$$\frac{\hbar^2}{2m}\psi^*_m\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + E_n\psi^*_m\psi_n = V\psi^*_m\psi_n \qquad \dots\dots 10.23(b)$$

10.23(a) থেকে 10.23(b) বিয়োগ করে,

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi_n\frac{d_2\psi^*_m}{dx^2} - \psi^*_m\frac{d^2\psi_n}{dx^2}\right] + (E_m - E_n)\psi^*_m\psi_n = 0$$

কিন্তু $\psi_n \dfrac{d^2\psi^*_m}{dx^2} - \psi^*_m \dfrac{d^2\psi_n}{dx^2}$

$$= \left(\psi_n \frac{d^2\psi_m^*}{dx^2} + \frac{d\psi_n}{dx}.\frac{d\psi_m^*}{dx}\right) - \left(\frac{d\psi_m^*}{dx}.\frac{d\psi_n}{dx} + \psi_m^* \frac{d^2\psi_n}{dx^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\psi_n \frac{d\psi_m^*}{dx} - \psi_m^* \frac{d\psi_n}{dx}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\psi_n \frac{d\psi_m^*}{dx} - \psi_m^* \frac{d\psi_n}{dx}\right) = -\frac{2m}{\hbar^2}(E_m - E_n)\,\psi^*_m\psi_n$$

এই সমীকরণের দুই দিককে $x = -\infty$ ও $x = \infty$ সীমার মধ্যে x -এর সাপেক্ষে সমাকলন করে,

$$\left[\psi_n \frac{d\psi_m^*}{dx} - \psi_m^* \frac{d\psi_n}{dx}\right]_{-\infty}^{\infty} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E_m - E_n)\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*_m\,\psi_n dx \qquad \ldots\ldots 10.24$$

আমরা আগেই দেখেছি যে অসীম দূরত্বে, যখন $x = \pm\infty$, তখন ψ_m, ψ_m ও তাদের নতিগুলির মান শূন্য। সুতরাং 10.24 সমীকরণের বামদিকের মান শূন্য। অতএব

$$(E_m - E_n)\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*_m\psi_m dx = 0$$

যদি $m \neq n$ এবং $E_m \neq E_n$ হয় তবে

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*_m\psi_n dx = 0 \qquad \ldots\ldots 10.25(a)$$

এবং যদি $m = n$, $E_m = E_n$ হয় তবে ψ_m বা ψ_n এর প্রমাণীকরণের ফলে

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*_m\psi_n dx = 1 \qquad \ldots\ldots 10.25(b)$$

10.25(a) ও 10.25(b) সমীকরণগুলি ψ_m ও ψ_n এর সমকৌণিকতা প্রমাণ করে।

অনুশীলনী —2

ক) এই অনুশীলনীতে কয়েকটি প্রশ্ন ও প্রতিটির তিনটি করে সম্ভাব্য উত্তর দেওয়া আছে। যে উত্তরটি সঠিক সেটিকে চিহ্নিত করুন।

(i) কোন একটি তরঙ্গ-অপেক্ষকের রূপ $O \leq x \leq a$ সীমার মধ্যে $A \tan\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$ হতে পারে না, কেননা

(a) এটি x-এর একটি প্রত্যাবর্তী অপেক্ষক

(b) এটি $x = \frac{a}{2}$ বিন্দুতে সসীম ও সন্তত নয়

(c) $x = 0$ বা $x = a$ বিন্দুতে এটির মান শূন্য হয়।

(ii) তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi(x, t) = \sum_n c_n \psi_n(x) \, e^{-iE_n t/\hbar}$ এর কেবলমাত্র c_2 ছাড়া অন্য c_n এর মান যদি শূন্য হয় তবে তার অর্থ

(a) বস্তুটি কেবলমাত্র E_2 শক্তির অবস্থায় থাকতে পারে

(b) বস্তুটি E_2 ছাড়া অন্য কোন শক্তির অবস্থায় থাকতে পারে

(c) E_2 ছাড়া অন্য শক্তি অর্থাৎ $E_1, E_3, E_4 \ldots$ প্রভৃতির মান শূন্য।

(iii) যদি কোন একটি বস্তুকণায় প্রমাণীকৃত তরঙ্গ-অপেক্ষক $\psi(x)$ হয় তবে n-সংখ্যক অনুরূপ কণার প্রমাণীকৃত তরঙ্গ অপেক্ষক হবে

(a) $n\psi(x)$ (b) $n^2\psi(x)$ (c) $\sqrt{n}\,\psi(x)$

খ) কোন পরমাণুর ভৌম অবস্থা ও প্রথম উত্তেজিত অবস্থার তরঙ্গ অপেক্ষক ψ_0 ও ψ_1। এবং এদের শক্তি যথাক্রমে E_0 ও E_1। যদি পরমাণুর ভৌম অবস্থায় থাকার সম্ভাব্যতা 40% এবং প্রথম উত্তেজিত অবস্থায় থাকার সম্ভাব্যতা 60% হয় তাহলে (a) পরমাণুর তরঙ্গ অপেক্ষক নির্ণয় করুন। (b) এর গড়শক্তি কত।

10.3 কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় সংকারকের ব্যবহার

আগের আলোচনার মধ্যে আপনি $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)$, $\nabla^2\psi(\vec{r})$ প্রভৃতি রাশির দেখা পেয়েছেন। $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, ∇^2 প্রভৃতি চিহ্নগুলির নিজস্ব কোন অর্থ নেই। এগুলির দ্বারা আমরা ψ অপেক্ষকটির ওপর এক একটি ক্রিয়া বোঝাই, যেগুলির দ্বারা এক একটি নূতন অপেক্ষকের সৃষ্টি হয়। $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ বা ∇^2 -কে আমরা সংকারক (operator)বলে থাকি।

ধরা যাক $f(x) = ax^2 + bx + c$ একটি অপেক্ষক। এটির ওপর $\frac{d}{dx}$ সংকারকটি ক্রিয়া করলে পাওয়া যায়।

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$$

এখানে $2ax + b$ একটি নূতন অপেক্ষক। যা $f(x)$ থেকে ভিন্ন।

যদি কোন সংস্কারক একটি বিশেষ অপেক্ষকের ওপর ক্রিয়া করার ফলে এমন একটি নতুন অপেক্ষকের সৃষ্টি হয় যা ঐ বিশেষ অপেক্ষকের একটি গুণিতক, অর্থাৎ ঐ বিশেষ অপেক্ষক ও একটি ধ্রুবক রাশির গুণফলের সমান, তবে ঐ বিশেষ অপেক্ষককে সংকারকটির একটি আইগেন-অপেক্ষক (eigenfunction) বলা হয়। ধ্রুবক রাশিটি ঐ আইগেন-অপেক্ষকের জন্য সংকারকটির আইগেনমান (eigenvalue)। একটি উদাহরণ থেকে আপনার কাছে বিষয়টি স্পষ্ট হবে।

ধরুন $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ একটি সংকারক, যা $A \sin kx$ অপেক্ষকটির ওপর ক্রিয়া করছে। এক্ষেত্রে

$$\frac{r^2}{rx^2}(A \sin kx) = \frac{\partial}{\partial x}(k A \cos kx) = -k^2(A \sin kx)$$

$-k^2$ রাশিটি একটি ধ্রুবক, সুতরাং $A \sin kx$ অপেক্ষকটি $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ সংকারকের একটি আইগেন অপেক্ষক এবং $-k^2$ রাশিটি সংকারকটির আইগেনমান।

এবার আমরা কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় ব্যবহৃত কয়েকটি সংকারকের বিষয়ে আলোচনা করব।

10.3.1 কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় ব্যবহৃত সংকারক

10.1 সমীকরণে আমরা তরঙ্গ-অপেক্ষকের যে রাশিমালাটি লিখেছি তাতে $k = \frac{p}{\hbar}$ এবং $\omega = \frac{E}{\hbar}$ লিখে পাওয়া যায়, x দিকে একমাত্রিক গতির ক্ষেত্রে,

$$\psi(x, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} \qquad \ldots\ldots 10.26$$

(i) **ভরবেগ :** এখন, $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x, t) = \frac{\hbar}{i}\frac{ip}{\hbar}Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} = p\psi(x, t)$

অর্থাৎ $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)$ সংকারকটির জন্য $\psi(x, t)$ একটি আইগেন অপেক্ষক এবং এটির আইগেনমান ভরবেগ p। এজন্য $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ সংকারকটিকে **ভরবেগ-সংকারক** বলা হয় এবং $\hat{p}$ চিহ্ন দিয়ে সূচিত করা হয়। Λ (হ্যাট) চিহ্নটির অর্থ এই যে রাশিটি একটি সংকারক, সাধারণ ভৌত রাশি নয়।

(ii) **মোট শক্তি :** আবার, $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t) = i\hbar\cdot -\frac{i}{\hbar}E\,Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} = E\psi(x, t)$

অর্থাৎ $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ বা $\hat{E}$ সংকারকটির জন্যও $\psi(x, t)$ একটি আইগেন অপেক্ষক এবং এই সংকারকটি আইগেনমান মোটশক্তি E। এজন্য $\hat{E}$ সংকারকটিকে **মোটশক্তি** সংকারক বলা হয়। $\hat{E}$ সংকারকটি সময়নির্ভর তরঙ্গ-অপেক্ষকের ওপর ক্রিয়া করে।

(iii) **ভরবেগের উপাংশ** বস্তুকণার ত্রিমাত্রিক গতির ক্ষেত্রে আমরা 3.22 সূত্রটিকে অল্প পরিবর্তিত করে লিখব।

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)}$$
$$= Ae^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z - Et)}$$

এখন আপনি সহজেই দেখতে পাবেন যে

$\hat{p}_x\left(=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right), \hat{p}_y\left(=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ ও $\hat{p}_z\left(=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}\right)$ সংকারকগুলির $\psi(\vec{r}, t)$ তরঙ্গ অপেক্ষকের জন্য আইগেনমান যথাক্রমে p_x, p_y ও p_z।

(iv) **গতিশক্তি ঃ** এখন আমরা গতিশক্তির সংকারকটি নির্ণয় করতে পারি। আপনি দেখেছেন,

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x, t) = Px\ \psi(x, t)$$

উভয়দিককে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে, $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = p_x\frac{\partial\psi}{\partial x}$

কিন্তু $\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar}p_x\psi$; সুতরাং $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{i}{\hbar}p_x{}^2\psi$

বা, $p_x{}^2\psi = -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$

একইভাবে, $p_y{}^2\psi = -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$ এবং $p_z{}^2\psi = -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$

$$\therefore \quad \frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2)\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)$$

বা, $k\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi$; এখানে $k = \frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2) = \frac{p^2}{2m}$ = গতিশক্তি।

$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ সংকারকটিকে আমরা গতিশক্তি সংকারক $\hat{k}$ নামে অভিহিত করতে পারি। 10.9 সমীকরণে আপনি ইতিমধ্যেই এই সংকারকটির সঙ্গে পরিচিত হয়েছেন।

(v) **হ্যামিল্টনীয়** 10.7 সমীকরণে আমরা স্থিতীয় শক্তির সংকারক $\hat{V}$ এর ব্যবহার করেছি। $\hat{V}$ সংকারকটির প্রয়োগ বলতে সরাসরি গুণ করা বোঝায়, অর্থাৎ $\hat{V}\psi = V\psi$, যা V ও ψ এর গুণফল।

(vi) $(\hat{k} + \hat{V})$ সংস্কারকটি গতিশক্তি ও স্থিতীয়শক্তির যোগফল, অর্থাৎ মোটশক্তি সূচিত করে। এই সংকারকটিকে আমরা হ্যামিল্টনীয় সংকারক $\hat{H}$ বলে থাকি। 10.8 সমীকরণে আপনি এটির ব্যবহার দেখেছেন। লক্ষ করুন যে $\hat{H}$ সংকারকটি x, y, z-স্থানাঙ্ক নির্ভর তরঙ্গ অপেক্ষকের ওপর ক্রিয়া করে।

(vii) কৌণিক ভরবেগ ঃ কৌণিক ভরবেগের সংজ্ঞা $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ থেকে আপনি এর উপাংশগুলি লিখতে পারেন ঃ

$$L_x = yp_z - zp_y$$
$$L_y = zp_x - xp_z$$
$$L_z = xp_y - yp_x$$

p_x, p_y ও p_z এর সংকারকগুলি ব্যবহার করে লেখা যায় ঃ

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \ldots\ldots 10.27(a)$$

$$\hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad \text{... ... 10.27(b)}$$

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad \text{... ... 10.27(c)}$$

বলা বাহুল্য, 10.27($a-c$) সূত্রগুলি কেবলমাত্র সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্কের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। গোলকীয় পোলার নির্দেশতন্ত্রে এগুলির রূপ হয় ঃ

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i}\left[-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right] \qquad \text{... ... 10.28(a)}$$

$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{i}\left[\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right] \qquad \text{... ... 10.28(b)}$$

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad \text{... ... 10.28(c)}$$

3.2.8 ($a-c$) সূত্রগুলি থেকে মোট কৌণিক ভরবেগের বর্গের সংকারকটি পাওয়া যায় ঃ

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = \hat{L}_x\hat{L}_x + \hat{L}_y\hat{L}_y + \hat{L}_z\hat{L}_z$$

$$= -\hbar^2\left[-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\left[-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

$$-\hbar^2\left[\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\left[\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right] - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

বা, $$-\frac{\hat{L}^2}{\hbar^2} = \left[\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right.$$

$$+\left(\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \left(\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$+\left[\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(-\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right.$$

$$\left.+\left(-\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \left(\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$= \left[\sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \sin\phi\,\mathrm{cosec}^2\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \sin\phi\cot\theta\cos\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} + \cot\theta\cos^2\phi\frac{\partial}{\partial\theta} +\right.$$

$$\left.\cot\theta\cos\phi\sin\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta} - \cot^2\theta\cos\phi\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \cot^2\theta\cos^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right].$$

$$+\left[\cos^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \cos\phi\,\text{cosec}^2\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi} - \cos\phi\cot\theta\sin\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} + \cot\theta\sin^2\phi\frac{\partial}{\partial\theta} -\right.$$

$$\left.\cot\theta\sin\phi\cos\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta} + \cot^2\theta\sin\phi\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \cot^2\theta\sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right] + \text{cosec}^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

অর্থাৎ $$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \text{cosec}^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \qquad \ldots\ldots 10.29$$

(উপরের গণনা থেকে আপনি সংকারকের গুণের প্রক্রিয়াটি বুঝতে পারবেন।)

10.3.2 সংকারকের ধর্ম

কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় ব্যবহৃত কয়েকটি সংকারক সম্বন্ধে আগের অনুচ্ছেদে জেনেছেন। এবার এগুলির ধর্ম সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক। কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় সনাতন গতিবিদ্যার প্রতিটি ভৌত রাশিই এক একটি সংকারক দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এই সংকারকগুলি রৈখিক (linear) অর্থাৎ এগুলির নিম্নোক্ত কয়েকটি ধর্ম থাকে :

1. যদি $\hat{A}$ একটি রৈখিক সংকারক, $f(x)$ একটি অপেক্ষক এবং c একটি ধ্রুবক হয় তবে

$$\hat{A}[cf(x)] = c\hat{A}f(x) \qquad \ldots\ldots 10.30$$

অর্থাৎ $\hat{A}$ এবং C পরস্পর স্থান বিনিময় করলেও ফলের তারতম্য হয় না। এই শর্ত পালিত হলে $\hat{A}$ সংকারক ও c ধ্রুবক বিনিময় নিয়ম (commutation law) পালন করে বলা হয়।

উদাহরণ : ধরা যাক $\hat{A} = \frac{d}{dx}$, $c = 5$, $f(x) = x^2 + 5x + 6$

$$\hat{A}[cf(x)] = \frac{d}{dx}[5x^2 + 25x + 30] = 10x + 25$$

আবার $c\hat{A}\,f(x) = 5\frac{d}{dx}[x^2 + 5x + 6] = 5(2x + 5) = 10x + 25$ লক্ষ করুন রাশিদুটির মান সমান।

2. রৈখিক সংকারকগুলি বিচ্ছেদ নিয়ম (distributive law) পালন করে। $f_1(x)$ ও $f_2(x)$ দুটি অপেক্ষক এবং $\hat{A}$ রৈখিক সংকারক হলে $\hat{A}[f_1(x) + f_2(x)] = \hat{A}f_1(x) + \hat{A}f_2(x)$ …… 10.31

উদাহরণ : $\hat{A} = \frac{d}{dx}$, $f_1(x) = x^2 + 5x + 6$, $f_2(x) = \sin x$ হলে

$$\hat{A}[f_1(x) + f_2(x)] = \frac{d}{dx}[x^2 + 5x + 6 + \sin x] = 2x + 5 + \cos x$$

অন্যদিকে, $\hat{A}\,f_1(x) + \hat{A}f_2(x) = \frac{d}{dx}[x^2 + 5x + 6] + \frac{d}{dx}\sin x = 2x + 5 + \cos x$ অর্থাৎ এক্ষেত্রে 3.31 সূত্র প্রতিপালিত হয়েছে।

3. রৈখিক সংকারকগুলি সংযোগ নিয়মও (associative law) পালন করে, অর্থাৎ $\hat{A}$ ও $\hat{B}$ রৈখিক সংকারক হলে $\hat{A} \pm \hat{B}$ ও রৈখিক সংকারক হয়।

4. দুটি রৈখিক সংকারকের যোগফল বিনিময় নিয়ম পালন করে। অর্থাৎ $\hat{A}$ ও $\hat{B}$ রৈখিক সংকারক হলে $\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A}$। কিন্তু দুই রৈখিক সংকারকের গুণফল বিনিময় নিয়ম পালন করতেও পারে আবার নাও করতে পারে। $(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$ রাশিটিকে $\hat{A}$ ও $\hat{B}$ সংকারকের বিনিময়-বন্ধনী (commentator bracket) বলা হয় এবং $[\hat{A}, \hat{B}]$ রূপে লেখা হয়। দুটি উদাহরণ থেকে আপনি বুঝতে পারবেন যে এর মান শূন্য অথবা অ-শূন্য দুই-ই হতে পারে।

ধরা যাক, $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x}, \hat{B} = y, f(x) = x^2$

$$\hat{A}\hat{B}\, f(x) = \frac{\partial}{\partial x}[y.x^2] = 2xy$$

$$\hat{B}\hat{A}\, f(x) = y\frac{\partial}{\partial x}x^2 = 2xy$$

সুতরাং $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$, অর্থাৎ $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$

এবার ধরুন $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x}, \hat{B} = x, f(x) = x^2$

$$\hat{A}\hat{B}\, f(x) = \frac{\partial}{\partial x}[x.x^2] = 3x^2$$

$$\hat{B}\hat{A}\, f(x) = x\frac{\partial}{\partial x}[x^2] = 2x^2$$

সুতরাং $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ এবং $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$।

আপনি আগেই দেখেছেন যে কোয়ান্টাম বলবিদ্যার শ্রোডিংগার শৈলীতে বিভিন্ন ভৌত রাশিকে এক একটি সংকারক দিয়ে নির্দেশিত করা হয়। কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় ব্যবহৃত সংকারকগুলির বিনিময় নিয়ম সম্বন্ধে কিছুটা আলোচনা করা যাক।

(i) $$[\hat{x}, \hat{p}_x]\psi = \left[\hat{x}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right]\psi$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left[x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}x\right]\psi$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left[x\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi - x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]$$

$$= i\hbar\psi$$

অর্থাৎ $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$। অনুরূপভাবে $[\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$ …… 10.32

আপনি গণনা করে দেখতে পারেন যে

$$[\hat{x}, \hat{p}_y] = [\hat{y}, \hat{p}_z] = [\hat{z}, \hat{p}_x] = [\hat{x}, \hat{p}_z] = [\hat{y}, \hat{p}_x] = [\hat{z}, \hat{p}_y] = 0$$

অর্থাৎ $\hat{r}$ ও $\hat{p}$ ভেক্টর সংকারক দুটির একই দিকের উপাংশগুলি বিনিময় নিয়ম পালন না করলেও ভিন্ন দিকের উপাংশগুলি ঐ নিয়ম পালন করে।

(ii)
$$[\hat{t}, \hat{E}]\psi = \left[\hat{t}, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right]\psi$$
$$= i\hbar\left[t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}t\right]\psi$$
$$= i\hbar\left[t\frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi - t\frac{\partial \psi}{\partial t}\right]$$
$$= -i\hbar\psi$$

অর্থাৎ $[\hat{t}, \hat{E}] = -i\hbar$ …… 10.33

এর থেকে বোঝা যায় যে সময় $\hat{t}$ ও মোটশক্তি $\hat{E}$ সংকারক দুটি বিনিময় নিয়ম পালন করে না।

5. **হার্মিশিয়ান সংকারক :** কোনো ভৌতরাশির কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় প্রত্যাশিত মান তার অসংখ্য পরিমাপের গড় মানকে নির্দেশ করে যা একই অবস্থার ওপর অসংখ্য পরিমাপের গড় বা অসংখ্য সদৃশ আইগেন অবস্থার ওপর ঐ ভৌতরাশির পরিমাপের গড়। যে সকল ভৌতরাশির সংকারকের প্রত্যাশিত মান বাস্তব হয় তাদেরকে হার্মিশিয়ান সংকারক বলে। অর্থাৎ সংকারক কোনো ভৌতরাশিকে চিহ্নিত করলে তার প্রত্যাশিত মান সংজ্ঞানুসারে —

$$<\alpha> = \int \psi^*\hat{\alpha}\psi\, d\tau$$

এই সমীকরণের কাল্পনিক অনুবন্ধী

$$<\alpha>^* = \left(\int \psi^*\hat{\alpha}\psi\, d\tau\right)^* = \int \psi\hat{\alpha}^*\psi^*\, d\tau$$

প্রত্যাশিত মান বাস্তব হওয়ার শর্ত

$$\int \psi^*\hat{\alpha}\psi\, d\tau = \int \psi\hat{\alpha}^*\psi^*\, d\tau$$

উদাহরণস্বরূপ ভরবেগের x উপাংশ p_x-এর সংকারক রূপ $\hat{p}_x = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$

সুতরাং $<p_x> = -\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\hat{p}_x\chi\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\left(-i\hbar\dfrac{\partial x}{\partial x}\right)dx$ [ψ ও x দুটি প্রমাণীকরণ তরঙ্গকার]

$$= -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\frac{\partial \chi}{\partial x}\, dx = -i\hbar\, [\psi^*\chi]_{-\infty}^{+\infty} + i\hbar\int \chi\frac{\partial \psi^*}{\partial x}\, dx$$

$= \int \chi\, \hat{p}_x^*\, \psi^*\, dx$ সুতরাং $\hat{p}_x$ একটি হার্মিশিয়ান সংকারক।

6. **প্যারিটি সংকোরক ঃ** প্যারিটি সঙ্কারক বিভিন্ন তরঙ্গ আপেক্ষকের ক্ষেত্রে প্যারিটি সঙ্কারকের ধারণা সম্পূর্ণরূপে কোয়ান্টাম বলবিদ্যার অধীন। কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় প্যারিটি একটি ভৌত রাশি যাহা হ্যামিল্টনীয় সঙ্কারকের মূলবিন্দুর স্থানাঙ্কর সাপেক্ষে প্রতিফলনের প্রতিসাম্যের ওপর নির্ভরশীল অর্থাৎ যে প্রতিফলন প্রক্রিয়ায় x, y, z পরিবর্তিত হয়ে $-x, -y, -z$ হয়। প্যারিটি সঙ্কারককে $\hat{p}$ দ্বারা নির্দেশ করলে

$$\hat{p}\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$$

ত্রিমাত্রিক হ্যামিল্টনীয় সঙ্কারক

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})$$

এখানে ∇^2 প্রতিফলনে অপরিবর্তিত থাকে। সেক্ষেত্রে $V(\vec{r})$ যদি $\vec{r}$ হইতে $-\vec{r}$ অপরিবর্তিত থাকে সেক্ষেত্রে

$$\hat{H}(-\vec{r}) = \hat{H}(\vec{r})$$

সময় নিরপেক্ষ শ্রোডিংগার সমীকরণে প্যারিটি সঙ্কারক $\hat{p}$ ক্রিয়া করলে লেখা যায়—

$$\hat{p}\hat{H}(\vec{r})\psi(\vec{r}) = \hat{p}E\psi(\vec{r})$$

যেহেতু E ধ্রুবক, এবং $\hat{H}$ অপরিবর্তিত থাকে

$$\therefore \quad H(\vec{r})\psi(-\vec{r}) = E\hat{p}\,\psi(\vec{r}) = E\psi(-\vec{r})$$

সুতরাং $\psi(\vec{r})$ এবং $\psi(-\vec{r})$ একযোগে হ্যামিল্টনীয় সঙ্কারকের আইগেন আপেক্ষক এবং উভয় ক্ষেত্রেই শক্তির আইগেন মান E যেহেতু এই আইগেন আপেক্ষক দুটি অপজাত নয়, সুতরাং $\hat{p}\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r}) = \lambda\psi(\vec{r})$ লেখা যায়। $\therefore$ আর একবার $\hat{p}$-এর ক্রিয়ার দ্বারা পাই

$$\hat{p}\psi^2(\vec{r}) = \hat{p}.\hat{p}\psi(\vec{r}) = \hat{p}\lambda\psi(-\vec{r}) = \lambda^2\psi(\vec{r})$$

কিন্তু $\hat{p}^2\psi(\vec{r}) = \hat{p}.\hat{p}\psi(\vec{r}) = \hat{p}\psi(-\vec{r}) = \psi(\vec{r})$

এই দুই সমীকরণ তুলনা করে পাই $\lambda^2\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r})$

$$\therefore \quad \lambda^2 = 1 \text{ বা, } \lambda = \pm 1$$

$\lambda = +1$ হলে প্রতিফলনের ফলে তরঙ্গ আপেক্ষক অপরিবর্তিত থাকে, এক্ষেত্রে তরঙ্গটি যুগ্ম প্যারিটি যুক্ত বলা হয়। অপর ক্ষেত্রে, $\lambda = -1$ হলে,

$\psi(-\vec{r}) = -\psi(\vec{r})$ অর্থাৎ প্রতিফলনে তরঙ্গ আপেক্ষকের চিহ্ন পরিবর্তিত হয় ও এক্ষেত্রে $\psi(\vec{r})$ এর অযুগ্ম প্যারিটি আছে বলা হয়। কোনো তরঙ্গে নির্দিষ্ট প্যারিটি থাকার শর্ত প্রতিফলনের ক্রিয়ায় হ্যামিল্টনীয় সঙ্কারক অপরিবর্তিত থাকা।

10.3.3 কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় সংকরণের তাৎপর্য

সংকারক সম্বন্ধে পূর্বের আলোচনা থেকে আপনার মনে হতে পারে যে সংকরণ প্রক্রিয়াটি কেবলমাত্র একটি গাণিতিক পদ্ধতি। এই অনুচ্ছেদে আমরা সংকরণ প্রক্রিয়ার ভৌত তাৎপর্যটি বোঝার চেষ্টা করব। ধরুন $\hat{A}$ সংকারকটি তরঙ্গ অপেক্ষক ψ ওপর ক্রিয়া করার ফল হয় $\alpha\psi$, অর্থাৎ $\hat{A}\psi = \alpha\psi$। এখানে $\hat{A}\psi$ বলতে যে সংকরণ বোঝায় তার ভৌত অর্থ ψ অপেক্ষকটি যে বস্তুকণা বা বস্তুতন্ত্রের তরঙ্গ অপেক্ষক তার সেই ভৌত ধর্মটি (A) নির্ণয়ের চেষ্টা করা, যেটি $\hat{A}$ সংকারক দ্বারা নির্দেশিত হয়। এবং এর ফলে A রাশির যে মান নির্ণীত হয় তা হল $\hat{A}$ সংকারকের আইগেনমান α।

অনুরূপভাবে, $\hat{B}\hat{A}\psi$ সংকরণের অর্থ প্রথমে বস্তুতন্ত্রের A রাশি এবং তারপর B রাশির মান নির্ণয়ের চেষ্টা করা। আপনি নিশ্চয়ই আন্দাজ করতে পারছেন যে $\hat{A}\hat{B}\psi$ সংকরণটি প্রথমে বস্তুতন্ত্রের B রাশির এবং তারপর A রাশির মান নির্ণয়ের চেষ্টা বোঝাবে। কিন্তু আপনি আগের এককে অনিশ্চয়তার নীতি প্রসঙ্গে জেনেছেন যে A ও B যদি অনুবন্ধী (canonically conjugate) ভৌতরাশি হয় তবে যে কোনও একটি রাশির পরিমাপ বস্তুতন্ত্রটিকে এমনভাবে প্রভাবিত করে যে অন্য রাশিটির নির্ণীত মান তার দ্বারা পরিবর্তিত হয়। এর ফলে $\hat{B}\hat{A}\psi$ ও $\hat{A}\hat{B}\psi$, এই দুই সংকরণের ফল এক হয় না। $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$, এই অসমীকরণ দ্বারা $\hat{A}\hat{B}$ ও $\hat{B}\hat{A}$ এই দুই সংকারকের আইগেনমানের পার্থক্যই বোঝানো হয়।

এবার একটি অনুশীলনী।

অনুশীলনী—3

(i) ত্রিমাত্রিক নির্দেশাঙ্কে ভরবেগ $\hat{p}$ এর সংকারকটি লিখুন।

(ii) $\hat{L}_x \hat{L}_y$ ও $\hat{L}_y \hat{L}_x$ এর মান নির্ণয় করুন এবং $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$ এর মান শূন্য কিনা তা দেখান।

10.4 সম্ভাব্যতার প্রবাহ ঘনত্ব

10.2.1 ও 10.2.2 অনুচ্ছেদে আপনি দেখেছেন যে তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi(r^{-1}, t)$ হলে $\psi^*\psi$ বা $|\psi|^2$ উদ্দিষ্ট বস্তুকণার সম্ভাব্যতা ঘনত্ব নির্দেশ করে। যেহেতু বস্তুকণাটি সমগ্র সম্ভবপর আয়তন τ-এর মধ্যে অবশ্যই থাকবে, ঐ আয়তনের ওপর সম্ভাব্যতা ঘনত্বের সমাকলের মান 1 হবে, অর্থাৎ

$$\int_\tau \psi^*\psi\delta\tau = \int_\tau |\psi|^2 d\tau = 1$$

S তল দ্বারা আবদ্ধ কোন সীমিত আয়তন V এর মধ্যে বস্তুকণার থাকার সম্ভাব্যতা যদি সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয় তবে ঐ পরিবর্তনের হার

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_v \psi^*\psi\, d\tau = \int_v \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)d\tau \qquad \ldots\ldots 10.34$$

এখন 10.9(a) সমীকরণ থেকে,

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V\psi$$

বা, $$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\psi-\frac{i}{\hbar}V\psi$$

এর অনুবন্ধী সমীকরণটি হল $\frac{\partial\psi^*}{\partial t}=-\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\psi^*+\frac{i}{\hbar}V\psi^*$ (V বাস্তব রাশি, তাই $V^*=V$) আগের দুটি সমীকরণের প্রথমটির দুদিকে ψ^* এবং দ্বিতীয়টির দুদিকে ψ দিয়ে গুণ করে ঃ

$$\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{i\hbar}{2m}\psi^*\nabla^2\psi-\frac{i}{\hbar}\psi^*V\psi$$

$$\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}=\frac{-i\hbar}{2m}\psi\nabla^2\psi^*+\frac{i}{\hbar}\psi V\psi^*$$

যোগ করে, $\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}=\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\psi^*)$, (কেননা $\psi^*V\psi=\psi V\psi^*$)

কিন্তু $$\nabla(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)=\nabla\psi^*\nabla\psi+\psi^*\nabla^2\psi-\nabla\psi\nabla\psi^*-\psi\nabla^2\psi^*$$
$$=\psi^*\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\psi^*$$

সুতরাং $\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}=\frac{i\hbar}{2m}.\nabla(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)$

10.34 থেকে $\frac{\partial}{\partial t}\int_V\psi^*\psi d\tau=\frac{i\hbar}{2m}\int_V\nabla(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)d\tau$

বা, $$\frac{\partial}{\partial t}\int_V\rho\, d\tau=-\int_V\nabla.\vec{j}\,d\tau \qquad \ldots\ldots 10.35$$

যেখানে $p=\psi^*\psi=$ সম্ভাব্যতা ঘনত্ব এবং $\vec{j}=\frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^*-\psi^*\nabla\psi)=\left(\psi^*\frac{\hbar}{im}\nabla\psi\right)$এর বাস্তব মান।

ডাইভারজেন্স উপপাদ্য ব্যবহার করে 10.35 সমীকরণের ডানদিকটিকে আয়তন সমাকলের পরিবর্তে তল সমাকল হিসাবে লিখলে 10.35 সমীকরণের রূপ হয় ঃ

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V\rho d\tau=-\int_V\vec{j}).\vec{ds} \qquad \ldots\ldots 10.36$$

এই সমীকরণ থেকে আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে $\vec{j}$ ভেক্টরটি সম্ভাব্যতার প্রবাহ ঘনত্ব নির্দেশ করছে। কেননা সমীকরণের বাম দিকটি V আয়তনের মধ্যে মোট সম্ভাব্যতার বৃদ্ধির হার, যা S তলের মধ্যে দিয়ে সম্ভাব্যতার বর্হিমুখী প্রবাহের বিপরীত।

10.35 সমীকরণটিকে যে কোনও অতিক্ষুদ্র আয়তনের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যায়। অতিক্ষুদ্র আয়তন $\delta\tau$ এর জন্য

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \delta\tau = -\nabla . \vec{j}\, \delta\tau$$

অথবা $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . \vec{j} = 0$$

এই সমীকরণটিকে সম্ভাব্যতার সন্ততার সমীকরণ (equation of continuity) বলা যায়।

এই অনুচ্ছেদে আপনি লক্ষ করলেন যে তরঙ্গ অপেক্ষক ψ ও তার অনুবন্ধী অপেক্ষক ψ^* এর মাধ্যমে সম্ভাব্যতার প্রবাহকে প্রকাশ করা যায়। এ থেকে তরঙ্গ অপেক্ষকের আর একটি ভৌত তাৎপর্যের পরিচয় পাওয়া যায়।

অনুশীলনী 4 ঃ তরঙ্গরাশি $\psi(x) = A exp\,(-\sigma^2 x^2 / 2)\; expikx$ এর সম্ভাব্যতা ঘনত্ব ও প্রবাহ ঘনত্ব নির্ণয় করুন।

10.5 ভৌতরাশির প্রত্যাশিত মান (Expectation value)

10.2.3 অনুচ্ছেদে আমরা দেখেছি যে কোন একটি বস্তুকণা নির্দিষ্ট আয়তনের মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা তরঙ্গ-অপেক্ষকের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। অনিশ্চয়তার নীতি অনুযায়ী কোন বস্তুকণার অবস্থান বা অন্য কোন ভৌত রাশির মান কখনই সুনিশ্চিতরূপে নির্ণয় করা যায় না। কোন একটি ভৌত রাশি বার বার মাপার চেষ্টা করলে এক এক বার এক একটি মান পাওয়া যায়। তবে স্বতন্ত্রভাবে বহুবার রাশিটি মাপার চেষ্টা করলে সেটির একটি গড় মান পাওয়া যায়, যেটিকে আমরা ভৌতরাশিটির প্রত্যাশিত মান বলতে পারি, কোন বস্তুতন্ত্রের তরঙ্গ-অপেক্ষকটি জানা থাকলে তার সাহায্যে ঐ প্রত্যাশিত মান নির্ণয় করা যায়। দেখা যাক কীভাবে এটি করা সম্ভব।

ধরা যাক কোন একটি একমাত্রিক বস্তুতন্ত্রের তরঙ্গ-অপেক্ষক $\psi(x)$ বিভিন্ন প্রমাণীকৃত আইগেন-অপেক্ষক $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ প্রভৃতির রৈখিক যোগফল, অর্থাৎ

$$\psi(x) = \sum_n C_n u_n(x) \;\; (C_n = \text{ধ্রুবক}) \qquad \ldots\ldots 10.38$$

কোন একটি সংকারক $\hat{A}$ যখন $u_n(x)$ এর ওপর ক্রিয়া করে তখন a_n আইগেনমান পাওয়া যায়। অর্থাৎ $\hat{A}\; u_n(x) = a_n u_n(x)$। এর ভৌত অর্থ এই যে, বস্তুতন্ত্রটি $u_n(x)$ অবস্থায় থাকলে A রাশিটির পরিমাপের ফল পাওয়া যায় a_n। $\psi(x)$ যদি প্রমাণীকৃত হয়, তবে

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, \psi(x)\,|^2 = \sum_n |\, C_n\,|^2 = 1$$ (কেননা $u_n(x)$ অপেক্ষকগুলি পরস্পর সমকৌণিক) এবং বস্তুতন্ত্রটি $u_n(x)$ অবস্থায় থাকায় সম্ভাব্যতা

$$\begin{aligned} P_n &= \int_{-\infty}^{\infty} |\, C_n u_n(x)\,|^2\, dx \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} |\, \psi(x)\,|^2\, dx \\ &= |\, C_n\,| \int_{-\infty}^{\infty} |\, u_n(x)\,|^2\, dx \\ &= |\, C_n\,|^2 \;\; (\text{কেননা } u_n \text{ তরঙ্গ-অপেক্ষকটি প্রমাণীকৃত}) \qquad \ldots\ldots 10.39 \end{aligned}$$

$\hat{A}$ সংকারক যখন মিশ্র তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi(x)$ এর ওপর ক্রিয়া করে তখন A রাশির প্রত্যাশিত মান

$$< a > = \Sigma a_n p_n = \Sigma a_n \mid C_n \mid^2 = \Sigma a_n C_n{}^* C_n \quad \text{(10.39 ব্যবহার করে)}$$

কিন্তু 10.38 থেকে $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, U^*{}_n(x) dx = C_n \int_{-\infty}^{\infty} U_n U_n{}^* dx = C_n$ …… 10.40 (a)

এবং অনুরূপভাবে $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, u_n(x) dx = C_n{}^* \int_{-\infty}^{\infty} u_n{}^* u_n\, dx = C_n{}^*$ …… 10.40 (b)

$$\therefore \quad < a > = \Sigma a_n\, C_n{}^*\, C_n = \Sigma a_n C_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, u_n(x) dx \qquad \text{(10.40 (b) ব্যবহার করে)}$$

যোগ ও সমাকলন চিহ্নের স্থানবিনিময় করে,

$$< a > = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \sum_n C_n a_n u_n(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \sum C_n \hat{A}\, u_n(x)\, dx$$

বা, $< a > = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, \hat{A}\, \psi(x)\, dx$ (10.38 অনুযায়ী) …… 10.41

10.41 সূত্রটি ব্যবহার করে আমরা $\psi(x)$ অপেক্ষকের মান জানা থাকলে যে কোন ভৌতরাশি 'A' এর প্রত্যাশিত মান $< a >$ নির্ণয় করতে পারি।

10.5.1 এরানফেস্টের উপপাদ্য (Ehrenfest's Theorem)

এখন আমরা এই এককের শেষ অংশে এসে পৌঁছেছি। এ পর্যন্ত আপনি যা পড়লেন তাতে আপনার মনে হতে পারে যে কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় আমরা সনাতন বলবিদ্যার উপজীব্য ভৌত রাশিগুলিকেই ফিরে পাচ্ছি। সেক্ষেত্রে কোয়ান্টাম বলবিদ্যা ও সনাতন বলবিদ্যার নিয়মগুলির মধ্যে সামঞ্জস্য থাকা উচিত। এ বিষয়ে আপনি নিশ্চিত হতে পারেন যে সত্যই এ ধরনের সামঞ্জস্য রয়েছে এবং এর অন্যথা হলে 10.2 অনুচ্ছেদে উল্লিখিত সুসঙ্গতির নীতি লঙ্ঘিত হত।

প্রমাণ করা যায় যে 'সনাতন বলবিদ্যার কোন একটি সূত্রে যদি ভৌতরাশিগুলির পরিবর্তে সেগুলির প্রত্যাশিত মান বসানো যায় তাহলে সেটি কোয়ান্টাম বলবিদ্যা থেকে প্রাপ্ত প্রত্যাশিত মানগুলির সম্পর্কের সঙ্গে মিলে যায়।' ধরুন আপনি সনাতন বলবিদ্যায় পেয়েছেন

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Px}{m}$$

এখন যদি আপনি x এর পরিবর্তে $< x >$ এবং Px এর পরিবর্তে $< Px >$ লেখেন তাহলে আপনি পাবেন

$$\frac{d < x >}{dt} = \frac{< Px >}{m}$$

ঠিক এই সূত্রটিই কোয়ান্টাম বলবিদ্যা থেকে পাওয়া যায়।

সনাতন ও কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সূত্রগুলির পারস্পরিক সম্পর্কের এই উপপাদ্যটিকে এরানফেস্টের উপপাদ্য বলা হয়।

এবার একটি অনুশীলনী।

অনুশীলনী —5

নীচের উক্তিগুলির সঙ্গে চারটি করে সম্ভাব্য বাক্যাংশ দেওয়া আছে। এগুলির মধ্যে কোনটি সঠিক তা স্থির করুন।

(i) যদি কিছু সংখ্যক বস্তুকণার তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi(\vec{r}, t)$ হয় এবং একটি নির্দিষ্ট আয়তন V এর ওপর সমাকল $\int_V \nabla(\psi^* \nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)\, dt$ এর মান শূন্য হয় তবে

(a) ঐ আয়তনের মধ্যে বস্তুকণা থাকতে পারে না

(b) ঐ আয়তনের মধ্যে সর্বত্র $\psi = \psi^* = 0$

(c) বস্তুকণাগুলি ঐ আয়তন থেকে নির্গত হতে পারে না কিন্তু অন্য বস্তুকণা ঐ আয়তনে প্রবেশ করতে পারে

(d) ঐ আয়তনের মধ্যে সর্বদা সমান সংখ্যক বস্তুকণা থাকবে।

(ii) প্রত্যাশিত মানের হিসাবে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের রূপ কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় হবে

(a) $\frac{d< x >}{dt} = \frac{< Px >}{m}$ (b) $\frac{d< Px >}{dt} = < Fx >$

(c) $< V_x > = \frac{d <x>}{dt}$ (d) $\frac{d < V_x >}{dt} = < f_x >$

(iii) A ভৌত রাশির প্রত্যাশিত মান (τ = সমগ্র সম্ভবপর আয়তন)

(a) $\int_\tau \psi^* \hat{A}\psi\, d\tau$ (b) $\int_\tau \psi^*\psi\, d\tau$ (c) $\hat{A} \int_\tau \psi^*\psi\, d\tau$

(d) $\int_\tau (\psi^*\hat{A}\psi - \psi\hat{A}\psi^*)d\tau$

10.6 সারাংশ

এই এককটিতে প্রথমেই শ্রোডিংগারের তরঙ্গ-সমীকরণের প্রত্যাশিত চরিত্রটি ব্যাখ্যা করা হয়েছে এবং পদার্থ-তরঙ্গের একটি রূপ কল্পনা করে তার সাহায্যে সময় নির্ভর তরঙ্গ সমীকরণটি একমাত্রিক ও ত্রিমাত্রিক ক্ষেত্রে

প্রতিষ্ঠিত করা হয়েছে। সময় নির্ভর সমীকরণ থেকে সময় এবং অবস্থান নির্দেশক স্থানাঙ্কগুলিকে পৃথক করে সময় নিরপেক্ষ শ্রোডিংগার সমীকরণটি পাওয়া গেছে। পদার্থ তরঙ্গের অপেক্ষক ψ নির্ণয় করাই শ্রোডিংগার সমীকরণ সমাধানের মূল লক্ষ্য। এই অপেক্ষকটির ভৌত তাৎপর্য ও কিছু গাণিতিক ধর্ম এখানে আলোচনা করা হয়েছে। এর মধ্যে আছে পদার্থের সম্ভাব্যতা-ঘনত্বের সঙ্গে ψ-এর সম্পর্ক।

শ্রোডিংগার সমীকরণের কোন একটি সমাধান পাওয়া গেলে তার যে কোনও গুণিতকও সমীকরণটির সমাধান হতে পারে। এজন্য তরঙ্গ অপেক্ষকের ধ্রুবক উৎপাদকটির মান এমন হওয়া উচিত যাতে অপেক্ষকটি নির্দিষ্ট কণা বা বস্তুতন্ত্রকেই নির্দেশ করে। প্রমাণীকরণ নামে অভিহিত এই পদ্ধতিটিও এখানে ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

শ্রোডিংগার পদ্ধতিতে আমরা ভৌত রাশির নির্দেশক কিছু গাণিতিক সংকারক ব্যবহার করে থাকি। এই সংকারকগুলি ও তাদের ব্যবহারের সঙ্গে আপনি পরিচিত হয়েছেন। সবশেষে তরঙ্গ-অপেক্ষকের সঙ্গে সম্ভাব্যতার প্রবাহ ঘনত্ব ও কোন ভৌতরাশির প্রত্যাশিত মানের সম্পর্কটি আলোচনা করা হয়েছে।

10.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. শ্রোডিংগারের একমাত্রিক সময় নির্ভর তরঙ্গ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা করুন এবং এটিকে হ্যামিল্টনীয় সংকারকের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

2. শ্রোডিংগারের ত্রিমাত্রিক সময় নির্ভর সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা করুন। এই সমীকরণ থেকে শ্রোডিংগারের সময় নিরপেক্ষ সমীকরণটি কীভাবে পাওয়া যায়?

3. শ্রোডিংগারের একমাত্রিক সময় নিরপেক্ষ সমীকরণটি কীভাবে পাওয়া যায়? আলোচ্য বস্তুতন্ত্রটি বিভিন্ন শক্তি-অবস্থায় থাকতে পারে, এটি ধরে নিয়ে শ্রোডিংগারের সমীকরণের সাধারণ সমাধানটি লিখুন।

4. তরঙ্গ আপেক্ষকের বিশেষ গাণিতিক ধর্মগুলি লিখুন। এই অপেক্ষকের ভৌত তাৎপর্য ব্যাখ্যা করুন।

5. তরঙ্গ অপেক্ষকের প্রমাণীকরণ বলতে কী বোঝায়?

6. সংকারক, আইগেন অপেক্ষক ও আইগেনমান কাকে বলে উদাহরণসহ বুঝিয়ে দিন। কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় রৈখিক ভরবেগ, মোটশক্তি, গতিশক্তি ও কৌণিক ভরবেগ নির্দেশ করতে কোন সংকারকগুলি ব্যবহৃত হয়?

7. রৈখিক সংকারক কাকে বলে? উদাহরণসহ রৈখিক সংকারকের সংজ্ঞাপক ধর্মগুলি ব্যাখ্যা করুন।

8. সংকারকের বিনিময়-নিয়ম কাকে বলে? কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় ব্যবহৃত দুটি সংকারকের বিনিময়-নিয়ম পালন না করার উদাহরণ দিন এবং তার তাৎপর্য ব্যাখ্যা করুন।

9. প্রমাণ করুন যে $\frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi)$ রাশিটি বস্তুর সম্ভাব্যতার প্রবাহ ঘনত্ব নির্দেশ করে।

10. কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় কীভাবে কোন ভৌতরাশির প্রত্যাশিত মান গণনা করা যায়? সনাতন বলবিদ্যার সূত্রের সঙ্গে প্রত্যাশিত মানের হিসাবে কোয়ান্টাম বলবিদ্যা থেকে প্রাপ্ত সূত্র অভিন্ন—উদাহরণসহ বুঝিয়ে দিন।

11. তরঙ্গ অপেক্ষকের সমকৌণিকতা বলিতে কি বোঝেন? এই ধর্মটি প্রমাণ করুন।

12. স্থির অবস্থা বলিতে কি বোঝেন? স্থির অবস্থা পাওয়ার শর্ত কি?

10.8 উত্তরমালা

অনুশীলনী

1. (ক) ভুল, (খ) সঠিক, (গ) সঠিক

2. (ক) (i) b, (ii) a, (iii) c

(খ) (a) ধরুন পরমাণুটি তরঙ্গ অপেক্ষক $\psi = C_0\,\psi_0 + c_1\psi_1$। আপনারা দেখেছেন শক্তি সংকারকের আইগেন অপেক্ষকগুলি সমকৌনিক অর্থাৎ $\int \psi^* \psi\, d\tau = 1$।

বা $\int (C_0{}^*\psi_0{}^* + C_1{}^*\psi_1{}^*)\,(C_0\psi_0 + C_\phi\psi_1)\, d\tau = 1$

$|C_0|^2 + |C_1|^2 = 1$

কিন্তু $|C_0|^2 = 0{\cdot}4$ এবং $|C_1|^2 = 0{\cdot}6$

বা, $C_0 = \sqrt{0{\cdot}4}$ এবং $|C_1| = \sqrt{0{\cdot}6}$

অর্থাৎ $\psi = \sqrt{\cdot 4}\;\psi_0 + \sqrt{\cdot 6}\;\psi$।

(b) গড়শক্তির মান $< E > \; = \int \psi^* \hat{E}\psi\, d\tau$

$$= |C_0|^2 E_0 + |C_1|^2 E$$

$$= 0{\cdot}4\, E_0 + 0{\cdot}6E$$।

3. (i) $-i\hbar\nabla$

(ii) $$\hat{L}_x\hat{L}_y = -\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= -\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} - yx\frac{\partial^2}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} + zx\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\right)$$

$$\hat{L}_x\hat{L}_y = -\hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$= -\hbar^2\left(zy\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} - z^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - xy\frac{\partial^2}{\partial z^2} + x\frac{\partial}{\partial y} + xz\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\right)$$

$$\therefore \quad \left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = \hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x$$

$$= -\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$= i\hbar.\frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$= i\hbar\hat{L}_z$$

সুতরাং $\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right]$ এর মান শূন্য নয়।

4. $\psi(x) = Ae^{-\sigma^2x^2/2}\, e^{ikn.}$

$\psi(x) = Ae^{-\sigma^2x^2/2}\, e^{-ikx.}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = A(ik - \sigma^2x)e^{-\sigma^2x^2/2}\, e^{ikx}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = A(-ik - \sigma^2x)\, e^{-\sigma^2x^2/2}\, e^{-ikx}$$

এখন সম্ভাব্যতা ঘনত্ব $P = |\psi(x)|^2 = |A|^2 e^{-\sigma^2x^2}$

সম্ভাব্যতার প্রবাহ ঘনত্ব $Jx \quad = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$

$$= \frac{i\hbar}{2m}|A|^2\left(-ik - \frac{\sigma^2}{x} - ik + \frac{\sigma^2}{x}\right)e^{-\sigma^2x^2}$$

$$= \frac{\hbar k}{m}|A|^2 e^{-\sigma^2x^2}$$

এখানে $\frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = V$ বেগ সাধারণ ভাবে $J = PV.$

5. (i) d, (ii) b, (iii) a

সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

প্রশ্নগুলির উত্তর যে অনুচ্ছেদে পাওয়া যাবে তার ক্রমিক সংখ্যাগুলির উল্লেখ করা হল।

1. 10.2, 10.2.1
2. 10.2.1, 10.2.2
3. 10.2.2
4. 10.2.3
5. 10.2.4

6. 10.3, 10.3.1

7. 10.3.2

8. 10.3.2

9. 10.4

10. 10.5, 10.5.1

11. 10.2.5

12. 10.2.1

একক 11 ❑ শ্রোডিংগার সমীকরণের প্রয়োগ-মুক্ত অবস্থা

গঠন ঃ

11.1 প্রস্তাবনা

দশম এককে শ্রোডিংগারের তরঙ্গ সমীকরণের সঙ্গে আপনার পরিচয় ঘটেছে। এবার বিভিন্ন ভৌত সমস্যার সমাধানে ঐ সমীকরণটি ব্যবহার করার পালা।

যখন কোন বস্তুকণার ওপর বাইরে থেকে কোন বল কাজ করে না, তখন আমরা বলি সেটি মুক্ত অবস্থায় আছে। আপনি জানেন কণাটি কোন বিভবক্ষেত্রে থাকলে বিভবের নতির পূর্বে একটি বিয়োগ চিহ্ন যোগ করে কণার ওপর প্রযুক্ত বল পাওয়া যায়। এই বল শূন্য হওয়ার অর্থ বিভবের মান সর্বত্র সমান হওয়া। বিভবের শূন্যটি আমরা ইচ্ছামত ধরে নিতে পারি তাই মুক্ত বস্তুকণার ক্ষেত্রে $V = 0$ ধরে নেওয়া যায়। অবশ্য বিভবক্ষেত্রের কোন অংশে বিভবের মান স্থির হলেও শূন্য নাও হতে পারে, এমনকি মোট শক্তি E অপেক্ষা V-এর মান বেশীও হতে পারে। তবে সব অবস্থাতেই আমরা শ্রোডিংগারের সময়-নিরপেক্ষ সমীকরণটি লিখতে পারব এবং তার উপযুক্ত সমাধান নির্ণয় করতে পারব। আপনি লক্ষ্য করবেন, যে কোন কোন ক্ষেত্রে আমরা এমন ফল পাব যা সনাতন বলবিদ্যার ধারণার বিরোধী।

শ্রোডিংগার সমীকরণের প্রয়োগের ওপর ভিত্তি করে গঠিত এই এককটি আপনাকে জটিলতর ক্ষেত্রে, অর্থাৎ কণার গতি যখন মুক্ত নয়, বরং বাইরে থেকে প্রযুক্ত বলের অধীন, সে অবস্থায় সমীকরণটি প্রয়োগ করতে উৎসাহ যোগাবে। আপনি ক্রমশ উপলব্ধি করবেন যে কোয়ান্টাম বলবিদ্যা নিছক গাণিতিক ক্রিয়া নয়, বরং ভৌত অবস্থার বিশ্লেষণে এটি একটি শক্তিশালী গাণিতিক পদ্ধতি।

উদ্দেশ্য

- শ্রোডিংগার সমীকরণের প্রয়োগ সম্বন্ধীয় এই এককটি পড়ার পর আপনি যে কাজগুলি করতে পারবেন সেগুলি হল ঃ
- একটি মুক্ত বস্তুকণার তরঙ্গ-অপেক্ষকটি নির্ণয় করতে পারবেন এবং তার সঙ্গে বস্তুকণার ভরবেগকে সম্পর্কিত করতে পারবেন।
- একমাত্রিক আয়তাকার বিভব প্রাচীরে আপতিত বস্তুকণার সঞ্চারণ ও প্রতিফলনের গুণাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবেন।
- একমাত্রিক বিভব সোপানে কোন বস্তুকণা আপতিত হলে বস্তুকণার শক্তির বিভিন্ন মানের জন্য তার সঞ্চারণ ও প্রতিফলনের গুণাঙ্ক নির্ধারণ করতে পারবেন।
- নিউক্লিয়াস থেকে আলফা কণার নির্গমনের প্রক্রিয়াটি ব্যাখ্যা করতে পারবেন এবং কুলম্ব বিভব প্রাচীর ভেদ করে আলফা কণার নির্গমনের সম্ভাব্যতার একটি মোটামুটি মান বার করতে পারবেন।

11.2 মুক্ত বস্তুকণার গতি সমীকরণ

ধরা যাক m ভরের কোন বস্তুকণা x-অক্ষ বরাবর মুক্ত গতিতে চলনশীল, অর্থাৎ এটির ওপর কোন বল ক্রিয়া করছে না এবং বিভব V-এর মান শূন্য বলে ধরা যায়। এই কণাটির জন্য শ্রোডিংগারের সময় নিরপেক্ষ সমীকরণটি হল ঃ

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 \qquad \ldots\ldots 11.1$$

যেখানে $\psi(x)$ কণাটির একমাত্রিক তরঙ্গ অপেক্ষক।

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \text{ লিখলে, } \frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi$$

যার সমাধান $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ $\qquad \ldots\ldots 11.2$

আপনি আগের এককে দেখেছেন যে সময় নির্ভর সম্পূর্ণ তরঙ্গ অপেক্ষকটি হল

$$\psi(x,t) = \psi(x).\, e^{-iEt/\hbar}$$

$$= \psi(x).\, e^{-i\omega t} \quad (\text{যেখানে } \omega = E/\hbar)$$

$\therefore$ 11.2 থেকে, $\psi(x,t) = (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})\, e^{-i\omega t}$

$$= Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)}$$

আপনি জানেন যে $e^{i(kx - \omega t)}$ ও $e^{-i(kx + \omega t)}$ রাশি দুটি যথাক্রমে x অক্ষের দিক বরাবর ও x-অক্ষের বিপরীত দিক বরাবর তরঙ্গগতি বোঝায়। আমরা যদি কণাটির গতি x অক্ষের দিক বরাবর বলে ধরে নিই, তবে $B = 0$ ধরতে হবে এবং $\psi(x, t)$ এর রাশিমালাটি হবে $\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ …… 11.3

প্রমাণীকরণ ঃ ওপরের তরঙ্গ অপেক্ষকটির প্রমাণীকরণের চেষ্টা করা যাক। কণাটির x থেকে $x + dx$ স্থানাঙ্কের মধ্যে অবস্থান করার সম্ভাব্যতা, t সময়ে

$$
\begin{aligned}
P(x)\, dx &= \psi^*(x, t)\psi(x, t)\, dx \\
&= Ae^{-i(kx - \omega t)}.\, Ae^{i(kx - \omega t)}\, dx \\
&= A^2 dx
\end{aligned}
$$

যেহেতু কণাটি $x = -\infty$ থেকে $x = +\infty$ সীমার মধ্যে যে কোন অবস্থানে থাকতে পারে,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1$$

বা, $$A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx = 1$$

ওপরের সমীকরণে সমাকলটির মান অসীম, সুতরাং এর থেকে A ধ্রুবকের কোন নির্দিষ্ট মান পাওয়া সম্ভব নয়। ফলে 11.3 এর তরঙ্গ অপেক্ষকটির প্রমাণীকরণও সম্ভব নয়।

ভরবেগের আইগেনমান ঃ আমরা জানি ভরবেগের সংকারক $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$। এটি $\psi(x, t)$ এর ওপর ক্রিয়া করলে কোন আইগেনমান পাওয়া যায় কি না তা দেখা যাক।

$$
\begin{aligned}
\hat{p}_x \psi(x, t) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} Ae^{i(kx - \omega t)} \\
&= -i\hbar .\, ik .\, Ae^{i(kx - \omega t)} \\
&= \hbar k \psi \qquad \ldots\ldots 11.4
\end{aligned}
$$

অর্থাৎ $\psi(x, t)$ হল $\hat{p}_x$ সংকারকের একটি আইগেন-অপেক্ষক এবং এটির জন্য $\hat{p}_x$ সংকারকের আইগেনমান $\hbar k$, যা $\hbar \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \sqrt{2mE}$ এর সমান। এটি অবশ্য প্রত্যাশিত কেননা স্থিতিশক্তির মান শূন্য হওয়ায় E রাশিটি গতিশক্তি $\frac{p^2}{2m}$ এর সমান।

11.3 আয়তাকার বিভব-প্রাচীর (Rectangular Potential Barrier)

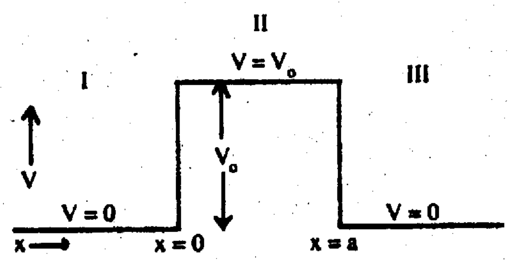
আগের অনুচ্ছেদটিতে আমরা বিভবের মান সর্বত্র শূন্য ধরেছিলাম। কিন্তু এবার ধরা যাক x-অক্ষের দিক বরাবর একমাত্রিক গতিসম্পন্ন বস্তুকণাটি $x = 0$ থেকে $x = a$ সীমার মধ্যে অবস্থিত একটি অঞ্চলের ওপর আপতিত হল, যেখানে বিভবের মান $V_0(\neq 0)$। এই অঞ্চলটিকে আমরা বিভব-প্রাচীর বলি।

চিত্র 11.1, থেকে আপনি বিভব প্রাচীরের চরিত্রটি বুঝতে পারবেন। এখানে

I. $V = 0$ যখন $-\infty \le x < 0$

II. $V = V_0$ যখন $0 \le x \le a$

III. $V = 0$ যখন $a < x \le \infty$



চিত্র 11.1

এই তিনটি অঞ্চলকে আমরা I, II ও III সংখ্যা দিয়ে চিহ্নিত করব।

I অঞ্চলে শ্রোডিংগারের সময়-নিরপেক্ষ সমীকরণটি হবে 11.1 সমীকরণের মত :

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi_1 = 0$$

বা, $$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k^2\psi_1 = 0, \quad \left(k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}\right)$$

এর সাধারণ সমাধান $\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ 11.5

(A ও B = অনিশ্চিত ধ্রুবক)

লক্ষ করুন যে সময় নির্ভর সমাধানটি হল

$$\begin{aligned}\psi_1(x, t) &= (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})\, e^{-i\omega t} \quad (\omega = E/\hbar)\\ &= Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)}\end{aligned}$$

যার মধ্যে $Ae^{i(kx-\omega t)}$ রাশিটি x অক্ষের দিক বরাবর ও অন্য রাশিটি x-অক্ষের বিপরীত দিক বরাবর সঞ্চারিত তরঙ্গ বোঝায়। এ থেকে বোঝা যায় যে প্রথম রাশিটি বিভব প্রাচীরে আপতিত তরঙ্গ ও দ্বিতীয় রাশিটি প্রতিফলিত তরঙ্গ বোঝায়।

II অঞ্চলে তরঙ্গ সমীকরণটির রূপ ঃ

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\,\psi_2 = 0.$$

ধরা যাক $\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) = \alpha^2$। যদি $E \leq V_0$ হয় তবে α বাস্তব রাশি কিন্তু যদি $E > V_0$ হয় তবে α-কে কাল্পনিক রাশি হিসাবে ধরতে হবে। এখন তরঙ্গ সমীকরণটিকে লেখা যায় ঃ

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} - \alpha^2\psi_2 = 0$$

যার সাধারণ সমাধান $\psi_2(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}$ …… 11.6

$(C, D =$ অনিশ্চিত ধ্রুবক$)$

III অঞ্চলে তরঙ্গ সমীকরণটির চেহারা আবার 11.1 সমীকরণের মত হবে, অর্থাৎ

$$\frac{d^2\psi_3}{dx^2} + k^2\psi_3 = 0$$

যার সাধারণ সমাধান $\psi_3(x) = He^{ikx} + ke^{-ikx}$ …… 11.7

সুতরাং III অঞ্চলে সময় নির্ভর সমাধানটি হবে

$$\psi_3(x, t) = \psi_3(x)\,e^{-i\omega t} \quad (\omega = E/\hbar)$$

$$= He^{i(kx - \omega t)} + ke^{-i(kx + \omega t)}$$

এর মধ্যে $He^{i(kx-\omega t)}$ রাশিটি x-অক্ষের দিক বরাবর ও $ke^{-i(kx+\omega t)}$রাশিটি x-অক্ষের বিপরীত দিক বরাবর সঞ্চরমান তরঙ্গ বোঝায়। কিন্তু এই অঞ্চলে x-অক্ষের বিপরীত দিক বরাবর, অর্থাৎ 11.1 চিত্রে ডান দিক থেকে আসা তরঙ্গ থাকতে পারে না। I অঞ্চল থেকে বিভব প্রাচীরের ওপর আপতিত তরঙ্গের কিছু অংশ যদি বিভব প্রাচীর ভেদ করে III অঞ্চলে প্রবেশ করে তবে তা কেবলমাত্র অক্ষের দিক বরাবরই সঞ্চারিত হবে। সুতরাং আমরা $k = 0$ ধরতে পারি, যার ফলে লেখা যায়

$\psi_3(x) = He^{ikx} \quad (H =$ অনিশ্চিত ধ্রুবক$)$ …… 11.8

আপনার মনে হতে পারে যে আমরা এ পর্যন্ত A, B, C, D ও H, এই পাঁচটি অনিশ্চিত ধ্রুবক পেয়েছি, যেগুলি সম্পূর্ণ স্বতন্ত্র। কিন্তু এবার আমরা লক্ষ্য করব যে এই ধ্রুবকগুলি স্বতন্ত্র নয়, কেননা তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি $x = 0$ ও $x = a$ বিন্দুতে কিছু সীমাশর্ত পালন করে। সীমাশর্তগুলি হল ঃ

$x = 0$ বিন্দুতে $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, $\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0}$ এবং $x = a$ বিন্দুতে $\psi_2(a) = \psi_3(a)$, $\left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=a} = \left(\frac{d\psi_3}{dx}\right)_{x=a}$।

এখন এই সীমাশর্তগুলি প্রয়োগ করা যাক।

(i) $\psi_1(0) = \psi_2(o)$ $\quad\therefore\quad A + B = C + D$ ...... 11.9(a)

(ii) $\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0}$ $\quad\therefore\quad ik(A - B) = \alpha(C - D)$ ...... 11.9(b)

(iii) $\psi_2(a) = \psi_3(a)$ $\quad\therefore\quad Ce^{\alpha a} + De^{-\alpha a} = He^{ika}$ ...... 11.9(c)

(iv) $\left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=a} = \left(\frac{d\psi_3}{dx}\right)_{x=a}$ $\quad\therefore\quad \alpha(Ce^{\alpha a} - De^{-\alpha a}) = ikHe^{ika}$ ...... 11.9(d)

11.9(a) ও (b) সমীকরণ থেকে

$$A - B = \frac{\alpha}{ik}(C - D) = -\frac{i\alpha}{k}(C - D)$$

$$A = \frac{1}{2}\left[C\left(1 - \frac{i\alpha}{k}\right) + D\left(1 + \frac{i\alpha}{k}\right)\right]$$

$$B = \frac{1}{2}\left[C\left(1 + \frac{i\alpha}{k}\right) + D\left(1 - \frac{i\alpha}{k}\right)\right]$$

আবার, 11.9(c) ও (d) সমীকরণ থেকে

$$Ce^{\alpha a} - De^{-\alpha a} = \frac{ik}{\alpha}He^{ika}$$

$$Ce^{\alpha a} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{ik}{\alpha}\right)He^{ika} \quad \text{বা,} \quad C = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{ik}{\alpha}\right)He^{ika}\,e^{-\alpha a}$$

এবং $De^{-\alpha a} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{ik}{\alpha}\right)He^{ika}$ বা, $D = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{ik}{\alpha}\right)He^{ika}\,e^{\alpha a}$

A ও B এর রাশিমালায় C ও D এর মান ব্যবহার করে,

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{ik}{\alpha}\right)He^{ika}e^{-\alpha a}\left(1 - \frac{i\alpha}{h}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{ik}{\alpha}\right)He^{ika}e^{\alpha a}\left(1 + \frac{i\alpha}{k}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}He^{ika}\left[\frac{1}{2}\left(2 + \frac{ik}{\alpha} - \frac{i\alpha}{k}\right)e^{-\alpha a} + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{ik}{\alpha} + \frac{i\alpha}{k}\right)e^{\alpha a}\right]$$

$$= He^{ika}\left[\frac{e^{\alpha a} + e^{-\alpha a}}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{i\alpha}{k} - \frac{ik}{\alpha}\right)\frac{e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}}{2}\right]$$

$$= He^{kka}\left[\cos h\alpha a + \frac{i}{2}\left(\frac{\alpha}{k} - \frac{k}{\propto}\right)\sin h\alpha a\right] \qquad \text{...... 11.10(a)}$$

$$B = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{ik}{a}\right)He^{ika}e^{-\alpha a}\left(1 + \frac{i\alpha}{k}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{ik}{\propto}\right)He^{ika}e^{\alpha a}\left(1 - \frac{i\alpha}{k}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} He^{ika} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{ik}{\alpha}+\frac{i\alpha}{k}\right)e^{-\alpha a} - \frac{1}{2}\left(\frac{ik}{\propto}+\frac{i\alpha}{k}\right)e^{\alpha a}\right]$$

$$= - He^{ika}. \frac{i}{2}\left(\frac{k}{\lambda}+\frac{\alpha}{k}\right)\frac{e^{\alpha a}-e^{-\alpha a}}{2}$$

$$= -\frac{i}{2} He^{ika}\left(\frac{k}{\alpha}+\frac{\alpha}{k}\right)\sinh \alpha a \qquad \ldots\ldots 11.10(b)$$

বিভব প্রাচীরের মধ্য দিয়ে কণাস্রোতের সঞ্চারণ (transmission) যখন $E < V_0$

ধরা যাক α বাস্তব রাশি, অর্থাৎ $E < V_0$। এই অবস্থায় সনাতন বলবিদ্যার নিয়মানুসারে বিভবপ্রাচীরের বাম দিক থেকে আপতিত কণাগুলির প্রাচীরের ডানদিকে, অর্থাৎ III অঞ্চলে পৌঁছানো সম্ভব নয়। কেননা কণার গতিশক্তি সেক্ষেত্রে অঞ্চল নেগেটিভ হতে হবে। কিন্তু কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় কণাগুলির কিছু অংশ প্রাচীর ভেদ করে III অঞ্চলে পৌঁছায় বলে দেখা যায়। এক্ষেত্রে আপনি নিশ্চয়ই কণাস্রোতের কত অংশ বিভব প্রাচীরটি ভেদ করতে সক্ষম হয় তা জানতে চাইবেন। এজন্য আমাদের I ও III অঞ্চলে কণাস্রোতের মান জানতে হবে। এই স্রোতের পরিমাণ হল $S = P(x).V$, যেখানে $P(x)$ = সম্ভাব্যতা ঘনত্ব এবং V = কণার বেগ। [অনুশীলনী 4, এই পর্যায়ের দশম একক]

I অঞ্চলে কণাস্রোতের মান $S_I = (Ae^{ikx})(Ae^{ikx})^*.V$

$$= AA^*V$$

এই রাশিমালাটি সরাসরি নিম্নরূপ উপায়ন্ত নির্ণয় করিতে পারেন।

প্রতিফলিত তরঙ্গ $\psi_{1r} = Ae^{ikx}$ এবং $S_I = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left[Ae^{ikx}.A^*(-ik)e^{-ikx} - A^*e^{-ikx}.ike^{ikx}\right]$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left[-2ik\,|A|^2\right] = \frac{\hbar k}{m}|A|^2.$$

এখানে $\frac{\hbar k}{m}$ কণার বেগ V নির্দেশ করে।

এবং (III) অঞ্চলে কণাস্রোতের মান $S_{III} = (He^{ikx})(He^{ikx})^*.V = HH^*.V$ লক্ষ করুন, দুই ক্ষেত্রেই কণার বেগ একই রাখা হয়েছে, কেননা উভয় ক্ষেত্রে স্থিতিশক্তি শূন্য এবং গতিশক্তি মোট শক্তির সমান। কণার বিভবপ্রাচীরের মধ্য দিয়ে সঞ্চারণের গুণাঙ্ক

$$T = \frac{S\,\text{III}}{S\,\text{I}} = \frac{HH^*V}{AA^*V} = \left(\frac{H}{A}\right)\left(\frac{H}{A}\right)^* \qquad \ldots\ldots 11.11$$

কিন্তু 11.10(a) থেকে

$$\frac{A}{H} = e^{ika}\left[\cos h\alpha a + \frac{i}{2}\left(\frac{\alpha}{k} - \frac{k}{\alpha}\right)\sin h\alpha a\right]$$

$$\therefore \quad \left(\frac{A}{H}\right)^* = e^{-ika}\left[\cos h\alpha a - \frac{i}{2}\left(\frac{\alpha}{k} - \frac{k}{\alpha}\right)\sin h\alpha a\right]$$

সুতরাং $\left(\frac{H}{A}\right)\left(\frac{H}{A}\right)^* = \cosh^2\alpha a + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{k} - \frac{k}{\alpha}\right)^2 \sinh^2\alpha a$

$$= 1 + \sinh^2\alpha a + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\alpha}{k} + \frac{k}{\alpha}\right)^2 - 4\right]\sinh^2\alpha a$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\sinh^2\alpha a$$

সুতরাং 11.11 থেকে $\frac{1}{T} = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{k} + \frac{k}{\alpha}\right)^2 \sinh^2\alpha a$ 11.12

কিন্তু, $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \alpha = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$

$$\therefore \quad \frac{k}{\alpha} = \sqrt{\frac{E}{V_0 - E}}, \frac{\alpha}{k} = \sqrt{\frac{V_0 - E}{E}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{T} = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{V_0 - E}{E} + \frac{E}{V_0 - E} + 2\right)\sinh^2\alpha a$$

বা, $\frac{1}{T} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)}\sinh^2\alpha a$ 11.13

11.13 সূত্রটি থেকে আপনি সঞ্চারণ গুণাঙ্কের মান পেতে পারেন। লক্ষ করুন, কণার শক্তি E এর তুলনায় বিভব প্রাচীরের উচ্চতা V_0 যত বেশী হয়, α এর মান ততই বাড়ে এবং T এর মান ততই কম হয়।

একটি উদাহরণ ঃ

ধরুন একটি ইলেকট্রনের স্রোতের প্রতিটি ইলেকট্রনের শক্তি $0.6eV$. এবং বিভব প্রাচীরের উচ্চতা $1eV$ বেধ $1\,A.u$।

এক্ষেত্রে $\frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} = \frac{1^2}{4 \times 0.6 \times (1 - 0.6)} = 1.042$

$$\alpha a = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}.a$$

$$= \frac{\sqrt{2 \times (9.11 \times 10^{-31}\,kg) \times (1 - 0.6) \times 1.6 \times 10^{-19} J}}{1.0546 \times 10^{-34}\,J.s} \times 10^{-10}\,\text{m}$$

$$= 0.324$$

$\therefore \quad \frac{1}{T} = 1 + 1.042 \sinh^2 (.324) = 1 + 1{\cdot}042 \times ({\cdot}33)^2$

$= 1{\cdot}113$

$\therefore \quad T \approx 0{\cdot}898$

এর অর্থ ইলেকট্রনগুলির প্রায় 90 শতাংশ বিভব প্রাচীর অতিক্রম করতে পারবে।

কণাস্রোতের প্রতিফলন ঃ

আগের পদ্ধতিতে আপনি কণাগুলির জন্য প্রতিফলন গুণাঙ্কও নির্ণয় করতে পারবেন। I অঞ্চলে প্রতিফলিত কণাস্রোতের মান

$$S'_I = (Be^{-ikx})(Be^{-ikx})^* V$$

$$= BB^* V$$

$\therefore$ **বিভবপ্রাচীরের প্রতিফলন গুণাঙ্ক**

$$R = \frac{S'_I}{S_I} = \frac{BB^*V}{AA^*V} = \frac{BB^*}{AA^*}$$

11.10(a) ও (b) থেকে

$$BB^* = \left[-\frac{i}{2} He^{ika}\left(\frac{k}{\alpha}+\frac{\alpha}{k}\right)\sin h\alpha a\right]\left[+\frac{i}{2} H^* e^{-ika}\left(\frac{k}{\alpha}+\frac{\alpha}{k}\right)\sin h\alpha a\right]$$

$$= \frac{1}{4} HH^* \left(\frac{k}{\alpha}+\frac{\alpha}{k}\right)^2 \sinh^2\alpha a$$

$$AA^* = He^{ika}\left[\cos h\alpha a + \frac{i}{2}\left(\frac{\alpha}{k}-\frac{k}{\alpha}\right)\sin h\alpha a\right]\times$$

$$H^* e^{-ika}\left[\cos h\alpha a - \frac{i}{2}\left(\frac{\alpha}{k}-\frac{k}{\alpha}\right)\sin h\alpha a\right]$$

$$= HH^*\left[\cos h^2\alpha a + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{k}-\frac{k}{\alpha}\right)^2 \sin h^2\alpha a\right]$$

$$= \frac{1}{4} HH^*\left[4 + 4\sin h^2\alpha a + \left(\frac{\alpha}{k}-\frac{k}{\alpha}\right)^2 \sin h^2\alpha a\right]$$

$$= \frac{1}{4} HH^*\left[4 + \left(\frac{\alpha}{k}+\frac{k}{\alpha}\right)^2 \sin h^2\alpha a\right]$$

$$\therefore \quad \frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{4} HH^*\left[4 + \left(\frac{\alpha}{k}+\frac{k}{\alpha}\right)^2 \sin h^2\alpha a\right]}{\frac{1}{4} HH^*\left(\frac{\alpha}{k}+\frac{k}{\alpha}\right)^2 \sin h^2\alpha a}$$

$$= 1 + \frac{4}{\left(\frac{\alpha}{k} + \frac{k}{\alpha}\right)^2 \sinh^2 \alpha a}$$

বা, $$\frac{1}{R} = 1 + \frac{4E(V_0 - E)}{V_0^2 \sinh^2 \alpha a} \qquad \text{...... 11.14}$$

যেহেতু আপতিত কণাগুলির প্রতিটি হয় বিভেদ প্রাচীর অতিক্রম করে সঞ্চারিত হবে, নয়ত প্রতিফলিত হবে, আমরা আশা করব $R + T = 1$। আপনি 11.13 ও 11.14 সূত্র ব্যবহার করে এই সিদ্ধান্তের সত্যতা প্রতিপন্ন করতে পারেন।

একটি বিশেষ ক্ষেত্রে ঃ যদি $\alpha a >> 1$ হয় তবে

$\sinh^2 \alpha a \approx \frac{1}{4} e^{2\alpha a}$ এবং $\frac{1}{T} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \cdot \frac{1}{4} e^{2\alpha a} \approx \frac{V_0^2 e^{2\alpha a}}{16E\,(V_0 - E)}$ (1 সংখ্যাটি উপেক্ষা করে)

∴ সঞ্চারণ গুণাঙ্ক $T = \frac{16E}{V_0}\left(1 - \frac{E}{V_0}\right) e^{-2\alpha a}$ 11.15

যখন $E > V_0$

কণার মোট শক্তি যদি বিভব প্রাচীরের উচ্চতার চেয়ে বেশী হয় তবে সনাতন বলবিদ্যার বিচারে কণাগুলি II অঞ্চলেও পজিটিভ গতিশক্তি ও বাস্তব বেগসম্পন্ন হবে। এবং প্রতিটি কণাই বিভবপ্রাচীর অতিক্রম করে III অঞ্চলে পৌঁছাবে। দেখা যাক কোয়ান্টাম বলবিদ্যা থেকে কোন সিদ্ধান্তে আসা যায়।

এক্ষেত্রে $\alpha = i\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} = i\beta$, ধরা যাক।

$$\sinh \alpha a = \frac{1}{2}(e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}) = \frac{1}{2}(e^{i\beta a} - e^{-i\beta a}) = i \sin \beta a$$

11.13 সূত্রে থেকে,

$$\frac{1}{T} = 1 + \frac{V_0^2}{4E\,(E - V_0)} \sin^2 \beta a$$

বিশেষ ক্ষেত্র ঃ যদি V_0 এর তুলনায় E সামান্যই বড় হয় তবে

$\beta a << 1$, $\sin \beta a \approx \beta a$

$$\therefore \quad \frac{1}{T} = 1 + \frac{V_0^2 \beta^2 a^2}{4E\,(E - V_0)}$$

$$= 1 + \frac{V_0^2 a^2}{4E(E - V_0)} \cdot \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$$

বা, $$\frac{1}{T} = 1 + \frac{m V_0^2 a^2}{2E\hbar^2} \qquad \text{...... 11.16(b)}$$

অনুরূপভাবে $E > V_0$ হলে, 11.4 সমীকরণ থেকে,

$$\frac{1}{R} = 1 + \frac{4E(E-V_0)}{V_0^2 \sin^2\beta a} \qquad \text{...... 11.17(a)}$$

বিশেষ ক্ষেত্র ঃ যদি $\beta a << 1$ হয়, তবে

$$\frac{1}{R} = 1 + \frac{4E(E-V_0)}{V_0^2\beta^2a^2}$$

$$= 1 + \frac{4E(E-V_0)}{V_0^2a^2}\cdot\frac{\hbar^2}{2m(E-V_0)}$$

বা, $$\frac{1}{R} = 1 + \frac{2E\hbar^2}{mV_0^2a^2} \qquad \text{...... 11.17(b)}$$

11.17(b) এর সমীকরণটিতে আপনি একটি বিকল্প পদ্ধতিতেও পৌঁছাতে পারেন। যেহেতু $T + R = 1$, 11.16 সমীকরণ থেকে T-এর মান নির্ণয় করে R এর মান বার করা যেতে পারে।

এবার 11.16(a) ও 11.17(a) সমীকরণ দুটির এক বিশেষ তাৎপর্য লক্ষ করুন। এই সমীকরণ দুটির মধ্যেই $\sin^2\beta a$ রাশিটি থাকায় βa রাশির পরিবর্তনের সঙ্গে R এবং T এর মান আন্দোলিত হতে থাকবে। বিশেষত, যখন $\sin\beta a = 0$, তখন $T = 1$ এবং $R = 0$, অর্থাৎ আপতিত কণাগুলি প্রতিফলিত হবে, সম্পূর্ণরূপে বিভবপ্রাচীর অতিক্রম করে সঞ্চারিত হবে। এটি তখনই ঘটবে যখন $\beta a = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n\pi$ ইত্যাদি, (n = পূর্ণসংখ্যা।) এর অর্থ

$$a\sqrt{2m(E-V_0)} = n\pi\hbar = \frac{n}{2}h \qquad \text{...... 11.18}$$

কিন্তু $E - V_0 =$ II অঞ্চলে কণার গতিশক্তি, $\frac{p^2}{2m}$ (p = ভরবেগ) 11.18 থেকে পাওয়া যায় $ap = \frac{1}{2}nh$

বা, $a = \frac{1}{2}n > \lambda$ $\left(\lambda = \frac{h}{p}\right.$ কণার ডি.ব্রগ্‌লি তরঙ্গদৈর্ঘ্য $\left.\right)$ অর্থাৎ কণার প্রতিফলন তখনই সম্পূর্ণ শূন্য হবে যখন বিভব প্রাচীরের বেধ প্রাচীরের মধ্যে ডিব্রগলির তরঙ্গদৈর্ঘ্যের অর্ধেকের গুণিতক হবে।

এবার একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

অনুশীলনী —1

1.1eV শক্তির একটি ইলেকট্রন 1.0eV উচ্চতা ও 0.5 $A.U.$ বেধের একটি বিভব প্রাচীরে আপতিত হল। ইলেকট্রনটির প্রতিফলিত হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

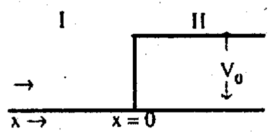
11.4 বিভব সোপান

এবার এমন একটি অবস্থা কল্পনা করুন যেখানে x-অক্ষের $x = 0$ বিন্দুর বামদিকে বিভবের মান শূন্য হলেও ঐ বিন্দুর ডানদিকে বিভবের মান V_0, অর্থাৎ $V = 0$। যখন $x < 0$ (অঞ্চল I) $V = V_0$, যখন $x \geq$ (অঞ্চল II) (চিত্র 11.2)। লক্ষ্য করুন 11.3 অনুচ্ছেদে আমরা যে বিভব প্রাচীর কল্পনা করেছি, এক্ষেত্রে সেটি $x = \infty$ পর্যন্ত প্রসারিত বলে ধরা হয়েছে। ধরা যাক ভরের বস্তুকণা E শক্তিতে x-অক্ষ বরাবর এই বিভবসোপানের ওপর আপতিত হয়।

I ও II অঞ্চলে শ্রোডিংগারের সময়-নিরপেক্ষ তরঙ্গ সমীকরণটি হবে :

$$\text{অঞ্চল I}: \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\varepsilon\psi_1 = 0 \qquad \ldots\ldots 11.19(a)$$

$$\text{অঞ্চল II}: \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi_2 = 0 \qquad \ldots\ldots 11.19(b)$$



চিত্র 11.2

এখানে $\psi_1(x)$ ও $\psi_2(x)$ যথাক্রমে I ও II অঞ্চলে কণার তরঙ্গ-অপেক্ষক বোঝাচ্ছে।

ধরে নিন $E > V_0$। এখন 11.19(a) ও (b) সমীকরণ দুটিকে লেখা যায় :

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \alpha^2\psi_1 = 0 \qquad \alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \qquad \ldots\ldots 11.20(a)$$

এবং

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \beta^2\psi_2 = 0 \qquad \beta = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}} \qquad \ldots\ldots 11.20(b)$$

এখানে α ও β বাস্তব রাশি। 11.20(a) ও (b) সমীকরণদ্বয়ের সমাধান নিম্নরূপ :

$$\psi_1(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x} \qquad \ldots\ldots 11.21(a)$$

$$\psi_2(x) = Ce^{i\beta x} + De^{-i\beta x} \qquad \ldots\ldots 11.21(b)$$

পূর্বে 11.3 অনুচ্ছেদে ব্যবহৃত যুক্তি ব্যবহার করে দেখা যায় যে 11.21(a) সমীকরণটির মধ্যে $Ae^{i\alpha x}$ রাশিটি x-অক্ষ বরাবর বিভবসোপানে আপতিত তরঙ্গ এবং $Be^{-i\alpha x}$ রাশিটি -অক্ষের বিপরীতমুখী। অর্থাৎ বিভবসোপান দ্বারা প্রতিফলিত তরঙ্গ বোঝায়। 11.21(b) সমীকরণে $De^{-i\beta x}$ রাশিটি থাকতে পারে না কেননা II অঞ্চলে x-অক্ষের বিপরীতমুখী কোন তরঙ্গ থাকা সম্ভব নয়। সুতরাং 11.21(b) এর পরিবর্তে লিখব

$$\psi_2(x) = Ce^{i\beta x} \qquad \ldots\ldots 11.21(c)$$

I ও II অঞ্চল দুটির সীমান্তে, অর্থাৎ $x = 0$ বিন্দুতে $\psi_1(x)$ ও $\psi_2(x)$ এই সীমাশর্তগুলি পালন করে :

$$\psi_1(x = 0) = \psi_2(x = 0) \qquad \ldots\ldots 11.22(a)$$

$$\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0} \qquad \ldots\ldots 11.22(b)$$

যার প্রথমটি থেকে পাওয়া যায় [11.21(a) ও (c) ব্যবহার করে]

$$A + B = C$$

ও দ্বিতীয়টি থেকে, $i\alpha A - i\alpha B = i\beta C$, অর্থাৎ $A - B = \frac{\beta}{\alpha} C$

সমাধান করে, $A = \frac{c}{2}\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)$

$$B = \frac{c}{2}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{B}{A} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}, \frac{C}{A} = \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}$$

I ও II অঞ্চলে কণার বেগ যদি যথাক্রমে V_1 ও V_2 হয়, তবে

I অঞ্চলে আপতিত কণাস্রোতের প্রবাহের মান

$$\begin{aligned} S_I &= (Ae^{i\alpha x})(Ae^{i\alpha x})^* V_1 \\ &= Ae^{i\alpha x}. A^*e^{-i\alpha x}.V_1 \\ &= AA^* V_1 \end{aligned}$$

I অঞ্চলে প্রতিফলিত কণাস্রোতের প্রবাহের মান

$$\begin{aligned} S'_I &= (Be^{-i\alpha x})(Be^{-i\alpha x})^* V_1 \\ &= BB^*V_1 \end{aligned}$$

এবং II অঞ্চলে সঞ্চারিত কণাস্রোতের প্রবাহের মান

$$\begin{aligned} S_{II} &= (CC^{i\beta x})(Ce^{i\beta x})^*V_2 \\ &= CC^*V_2 \end{aligned}$$

কিন্তু $\frac{1}{2} mV_1^2 = E$, কেননা I অঞ্চলে $V = 0$

এবং $\frac{1}{2} mV_2^2 = E - V_0$

$$\therefore \quad V_1 = \sqrt{2E/m} \text{ এবং } V_2 = \sqrt{2(E-V_0)/m}$$

কণাস্রোতের সঞ্চারণ-গুণাঙ্ক, $T = S_{II}/S_I = CC^*V_2/AA^*V_1$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{C}{A}\right)^2 \cdot \frac{V_2}{V_1} \\ &= \left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E-V_0}{E}} \end{aligned}$$