হল 6 + 14 = 20। এর অর্থ হল ঐ শ্রেণীর উর্দ্ধতর শ্রেণী সীমান্ত 50·5-এর স্বল্পতর নম্বর প্রাপ্ত ছাত্রের সংখ্যা হল 20 জন, অনুরূপভাবে একটি শ্রেণীর অধিকতর ধরনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বলতে বোঝায় সংশ্লিষ্ট শ্রেণীর নিম্নতর শ্রেণী সীমান্ত অপেক্ষা অধিকতর পর্যায়ে দফাগুলির সংখ্যা। একই ছকের নীচের দিক থেকে দ্বিতীয় শ্রেণীর অধিকতর ধরনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা হল 3 + 7 = 10। এর অর্থ হল ঐ শ্রেণীর নিম্ন শ্রেণী সীমান্ত 60·5-এর অধিকতর নম্বর প্রাপ্ত ছাত্রের সংখ্যা হল 10। এইভাবে স্বল্পতর ধরনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা কার্যত উচ্চতর শ্রেণী সীমান্তের সঙ্গে যুক্ত এবং অধিকতর ধরনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা কার্যত নিম্নতর শ্রেণী সীমান্তের সঙ্গে যুক্ত। ধরা যাক কোন পরিসংখ্যা বিভাজনের শ্রেণী পরিসংখ্যাগুলি উপরের দিক থেকে হল যথাক্রমে f_1, f_2, f_3 ......। স্বভাবতঃ স্বল্পতর ধরনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলি হবে যথাক্রমে f_1, $f_1 + f_2$, $f_1 + f_2$, $+ f_3$ ......। ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা নির্ধারণ করতে হবে। ছকটি শ্রেণী সীমা অনুসারে দেওয়া না থাকলে তা শ্রেণী সীমান্ত অনুসারে পরিবর্তন করে প্রকাশ করতে হয়। যে পরিসংখ্যা বিভাজনে এই ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলি দেখান হয় তাকে **ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন** (Cumulative frequency distribution) বলে। 7 নং ছক দ্বারা প্রকাশিত পরিসংখ্যা বিভাজনটি থেকে গঠিত ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন নিম্নের ছক দ্বারা প্রকাশ করা হল।

ছক নং—৪

একটি কলেজে 50 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন

শ্রেণী সীমান্ত	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক সংখ্যা	
		স্বল্পতর ধরনের	অধিকতর ধরনের
30·5 — 40·5	6	6	50
40·5 — 50·5	14	20	44
50·5 — 60·5	20	40	30
60·5 — 70·5	7	47	10
70·5 — 80·5	3	50	3
মোট	50	—	—

পরিবেশে পরিসংখ্যা বিভাজনের বিশেষত্ব উল্লেখ করা যায়। পরিসংখ্যা বিভাজন দু-ধরনের হয় : (a) সরল পরিসংখ্যা বিভাজন (Simple frequency distribution) এবং (b) শ্রেণী বা গোষ্ঠীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন। সরল পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে এককভাবে বা ব্যক্তিগতভাবে (Individually) একটি চলকের মানসমূহ এবং পাশাপাশি সংশ্লিষ্ট পরিসংখ্যাগুলি ছকের মাধ্যমে দেখান হয়। উদাহরণ স্বরূপ 5 নং ছকটি উল্লেখ করা যেতে পারে। পক্ষান্তরে গোষ্ঠীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে একটি

চলকের মানগুলির বিভিন্ন শ্রেণী অন্তর এবং পাশাপাশি সংশ্লিষ্ট পরিসংখ্যাগুলি ছকের মাধ্যমে দেখা হয়। উদাহরণ স্বরূপ 7 নং ছকটি উল্লেখ করা যেতে পারে। রাশিতথ্যমালার সারিকরণের (Summarisation) সর্বোৎকৃষ্ট ও বহুল প্রচলিত ভঙ্গী হল পরিসংখ্যা বিভাজন।

(ড) নক্‌সা ও চিত্র (Charts and Diagram) : পরিসংখ্যাগত রাশিতথ্যমালা প্রকাশের কার্যকরী পদ্ধতি হল নক্‌সা ও চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ। বস্তুত নক্‌সা ও চিত্রের সাহায্যে এক নজরে রাশিতথ্যমালার প্রকৃতির বেশ কিছুটা অতিসত্বর অনুধাবন করা যায়। তাছাড়া চার্ট বা নক্‌সা জটিল সমস্যার ব্যাখ্যা দিতে পারে এবং গুপ্ত তথ্য সামনে তুলে ধরতে পারে। কালীনসারির প্রবণতা নিরূপণের ক্ষেত্রে নক্‌সা বিশেষ উপযোগী হয়। ত্রুটি বিচ্যুতি পরীক্ষার ক্ষেত্রে অনেক সময় গ্রাফ ব্যবহার করা হয়। নক্‌সা বা চিত্র অবশ্য রাশিতথ্যমালার পুঁঙ্খানুপুঙ্খ বিবরণ দিতে পারে না। এগুলির মাধ্যমে কেবল আসন্ন অবস্থার প্রকাশ ঘটে। নক্‌সা ও চিত্র অঙ্কন করতে যথেষ্ট সময়ের প্রয়োজন হয়।

নক্‌সা ও চিত্রের সাধারণ ধরনগুলি নিম্নে দেওয়া হল—

(1) রেখাচিত্র অথবা গ্রাফ (Line diagram of Graph)

(2) দণ্ড চিত্র (Bar diagram)

(3) পাই চিত্র (Pie diagram)

(4) আয়তলেখ, পরিসংখ্যা বহুভুজ, ওগিভ ইত্যাদি (Histogram, Frequency Polygon, Ogive etc)

(ঢ) রেখাচিত্র বা লেখ (Line diagram or Graph) : রেখাচিত্র বা লেখ হল পরিসংখ্যাগত রাশিমালা প্রকাশের সর্বাধিক সাধারণ পদ্ধতি। সরলরেখা বা বক্রের (Straight line or curve) সাহায্যে দুটি চালকের মধ্যে সম্পর্ক রেখাচিত্রে (Sine diagram) প্রতিফলিত হয়। একটি লেখ কাগজে (Graph paper) একটি অনুভূমিক রেখা (অনুভূমিক অক্ষ বা x-অক্ষ) এবং একটি উলম্ব রেখা (উল্লম্ব অক্ষ বা y-অক্ষ) অঙ্কন করা হল। অনুভূমিক অক্ষ এবং উলম্ব অক্ষ নামে কথিত রেখাদ্বয় যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে **মূলবিন্দু** (origin) বলা হয়। ধরা যাক x এবং y এমন দুটি বিচ্ছিন্ন অথবা অবিচ্ছিন্ন চলক যে x-এর প্রতিটি গ্রহণযোগ্য মানের জন্য y-এর একটি করে নির্দিষ্ট মান থাকে। এক্ষেত্রে x হল নিরপেক্ষ চলক (Independent variate) এবং y হল নির্ভরশীল চলক (Dependent variate)। পূর্ব নির্দিষ্ট একক অনুযায়ী অনুভূমিক অক্ষে x চলকের মানগুলি এবং উলম্ব অক্ষে y চলকের মানগুলি দেখান যেতে পারে। x-এর জন্য একক এবং y-এর জন্য একক ভিন্ন মাপের হতে পারে। অনুভূমিক অক্ষকে X-অক্ষ এবং উল্লম্ব অক্ষকে Y-অক্ষ বলেও অভিহিত করা হয়।

এবার x চলকের মানসমূহ x_1, x_2, x_3 .... জন্য y চলকের সংশ্লিষ্ট মানগুলি যদি যথাক্রমে y_1, y_2, y_3 .... হয় তাহলে লেখ কাগজের y-অক্ষবিশিষ্ট সমতলে প্রদত্ত রাশিতথ্যসমূহ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ..... ভুজ কোটি সম্পন্ন P_1, P_2, P_3 .... বিন্দু দ্বারা চিহ্নিত করা

যায়। এই বিন্দুগুলি সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করলে যে চিত্রটি পাওয়া যায় তা হল লেখচিত্র (Line diagram)।

শ্রেণীবন্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে শ্রেণী সম্পর্কিত পরিসংখ্যাগুলিকে শ্রেণী মধ্যকের (Class mark) সংশ্লিষ্ট কোটিরূপে ব্যবহার করা হয়। একই গ্রাফের বা লেখার মধ্যে একাধিক রেখাচিত্রের প্রয়োজন হলে প্রত্যেক রেখাচিত্র পৃথকভাবে অঙ্কন করতে হবে।

লেখচিত্রের অনুভূমিক অক্ষের নিম্নে এবং উলম্ব অক্ষের বাম দিকে চলক দুটির বিভিন্ন মান পরিমাপের একক স্পষ্টরূপে উল্লেখ করতে হবে। পরিসংখ্যাগুলি (frequencies) কার্যত উল্লম্ব অক্ষে দেখান হয়। রেখাচিত্রের যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (co-ordinates) (a, b) দ্বারা প্রকাশিত হওয়ার অর্থ হল ঐ বিন্দুর ভুজ হচ্ছে a এবং কোটি হচ্ছে b অথবা x ও y অক্ষ থেকে বিন্দুটির দূরত্ব b ও a-র মানের সমানুপাতিক।

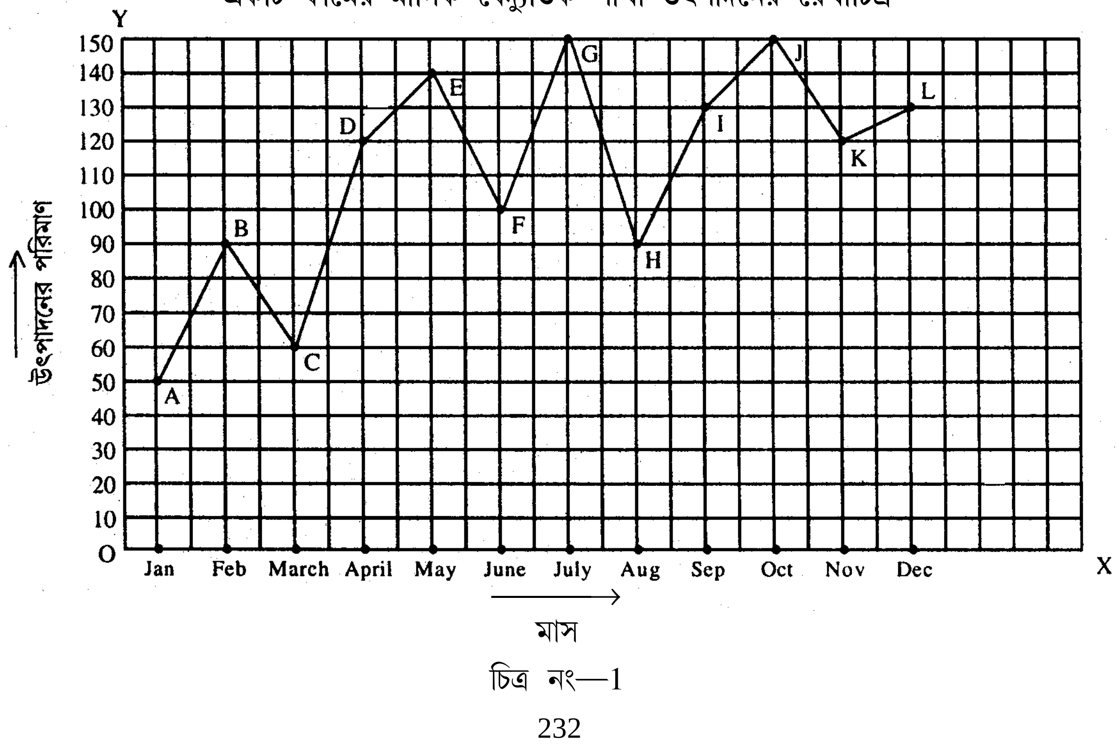
অনুভূমিক পরিমাপ মাত্রা (Scale) মূল বিন্দু থেকে শুরু নাও হতে পারে। কিন্তু উল্লম্ব পরিমাপ মাত্রা শূন্য বিন্দু থেকে দেখান আবশ্যিক। লেখচিত্রের একটি সংক্ষিপ্ত শিরোনাম দিতে হয় :

উদাহরণ : কোন একটি ফার্মে মাসিক বৈদ্যুতিক পাখা উৎপাদনের পরিমাণ নিম্নে দেওয়া হল :

জানুয়ারী—50, ফেব্রুয়ারী—90, মার্চ—60, এপ্রিল—120, মে—140, জুন—100, জুলাই—150, আগষ্ট—90, সেপ্টেম্বর—130, অক্টোবর—150, নভেম্বর—120, ডিসেম্বর—130

উপরোক্ত রাশিতথ্যমালাকে রেখাচিত্রের সাহায্যে নিম্নে প্রকাশ করা হল —

একটি ফার্মের মাসিক বৈদ্যুতিক পাখা উৎপাদনের রেখাচিত্র



চিত্র নং—1

রেখাচিত্রটিতে মাসসমূহকে উল্লম্ব অক্ষরেখায় এবং উৎপাদনের পরিমাণকে অনুভূমিক অক্ষরেখায় নিম্নলিখিত পরিমাপ মাত্রা (Scale) অনুযায়ী দেখান হয়েছে।

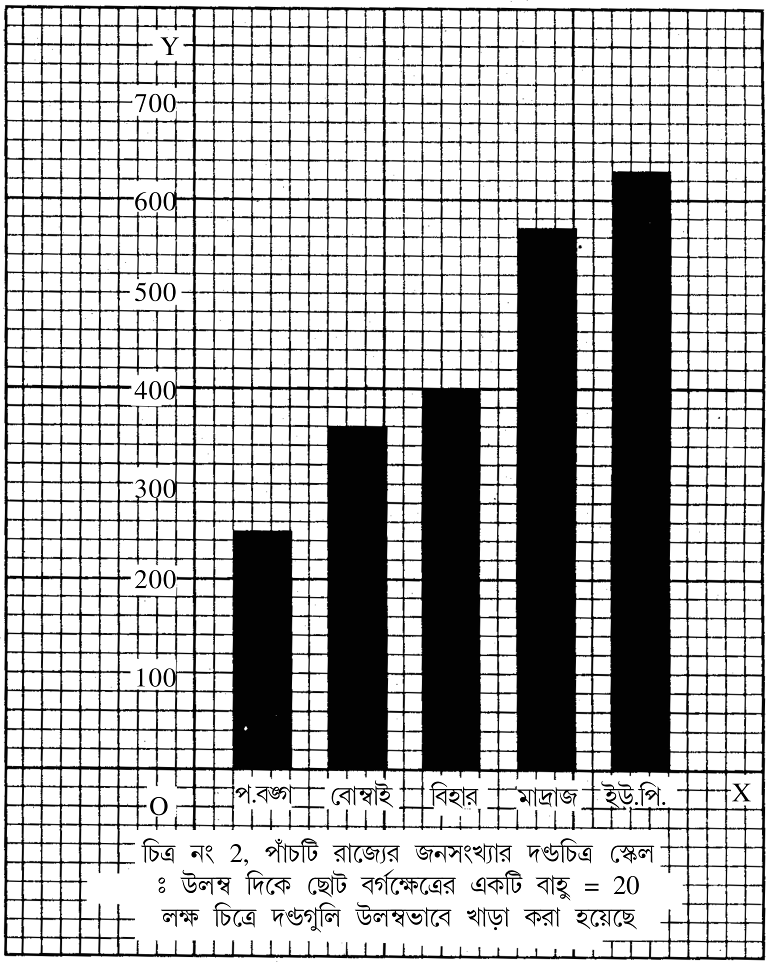
পরিমাপ মাত্রা (Scale) : অনুভূমিক অক্ষ OX বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 2টি বাহু দৈর্ঘ্য = 1 মাস এবং উলম্ব অক্ষ OY বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু = 10টি পাখা ধরে পাখার মাসিক উৎপাদনের পরিমাণ উপরোক্ত লেখচিত্র (Line diagram)-এর সাহায্যে প্রকাশ করা হয়েছে। বিভিন্ন মাসে পাখার উৎপাদনসমূহ অনুভূমিক অক্ষরেখা থেকে যথাক্রমে A, B, C, D....... প্রভৃতি বিন্দুগুলির উল্লম্ব দূরত্বের সমানুপাতিক হিসাবে প্রদর্শিত হয়েছে।

(ণ) দণ্ডচিত্র বা বারলেখ (Bar diagram or Bar graph) : কোন বিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজনের লৈখিক প্রকাশের জন্য দণ্ডচিত্র বা বারচিত্রের ব্যাপক প্রয়োগ দেখা যায়। পরস্পর লম্ব এমন একটি দু-অক্ষবিশিষ্ট সমতলের অনুভূমিক ও উলম্ব অক্ষ বরাবর যথাক্রমে চলকের মানসমূহ ও সংশ্লিষ্ট পরিসংখ্যাগুলি পরিমাপ মাত্রা অনুযায়ী দেখিয়ে কতকগুলি একই প্রান্তের দণ্ড বা বার (Bar) পরস্পর হতে সমান দূরত্বে খাড়া করা হয় (erected)। এক একটি দণ্ড বা বারের দৈর্ঘ্য উহা যে রাশিতথ্যকে বা চলকের মাত্রাকে প্রকাশ করছে তার পরিসংখ্যানের (frequency) সমানুপাতিক হয়। এই দণ্ড বা বারগুলিকে অনুভূমিক অথবা উলম্ব উভয়ভাবে প্রকাশ করা যায়। কালীনসারি সাধারণত উলম্ব দণ্ড চিত্র দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ : ভারতবর্ষের পাঁচটি রাজ্যের জনসংখ্যার ছক [1951 সালের আদমসুমারি (census) অনুযায়ী] নিম্নে দেওয়া হল—

রাজ	প. বঙ্গ	বোম্বাই	বিহার	মাদ্রাজ	উ: প্রদেশ
জনসংখ্যা (লক্ষে)	250	360	400	570	630

প্রদত্ত এই ছক অনুযায়ী নিম্নে দণ্ডচিত্রটি দেখান হল—



চিত্র নং 2, পাঁচটি রাজ্যের জনসংখ্যার দণ্ডচিত্র স্কেল ঃ উলম্ব দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু = 20 লক্ষ চিত্রে দণ্ডগুলি উলম্বভাবে খাড়া করা হয়েছে

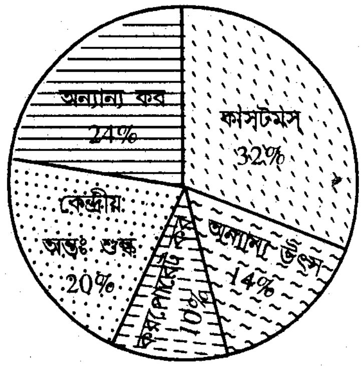
দণ্ডচিত্র কয়েক রকমের হতে পারে, যথা— অনুভূমিক দণ্ডচিত্র, উলম্ব দণ্ডচিত্র, যুগ্ম বা যৌগিক বা জটিল দণ্ডচিত্র এবং অংশভিত্তিক দণ্ড চিত্র।

(ত) পাই চিত্র বা বৃত্তাকার চিত্র (Pie chart or Circular Chart) : পাই চিত্রের (Pie chart) -এর সাহায্যে সম্পূর্ণ রাশিতথ্য ও তার অংশগুলিকে একই স্থানে দেখান হয়। প্রথমে একটি বৃত্ত আঁকা হয় এবং বৃত্তটির ক্ষেত্রফল দ্বারা সম্পূর্ণ তথ্য বা রাশিতথ্যগুলির সমষ্টিকে প্রকাশ করা হয়ে থাকে। এবার সম্পূর্ণ তথ্যের বিভিন্ন অংশগুলি বৃত্তটির বিভিন্ন অংশ দ্বারা এমনভাবে প্রকাশ করা হয় যাতে বৃত্তাংশসমূহের ক্ষেত্রফল, সম্পূর্ণ তথ্যের সংশ্লিষ্ট অংশগুলির মানের সমানুপাতিক হয়—স্পষ্টতই সম্পূর্ণ তথ্যের কোন একটি অংশ ঐ সম্পূর্ণ তথ্যের যত শতাংশ হবে সেই অংশ সংশ্লিষ্ট বৃত্তাংশটি সম্পূর্ণ বৃত্তের তত শতাংশ হবে।

পাই চিত্র অঙ্কনের সুবিধার্থে প্রথমে একটি বৃত্তের পরিধিকে 100টি সমান ভাগে ভাগ করা হয়। আবার বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ হল 360°। সুতরাং সম্পূর্ণ রাশিতথ্যের কোন অংশ বিশেষের শতাংশ যদি P হয় তাহলে তদ্‌সংশ্লিষ্ট বৃত্তাংশের কেন্দ্রস্থ কোণ $q = \frac{360}{100} \times P$ $(3{\cdot}6 \times P)$ ডিগ্রি হবে। এভাবে সম্পূর্ণ রাশিতথ্যের অংশ বিশেষের জন্য সংশ্লিষ্ট বৃত্তাংশগুলি নির্ণয় করে পাই চিত্র বা বৃত্তাকার চিত্র অঙ্কন করা হয়।

উদাহরণ : ভারত সরকারের কোন এক বছরের রাজস্ব সংক্রান্ত রাশিতথ্যমালা দেওয়া হল। রাশিতথ্য মালাকে নিম্নে একটি পাই চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা হল :

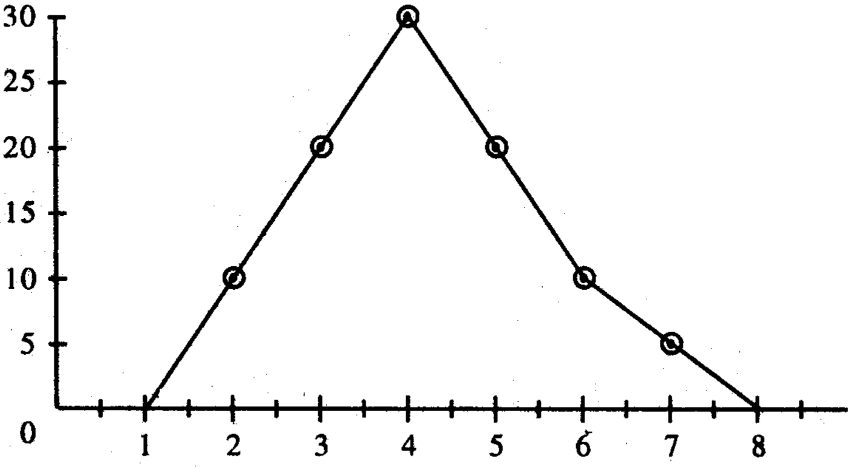
উৎস	রাজস্ব (লক্ষ টাকায়)	মোটর শতাংশ
কাসটমস	10880	32
কেন্দ্রীয় অন্ত:শুল্ক	6800	20
অন্যান্য কর (কর্পোরেট কর ছাড়া)	8160	24
কর্পোরেট কর	3400	10
অন্যান্য উৎস	4760	14



চিত্র নং 3 ঃ পাই চিত্র

কোন বৃত্তের কেন্দ্রে মোট 360° উৎপন্ন হয়। সুতরাং 360° হল 100% পরিসংখ্যার সমানুপাতিক এবং 1% পরিসংখ্যার জন্য কেন্দ্রে 3·6° কোণ উৎপন্ন হবে। বিভিন্ন সূত্র থেকে রাজস্ব সংক্রান্ত পরিসংখ্যান সংশ্লিষ্ট পাই চিত্রের বিভিন্ন অংশের জন্য কেন্দ্রে যে কোণগুলি উৎপন্ন হবে সেগুলি হল যথাক্রমে $(32 \times 3{\cdot}6) = 115{\cdot}2°$, $(20 \times 3{\cdot}6) = 72°$, $(24 \times 3{\cdot}6) = 86{\cdot}4°$, $(10 \times 3{\cdot}6) = 36°$ এবং $(14 \times 3{\cdot}6) = 14°$

(থ) পরিসংখ্যা বহুভূজ (Frequency Polygon) : একটি বিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজনের উপযুক্ত চিত্র সহযোগে প্রকাশ হল পরিসংখ্যা বহুভূজ। এই ক্ষেত্রে চলকের মানসমূহ অনুভূমিক অক্ষে এবং পরিসংখ্যানসমূহ উলম্ব অক্ষে দেখান হয়। দুই অক্ষবিশিষ্ট সমতলে সংগৃহীত রাশিতথ্যসমূহ বিন্দু দ্বারা চিহ্নিত করা হয় যেখানে প্রতিটি বিন্দুর ভূজ এবং কোটি যথাক্রমে চলকের মান ও সংশ্লিষ্ট পরিসংখ্যা প্রকাশ করে। একটি বন্ধ চিত্রের জন্য শূন্য পরিসংখ্যা সংশ্লিষ্ট চলকের নিম্নতম ও উর্দ্ধতম মানগুলি অন্তর্ভুক্ত করা হয়—অর্থাৎ পরিসংখ্যা বহুভূজটি অনুভূমিক অক্ষ থেকে শুরু হয় এবং সর্বশেষে অনুভূমিক অক্ষে মিলিত হয়। চিহ্নিত বিন্দুগুলি রেখাংশ দ্বারা ক্রমান্বয়ে যুক্ত করে যে বহুভূজটি লিখিত হয় তা হল পরিসংখ্যা বহুভূজ। পূর্বোল্লিখিত পরিসংখ্যা ছক নং 5 অনুসারে নিম্নে একটি পরিসংখ্যা বহুভূজ অঙ্কন করা হল।



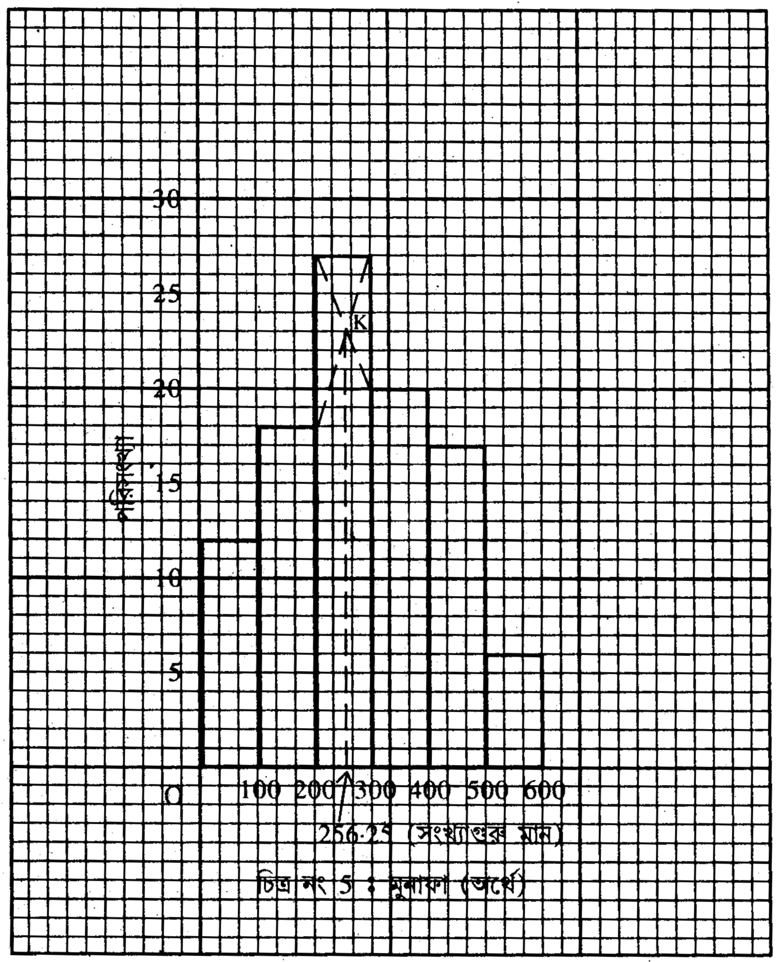
চিত্র নং 4 ছক : নং 5 অনুযায়ী পরিবারের আয়তনের পরিসংখ্যা বিভাজনের পরিসংখ্যা বহুভূজ

(দ) আয়তলেখ (Histogram) : আয়তলেখ অবিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজন প্রকাশের যথোপযুক্ত লেখচিত্র। আয়তলেক্ষ-এর ক্ষেত্রে ধরা হয় যে একটি শ্রেণীর অন্তর্গত পরিসংখ্যা শ্রেণীর দৈর্ঘ্যের মধ্যে সমানভাবে বিস্তৃত। এক্ষেত্রেও দুটি অক্ষ ধরা হয় এবং শ্রেণী সীমান্তগুলি (Class boundaries) শ্রেণীদৈর্ঘ্য নির্দেশ করার জন্য অনুভূমিক অক্ষে দেখান হয়। এরপর প্রতিটি শ্রেণীদৈর্ঘ্যের উপর পরস্পর সংলগ্ন আয়তক্ষেত্রগুলি খাড়া করা হয় (erected) এমনভাবে যেন প্রতিটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সংশ্লিষ্ট শ্রেণীর পরিসংখ্যার সমানুপাতিক হয়। সব শ্রেণীগুলি যদি সম দৈর্ঘ্যের হয় তাহলে আয়তক্ষেত্রগুলির উচ্চতা (উলম্ব দৈর্ঘ্য) শ্রেণী পরিসংখ্যাগুলির সমানুপাতিক হবে এবং তখন আয়তক্ষেত্রগুলির উচ্চতা সংখ্যাগতভাবে শ্রেণীপরিসংখ্যার সমান ধরা যাবে। আবার শ্রেণীগুলির দৈর্ঘ্য যদি অসম হয় তাহলে আয়তক্ষেত্রগুলির প্রস্থ অসম হবে। সেক্ষেত্রে কিন্তু আয়তক্ষেত্রগুলির উচ্চতা হবে পরিসংখ্যা ঘনত্বগুলির সমানুপাতিক।

উদাহরণ : 100টি দোকানের মাসিক মুনাফার (টাকায়) পরিসংখ্যা বিভাজন নিম্নে দেওয়া হল :

প্রতিটি দোকানের মুনাফা :	0–100	100–200	200–300	300–400	400–500	500–600
দোকানের সংখ্যা :	12	18	27	20	17	6

উপরোক্ত তথ্যের ভিত্তিতে নিম্ন আয়তলেখটি দেখান হল :



চিত্র নং 5 : মুনাফা (অর্থে)

চিত্রে ছেদবিন্দু K অনুসারে সংখ্যাগুরু মান (Mode) নির্ণয় করা যায়। K বিন্দু থেকে অনুভূমিক অক্ষের উপর অঙ্কিত লম্ব অনুসারে নির্ধারিত সংখ্যাগুরু মান হল 256·25।

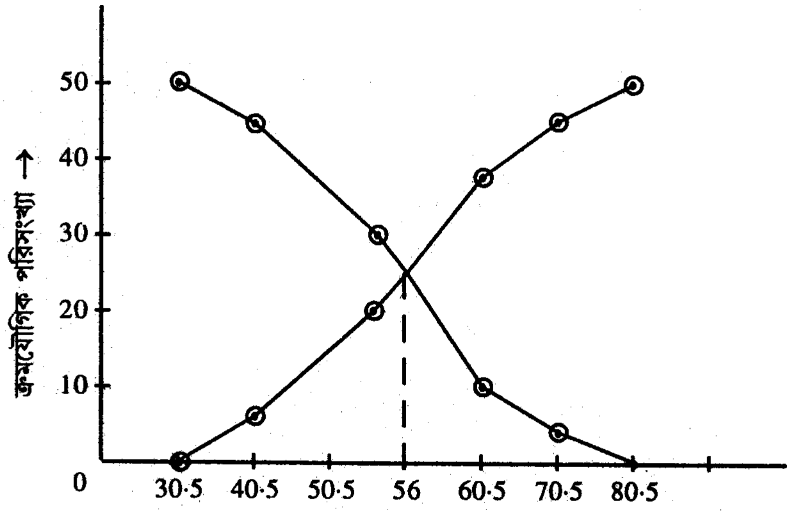
(ধ) অগিভ বা অজিভ (Ogive) : একটি অবিচ্ছিন্ন চলকের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলির (যে কোন এক ধরনের) পরিপ্রেক্ষিতে পরিসংখ্যা বিভাজনের বহুল ব্যবহৃত লৈখিক প্রকাশ হল অগিভ বা অজিভ, এই লেখচিত্র অঙ্কনের ক্ষেত্রে দুই অক্ষ বিশিষ্ট সমতলের অনুভূমিক অক্ষে চলকের মানগুলি এবং উলম্ব অক্ষে সংশ্লিষ্ট ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলি দেখান হয়।

স্বল্পতর ধরনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলির ক্ষেত্রে (In case of cumulative frequencies, less then type) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলি দুই অক্ষবিশিষ্ট সমতলে উর্দ্ধতর শ্রেণীসীমান্তের (Upper class boundaries) পরিপ্রেক্ষিতে বিন্দু দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং এরূপ চিহ্নিত বিন্দুগুলি রেখাংশ দ্বারা যুক্ত

করে স্বল্পতর ধরনের অগিভ (Ogive) পাওয়া যায়। আবার অধিকতর ধরনের অগিভ অঙ্কনের জন্য ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলি (অধিকতর ধরনের) সংশ্লিষ্ট শ্রেণীর নিম্নতর শ্রেণী সীমান্তের পরিপ্রেক্ষিতে দুই অক্ষবিশিষ্ট সমতলে বিভিন্ন বিন্দু দ্বারা প্রকাশিত হয়। এই বিন্দুগুলি রেখাংশ দ্বারা যুক্ত করে অধিকতর ধরনের অগিভ/অজিভ পাওয়া যায়।

স্বাভাবিকভাবে, নিম্নতম শ্রেণীর নিম্নতর শ্রেণী সীমান্তের ক্ষেত্রে স্বল্পতর ধরনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা হল শূন্য এবং তা অগিভ অঙ্কনের বেলায় অন্তর্ভুক্তকরণ হয়। অনুরূপভাবে উচ্চতম শ্রেণীর উচ্চতর শ্রেণী সীমান্তের ক্ষেত্রে অধিকতর ধরনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাও শূন্য হয় এবং অগিভ অঙ্কনের সময় এই তথ্য গৃহীত হয়।

পূর্বোল্লিখিত ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা ছক নং 8 অনুসারে নিম্নে উভয় ধরনের অগিভ অঙ্কন করে দেখান হল :



(ছক নং 8 অনুযায়ী) শ্রেণী সীমান্ত →

চিত্র নং 6

চিত্রগতভাবে অগিভ (Ogive) থেকে মধ্যমার (Median) আসন্ন মান নির্ণয় করা যেতে পারে। স্বল্পতর ধরনে অগিভ ও অধিকতর ধরনের অগিভ দুটির ছেদবিন্দু থেকে অনুভূমিক অক্ষের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর অবস্থান অনুযায়ী মধ্যমার মান স্থির হয়। অনুভূমিক পরিমাণগত মাত্রায় (horizontal scale) পাদবিন্দু দ্বারা প্রকাশিত চলকের মান হচ্ছে মধ্যমা। উপরোক্ত চিত্র অনুসারে নির্ধারিত মধ্যমা হল 56।

(ন) মধ্যগামিতার পরিমাপসমূহ (Measures of Central Tendency) : প্রচুর পরিমাণ রাশিতথ্যমালা থেকে সিদ্ধান্ত গ্রহণের ক্ষেত্রে পরিসংখ্যা বিভাজনের মাধ্যমে ওগুলির সংক্ষিপ্তকরণ অনেক সময় যথেষ্ট হয় না ; বিশেষত যেখানে নানা ধরনের তুলনামূলক সিদ্ধান্ত গ্রহণের প্রয়োজন হয় সেখানে পরিসংখ্যা বিভাজনের বৈশিষ্ট্যগুলি আরও সংক্ষিপ্ত আকারে সংখ্যার মাধ্যমে প্রকাশ করা দরকার বা চলকের মানগুলির মধ্য অবস্থানের পরিপ্রেক্ষিতে পরিসংখ্যা বিভাজনের আরও সংক্ষিপ্ত আকার বিশেষ সংখ্যার মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। এরূপ একটি সংখ্যা যা রাশিতথ্যমালার মাঝামাঝি কোথাও অবস্থান করে তাকে পরিসংখ্যান গড় (Statistical Average) বা শুধু গড় (Average) বলা হয়। পরিসংখ্যান গড় প্রধানত তিন প্রকারের : (1) মধ্যক (Mean) ; (2) মধ্যমা (Median) এবং (3) সংখ্যাগুরু মান (Mode)। মধ্যক আবার তিন ধরনের হয় :

(1) যৌগিক মধ্যক বা গড় (Arithmetic Mean or A.M)

(2) গুণোত্তর মধ্যক বা গড় (Geometric Mean or G.M)

(3) বিবর্ত যৌগিক মধ্যক বা গড় (Harmonic Mean or Average)

(প) যৌগিক গড় (AM) : একটি চলকের যৌগিক গড় হল ঐ চলকের বিভিন্ন মানের সমষ্টি এবং চলকটির মানের সংখ্যার মধ্যে অনুপাত।

যদি x_1, x_2, ... x_n কোন একটি x চলকের n সংখ্যক মান (Values of the variable x) হয় তাহলে x-এর যৌগিক গড় $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots\dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ $= \frac{4500 + \dots + 4774}{8} = \frac{37404}{8}$ $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ এই ধরনের যৌগিক গড় হল সরল যৌগিক গড় (Simple A.M.)

প্রমাণ : $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

আরও উল্লেখ করা যায় যে ন্যূনতম হবে যদি অন্য কোন পরিসংখ্যান গড় হতে চলকের মানগুলির অন্তর নেওয়া হয়।

উদাহরণ—1 কোন একটি অফিসে 1995 সালের মে মাসে 8 জন কর্মচারীর মাসিক বেতন ছিল 4500, 4650, 4700, 4800, 4600, 4530, 4850 এবং 4774 টাকা। কর্মচারীদের গড় মজুরি (Mean wage) হল = = 4675·50 টাকা

চলকের প্রতিটি মান থেকে একটি যথাযথ উপাদন c বাদ দিয়ে অনেক ক্ষেত্রে যৌগিক গড় নির্ণয়

সহজে করা যায়। ধরি x চলকের বিভিন্ন মান থেকে কোন একটি উপাদান c বাদ দিয়ে যথাক্রমে y_1, y_2 .... y_n প্রভৃতি মানগুলি পাওয়া গেল—অর্থাৎ ধরি $y_1 = x_i - c$ প্রতিটি i-এর জন্য

অথবা যেখানে n হল চলকের মানগুলির সংখ্যা

অথবা $\sum_{i=1}^{n} y_i \,/\, n = \sum_{i-1}^{n} x_i \,/\, n - \frac{nc}{n}$

অথবা $\bar{y} = \bar{x} - c$

অথবা

উদাহরণ—2 কোন এক সপ্তাহের 7 দিনে কোন এক মুদি দোকানের মুনাফা হল 210, 200, 250, 240 230, 245 প্রতিদিনের গড় মুনাফা নির্ণয় কর।

ধরি x হল দোকানীর দৈনিক মুনাফা এবং এর মানগুলি হল x_1, x_2, ... x_7

ধরি $y_i = x_i - 200$, প্রতিটি i-এর জন্য। অতএব y_1, y_2 ..... y_7 হল যথাক্রমে 10, 0, 50, 40, 30, 40.

অতএব গড় মুনাফা $= 200 + 25 = 225$ টাকা

কোন এক বিচ্ছিন্ন চলকের মানগুলি যদি তাদের সংশ্লিষ্ট পরিসংখ্যাগুলি সহ দেখান হয় তাহলে যৌগিক গড় নির্ণয় করা যায়। ধরা যাক্ x চলকের n সংখ্যক মানগুলি হল x_1, x_2, ... x_n এবং তাদের সংশ্লিষ্ট পরিসংখ্যাগুলি হল যথাক্রমে f_1, f_2, ... f_n, তাহলে যৌগিক গড় নিম্নলিখিত সূত্র অনুসারে নির্ণিত হয় :

যেখানে $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ এধরনের যৌগিক গড় হল গুরুত্বযুক্ত যৌগিক গড় (Weighed A.M)।

আবার অবিচ্ছিন্ন চলকের ক্ষেত্রে, বিভিন্ন শ্রেণী অন্তর ও তদ্‌সংশ্লিষ্ট পরিসংখ্যাগুলি দেখিয়ে পরিসংখ্যা ছকের সাহায্যে তথ্যরাশিমালা প্রকাশ করা হয়। এই ক্ষেত্রে শ্রেণীমধ্যকগুলিকে (Class Mean) সংশ্লিষ্ট শ্রেণী অন্তরগুলির প্রতিনিধি হিসাবে ধরে যৌগিক গড় নির্ণয় করা হয়। এক্ষেত্রেও

যেখানে x_1, x_2 ....x_n হল শ্রেণী অন্তরগুলির শ্রেণীমধ্যক এবং f_1, f_2, ... f_n হল সংশ্লিষ্ট শ্রেণী পরিসংখ্যাসমূহ।

শ্রেণী অন্তরগুলির দৈর্ঘ্য সমান হলে মূলবিন্দু (Origin) পরিবর্তন করে (change of origin or base) এবং পরিমাপ মাত্রা (scale) পরিবর্তন করে যৌগিক গড় নির্ণয় করা সুবিধাজনক হয়। প্রতিটি শ্রেণীমধ্যক থেকে c বাদ দিয়ে এবং তারপর d দ্বারা ভাগ করা হয়, যেখানে c হল অনুমিত কেন্দ্র এবং d হল পরিমাপমাত্রা অর্থাৎ সাধারণ দৈর্ঘ্য, যদি x_i-এর সংশ্লিষ্ট নতুন মানগুলি হয় y_i, তাহলে

অথবা $x_i = c + d$

অথবা $f_i x_i = f_i c + d f_i y_i$

অথবা $\sum f_i x_i = c \sum f_i + d \sum f_i y_i$

অথবা $\sum f_i x_i = c + \sum f_i y_i$ যেখানে $\sum f_i = n$

অথবা

উদাহরণ—3 মাসিক আয় অর্জনকারীদের নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে যৌগিক গড় নির্ণয় কর :

মাসিক আয় : 200 এর নিচে 200–399 400–599 600–799 800–999 1000–1199

আয় অর্জনকারী সংখ্যা :25 72 47 22 13 7

যৌগিক গড় নির্ণয়ের জন্য ছক নং 3.1

শ্রেণীঅন্তর	পরিসংখ্যা (f)	শ্রেণীমধ্যক (x)		fy
0–199	25	99·5	–2	–50
200–399	72	299·5	–1	–72
400–599	47	499·5	0	0
600–799	22	699·5	1	22
800–999	13	899·5	2	26
1000–1199	7	1099·5	3	21
মোট	186	—	—	–53

যদি $y = (x - c)/d$ হয় তাহলে

এক্ষেত্রে $c = 499{\cdot}5$ এবং $d = 200$

$\therefore \quad = 499{\cdot}5 + 200 \qquad = 499{\cdot}5 - 56{\cdot}99 = 442{\cdot}51$ টাকা।

(ফ) যৌগিক গড়ের বৈশিষ্ট্য (Properties of A.M) : যৌগিক গড়ের কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য নিম্নে দেওয়া হল :

(a) চলকের সংগৃহীত মানগুলি (values) যদি সবই সমান হয় তাহলে ঐ সাধারণ মানটি হবে সেগুলির যৌগিক গড়।

(b) x যদি y-এর এমন এক অপেক্ষক হয় যে x = a + by, তাহলে x এবং y-এর যৌগিক গড়ের মধ্যে সম্পর্কটি নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যাবে :

(c) কোন এক চলকের যৌগিক গড় থেকে চলকের প্রতিটি মানের অন্তরের সমষ্টি শূন্য হয়।

(d) যদি কোন এক চলক x-এর মানগুলির দুটি গোষ্ঠীতে থাকে (two groups of values) এবং একটি গোষ্ঠীর n_1 সংখ্যক মান সহ যৌগিক গড় হয় এবং অপর গোষ্ঠীর n_2 মান সহ যৌগিক গড় হয় তাহলে সংযুক্ত রাশিতথ্যমালার যৌগিক গড় বা সংযুক্ত গোষ্ঠীর যৌগিক গড় নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায় :

উদাহরণ : 20 জন বালিকার বয়সের গড় 15 বছর এবং 25 জন বালকের বয়সের গড় 24 বছর হলে বালক-বালিকার বয়সের গড় নির্ণয় কর—

ধরি বালিকার সংখ্যা $= n_1 = 20$, বালকের সংখ্যা $= n_2 = 24$

বালিকাদের গড় বয়স $= 15$, বালকদের বয়সের গড় $= 24$

ধরি হল সম্মিলিত বালক বালিকার গড় বয়স।

অতএব = বছর

(ব) গুণোত্তর গড় (Geometric mean—G.M) : একটি চলকের n সংখ্যক মান নিয়ে একটি শ্রেণীর গুণোত্তর গড় হল ঐ মানগুলির গুণফলের n তম মূল। এক চলক x এবং n সংখ্যক মানগুলি

যদি হয় x_1, x_2, ... x_n তাহলে উহাদের গুণোত্তর গড়, $x_G = (x_1, x_2 \ldots . x_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$

পরিসংখ্যা বিভাজনের জন্য

$$x_G = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{f_1}\right)^{\frac{1}{n}}$$ যেখানে

(ভ) গুণোত্তর গড়ের কয়েকটি বৈশিষ্ট্য :

(a) যদি চলকের প্রদত্ত মানগুলি সব সমান হয় তাহলে সেগুলির গুণোত্তর গড় হবে চলকটির সাধারণ মান (Common value)

(b) গুণোত্তর গড়ের লগ্ মান (Logarithim value) হল মানগুলি লগ্ মানের যৌগিক গড় (A.M of log values of the variable)

(c) x যদি y-এর এমন এক অপেক্ষক হয় যে $y = ax$, তাহলে y-এর মানগুলির গুণোত্তর গড় এবং x-এর মানগুলির গড়ের মধ্যে অনুরূপ সম্পর্কটি বজায় থাকবে অর্থাৎ $y_G = ax_G$

(d) দুটি চলকের গুণোত্তর গড়ের অনুপাত চলক দুটির অনুপাতের গুণোত্তর গড়ের সমান হবে।

অর্থাৎ

$$\left(\frac{x}{y}\right) = \text{[illegible]}$$

উদাহরণ : নিম্নলিখিত গোষ্ঠীগুলির (Groups) সূচক এবং সংশ্লিষ্ট গুরুত্ব অনুসারে সাধারণ সূচক নির্ণয়ের জন্য গুণোত্তর গড়-এর প্রয়োগ কর :

গোষ্ঠী	:	A	B	C	D	E	F
গোষ্ঠীসূচক	:	118	120	97	107	111	93
গুরুত্ব	:	4	1	2	6	5	2

গুণোত্তর গড় নির্ণয়

গোষ্ঠী	গোষ্ঠীসূচক (x)	গুরুত্ব (f)	log x	f(log x)
A	118	4	2·0719	8·2876
B	120	1	2·0792	2·0792
C	97	2	1·9868	3·9736

গোষ্ঠী	গোষ্ঠীসূচক (x)	গুরুত্ব (f)	log x	f(log x)
D	107	6	2·0294	12·1764
E	111	5	2·0453	10·2265
F	93	2	1·9685	3·9370
মোট	—	20	—	40·6803

$$\log\ (\text{G.M}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(\log x_i) = \frac{40{\cdot}6803}{20} = 2{\cdot}0340$$

$\therefore$ G = anti log 2·0340 = 108·1

$\therefore$ নির্ণেয় গুণোত্তর গড় হল 108·1 (সাধারণ সূচক)

(ম) বিবর্ত যৌগিক গড় (Harmonic Mean) :

কোন একটি চলকের এক গুচ্ছ রাশিতথ্যের বিবর্ত যৌগিক গড় হল তথ্যরাশিগুলির অনোন্তকের যৌগিক গড়ের অনোন্তক। কোন এক চলক x-এর n সংখ্যক মান রাশিগুলি যদি x_1, x_2 .... x_n হয় তাহলে চলকের বিবর্ত যৌগিক গড় (H.M) নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়—

$$\text{H.M} = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots\ldots+\frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_1}\right)}$$ এ হল সরল বিবর্ত যৌগিক গড়।

উপরোক্ত n সংখ্যক মান রাশিগুলির সংশ্লিষ্ট গুরুত্ব যদি হয় যথাক্রমে f_1, f_2 ..... f_n তাহলে গুরুত্বপূর্ণ বিবর্ত যৌগিক গড় নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায় :

$$\text{H.M} = \frac{n}{\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}+\ldots\ldots+\frac{f_n}{x_n}} = \frac{n}{\sum\frac{f_i}{x_i}}$$ যেখানে

$n = f_1 + f_2$ ..... f_n এবং মান রাশিগুলির কোনটি কিন্তু শূন্য নয়।

বিবর্ত যৌগিক গড়-এর ব্যবহার কিন্তু খুবই সীমিত। এই পরিমাণ কিন্তু ক্ষুদ্রতম রাশিতথ্যের উপর সর্বাধিক গুরুত্ব আরোপ করে এবং বৃহত্তম রাশিতথ্যের উপর ন্যূনতম গুরুত্ব আরোপ করে। যখন রাশিতথ্যসমূহ অত্যধিক বড় মাত্রার কিম্বা অত্যধিক স্বল্পমাত্রায় হয় তখন মধ্যক হিসাবে যৌগিক গড় অপেক্ষা বিবর্ত যৌগিক গড় অধিকতর গ্রহণযোগ্য হয়।

উদাহরণ : একটি মটরগাড়ি 50 মাইল দূরত্ব চারবার অতিক্রম করে। প্রথম বার প্রতি ঘণ্টায় 50 মাইল বেগে, দ্বিতীয় বার প্রতি ঘণ্টায় 20 মাইল বেগে, তৃতীয় বার প্রতি ঘণ্টায় 40 মাইল বেগে এবং চতুর্থ বার প্রতি ঘণ্টায় 25 মাইল বেগে মটর গাড়িটি ঐ দূরত্ব অতিক্রম করে। মটর গাড়িটির গড় গতিবেগ নির্ণ কর।

সমাধান—চারটি গতিবেগের বিবর্ত যৌগিক গড় থেকে মটর গাড়িটির গড় গতিবেগ নির্ধারিত হবে।

সুতরাং গড় গতিবেগ (H.M) $= \dfrac{4}{\frac{1}{50}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{25}} = \dfrac{800}{27} = 30$ মাইল প্রতি ঘণ্টায়।

(য) মধ্যমা (Median) : কোন চলকের মানগুলির মধ্যমা হল উর্দ্ধক্রম অথবা নিম্নক্রম অনুসারে সজ্জিত মান রাশিগুলির মধ্যতম মান (middle most value)। মধ্যমা কার্যত সমূহ রাশিতথ্যমালাকে এমন দুটি ভাগে ভাগ করে যে মানরাশির একটি ভাগের থেকে কম বা এর সমান হয় এবং অপর ভাগের থেকে অধিক অথবা এর সমান হয়।

তথ্যমালার মোট রাশিগুলির সংখ্যা অযুগ্ম (odd) হলে রাশিসমূহের একটি মধ্যতম রাশি পাওয়া যাবে এবং এই রাশিটি মধ্যমা বলে গণ্য হবে। কিন্তু মোট রাশির সংখ্যা যুগ্ম (even) হলে এরূপ দুটি রাশি পাওয়া যাবে যেগুলি মান অনুযায়ী রাশি শ্রেণীর মধ্যস্থানে থাকবে। এরূপ ক্ষেত্রে মধ্যস্থানে অবস্থিত রাশিদুটির যৌগিক গড় হল মধ্যমা। চলকের মান রাশিসমূহের সংখ্যা যদি $2n + 1$ (বিজোড়) হয় তাহলে মানের উর্দ্ধক্রম অথবা নিম্নক্রম অনুসারে সাজান রাশিগুলিকে $(n + 1)$ তম রাশিটি হবে মধ্যমা। পক্ষান্তরে মান রাশিগুলির মোট সংখ্যা যুগ্ম বা $2n$ হলে, মধ্যমা হবে n তম এবং $(n + 1)$ তম রাশি দুটির যৌগিক গড়। মধ্যমা যেহেতু একস্থান নির্ভর হয় সেহেতু মধ্যমা হল অবস্থানগত গড় (Positional average)।

উদাহরণ : 47, 49, 52, 80, 109, 112 এই শ্রেণীটির রাশির সংখ্যা অযুগ্ম—অর্থাৎ $2n + 1 = 7$ অথবা $2n = 6$ অথবা $n = 3$

অতএব $n + 1$ তম রাশি বা $(3 + 1 = 4)$ চতুর্থ রাশি 80 হলে এই শ্রেণীটির মধ্যমা।

এই রাশিমালাটিতে আরো একটি রাশি 40 অন্তর্ভুক্ত করা হলে রাশি সংখ্যা হয় যুগ্ম এবং সেক্ষেত্রে $2n = 8$ বা $n = 4$ সেক্ষেত্রে চতুর্থ রাশি 52 এবং পঞ্চম রাশি 80-এর যৌগিক গড় বা 66 হল মধ্যমা।

একটি বিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে মধ্যমা নির্ণয়ের পদ্ধতিটিও সরল। এই ক্ষেত্রে প্রতিটি স্বতন্ত্র মানরাশির সংশ্লিষ্ট ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (স্বল্পতর ধরনের) নির্ণয় করা হয়। মোট পরিসংখ্যা যদি N হয় তাহলে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $\dfrac{N+1}{2}$ সংশ্লিষ্ট মানরাশিটি হবে মধ্যমা।

অবিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে মধ্যমা নির্ণয় কিছুটা জটিল। মধ্যমা নির্ণয় করার জন্য এরূপ পরিসংখ্যা বিভাজনটির শ্রেণীচলকে শ্রেণীসীমান্তের (Class boundaries) রূপান্তরিত করে এবং প্রতিটি শ্রেণী অন্তরের সংশ্লিষ্ট ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলি দেখিয়ে পরিসংখ্যা বিভাজনটির পুনর্বিন্যাস করা হয় এবং নিম্নের প্রদত্ত সূত্রের সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয় করা হয়।

মধ্যমা (Median) =

যেখানে N হল চলকের মান রাশির সংখ্যা (Total no. of observation) বা মোট পরিসংখ্যা

L_1 হল মধ্যমা শ্রেণীর নিম্নতর শ্রেণী সীমান্ত (lower limit of the modal class)

F হল L_1-এর নিম্নের সকল শ্রেণীগুলির পরিসংখ্যার সমষ্টি অথবা মধ্যমা শ্রেণীর পূর্ববর্তী শ্রেণীর ক্রমযোগিক পরিসংখ্যা

f_m হল মধ্যমা শ্রেণীর পরিসংখ্যা

c হল মধ্যমা শ্রেণীর দৈর্ঘ্য

উদাহরণ 1: (বিচ্ছিন্ন চলকের ক্ষেত্রে) নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজনটি থেকে মধ্যমা নির্ণয় কর :

x	:	0	1	2	3	4	5	6	Total
f	:	7	44	35	16	9	4	1	116

সমাধান :

মধ্যমা নির্ণয়ের জন্য ছক

x	f	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
0	7	7
1	44	51
2	35	86
3	16	102
4	9	111
5	4	115
6	1	116 = N

এক্ষেত্রে $\frac{N+1}{2}$ = 58·5, ছকটি থেকে দেখা যাচ্ছে যে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 51 অপেক্ষা 58·5 বৃহত্তর কিন্তু পরবর্তী ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 86 অপেক্ষা কম। সুতরাং 58·5 পরিসংখ্যা সংশ্লিষ্ট মান রাশিটি হবে ক্রমযৌগিক গড় 86 সংশ্লিষ্ট মান রাশি অর্থাৎ 2। অতএব নির্মেয় মধ্যমা = 2

উদাহরণ 2 : (অবিচ্ছিন্ন চলকের ক্ষেত্রে) নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে মধ্যমা নির্ণয় কর—

শ্রেণী সীমান্তগুলি :	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75
পরিসংখ্যা :	4	11	19	14	0	2

মধ্যমা নির্ণয়ের জন্য ছক

শ্রেণী সীমান্তগুলি	পরিসংখ্যা f	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (স্বল্পতর ধরনের) cu. f (less than type)
15–25	4	4
25–35	11	15
(35–45)	19	34
45–55	14	48
55-65	0	48
65-75	2	50 = N

সমাধান : $\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$, যেহেতু $15 < 25 < 34$ সেহেতু মধ্যমা শ্রেণী হল (35 – 45)

অতএব, $L_1 = 35$, $N = 50$, $F = 15$, $F_m = 19$, $c = 10$

মধ্যমা $= 35 + \dfrac{25-15}{19} \times 10 = 35 + 5{\cdot}26 = 40{\cdot}26$

(র) সংখ্যাগুরুমান (Mode) : কোন চলকের মান—রাশিসমূহের মধ্যে যে রাশিটির পরিসংখ্যা সর্বাধিক—অর্থাৎ যে মান—রাশিটি সর্বাধিক বার পাওয়া যায় তা সংখ্যাগুরুমান বলে অভিহিত হয়। কোন কোন পরিসংখ্যা বিভাজনের একাধিক সংখ্যাগুরুমান থাকে। যে পরিসংখ্যা বিভাজনের একটিমাত্র সংখ্যাগুরুমান থাকে তা হল একসংখ্যাগুরুমানযুক্ত পরিসংখ্যা বিভাজন (Unimodal frequency distribution)।

বিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করা খুবই সহজ। পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে চলকের যে মানটির পরিসংখ্যা সর্বাধিক তা কেবল ছকটি পর্যবেক্ষণ থেকে সহজে নির্ধারণ করা যায়।

অবিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করা বেশ কিছুটা কষ্টসাধ্য। এরূপ ক্ষেত্রে সংখ্যাগুরুমান নির্ণয়ের জন্য নিম্নলিখিত সূত্র ব্যবহার করা হয়।

সংখ্যাগুরুমান (Mode) =

$$\text{অথবা } L_1 + \frac{d_1}{d_1 + d_2} i \qquad \text{যেখানে } f_1 - f_0 = d_1$$

$$\text{এবং } f_1 - f_2 = d_2$$

যেখানে L_1 সংখ্যাগুরুমান শ্রেণীর নিম্নসীমা

f_1 সংখ্যাগুরুমান শ্রেণীর পরিসংখ্যা

f_0 সংখ্যাগুরুমান শ্রেণীর পূর্ববর্তী শ্রেণীর পরিসংখ্যা

f_2 সংখ্যাগুরুমান শ্রেণীর পরবর্তী শ্রেণীর পরিসংখ্যা

যে শ্রেণীটির পরিসংখ্যা বিভাজন সর্বাধিক সেই শ্রেণীটি হল সংখ্যাগুরুমান শ্রেণী।

উদাহরণ : 2·17 অংশে আয়তলেখ সম্পর্কিত আলোচনার উদাহরণটি অনুসারে সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করা যেতে পারে। 100টি দোকানের মাসিক মুনাফার (টাকায়) পরিসংখ্যা হল :

প্রতিটি দোকানের মুনাফা	:	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600
দোকানের সংখ্যা (f)	:	12	18	27	20	17	6

সমাধান : সংখ্যাগুরু শ্রেণী হল (200 – 300) কারণ এই শ্রেণী সংশ্লিষ্ট পরিসংখ্যা হল সর্বাধিক (27)

$1_1 = 200,\ f_1 = 27,\ f_0 = 18,\ f_2 = 20,\ c = 100$ এবং $d_1 = f_1 - f_0 = 9,$

$d_2 = f_1 - f_2 = 27 - 20 = 7$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাগুরুমান $= 200 + \dfrac{9}{9+7} \times 100 = 200 + 56{\cdot}25 = 256{\cdot}25$।

একক সংখ্যাগুরু সম্পন্ন পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে যৌগিক গড়, মধ্যমাও সংখ্যাগুরুমানের মধ্যে নিম্নলিখিত সম্পর্কটি বজায় থাকে।

যৌগিক গড় – সংখ্যাগুরুমান = 3 (যৌগিক গড় – মধ্যমা)

যৌগিক গড়, গুণোত্তর গড় ও বিবর্ত যৌগিক গড়ের মধ্যে সম্পর্কটি হল নিম্নরূপ:

যৌগিক গড় ≥ গুণোত্তর গড় ≥ বিবর্ত যৌগিক গড়।

তথ্যরাশিগুলি ক্রম অনুসারে সাজালে ঠিক মধ্যস্থিত তথ্যের মান হল মধ্যমা অনুরূপভাবে অবস্থানগতভাবে চলকের মান সম্পর্কিত আরও বিভিন্ন পরিমাপকগুলি উল্লেখ করা যেতে পারে, যেমন চতুর্থক (Quartiles) বা শতাংশক (Percentiles)। চলকে বিভিন্ন মানগুলিকে উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজালে

তিনটি চতুর্থক পাওয়া যায়। ধরা যাক কোন একটি চলকের n সংখ্যক মানগুলিকে উর্দ্ধক্রম অনুসারে সাজান হয়েছে। তম স্থানে অবস্থিত চলকের মান রাশিটিকে প্রথম চতুর্থক বা নিম্ন চতুর্থক (First quartile) বলে, অনুরূপভাবে দ্বিতীয় চতুর্থক হল মধ্যমা এবং তম স্থানে অবস্থিত চলকের মান-রাশিটি হল তৃতীয় চতুর্থক (3rd quartile)। অনুরূপভাবে অবস্থানগতভাবে বিভিন্ন শতাংশকের উল্লেখ করা যেতে পারে।

(ল) বিস্তৃতির পরিমাপসমূহ (Measures of Dispersion) : একটি চলকের বিভিন্ন মানগুলি সাধারণত: সমান হয় না। অনেক ক্ষেত্রে এই মানগুলি একটি অপরটির খুব নিকটবর্তী হয় আবার অনেক সময় একটি অপরটির অনেক দূরবর্তী হয়। একগুচ্ছ মানের বা একটি রাশিতথ্য শ্রেণীর যথাযথ প্রকৃতি অনুধাবনের জন্য শ্রেণীটির গড় নির্ণয় ছাড়াও প্রদত্ত মান রাশিগুলির মধ্যে নৈকট্য বা পার্থক্য কতটা রয়েছে অথবা মান রাশিগুলি ওগুলরি গড়কে কেন্দ্র করে কিভাবে ছড়িয়ে রয়েছে সে সম্পর্কে ধারণা পাওয়া প্রয়োজন। পরিসংখ্যা বিভাজনের এক পরিমাপক যার সাহায্যে এক শ্রেণীভুক্ত রাশিগুলির মধ্যে তারতম্য অথবা মধ্যবর্তী মান থেকে মানরাশিগুলি কতটা ছড়িয়ে (how scattered) রয়েছে তা প্রকাশ করা হয় তা হল বিস্তৃতির পরিমাপ। বিস্তৃতির (Dispersion) আলোচনায় সাধারণত গড় হতে বিভিন্ন রাশির ভেদ (Variation) বা বিচ্যুতি (Deviation) এর বিশ্লেষণ করা হয়।

বিস্তৃতির বিভিন্ন পরিমাপগুলির মধ্যে নিম্নলিখিতগুলির ব্যাপক প্রয়োগ দেখা যায় :

1. প্রসার (Range)
2. গড় বিচ্যুতি (Mean deviation)
3. সম্যক বিচ্যুতি (Standard deviation)

(ব) প্রসার (Range) : প্রসার হল বিস্তৃতির সরলতম পরিমাপ। রাশিতথ্য শ্রেণীর বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম রাশিদ্বয়ের অন্তর হল ঐ রাশিতথ্য শ্রেণীটির প্রসার। প্রসার নির্ণয় করা অতীব সহজ, কিন্তু একে বিস্তৃতির সুষ্ঠু পরিমাপ হিসাবে গ্রহণ করা যায় না। মুক্ত শ্রেণীযুক্ত পরিসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে প্রসার নির্ণয় করা যায় না। রাশিগুলির কেবলমাত্র বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম রাশিদ্বয়ের দ্বারাই প্রসার প্রভাবিত হয় এবং অন্যান্য রাশিগুলি উপেক্ষিত হয়। রাশিতথ্যমালার একটি রাশি অত্যাধিক বেশি বা কম হলে প্রসারের মাধ্যমে উক্ত রাশিতথ্যমালার স্বরূপ সঠিকভাবে প্রকাশ করা যায় না।

উদাহরণ : ধরা যাক কোন একটি চলকের প্রদত্ত মানগুলি হল : 4, 7, 2, 1, 3, 5, –3

প্রসার (Range) নির্ণয় কর :

সমাধান : রাশিতথ্য শ্রেণীটির বৃহত্তম রাশি = 7 এবং ক্ষুদ্রতম রাশি = –3

অতএব চলকের প্রসার = 7 – (–3) = 10

উদাহরণ—2 : দুটি চলক x ও y-এর মধ্যে সম্পর্ক হল : $3y + 4x = 9$ এবং x চলকটির প্রসার হল 3, y চলকটির প্রসার নির্ণয় কর।

সমাধান : 3y + 4x = 9

অথবা, y = 3 –

$\therefore$ প্রসার $(y) = \left|-\frac{4}{3}\right| \times 3 = 4$

(শ) গড় বিচ্যুতি (Mean Deviation) : চলকের প্রদত্ত মানগুলির কোন এক ধরনের গড় (মধ্যক বা মধ্যমা) থেকে মানগুলির চরম পার্থক্যসমূহের যৌগিক গড় হল গড় বিচ্যুতি। ধরা যাক x চলকটির n সংখ্যক বিভিন্ন মান হল $x_1, x_2, ... x_n$ এবং c হল অনুমিত গড় মান। অতএব অনুমিত গড় c থেকে গড় বিচ্যুতি হল :

$$MD_c = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - c\right|$$

যেহেতু সেহেতু যৌগিক গড় হতে গড় বিচ্যুতি হল কার্যত চরম গড় বিচ্যুতি

(Absolute Mean Deviation—AMD)

c-এর স্থলে বসাইয়া পাই

$\therefore$ [illegible]

আবার চলকটির n সংখ্যক প্রদত্ত মান $x_1, x_2, ...x_n$ -এর সংশ্লিষ্ট পরিসংখ্যাগুলি ধরাযাক যথাক্রমে $f_1\ f_2\ ......\ f_n$ তাহলে

অনুরূপভাবে মধ্যমা (Median – me) থেকে গড় বিচ্যুতি হল :

$$MD_{me} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - me\right|$$

উদাহরণ—1 : 6 জন ব্যক্তির ওজন (কি. গ্রা. অনুসারে) 64, 60, 60, 64, 60, 64 হলে যৌগিক গড়ের ভিত্তিতে (চরম) গড় বিচ্যুতি নির্ণয় কর।

সমাধান : যৌগিক গড়

$\therefore \quad AMD_{\bar{x}} = \frac{1}{6}(3|60-62| + 3|64-62|) = \frac{12}{6}$ = 2 কি. গ্রা.

উদাহরণ—2 : মধ্যমা হতে কোন চলকের প্রদত্ত মানগুলি 3, 9, 5, 1 এবং 2 এর গড় বিচ্যুতি ($MDme$) নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত মানগুলি ক্রমঅনুসারে হল 1, 2, 3, 5, 9

$\therefore$ মধ্যমা = 3

$\therefore$

= = 2·2

(ষ) গড় বিচ্যুতির কয়েকটি উপযোগী ফল : (Source useful results Absolute Mean Deviation) :

1. রাশিতথ্যগুলি পরিসংখ্যা ছকে দেওয়া থাকলে গড় বিচ্যুতি নির্ণয়ের জন্য নিম্নের সূত্রগুলি ব্যবহার করা যায়।

2. মধ্যমার ভিত্তিতে নির্ধারিত গড় বিচ্যুতি সর্বনিম্ন (Least) হয়।

3. (i) হল যৌগিক গড় সম্পর্কিত গড় বিস্তারাঙ্ক (Co-efficient of Mean dispersion)

(ii) হল মধ্যমা সম্পর্কিত গড় বিস্তারাঙ্ক

(স) সমক বিচ্যুতি (Standard Deviation—SD) : বহুল ব্যবহৃত বিস্তৃতির পরিমাপ হল সমক বিচ্যুতি একটি চলকের বিভিন্ন মানযুক্ত রাশিগুলির যৌগিক গড় হতে বিভিন্ন রাশির বিচ্যুতিগুলির সমষ্টি শূন্য হলেও বিচ্যুতিগুলির বর্গের সমষ্টি ধনাত্মক সংখ্যা হয়। অতএব যৌগিক গড় থেকে রাশিগুলির বিচ্যুতির বর্গগুলির যৌগিক গড়ের বর্গমূলক সমক বিচ্যুতি বলা হয়। কোন একটি চলকের n সংখ্যক মানগুলি x_1, x_2 ...... x_n-এর যৌগিক গড় যদি $\bar{x}$ হয় তাহলে সমক বিচ্যুতি, (σ বা SD) হল :

যদি প্রদত্ত রাশিতথ্যমালা x_1, x_2 ..... x_n-এর সংশ্লিষ্ট পরিসংখ্যাগুলি হয় যথাক্রমে f_1, f_2, ... f_n তাহলে $\sigma = SD = \sqrt{\frac{1}{n} f_i \sum_{i=1}^{n} (x - \bar{x})^2}$

গণনার সুবিধার জন্য সমক বিচ্যুতির সূত্রটিকে নতুন একটি রূপে ব্যবহার করা যেতে পারে :

এখন, $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum x_i \,.\, \bar{x} + n\bar{x}^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

$\therefore$ S.D বা $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$

অনুরূপভাবে পরিসংখ্যা বিভাজনের মাধ্যমে সন্নিবেশিত রাশিতথ্যমালার জন্য সম্যক বিচ্যুতির সূত্রটি হল—

S.D বা $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum f_i x_i\right)^2}$

(S.D)^2 বা σ^2 কে ভেদমান (Variance) বলা হয়।

$\therefore$ σ^2 বা ভেদমান $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum f_i x_i\right)^2$

(হ) সমক বিচ্যুতির কয়েকটি বৈশিষ্ট্য :

(1) চলকের সকল মানগুলি যদি সমান হয় তাহলে ঐ মানগুলির সমক-বিচ্যুতি হবে শূন্য। এর বিপরীতও প্রযোজ্য হয়।

প্রমাণ : ধরি x চলকটির n সংখ্যক মান x_i (যেখানে $i = 1$ থেকে n) $= c$ প্রতিটি i-এর জন্য।

অতএব $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c = c$

তাহলে

বিপরীতভাবে ধরি $\sigma = 0$

অথবা $\sigma^2 = 0$

অথবা $\frac{1}{n}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 0$

অথবা , এটা সম্ভব হতে পারে

যদি $x_i - \bar{x} = 0$ হয়

বা হয় প্রতিটি i-এর জন্য

অতএব যদি সমক বিচ্যুতি শূন্য হয় তাহলে চলকটির সকল মান পরস্পর সমান হবে।

(ii) সমক বিচ্যুতি ভিত্তির বা কেন্দ্রের পরিবর্তন নিরপেক্ষ (independents of origin) হয় কিন্তু পরিমাপ মাত্রার পরিবর্তনের (Change of scale) উপর নির্ভর করে।

প্রমাণ : ধরি x ও y দুটি চলকের মধ্যে সমকটি হল $y = a + bx$, এবং চলক দুটির সমক বিচ্যুতি হল যথাক্রমে σ_x, σ_y সেখানে a হল মূল অবস্থান বা ভিত্তি এবং b হল পরিমাপ মাত্রা (Scale)

$$y = a + bx$$

অতএব $y_i = a + bx_i \quad i = 1, 2, \ldots\ldots n$

তাহলে [illegible]

সুতরাং [illegible] প্রতি i-এর জন্য

$\therefore$

অথবা $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2 = b^2\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$

অথবা $\sigma y^2 = b^2 \sigma x^2$

অথবা

সুতরাং সমক বিচ্যুতি মূল বিন্দু (= a) নিরপেক্ষ কিন্তু পরিমাপ মাত্রার (= b) উপর নির্ভরশীল। যদি প্রতিটি মান কোন একটি ধ্রুবক দ্বারা গুণ কিম্বা ভাগ করা হয়, তাহলে সমক বিচ্যুতিও সেইভাবে প্রভাবিত হবে।

(iii) ধরা যাক একটি চলক x-এর দুটি গুচ্ছ বা শ্রেণীর মান দেওয়া আছে। যদি একটি শ্রেণীর n_1 সংখ্যক মানের যৌগিক গড় এবং সমক বিচ্যুতি হয় যথাক্রমে এবং এবং অপর শ্রেণীটির

n_2 সংখ্যক মানের যৌগিক গড় এবং সমক বিচ্যুতি যদি হয় যথাক্রমে   এবং   তাহলে সম্মিলিত রাশিতথ্যমালার সম্যক বিচ্যুতি নিম্নলিখিত সূত্র থেকে পাওয়া যাবে :

যেখানে

এই সূত্রটি আরও সাধারণভাবে প্রকাশ করা যায় (চলকের যে কোন সংখ্যক মান শ্রেণীর জন্য)

$$N\sigma^2 = \sum n_i \sigma i^2 + \sum n_i d_i^2$$

যেখানে   এবং $\bar{x}$ হল শ্রেণীগুলির সংযুক্ত যৌগিক গড় বা

উদাহরণ : 90 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের প্রদত্ত পরিসংখ্যা ছক থেকে সমক বিচ্যুতি নির্ণয় কর :

প্রাপ্ত নম্বর :	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99
ছাত্র সংখ্যা :	5	12	15	20	18	10	6	4

[I.C.W.A. June '76]

সমক বিচ্যুতি নির্ণয়ের জন্য ছক

শ্রেণীঅন্তর (1)	পরিসংখ্যা (f) (2)	মধ্যক (x) (3)	(4)	f_y (5)	(6)
20-29	5	24·5	–3	–15	45
30-39	12	34·5	–2	–24	48
40-49	15	44·5	–1	–15	15
50-59	20	54·5	0	0	0
60-69	18	64·5	1	18	18
70-79	10	74·5	2	20	40
80-89	6	84·5	3	18	54
90-99	4	94·5	4	16	64
Total	90	—	—	18	284

তাহলে $\sigma_x = b\sigma_y$, এক্ষেত্রে 4 নং স্তম্ভে $y = \dfrac{x - 54{\cdot}5}{10}$

অতএব $a = 54{\cdot}5$ এবং $b = 10$

$$\sigma_y = \sqrt{3{\cdot}116} = 1{\cdot}77$$

$$\therefore \quad \sigma_x = 10 \times 1{\cdot}77 = 17{\cdot}7$$

সমক বিচ্যুতির ক্ষেত্রে হল বিস্তারাঙ্ক (Co-efficient of dispersion)। বিস্তারাঙ্ক অনেক সময় শতকরা হিসাবে প্রকাশ করা হয়। শতকরা হিসাবে প্রকাশিত বিস্তারাঙ্ককে ভেদাঙ্ক বা ভেদসহগ (Co-efficientof variation) বলা হয়,

সুতরাং ভেদাঙ্ক = $\times$ 100

অনুশীলনী

1. একটি গুণগত লক্ষণ এবং একটি চলকের মধ্যে পার্থক্য দেখাও। প্রতিটির উদাহরণ দাও।
2. বিচ্ছিন্ন চলক ও অবিচ্ছিন্ন চলকের মধ্যে পার্থক্য নিরূপণ কর। প্রতিটির উদাহরণ দাও।
3. ধারণাগুলি ব্যাখ্যা কর : শ্রেণী সীমা, শ্রেণী সীমান্ত, পরিসংখ্যা ঘনত্ব, শ্রেণী মধ্যক।
4. হিস্টগ্রামের সংজ্ঞা দাও এবং কিভাবে হিস্টগ্রাম অঙ্কন করা হয়?
5. অগিভ (Ogiv) কি? কিভাবে তুমি একটি অগিভ অঙ্কন করবে?
6. নিম্নের পরিসংখ্যা বিভাজনের জন্য হিস্টগ্রাম ও অগিভ অঙ্কন কর :

ছাত্রদের উচ্চতা (সেন্টিমিটারে) :	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ছাত্রদের সংখ্যা :	9	12	21	26	17	9	3	2	1

7. নিম্নলিখিত রাশিতথ্যসমূহ থেকে একটি পরিসংখ্যা বিভাজন তৈরী কর :

7, 4, 3, 5, 6   3, 3, 2, 4, 3   4, 3, 3, 4, 4

3, 2, 2, 4, 3   5, 4, 3, 4, 3   4, 3, 1, 2, 3

8. প্রতি মিনিট অন্তর গৃহীত টেলিফোন কলের সংখ্যা সম্পর্কিত নিম্নের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় কর:

টেলিফোনের কলের সংখ্যা :	0	1	2	3	4	5	6	7	8
পরিসংখ্যা :	1	22	31	43	51	40	35	15	3

[Ans. : 3·90, 4, 4]

9. নিম্নের পরিসংখ্যা বিভাজনের থেকে প্রাপ্ত যৌগিক গড় হল 67·45 ইঞ্চি। f_1-এর মান নির্ণয় কর :

উচ্চতা (ইঞ্চিতে) :	60-62	63-65	66-68	69-71	72-74
পরিসংখ্যা :	15	54	f_1	81	24

[Ans. : 126]

10. নিম্নলিখিত রাশিতথ্যসমূহ থেকে মধ্যমা নির্ণয় করো :

শ্রেণীমধ্যক :	115	125	135	145	155	165	175	185	195	মোট
পরিসংখ্যা :	6	25	48	72	116	60	38	22	3	390

[Ans. : 153·8]

11. নিম্নলিখিত রাশিতথ্যসমূহের জন্য মধ্যমা থেকে গড় বিচ্যুতি নির্ণয় কর :

শ্রেণীঅন্তর :	2-4	4-6	6-8	8-10
পরিসংখ্যা :	3	4	2	1

[Ans. : 1·4]

12. নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে যৌগিক গড় ও সমক বিচ্যুতি নির্ণয় কর :

স্কোর :	4-5	6-7	8-9	10-11	12-13	14-15	মোট
পরিসংখ্যা :	4	10	20	15	8	3	60

[Ans. : 9·23, 2·48]

২.৩ দ্বিচলক রাশিতথ্যের বিশ্লেষণ (Analysis of Bivariate Data)

কোন এক গোষ্ঠীর জন্য দুটি চলকের যুগপৎ নথিভুক্ত রাশিতথ্যসমূহ দ্বিচলক রাশিতথ্য (Bivariate data) বলে অভিহিত হয়। দ্বিচলক রাশিতথ্যের উদাহরণ হল : একটি শ্রেণীর ছাত্রদের ওজন ও উচ্চতার যুগপৎ রাশিতথ্যসমূহ অথবা কোন একটি অঞ্চলে বৃষ্টিপাত ও একর পিছু উৎপাদনের পরিমাণ সংক্রান্ত রাশিতথ্যসমূহ, অথবা কিছু সংখ্যক পরিবারের আয় ও ব্যয়ের রাশিতথ্যসমূহ। একই সঙ্গে দুটি চলকের মান সমন্বিত রাশিতথ্যসমূহ বিশ্লেষণের জন্য নতুন পদ্ধতি গ্রহণের প্রয়োজন হয়। অবশ্য প্রতিটি চলকের মান নির্দেশিত রাশিগুলিকে স্বতন্ত্রভাবে ধরে প্রতিটি চলকের বিভিন্ন পরিমাপ, যথা—গড় এবং সমক বিচ্যুতি ($\bar{x}, \sigma_x, \bar{y}, \sigma_y$ যেখানে x ও y হল একটি গোষ্ঠীর স্বতন্ত্র চলকদ্বয়) পাওয়া যায়। দ্বিচলক রাশিতথ্যসমূহ বিশ্লেষণের ক্ষেত্রে প্রধানত দুটি বিষয় বিচার করতে হয়। **প্রথমত:** দুটি চলকের মধ্যে যদি সমন্ধ বা যোগ (Association) থাকে তার মাত্রা ও প্রকৃতি বিচার করতে হয়, **দ্বিতীয়ত:** যদি চলক দুটির মধ্যে সম্বন্ধ বা যোগসূত্র রয়েছে দেখা যায় তাহলে চলক দুটির মধ্যে একটিকে (নির্ভরশীল চলকে) অন্যটির (নিরপেক্ষ চলকের) গাণিতিক অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করে, নিরপেক্ষ চলকের প্রতিটি মানের জন্য পরাধীন চলকটির মান বিচার করা হয় বা পাওয়া যায়। প্রথম বিষয়ের পর্যালোচনা যা চলক দুটির যৌথ মান পরিবর্তনের পারস্পরিক সম্বন্ধ জ্ঞাপক তা হল **সহগতি বিশ্লেষণ** (Correlation analysis) সহগতি বিশ্লেষণে চলক দুটির পারস্পরিক সম্বন্ধের পরিমাপক রূপে যে গুণাঙ্কের ধারণাটির অবতারণা করা হয় তাকে **সহগতি গুণাঙ্ক** (Correlation coefficient) বলা হয়। দ্বিতীয় বিষয়টির পর্যালোচনায় যেখানে চলক দুটিকে একটি গাণিতিক অপেক্ষক প্রকাশ করার প্রয়োজন হয়। তা **নির্ভরণ বিশ্লেষণ** (Analysis of regression) বলে অভিহিত হয়। দ্বিচলক তথ্য সমন্বিত উল্লিখিত আলোচনা হল দ্বিচলক বিশ্লেষণ (Bivariate Analysis)।

(ক) দ্বিচলক পরিসংখ্যা বিভাজন (Bivariate friquency distribution) : যখন দ্বিচলক রাশিতথ্যসমূহ সংখ্যায় খুব বেশি হয় তখন ওগুলি একটি দুইমুখী পরিসংখ্যা ছকের মাধ্যমে সারিকৃত করা হয়। এরূপ **দ্বিচলক রাশিতথ্যসমূহের দ্বিমুখী পরিসংখ্যা বিভাজনকে দ্বিচলক পরিসংখ্যা বিভাজন বলা হয়।** এরূপ পরিসংখ্যা বিভাজন তৈরী করার ক্ষেত্রে প্রতিটি চলকের জন্য উপযুক্ত সংখ্যক শ্রেণী নেওয়া হয়। ধরা যাক, x ও y চলক দুটির n জোড়া মান দেওয়া আছে। এবার x-এর জন্য K সংখ্যক শ্রেণী এবং y-এর জন্য L সংখ্যক শ্রেণি নেওয়া হলে দ্বিচলক পরিসংখ্যা ছকটিতে $K \times L$ কোষ (Cell) থাকবে এবং সমূহ শ্রেণীর পরিসংখ্যাগুলি নিয়ে তৈরী হবে দ্বিচলক পরিসংখ্যা বিভাজন।

দ্বিচলক পরিসংখ্যা বিভাজন সাধারণ আকার নিম্নের ছকটিতে প্রকাশ করা হল :

ছক নং 3.1

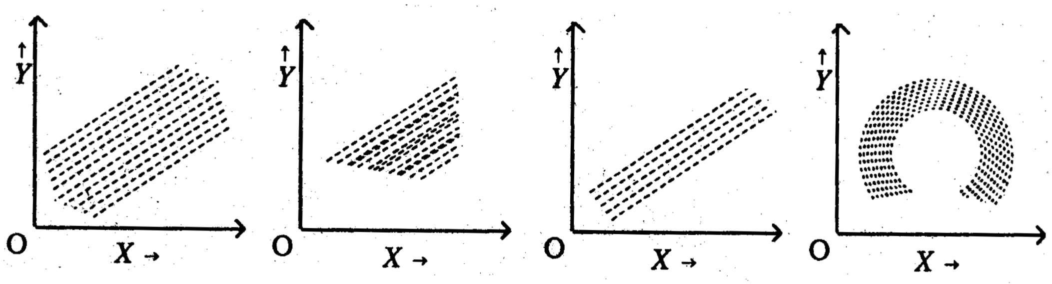
একটি দ্বিচলক পরিসংখ্যা বিভাজন যেখানে x ও y চলক দুটির n সংখ্যক মান সন্নিবেশিত হয়েছে :

$x \backslash y$	$y_0 - y_1$	$y_1 - y_2$	......	$y_{j\text{-}1} - y_j$	......	l $y_{i-1}\ y_L$	মোট
$x_0 – x_1$ $x_1 – x_2$ . . . . $x_{i\text{-}1} – x_i$ . . . . $x_{k\text{-}1} – x_k$	f_{ll} f_{21} f_{i1} f_{K1}	f_{12} f_{22} f_{i2} f_{K2}		f_{1j} f_{2j} f_{ij} f_{Kj}		f_{1L} f_{2L} f_{iL} f_{KL}	f_{10} f_{20} f_{i0} f_{K0}
মোট	f_{01}	f_{02}	......	f_{0j}		f_{0L}	n

এক্ষেত্রে $f_{i0} = \Sigma f_{ij}$ এবং $f_{oj} = \Sigma f_{ij}$

উপরোক্ত ছকটিতে পরিসংখ্যাগুলির সারি সমষ্টি (row-totals) হল বিভিন্ন y এর মানগুলির সংখ্যা না ধরে x-শ্রেণীর মানগুলির সংখ্যা। সুতরাং প্রথম স্তম্ভ ও শেষ স্তম্ভ দুটি হল x চলকের পরিসংখ্যা বিভাজন। যা দ্বিচলক বিভাজন সম্পর্কিত x-এর প্রান্তিক বিভাজন (Marginal distribution of x)। অনুরূপভাবে প্রথম সারি ও শেষ সারি যেখানে y-এর বিভিন্ন শ্রেণী ও সংশ্লিষ্ট পরিসংখ্যাগুলি প্রকাশিত তা হল y চলকের পরিসংখ্যা বিভাজন বা y-এর প্রান্তিক বিভাজন (Marginal distribution of y)। আবার পরিসংখ্যাগুলির যে কোন বিশেষ স্তম্ভ দ্বারা y-এর প্রদত্ত মান সমূহের জন্য x-এর বিভিন্ন শ্রেণীর মানগুলির সংখ্য প্রকাশ পায়। অনুরূপভাবে পরিসংখ্যাগুলির যে কোন বিশেষ সারি দ্বারা প্রদত্ত x-এর জন্য y-এর বিভাজনের বিন্যাস (arrange of distribution of y for given x) প্রকাশিত হয়।

(খ) বিক্ষেপণ চিত্র (Scatter diagram) : বিক্ষেপণ চিত্র হল দ্বিচলক রাশিতথ্যসমূহের চিত্রের আকারে প্রকাশ। ধরা যাক x ও y চলক দুটির n সংখ্যক মান যুগল (n Pairs of values) দেওয়া আছে। অনুভূমিক অক্ষে x-এবং উলম্ব অক্ষে y-এর মানগুলি নির্দেশিত একটি দু-অক্ষবিশিষ্ট সমতলে প্রদত্ত প্রতিটি মান যুগল একটি বিন্দু দ্বারা চিহ্নিত করা যায়। এভাবে n সংখ্যক মান যুগলের জন্য সকল বিন্দুগুলি সহ যে চিত্র অঙ্কন করা হয় তাকে বিক্ষেপণ চিত্র বলে। নিম্নে কয়েকটি **বিপেক্ষণ চিত্র** দেওয়া হল।



চিত্র 3.1 (a)　　চিত্র 3.1 (b)　　চিত্র 3.1 (c)　　চিত্র 3.1 (d)

বিক্ষেপণ চিত্র থেকে চলক দুটির মধ্যে যোগসূত্র বা সম্পর্কের প্রকৃতি ও প্রগাঢ়তা (Nature and intensity) সম্বন্ধে ধারণা পাওয়া যায়। 3.1(a) থেকে 3.1(d) চিত্রগুলি হল চার ধরনের দ্বিচলক রাশিতথ্যমালা। প্রথম তিনটি বিক্ষেপণ চিত্রে x ও y চলকের মধ্যে সরল সম্পর্ক (Linear association) প্রকাশ পেয়েছে ; কিন্তু 3.1(d) নং বিক্ষেপণ চিত্রে প্রদর্শিত চলক দুটির মধ্যে সম্পর্ক সরল নয় (Non-linear association)।

(গ) সহগতি (Correlation) : সহগতি বলতে দুটি চলকের মধ্যে পারস্পরিক যোগসূত্র বা নির্ভরশীলতা বোঝায়। চলক দুটির মধ্যে সম্পর্ক যদি এরূপ হয় যে একটির পরিমাণ বা মাত্রা (magnitude) পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে অপরটিরও পরিমাণ বা মাত্রার পরিবর্তন হয় তাহলে চলক দুটি সহগতিবদ্ধ (correlated) বলা হয়। সহগতি সরল হতে পারে অথবা সরল নাও হতে পারে। সুবিধার্থে সরল সহগতিমান নিয়ে আলোচনা করা হল।

চলক দুটি x ও y-গড়ে একই দিকে পরিবর্তিত হলে চলকদ্বয়ের মধ্যে ধনাত্মক বা সদৃশ সহগতি (Positive correlation) থাকে বলা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে সহগতি সহগাঙ্ক ($= r_{xy}$) ধনাত্মক হয়। পক্ষান্তরে চলক দ্বয়ের মান বিপরীত দিকে পরিবর্তিত হলে চলকদ্বয়ের মধ্যে ঋণাত্মক বা বিপরীত সহগতি (Negative correlation) রয়েছে বলে ধরা হয় এবং তখন সহগতি সহগাঙ্ক হয় ঋণাত্মক।

আবার চলকদ্বয়ের মধ্যে একটির মান পরিবর্তিত হলে অন্যটির মান যদি অপরিবর্তিত থাকে তাহলে ওদের মধ্যে সহগতি নেই বলে ধরা হয় এবং তখন সহগতি সহগাঙ্ক মান হয় শূন্য ($r_{xy} = 0$)।

(ঘ) গুণন পরিঘাত সহগতি সহগাঙ্ক অথবা কার্ল পিয়ারসন সহগতি সহগাঙ্ক (Product moment Correlation Coefficient of Karl Pearson's Coefficient of Correlation) : গুণন পরিঘাত সহগতি সহগাঙ্ক হল দুটি চলকের মধ্যে সরল সম্পর্কের একটি পরিমাপ (Measure) বিশেষ। x ও y চলক দুটির মধ্যে সহগতি সহগাঙ্ক সাধারণত r_{xy} অথবা শুধু r দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত হয়।

$$, \quad \left[r_{xy} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{\text{Var}\,x \quad \text{Var}\,y}} \right]$$

যদি (x_i, y_i) $(i = 1, 2 \ldots . n)$ হয় x ও y চলক দুটির n সংখ্যক মান যুগল তাহলে

Cov (x, y) = সমভেদমান (x, y) = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$

যেখানে $\overline{x}$ এবং হল যথাক্রমে x ও y-এর যৌগিক গড়

$$=$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\right]$$

Var (x) = ভেদমান (x) $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2$

$$=$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]$$

অনুরূপভাবে,

Var (y) = ভেদমান (y) $= \frac{1}{n^2}\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]$

$$\therefore\ r_{xy} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{xy}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2}\ \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2}}$$

$$= \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\ \sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}$$

এই সূত্রটি শ্রেণীবদ্ধ নয় এমন রাশিতথ্যমালার সহগতি সহগাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য বিশেষভাবে উপযোগী হয়।

দুটি চালকের সহগতি সহগাঙ্ককে নিম্নলিখিতভাবেও প্রকাশ করা যায় :

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y}$$

যেখানে x ও y চলকদ্বয়ের যৌগিক গড় হল যথাক্রমে $\bar{x}, \bar{y}$ এবং সমক বিচ্যুতি হল যথাক্রমে σ_x, σ_y.

(ঙ) সহগতি সহগাঙ্ক-এর বৈশিষ্ট্য (Properties of Correlation Coefficient) :

(a) যেকোন দুটি চলকের সহগতি সহগাঙ্ক সম্পূর্ণরূপে একটি সংখ্যা (a pure number)—অর্থাৎ চলকগুলির পরিমাপ এককের নিরপেক্ষ (independent of units of measurement of the variables)। সহগতি সহগাঙ্কের এই বৈশিষ্ট্যটি এর সংজ্ঞা থেকে উল্লেখ করা যায়।

(b) x ও y চলক দুটির সহগতি সহগাঙ্ক r_{xy} কার্যত x ও y তে প্রতিসম (Symmetric) হয়—অর্থাৎ $r_{xy} = r_{yz}$

(c) সহগতি সহগাঙ্কের সংখ্যাগত মান চলকগুলির কেন্দ্র ও পরিমাপ মাত্রার পরিবর্তন নিরপেক্ষ হয় (independent of the change of origin and scales of the variables)

প্রমাণ : ধরি (x_i, y_i), $(i = 1, 2 \ldots. n)$ হল x এবং y চলক দুটির বিভিন্ন মানযুগল, নতুন দুটি চলক u এবং v নেওয়া হল যেখানে $u =$ এবং $v =$ এবং a, b, c, d হল যেকোন ধ্রুবক এবং $c \neq 0$ এবং $d \neq 0$.

তাহলে $(x_i,\ y_i)$ মানযুগলগুলি সংশ্লিষ্ট $(u_i,\ v_i)$ মানযুগলসমূহ হবে

অতএব $x_i = a + cu,$

এবং $\bar{x} = a + c\bar{u}$

$\therefore$

অনুরূপভাবে,

অতএব ভেদমান

$$= \frac{c^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(u_i - \bar{u}\right)^2$$

$$= \text{c}^2 \text{ ভেদমান (u)}$$

ভেদমান $(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ldots)^2$ [illegible]

$$= \frac{d^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(v_i - \bar{v}\right)^2 = d^2 \text{ ভেদমান } (v)$$

এবং সহভেদমান $(x,\ y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)$

$$= \frac{cd}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})$$

$$= cd \text{ সহভেদমান } (u,\ v)$$

অতএব, $r_{xy} = \dfrac{\text{সহভেদমান }(x,y)}{\sqrt{\text{ভেদমান }(x)}\sqrt{\text{ভেদমান }(y)}}$

$$= \frac{cd\,\text{[illegible]}\,(u,v)}{\sqrt{c^2\,\text{[illegible]}\,(u)}\sqrt{d^2\,\text{[illegible]}\,(v)}}$$

$$=$$

যখন c এবং d একই চিহ্ন যুক্ত হয় (same sign)—অর্থাৎ উভয় ধ্রুবক হয় ধনাত্মক কিম্বা ঋণাত্মক তখন $r_{xy} > 0$ হয় এবং উৎস ধ্রুবক (c এবং d) যদি বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয় তাহলে $r_{xy} > 0$ হয়।

(d) $-1 \leq r \leq 1$

ধরি (x_i, y_i) হল x ও y চলক দুটির n সংখ্যক মানযুগল যেখানে $i = 1, 2 \ldots. n$.

অতএব $r = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y}$

অথবা $r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}\right)$ [illegible]

অথবা $r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i q_i$ যেখানে

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = nr$$

আবার

$$= \frac{n\sigma_x^2}{\sigma_x^2} = n$$

এবং অনুরূপভাবে,

$$\sum_{i=1}^{n} q_i^2 = n$$

এখন $\sum_{i=1}^{n}(p_i + q_i)^2 \geq 0$ (বাস্তব সংখ্যার বর্গগুলি সর্বদা ধনাত্মক নতুবা শূন্য হয়)

অথবা $\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n} q_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} p_i q_i \geq 0$

অথবা $n + n + 24r \geq 0$

অথবা $2n(1 + r) \geq 0$

অথবা $1 + r \geq 0$

$\therefore\ r \geq -1$ .... (i)

আবার $\sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i)^2 \geq 0$

অথবা $\sum p_i^2 + \sum q_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} p_i q_i \geq 0$

অথবা $n + n - 2rn \geq 0$

অথবা $2n(1 - r) \geq 0$

অথবা $1 - r \geq 0$

অথবা $r \leq 1$ .... (ii)

(i) এবং (ii) থেকে প্রমাণিত হয় যে $-1 \leq r < 1$

(চ) শ্রেণীবদ্ধ রাশিতথ্যসমূহ থেকে সহগতি সহগাঙ্ক নির্ণয়ের সূত্র (Computation of Correlation Coefficient from Grouped Data) : ধরাযাক x ও y চলক দুটির n সংখ্যক মানযুগল একটি দ্বিচলক পরিসংখ্যা ছকে দেওয়া হয়েছে যেখানে x-এর জন্য K সংখ্যক শ্রেণী অন্তর এবং y-এর জন্য L সংখ্যক শ্রেণী অন্তর এবং সংশ্লিষ্ট পরিসংখ্যাসমূহ সন্নিবেশিত হয়েছে (3.1 নং ছক)। ধরা যাক f_{ij} হল (i, j) কোষের পরিসংখ্যা যেখানে $i = 1, 2\ .....\ K$ এবং $j = 1, 2\ ....\ L$. এবার যদি x_i এবং y_i যথাক্রমে x-এর i শ্রেণীর মধ্যক (Mid-value) এবং y-এর j শ্রেণীর মধ্যক হয় তাহলে

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{L} f_{ij}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K} f_{io}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_{oj}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}}$$

যেখানে $f_{io} = \sum_{j=1}^{L} f_{ij}$, $f_{oj} = \sum_{i=1}^{K} f_{ij}$, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K} f_{io} x_i$

এবং $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{L} f_{oj} y_j$

সহগতি সহগাঙ্ক নির্ণয়ের সুবিধার্থে x ও y-এর জন্য কেন্দ্র (origin) এবং পরিমাপের মাত্রা (scale) উভয়ই পরিবর্তন করা যায়।

ধরি $u = \frac{x-a}{c}$ এবং $v = \frac{y-b}{d}$ যেখানে a, b হল যথাক্রমে x ও y-এর প্রসারের মধ্যমান সন্নিকটস্থ শ্রেণীমধ্যক এবং c, d হল যথাক্রমে x ও y-এর শ্রেণী অন্তরের দৈর্ঘ্য c এবং d একই চিহ্নের (sign)।

$$r_{xy} = r_{uv} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i}^{K}\sum_{j}^{L} f_{ij}\left(u_i - \bar{u}\right)\left(v_j - \bar{v}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i}^{K} f_{io}\left(u_i - \bar{u}\right)^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j}^{L} f_{oj}\left(v_j - \bar{v}\right)^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i}^{K}\sum_{j}^{L} f_{ij}u_i v_j - \bar{u}\bar{v}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i}^{K} f_{io}u_i^2 - \bar{u}^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j}^{L} f_{oj}v_j^2 - \bar{v}^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i}^{K}\sum_{j}^{L} f_{ij} - \left(\sum_{i}^{K} f_{io}u_i\right)\left(\sum_{j}^{L} f_{oj}v_j\right)}{\sqrt{n\sum_{i}^{K} f_{io}u_j^2 - \left(\sum_{i}^{K} f_{io}u_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{j}^{L} f_{oj}v_j^2 - \left(\sum_{j}^{L} f_{oj}v_j\right)^2}}$$

উদাহরণ 1 : প্রদত্ত তথ্য হতে স্বামী এবং স্ত্রীর বয়সের সহগাঙ্ক নির্ণয় কর :

H :	23	27	28	29	30	31	33	35	36	39	
W :	18	22	23	24	25	26	28	29	30	32	[I.C.W.A]

সমাধান : ধরাযাক স্বামীর বয়স x এবং স্ত্রীর বয়স y

কেন্দ্রের পরিবর্তনে যেহেতু সহগাঙ্ক (r) অপরিবর্তিতথাকে x ও y-এর কেন্দ্র নিম্নলিখিতভাবে পরিবর্তন সাপেক্ষে সহগাঙ্ক নির্ণয় করা হল : $u_i = x_i - 31,\ v_i = y_i - 25$

সহগাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য ছক

x (1)	y (2)	$u = x - 31$ (3)	$v = y - 25$ (4)	u^2 (5)	v^2 (6)	uv (7)
23	18	–8	–7	64	49	56
27	22	–4	–3	16	9	12
28	23	–3	–2	9	4	6
29	24	–2	–1	4	1	2
30	25	–1	0	1	0	0
31	26	0	1	0	1	0
33	28	1	3	4	9	6
35	29	2	4	16	16	16
36	30	3	5	25	25	25
39	32	6	7	64	49	56
মোট 311	257	1	7	203	163	179

স্বামী ও স্ত্রী চলক দুটির সংখ্যা হল $n = 10$

$r_{xy} = r_{uv} =$

$$= \frac{1790 - 7}{\sqrt{2030 - 1}\sqrt{1630 - 49}} = \frac{1783}{\sqrt{2029}\sqrt{1581}} = \frac{1783}{\sqrt{3207849}}$$

$$= \frac{1783}{1791{\cdot}0469} = {\cdot}9955 \quad = +\ {\cdot}996 \text{ (আসন্ন)}$$

উদাহরণ 2 : ছাত্রদের ইংরেজীতে (= x) এবং গণিতে (= y) প্রাপ্ত নম্বরের একটি দ্বিচলক পরিসংখ্যা

বিভাজনে নিম্নের ছকে প্রকাশ করা হল—এই দ্বিচলক পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে ইংরেজী ও গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের সহগাঙ্ক নির্ণয় কর :

x \ y	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	মোট
0–20	4	2				
20–40	6	5	3	1		
40–60		9	4	2	1	
60–80		7	4	1		
80–100			1			
মোট	10	23	12	4	1	50

ইংরেজী ও গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের সহগাঙ্ক নির্ণয়ের গণনার জন্য ছক

	শ্রেণীমধ্যক (x_i)	17·5	22·5	27·5	32·5	37·5					
শ্রেণী মধ্যক (y_i)	ui \ v_j	–2	–1	0	1	2	f_{oi}	$f_{oj}v_j$	$f_{oj}v_j^2$	u_j	v_ju_j
10	–2	4	2				6	–12	24	–10	20
30	–1	6	5	3	1		15	–15	15	–16	16
50	0		9	4	2	1	16	0	0	–5	0
70	1		7	4	1		12	12	12	–6	–6
90	2			1			1	2	4	0	0
f_{io}		10	23	12	4	1	50	–13	55	–37	30
$f_{io}\ u_i$		–20	–23	0	4	2	–37				
$f_{io}u_i^2$		40	23	0	4	4	71				
v_i		–14	–2	3	0	0	–13				
$u_i\ v_i$		28	2	0	0	0	30				

মিলিয়ে নেওয়া (Cheek)