«ìôôÇæ

væçìèä ¼Ûì» âk èûxèûóôìÜíúë tìçô vxèËë äæô vö øìÒ¹â «ûèçç ðíúí×• çìë ÜáËéú ¾ûèÐ,ô ð"Ü «èçèå èÐáìÇéíô çìë ø×`óâíçì vôìíæì èû»íú ¼ì@‡ìèæô (honours) ·tíë èÐáì†ðíËë ¼íöìù ôíë vóßúì¯ Í-váír ûôèkùçÛìíû çìíóë †ðË áâçì Ììíù vÇíôÈ Ìæâìæ ôíë æì èæíú èæúç âÜôìúíæë âÓô èóíú v¼åì èòë ôëìÈ öèkök¯ v¼È Ìæöìúé ÍôìèÓô èû»íú ¼ì@‡ìèæô âìíæë øìÒ-ÅøôëË ëè÷ç ðíúí× ß ðíE×_ öìë âÜ ôìÒìíâì èòëéôç ðíúí× Íôèå ¼è÷èQç øìÒ¹íâë èÛè+íç¯ vô\ ß ëìíäôë Ì†ùËô èûxèûóôìÜú¼âíðë øìÒ¹â Ìæ¼ëË ôíë çìë ÌìóÐ ÅøôëËIèÜë ¼â^íú ëè÷ç ðíúí× ÍÈ øìÒ¹â¯ v¼È¼íà ök ðíúí× ÌíÓôçûô èû»íú æçæ çÇô• âææ ß èûíx»íËë ¼âìíûÐ¯

óë-¼˜ìëé èÐáìóìíæë téôç øºèç Ìæ¼ëË ôíëÈ ÍÈ¼û øìÒ-ÅøôëË vÜÔìë ôìä ÷Üí×¯ èûèÛ^ èû»íúë ÌèÛÚ øè„çâ„Üéë ¼ìðìöô Í ôìíä Ìøèëðìö Íû¤ öìíóë èæëÜ¼ øèëxíâ vÜÔì• ¼@øìóæì çÇì èûæô¼ìôâ ¼¼@ø^ ðíE× çìëì ¼ôíÜÈ Óæôûìíóë øìr¯ Ìì¼íÜ• Íëì ¼ôíÜÈ ÌÜíáô vÇíô óë¼˜ìëé èÐáìóìíæë ôìö¹íâ Ì¤Ð èæíE×æ/ öÔæÈ vôìíæì èÐáìÇé ÍÈ øìÒôû·tèæ÷íúë ¼ìðìöô væíûæ• çÔæÈ èçèæ ôìöç ÍôìèÓô èÐáôâ„Üéë øíëìá ÌÓôìøæìë çìûÁ ¼èûÓì vøíú öìíE×æ¯

ÍÈ¼û øìÒ-ÅøôëíËë ÷÷ì ß ÌæÐéÜíæ öçåì âíæìèæíûÐ ôëíûæ vôìíæì èÐáìÇé• èû»íúë ùÛéíë öìßúì çìë øíá ççÈ ¼ðä ðíû¯ èû»úû·t· öìíç èæíäë v÷‚ìú ÌèÓùç ðú• øìÒ-ÅøôëíËë Ûì»ì ß Åøòìøæì çìë Åøíöìùé ôëìë èóíô ¼ût·íë æäë ëìÔì ðíúí×¯ Íë øë vöÔìíæ öçåô Ìtø‚çì vóÔì víû• èûxèûóôìÜíúë èûèÛ^ øìÒíôí\ èæök èÐáì-¼ðìúôùíËë øëìâíÐ çìë èæë¼æ ÌûÐôÈ ðíç øìëíû¯ çìë ßøë «èç øöìíúë vÐí» «ó+ ÌæÐéÜæé ß Ìèçèëk Úìæ Ìäíæë äæô †p-èæíóÐ èÐáìÇéë †ðË áâçì ß è÷QìÐéÜçì ûèºë ¼ðìúô ðíû¯

ÍÈ ÌèÛæû Ììíúìäíæë vûÐèô× «úì¼È Íôæß øëéáìâÜô_ Ìíæô váír Ííôûìíë «Çâ øóíáø¯ tÛìûçÈ rèå-èû÷ôèç èô× èô× Çìôíç øìíë• öì ÌûÐôÈ ¼¤íÐìÓæ ß øèëâìäæìë Ìíøáì ëìíÔ¯ ¼ìÓìëËÛìíû ÌìÐì ôëì öìú• ûôìøôçë ûôûðìíëë âÓô èóíú øìÒ-ÅøôëËIèÜ ¼ûr ¼âìóç ðíû¯

ÌÓôìèøôì 'õ¿' âèËâìÜì óì¼
Åøì÷ìö

çç¿ú øæâ°Ë ¥ ÿâ• 2010

Ûìëç ¼ëôìíëë óëèÐáì ø»íóë èûèÓ Ìæöìúé Íû¤ ÌÇìæôíÜ¨ âè°ç¯
Printed in accordance with the regulations and financial assistance
of the Distance Education Council, Government of India.

øèëè÷èç

èû»ú ¥ ÑèË×ô ûìèËäö ¼ì@‡ìèæô ıtıë

øìÒ¹â : E C O : 01 øöìú : 05-06

øöìú : 05

		ë÷æì	¼@øìóæì
Íôô	**20**	Ì Óöìøô Ì èâú Û»Ë ëìú	Ì Óöìøô Ì ëË ôâìë ¼ìæöìÜ• Ì Óöìøô ôæô ôìèQ óìÐ
Íôô	**21**	-Ñ-	Ì Óöìøô Ì âë øìr• Ì Óöìèøôì Ì Jæì ÷öìåìäé
Íôô	**22**	-Ñ-	-Ñ-
Íôô	**23**	-Ñ-	-Ñ-
Íôô	**24**	-Ñ-	-Ñ-

øöìú : 06

		ë÷æì	¼@øìóæì
Íôô	**25**	õ¿ ¼æÁ ôâìë ¼ëôìë Ì Óöìøô Ì èâú Û»Ë ëìú	Ì Óöìøô ÐèkôìQ ÷¹ûçé
Íôô	**26**	-Ñ-	-Ñ-
Íôô	**27**	-Ñ-	-Ñ-

vÙì»Ëì

ÍÈ øìÒ-¼¤ôÜíæë ¼âóú tı& væçìèä ¼Ûì» âk èûxèûóöìÜíúë Pìëì ¼¤ëèáç¯ èûxèûóöìÜú ôçøíáë èÜèÔç Ì æâèç ×ì§ì Íë vôìæ Ì ¤íÐë øæâ°Ë ûì vôìæÛìíû Åºèç ¼@øË èæè»º¯

xé è¼çì¤™ Ûªì÷ìöö

èæûaô

væçÌèä ¼ÛÌ» âk èûxèûóÖÌÜú

E C O – 1

‘tÌçô øÌÒ¹â’

øÖÌú

5

øöÌú

6

একক ২০. ক. ❑ অনুপাত (Ratio) ও সমানুপাত (Proportion)

গঠন

২০.ক.১ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি সমজাতীয় এবং একই এককের দুটি রাশি বা পদের পরিমাণগত তুলনামূলক বিচার করতে পারবেন।

২০.ক.২ অনুপাত বলতে কী বোঝায়? (What is meant by Ratio ?)

একটি রাশি বা পদ (যেমন 'a' বা '2') এবং অপর একটি সমজাতীয় (Homogenous) রাশি বা পদ-এর (যেমন 'b' বা '3') মধ্যে পরিমাণগত (Quantitative) তুলনামূলক যে সম্পর্ক থাকে তা'কে বলা হয় অনুপাত। অর্থাৎ, সমজাতীয় ও একই একক (Unit)-এর প্রকাশ করা দু'টি রাশির মধ্যে একটি রাশি অপর রাশির তুলনায় কতগুণ বড় বা ছোট তা যার দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাকে বলা হয় রাশি দু'টির অনুপাত।

সাধারণভাবে বলা যায় যে, 'a' ও 'b' যদি দুটি **সমজাতীয় রাশি হয়,** তবে 'a' ও 'b' (যেখানে $b \neq 0$, অর্থাৎ b is not equal to '0')—এই দুই **রাশির অনুপাতকে $a : b$ আকারে প্রকাশ করা হয়।** এই প্রসঙ্গে বলা প্রয়োজন যে, দু'টি রাশির **অনুপাত বলতে রাশি দু'টির ভাগফলকেই বোঝায়।**

যেমন ঃ $a : b = \frac{a}{b}$

২০.ক.৩ অনুপাত-এর গুরুত্ব কোন দু'টি রাশির অনুপাত দ্বারা রাশি দুটির একটি অপরটি অপেক্ষা কতগুণ বড় বা ছোট তা জানা যায়।

গণিতে এবং বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় সাধারণত সমজাতীয় (বা সমসত্ত্ব) রাশির অনুপাত ব্যবহৃত হয়। একটি উদাহরণ দিলে বক্তব্যটি পরিষ্কার হবে। আমরা সবাই লক্ষ্য করেছি যে, ম্যাপ-এ সবসময় একটি **স্কেল (Scale)** দেওয়া থাকে যেমন, 1 : 1,000,000 [অর্থাৎ, 1 সেমি = 1,000,000 সেমি]। এর অর্থ হল ম্যাপে প্রদর্শিত দুটি স্থানের প্রকৃত দূরত্ব 10 কিলোমিটার হলে ($\because$ 1,000,000 সেমি = 10 কিলোমিটার) ম্যাপে সেই দূরত্বকে 1 সেন্টিমিটার হিসাবে দেখানো হয়েছে।

২০.ক.৪ অনুপাত-এর রাশি বা পদ-এর নাম

'a' ও 'b'-এর দুই রাশি বা পদ যদি সমজাতীয় হয়, তবে 'a' ও 'b' রাশি দু'টির অনুপাত হল a : b বা $\frac{a}{b}$। এখানে **'a' ও 'b'-কে অনুপাতটির রাশি বা পদ বলা হয়। 'a' রাশি** বা **পদ**-কে বলা হয় **'পূর্বরাশি'** বা **'পূর্বপদ'** (Antecedent), আর **'b' রাশি বা পদ**-কে বলা হয় **'উত্তররাশি'** বা **'উত্তরপদ'** (Consequent)।

২০.ক.৫ অনুপাত-এর 'একক' (Unit)

সমজাতীয় দু'টি রাশি বা পদ-এর অনুপাত নির্ণয় করতে হলে রাশি বা পদ দু'টিকে একই 'একক'-এ প্রকাশ করতে হয়। যেমন '3 টাকা' ও '60 পয়সা'—এই দুই রাশি বা পদ একই 'একক'-এ প্রকাশ করা হয়নি। সুতরাং, '3 টাকা'-কে 'পয়সা'-য় প্রকাশ করতে হবে, যা হবে '300 পয়সা'। এখন রাশি দু'টি সমজাতীয় ও একই এককে প্রকাশিত হ'ল। সমজাতীয় ও একই একক-এ (পয়সা) প্রকাশিত রাশি দু'টির অনুপাত হল— 300 পয়সা : 60 পয়সা বা 300 : 60

সমজাতীয় ও একই একক-এ প্রকাশিত দু'টি রাশির অনুপাত নির্ণয় করতে হলে প্রথম রাশি বা 'পূর্বপদ'-কে দ্বিতীয় রাশি বা 'উত্তর পদ' দিয়ে ভাগ করতে হবে। অর্থাৎ, $300 : 60 = \frac{300}{60}$। এ-থেকে বোঝা যায় যে, একটি পদ (300 পয়সা) অপর পদ থেকে 5 গুণ বড়।

অন্য একটি উদাহরণ ঃ '7 ফুট' ও '1 গজ'—এই দুই রাশিকে একই একক-এ প্রকাশ করলে দাঁড়ায়—'7 ফুট' ও '3 ফুট' (কেননা 1 গজ = 3 ফুট)। সুতরাং, রাশি দুটির অনুপাত হ'ল 7 ফুট : 3 ফুট বা $7 : 3$ বা $\frac{7}{3}$।

২০.ক.৬ অনুপাত একটি শুদ্ধ সংখ্যা (Abstract Number) এবং একটি ভগ্নাংশ

এই প্রসঙ্গে মনে রাখতে হবে যে, যেহেতু অনুপাত-কে সমজাতীয় ও একই এককে প্রকাশিত দু'টি রাশির ভাগফল দ্বারা প্রকাশ করা হয় সেহেতু অনুপাত-এর কোন একক হয় না। উদাহরণ হিসাবে বলা যায়—'7 ফুট' ও '1 গজ'-এর (১ গজ = ৩ ফুট) অনুপাত হল $7 : 3 = \frac{7}{3}$ ($\frac{7}{3}$ **ফুট নয়**)। অর্থাৎ, **দু'টি রাশির অনুপাত** একটি **শুদ্ধ সংখ্যা** (Abstract Number)।

অনুপাত একটি ভগ্নাংশ। তাই ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে যে নিয়ম মানা হয় অনুপাতের ক্ষেত্রেও সেই নিয়ম মানা হয়।

২০.ক.৭ অনুপাত প্রসঙ্গে যা যা মনে রাখতে হবে

(১) সাম্যানুপাত ও বৈষম্যানুপাত ঃ

কোন **অনুপাতের দুটি পদ-এর মান** যদি **পরস্পর সমান হয়** তবে অনুপাত-টিকে বলা হয় **সাম্যানুপাত** (Ratio of Equality)। উদাহরণ, 3 : 3 হল একটি সাম্যানুপাত।

অন্যদিকে **অনুপাতের দু'টি পদ-এর মান** যদি **পরস্পর অসমান হয়** তবে অনুপাতটিকে বলা হয় **বৈষম্যানুপাত** (Ratio of Inequality)। উদাহরণ, 6 : 5 হ'ল একটি বৈষম্যানুপাত।

(২) গুরু অনুপাত ও লঘু অনুপাত ঃ

কোন **অনুপাত-এর পূর্বপদ** যদি অনুপাত-টির **উত্তরপদ থেকে বড় হয়,** তবে অনুপাত-টিকে বলা হয় **গুরু অনুপাত** (Ratio of Greater Inequality)। উদাহরণ, 6 : 3 — **এই অনুপাত-টিতে** পূর্বপদ '6' উত্তরপদ '3' থেকে বড়, অর্থাৎ $6>3$। তাই অনুপাত-টি হ'ল **একটি গুরু অনুপাত।**

অন্যদিকে, কোন **অনুপাত-এর পূর্বপদ** যদি অনুপাত-টির **উত্তরপদ থেকে ছোট হয়** তবে অনুপাত-টিকে বলা হয় **লঘু অনুপাত** (Ratio of Lesser Inequality)। উদাহরণ, 3 : 6 **অনুপাতটি হল লঘু অনুপাত** (কেননা, অনুপাত-টির পূর্বপদ '3' এর উত্তরপদ '6' **অপেক্ষা** ছোট। অর্থাৎ $3<6$। তাই অনুপাতটি হ'ল একটি লঘু অনুপাত।

(৩) ব্যস্ত অনুপাত (Inverse Ratio) :

দু'টি অনুপাতের মধ্যে **একটি অনুপাতের পূর্বপদ ও উত্তরপদ** যদি **অন্য অনুপাতটির যথাক্রমে উত্তরপদ ও পূর্বপদ হয়** তা'হলে অনুপাত দু'টির যে-কোন একটিকে অপরটির **বিপরীত** বা **ব্যস্ত অনুপাত** (Inverse Ratio) বা অন্যোনক (Reciprocal) বলা হবে। যেমন **2 : 3** — এই অনুপাতের **ব্যস্ত অনুপাত হ'ল 3 : 2**। তেমনি $a : b$ -এর ব্যস্ত অনুপাত হ'ল $b : a$।

ব্যস্ত অনুপাতকে **অন্য এক ভাবেও বলা যায়**। যেমন, যদি **দু'টি অনুপাতের গুণফল 1 হয়** তবে একটি অনুপাতকে অন্য অনুপাতটির **ব্যস্ত অনুপাত** বলা যায়, যেমন 2 : 3 বা $\frac{2}{3}$ এবং 3 : 2 বা $\frac{3}{2}$—এই দু'টি অনুপাতের গুণফল $\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\right)=1$। তাই এই অনুপাত দু'টি পরস্পর ব্যস্ত অনুপাত।

(৪) সরল অনুপাত (Simple Ratio) :

যদি কোন অনুপাতের **পদ** বা রাশি দু'টি **সমান** ও **সমজাতীয়** (Homogenous) বা সমসত্ত্ব হয়, তবে সেই অনুপাতকে বলা হবে সরল অনুপাত। যেমন, 4 টাকা : 6 টাকা, অথবা 3 ফুট : 5 ফুট।

(৫) মিশ্র অনুপাত (Compound Ratio) :

যদি দুই বা তার বেশি অনুপাত-এর **পূর্বপদগুলির ক্রমিক গুণফলকে পূর্বপদ ধরে** এর **উত্তরপদগুলির ক্রমিক গুণফল-কে উত্তরপদ ধরে** যে নূতন অনুপাত পাওয়া যাবে তাকে ঐ নির্দিষ্ট অনুপাত দু'টির মিশ্র অনুপাত বলা হবে। যেমন, 2 : 3, 4 : 7, 5 : 8 — এই তিনটি অনুপাতের মিশ্র অনুপাত হবে,

$$\frac{2\times4\times5}{3\times7\times8}=\frac{40}{168}=5:21।$$

অন্য একটি উদাহরণ হল, $a : b$; $b : c$; $c : d$ — এই তিনটি অনুপাতের মিশ্র অনুপাত **হ'ল,**

$$\frac{a\times b\times c}{b\times c\times d}=\frac{abc}{bcd}।$$

(৬) প্রমেয় ও অ-প্রমেয় অনুপাত :

যদি কোন **অনুপাতকে দু'টি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা** যায়, তবে তাকে বলা হবে **প্রমেয়** (Commensurable) অনুপাত। যেমন 3 : 2 বা $a : b$।

অন্যদিকে, যদি কোন **অনুপাতকে** দু'টি **পূর্নসংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা না যায়**, তবে সেই **অনুপাত-কে** বলা হয় **অমেয়** (Incommensurable) অনুপাত। উদাহরণ, $\sqrt{3}:2$ বা $\sqrt{a}:b$। **এই দুই অনুপাত-এ** $\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{a}$ **পূর্ণ সংখ্যা নয়।**

(৭) ক্রমিক অনুপাত (Continued Ratio) :

তিন বা তার বেশি সমজাতীয় পদের অনুপাতকে বলা হয় ক্রমিক অনুপাত। উদাহরণ :

4 : 3 : 5 : 6 বা $a : b : c : d$।

অন্য একটি উদাহরণ : যদি অরুণ, বরুণ ও কিরণ ও হীরণ-এর মাসিক বেতন যথাক্রমে 6000 টাকা, 8000 টাকা, 10,000 টাকা ও 12,000 টাকা হয়, তবে এই চারজনের মাসিক বেতনের ক্রমিক অনুপাত হবে, 6 : 8 : 10 : 12 বা 3 : 4 : 5 : 6।

২০.ক.৮ সমজাতীয় বা সমসত্ত্ব নয় এমন রাশি বা পদ-এর অনুপাত

প্রথমেই বলা হয়েছে যে, অনুপাত হ'ল একটি সমজাতীয় পদ ও অপর একটি সমজাতীয় পদের মধ্যে পরিমাণগত একটি তুলনামূলক সম্পর্ক। কিন্তু, অনেক সময় সমজাতীয় বা সমসত্ত্ব নয় এমন দু'টি পদ-এর অনুপাতের ব্যবহারও দেখা যায়। যেমন, **দূরত্ব** (Distance) ও **সময়** (Time) — **এ-দুটি পদ বা রাশি সমজাতীয় নয়**। আবার **ভর** (Mass) ও **আয়তন** (Area) — এ-দুটি পদ ও **সমজাতীয়** নয়। তা সত্ত্বেও **এই দুটি ভিন্নজাতীয় পদ**-এর **অনুপাত ব্যবহৃত হতে দেখা যায়**। এক্ষেত্রে **দূরত্ব** ও **সময়-এর অনুপাত**-কে বলা হয় **গতি** (Speed) এবং **ভর** ও **আয়তনের অনুপাতকে** বলা হয় **ঘনত্ব** (Density)। এ-থেকে এই সিদ্ধান্তে পৌঁছানো যায় যে, **অনুপাত** বলতে **কেবলমাত্র সমজাতীয় পদ-এর অনুপাতকে বোঝায় না।**

২০.ক.৯ অনুপাতের বিভিন্ন ধর্ম (Properties of Ratio)

অনুপাতের বিভিন্ন ধর্ম প্রতিপাদ্য (Proposition) **আকারে প্রকাশ** করা যায়, যথা :

● **প্রতিপাদ্য ১ :** (১) যদি কোন একটি অনুপাত-এর উভয় রাশি বা পদের সঙ্গে **একই ধনাত্মক** (+) **রাশি যোগ** করা হয় তবে :

[ক] **গুরু অনুপাত**-এর (অর্থাৎ যে অনুপাত-এ পূর্বপদ উত্তরপদ থেকে বড় ($a > b$ বা $3 > 2$) **ক্ষেত্রে** অনুপাত এর **মান কমে যায়** বা হ্রাস পায়।

উদাহরণ : 3 : 2 বা $\frac{3}{2}$, এই গুরু অনুপাতের উভয়পদের সঙ্গে 3 (এটি একটি ধনাত্মক বা Positive সংখ্যা) যোগ করলে নূতন যে অনুপাত তৈরি হবে তার মান দাঁড়াবে $\frac{3+3}{2+3} = \frac{6}{5}$।

ফলে, নূতন যে অনুপাত তৈরি হ'ল অর্থাৎ $\frac{6}{5}$ তা পূর্বের অনুপাত $\frac{3}{2}$ এর চেয়ে ছোট (কেননা $\frac{3}{2}$ থেকে $\frac{6}{5}$ বিয়োগ করা যায় $\left(\frac{3}{2} - \frac{6}{5} = \frac{15-12}{10} = \frac{3}{10}\right)$। অর্থাৎ নূতন অনুপাত $\frac{6}{5} < \frac{3}{2}$। এখানে পূর্বের অনুপাতের মান নূতন অনুপাতের মানের তুলনায় $\frac{1}{10}$ ভাগ কমে গেছে।

অন্য একটি উদাহরণ : $a : b$ অনুপাত-এ যদি $a > b$ (অর্থাৎ, এই অনুপাত একটি গুরু অনুপাত) তবে এই অনুপাত-এর উভয় রাশির সঙ্গে x ধনাত্মক রাশি যোগ করলে অনুপাতটির রূপ হবে :

$\frac{a+x}{b+x}$ যা $\frac{a}{b}$ (পূর্বের অনুপাত) থেকে ছোট অর্থাৎ $\frac{a+x}{b+x} < \frac{a}{b}$।

প্রমাণ ঃ $\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{a(b+x)-b(a+x)}{b(b+x)}=\frac{\cancel{ab}+ax-\cancel{ab}-bx}{b(b+x)}$

$=\frac{ax-bx}{b(b+x)}=\frac{x(a-b)}{b(b+x)}$

এখন প্রশ্নানুসারে $a>b$।

$\therefore$ $(a-b)$ ধনাত্মক (+) হবে।

অর্থাৎ $\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x}$ [এখানে $\frac{a}{b}$ এই অনুপাতের সঙ্গে ধনাত্মক রাশি 'x' যোগ করার ফলে $\frac{a+x}{b+x}$ এই নূতন রাশিটি পূর্বের রাশি $\frac{a}{b}$ থেকে ছোট হয়ে গেছে।]

[খ] লঘু অনুপাত-এর [অর্থাৎ, যে অনুপাত-এ উত্তরপদ পূর্বপদ অপেক্ষা বড় বা পূর্বপদ উত্তরপদ অপেক্ষা ছোট ($a>b$ or $b<a$)] **ক্ষেত্রে** অনুপাতের **মান বেড়ে যাবে। উদাহরণ ঃ** 2 3 বা $\frac{2}{3}$, এই লঘু অনুপাতের উভয় রাশির সঙ্গে 3 যোগ করলে **নূতন** তৈরি **অনুপাতের-এর** মান দাঁড়াবে $\frac{2+3}{3+3}=\frac{5}{6}$।

এই নূতন অনুপাতের মান পূর্বের অনুপাত (2 : 3 বা $\frac{2}{3}$) অপেক্ষা বেশি।

[প্রমাণ (ক)-এর অনুরূপ]

● **প্রতিপাদ্য ২ ঃ** (১) যদি কোন একটি অনুপাত-এর **উভয় পদ থেকে একই রাশি বিয়োগ** (–) করা হয়, তবে

[ক] গুরু অনুপাত-এর ক্ষেত্রে অনুপাত-এর মান বেড়ে যাবে [অর্থাৎ, প্রতিপাদ্য (১)-এর বিপরীত]। **উদাহরণ ঃ** 3 : 2 এই গুরু অনুপাত থেকে একই রাশি (ধরা যাক 1) বিয়োগ করা হল। তা'হলে নূতন অনুপাত হবে $\frac{3-1}{2-1}=\frac{2}{1}$ যা পূর্বের অনুপাত $\frac{3}{2}$ থেকে $\frac{1}{2}$ বড় $\left[\frac{2}{1}-\frac{3}{2}=\frac{4-3}{2}=\frac{1}{2}\right]$।

অন্য একটি উদাহরণ ঃ a > b বা $\frac{a}{b}$ এই অনুপাত থেকে x রাশি বিয়োগ করলে নূতন অনুপাত হবে $\frac{a-x}{b-x}$ যা $\frac{a}{b}$ থেকে বড় বা $\frac{a-x}{b-x}>\frac{a}{b}$ [প্রমাণ প্রতিপাদ্য ১-এর অনুরূপ]

[খ] লঘু অনুপাতের ক্ষেত্রে অনুপাতের **মান হ্রাস পাবে** [অর্থাৎ প্রতিপাদ্য (১)-এর বিপরীত]।

উদাহরণ ঃ 2 : 3 বা $\frac{2}{3}$। এই অনুপাত থেকে 1 বিয়োগ করা হলে নূতন অনুপাত হবে $\frac{2-1}{3-1}=\frac{1}{2}$ যা পূর্বের অনুপাত $\frac{2}{3}$ থেকে ছোট অর্থাৎ $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$।

অন্য একটি উদাহরণ : $a : b$ এই অনুপাতে যদি $a < b$ (অর্থাৎ অনুপাতটি লঘু অনুপাত) তবে :

$$\frac{a-x}{b-x} < \frac{a}{b}$$

প্রতিপাদ্য ৩ : যদি $a > b$, $x < a$ এবং $x < b$, তা'হলে :

(1) $\frac{a-x}{b-x} > \frac{a}{b}$

আরও সহজভাবে বলা যায় : যদি কোন **অনুপাত-এর প্রথমপদ** বা **পূর্বপদ, দ্বিতীয়পদ** বা **উত্তরপদ থেকে বড় হয়** (যেমন এই প্রতিপাদ্য অনুসারে $a > b$, তবে **উভয়পদ-এর থেকে উভয়পদ অপেক্ষা ছোট সংখ্যা যদি বিয়োগ করা** হয় (প্রতিপাদ্য অনুসারে উভয়পদের থেকে যে-সংখ্যা বিয়োগ করা হচ্ছে অর্থাৎ x যার সম্পর্কে বলা হয়েছে : $x < a$ এবং $x < b$) তবে :

যে **নূতন** অনুপাত তৈরি হবে তা **পূর্বের অনুপাত,** অর্থাৎ $a : b$ বা $\frac{a}{b}$ **থেকে বড় হবে।**

অর্থাৎ, $\frac{a-x}{b-x} > \frac{a}{b}$ (যেখানে $x < a$ এবং $x < b$)

একটি সহজ উদাহরণ নিলে এই সিদ্ধান্ত পরিষ্কার বোঝা যাবে, যেমন, 5 : 3 — এই **অনুপাত-এর পূর্বপদ** (বা **প্রথমপদ**), উত্তরপদ থেকে বড়। এখন, প্রত্যেক পদ থেকে উভয়পদ থেকে ছোট সংখ্যা, ধরা যাক 2, বিয়োগ করলে যে নূতন অনুপাত-টি তৈরি হবে তা :

পূর্বের অনুপাত (অর্থাৎ $\frac{5}{3}$) থেকে বড় হবে। যেমন :

$\frac{5-2}{3-2} > \frac{5}{3}$ [$\because \frac{5-2}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$ যা, $\frac{5}{3}$ থেকে বড়]

প্রতিপাদ্য ৪ :

a : b এবং ***x : y*** হ'ল দু'টি অনুপাত। এই দুই অনুপাত-এর **মিশ্র অনুপাত** হ'ল $ax : by$ [মিশ্র অনুপাত হ'ল— (এ-সম্পর্কে আগেই উল্লেখ করা হয়েছে) (প্রথম অনুপাতের প্রথমপদ × দ্বিতীয় অনুপাতের প্রথমপদ) : (প্রথম অনুপাতের উত্তরপদ × দ্বিতীয় অনুপাতের উত্তরপদ)]

(১) যদি $a > b$ এবং $x > y$ হয় তবে :

$ax : by > a : b$ [অর্থাৎ মিশ্র অনুপাত পূর্বের অনুপাত থেকে বড়।]

একটি সহজ উদাহরণ নিলে এই সিদ্ধান্ত পরিষ্কার হবে। যেমন :

5 : 3 এবং 3 : 1—এই দুই অনুপাতের **মিশ্র অনুপাত** হ'ল : 5 × 3 : 3 × 1 = 15 : 3 = 5 : 1 = 5 : 1

সুতরাং, $\frac{5}{1}$ (নূতন অনুপাত) > $\frac{5}{3}$ (পূর্বের অনুপাত)।

(২) যদি, $a < b$ এবং $x < y$ হয় তবে ঃ

(i) $ax : by < a : b$

(ii) $ax : by < x : y$ [অর্থাৎ মিশ্র অনুপাত পূর্বের দুটি অনুপাত-এর চেয়ে ছোট।]

একটি সহজ উদাহরণ ঃ

3 : ১ এবং ! : 3—এই দুই অনুপাত-এর মিশ্র অনুপাত হ'ল $3 \times 1 : 5 \times 3 = 3 : 15 = 1 : 5 = \frac{1}{5}$,

[এখানে 3 : 5 এবং 1 : 3—এই দুই অনুপাতের মিশ্র অনুপাত হ'ল ঃ $3 \times 1 : 5 \times 3 = 3 : 15 = 1 : 5$ $= \frac{1}{5}$ [এখানে মিশ্র অনুপাতটি

২০.ক.১০ উদাহরণমালা

উদাহরণ 1. $a : b$ যদি $7 : 3$ হয় তবে নিম্নের অনুপাতগুলি নির্ণয় করুন।

(১) $a + b : a - b$

(২) $a + b : b$

(৩) $a^2 + b^2 : ab$

(৪) $3a + 4b : 3a - 4b$

সমাধান 1. $a + b : a - b$

বা, $7 + 3 : 7 - 3$

বা, $10 : 4$

বা, $5 : 2$ **(উত্তর)**।

সমাধান 2. $a + b : b$

বা, $7 + 3 : 3$

বা, $10 : 3$ **(উত্তর)**।

সমাধান 3. $a^2 + b^2 : ab$

বা, $(7)^2 + (3)^2 : 7 \times 3$

বা, $49 + 9 : 21$

বা, $58 : 21$ **(উত্তর)**।

সমাধান 4. $3a + 4b : 3a - 4b$

বা, $3 \times 7 + 4 \times 3 : 3 \times 7 - 4 \times 3$

বা, 33 : 9

বা, 11 : 3 (উত্তর)।

উদাহরণ 2. $a + b : a - b = 5 : 2$ হলে $b : a$-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $a + b : a - b = 5 : 2$

বা, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{5}{2}$

বা, $5a - 5b = 2a + 2b$

বা, $5a - 2a = 2b + 5b$; বা, $7b = 3a$; বা, $\frac{b}{a} = \frac{3}{7}$

$\therefore$ $b : a = 3 : 7$ (উত্তর)।

উদাহরণ 3. $\frac{x-2y}{y-2x} = \frac{1}{2}$ হলে $x : y$ - এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\frac{x-2y}{y-2x} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $2x - 4y = y - 2x$; বা, $2x + 2x = y + 4y$

বা, $4x = 5y$

বা, $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$

$\therefore$ $x : y = 5 : 4$ (উত্তর)।

উদাহরণ 4. যদি 2, x ,18 ক্রমিক অনুপাতে থাকে, তবে x-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\frac{2}{x} = \frac{x}{18}$ বা, $x^2 = 36$

$\therefore$ $x = 6$

অতএব, x-এর মান হবে 6 (উত্তর)।

উদাহরণ 5. যদি $x : y : z = 3 : 4 : 5$ এবং $x + y + z = 120$ হয়, তবে x, y ও z -এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x : y : z = 3 : 4 : 5$

$\therefore$ $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k$ (ধরি)

$\therefore\ x = 3k,\ y = 4k,\ z = 5k$

$\therefore\ x + y + z = 12k$

প্রশ্নানুসারে, $12k = 120$

$\therefore\ k = 10$

$$\therefore \left.\begin{aligned} x &= 3 \times 10 = 30 \\ y &= 4 \times 10 = 40 \\ z &= 5 \times 10 = 50 \end{aligned}\right\} \text{[উত্তর]}$$

উদাহরণ 6. যদি $x : y = 3 : 4$ হয়, তবে $(7x - 4y) : (3x + y)$ অনুপাতটির মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$

বা, $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = k$ (মনে করি)

$\therefore\ x = 3k$

$y = 4k$

এখন ঃ

$$\frac{7x - 4y}{3x + y} = \frac{7 \times 3k - 4 \times 4k}{3 \times 3k + 4k}$$

$$= \frac{5k}{13k}$$

$$= \frac{5}{13}$$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত হ'ল $5 : 13$ (উত্তর)।

উদাহরণ 7. যদি $A : B = 3 : 4$ এর $B : C = 6 : 5$ হয়, তবে $A : B : C$ অনুপাতটি কত?

সমাধান ঃ $A : B = 3 : 4 = 3 \times 3 : 4 \times 3 = 9 : 12$

$B : C = 6 : 5 = 6 \times 2 : 5 \times 2 = 12 : 10$

$\therefore\ A : B : C = 9 : 12 : 10$

[যেহেতু দু'টি অনুপাতেই B পদটি রয়েছে সেহেতু B পদ-কে এমন সংখ্যা দিয়ে গুণ করতে হবে যাতে দু'টি অনুপাতেই B-এর মান সমান হয়।]

উদাহরণ 8. 2 : 3 অনুপাতের প্রত্যেক পদের সঙ্গে 9 যোগ করলে যদি নূতন অনুপাত 3 : 4 হয়, তাহলে অনুপাত-এর পদ দু'টি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি অনুপাতের পদ দু'টি $2x$ ও $3x$

এখন, প্রশ্নানুসারে ঃ

$$\frac{2x+9}{3x+9}=\frac{3}{4}$$

অথবা, $9x+27=8x+36$

বা; $x = 9$

সুতরাং, $2:3$ অনুপাতের পদ দু'টি হ'ল 2×9 বা 18 এবং 3×9 বা 27

সুতরাং $2:3$ অনুপাতের প্রত্যেক পদের সঙ্গে 9 যোগ করলে অনুপাতটি $3:4$ হবে।

[প্রমাণ $2:3$ অনুপাতের পদ দুটি হ'ল 18 ও 27 এই দুটি পদের সঙ্গে 9 যোগ করলে পদ দুটি হবে 27 ও 36 অর্থাৎ, নূতন অনুপাত হল $27:36$ বা $3:4$।]

উদাহরণ 9. $5:37$ অনুপাতের প্রত্যেক পদের সঙ্গে কত যোগ করলে এর মান $1:3$ হবে?

সমাধান ঃ মনে করি $5:37$ অনুপাতের প্রত্যেক পদের সঙ্গে x যোগ করলে এর মান হবে $1:3$।

$$\therefore \frac{5+x}{37+x}=\frac{1}{3}=15+3x=37+x=2x=22$$

$\therefore$ x = 11

অতএব, $5:37$ অনুপাতের প্রত্যেক পদের সঙ্গে যে সংখ্যা যোগ করে অনুপাতের মান $1:3$ হবে সেই সংখ্যা হ'ল 11।

[প্রমাণ $5+11=16$, $37+11=48$ অনুপাত $=16:48$ বা $1:3$।]

উদাহরণ 10. একজন পিতা ও তাঁর পুত্রের বয়সের অনুপাত $5:3$। 10 বছর পরে এদের বয়সের অনুপাত হবে $3:2$। এদের বর্তমান বয়স কত?

সমাধান ঃ মনে করি পিতার বর্তমান বয়স x বছর এবং পুত্রের বয়স y বছর

10 বছর পরে পিতার বয়স হবে $x+10$ এবং

পুত্রের বয়স হবে $y+10$।

প্রশ্নানুসারে, $\frac{x}{y}=\frac{5}{3}$..........(1)

এবং $\frac{x+10}{y+10}=\frac{3}{2}$..........(2)

(1) থেকে পাই $3x=5y$ বা $x=\frac{5y}{3}$

x-এর মান (2)-এ বসিয়ে পাই ঃ

$$\frac{\frac{5}{3}y+10}{y+10}=\frac{3}{2}$$

বা, $2\left(\frac{5y}{3}+10\right)=3\ (y+10)$

বা, $\frac{10y}{3}+20=3y+30$

বা, $\frac{10y}{3}-3y=30-20$

বা, $\frac{10y-9y}{3}=10$

$\therefore\ y = 30$

$x=\frac{5\times 30}{3}=50$

অতএব, পিতার বয়স 50 বছর ও পুত্রের বয়স 30 বছর **[উত্তর]**।

উদাহরণ 11. দুই ভাই-এর বর্তমান বয়স 5 এবং 8 বৎসর; কত বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত 3 : 4 হবে?

সমাধান ঃ দুই ভাই-এর বর্তমান বয়স 5 ও 8 বৎসর। অতএব এদের বয়সের অনুপাত 5 : 8 বা $\frac{5}{8}$।

মনে করি x বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত 3 : 4 হবে।

এখন প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{5+x}{8+x}=\frac{3}{4}$$

বা, $20 + 4x = 24 + 3x$

বা, $x = 4$

সুতরাং 4 বৎসর পরে এদের বয়সের অনুপাত হবে 3 : 4।

[প্রমাণ ঃ 5 + 4 বা 9 ও 8 + 4 বা 12

or, $9 : 12 = \frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ বা 3 : 4।]

উদাহরণ 12. ছ'বছর আগে সুন্দর ও সুলেমান-এর বয়সের অনুপাত ছিল 4 : 7 এবং ছ'বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত হবে 7 : 10। তাদের বর্তমান বয়সের অনুপাত নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি 6 বছর আগে সুন্দর সুলেমান-এর বয়স ছিল যথাক্রমে $4x$ ও $7x$ বছর।

প্রশ্নানুযায়ী, ঃ $\frac{4x+12}{7x+12}=\frac{7}{10}$

সুতরাং, $49x + 84 = 40x + 120$

বা, $9x = 36$

$\therefore\ x = 4$

$\therefore$ সুন্দরের বর্তমান বয়স $4x + 6 = 4 \times 4 + 6 = 22$ বছর।

সুলেমানের বর্তমান বয়স $7x + 6 = 4 \times 7 + 6 = 34$ বছর।

$\therefore$ সুন্দর ও সুলেমান-এর বর্তমান বয়সের অনুপাত $= 22 : 34 = 11 : 17$ **[উত্তর]**।

উদাহরণ 13. ঃ দু'টি বাড়ির বর্তমান অনুপাত 10 : 13। দু'বছর পর যদি প্রথম বাড়িটির মূল্য 20% ও দ্বিতীয় বাড়িটির মূল্য 4000 টাকা বাড়ে তবে এই দুই বাড়ির মূল্যের অনুপাত দাঁড়ায় 12 : 17, বাড়ি দু'টির প্রাথমিক মূল্য কত?

সমাধান ঃ মনে করি বাড়ি দু'টির বর্তমান বা প্রাথমিক মূল্য যথাক্রমে $10x$ ও $21x$ টাকা।

প্রশ্নানুসারে, $\frac{10x+20\%^{\text{এর}}\ 10x}{13x+4000}=\frac{12}{17}$

বা, $\frac{10x+2x}{13x+4000}=\frac{12}{17}$

বা, $12x \times 17 = 13x \times 12 + 4000 \times 12$

বা, $204x = 156x + 48000$

বা, $48x = 48000$

$\therefore$ x = 1000

অতএব, প্রথম বাড়িটির প্রাথমিক মূল্য হ'ল 10×1000 টাকা বা 10,000 টাকা ও দ্বিতীয় বাড়িটির প্রাথমিক মূল্য হ'ল 13×1000 টাকা বা 13,000 টাকা **[উত্তর]**।

উদাহরণ 14. 35 কেজি জলমিশ্রিত দুধ-এ দুধ ও জলের অনুপাত 5 : 2। এই মিশ্রণে কি পরিমাণ জল মিশ্রিত করলে দুধ ও জলের অনুপাত 2 : 1 হবে?

সমাধান ঃ প্রশ্নানুসারে 35 কেজি মিশ্রণে দুধের পরিমাণ হল $\frac{35\times5}{7}=25$ কেজি ও জলের পরিমাণ হ'ল $\frac{2\times35}{7}=10$ কেজি।

মনে করি, ঐ মিশ্রণে 'x' পরিমাণ জল মেশালে দুধ ও জলের অনুপাত হবে $2:1$ বা $\frac{2}{1}$।

অতএব, $\frac{25+x}{10+x}=\frac{2}{1}$

বা, $25+x=20+2x$; বা, $20+2x=25+x$

$\therefore\ x = 5$

অতএব, পূর্বের মিশ্রণে 5 কেজি জল মেশালে দুধ ও জলের অনুপাত হবে $2:1$ **[উত্তর]**।

[প্রমাণ : নূতন মিশ্রণে দুধের পরিমাণ হল $\frac{2\times40}{3}=\frac{80}{3}$

জলের পরিমাণ হল $\frac{1\times40}{3}=\frac{40}{3}$

অর্থাৎ, নূতন অনুপাত হ'ল $80:40=2:1$ (প্রমাণিত)।]

উদাহরণ 15. দুই ব্যক্তির মাসিক আয়ের অনুপাত $4:5$ এবং তাদের মাসিক ব্যয়ের অনুপাত $7:9$। তারা প্রত্যেকে প্রতি মাসে 50 টাকা সঞ্চয় করে। তাদের মাসিক আয় নির্ণয় করুন।

সমাধান : যেহেতু দুই ব্যক্তির মাসিক আয়ের অনুপাত $4:5$, মনে করি এদের মাসিক আয় যথাক্রমে $4x$ ও $5x$ টাকা।

আমরা জানি ব্যয় = আয় – সঞ্চয়

সুতরাং, প্রশ্নানুসারে, $\frac{4x-50}{5x-50}=\frac{7}{9}$

বা, $36x-450 = 35x-350$

বা, $36x - 35x = 450 - 350$

$\therefore\ x = 100$

অতএব ব্যক্তিদ্বয়ের মাসিক আয় হ'ল $4x = 4\times100=400$ টাকা।

$5x = 5\times100=500$ টাকা। **[উত্তর]**।

উদাহরণ 16. একটি একদিনের ক্রিকেট খেলায় শাস্ত্রী, মঞ্জরেকর ও তেণ্ডুলকর মোট 171 রান করল। যদি শাস্ত্রী ও মঞ্জরেকর এবং মঞ্জরেকর ও তেণ্ডুলকরের রানের অনুপাত উভয় ক্ষেত্রেই $2:3$ হয় তবে তাদের ব্যক্তিগত রানের সংখ্যা নির্ণয় করুন। [C.U. B.Com 1992]

সমাধান : মনে করি, শাস্ত্রী, মঞ্জরেকর ও তেণ্ডুলকরের প্রত্যেকের মোট রানের সংখ্যা যথাক্রমে $x:y:z$;

প্রশ্নানুসারে, $x:y=2:3$ এবং $y:z=2:3$

অথবা x : y = 4 : 6 এবং y : z = 6 : 9

$\therefore x : y : z = 4 : 6 : 9$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{সুতরাং, শাস্ত্রীর মোট রানের সংখ্যা} & \dfrac{171\times4}{4+6+9}=\dfrac{684}{19}=36 \text{ রান;}\\[2ex] \text{মঞ্জরেকরের মোট রানের সংখ্যা} & \dfrac{171\times6}{19}=\dfrac{1026}{19}=54 \text{ রান;}\\[2ex] \text{এবং তেণ্ডুলকরের মোট রানের সংখ্যা} & \dfrac{171\times9}{19}=\dfrac{1539}{19}=81 \text{ রান।}\end{array}\right\} \text{(উত্তর)}$$

উদাহরণ 17. দু'টি পাত্রে দুধ ও জলের মিশ্রণের অনুপাত যথাক্রমে 8 : 7 এবং 7 : 8, পাত্র দু'টির মিশ্রণদ্বয় কি অনুপাতে মিশ্রিত করলে চূড়ান্ত মিশ্রণে দুধ ও জলের পরিমাণ সমান হবে?

সমাধান ঃ মনে করি (১) প্রথম পাত্র থেকে x একক মিশ্রণ এবং (২) দ্বিতীয় পাত্র থেকে y একক মিশ্রণ নিয়ে মিশ্রিত করা হ'ল।

অতএব ঃ (১) প্রথম পাত্রের x একক মিশ্রণে দুধের পরিমাণ $=\dfrac{8x}{15}$ একক ও জলের পরিমাণ $\dfrac{7x}{15}$ একক।

(২) দ্বিতীয় পাত্রের y একক মিশ্রণে দুধের পরিমাণ $=\dfrac{7y}{15}$ একক ও জলের পরিমাণ $\dfrac{8y}{15}$ একক।

$\therefore$ চূড়ান্ত মিশ্রণে দুধের পরিমাণ $=\dfrac{8x}{15}+\dfrac{7y}{15}$ একক

জলের পরিমাণ $=\dfrac{7x}{15}+\dfrac{8y}{15}$ একক

এখন, প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{8x}{15}+\frac{7y}{15}=\frac{7x}{15}+\frac{8y}{15}$$

$$=\frac{x}{15}=\frac{y}{15} \text{ বা, } x=y \therefore \frac{x}{y}=1=\frac{1}{1}$$

অতএব, মিশ্রণ দু'টির অনুপাত হবে 1 : 1 **(উত্তর)**।

উদাহরণ 18. জলমিশ্রিত 240 সি.সি. গ্লিসারিনে জল ও গ্লিসারিনের অনুপাত 1 : 3। এতে আর কত সিসি জল মেশালে জল ও গ্লিসারিনের অনুপাত হবে 2 : 3 ?

সমাধান ঃ মনে করি মিশ্রণটিকে জল ও গ্লিসারিনের পরিমাণ x সি.সি. ও $3x$ সি.সি.।

প্রশ্নানুসারে, $x+3x=240$ সি.সি.;

$\therefore x = 60$ সি.সি., বা, জলের পরিমাণ 60 সি.সি. ও গ্লিসারিনের পরিমাণ 180 সি.সি.।

ধরি, আরও y সি.সি. জল মেশালে জল ও গ্লিসারিনের অনুপাত হবে 2 : 3।

সুতরাং, $60 + y : 180 = 2 : 3$

বা, $\dfrac{60+y}{180} = \dfrac{2}{3}$

বা, $180 + 3y = 360$

বা, $3y = 180$

$\therefore y = 60$

অতএব, আরও 60 সি.সি. জল মেশালে জল ও গ্লিসারিনের অনুপাত হবে 2 : 3 [উত্তর]।

উদাহরণ 19. দু'টি সম আয়তনের পাত্রে অ্যাসিড ও জল 2 : 3 এবং 5 : 4 অনুপাতে আছে। যদি পাত্র দুটির মিশ্রণকে একসাথে মিশ্রিত করা হয় তবে নূতন মিশ্রণে অ্যাসিড ও জলের অনুপাত কী হবে?

সমাধান ঃ প্রথম পাত্রে অ্যাসিড ও জলের পরিমাণ হল, $\frac{2}{5}$ ভাগ ও $\frac{3}{5}$ ভাগ।

দ্বিতীয় পাত্রে অ্যাসিড ও জলের পরিমাণ হল, $\frac{5}{9}$ ভাগ ও $\frac{4}{9}$ ভাগ।

অতএব দুইটি পাত্রের মিশ্রণে মোট অ্যাসিড ও জলের পরিমাণ হল,

$\left(\frac{2}{5}+\frac{5}{9}\right)$ ভাগ ও $\left(\frac{3}{9}+\frac{4}{9}\right)$ ভাগ

বা, $\frac{43}{45}$ ভাগ ও $\frac{47}{45}$ ভাগ।

$\therefore$ দুটি পাত্রের মিশ্রণ একসঙ্গে মেশালে অ্যাসিড ও জলের অনুপাত হবে 43 : 47 [উত্তর]।

উদাহরণ 20. দুই প্রকার চা-এর নমুনাতে দার্জিলিং এবং আসাম চা-এর ওজনের অনুপাত যথাক্রমে 2 : 3 এবং 5 : 3। এই দুই প্রকার চা-এর নমুনা থেকে 3 : 4 ওজনের অনুপাতে নিয়ে মিশ্রিত করা হল। চূড়ান্ত মিশ্রণে দার্জিলিং ও আসাম চা-এর অনুপাত নির্ণয় করুন। [C.U. B.Com (Hons), 1988]

সমাধান ঃ প্রথম প্রকার চা-এর নমুনাতে দার্জিলিং এবং আসাম চা-এর ওজনের পরিমাণ $\frac{2}{5}$ ভাগ এবং $\frac{3}{5}$ ভাগ। দ্বিতীয় প্রকার চা-এর নমুনাতে দার্জিলিং এবং আসাম চায়ের ওজনের পরিমাণ যথাক্রমে $\frac{5}{8}$ ভাগ এবং $\frac{3}{8}$ ভাগ। এই দুই প্রকার চা-এর নমুনা থেকে 3 : 4 ওজনের অনুপাত নিয়ে মিশ্রিত করা হ'লে

চূড়ান্ত মিশ্রণে দুই প্রকার চায়ের ওজনের পরিমাণ যথাক্রমে $\frac{3}{7}$ ভাগ ও $\frac{4}{7}$ ভাগ। সুতরাং চূড়ান্ত মিশ্রণে দার্জিলিং ও আসাম চা-এর ওজনের পরিমাণ যথাক্রমে $\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}+\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\right)$ ভাগ এবং $\left(\frac{3}{5}\times\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{4}{7}\right)$ ভাগ অর্থাৎ $\left(\frac{6}{35}+\frac{5}{14}\right)$ ভাগ এবং $\left(\frac{9}{35}+\frac{3}{14}\right)$ ভাগ।

$\therefore$ চূড়ান্ত মিশ্রণে দার্জিলিং ও আসাম চা-এর ওজনের অনুপাত $\left(\frac{37}{40}:\frac{33}{70}\right)=37:33$ [উত্তর]।

উদাহরণ 21. যদি 50 জন লোক প্রতিদিন 16 ঘণ্টা কাজ ক'রে 40 দিনে 1200 টাকা উপার্জন করে, তবে 150 জন লোক প্রতিদিন 20 ঘণ্টা কাজ ক'রে 24 দিনে কত টাকা উপার্জন করবে?

সমাধান ঃ মনে করি নির্ণেয় উপার্জন = x টাকা।

এখানে বিভিন্ন অনুপাতগুলি হল ঃ

লোকসংখ্যা	দৈনিক কত ঘণ্টা কাজ করে	কাজের দিনের সংখ্যা	মোট উপার্জন
50	16	40	1200
150	20	24	x

এখন যেহেতু,

(১) **লোকের সংখ্যা বেড়ে গেছে।** সুতরাং, উপার্জন বেড়ে যাবে।

তাই অর্জিত উপার্জন 1200 কে গুরু অনুপাত $\frac{150}{50}$ দিয়ে গুণ করতে হবে।

(২) **দিনের সংখ্যা কমে যাওয়ায় উপার্জন কমে যাবে।** তাই অর্জিত উপার্জন 1200 কে লঘু অনুপাত $\frac{24}{40}$ দিয়ে গুণ করতে হবে।

(৩) **ঘণ্টার সংখ্যার বেড়ে গেছে বলে উপার্জনও বেড়ে যাবে।** তাই অর্জিত উপার্জন 1200 কে গুরু অনুপাত $\frac{20}{16}$ দিয়ে গুণ করতে হবে।

অতএব, গুণনীয় অনুপাতগুলি যথাক্রমে হবে,

$\frac{150}{50}, \frac{20}{16}, \frac{24}{40}$

$\therefore x=\left(1200\times\frac{150}{50}\times\frac{20}{16}\times\frac{24}{40}\right)$ টাকা

$= 2700$ টাকা **(উত্তর)**।

উদাহরণ 22. 35 কেজি জলমিশ্রিত দুধে দুধ ও জলের অনুপাত 5 : 2। এই মিশ্রণে কি পরিমাণ জল মিশ্রিত করলে দুধ ও জলের অনুপাত 2 : 1 হবে?

সমাধান : প্রশ্নানুসারে 35 কেজি মিশ্রণে দুধের পরিমাণ হল $\frac{5\times35}{7} = 25$ কেজি।

জলের পরিমাণ হল $\frac{2\times35}{7}=10$ কেজি।

এখন মনে করি এই মিশ্রণে x পরিমাণ জল মেশালে দুধ ও জলের অনুপাত হবে 2 : 1।

$$\frac{25+x}{10+x}=\frac{2}{1}$$

$\therefore\ x = 5$

সুতরাং, 5 কেজি জল মেশালে দুধ ও জলের অনুপাত 2 : 1 হবে [উত্তর]।

উদাহরণ 23. একটি স্কুলের মোট ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা 660 এবং ছাত্র-ছাত্রীর অনুপাত 13 : 9। কিছুদিন পরে 30 জন ছাত্রী স্কুলে যোগ দেয় এবং কিছু ছাত্র স্কুল পরিত্যাগ করে। ফলে ছাত্র-ছাত্রীর অনুপাত দাঁড়ায় 6 : 5। কতজন ছাত্র স্কুল পরিত্যাগ করেছিল তা নির্ণয় করুন।

সমাধান : স্কুলের ছাত্র ও ছাত্রী সংখ্যার অনুপাত 13 : 9।

মনে করি, ছাত্র ও ছাত্রীর সংখ্যা যথাক্রমে $13x$ ও $9x$

অতএব, মোট ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা $13x + 9x = 22x$।

প্রশ্নানুসারে, $22x = 660$

$\therefore\ x = 30$

অতএব, ঐ স্কুলের ছাত্রের সংখ্যা $13 \times 30 = 390$ ও

ছাত্রীর সংখ্যা $9 \times 30 = 270$।

আরও 30 জন ছাত্রী স্কুলে যোগ দিলে মোট ছাত্রীর সংখ্যা হবে $270 + 30 = 300$।

এখন ধরি y সংখ্যক ছাত্র স্কুল পরিত্যাগ করেছিল। সুতরাং ছাত্রের সংখ্যা হবে $390-y$ ও ছাত্রীর সংখ্যা 300।

সুতরাং, $\frac{390-y}{300}=\frac{6}{5}$

বা, $y = 30$

সুতরাং, 30 জন ছাত্র স্কুল পরিত্যাগ করেছিল (উত্তর)।

উদাহরণ 24. দুজন শ্রমিকের দৈনিক মজুরীর অনুপাত 4 : 3 এবং তাদের একজন অপরজনের থেকে 9 টাকা বেশি পায়। তাদের প্রত্যেকের দৈনিক মজুরী কত?

সমাধান ঃ মনে করি, দুজন শ্রমিকের মজুরী যথাক্রমে $4x$ টাকা ও $3x$ টাকা।

প্রশ্নানুসারে, $4x - 3x = 9$ বা, $x = 9$

অতএব, $\left.\begin{array}{l}\text{প্রথম শ্রমিকের মজুরী } 4 \times 9 = 36 \text{ টাকা} \\ \text{দ্বিতীয় শ্রমিকের মজুরী } 3 \times 9 = 27 \text{ টাকা}\end{array}\right\}$ [উত্তর]

উদাহরণ 25. একটি কারখানায় শ্রমিকদের বেতন 22 : 25 হারে বৃদ্ধি পেল কিন্তু শ্রমিকদের সংখ্যা 15 : 11 হারে কমিয়ে দেওয়া হ'ল। এই বৃদ্ধি ও হ্রাসের ফলে শ্রমিকদের বেতন কি অনুপাতে বৃদ্ধি বা হ্রাসপ্রাপ্ত হল তা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রশ্ন থেকে এটা স্পষ্ট যে, আগে একজন শ্রমিকের বেতন 22 টাকা হলে বর্তমানে একজন শ্রমিকের বেতন বেড়ে 25 টাকা হবে। আবার, আগে কারখানার শ্রমিকের সংখ্যা 15 জন হলে বর্তমানে তা কমে গিয়ে 11 জন হবে।

সুতরাং, আগে শ্রমিকদের মোট বেতন ছিল (22×15) টাকা বা 330 টাকা এবং বর্তমানে সেই বেতন কমে গিয়ে (25×11) টাকা বা 275 টাকা হয়েছে।

সুতরাং, আগের মোট বেতন বাবদ টাকার চেয়ে বর্তমানের মোট বেতন বাবদ টাকা কম বলে তা' 330 : 275 বা 6 : 5 অনুপাতে হ্রাস পেয়েছে।

উদাহরণ 26. কোন কারখানার উৎপাদিত সামগ্রী সমূহের উৎপাদন ব্যয়ের মান, কাঁচামাল বাবদ ব্যয়, মজুরী বাবদ ব্যয় ও কারখানার উপরিব্যয়ের সমষ্টির সমান। উক্ত তিনটি খাতে বারদ ব্যয়ের অনুপাত 15 : 6 : 5। পরবর্তীকালে কাঁচামাল বাবদ ব্যয় 10 : 9 অনুপাতে হ্রাস পায় এবং মজুরী বাবদ ব্যয় 2 : 3 অনুপাতে বৃদ্ধি পায়। যদি কারখানার উৎপাদন ব্যয়ের মান অপরিবর্তিত রাখতে হয় তা হলে কারখানার উপরিব্যয় কি অনুপাতে পরিবর্তিত করতে হবে তা নির্ণয় করুন। [C.U. B.Com (Hons), 1985]

সমাধান ঃ মনে করি, কাঁচামালের উৎপাদন, মজুরী বাবদ ব্যয় ও উপরি ব্যয়ের পরিমাণ : $15x$, $6x$ ও $5x$;

$\therefore$ মোট ব্যয়ের পরিমাণ $= 26x$;

এখন, **কাঁচামালের উৎপাদন ব্যয়** 10 : 9 অনুপাতে **হ্রাস পেলে** বর্তমান ব্যয় হবে ঃ $\dfrac{9 \times 15x}{10} = \dfrac{27x}{2}$ ।

আবার, **মজুরীবাবদ ব্যয়** 2 : 3 অনুপাতে **বেড়ে** গেলে বর্তমান ব্যয় হবে, $\dfrac{3 \times 6x}{2} = 9x$ ।

এর ফলে বর্তমানে কাঁচামাল ও মজুরীবাবদ উৎপাদন ব্যয়ের মোট সমষ্টি হবে $\dfrac{27x}{2} + 9x = \dfrac{45x}{2}$

এখন, আগের মোট ব্যয় $= 26x$

এখন, মোট ব্যয় $= \dfrac{25}{2}x$

$\therefore$ পার্থক্য $= 26x - \frac{25}{2}x = \frac{7x}{2}$

অতএব, মোট ব্যয় অপরিবর্তিত রাখতে হলে,

উপরিব্যয়ের অনুপাত $5x : \frac{7x}{2}$ অথবা $10x : 7x$ বা $10 : 7$ হারে **কমাতে হবে (উত্তর)**।

উদাহরণ 27. A, B ও C যথাক্রমে 45,000 টাকা, 50,000 টাকা ও 5500 টাকা মূলধন নিয়ে একটি অংশীদারী ব্যবসায় যোগ দিল। A ম্যানেজার হিসাবে লাভের 10 শতাংশ পাবে এবং লাভের অবশিষ্ট টাকা এরা মূলধন বিনিয়োগের অনুপাতে ভাগ পাবে। মোট লাভ 1,00,000 টাকা হলে A, B ও C প্রত্যেকে কত টাকা পাবে?

সমাধান ঃ ম্যানেজার হিসাবে A পাবে = 10% **বা** $\frac{10 \times 100000}{100} = 10000$ **টাকা**।

$\therefore$ বণ্টনযোগ্য লাভ = (100000 – 10000) টাকা বা 90000 টাকা।

মনে করি, বণ্টনযোগ্য লাভ থেকে A, B, ও C-এর প্রাপ্য অংশ x, y ও z টাকা।

শর্তানুযায়ী, $x + y + z = 90000$..........(i)

এবং $\frac{x}{45000} = \frac{y}{50000} = \frac{z}{55000}$

বা $\frac{x}{9} = \frac{y}{10} = \frac{z}{11} = k$ (ধরি), $k \neq 0$

$\therefore \quad x = 9k$

$y = 10k$

$z = 11k$

$\therefore$ (1) থেকে পাই ঃ

$9k + 10k + 11k = 90000$, বা, $30k = 90000$ বা, $k = 3000$

$\therefore \quad x = 9k = 9 \times 3000 = 27000$ টাকা

$y = 10k = 10 \times 3000 = 30000$ টাকা

$z = 11k = 11 \times 3000 = 33000$ টাকা

$\therefore$ **A-এর অংশ = 27000 টাকা + 10000 = 37000 টাকা**

B-এর অংশ = 30000 টাকা। **[উত্তর]**

C-এর অংশ = 33000 টাকা।

২০.ক.১১ সমানুপাত কাকে বলে

চারটি প্রদত্ত রাশি বা পদ যদি এমন হয় যে, প্রথম দু'টি পদ-এর অনুপাত এবং শেষের দু'টি পদ-এর অনুপাত পরস্পর সমান হয় তবে পদ চারটিকে বলা হবে সমানুপাতী (Proportional)।

উদাহরণ হিসাবে বলা যায়, 3 টাকা ও 9 টাকার অনুপাত এবং 7 লিটার ও 21 লিটার-এর অনুপাত পরস্পর সমান, কারণ 3 টাকা : 9 টাকা = 3 : 9 বা 1 : 3 এবং 7 লিটার : 21 লিটার = 7 : 21 বা 1 : 3। সুতরাং, 3 টাকা ও 9 টাকা এবং 7 লিটার ও 21 লিটার সমানুপাতী। এই সমানুপাতটি যেভাবে লিখতে হবে তা হ'ল ঃ

$$3:9=7:21 \text{ অথবা } 3:9::7:21।$$

অন্য একটি উদাহরণ ঃ $a:b=c:d$ হল একটি সমানুপাত। অর্থাৎ, a, b ও c, d সমানুপাতী বা $a:b::c:d$।

কোন সমানুপাত-এর (i) প্রথম ও চতুর্থ পদ-কে (উপরের উদাহরণে a ও d) বলা হয় **প্রান্তীয় পদ** বা **প্রান্তীয় রাশি** (Extremes), (ii) দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ-কে (b ও c) বলা হয় **মধ্যক পদ** বা **মধ্যক রাশি** (Means) এবং (iii) চতুর্থ পদ-কে (d) প্রথম তিনটি পদ-এর (a, b, c) **চতুর্থ সমানুপাতী** (Fourth Proportional) বলা হয়।

২০.ক.১২ সমানুপাতের বিভিন্ন প্রক্রিয়া

(১) ব্যস্ত প্রক্রিয়া বা ব্যস্ত অনুপাত [Invertendo] ঃ

$a:b=c:d$ হলে, $b:a=d:c$ [ব্যস্ত প্রক্রিয়া বা ব্যস্ত অনুপাত (Invertendo)]

বা, a, b, c, d যদি সমানুপাতী হয় অর্থাৎ, $a:b=c:d$

তবে, $b:a=d:c$

(২) একান্তর প্রক্রিয়া [Alternendo] ঃ

$a:b=c:d$ হলে, $a:c=b:d$ [একান্তর প্রক্রিয়া (Alternendo)]

প্রমাণ ঃ এখানে $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\therefore \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; অতএব $a:c=b:d$

(৩) যোগ প্রক্রিয়া (Componendo] ঃ

$a:b=c:d$ হলে, $a+b:b=c+d:d$ [যোগ প্রক্রিয়া (Componendo)]

প্রমাণ ঃ এখানে $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\therefore \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$; বা $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$;

বা $a+b:b=c+d:d$

(৪) **ভাগ প্রক্রিয়া [Dividendo] :**

$a:b=c:d$ হলে, $a-b:b=c-d:d$ [ভাগ প্রক্রিয়া (Dividendo)]

প্রমাণ : এখানে $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\therefore \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$

বা, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ বা, $a-b:b=c-d:d$

(৫) **পরিবর্তন প্রক্রিয়া :**

$a:b=c:d$ হলে, $a:a-b=c:c-d$ [পরিবর্তন প্রক্রিয়া]

(৬) **যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া [Componendo-Dividendo] :**

$a:b=c:d$ হলে, $a+b:a-b=c+d:c-d$

[যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া (Componendo-Dividendo)]

প্রমাণ : এখানে, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; সুতরাং $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$ বা, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ ... (i)

$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ বা, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ ... (ii)

সুতরাং, (i) ও (ii) থেকে পাওয়া যাবে :

$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$; $\therefore a+b:a-b=c+d:c-d$

$a:b=c:d=e:f$ হলে, যে-কোন অনুপাত

$=(a+c+e):(b+d+f)$-এর সমান হবে।

প্রমাণ : এখানে, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$ (ধরা যাক)

$\therefore\ a=bk$

$c=dk$

$e=fk$

এখন, $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{bk+dk+ek}{b+d+f}=k$

$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$

$\therefore\ a:b=c:d=e:f=(a+c+e):(b+d+f)$

অন্যভাবে প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $a:b=c:d=e:f$

$\therefore \; ad=bc$ এবং $af=be$

উভয়পক্ষে ab যোগ করে পাইঃ $ad+af+ab=bc+be+ab$

বা, $a(d+f+b)=b(c+e+a)$

বা, $a:b=(a+c+e):(b+d+f)$

২০.ক.১৩. ক্রমিক সমানুপাত (Continued Proportion)

সমজাতীয় কয়েকটি রাশিকে বলা হবে ক্রমিক সমানুপাতী যদিঃ

প্রথম রাশি : দ্বিতীয় রাশি = দ্বিতীয় রাশি : তৃতীয় রাশি = তৃতীয় রাশি : চতুর্থ রাশি ইত্যাদি এ-ধরনের সম্পর্ক সিদ্ধ হয়।

যদি $a, b, c, d....$ ক্রমিক সমানুপাতী হয়, তবে,

$$a:b:c:d...=a:b=b:c=c:d... \text{ বা, } \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}... \text{ হবে।}$$

যদি তিনটি রাশি a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হয় তবে

$$a:b=b:c \text{ বা, } \frac{a}{b}=\frac{b}{c} \text{ বা, } ac=b^2 \text{ হবে।}$$

উদাহরণ হিসাবে বলা যায়ঃ 3, 9, 27 ক্রমিক সমানুপাতী কারণ

$$\left.\begin{array}{l} 3:9=1:3 \text{ এবং} \\ 9:27=1:3 \end{array}\right\} \text{ এখানে প্রতিটি অনুপাত } \frac{1}{3}\text{-এর সমান।}$$

অর্থাৎ, 3 : 9 = 9 : 27। এ-ক্ষেত্রে, 9-কে 3 ও 27-এর **মধ্যসমানুপাতী** (Mean Proportional) এবং 27-কে 3 ও 9-এর তৃতীয় সমানুপাতী (Third Proportional) বলা হবে।

২০.ক.১৪ উদাহরণমালা

উদাহরণ ঃ 1. 6, 11, 18-এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় করুন।

মনে করি চতুর্থ সমানুপাতী = x

সমাধান ঃ সুতরাং, $6:11=18:x$, বা, $\frac{6}{11}=\frac{18}{x}$, বা, $6x=198$

$\therefore \; x = 33$

সুতরাং চতুর্থ সমানুপাতী হ'ল 33 **(উত্তর)**।

উদাহরণ 2. 7, 9, 13, 16 প্রত্যেক সংখ্যার সঙ্গে কোন সংখ্যা যোগ করলে নূতন সংখ্যাগুলি সমানুপাতী হবে?

সমাধান: মনে করি x নির্ণেয় সংখ্যা।

প্রশ্নানুসারে, $\frac{7+x}{9+x}=\frac{13+x}{16+x}$, বা, $x=5$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা হ'ল 5 **(উত্তর)**।

উদাহরণ 3: যদি $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{7}$ হয় দেখান যে, $\frac{a+b+c}{c}=2$।

সমাধান: আমরা জানি, $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{7}=\frac{a+b+c}{3+4+7}$

$\therefore$ $\frac{c}{7}=\frac{a+b+c}{14}$, বা $\frac{a+b+c}{c}=2$ **(উত্তর)**।

উদাহরণ 4. $a+b:\sqrt{ab}=4:1$ হলে, দেখান যে, $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=4$

সমাধান: প্রশ্নানুসারে $\frac{\mathrm{a+b}}{\sqrt{\mathrm{ab}}}=4$ বা, $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=4$ **(উত্তর)**।

উদাহরণ 5. যদি 2, x, 18 সমানুপাতী হয়, তবে x-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: 2, x, 18 সমানুপাতে রয়েছে।

$\therefore\ 2:x=x:18$

বা, $\frac{2}{x}=\frac{x}{18}$

বা, $x^2=36$

$\therefore\ x=\pm 6$ **[উত্তর]**। [ব্যাখ্যা: $x=+6$ হলেও $(+6)^2=36$

$x=-6$ হলেও $(-6)^2=36$]

উদাহরণ 6. যদি $a:b:c=3:4:5$ এবং $a+b+c=288$ হয়, তবে a, b ও c-এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $a:b:c=3:4:5$

$\therefore\ \frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=k$ (মনে করি) $\therefore\ a=3k, b=4k, c=5k$

$\therefore\ a+b+c=3k+4k+5k=12k \quad \because\ 12k=288$; বা, $k=24$

$$\therefore \left.\begin{aligned} a &= 3 \times 24 = 72 \\ b &= 4 \times 24 = 96 \\ c &= 5 \times 24 = 120 \end{aligned}\right\} \text{(উত্তর)।}$$

উদাহরণ 7. $A:B=2:3; B:C=3:4; C:D=2:5$ হলে $A:B:C:D$ কত?

সমাধান ঃ $A:B=2:3$, আবার $B:C=3:4$

অতএব, $A:B:C=2:3:4$

$C:D=2:5=2\times2:5\times2$ [উভয় পদকে 2 দিয়ে গুণ করে (c পদকে 4-এর সমান করার জন্য]

বা, $C:D=4:10$

অতএব, $A:B:C:D=2:3:4:10$ [উত্তর]।

উদাহরণ ৪. যদি $\dfrac{x}{y+z}=\dfrac{y}{z+x}=\dfrac{z}{x+y}$ হয়, প্রমাণ কর যে, $x+y+z=0$

বা প্রতি অনুপাত $=\frac{1}{2}$

সমাধান ঃ মনে করি, $\dfrac{x}{y+z}=\dfrac{y}{z+x}=\dfrac{z}{x+y}=k$

$\therefore \quad x=k(y+z), y=k(z+x), z=k(x+y)$

$\therefore \quad (x+y+z)=2k(x+y+z)$

বা, $(2k-1)(x+y+x)=0$

$\therefore$ হয় $2k-1=0$ বা, $k=\frac{1}{2}$

নতুবা $x+y+z=0$

উদাহরণ 9. 253-কে এমন চারটি অংশে বিভক্ত করুন যাতে এগুলি 2, 5, 7, 9-এর সমানুপাতী হয়।

সমাধান ঃ মনে করি, $a:b:c:d=2:5:7:9$ এবং প্রশ্নানুসারে $a+b+c+d=253$।

এখন, $a:b:c:d=2:5:7:9$

সুতরাং, $\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{5}=\dfrac{c}{7}=\dfrac{d}{9}=k$ (ধরি)

অর্থাৎ, $a=2k$

$b=5k$

$c = 7k$

$d = 9k$

বা, $a+b+c+d = 23k = 253$

$\therefore \quad k = 11$

অতএব, $a = 2\times 11 = 22$

$$\left.\begin{array}{l} b = 5\times 11 = 55 \\ c = 7\times 11 = 77 \\ d = 9\times 11 = 99 \end{array}\right\}$$ (উত্তর)।

বিকল্পভাবে ঃ মনে করি, $a:b:c:d = 2:5:7:9$ এবং প্রশ্নানুসারে ঃ $a+b+c+d = 253$ ... (1)

এখন, (i) $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$ বা, $a = \frac{2}{5}b$

(ii) $\frac{c}{b} = \frac{5}{7}$ বা, $b = \frac{5}{7}c$

(iii) $\frac{c}{d} = \frac{7}{9}$ বা, $c = \frac{7}{9}d$

সুতরাং, $a = \frac{2}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{7}{9}d = \frac{2}{9}d \quad [\because\ a = \frac{2}{5}b = \frac{2}{5}\times\frac{5}{7}c = \frac{2}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{7}{9}d]$

$b = \frac{5}{7}\times\frac{7}{9}d = \frac{5}{9}d$

$c = \frac{7}{9}d$

(1)-এ a, b, c-এর মান বসাইয়া পাই $\frac{2}{9}d + \frac{5}{9}d + \frac{7}{9}d + d$ বা, $\frac{23d}{9} = 253$

$$\therefore \quad d = \frac{253\times 9}{23} = 99$$

$\therefore$ নির্ণেয় অংশগুলি হ'ল ঃ

$a = \frac{2}{9}\times 99 = 22$

$b = \frac{5}{9}\times 99 = 55$

$$c=\frac{7}{9}\times 99=77$$

$$d=99$$

উদাহরণ 10. যদি 4টি ঘোড়ার মূল্য 6টি গরুর মূল্যের সমান হয়, 3টি গরুর মূল্য 20টি ভেড়ার মূল্যের সমান হয় এবং 10টি ভেড়ার মূল্য 16টি মেষশাবকের মূল্যের সমান হয়, তবে 1টি মেষশাবকের মূল্য 40 টা. হলে 1টি ঘোড়ার মূল্য কত হবে?

সমাধান ঃ

প্রশ্নানুসারে, ঘোড়া ও গরুর মূল্যের অনুপাত 4 : 6,

গরু ও ভেড়ার মূল্যের অনুপাত 3 : 20 বা 6 : 40,

ভেড়া ও মেষশাবকের মূল্যের অনুপাত 10 : 16 বা 40 : 64,

সুতরাং, ঘোড়া, গরু, মেষ ও মেষশাবকের মূল্যের অনুপাত হবে 4 : 6 : 40 : 64

অর্থাৎ, ঘোড়া ও মেষশাবকের মূল্যের অনুপাত 4 : 46 বা 1 : 16

সুতরাং, 1টি মেষশাবকের মূল্য 40 টা. হলে 1টি ঘোড়ার মূল্য হবে $40\times 16=640$ টাকা (উত্তর)।

উদাহরণ 11 ঃ একটি হীরকখণ্ডের মূল্য এর ওজনের বর্গের সমানুপাতী। ঐ হীরকখণ্ড ভেঙ্গে চার টুকরো হ'ল এবং টুকরোগুলির ওজনের অনুপাত 1 : 3 : 5 : 6। যদি এর ফলে হীরকখণ্ডটির মূল্য বাবদ 58,000 টাকা ক্ষতি হয় তবে অভগ্ন হীরকখণ্ডের মূল্য নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি, (১) চার টুকরো হীরকখণ্ডের **ওজন** যথাক্রমে W, $3W$, $5W$ ও $6W$।

$\therefore$ অভগ্ন হীরকখণ্ডের মোট ওজন $=15W$

(২) টুকরো চারটি ও অভগ্ন হীরকখণ্ডের **মূল্য** যথাক্রমে P_1, P_3, P_5, P_6 এবং P।

প্রশ্নানুযায়ী, $$\frac{P_1}{W^2}=\frac{P_3}{(3W)^2}=\frac{P_5}{(5W)^2}=\frac{P_6}{(6W)^2}=\frac{P}{(15W)^2}$$

$$\therefore\ P_1=\frac{P}{225}\ \left[\because\ \frac{P_1}{W^2}=\frac{P}{(15W)^2}\text{ বা, }\frac{P_1}{W^2}=\frac{P}{225W^2}\right.$$

$$\left.\text{বা, } P_1\times 225W^2=P\times W^2\ \therefore\ P_1=\frac{P}{225}\right]$$

$$P_3=\frac{9P}{225};\ P_5=\frac{25P}{225};\ P_6=\frac{36P}{225}$$

$\therefore$ চার টুকরো হীরকের মোট মূল্য কমান $=P_1+P_3+P_5+P_6$

$$= \frac{P}{225} + \frac{9P}{225} + \frac{25P}{225} + \frac{36P}{225} = \frac{71P}{225}$$

$\therefore$ ক্ষতির পরিমাণ $P - \frac{71P}{225} = \frac{154P}{225}$

এখন, প্রদত্ত শর্তানুযায়ী, $\frac{154P}{225} = 58{,}000$ $\therefore$ $P = \frac{225}{154} \times 58{,}000 = 84{,}740$

অতএব, অভগ্ন হীরকখণ্ডের মূল্য = 84,740 টাকা [উত্তর]।

২০.ক.১৫ প্রশ্নমালা

1. অনুপাত বলতে কী বোঝেন?

2. সমানুপাত বলতে কী বোঝেন?

3. অনুপাত ও সমানুপাত—এই দুয়ের মধ্যে মূল পার্থক্য কী?

4. নিম্নলিখিত প্রশ্নাবলীর সমাধান করুন ঃ

(1) যদি $x : y = 3 : 4$ হয়, তবে $(7x - 4y) : (3x + y)$-এর মান নির্ণয় করুন।

(**উত্তর ঃ** 5 : 13)

(2) যদি $(10a + 3b) : (5a + 2b) = 9 : 5$ হয়, তবে a ও b-এর অনুপাত নির্ণয় করুন।

(**উত্তর ঃ** 5 : 3)

(3) যদি $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7}$ হয়, তবে দেখান যে $\frac{a+b+c}{c} = 2$।

(4) $a + b : \sqrt{ab} = 4 : 1$ হলে দেখান যে $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 4$।

(5) $\frac{ax + by}{cz} = \frac{cz + ax}{by} = \frac{by + cz}{ax} = x + y + z$

(**সংকেত** $a = yb = zc = \frac{2abc}{bc + ca + ab}$ বা, $xa + yb + zc = 0, x + y + z = -1$

5. যদি $\frac{ay - bx}{c} = \frac{cx - az}{b} = \frac{bz - cy}{a}$ হয়

প্রমাণ করুন যে, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

6. $(5 + x)$ এবং $(37 + x)$-এর অনুপাত 1 এবং 3-এর অনুপাতের সমান হলে x-এর মান নির্ণয় করুন। **[উত্তর : 11]**

7. যদি $a:b:c = 2:3:4$ এবং $a+b+c = 99$ হয় তবে a, b ও c-এর মান নির্ণয় করুন। **[উত্তর :** $a = 22$, $b = 33$, $c = 44$]

8. যদি 2, x, 18 ক্রমিক অনুপাতে থাকে তবে x-এর মান নির্ণয় করুন। **[উত্তর : ±6]**

9. 4 ও 12-এর তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করুন। **[উত্তর : 36]**

10. 5, 11 এবং 15-এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় করুন। **[উত্তর : 33]**

11. একটি সমানুপাতের শেষ তিনটি পদ 4, 6, 8। প্রথম পদটি নির্ণয় করুন। **[উত্তর : 3]**

12. 6, 11, 18-এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় করুন। **[উত্তর : 33]**

13. এরূপ চারটি সমানুপাতী সংখ্যা নির্ণয় করুন যেন এদের প্রান্তীয় রাশি দুটির যোগফল 21, মধ্যম রাশি দুটির যোগফল 19 এবং সব রাশিগুলির বর্গের সমষ্টি 442 হয়। **[উত্তর : 6, 9, 10, 15]**

14. একটি পাথরের মূল্য এর ওজনের বর্গের সমানুপাতী। পাথরটি ভেঙ্গে চারখণ্ড হ'ল এবং এগুলির ওজনের অনুপাত দাড়ায় 1 : 2 : 3 : 4। যদি এর ফলে 70,000 টাকা ক্ষতি হয়, তবে পাথরটির মূল্য নির্ণয় করুন। **[উত্তর : 1,00,000 টাকা]**

15. কোন এক বছর রেলভাড়া 14 : 25 অনুপাতে বৃদ্ধি পাওয়ায় যাত্রীসংখ্যা 15 : 7 অনুপাতে হ্রাস পায়। এর ফলে রেল কোম্পানীর মোট আয় কি অনুপাতে বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে তা নির্ণয় করুন। **[উত্তর : 6 : 5]**

16. দৈনিক 8 ঘণ্টা চালু রেখে যদি 15টি পাম্প 24 দিন 3000 টন জল তুলতে পারে, তবে কতদিনে প্রতিদিন 10 ঘণ্টা চালু রেখে 20টি পাম্প 4000 টন জল তুলতে পারবে? **[উত্তর : 18 দিন]**

17. 1999 খ্রীষ্টাব্দের বিশ্বকাপ ক্রিকেটের দুই ইনিংসে তেণ্ডুলকর, সৌরভ ও আজাহার মোট 437 রান করেছিল। যদি তেণ্ডুলকর ও সৌরভ এবং সৌরভ ও আজাহারের দুই ইনিংসে মোট রানের অনুপাত 2 : 3 হয়, তবে কে কত রান করেছিল তা নির্ণয় করুন। **[উত্তর : 92, 138, 207]**

18. দুটি পাত্রে গ্লিসারিন ও জলের মিশ্রণের অনুপাত যথাক্রমে 4 : 3 এবং 3 : 4। পাত্র দু'টির মিশ্রণ কী অনুপাতে মিশ্রিত করলে চূড়ান্ত মিশ্রণে গ্লিসারিন ও জলের পরিমাণ সমান হবে? **[উত্তর : 1 : 1]**

19. দু'জন শ্রমিকের দৈনিক মজুরীর অনুপাত 4 : 3 এবং এদের একজন অপরজন থেকে 9 টাকা বেশি পায়। এদের প্রত্যেকের দৈনিক মজুরী কত? **[উত্তর : 36 টা., 27 টা.]**

20. দুই ব্যক্তির মাসিক বেতনের অনুপাত 3 : 5। যদি প্রত্যেকের মাসিক বেতন বৃদ্ধি 20 টাকা হয়, তবে অনুপাত হয় 13 : 21। ব্যক্তিদ্বয়ের বেতন নির্ণয় করুন। **[উত্তর : 240 টাকা ও 400 টাকা]**

21. 60 কেজি মিশ্রণে দুধ ও জলের অনুপাত 5 : 1। কি পরিমাণ জল মিশ্রণ করলে দুধ ও জলের অনুপাত 3 : 1 হবে? **[উত্তর : 10 কেজি]**

22. দুই ব্যক্তির মাসিক আয়ের অনুপাত 3 : 4 এবং মাসিক ব্যয়ের অনুপাত 11 : 15। তারা প্রতি মাসে 100 টাকা সঞ্চয় করে। তাদের মাসিক আয় কত? **[উত্তর :** 1200 টাকা ও 1600 টাকা]

23. 6 বছর আগে শঙ্কর ও শাহ্রুক-এর বয়সের অনুপাত ছিল 5 : 6। 6 বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত হবে 7 : 8। তাদের বর্তমান বয়সের অনুপাত কত? **[উত্তর :** 6 : 7]

24. দুই ভাই-এর বর্তমান বয়স 5 ও 8 বৎসর। কত বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত 3 : 4 হবে? [C. U. B.Com 1990] **[উত্তর :** 4 বৎসর পরে।]

25. দুই ব্যক্তির মাসিক বেতনের অনুপাত 8 : 9 এবং তাদের মাসিক ব্যয়ের অনুপাত 13 : 15 এবং যদি প্রত্যেকের সঞ্চয় 150 টাকা হয়, তবে তাদের বেতন নির্ণয় করুন।

[উত্তর : 800 টাকা ও 900 টাকা।]

26. যদি 30 জন লোক প্রত্যহ 8 ঘণ্টা কাজ ক'রে 20 দিনে 640 টাকা আয় করে, তবে প্রতিদিন 10 ঘণ্টা কাজ করে 45 জন লোক 24 দিনে কত আয় করবে? **[উত্তর :** 1440 টাকা]

27. দু'জন ব্যক্তির মাসিক আয়ের অনুপাত 4 : 3 এবং তাদের মাসিক ব্যয়ের অনুপাত 3 : 2। প্রত্যেকে মাসে 500 টাকা সঞ্চয় করলে তাদের মাসিক আয়ের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

[উত্তর : প্রথম ব্যক্তির মাসিক আয় 2000 টাকা, দ্বিতীয় ব্যক্তির মাসিক আয় 1500 টাকা।]

28. একটি একদিনের ক্রিকেট টেস্টের দুই ইনিংসে গাভাসকার, বিশ্বনাথ ও মহীন্দর অমরনাথ মোট 475 রান করল। যদি গাভাসকার ও বিশ্বনাথ এবং বিশ্বনাথ ও অমরনাথের মোট রানের অনুপাত 3 : 2 হয় তবে কে কত রান করেছিল নির্ণয় কর। **[উত্তর :** গাভাসকার, বিশ্বনাথ ও অমরনাথের প্রত্যেকের দুই ইনিংস-এ মোট রানের সংখ্যা যথাক্রমে 225, 150 ও 100।]

29. ক, খ ও গ একত্রে একটি ব্যবসায় আরম্ভ করে। ক ও খ-এর মূলধনের অনুপাত 2 : 3 এবং খ ও গ-এর মূলধনের অনুপাত 2 : 5। যদি বছরের শেষে 2000 টাকা লাভ হয়, তবে লাভের টাকা কে কত পাবে? **[উত্তর সংকেত :** লভ্যাংশের অনুপাত হবে 4 : 6 : 15]

30. A, B ও C এই তিন ব্যক্তি একটি ব্যবসায়ে প্রবৃত্ত হল। মূলধন খাতে A 50,000 টাকা, B 30,000 টাকা এবং C 25,000 টাকা বিনিয়োগ করল এই চুক্তিতে যে, মোট লাভের $\frac{4}{25}$ অংশ C ম্যানেজার হিসাবে পাবে এবং লাভের বাকী অংশ প্রত্যেকের মূলধনে নিয়োজিত অর্থের পরিমাণের অনুপাতে বণ্টিত হবে। বৎসরের শেষে মোট লাভের পরিমাণ 30,000 টাকা হলে, প্রত্যেক অংশীদারের পাওনা টাকার পরিমাণ নির্ণয় করুন। [C. U. B.Com. 1985] **[উত্তর :** A, B, C প্রত্যেক অংশীদারের পাওনা টাকার পরিমাণ যথাক্রমে 12,000 টাকা, 7,200 টাকা এবং 10,800 টাকা।]

২০.ক.১৬ গ্রন্থপঞ্জী

১। ব্যবসায়িক গণিত — ঘোষ ও সাহা।

২। ব্যবসায়িক গণিত — সৌরেন্দ্র নাথ দে।

একক ২০. খ. ❑ ভেদ (VARIATION)

গঠন

২০.খ.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি দুটি চলরাশির মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন।

২০.খ.১ ভেদের সংজ্ঞা

দুটি চলরাশি A ও B-এর মধ্যে যদি এরূপ সম্বন্ধ থাকে যে A-র মান পরিবর্তিত হলে B-র মানও একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয় তবে বলা হয় A ও B **সরল ভেদে** আছে। এবং লেখা হয় $A \propto B$.

মনে করি, একটি মোটরগাড়ী সমবেগে ঘণ্টায় 40 কি.মি. বেগে যায়। সুতরাং 2 ঘণ্টায় গাড়ীটি 80 কি.মি. যাবে। আবার 30 মি.-এ 20 কি.মি. যাবে। অতএব সময়ের সঙ্গে দূরত্ব সরলভেদে আছে. যদি x দূরত্ব এবং y সময় হয় তবে $\frac{x}{y}$ = ধ্রুবক হবে।

$= K$, মনে করি। $\therefore \quad x = Ky$.

• ব্যস্ত ভেদ (Inverse Variation) :

যদি একটি রাশির মানের পরিবর্তন অন্য একটি রাশির অন্যোন্যকের (inverse) মানের পরিবর্তনের সমানুপাতী হয় তবে একটি রাশি অপর রাশির সঙ্গে ব্যস্ত ভেদে আছে বলা হয়। যদি x ও y ব্যস্ত ভেদে থাকে তবে লেখা হয় $x \propto \frac{1}{y}$ অথবা $y \propto \frac{1}{x}$. এক্ষেত্রে x ও $\frac{1}{y}$ সরল ভেদে আছে।

• যৌগিক ভেদ (Joint Variation) :

যদি একটি চলরাশি অন্য একাধিক চলরাশির গুণফলের সঙ্গে সরল ভেদে থাকে তবে প্রথম চলরাশি অপর চলরাশিগুলির সঙ্গে যৌগিক ভেদে আছে বলা হয়।

(i) মনে করি, একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ, h উচ্চতা এবং b ভূমি। সুতরাং $\Delta = \frac{1}{2} \times b.h.$ অর্থাৎ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল তার ভূমি এবং উচ্চতার সঙ্গে যৌগিক ভেদে আছে।

(ii) সরল সুদের পরিমাণ আসল, সময় ও সুদের হারের সঙ্গে যৌগিক ভেদে আছে।

২০.খ.২. যৌগিক ভেদের উপপাদ্য

উপপাদ্য : z-এর মান অপরিবর্তিত রাখলে x যদি y-এর সঙ্গে সরল ভেদে থাকে, এবং y-এর মান অপরিবর্তিত রাখলে যদি x, z-এর সঙ্গে সরল ভেদে থাকে তবে y এবং z উভয়েরই মান পরিবর্তিত হলে yz-এর সঙ্গে x সরলভেদে থাকবে।

প্রমাণ : মনে করি a_1, b_1, c_1 যথাক্রমে x, y, z-এর মান। পরিবর্তিত হবার পর a_2, b_2, c_2 হল। শর্তানুসারে,

$x \propto y$, যখন z ধ্রুবক ... (i)

$x \propto z$, যখন y ধ্রুবক ... (ii)

প্রমাণ করতে হবে—

(i)-এ z অপরিবর্তিত আছে $(= c_1)$ এবং y, b_1 থেকে b_2 এবং x, a_1 থেকে a_2 হয়েছে। সুতরাং

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \ldots \text{ (iii)}.$$

(ii) থেকে পাই y, b_2-তে স্থির থাকে, z, c_1 থেকে c_2 হয় এবং x, a_2 থেকে a_3 হয়। সুতরাং

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{c_1}{c_2} \quad \ldots \text{ (iv)}.$$

(iii) ও (iv) থেকে পাই

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} \quad \text{বা, } \frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1 c_1}{b_2 c_2}$$

সুতরাং $a_1 : a_3 = b_1 c_1 : b_2 c_2$

অর্থাৎ যখন y এবং z উভয়েই পরিবর্তিত হয় তখন $x \propto yz$.

[**বিকল্প প্রমাণ :** $x \propto y$ যখন z ধ্রুবক $\therefore$ $x = ky$, যখন, k, x, y সাপেক্ষে ধ্রুবক। আবার $x \propto z$, যখন y ধ্রুবক।

$\therefore$ $ky \propto z$. যখন y ধ্রুবক। $\therefore$ $k \propto z$ যেহেতু y ধ্রুবক।

$\therefore$ $k = lz$ যেখানে l, k এবং z সাপেক্ষে ধ্রুবক।

$\therefore$ x, y ও z সাপেক্ষে l ধ্রুবক, যেহেতু k, x ও y সাপেক্ষে ধ্রুবক।

সুতরাং $x = ky$

$$= (lz).y$$

$=l(yz)$ যেখানে l, x, y ও z সাপেক্ষে ধ্রুবক।

$\therefore \quad x \propto yz$

দ্রষ্টব্য : চলরাশির সংখ্যা সসীম হলে এই উপপাদ্য সিদ্ধ হয়।

নিম্নের ফলগুলি সহজেই প্রমাণ করা যায় :

1) যদি $x \propto y$, $y \propto z$ হয়, তবে $x+y \propto z$, $x-y \propto z$, $\sqrt{xy} \propto z$

2) যদি $x \propto yz$ হয়, তবে $y \propto \frac{x}{z}$ এবং $z \propto \frac{x}{y}$

3) যদি $x \propto y$ হয়, তবে $x^n \propto y^n$

4) যদি $x \propto y$ এবং $z \propto l$ হয়, তবে $xz \propto yl$ এবং $\frac{x}{z} \propto \frac{y}{l}$

5) যদি $x \propto yz$ এবং $y \propto zx$ হয়, তবে z ধ্রুবক।

6) যদি $\frac{x}{y} \propto x+y$ এবং $\frac{y}{x} \propto x-y$ হয়, তবে x^2-y^2 ধ্রুবক।

7) যদি $x \propto y$, z অপরিবর্তিত এবং $x \propto \frac{1}{z}$, যখন y অপরিবর্তিত, তবে $x \propto \frac{y}{z}$ যখন y এবং z উভয়ই পরিবর্তিত হয়।

২০.খ.৩ উদাহরণমালা

উদা. 1. A, B^2-র সাথে সরল ভেদে আছে এবং $B=2$, যখন $A=6$. A ও B-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রশ্নানুযায়ী, $A \propto B^2 \quad \therefore A = KB^2$ যেখানে $K=$ ভেদ ধ্রুবক।

এখন, $B=2$, যখন $A=6$

$\therefore 6 = K.(2)^2$ বা, $K=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্পর্ক $A=\frac{3}{2}B^2$ বা, $2A=3B^2$

উদা. 2. যদি A, B-র সাথে ব্যস্ত ভেদে থাকে এবং $B=10$ হলে, $A=2$ হয়, তবে, $B=4$ হলে A-র মান কত হবে নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রশ্নানুযায়ী $A \propto \frac{1}{B} \quad \therefore \quad A=\frac{K}{B}-(\text{i})$ যেখানে $K=$ ভেদ ধ্রুবক।

এখন $B=10$ হলে, $A=2$ হয়,

$\therefore\ 2=\frac{K}{10}$ বা $K=20.$

$\therefore\ A=\frac{20}{B}$.(i-এ K-র মান বসিয়ে পাই)

আবার, $B=4$ হলে, $A=\frac{20}{4}=5.$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=5.$

উদা. 3. x যদি y ও z-এর সাথে যৌগিক ভেদে (Varies jointly) থাকে এবং $y=\frac{3}{5},\ z=\frac{10}{27}$ হলে, $x=2$ হয় তবে, $x=54$ ও $y=3$ হলে z-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x \propto yz$ বা $x=kyz-\text{(i)}$ ($K=$ ভেদ ধ্রুবক।)

$y=\frac{3}{5},\ z=\frac{10}{27}$ হলে $x=2$ হয়।

$$\therefore \text{(i) থেকে পাই, } 2=K.\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}.\frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{9}{\cancel{27}}}=K.\frac{2}{9}$$

$$\therefore\ K=\frac{9\cdot 2}{2}=9.$$

$\therefore$ (i) সম্পর্কটি হয়, $x=9yz\quad \ldots\quad \text{(ii)}$

আবার, (ii)-এ $x=54$ ও $y=3$ বসিয়ে পাই

$$54=9.3.z \text{ বা, } z=\frac{\overset{\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{54}}}{\cancel{9}.\cancel{3}}=2.$$

$\therefore$ z-র নির্ণেয় মান 2।

উদা. 4. শূন্যস্থান পূর্ণ করুন ঃ

(i) যদি $p^3 \propto q^2$ হয় তবে $q \propto$........

(ii) যদি $\sqrt{m} \propto \frac{1}{n}$ হয় তবে $n^2 \propto$......

(iii) যদি $n \propto \sqrt[3]{y^2}$ হয়, তবে $y \propto$......

সমাধান ঃ (i) $\because \ p^3 \propto q^2 \quad \therefore \ p^3 = kq^2$ [K = ভেদ ধ্রুবক]

বা $q^2 = \frac{p^3}{K}$ বা $q = \sqrt{\frac{p^3}{K}}$ বা $q = K^1 . p^{3/2}$ (যেখানে $\frac{1}{\sqrt{K}} = K^1$)

$\therefore \ q \propto p^{3/2}$ ($\because \ K^1$ ধ্রুবক)

$\therefore$ শূন্যস্থানে $p^{3/2}$ হবে।

(ii) $\because \ \sqrt{m} \propto \frac{1}{n} \quad \therefore \ \sqrt{m} = \frac{K}{n}$ বা $n = \frac{K}{\sqrt{m}}$

বা $n^2 = \frac{K^2}{m} = \frac{K^1}{m}$ (যেখানে $K^1 = K^2$)

$\therefore \ n^2 \propto \frac{1}{m}$ ($\therefore \ k^1$ = ধ্রুবক)

$\therefore$ শূন্যস্থানে $\frac{1}{m}$ হবে।

(iii) $\because \ x \propto \sqrt[3]{y^2} \quad \therefore \ x = Ky^{2/3}$ [K =ভেদ ধ্রুবক]

বা $x^3 = K^3 y^2$ (উভয়পক্ষে ঘন করে পাই)

বা $y^2 = \frac{x^3}{K^3}$ বা $y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{K^3}}$

বা $y = K^1 \sqrt{x^3}$ [যেখানে $K^1 = \pm\frac{1}{\sqrt{K^3}}$]

$\therefore \ y \propto x^{3/2}$ [$\because \ K^1$ = ধ্রুবক]

$\therefore$ শূন্যস্থানে $x^{3/2}$ হবে।

উদা. 5. $y = a + b$, যেখানে $a \propto x$ এবং $b \propto \frac{1}{x}$; $x = 1$ হলে $y = 11$ এবং $x = 2$ হলে $y = 13$ হবে। $x = 3$ হলে, y-র মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $y = a + b \quad \ldots \quad (1).$

এখন $a \propto x \quad \therefore \ a = k_1 x \quad$ (k_1 = ভেদ ধ্রুবক)

$$b \propto \frac{1}{x} \quad \therefore \quad b = \frac{k_2}{x} \qquad (k_2 = \text{ভেদ ধ্রুবক})$$

$\therefore$ (1)-এ a ও b-র মান বসিয়ে পাই,

$$y = k_1 x + \frac{k_2}{x} \qquad \ldots \quad (2)$$

এখন $x = 1, y = 11$ এবং $x = 2, y = 13$ (2)-এ বসিয়ে পাই

$$11 = k_1 + k_2 \qquad \ldots \quad (3)$$

$$13 = 2k_1 + \tfrac{1}{2}k_2 \quad \ldots \quad (4)$$

3-কে 2 দিয়ে গুণ করে পাই,

$$22 = 2k_1 + 2k_2$$

$$-13 = -2k_1 \pm \tfrac{1}{2}k_2$$

$$9 = \tfrac{3}{2}k_2 \quad \therefore \quad k_2 = 6$$

$\therefore \quad 14 = 11 - 6 = 5.$

(3) ও (4) সমাধান করে পাই $k_1 = 5 : k_2 = 6$

(2)-এ k_1 ও k_2-এর মান বসিয়ে পাই

$$y = 5x + {}^{6}\!/_{x} \quad \ldots \quad (5)$$

(5)-এ $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$$y = 5.3 + \frac{6}{3} = 17$$

নির্ণেয় মান $y = 17$

উদা. 6. যদি $ax + \frac{b}{y} \propto cx + \frac{d}{y}$ হয়, যেখানে a, b, c, d ধ্রুবক, তবে প্রমাণ করুন যে, xy ধ্রুবক।

সমাধান : $ax + \frac{b}{y} \propto cx + \frac{d}{y}$

বা $ax + \frac{b}{y} = k\left(cx + \frac{d}{y}\right)$ [k = ভেদ ধ্রুবক]

বা $ax + \frac{b}{y} = kcx + \frac{kd}{y}$

বা $ax - kcx = \frac{kd}{y} - \frac{b}{y}$

বা $x(a-kc) = \frac{1}{y}(kd-b)$

বা $xy = \frac{kd-b}{a-kc}$ = ধ্রুবক (যেহেতু a, b, c, d এবং k ধ্রুবক)

উদা. 7. দেওয়া আছে যে, বৃত্তের ক্ষেত্রফল তার ব্যাসার্ধের বর্গের অনুপাতে থাকে। যদি 21 সেমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল 1386 বর্গ সেমি হয়, তবে যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 35 সেমি., তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি, বৃত্তটির ক্ষেত্রফল = A বর্গ সেমি

এবং বৃত্তটির ব্যাসার্দ্ধ = r সেমি।

প্রশ্নানুযায়ী, $A \propto r^2$ বা $A = kr^2 - (\text{i})$ (যেখানে $k =$ ভেদ ধ্রুবক)

$r = 21$ এবং $A = 1386$ (i) সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$1386 = k.(21)^2 \text{ বা } k = \frac{\overset{\overset{\overset{22}{\cancel{66}}}{\cancel{198}}}{\cancel{1386}}}{\underset{3}{\cancel{21}} \times \underset{7}{\cancel{21}}} = \frac{22}{7}$$

$\therefore$ (i) সম্পর্কটি হয়, $A = \frac{22}{7} r^2$

এখন, $r = 35$ হলে, $A = \frac{22}{7} \times (35)^2 = 22 \times 5 \times 35$

$= 3850$ বর্গ সেমি।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = 3850 বর্গ সেমি।

উদা. 8. যদি 5 জন লোক 9 দিনে 10 একর জমি চাষ করতে পারে তবে 30 একর জমি চাষ করতে 25 জন লোকের কতদিন লাগবে ভেদ প্রণালীতে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি, লোক সংখ্যা = n, দিন সংখ্যা = d এবং জমির পরিমাণ a একর, এখন $n \propto a$, d অপরিবর্তিত থাকলে, আবার $n \propto \frac{1}{d}$ যখন a অপরিবর্তিত থাকে।

সুতরাং $n \propto \frac{a}{d}$ যখন a, d উভয়েই পরিবর্তিত হয়।

$\therefore \quad n = k\dfrac{a}{d}$ (k, ধ্রুবক)

শর্তানুসারে, $5 = k.\dfrac{10}{9}$ বা $k = \dfrac{5\times 9}{10} = \dfrac{9}{2}$

$\therefore \quad n = \dfrac{9}{2}.\dfrac{a}{d}.$

বা, $25 = \dfrac{9}{2}.\dfrac{30}{d} = \dfrac{9\times 15}{d}$

বা, $d = \dfrac{9\times \overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} = \dfrac{27}{5}$ দিন।

উদা. 9. যদি $a^2+b^2 \propto ab$ তবে দেখান যে $a+b \propto a-b$.

সমাধান : এখানে, $a^2+b^2 = kab$, k, a এবং b সাপেক্ষে ধ্রুবক।

এখন, $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

$$= kab + 2ab$$

$$= ab(k+2) \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

আবার, $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$

$$= kab - 2ab$$

$$= ab(k-2) \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

$\therefore \quad a+b \propto \sqrt{ab}$

$a-b \propto \sqrt{ab}$

$\therefore \quad a+b \propto a-b.$

উদা. 10. যদি $x+y \propto z$ যখন y অপরিবর্তিত এবং $x+z \propto y$ যখন z অপরিবর্তিত, তবে দেখান যে y ও z পরিবর্তিত হলে, $x+y+z \propto yz$.

সমাধান : প্রশ্নানুসারে, $x+y = mz$, m ধ্রুবক।

অতএব, $x+y+z = (m+1)z$ এবং $x+y+z \propto z \quad \ldots$ (i) (y, অপরিবর্তিত)

আবার $x+z = ny$, n ধ্রুবক

$\therefore \quad x+y+z = (n+1)y$ বা, $x+y+z \propto y \quad \ldots$ (ii) (z অপরিবর্তিত)

(i) এবং (ii) থেকে $x+y+z \propto yz$ যখন y, z উভয়েই পরিবর্তিত হয়।

উদা. 11. যদি $x \propto y$, প্রমাণ করুন যে $(x^2+y^2)(x-y) \propto x^3+y^3$.

প্রশ্নানুসারে, $x = my$, m ধ্রুবক।

এখন, $$\frac{(x^2+y^2)(x-y)}{x^3+y^3} = \frac{(m^2+1)y^2.(m-1)y}{y^3(m^3+1)} = \frac{(m-1)(m^2+1)}{m^3+1} = k$$

সুতরাং $(x^2+y^2)(x-y) = k(x^3+y^3)$

বা, $(x^2+y^2)(x-y) \propto x^3+y^3$

উদা. 12. যদি $x^2+y^2 \propto xy$ দেখান যে $x \propto y$.

সমাধান ঃ প্রশ্নানুসারে, $x^2+y^2 = mxy$, m ধ্রুবক।

এখন $(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy = mxy-2xy = xy(m-2)$

$\therefore \quad x-y \propto \sqrt{xy} \quad \ldots \quad$ (i)

আবার, $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = mxy+2xy = xy(m+2)$

$\therefore \quad x+y \propto \sqrt{xy} \quad \ldots \quad$ (ii)

(i) এবং (ii) থেকে পাই, $x+y \propto x-y$ বা, $(x+y) = k(x-y)$ (k, ধ্রুবক)

বা, $(1+k)y = (k-1)x$ বা, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1+k}{k-1}(k \neq 1)$

$\therefore \quad x \propto y$.

উদা. 13. দুইটি রাশির যোগফল y যার একটি রাশি x-এর সঙ্গে সরল ভেদে এবং অপরটি x-এর সাথে ব্যস্ত ভেদে আছে। যদি $y = 13$ যখন $x = 6$ হয় তবে $x = 24$ হলে y-এর মান নির্ণয় করুন। যখন দুটি ভেদ ধ্রুবক সমান।

সমাধান ঃ প্রশ্নানুসারে, $y = kx + k.\dfrac{1}{c}$. $\quad \ldots \quad$ (1)

$$\therefore \quad 13 = k\left(6+\frac{1}{6}\right) = \frac{37}{6}k. \quad \therefore \quad k = \frac{6\times 13}{37}.$$

(i)-এ k-র মান বসিয়ে পাই $y = \dfrac{6\times 13}{37}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

যখন $x = 24$, $\quad y = \dfrac{6\times 13}{37}\left(24+\dfrac{1}{24}\right) = \dfrac{\cancel{6}\times 13\times 577}{37\times \cancel{24}_{4}}$

$$=\frac{7501}{148}=50\frac{101}{148}.$$

উদা. 14. দেওয়া আছে যে, গোলকের আয়তন তার ব্যাসার্ধের ঘন-এর অনুপাতে থাকে। 3 এবং 5 ব্যাসার্ধের দুটি গোলককে গলিয়ে একটি গোলকে পরিণত করা হল। নূতন গোলকটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি, গোলক দুটির আয়তন V_1 এবং V_2

প্রশ্নানুসারে, $V \propto r^3$ ($r =$ গোলকের ব্যাসার্ধ)

সুতরাং $V_1 + V_2 = K(3^3 + 5^3)$. মনে করি তৃতীয় গোলকটির ব্যাসার্ধ R

অতএব, $V_1 + V_2 = KR^3$ (K ধ্রুবক)

বা, $KR^3 = K(9+25)$ বা, $R = \sqrt[3]{34}$.

উদা. 15. যদি $a-b \propto c$ হয় যখন b ধ্রুবক এবং $(a-c \propto b)$ হয় যখন c ধ্রুবক তবে দেখান যে, $a-b-c \propto bc$ যখন b ও c উভয়ই চল।

সমাধান ঃ $\because$ $(a-b) \propto c$ যখন b ধ্রুবক

$\therefore$ $a-b = k_1 c$ [যেখানে $k_1 =$ ভেদ ধ্রুবক] যখন b ধ্রুবক

বা $a-b-c = k_1 c - c = c(k_1 - 1)$, যখন b ধ্রুবক।

$\therefore$ $a-b-c \propto c$ যখন b ধ্রুবক (কারণ $k_1 - 1 =$ ধ্রুবক) ... (i)

আবার, $a-c \propto b$ যখন c ধ্রুবক। $\therefore$ $a-c = k_2 b$ [যেখানে $k_2 =$ ভেদ ধ্রুবক] যখন c ধ্রুবক।

বা $a-c-b = k_2 b - b = b(k_2 - 1)$ যখন c ধ্রুবক

$\therefore$ $a-c-b \propto b$ যখন c ধ্রুবক (কারণ $k_2 - 1 =$ ধ্রুবক) ... (ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে যৌগিক উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,

$a-b-c \propto bc$ যখন b ও c উভয়েই চল। (প্রমাণিত)

২০.খ.৪ অনুশীলনী

1. যদি $y \propto \frac{1}{x^2}$ এবং $x = 2$ হলে $y = 9$ হয়, তবে যখন $x = 3$, তখন y-র মান নির্ণয় করুন। [4]

2. শূন্যস্থান পূরণ করুন ঃ

(i) যদি $a^2 \propto bc$ হয়, তবে $b \propto$ ...... $\left[\frac{a^2}{c}\right]$

(ii) যদি $A \propto B^2$ হয়, তবে $B \propto$ ...... $[\sqrt{A}]$

(iii) যদি $P \propto \frac{1}{\sqrt{Q}}$ হয়, তবে $Q \propto$...... $\left[\frac{1}{P^2}\right]$

(iv) যদি $m \propto \sqrt[3]{n}$ হয়, তবে $n \propto$...... $\left[m^3\right]$

3. যদি $x^2 \propto yz$, $y^2 \propto zx$ এবং $z^2 \propto xy$ হয়, তবে ভেদের ধ্রুবকত্রয়ের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করুন।

[ধ্রুবক তিনটির গুণফল = 1]

4. যদি $x+y \propto x-y$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে,

(i) $(ax+by) \propto (px+qy)$ যেখানে (a, b, p, q ধ্রুবক)

(ii) $x^2+y^2 \propto x^2-y^2$

5. যদি $z \propto x$ ও $z \propto \frac{1}{y}$ এবং $z=3$ যখন $x=3$, $y=10$. z-এর মান নির্ণয় করুন যখন $x=9$, $y=15$. **[উত্তর : $z=12$]**

6. y তিনটি রাশির সমষ্টির সাথে সরল ভেদে আছে যার প্রথমটি x^2-এর সাথে, দ্বিতীয়টি x-এর সাথে সরল ভেদে এবং তৃতীয়টি ধ্রুবক। যদি $y=6$, 11 এবং 18 হয় যখন $x=1$, 2 এবং 3, তবে x এবং y-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করুন। **[উত্তর : $y=x^2+2x+3$].**

7. যদি $x+y \propto z$ যখন y ধ্রুবক, এবং $x+z \propto y$ যখন z ধ্রুবক, তবে দেখান যে $x+y+z \propto yz$, যখন y, z উভয়েই পরিবর্তিত হয়।

8. যদি $x \propto y^2$, $x \propto \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$ এবং যদি $x=2$ যখন $y=4$ এবং $z=8$ হয়, তবে y-এর মান নির্ণয় করুন যখন $x=3$ এবং $z=27$. **[উত্তর : $y=\pm 6$]**

9. যদি $x+y \propto z+\frac{1}{z}$ এবং $x-y \propto z-\frac{1}{z}$ হয় তবে x ও z-এর সম্পর্ক নির্ণয় করুন যদি $z=2$ হয় যখন $x=3$ এবং $y=1$. **[উত্তর : $x=\frac{22}{15}z+\frac{2}{15z}$]**

10. যদি $(x+y) \propto (x-y)$ হয় তবে দেখান $x^2+y^2 \propto xy(x-y)$

11. যদি $x \propto \frac{1}{y}$, তবে $x+y$ ক্ষুদ্রতম হবে যখন $x=y$.

12. যদি $y+z-x$ ধ্রুবক হয় এবং $(z+x-y)(x+y-z) \propto yz$ তবে প্রমাণ করুন যে $x+y+z \propto yz$.

13. যদি $x \propto y+z$, $y \propto z+x$ এবং $z \propto x+y$ এবং k, l, m যথাক্রমে তাদের ভেদ-ধ্রুবক হয় তবে দেখান যে $\frac{k}{k+1}+\frac{l}{l+1}+\frac{m}{m+1}=1$.

14. $x \propto yz^2$, $y \propto ab^2$ এবং $z \propto \frac{b}{a}$ হলে x-এর সাথে a, b-র সম্পর্ক নির্ণয় করুন।

[উত্তর : $x \propto \frac{b^4}{a}$].

15. যন্ত্রের কর্মক্ষমতা E, y^2-এর সাথে সরল ভেদে ও $\sqrt[3]{z}$-এর সাথে ব্যস্ত ভেদে আছে। কোন যন্ত্রের E-কে ধরা যায় 1, যখন $y = 6$ এবং $z = 27$; পরবর্তী সময়ে দেখা গেল $y = 4$ এবং $z = 8$। তাহলে ঐ সময়ে যন্ত্রটির কর্মক্ষমতা কত পরিমাণ হ্রাস পেল, তা শতকরা হিসেবে নির্ণয় করুন। [$33\frac{1}{3}\%$]

16. b-র মান দুটি রাশির সমষ্টির সমান, যাদের একটি a-র সহিত সরল ভেদে এবং অপরটি a^2-র সাথে ব্যস্ত ভেদে আছে। যদি $b = 49$ হয়, যখন, $a = 3$ অথবা 5, তবে a ও b-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করুন। [$b = 8a + \frac{225}{a^2}$]

17. একজন গ্রন্থকার নির্দিষ্ট থোক টাকা এবং প্রত্যেকটি বিক্রীত বই-এর জন্য নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থ অনুদান পান। 500 এবং 1350 খানি বিক্রীত বই-এর জন্য তিনি যথাক্রমে মোট 750 টাকা এবং 1175 টাকা পেলেন। 10,000 খানি বই-এর জন্য তিনি মোট কত টাকা পাবেন? [5,500 টাকা]

18. একটি ছাত্রাবাসের ব্যয় আংশিক ধ্রুবক ও আংশিক ছাত্র সংখ্যার সাথে সরল ভেদে আছে। ছাত্র সংখ্যা যদি 120 হয় তবে ব্যয় 2000 টাকা এবং ছাত্র সংখ্যা 100 হলে ব্যয় 1700 টাকা, তবে 1880 টাকা ব্যয় হলে ছাত্র সংখ্যা কত? [112 জন]

19. একটি গোলকের আয়তন $\propto r^3$ এবং পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $\propto r^3$ (r গোলকের ব্যাসার্ধ)। দেখান যে (আয়তন)^2 $\propto$ (পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল)^3।

20. 14 জন শ্রমিক প্রতিদিন 9 ঘণ্টা কাজ ক'রে 12 দিনে 3780 আমচারা রোপণ করে। কতজন শ্রমিক দৈনিক 8 ঘণ্টা কাজ ক'রে 45 দিনে 9000 চারা রোপণ করবে? [উত্তর : 10 জন]

21. একটি হীরকখণ্ড তিনটি অংশে বিভক্ত হল। অংশগুলির অনুপাত 1 : 2 : 3 এবং এর ফলে 22,000 টাকা ক্ষতি হল। যদি হীরকের মূল্য তার ওজনের বর্গের সাথে সমানুপাতী হয় তবে অখণ্ড পাথরটির মূল্য নির্ণয় করুন। [উত্তর : 36,000 টাকা]

22. একটি মোটরগাড়ীর পেট্রোলের খরচ তার বেগের বর্গের সঙ্গে সরল ভেদে আছে। বেগ ঘণ্টায় 32 কিমি হলে প্রতি ঘণ্টায় 2 লি. পেট্রল লাগে। যদি প্রতি লিটারের মূল্য 10 টাকা এবং অন্যান্য খরচ ঘণ্টায় 11.25 টাকা হয়, তবে 100 কি.মি. যেতে কমপক্ষে কত টাকা ব্যয় হবে? [উত্তর : 93.75 টাকা]

একক ২০. গ. ❑ সূচকের নিয়মাবলী ও করণী

গঠন

২০.গ.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন

- সূচক কী
- সূচকের নিয়মাবলী
- করণী কী

২০.গ.১ সূচকের সংজ্ঞা

$a \times a \times a = a^3$ এইরূপ লেখা হয়। সাধারণভাবে $a \times a \times .... \times a$ (n সংখ্যক a র গুণফল) $= a^n$, যদি $n \geq 2$ n কে সূচক বা ঘাত বলে। এখানে a একটি বাস্তব রাশি।

যদি $n = 1$ তবে $a^1 = a$ হবে।

২০.গ.২ সূচকের মূল নিয়মাবলী

যদি, m এবং n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা বা অখণ্ড সংখ্যা হয় তবে-

1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $m > n$ এবং $a \neq 0$.

$= 1$, $m = n$ এবং $a \neq 0$.

$= \frac{1}{a^{n-m}}$, $m > n$ এবং $a \neq 0$.

3) $(a^m)^n = a^{mn} = a^m a^m .....a^m$

4) $(ab)^n = a^n b^n$ এবং $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, $b \neq 0$.

5) $a^0 = 1$

6) $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$

উপরের সূত্রগুলি সহজেই প্রমাণ করা যায়।

মনে রাখতে হবে m, n ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) হলেও উপরের সূত্রগুলি সত্য হবে।

২০.গ.৩ উদাহরণমালা

উদা. 1. সরল করুন :

i) $9^{-5/2} = \frac{1}{9^{5/2}} = \frac{1}{\left(9^{1/2}\right)^5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$

ii) $\sqrt{a^3} \times a^{3/5} \times \sqrt[5]{a^{-8}} \cdot \frac{1}{a^{-4}} = a^{3/2} . a^{3/5} . a^{-8/5} . a^4$

$$=a^{3/2+3/5-8/5+4}=a^{9/2}=\sqrt{a^9}$$

iii) $\sqrt{a^4.b^{-3/4}.c^{5/6}}\div\sqrt[3]{a^{9/2}.b^{1/4}.c^{5/4}}=\dfrac{a^{4/2}.b^{-3/8}.c^{5/12}}{a^{3/2}.b^{1/12}.c^{5/12}}$

$$=a^{\frac{4}{2}-\frac{3}{2}}.b^{-\frac{3}{8}-\frac{1}{12}}=a^{\frac{1}{2}}.b^{-\frac{11}{24}}$$

উদা. 2. $x^y = y^x$ হলে দেখান যে $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=x^{\frac{x}{y}-1}$

$x^y = y^x$ বা, $x=y^{\frac{x}{y}}$ $\quad\therefore\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=\dfrac{x^{\frac{x}{y}}}{(y)^{\frac{x}{y}}}=\dfrac{x^{\frac{x}{y}}}{x}=x^{\frac{x}{y}-1}$

উদা. 3. যদি $a = b^x$, $b = c^y$, $c = a^z$ হয় প্রমাণ করুন যে $xyz = 1$.

এখানে $a = b^x = (c^y)^x = c^{yx} = (a^z)^{yx} = a^{xyz}$

সুতরাং $xyz = 1$.

উদা. 4. যদি $a^x = b^y = c^z$ এবং $b^2 = ac$ হয় প্রমাণ করুন যে $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{y}$

এখানে $a^x = b^y$ বা, $a=b^{\frac{y}{x}}$

আবার, $c^z = b^y$ বা, $c=b^{\frac{y}{z}}$

$\therefore\ ac=b^{\frac{y}{x}}.b^{\frac{y}{z}}=b^{y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)}$

$b^2 = ac$ থেকে পাই $b^2=b^{y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)}$

বা, $2=y\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)$ বা, $\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}$

উদা. 5. $x=1+3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$ হলে প্রমাণ করুন যে $x^3-3x^2-6x-4=0$

প্রশ্নানুসারে, $x-1=3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$

$$\therefore\ (x-1)^3=\left(3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)^3=3^2+3+3\,.\,3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$=12+3.3(x-1)$$

বা, $x^3 - 3x(x-1) - 1 = 12 + 9x - 9$

বা, $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 3 + 9x$

বা, $x^3 - 3x^2 - 6x - 4 = 0$

উদা. 6. সমাধান করুন :

$81^x = 3.9^{x+3}$

$\therefore\ 3^{4x} = 3.3^{2x-6}$ বা, $3^{4x} = 3^{2x+7}$

$\therefore\ 4x = 2x + 7$ বা, $2x = 7$ বা, $x = \frac{7}{2}$

উদা. 7. সমাধান করুন :

$4^{x+2} = 2^{2x+1} + 28$

$2^{2x+4} = 2^{2x+1} + 28$ বা, $2^{2x+1}.2^3 - 2^{2x+1} = 28$

বা, $7.2^{2x+1} = 28$ বা, $2^{2x+1} = 4 = 2^2$

$\therefore\ 2x + 1 = 2$ বা, $x = \frac{1}{2}$

উদা. 8. সমাধান করুন :

$3^{x-y} = 27$ .... (1)

$8^x = 2.16^{x+2y}$ .... (2)

(1) থেকে $3^{x-y} = 3^3\ \therefore\ x + y = 3$ .... (3)

আবার, (2) থেকে $(2^3)^x = 2.(2^4)^{x+2y} = 2^{4x+8y+1}$

$\therefore\ 3x = 4x + 8y + 1$ বা, $x + 8y + 1 = 0$ .... (4)

(3) এবং (4) থেকে পাই $x = \frac{25}{7}$, $y = -\frac{4}{7}$

উদা. 9. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির মধ্যে কোন সংখ্যাটি বড় তা নির্ণয় করুন।

(a) 2^{300}, 3^{200}; (b) 54^4, 21^{12}, (c) $(0.4)^4$, $(0.8)^3$

সমাধান :

(a) $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$

$3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$

$\therefore\ 9^{100} > 8^{100}$

বা, $3^{200} > 2^{300}$

(b) $(54)^4 = (2\cdot27)^4 = 2^4 \,.\, (27)^4 = 2^4 \,.\, 3^{12}$

$(21)^{12} = (3\cdot7)^{12} = 3^{12} \,.\, 7^{12} = (7^3)^4 \,.\, 3^{12} = (343)^4 \,.\, 3^{12}$

এখন $(343)^4 \,.\, 3^{12} > 2^4 \,.\, (27)^4$ সুতরাং $(21)^{12} > (54)^4$

(c) $(0\cdot4)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 . \left(\frac{2}{5}\right)$

$(0\cdot8)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 . 2^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 . 8$

এখন $\left(\frac{2}{5}\right)^3 . 8 > \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)$ সুতরাং $(0\cdot8)^3 > (0\cdot4)^3$

উদা. 10. প্রমাণ করুন —

(i) $\dfrac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}} + \dfrac{1}{1+x^{a-b}+x^{c-b}} + \dfrac{1}{1+x^{a-c}+x^{b-c}} = 1$

(ii) $\sqrt[p+q]{\dfrac{x^{p^2}}{x^{q^2}}} \times \sqrt[q+r]{\dfrac{x^{q^2}}{x^{r^2}}} \times \sqrt[r+p]{\dfrac{x^{r^2}}{x^{p^2}}} = 1$

(iii) $\dfrac{\left(p^2 - \frac{1}{q^2}\right)^p \left(p - \frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2 - \frac{1}{p^2}\right)^q \left(q + \frac{1}{p}\right)^{p-q}} = \left(\dfrac{p}{q}\right)^{p+q}$

(iv) $\dfrac{1}{1+p+q^{-1}} + \dfrac{1}{1+q+r^{-1}} + \dfrac{1}{1+r+p^{-1}} = 1$ যখন $pqr = 1$ হয়।

সমাধান (i) বামপক্ষ $= \dfrac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}} + \dfrac{1}{1+x^{a-b}+x^{c-b}} + \dfrac{1}{1+x^{a-c}+x^{b-c}}$

$= \dfrac{x^a}{x^a\left(1+x^{b-a}+x^{c-a}\right)} + \dfrac{x^b}{x^b\left(1+x^{a-b}+x^{c-b}\right)} + \dfrac{x^c}{x^c\left(1+x^{a-c}+x^{b-c}\right)}$

$= \dfrac{x^a}{x^a+x^b+x^c} + \dfrac{x^b}{x^b+x^a+x^c} + \dfrac{x^c}{x^c+x^a+x^b}$

$= \dfrac{x^a+x^b+x^c}{x^a+x^b+x^c} = 1$ = ডানপক্ষ প্রমাণিত।

(ii) বামপক্ষ $= \sqrt[p+q]{\dfrac{x^{p^2}}{x^{q^2}}} \times \sqrt[q+r]{\dfrac{x^{q^2}}{x^{r^2}}} \times \sqrt[r+p]{\dfrac{x^{r^2}}{x^{p^2}}}$

$= \left(x^{p^2-q^2}\right)^{\frac{1}{p+q}} \times \left(x^{q^2-r^2}\right)^{\frac{1}{q+r}} \times \left(x^{r^2-p^2}\right)^{\frac{1}{r+p}}$

$= x^{\frac{(p+q)(p-q)}{p+q}} \times x^{\frac{(q+r)(q-r)}{q+r}} \times x^{\frac{(r+p)(r-p)}{r+p}}$

$= x^{p-q} \times x^{q-r} \times x^{r-p} = x^{p-q-q-r-r-p} = x^0 = 1 =$ ডানপক্ষ প্রমাণিত।

(iii) বামপক্ষ $= \dfrac{\left(p^2 - \dfrac{1}{q^2}\right)^p \left(p - \dfrac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2 - \dfrac{1}{p^2}\right)^q \left(q + \dfrac{1}{p}\right)^{p-q}}$

$= \dfrac{\left(\dfrac{p^2q^2-1}{q^2}\right)^p \left(\dfrac{pq-1}{q}\right)^{q-p}}{\left(\dfrac{q^2p^2-1}{p^2}\right)^q \left(\dfrac{qp+1}{p}\right)^{p-q}}$

$= \dfrac{\{(pq+1)(pq-1)\}^p}{q^{2p}} \times \dfrac{(pq-1)^{q-p}}{q^{q-p}} \times \dfrac{p^{2q}}{\{(pq+1)(pq-1)\}^q} \times \dfrac{p^{p-q}}{(pq+1)^{p-q}}$

$= \dfrac{(pq+1)^p.(pq-1)^p.(pq-1)^{q-p}}{(pq+1)^q.(pq-1)^q.(pq+1)^{p-q}} \cdot \dfrac{p^{2q+p-q}}{q^{2p+q-p}}$

$= \dfrac{(pq+1)^{p-q-p+q}}{(pq-1)^{q-p-q+p}} . \dfrac{p^{q+p}}{q^{p+q}} = \left(\dfrac{p}{q}\right)^{p+q}$ = ডানপক্ষ প্রমাণিত

(iv) বামপক্ষ $\dfrac{1}{1+p+q^{-1}} + \dfrac{1}{1+q+r^{-1}} + \dfrac{1}{1+r+p^{-1}}$ [দেওয়া আছে $pqr = 1$]

$= \dfrac{1}{1+p+\dfrac{1}{q}} + \dfrac{1}{1+q+\dfrac{1}{r}} + \dfrac{1}{1+r+p^{-1}}$

$= \dfrac{q}{q+pq+1} + \dfrac{r}{r+qr+1} + \dfrac{1}{1+r+p^{-1}}$

$$= \frac{q}{q+\frac{1}{r}+1} + \frac{r}{r+\frac{1}{p}+1} + \frac{1}{1+r+p^{-1}} \quad \left[\because pqr = 1 \quad \therefore pq = \frac{1}{r} = r^{-1} \text{ এবং } qr = \frac{1}{p} = p^{-1}\right]$$

$$= \frac{qr}{qr+1+r} + \frac{r}{1+r+p^{-1}} + \frac{1}{1+r+p^{-1}}$$

$$= \frac{p^{-1}}{1+r+p^{-1}} + \frac{r}{1+r+p^{-1}} + \frac{1}{1+r+p^{-1}} = \frac{p^{-1}+r+1}{1+r+p^{-1}} = 1$$ = ডানপক্ষ প্রমাণিত।

উদা. 11. $x^{x\sqrt{x}} = \left(x\sqrt{x}\right)^x$ হলে x-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x^{x\sqrt{x}} = \left(x\sqrt{x}\right)^x$

বা, $\left(x^{\sqrt{x}}\right)^x = \left(x\sqrt{x}\right)^x \qquad \therefore\ x^{\sqrt{x}} = x\sqrt{x}$

বা, $x^{\sqrt{x}} = x.(x)^{\frac{1}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}}$

বা, $x^{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} \quad \therefore \sqrt{x} = \frac{3}{2}$ বা, $x = \frac{9}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় x-এর মান $\frac{9}{4}$ [Ans.]

উদা. 12. $x^{p^q} = \left(x^{\sqrt{p}}\right)^q$ হলে p-কে q দ্বারা প্রকাশ করুন।

সমাধান ঃ $x^{p^q} = \left(x^{\sqrt{p}}\right)^q$

বা, $x^{p^q} = x^{\sqrt{p}\cdot q} \quad \therefore\ p^q = q\sqrt{p}$

বা, $\frac{p^q}{\sqrt{p}} = q$ বা, $p^{q-\frac{1}{2}} = q$

বা, $p^{\frac{2q-1}{2}} = q \quad \therefore\ p = q^{\frac{2}{2q-1}}$ [Ans.]

২০.গ.৪ করণীর বলতে কী বোঝায়

যে সকল বাস্তব সংখ্যা কোন মূলদ সহগযুক্ত সমীকরণের বীজ সেগুলিকে **বৈজিক** (Algebraic) **সংখ্যা** বলে। যেমন 1.5, $1+\sqrt{2}$ ইত্যাদি।

যে সকল বাস্তব সংখ্যা কোন মূলদ সহগযুক্ত সমীকরণের বীজ নয় তাকে তুরীয় সংখ্যা (Transcendental number) বলে। যথা e, π ইত্যাদি।

অমূলদ বৈজিক সংখ্যাকে **করণী** (Surd) বলে।

অর্থাৎ কোন মূলদ সহগযুক্ত সমীকরণের অমূলদ বীজকে করণী বলে। যথা $\sqrt{2}$, কারণ $\sqrt{2}$ হ'ল $x^2 - 2 = 0$ সমীকরণের অমূলদ বীজ, আবার $3+\sqrt{2}$ একটি করণী কারণ এটি $x^2 - 6x + 7 = 0$ মূলদ সহগযুক্ত সমীকরণের একটি অমূলদ বীজ।

দ্রষ্টব্য : করণী মাত্রই অমূলদ রাশি কিন্তু অমূলদ রাশি মাত্রই করণী নয়। যথা π, e ইত্যাদি করণী নয়।

২০.গ.৫ করণীর ক্রম (Order)

করণীর মূল-সূচক সংখ্যা দ্বারা ইহার ক্রম নির্ণয় করা হয়। যথা $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[n]{a}$ যথাক্রমে দ্বিতীয়, তৃতীয় ও n-তম ক্রমের করণী (বা দ্বিঘাত, ত্রিঘাত ও n-ঘাত করণী।)

২০.গ.৬ করণীর প্রকারভেদ

২০.গ.৬.১ শুদ্ধ ও মিশ্র করণী

একটি মূলদ সংখ্যা ($\neq 1$) ও একটি করণীর গুণফলকে **মিশ্র করণী** বলে। যথা $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{5}$ ইত্যাদি। কোন করণীতে কোন মূলদ সহগ না থাকলে ($\neq 1$) তাকে **শুদ্ধ করণী** বলে। যথা, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{2}$ ইত্যাদি।

২০.গ.৬.২ সরল, দ্বিপদ, ত্রিপদ ও যৌগিক করণী (Simple, Binomial, Trinominal and Compound Surd)

একটি মাত্র পদবিশিষ্ট করণীকে $\left(\sqrt{5}, a\sqrt[n]{b}\right)$ **সরল করণী** বলা হয়।

একটি করণী ও একটি মূলদ সংখ্যার অথবা দুটি করণীর বীজগাণিতিক সমষ্টিকে **দ্বিপদ করণী** ($5+\sqrt{2}$, $\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}$ ইত্যাদি) বলে। অনুরূপে, $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$, $5+\sqrt[3]{4}-\sqrt{7}$ ইত্যাদি ত্রিপদ করণী।

একটি মূলদ সংখ্যা ও একটি বা একাধিক করণীর অথবা দুই বা ততোধিক করণীর বীজগাণিতিক সমষ্টিকে **যৌগিক করণী** বলে। যথা, $3+\sqrt{2}$, $\sqrt{5}+\sqrt{7}, \sqrt{2}-2, \sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{4}$ ইত্যাদি যৌগিক করণী।

২০.গ.৬.৩ সদৃশ ও অসদৃশ করণী

যে সকল করণীর একই অমূলদ উৎপাদক থাকে অথবা যে করণীগুলিকে একই অমূলদ উৎপাদক বিশিষ্ট করণীরূপে প্রকাশ করা যায়, তাদের **সদৃশ করণী** (Similar Surd) বলে, অন্যথায় এদের অসদৃশ করণী বলে। $\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}, 5\sqrt{3}$ ইত্যাদি সদৃশ করণী কারণ প্রত্যেকটির অমূলদ উৎপাদক $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$ ও $\sqrt{27}$ এরাও সদৃশ করণী কারণ $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

২০.গ.৬.৪ অনুবন্ধী (Conjugate) করণী

দুটি দ্বিপদ বিশিষ্ট দ্বিঘাত করণীর পদদ্বয় একই হলে এবং তাদের সংযোগকারী চিহ্নটি বিপরীত হলে একটিকে অপরটির **অনুবন্ধী** বলে। $a+\sqrt{b}$ এবং $a-\sqrt{b}$ করণী দুটি পরস্পর অনুবন্ধী।

২০.গ.৭ করণী-নিরসন (Rationalisation of Surds)

কোন করণীকে অন্য কোন করণীর দ্বারা গুণ করলে যদি কোন মূলদ রাশি পাওয়া যায় তবে একটিকে অপরটির **করণী-নিরসন উৎপাদক** বলে।

সুতরাং একটি দ্বিঘাত, দ্বিপদ করণীর অনুবন্ধী করণী তার করণী-নিরসন উৎপাদক।

$$\left(a+\sqrt{b}, a-\sqrt{b}\right), \left(a\sqrt{b}+c\sqrt{d}, a\sqrt{b}-c\sqrt{d}\right)$$

করণী-নিরসন উৎপাদকের কয়েকটি উদাহরণ ঃ

(a) যদি $s=\sqrt{x}+\sqrt{y},\ k=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ হবে করণী-নিরসন উৎপাদক; কেননা

$$sk=\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2=x-y,\ (x\geq 0, y\geq 0,)$$

(b) দেখান যে (i) $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$-এর করণী-নিরসন উৎপাদক $(x)^{\frac{2}{3}}-(xy)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$

(ii) $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$ এর করণী-নিরসন উৎপাদক $(x)^{\frac{2}{3}}+(xy)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$

২০.গ.৮ দ্বিপদ করণীর ধর্মাবলী

(1) দুটি সদৃশ দ্বিঘাত করণীর গুণফল ও ভাগফল মূলদ হবে। বিপরীতক্রমে যদি দুটি করণীর গুণফল এবং ভাগফল মূলদ হয়, তবে করণী দুটি সদৃশ হবে।

(2) দুটি অসদৃশ দ্বিঘাত করণীর গুণফল ও ভাগফল মূলদরাশি হতে পারে না।

(3) একটি সরল দ্বিঘাতকরণী কখনও একটি মূলদ রাশি ও একটি দ্বিঘাত করণীর যোগফল বা অন্তরফলের সমান হতে পারে না।

[**প্রমাণ :** যদি সম্ভব হয়, মনে করি, $\sqrt{a}=b\pm\sqrt{c}$ (a, b, c মূলদ সংখ্যা এবং $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ দ্বিঘাত করণী)।]

সুতরাং $a=(b\pm\sqrt{c})^2=b^2+c^2\pm 2b\sqrt{c}$

$\therefore \sqrt{c}=\pm\dfrac{(a-b^2-c^2)}{2b}$ এটি একটি মূলদ রাশি।

অর্থাৎ একটি করণী (অমূলদ রাশি) একটি মূলদ রাশির সমান হচ্ছে। কিন্তু এটা অসম্ভব। অতএব $\sqrt{a}=b\pm\sqrt{c}$ এরূপ সম্ভব নয়।]

(4) যদি $x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$ হয় এবং যদি x ও a মূলদ এবং $\sqrt{y}$ ও $\sqrt{b}$ অমূলদ হয় তবে $x = a$ এবং $y = b$ হবে।

[**প্রমাণ :** মনে করি, $x\neq a$ এবং $x = a + m$ (m মূলদ)

$\therefore a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}=a+m+\sqrt{y}$

$\therefore \sqrt{b}=m+\sqrt{y}$ অর্থাৎ একটি সরল দ্বিঘাত করণী একটি মূলদ রাশি ও একটি করণীর সমষ্টির সমান হচ্ছে যেটা অসম্ভব। সুতরাং $x = a$ এবং $y = b$।

অনুরূপে $a-\sqrt{b}=x-\sqrt{y}$ হলে $x=a,\ y=b$ হবে।

যদি $a\pm\sqrt{b}=0$ হয় তবে $a = 0,\ b = 0$]

(5) যদি $\sqrt{(x+\sqrt{y})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ তবে $\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

২০.গ.৯ দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল

আমরা জানি, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ এর বর্গ একটি মূলদ রাশি ও একটি অমূলদ রাশির সমষ্টি হবে। অর্থাৎ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$-এর বর্গকে $x+\sqrt{y}$ আকারে প্রকাশ করা যায়। সুতরাং $(x+\sqrt{y})$-এর বর্গমূল $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ আকারের হবে।

(i) $a+\sqrt{b}$-এর বর্গমূল নির্ণয় ঃ

মনে করি, $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

বা, $a+\sqrt{b}=(x+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y}$

$\therefore a=x+y......(1)$ এবং $b=4xy......(2)$

এখন $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=a^2-b$

$\therefore x-y=\pm\sqrt{a^2-b}$

আবার $x+y = a$

$\therefore 2x=a\pm\sqrt{a^2-b}$ বা, $x=\frac{1}{2}\left[a\pm\sqrt{a^2-b}\right]$

এবং $y=\frac{1}{2}\left[a\mp\sqrt{a^2-b}\right]$

সুতরাং $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2-b}\right)}\right]$

অনুরূপে $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ আকারের হবে।

(ii) $\left(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)$-এর বর্গমূল নির্ণয় ঃ

মনে করি, $\sqrt{\left(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)}=\pm\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$——(1)

উভয় পক্ষের বর্গ করে পাই $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}}$, $y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}}$

এবং $z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}}$, সুতরাং নির্ণেয় বর্গমূল (1)-এ x, y ও z -এর মান বসিয়ে পাই।

দ্রষ্টব্য ঃ যেহেতু a = $x+y+z$, আমরা পাই $2a\sqrt{bcd}=bd+bc+cd$

উপরের শর্ত পূরণ না হলে $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$ আকারে বর্গমূল নির্ণয় করা সম্ভব হবে না।

২০.গ.১০ উদাহরণমালা

উদা 1. মান নির্ণয় করুন ঃ $\frac{4+2\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}$

হরের করণী-নিরসন ক'রে পাই,

$$\frac{4+2\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}=\frac{\left(4+2\sqrt{5}\right)\left(7-3\sqrt{5}\right)}{\left(7+3\sqrt{5}\right)\left(7-3\sqrt{5}\right)}=\frac{28+2\sqrt{5}-30}{49-9\times 5}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}-2}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

উদা. 2 সরল করুন ঃ $\frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}}+\frac{3\sqrt{2}}{2+\sqrt{6}}-\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

প্রথম রাশি $=\frac{2\sqrt{3}(3-\sqrt{6})}{9-6}=\frac{6\sqrt{3}-2\sqrt{3}.\sqrt{6}}{3}$

$=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

দ্বিতীয় রাশি $=\frac{3\sqrt{2}}{2+\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{2}(2-\sqrt{6})}{4-6}=-\frac{6\sqrt{2}-6\sqrt{3}}{2}$

$=3\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

তৃতীয় রাশি $=\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{5\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{2-3}=5\sqrt{3}-5\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-3\sqrt{2}-5\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

$= \sqrt{3}(2+3-5)-\sqrt{2}(2+3-5)=0$

উদা. 3 করণী-নিরসন করুন : $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}}{\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}\right]\left[\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right]}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5-5+2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

উদা. 4. করণী-নিরসন উৎপাদক নির্ণয় করুন : $\sqrt{5}+\sqrt[3]{7}$

$\sqrt{5}+\sqrt[3]{7}=5^{\frac{1}{2}}+7^{\frac{1}{3}}$; 2 এবং 3 এর ল.সা.গু. = 6.

মনে করি, $x=5^{\frac{1}{2}}$ এবং $y=7^{\frac{1}{3}}$.

$\therefore\ x^6+y^6=(x+y)\left(x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5\right)$

এখানে $x^6=125$, $y^6=49$. অতএব x^6+y^6 মূলদ।

সুতরাং $x+y=\sqrt{5}+\sqrt[3]{7}$ এর করণী-নিরসন উৎপাদক

$x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$

$=5^{\frac{5}{2}}-5^2.7^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{3}{2}}.7^{\frac{2}{3}}-5.7+5^{\frac{1}{2}}.7^{\frac{4}{3}}-7^{\frac{5}{3}}$

উদা. 5. যদি $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ হয় প্রমাণ কর যে $x^4-10x+1=0$

সমাধান :

দেওয়া আছে, $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$\therefore\ x^2=5+2\sqrt{6}$ (উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই)

বা, $x^2-5=2\sqrt{6}$

পুনরায় বর্গ করে পাই, $\left(x^2-5\right)^2=(2\sqrt{6})^2$

$\therefore\ x^4-10x+1=0$ প্রমাণিত।

উদা. 6. যদি $x=7-4\sqrt{3}$ হয় তবে $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$-এর মান নির্ণয় করুন।

$x=3+4-2.2\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2$

$\therefore\ \sqrt{x}=2-\sqrt{3}$

$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+2}{4-3}=+2+\sqrt{3}$

$\therefore\ \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=+4.$

উদা. 7. $(7+4\sqrt{3})$র বর্গমূল নির্ণয় করুন।

মনে করি, $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\pm\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$

বা, $7+4\sqrt{3}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=x+y+2\sqrt{xy}.$

সুতরাং $x+y=7$ -------- (1)

$\sqrt{xy}=2\sqrt{3}$

বা, $xy=12$ -------- (2)

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=49-48$

$=1$ [1 এবং 2 থেকে]

$\therefore\ x-y=1$ -------- (3)

[1 এবং 3 থেকে পাই $x=4$, $y=3$.]

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(2+\sqrt{3})$

অন্যভাবে, $7+4\sqrt{3}=4+\left(\sqrt{3}\right)^2+2.2.\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(2+\sqrt{3}\right)$

উদা. 8. বর্গমূল নির্ণয় করুন ঃ $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$

মনে করি, $\sqrt{(10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15})}=\pm\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$

সুতরাং $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$.

$\therefore\ x+y+z=10$ -------- (1)

$xy=6$ -------- (2), $yz=10$ -------- (3), $zx=15$ -------- (4)

(2), (3) এবং (4) থেকে পাই $xyz=\sqrt{6}.\sqrt{10}.\sqrt{15}$

$\therefore\ xyz=30$ -------- (5)

$$\therefore\ x=\frac{xyz}{zy}=\frac{30}{10}=3$$

$$y=\frac{xyz}{zx}=\frac{30}{15}=2$$

$$z=\frac{xyz}{xy}=\frac{30}{6}=5$$

নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$

অন্য পদ্ধতি ঃ

$$10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2+2.\sqrt{2}.\sqrt{3}+2.\sqrt{5}.\sqrt{2}+2.+\sqrt{5}.\sqrt{3}$$

$$=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$

উদা. 9. ঘনমূল নির্ণয় করুন ঃ $10+6\sqrt{3}$

মনে করি, $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}=x+\sqrt{y}$ ------(1)

সুতরাং $\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=x-\sqrt{y}$

$$\therefore\ \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}.\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=\left(x+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{y}\right)$$

বা, $\left(x^2-y\right)=\sqrt[3]{100-108}=-2$ -------(2)

(1) থেকে $10+6\sqrt{3}=\left(x+\sqrt{y}\right)^3=x^3+y\sqrt{y}+3xy+3x^2\sqrt{y}$

$$=\left(x^3+3xy\right)+y\sqrt{y}+3x^2\sqrt{y}$$

$\therefore x^3+3xy=10$. (2) থেকে y-এর মান বসিয়ে পাই —

$$x^3+3x\left(x^2+2\right)=10$$

বা, $4x^3+6x-10=0$ বা, $2x^3+3x-5=0$

$\therefore$ $x = 1$ এবং (2) থেকে $y = 3$.

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $1+\sqrt{3}$.

উদা. 10. চতুর্থমূল নির্ণয় করুন : $17+12\sqrt{2}$.

$$17+12\sqrt{2}=17+2\sqrt{72}=9+8+2\sqrt{9}.\sqrt{8}=\left(\sqrt{9}+\sqrt{8}\right)^2$$

$$=\left(3+2\sqrt{2}\right)^2=\left(2+1+2.1.\sqrt{2}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{2}+1\right)^4$$

$\therefore \sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1.$

২০.গ.১১ অনুশীলনী

[ক]

1) সরল করুন : (i) $\left(\dfrac{x^p}{x^q}\right)^{p+q}\div\left(\dfrac{x^{p+q}}{x^{p-q}}\right)^{\frac{p^2}{q}}$ [উঃ $x^{\frac{1}{p^2+q^2}}$]

(ii) $\left(\dfrac{x^m}{x^n}\right)^{m+n-l}\times\left(\dfrac{x^n}{x^l}\right)^{n+l-m}\times\left(\dfrac{x^l}{x^m}\right)^{l+m-n}$ [উঃ 1]

(iii) $\sqrt[ln]{\dfrac{x^l}{x^n}}\times\sqrt[mn]{\dfrac{x^n}{x^m}}\times\sqrt[lm]{\dfrac{x^m}{x^l}}$ [উঃ 1]

(iv) $\left(\dfrac{1}{a^{x-y}}\right)^{\frac{1}{x-z}}\times\left(\dfrac{1}{a^{y-z}}\right)^{\frac{1}{y-x}}\times\left(\dfrac{1}{a^{z-y}}\right)^{\frac{1}{z-x}}$ [উঃ 1]

(v) $\dfrac{1}{x^b+x^{-c}+1}+\dfrac{1}{x^c+x^{-a}+1}+\dfrac{1}{x^a+x^{-b}+1}$; দেওয়া আছে $a+b+c=0$ [উঃ 1]

(2) যদি $2^x = 3^y = 12^z$ হয়, দেখান যে $(x+2y)z = xy$.

(3) $x = 5 - 5^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{1}{3}}$ হলে প্রমাণ করুন যে, $x^3 - 15x^2 + 60x - 20 = 0$

(4) $a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}} = 0$ হয়, দেখান যে $(a+b+c)^3 = 27abc$

(5) সরল করুন : $\dfrac{e^{2x} + e^{-x} - e^{x} - 1}{e^{2x} - e^{-x} + e^{x} - 1}$. [উঃ $\dfrac{e^{x} - 1}{e^{x} + 1}$]

(6) $y = x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}$ হ'লে প্রমাণ করুন যে $y^3 + 3y = x - \dfrac{1}{x}$

(7) যদি $a^{m^n} = \left(a^m\right)^n$ হয়, তবে m কে n এর সাপেক্ষে নির্ণয় করুন। $\left[m = n^{\frac{1}{n-1}}\right]$

সমাধান করুন :

(8) $\left(\sqrt{3}\right)^{x+4} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{2x+1}$ [উঃ $x=10$]

(9) $x^y = y^x$ এবং $x = 2y$ [উঃ x = 0, y = 0]

(10) $5^{2x+1} = 5^{2x} + 100.$ [$x = 1$]

(11) (i) $2^x.6^y = 24$ এবং $2^{2x}.3^y = 48$ [উঃ $x = 2,\ y = 1$]

(ii) $2^{2x+1}.2^{3y+1} = 8$ এবং $2^{x+2}.2^{y+2} = 16$ [উঃ $-1,\ 1$]

(iii) $4^x - 3.2^{x+2} + 2^5 = 0$ [উঃ $x = 2,\ 3$]

(iv) $x^y = y^x$ এবং $x^2 = y^3$ [উঃ $x = \dfrac{27}{8},\ y = \dfrac{9}{4}$]

(12) $m = 8$ এবং $y = 27$ হলে $\left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$-এর মান নির্ণয় করুন।

(13) মানের উর্দ্ধক্রমে সাজান (i) $\sqrt[3]{27},\ \sqrt{16},\ \sqrt[5]{32}$ (ii) $2^{2^{2^2}}, \left(2^{2^2}\right)^2, \left(2^2\right)^{2^2}$

[উঃ (i) $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt{16}$ (ii) বৃহত্তম $2^{2^{2^2}}$ অন্যগুলো সমান।]

(14) $4^x = 8^y$ হলে $\dfrac{x}{y}$-এর মান নির্ণয় করুন। [উঃ $\dfrac{3}{2}$]

(15) $\left(x^{n^3}\right)^n = \left(x^{3^n}\right)^3$ হলে, দেখান যে, $\sqrt[n+1]{n^4} = 3$.

(16) $(56)^a = (5{\cdot}6)^b = (10)^c$ হলে, দেখান যে, $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

(17) সরলতম মান নির্ণয় করুন : (i) $\left[1 - \left\{1 - \left(1 - x^3\right)^{-1}\right\}^{-1}\right]^{\frac{-1}{3}}$ যখন x = 0.1 [উঃ 0.1]

(ii) $\dfrac{(3^{2n}-4\cdot 3^{3n-2})(2^{n}-3\cdot 2^{n-2})}{2^{n-4}(3^{2n+3}-7\cdot 9^{n})}$ [উঃ $\frac{1}{9}$]

(18) যদি $a^{p} = b^{q} = (ab)^{pq}$ হয়, তবে দেখান যে, p + q = 1.

[খ]

1) পূর্ণ করণীতে প্রকাশ করুন ঃ (i) $3\sqrt[3]{2}$ (ii) $5\sqrt[3]{7}$

[(i) $\sqrt[3]{54}$, (ii) $\sqrt[3]{875}$,]

2) মানের ক্রম অনুসারে সাজান ঃ $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{12}$,

[$\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{12}$, $\sqrt{5}$,]

3) $x = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ এবং $y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ হলে

$\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y}$

$\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y}$-এর মান নির্ণয় করুন। [$\frac{15}{13}$]

4) সরল করুন ঃ $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} - \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} + \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$. [0]

5) বর্গমূল নির্ণয় করুন ঃ

(i) $41+6\sqrt{32}$ (ii) $28-6\sqrt{3}$ (iii) $\sqrt{32}-\sqrt{24}$

[(i) $\pm(4\sqrt{2}+3)$ (ii) $\pm(3\sqrt{3}-1)$ (iii) $\sqrt[4]{2}(\sqrt{3}-1)$]

6) বর্গমূল নির্ণয় করুন ঃ

(i) $11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$. [$\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{2}$]

(ii) $5-\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{6}$. [$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$]

7) করণী নিরসন উৎপাদক নির্ণয় করুন ঃ

(i) $5^{1/4}+3^{1/4}$, [$5^{3/4}-5^{1/2}3^{1/4}+5^{1/4}3^{1/2}-3^{3/4}$]

(ii) $\sqrt[3]{2}+3$. [$2^{2/3}-3\cdot 2^{1/3}+9$]

8) সরল করুন : $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ [2]

9) $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ হলে, প্রমাণ করুন যে

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

10) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{2}$ হলে, $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$-এর মান নির্ণয় করুন। [$^{91}/_{73}$]

[সংকেত : $2\sqrt{a}-2\sqrt{b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$. বা, $\sqrt{a}=3\sqrt{b}$ বা, $a=3b$ বা, $a^2=9b^2$]

11) $a+b+\sqrt{2ab+b^2}$ -এর বর্গমূল নির্ণয় করুন।

$$\left[\pm\left(\sqrt{\frac{2a+b}{2}}+\sqrt{\frac{b}{2}}\right)\right]$$

12) ঘনমূল নির্ণয় করুন : $7-5\sqrt{2}$. [$1-\sqrt{2}$]

13) চতুর্থ মূল নির্ণয় করুন : $28+16\sqrt{3}$. [$\pm(\sqrt{3}+1)$]

14) $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$ হলে প্রমাণ করুন যে $(x+y+z)^3=27xyz$.

15) যদি $x=2+\sqrt{3}$ হয়, প্রমাণ করুন $x^2-4x+1=0$

একক ২১. ক. ❑ প্রগতি [Progression]

২১.ক.১ সংখ্যার অনুক্রম

ধরি প্রতিটি স্বাভাবিক সংখ্যা n-এর জন্য অনুসঙ্গ একটি সংখ্যা পাওয়া যায় এবং যা একটি নির্দিষ্ট নিয়ম মেনে চলে।

ধরি n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা। যদি n-এর অনুসঙ্গ একটি সংখ্যা a_n পাওয়া সম্ভব হয় যা একটি নির্দিষ্ট নিয়ম মেনে চলে তখন $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ সংখ্যাগুলি একটি অনুক্রম গঠন করে। $a_1, a_2, \ldots a_n$ সংখ্যাগুলিকে অনুক্রমের **পদ** এবং a_n-কে অনুক্রমের n-তম পদ বলে। অনুক্রমের পদসংখ্যা যদি সসীম তাহলে অনুক্রমটিকে **সসীম** বলে এবং পদসংখ্যা অসীম হলে তাকে **অসীম** অনুক্রম বলে।

কয়েকটি সসীম ও অসীম অনুক্রমের উদাহরণ ঃ

a) 1, 4, 9 ... 100 — সসীম অনুক্রম।

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{n} \ldots$ অসীম অনুক্রম।

c) 2, –3, 4, –5, 6 ... অসীম অনুক্রম।

d) $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6 \ldots$ অসীম অনুক্রম।

(a) অনুক্রমের প্রথম পদ, 1; দ্বিতীয় পদ 4 ... দশতম পদ—100,

এখানে পদসংখ্যা 10, সুতরাং এটি সসীম অনুক্রম।

(b) অনুক্রমের প্রথম পদ 1, দ্বিতীয় পদ $+\frac{1}{2} \ldots$ n-তম পদ $= a_n = \frac{1}{n}$ ইত্যাদি।

এখানে পদসংখ্যা অসীম, সুতরাং অসীম অনুক্রম।

অনুরূপভাবে, (c) অনুক্রমের প্রথম পদ 2, n-তম পদ $a_n = (n+1)$, যদি n বিজোড় সংখ্যা হয়, এবং $a_n = (-1)^{n-1} + n$ যদি n জোড় সংখ্যা হয়।

(d) অনুক্রমটির প্রথম পদ 1, $a_n = \begin{cases} n \text{ if } n = 2k & (k = 1, 2 \ldots) \\ \frac{1}{n} \text{ if } n = 2k-1, & \end{cases}$

উদাহরণ (i) $-2, 0, 2, 4 \ldots 2n-4 \ldots$; $a_n = 2n-4$, $(n = 1, 2, 3 \ldots)$

(ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots \frac{n}{n+1} \ldots$; $a_n = \frac{n}{n+1}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$; **অসীম অনুক্রম**

(iii) $1, -1, 1, -1 \ldots (-1)^{n-1} \ldots$; $a_n = (-1)^{n-1}$, $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ **অসীম অনুক্রম**

(iv) 5, 5, 5 ... 5 ... $a_n = 5$ .... **অসীম অনুক্রম**

(v) 7, –5, –6, 0, 1 ... **সসীম অনুক্রম**

২১.ক.২ সমান্তর প্রগতি (Arithmetic Progression)

যদি কোন সংখ্যা অনুক্রমের পদগুলি এরূপে গঠিত হয় যে, দ্বিতীয় পদ থেকে শুরু করে পরবর্তী পদগুলি, পূর্ববর্তী পদটির সাথে একটি ধ্রুব সংখ্যা যোগ করলে পাওয়া যায়, তখন এই বিশেষ অনুক্রমটিকে সমান্তর প্রগতি বলা হয়।

ধরি $a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ একটি সমান্তর প্রগতি। সংজ্ঞানুসারে—

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots a_{n+1} - a_n = \ldots$$

অর্থাৎ, সমান্তর প্রগতিতে যে কোন পদ ও তার ঠিক পূর্ববর্তী পদের অন্তর সর্বদা সমান থাকে। এই ধ্রুব সংখ্যাটিকে সমান্তর প্রগতির **সাধারণ অন্তর** বলে।

ধরি প্রথম পদটি $a_1 = a$, সাধারণ অন্তর d, তাহলে $a_2 = a_1 + d = a + d$, $a_3 = a_2 + d = a + 2d$ $\ldots a_n = a_{n-1} + d \ldots$ ইত্যাদি।

সুতরাং $a, a+d, a+2d, a+3d \ldots + \{a+(n-1)d\} + \ldots$ অনুক্রমটি সবসময় একটি সমান্তর প্রগতি।

যদি $a = 2$, $d = 1$ হয় তাহলে

$2, 2+1, 2+2.1, 2+3.1; \ldots$

বা, $2, 3, 4, 5, 6 \ldots$ একটি সমান্তর প্রগতি।

- **সমান্তর প্রগতির বিশেষ বৈশিষ্ট্য**

একটি সমান্তর প্রগতির যে কোন পদ দ্বিতীয় পদ থেকে শুরু করে যে কোন পরবর্তী পদ, পূর্বপদ ও উত্তর পদের সমান্তরীয় মধ্যক (বা গড়)।

ধরি, $a_1, a_2\ a_3 \ldots a_{n-1}, an, a_{n+1} \ldots$ একটি সমান্তর প্রগতি এবং d সাধারণ অন্তর।

অতএব $a_2 = a_1 + d, \ldots\ldots\ldots$(i)

$$a_3 = a_2 + d \ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

(i) ও (ii) বিয়োগ করে $a_2 - a_3 = a_1 - a_2$ বা, $2a_2 = a_1 + a_3$ বা, $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = a_1$ ও a_3-র সমান্তরীয় মধ্যক।

অনুরূপভাবে, $a_n = a_{n-1} + d$

$$\frac{a_{n+1} = a_n + d}{a_n - a_{n+1} = a_{n-1} - a_n} \text{ বা } a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

- **সমান্তর প্রগতির n-তম পদ নির্ণয়**

ধরি a_1 a_2 .... a_n একটি সমান্তর প্রগতি।

$$\left.\begin{aligned} \text{সুতরাং } a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d \\ a_n &= a_{n-1} + d \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{উভয় দিকে যোগ করে পাই,} \\ &a_2 + a_3 \ldots + a_n = a_1 + a_2 \ldots + a_{n-1} + (d + d \ldots)(n-1) \text{ পদ} \\ &\text{বা, } a_n = a_1 + (n-1)\ d \end{aligned}$$

সুতরাং n-তম পদ $a_n = a_1 + (n-1)\,d$

২১.ক.২.১ সমান্তর প্রগতির সসীম সংখ্যক পদের সমষ্টি বা সমান্তর শ্রেণীর সসীম সংখ্যক পদের সমষ্টি

মনেকরি, প্রথম পদ = a, সাধারণ অন্তর = d.

n-তম পদ = $a + (n - 1)\,d = l$

$\therefore$ $(n - 1)$-তম পদ = $l - d$

$(n - 2)$-তম পদ = $l - 2d$ ইত্যাদি।

মনে করি S n-সংখ্যক পদের সমষ্টি।

$\therefore$ $S = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (l - d) + l$ শ্রেণীটিকে উল্টোভাবে লিখে পাই

$S = l + (l - d) + (l - 2d) + \ldots + (a + d) + a$

যোগ করে পাই,

$2S = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \ldots + (a + l)$, n-সংখ্যক পদ।

$= n\,(a + l)$

$\therefore$ $S = \frac{1}{2}n\ (a + l) = \frac{1}{2}n\,(a + a + \overline{n-1}\,d)$

$$= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$S = n\left(\frac{a+l}{2}\right) =$ পদসংখ্যা $\times$ $\left(\frac{\text{প্রথমপদ} + \text{শেষপদ}}{2}\right)$

২১.ক.২.২ সমান্তরীয় মধ্যক (Arithmetic Mean)

তিনটি রাশি a, b, c যদি সমান্তর প্রগতিতে থাকে তবে $b - a = c - b$ বা, $2b = a + c$ বা, $b = \frac{a+c}{2}$

মধ্যপদ b-কে a ও c-র সমান্তরীয় মধ্যক বলে।

২১.ক.২.৩ ঃ উদাহরণমালা

উদা. 1. 4, 7, 10 ... প্রগতিটির 20-তম পদ নির্ণয় করুন।

বিশতম পদ = $a + (20 - 1)\,d$ এখানে $a = 4$ এবং $d = 3$.

$\therefore$ 20-তম পদ = $4 + 19 \times 3 = 61$.

উদা. 2. কোন সমান্তর প্রগতির 12-তম পদ ও 25-তম পদ, –27 এবং –66. প্রগতিটি নির্ণয় করুন।

12-তম পদ $= a + 11d = -27$ --------(1)

25-তম পদ $= a + 24d = -66$ --------(2)

$a =$ প্রথম পদ, $d =$ সাধারণ অন্তর।

(1) এবং (2) থেকে পাই, $a = 6$, $d = -3$.

উদা. 3. একটি সমান্তর প্রগতির তিনটি রাশির যোগফল 21, তাদের বর্গের যোগফল 179. রাশি তিনটি নির্ণয় করুন।

মনেকরি, $a - d$, a, $a + d$ নির্ণেয় তিনটি রাশি।

প্রশ্নানুসারে, $3a = 21$ বা, $a = 7$

আবার, $(7 - d)^2 + a^2 + (7 + d)^2 = 179$. বা $d = \pm 4$

নির্ণেয় রাশি তিনটি 3, 7, 11 বা, 11, 7, 3.

উদা. 4. একটি সমান্তর প্রগতির p-তম, q-তম এবং r-তম রাশি যথাক্রমে x, y এবং z. প্রমাণ করুন $p\,(y - z) + q\,(z - x) + r\,(x - y) = 0$.

প্রশ্নানুসারে, $x = a + (p - 1)\,d$

$$y = a + (q - 1)\,d$$

$$z = a + (r - 1)\,d.$$

এখন,

$$p\,(y - z) = p\,(q - r)\,d$$

$$q\,(z - x) = q\,(r - p)\,d$$

$$r\,(x - y) = r\,(p - q)\,d.$$

$$\therefore\ p\,(y - z) + q\,(z - x) + r\,(x - y) = 0$$

উদা. 5. 3 এবং 31-এর মধ্যে তিনটি সমান্তরীয় মধ্যক বসান।

এখানে $a = 3$, 5-তম পদ = 31 বা, $3 + 4d = 31$

বা, $4d = 28$, বা $d = 7$.

সুতরাং নির্ণেয় মধ্যকগুলি 10, 17, 24.

সমান্তর শ্রেণী যদি $a_1, a_2, \ldots a_n$ একটি সসীম সমান্তর প্রগতি হয় তাহলে $a_1 + a_2 \ldots + a_n$ কে সসীম সমান্তর শ্রেণীর যোগফল বলে।

(i) **প্রথম n-স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল।**

মনেকরি, $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

এখানে $a = 1,\ d = 1.$

$$\therefore\ S = \frac{n}{2}[2.a + (n-1)\,d] = \frac{n}{2}(n+1) \quad \therefore \boxed{S = \frac{n(n+1)}{2}}$$

(ii) **প্রথম n-স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের যোগফল**

মনেকরি, $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

এখন $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1.$

$n = 1, 2, \ldots n$ বসিয়ে পাই

$$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1.$$

যোগ করে পাই $\quad n^3 - 0^3 = 3\,[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2]$

$$-3\,[1 + 2 + 3 + \ldots + n] + n$$

বা, $n^3 = 3\left(1^1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right) - 3.\dfrac{n\,(n+1)}{2} + n.$

$$\therefore\ 3S = n^3 + 3n\frac{(n+1)}{2} - n = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{2}$$

সুতরাং, $\boxed{S = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}}$

(iii) প্রথম স্বাভাবিক n-সংখ্যক সংখ্যার ত্রিঘাত (cube) গুলির যোগফল।

মনেকরি, $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots n^3$

আমরা জানি, $n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$

$n = 1, 2, \ldots n$ বসিয়ে পাই,

$1^4 - 0^4 = 4.1^3 - 6.1^2 + 4.1 - 1$

$2^4 - 1^4 = 4.2^3 - 6.2^2 + 4.2 - 1$

$3^4 - 2^4 = 4.3^3 - 6.3^2 + 4.3 - 1$

... ...

$n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$

যোগ ক'রে পাই,

$n^4 - 0^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) - 6\ (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$
$+ 4(1 + 2 + 3 + \dots + n) - n$

$= 4S - n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) - n$

বা, $4S = n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n = n(n+1)\ [n^2 - n + 1 + 2n - 1]$

$= [n(n+1)]^2$

$\therefore S = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

উদা. 6. n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত যোগ করুন ঃ

$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots$

$t_n = n$-তম পদ $= n(n+1) = n^2 + n.$

$n = 1, 2, 3 \dots n$ বসিয়ে পাই,

$t_1 = 1^2 + 1$

$t_2 = 2^2 + 2$

$t_3 = 3^2 + 3$

... ...

$t_n = n^2 + n.$

যোগ করে পাই $S = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + n)$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore S = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

২১.ক.২.৪ প্রশ্নমালা

1) যোগফল নির্ণয় করুন ঃ

(i) $2+4+6+\ldots$ 50-পদ পর্যন্ত। [উঃ 2550]

(ii) $4+5\frac{1}{4}+6\frac{1}{2}+\ldots$ 25-পদ পর্যন্ত। [উঃ 475]

(iii) $1+\dfrac{n-1}{n}+\dfrac{n-2}{n}+\ldots$ n-পদ পর্যন্ত। [উঃ $\dfrac{n+1}{n}$]

(iv) $\sqrt{2}+\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(1+2\sqrt{2}\right)+\ \ldots$ 19-পদ পর্যন্ত। [উঃ $19\left(\sqrt{2}+18\right)$]

(v) $27+24+21+\ldots$ শ্রেণীটির কতগুলি পদের সমষ্টি 132 হবে?

2) i) k-র কোন্ মানের জন্য $2(4k+7), 6k+\frac{1}{2},$ ' $k-7$ একটি সমান্তর প্রগতি হবে তা নির্ণয় করুন। [উঃ $k=-\frac{3}{4}$]

ii) কোন সমান্তর শ্রেণীর n-তম পদ $7n-5$; এর প্রথম 20টি পদের যোগফল নির্ণয় করুন।

[উঃ 1370]

3) i) কোন সমান্তর প্রগতির p-তম পদ q এবং q-তম পদ p দেখান যে m-তম পদটি $p+q-m$.

ii) সমান্তর শ্রেণীভুক্ত তিনটি অখণ্ড সংখ্যার যোগফল 15 এবং তাদের গুণফল 80; সংখ্যা তিনটি নির্ণয় করুন। [উঃ 2, 5, 8, বা 8, 5, 2]

iii) কোন সমান্তর শ্রেণীর একাদশ এবং চতুর্দশ পদদ্বয়ের অনুপাত 7 : 9; শ্রেণীটির দশম এবং তৃতীয় পদের অনুপাত নির্ণয় করুন। [উঃ 19 : 5]

4) একটি সমান্তর শ্রেণীর 10-তম এবং 25-তম রাশিদ্বয় যথাক্রমে 50 এবং 125 ; এর 19-তম পদ নির্ণয় করুন। [উঃ a = 5, d = 5; 95]

5) সমান্তর প্রগতিতে আছে এরূপ তিনটি রাশির যোগফল 15, এবং একই সঙ্গে উহাদের দুটি করে নিয়ে গুণফলগুলি যোগ করলে 71 হয়। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় করুন।

[উঃ 3, 5, 7 বা 7, 5, 3]

6) 1 এবং 36 -এর মধ্যে এরূপ কয়েকটি সমান্তরীয় মধ্যক বসান যে, সমস্ত প্রগতিটির যোগফল 148 হয়। [উঃ 6, 11, 16, 21, 26, 31]

7) $\frac{1}{4}$ এবং $-9\frac{3}{4}$-এর মধ্যে 19 টি সমান্তরীয় মধ্যক বসান।

[$-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \ldots\ \ldots -9\frac{1}{4}$]

8) (i) যদি a, b, c সমান্তর প্রগতিতে থাকে তবে দেখান যে $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$ সমান্তর প্রগতিতে আছে।

(ii) $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ সমান্তর প্রগতিতে থাকলে প্রমাণ করুন যে $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ সমান্তর প্রগতিতে আছে।

9) প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় করুন :

(i) $2.3 + 3.4 + 4.5 + \ldots \longrightarrow$ [উঃ $\frac{n}{3}(n^2+6n+11)$]

(ii) $1.3 + 2.5 + 3.7 + \ldots \longrightarrow$ [উঃ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$]

(iii) $1.3^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \ldots \longrightarrow$ [উঃ $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$]

10) কোন সমান্তর প্রগতির n-সংখ্যক পদের যোগফল $3n^2+5n$. ঐ সমান্তর প্রগতির কততম পদ 152 ? [উঃ 25-তম পদ]

11) কোন ব্যক্তি একই সংগে দুটি চাকুরী পাওয়ার সুযোগ পেলেন। একটিতে প্রারম্ভিক বেতন 1200 টাকা এবং বাৎসরিক বৃদ্ধির হার 80 টাকা। অপরটিতে শুরু 850 টাকায়, কিন্তু বৎসরে 120 টাকা ক'রে বৃদ্ধি পাবে। যেটিতে প্রথম 16 বৎসরে সর্বাপেক্ষা বেশী টাকা পাওয়া যাবে, সেই পদ তিনি নেবেন। তিনি কোন্ চাকুরী গ্রহণ করলেন? [উঃ প্রথম পদ]

12) আজ 1 টাকা, আগামী কাল 2 টাকা, পরের দিন 3 টাকা এরূপে সঞ্চয় করলে 365 দিনে মোট কত টাকা সঞ্চয় হবে? [উঃ 66795 টাকা]

13) এক ব্যক্তি মাসিক কিস্তিতে 65 টাকা ঋণ শোধ করবার জন্য প্রথম মাসে 2 টাকা এবং প্রত্যেক পরবর্তী মাসে কিস্তিতে 1 টাকা ক'রে বাড়াতে লাগল। কত সময়ে ঐ ঋণ শোধ হবে? [উঃ 10 মাস]

14) একটি নলকূপ বসাবার খরচ প্রথম 100 মিটারের জন্য প্রতি মিটারে 5 টাকা এবং পরবর্তী প্রত্যেক মিটারের জন্য অতিরিক্ত 2 টাকা ক'রে লাগে। 200 মি. একটি নলকূপ বসাতে তার শেষ মিটারের জন্য কত খরচ পড়বে? নলকূপটি বসাতে মোট কত খরচ পড়বে? [উঃ 205 টা. 12100 টা.]

15) একটি অনুক্রমের n-তম পদ : $a_n = 10 - 3n$; দেখান যে a_n একটি সমান্তর প্রগতির পদ।

16) 18, 16, 14 ... সমান্তর প্রগতির কতগুলি পদের সমষ্টি শূন্য তা নির্ণয় করুন।

17) সমাধান করুন : $1 + 6 + 11 + \ldots + x = 148$

18) যদি a^2, b^2, c^2 সমান্তর প্রগতির পদ হয়, দেখান যে $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ অন্য একটি সমান্তর প্রগতিতে আছে।

19) কোন স্থান থেকে যাত্রা ক'রে A প্রথম ঘণ্টায় 4 কি.মি., দ্বিতীয় ঘণ্টায় $4\frac{1}{3}$ কি.মি., তৃতীয় ঘণ্টায় $4\frac{2}{3}$ কি.মি; এইরূপে চলতে লাগল। তার 2 ঘণ্টা পরে B রওনা হয়ে একই দিকে ঘণ্টায় 7 কি.মি. বেগে চলল। যাত্রাস্থান থেকে কতদূরে তাদের প্রথম সাক্ষাৎ হবে? প্রথম সাক্ষাৎ হবার কত ঘণ্টা পরে A, B-কে অতিক্রম করবে? [উঃ 35 কি.মি.; 5 ঘণ্টা পর]

20) বিনা সুদে 480 টাকার ঋণ 20টি সাপ্তাহিক কিস্তিতে শোধ করা হল। প্রথম 16টি কিস্তির পর 160 টাকা বাকী ছিল। যদি প্রত্যেক কিস্তি তার ঠিক পূর্ববর্তী কিস্তি অপেক্ষা সমপরিমাণে বেশী হয়ে থাকে, তাহলে, প্রথম এবং দ্বিতীয় কিস্তিগুলো কত হবে? [উঃ প্রথম কিস্তি—5 টাকা, দ্বিতীয় কিস্তি—7 টাকা]

২১.ক.৩ গুণোত্তর প্রগতি (Geometric Progression)

যদি কোন সংখ্যা অনুক্রমের পদগুলি এরূপ হয় যে তার যে কোন পদের সঙ্গে তার পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সর্বদা সমান হয় তবে এইরূপ অনুক্রমকে গুণোত্তর প্রগতি (Geometric Progression) বলে। ঐ সমান অনুপাতকে **সাধারণ অনুপাত** বলে।

যথা; $a+ar^2+ar^3+\ldots+ar^{n-1}$ একটি গুণোত্তর প্রগতি। এখানে a = প্রথম পদ এবং r = সাধারণ অনুপাত। যদি $a=1$, $r=3$ হয় তাহলে, 1, 3, 9, 27, ...গুণোত্তর প্রগতি।

২১.ক.৩.১ ঃ গুণোত্তরীয় প্রগতির প্রথম *n*-পদের যোগফল।

মনেকরি, প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অনুপাত = r, এবং S নির্ণেয় যোগফল।

$\therefore\ S = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$

$\therefore\ rS = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ ar^{n-1} + ar^n$

বিয়োগ করে পাই, $S(1-r) = a - ar^n$

বা, $\boxed{S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}}$ যেখানে $r\neq 1$, বা, $S=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ যখন $r > 1$

যদি $r = 1$ হয় তবে $s=a+a+\ldots+a=na$.

২১.ক.৩.২ গুণোত্তরীয় মধ্যক (Geometric Mean বা G.M)

মনেকরি, a, b, c একটি গুণোত্তরীয় প্রগতির তিনটি পদ।

$\therefore\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$ বা, $b^2=ac$ বা, $b=\sqrt{ac}$.

b-কে a ও c-র **গুণোত্তরীয় মধ্যক** বলে।

যে কোন সংখ্যক রাশি গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকলে প্রথম এবং শেষ পদ দুটির অন্তবর্তী সকল পদকে ঐ দুটি প্রান্তীয় পদের **গুণোত্তরীয় মধ্যক** বলে।

যথা—1, 3, 9, 27, 81 এই প্রগতিতে, 3, 9, 27 1 এবং 81-এর গুণোত্তরীয় মধ্যক।

২১.ক.৩.৩ প্রগতির সাধারণ পদ

মনেকরি, কোন গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r, তাহলে সংজ্ঞানুসারে,

দ্বিতীয় পদ = ar, তৃতীয় পদ = $ar^2 = ar^{3-1}$

চতুর্থ পদ = $ar^3 = ar^{4-1}$, পঞ্চম পদ = $ar^4 = ar^{5-1}$

অনুরূপভাবে, n-তম পদ = ar^{n-1}, যদি n-তম পদকে t_n দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাহলে,

$$\boxed{t_n = ar^{n-1}}$$

উদা. কোন গুণোত্তর প্রগতির পঞ্চম পদ 243 এবং দ্বিতীয় পদ 9; প্রগতিটি নির্ণয় করুন।

মনেকরি, গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r.

$\therefore$ পঞ্চম পদ $= t_5 = ar^4 = 243$ ... (1)

দ্বিতীয় পদ $= t_2 = ar = 9$ ... (2)

$$\therefore \frac{t_2}{t_5} = \frac{ar^4}{ar} = \frac{243}{9}$$

বা $r^3 = 27 = 3^3$

বা $r = 3$

দ্বিতীয় পদ = ar = 9 বা 3a = 9 বা, a = 3

নির্ণেয় গুণোত্তর প্রগতি, 3, 3.3, 3.3^2, 3.3^3 ...

বা 3, 9, 27, 81, ...

২১.ক.৩.৪ উদাহরণমালা

উদা. 1. প্রমাণ করুন যে দুটি বাস্তব অসমান ধনাত্মক রাশির সমান্তরীয় মধ্যকটি গুণোত্তরীয় মধ্যক অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রমাণ ঃ মনেকরি, a ও b দুটি ধনাত্মক অসমান রাশি।

সমান্তরীয় মধ্যক $= \frac{a+b}{2}$

গুণোত্তরীয় মধ্যক $= \sqrt{ab}$

এখন, $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\left(a+b-2\sqrt{ab}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$

= ধনাত্মক রাশি $\left(\sqrt{a} \neq \sqrt{b}\right)$

$$\therefore \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

উদা. 2. $\frac{1}{81} + \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \ldots + 243$ গুণোত্তরীয় প্রগতিটির যোগফল নির্ণয় করুন।

এখানে, প্রথম পদ, $a=\frac{1}{81}$

সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{1}{27}\div\frac{1}{81}=3$

$243=a.r^{n-1}=\frac{1}{81}.3^{n-1}\quad\therefore\ 3^{n-1}=243\times81=3^9$

$\therefore\ n-1=9$ বা $n=10.$

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল, $S=\frac{1}{81}.\frac{3^{10}-1}{3-1}=364\frac{40}{81}$

উদা. 3. কোন গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ 80 এবং 5-তম পদ 405; সাধারণ অনুপাত 3, প্রথম পাঁচটি পদের যোগফল নির্ণয় করুন।

এখানে প্রথম পদ = a = 80. মনেকরি, সাধারণ অনুপাত = r. 5-তম পদ = $80.r^4$.

প্রশ্নানুসারে, 405 = $80r^4$ বা, $r^4=\frac{405}{80}=\frac{3^4}{2^4}$.

সুতরাং $r=\pm\frac{3}{2}$. যখন $r=\frac{3}{2}$, প্রথম পাঁচটি পদের যোগফল

$$=80+80\times\frac{3}{2}+80\times\frac{9}{4}+80\times\frac{27}{8}+\frac{80}{16}\times81$$

$$=80.\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^5-1}{\frac{3}{2}-1}=\overset{5}{\cancel{80}}\times2\times\left(\frac{211}{32}\right)=1055.$$

অনুরূপে যখন $r=\frac{-3}{2}$, যোগফল $=275$.

উদা. 4. প্রমাণ করুন যে গুণোত্তর প্রগতির প্রথম ও শেষ প্রান্ত হতে সমদূরবর্তী যে কোন দুটি পদের গুণফল ধ্রুবক।

মনেকরি, গুণোত্তর প্রগতির প্রথমপদ a এবং শেষপদ l = n-তম পদ।

$\therefore\ l=ar^{n-1}$ (r = সাধারণ অনুপাত)

$\therefore\ a=\frac{l}{r^{n-1}},\ ar=\frac{l}{r^{n-2}}\ \ldots\ ar^{n-2}=\frac{l}{r},l.$

বিপরীতক্রমে লিখলে, $l,\frac{l}{r},\frac{l}{r^2},\ldots\frac{l}{r^{n-2}},\frac{l}{r^{n-1}}$

প্রথম দিক থেকে p-তম পদ $= ar^{p-1}$

শেষ দিক থেকে ধরে p-তম পদ $= \frac{l}{r^{p-1}}$.

তাদের গুণফল $= ar^{p-1} \frac{l}{r^{p-1}}$

$= al =$ ধ্রুবক।

উদা. 5. x এবং y-র মধ্যে n-সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যক বসান।

এখানে প্রথমপদ $= x$ এবং শেষপদ $= y =$ প্রগতিটির পদ সংখ্যা $= (n+2)$.

মনেকরি, সাধারণ অনুপাত $= r$

$$\therefore\ y = x.r^{n+1} \text{ বা, } r^{n+1} = \frac{y}{x};\ \therefore\ r = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

সুতরাং নির্ণেয় মধ্যকগুলি হ'ল,

$$x.\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{n+1}},\ x.\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{n+1}} \ldots\ x.\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

উদা. 6. একটি গুণোত্তর প্রগতিতে যুগ্ম সংখ্যক পদ আছে। প্রমাণ করুন যে এর মধ্যপদ দুটির গুণফল-এর প্রথম ও শেষপদের গুণফলের সমান।

মনেকরি, পদ সংখ্যা $= 2n$, প্রথম পদ $= a$ এবং সাধারণ অনুপাত $= r$

মধ্যপদ দুটি যথাক্রমে n-তম এবং $(n+1)$-তম।

প্রথম পদ $= a$, শেষ পদ $= a.r^{2n-1}$.

n-তম পদ $= ar^{n-1}$, $(n+1)$ তম পদ $= ar^{n}$

মধ্যপদ দুটির গুণফল $a,\ r^{n-1}\ ar^{n} = a^2r^{2n-1}$

প্রথম পদ $\times$ শেষ পদ $= a\ .\ ar^{2n-1} = a^2r^{2n-1}$ (প্রমাণিত)

উদা. 7. তিনটি সংখ্যার যোগফল সমান্তর শ্রেণীতে হয়, যদি সংখ্যা তিনটির সাথে যথাক্রমে 1, 4, ঐবং 19 যোগ করা হয় তবে তা গুণোত্তর শ্রেণী হয়। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় করুন।

উঃ মনেকরি, সংখ্যা তিনটি $a-d,\ a,\ a+d$

প্রশ্নানুসারে $a-d+a+a+d = 15$ বা, $3a = 15$

বা, $a = 5$ আবার, $5-d+1,\ 5+4,\ 5+d+19$ গুণোত্তর শ্রেণীতে আছে।

সুতরাং $(6-d)(24+d) = 81\ \therefore\ d = -21$, বা 3.

যখন $d=3$, সংখ্যা তিনটি 2, 5, 8

যখন $d=-21$, সংখ্যা তিনটি –26, 5, –16

উদা. 1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ ...$ 20-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় করুন।

উঃ প্রথম পদ $=a=1$, সাধারণ অনুপাত $=r=\frac{1}{2}$

$$\therefore\ S_{20}=\frac{a\left(1-r^{20}\right)}{1-r}=1.\ \frac{\left[1-(\frac{1}{2})^{20}\right]}{\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^{20}}\right)=2-\frac{1}{219}$$

২১.ক.৩.৫ প্রশ্নমালা

1) যোগফল নির্ণয় করুন ঃ

i) $5+55+555+\ ...$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত। [উ: $\frac{50}{81}(10^n-1)-\frac{5n}{9}$]

ii) $\sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{2}}{4}\ ...$ 6-তম পর্যন্ত। [উ: $\frac{\sqrt{2}}{32},\ \frac{63\sqrt{2}}{32}$]

iii) $64+32+16+8+\ ...\ 4$ এই শ্রেণীর কতগুলি পদের সমষ্টি $127\frac{1}{2}$ হবে। [উ: 8 টি]

iv) $\cdot2+\cdot02+\cdot002+\cdot0002+\ ...$ n-তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় করুন। [উ: $\frac{2}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$]

v) $\cdot2+\cdot22+\cdot222+\ ...$ n-তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় করুন। [উ: $\frac{2n}{9}-\frac{2}{81}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$]

2) গুণোত্তরীয় প্রগতিতে আছে এরূপ তিনটি সংখ্যার যোগফল 26 এবং তাদের গুণফল 216. সংখ্যা তিনটি নির্ণয় করুন। [উ: (2, 6, 18) বা (18, 6, 2)]

3) গুণোত্তরীয় তিনটি পদের যোগফল 14, যদি প্রথম দুটি পদের প্রত্যেকটির সাথে 1 যোগ করা হয় এবং তৃতীয়টি থেকে 1 বিয়োগ করা হয় তবে নূতন সংখ্যা তিনটি সমান্তরীয় প্রগতিতে থাকে। গুণোত্তরীয় তিনটি পদ নির্ণয় করুন। [উ: (2, 4, 8) বা (8, 4, 2)]

4) 9 এবং 576-এর মধ্যে পাঁচটি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসান। [উ: 18, 36, 72, 144, 288]

5) যদি $a,\ b,\ c$ গুণোত্তরীয় প্রগতিতে থাকে তবে দেখান যে $\frac{1}{a+b},\ \frac{1}{2b},\ \frac{1}{b+c}$ সমান্তরীয় প্রগতিতে আছে।

6) এক ব্যক্তি বিনা সুদে 8190 টাকা ধার করলেন এবং 12 টি মাসিক কিস্তিতে ধার শোধ করলেন। যদি প্রতিটি কিস্তির টাকা পূর্বের কিস্তির দ্বিগুণ হয় তবে প্রথম কিস্তি ও শেষ কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় করুন।

[উ: 2 টাকা ও 4096 টাকা]

7) 40 মি. উচ্চতা থেকে একটি বলকে মাটিতে ফেলা হ'ল। প্রত্যেকবার মাটি স্পর্শ করবার পর বলটির পূর্বের উচ্চতার $\frac{3}{5}$ অংশ হ্রাস পায়। বলটি পঞ্চমবার ভূমি স্পর্শ করলে মোট কত পথ অতিক্রম করবে? [উ: $86\frac{26}{125}$]

8) যদি $Sn = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$ হয়, তবে n-এর মান কমপক্ষে কত হলে $Sn > 1.99$

(a) $(1) + (1 + 3) + (1 + 3 + 3^n) \ldots 10$ তম পদ এর সমষ্টি নির্ণয় করুন।

(b) কোন শ্রেণীর r-তম পদ $2r + \frac{1}{2^r}$ হলে উহার প্রথম সংখ্যাক পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন

9) যদি a, b, c গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে এবং $a^x = b^y = c^z$ হয়, তবে দেখান যে $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ সমান্তর প্রগতিতে আছে।

10) যদি কোন **গুণোত্তরীয় প্রগতির** n-টি পদের যোগফল S, গুণফল P এবং পদসমূহের অন্যোন্যকগুলির যোগফল R হয়, তবে **প্রমাণ করুন** যে, $\left(\frac{S}{R}\right)^n = p^2$

11) কোন গুণোত্তর প্রগতির **প্রথম, দ্বিতীয় ও শেষ পদ যথাক্রমে** a, b, l. দেখান যে প্রগতিটির যোগফল $\frac{bl - a^2}{b - a}$

12) দুইটি সংখ্যার সমান্তরীয় মধ্যক 15 এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক 9; সংখ্যা দুটি নির্ণয় করুন। [উ: 27, 3]

13) যদি a, b, c সমান্তর প্রগতিতে থাকে এবং x, y, z গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে, তবে দেখান যে, $x^{b-c}, y^{c-a}, z^{a-b} = 1$

14) সমান্তর শ্রেণীভুক্ত তিনটি সংখ্যার যোগফল 15; যদি প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় সংখ্যার সহিত 1, 4, 19 যোগ করা হয়, তবে উৎপন্ন সংখ্যা তিনটি গুণোত্তর শ্রেণীতে থাকে। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় করুন। [উ: 2, 5, 8; বা 26, 5, −16]

15) $\frac{3}{49}$ এবং 147-এর মধ্যে তিনটি **গুণোত্তরীয় মধ্যক স্থাপন করুন।**

[উ: $\frac{3}{7}, 3, 21$ **বা** $-\frac{3}{7}, 3, -21$]

16) কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম 8টি পদের সমষ্টি, প্রথম 4টি পদের সমষ্টির পাঁচগুণ। সাধারণ অনুপাত নির্ণয় করুন। [উ: $\pm\sqrt{2}$]

17) গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত তিনটি সংখ্যার গুণফল 216। যদি প্রথমটির সাথে 4, এবং দ্বিতীয়টির সাথে 6 যোগ করা হয়, তবে উৎপন্ন সংখ্যাত্রয় সমান্তর প্রগতিতে থাকে। গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত সংখ্যাত্রয় নির্ণয় করুন। [উঃ 2, 6, 18 বা 18, 6, 2]

18) যদি a, b, c একটি সমান্তর শ্রেণী এবং b, c, a একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে, তবে দেখান যে, $\frac{1}{c}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

19) এক ব্যক্তি 6000 টাকা ধার করেন এবং মোট সুদ 138 টাকা সমেত 10 টি মাসিক কিস্তিতে সুদ সমেত সব টাকা শোধ করতে রাজী হন। তাঁর প্রত্যেক কিস্তির টাকা পূর্ববর্তী কিস্তির দ্বিগুণ হয়। দ্বিতীয় ও শেষ কিস্তির টাকা নির্ণয় করুন। [উঃ 12 টাকা এবং 3072 টাকা]

২১.ক.৪ বিপরীত প্রগতি (Harmonic Progression–H.P.)

যদি কোন প্রগতির রাশিগুলির অন্যোন্যকগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকে তবে ঐ রাশিগুলি বিপরীত প্রগতি গঠন করে। যথা, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ বিপরীত প্রগতিতে আছে কারণ এদের অন্যোন্যকগুলি, 2, 4, 6, 8 সমান্তর প্রগতিতে আছে।

২১.ক.৪.১ বিপরীত মধ্যক (Harmonic Mean)

যদি a, b, c বিপরীত প্রগতিতে থাকে তবে মধ্যপদ b-কে a ও cর বিপরীত মধ্যক বলে।

২১.ক.৪.২ উদাহরণমালা

উদা. 1. a এবং b-এর বিপরীত মধ্যক নির্ণয় করুন।

মনেকরি, নির্ণেয় মধ্যক H, অতএব a, H, b বিপরীত প্রগতিতে আছে। সুতরাং $\frac{1}{a}, \frac{1}{\mathrm{H}}, \frac{1}{b}$ সমান্তর প্রগতিতে আছে। অর্থাৎ —

$$\frac{1}{\mathrm{H}}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{\mathrm{H}} \text{ বা, } \frac{2}{\mathrm{H}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$$

$$\boxed{\therefore \mathrm{H}=\frac{2ab}{a+b}}$$

উদা. 2. 10 এবং 20-র মধ্যে তিনটি বিপরীত মধ্যক বসান।

এখানে অনুরূপ সমান্তরীয় প্রগতির প্রথম পদ $=\frac{1}{10}$, সাধারণ অন্তর d হলে $\frac{1}{10}+4d=\frac{1}{20}$

বা, $d=-\frac{1}{80}$. সুতরাং বিপরীত মধ্যকগুলি $\frac{1}{\frac{1}{10}-\frac{1}{80}}=\frac{80}{7}$ ইত্যাদি।

উদা. 3. দুটি ধনাত্মক সংখ্যা নির্ণয় করুন যাদের সমান্তরীয় মধ্যক 10 এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক 8। সংখ্যা দুটির বিপরীত মধ্যকও নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনেকরি সংখ্যা দুটি x এবং y, প্রশ্নানুযায়ী, $\frac{x+y}{2}=10$ ...(1) এবং $\sqrt{xy}=8$ ...(2)

(2) থেকে পাই $xy = 64$ বা, $y = 64/x$. y-এর মান (1)-এ বসিয়ে পাই $x+64/x=20$ বা, $x^2-20x+64=0$ বা $(x-16)(x-4) = 0$

$\therefore x = 16$ বা 4, $\therefore y = 4$ বা 16, $\therefore$ সংখ্যা দুটি 16 ও 4।

এদের বিপরীত মধ্যক $=H=\frac{2xy}{x+y}=\frac{2.64}{\cancel{20}_{10}}=6{\cdot}4$

উদা. 3. $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}$ ... বিপরীত প্রগতিটির 20-তম পদ নির্ণয় করুন।

এখানে 3, 6, 9, 12 সমান্তরীয় প্রগতিতে আছে।

সাধারণ অন্তর $d=3$, প্রথম পদ = 3.

20-তম পদ $=3+(3\times 19)=60$.

সুতরাং বিপরীত প্রগতির 20-তম পদ $=\frac{1}{60}$.

দ্রষ্টব্য ঃ বিপরীত প্রগতির রাশিগুলির যোগফল নির্ণয় করার কোন সহজ পদ্ধতি নাই।

উদা. 4. দুটি ধনাত্মক অসমান রাশি x, y এবং তাদের A. M, G. M, এবং H.M যথাক্রমে A, G, H. প্রমাণ করুন যে

(i) $AH = G^2$ এবং (ii) $A > G > H$.

এখানে $A=\frac{x+y}{2}$, $G=\sqrt{xy}$, $H=\frac{2xy}{x+y}$

(i) $AH=\frac{x+y}{2}\cdot\frac{2xy}{x+y}=xy=G^2$

(ii) $A > G$ পূর্বে প্রমাণ করা হয়েছে।

এখন, $G-H \quad =\sqrt{xy}-\frac{2xy}{x+y}=\frac{(x+y)\sqrt{xy}-2xy}{x+y}$

$$=\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\left(x+y-2\sqrt{xy}\right)=\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2>0.$$

সুতরাং $G>H$. অর্থাৎ $A>G>H$.

উদা. 5. যদি a, b, c গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে এবং $a^x=b^y=c^z$ হয় প্রমাণ কর যে, x, y, z বিপরীত প্রগতিতে থাকবে।

সমাধান ঃ $a^x=b^y=c^z=k$ (মনে করি) $\therefore\ a=k^{1/x}; b=k^{1/y}; c=k^{1/z}$ ...(1)

$\because\ a$, b, c গুণোত্তর প্রগতিতে আছে, $\therefore\ b^2=ac$ ...(2) হবে।

a, b, c-র মান (1) থেকে (2)-এ বসিয়ে পাই,

$\left(k^{1/y}\right)^2=k^{1/x}.k^{1/z}$ বা, $k^{2/y}=k^{1/x+1/z}$

$\therefore\ \frac{2}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

$\therefore\ x$, y, z বিপরীত প্রগতিতে আছে।

২১.ক.৪.৩. প্রশ্নমালা

1) বিপরীত প্রগতি $\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}$ ... ... এর 15-তম পদ নির্ণয় করুন। [উ: $\frac{1}{46}$]

2) $\frac{1}{4}$ এবং $\frac{1}{64}$-এর মধ্যে চারটি বিপরীত মধ্যক বসান। [উ: $\frac{1}{16}, \frac{1}{28}, \frac{1}{40}, \frac{1}{52}$]

3) যদি x এবং y-এর গুণোত্তরীয় এবং বিপরীত মধ্যক যথাক্রমে 12 এবং $9\frac{3}{5}$ হয়, তবে x ও y নির্ণয় করুন। [উ: $x=24$, $y=6$]

4) দুটি রাশি a এবং b এরূপ যে $H.M:G.M=\frac{12}{13}$

প্রমাণ করুন যে, a : b = 4 : 9.

5) যদি a এবং c-র বিপরীত মধ্যক b হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$।

6) যে সকল তিনঅংক বিশিষ্ট সংখ্যাকে 3 দ্বারা ভাগ করলে 2 অবশিষ্ট থাকে তাদের যোগফল নির্ণয় করুন। [উ: 164850]

7) **সমাধান করুন ঃ** $5^2, 5^4, 5^6 \ldots 5^{2x} = (0{\cdot}04)^{-28}$ [উ: 7]

8) একটি সমান্তর প্রগতির চারটি ক্রমিক পদের যোগফল 1 এবং পদগুলির বর্গের সমষ্টি 0·3 পদগুলি নির্ণয় করুন। [উ: 0·1, 0·2, 0·3, 0·4]

9) একটি গুণোত্তর অণুক্রম-এর চতুর্থ পদ দ্বিতীয় পদ অপেক্ষা 24 বেশী এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের যোগফল 6. অণুক্রমটি নির্ণয় করুন। [উ: $\frac{1}{5}$, 1, 5, 25]

10) $5x - y$, $2x + y$ এবং $x + y$ সংখ্যাগুলি একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে এবং $(y + 1)^2$, $xy + 1$, $(x - 1)^2$ সংখ্যাগুলি একটি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে। x ও y-এর মান নির্ণয় করুন।

[উ: $x = 0$, বা, $y = 0$ বা, $x = \frac{10}{3}$, $y = 4/3$ বা, $x = -\frac{3}{4}$, $y = -\frac{3}{10}$]

২১.ক.৫. অসীম শ্রেণী (Infinite Series)

পূর্বে সমান্তর শ্রেণী, গুণোত্তর শ্রেণী ইত্যাদির n-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় করা হয়েছে। যদি কোন শ্রেণীর পদ সংখ্যা অসীম হয় তবে সেই শ্রেণীকে **অসীম শ্রেণী** বলে।

যথা $a_1 + a_2 + \ldots a_n + \ldots \infty$ (অসীম কে ∞ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়)। অসীম শ্রেণীটিকে লেখা হয় $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$।

সসীম শ্রেণীর, যা পূর্বে আলোচিত হয়েছে, পদসংখ্যা সসীম বলে পরপর পদগুলি যোগ ক'রে যোগফল নির্ণয় করা যায়। অসীম শ্রেণীর পদসংখ্যা সীমিত নয়, তাই যোগ প্রক্রিয়া কখনই শেষ হবে না। সুতরাং অসীম শ্রেণীর মান পরিচিত যোগ প্রক্রিয়ায় পাওয়া যাবে না। অসীম শ্রেণীর যোগফলের একটি বিশেষ অর্থ প্রদান করতে হবে।

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n + \ldots \infty$ একটি অসীম শ্রেণী। প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ S_n কে বলা হয় n-তম আংশিক যোগফল। এখন পদসংখ্যা অর্থাৎ n-এর মান যদি অসীম-এর দিকে অগ্রসর হয় এবং সে ক্ষেত্রে S_n-এর সীমাস্থ মান যদি একটি সসীম রাশি S হয় তবে ঐ শ্রেণীটিকে অভিসারী শ্রেণী (Convergent Series) বলা হয়। S-কে ঐ অসীম শ্রেণীর যোগফল বলা হয় এবং লেখা হয় $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ অর্থাৎ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \infty = S$ বা $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S$

উদা. 1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots \infty$ এর যোগফল নির্ণয় করুন।

এখানে $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$. এটি একটি সসীম গুণোত্তর শ্রেণী যার সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{2}$।

$\therefore\ S_n = \dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}} = 2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. এখন n-এর মান যত বৃদ্ধি পায় $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ তত ছোট হয় অর্থাৎ

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty} S_2 = 2$. অর্থাৎ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ \dots\ \infty = 2.$

২১.ক.৫.১ অভিসারী ও অপসারী অসীম শ্রেণী

যদি কোন অসীম শ্রেণী $a_1+a_2+a_3+\ \dots\ \infty$-এর কোন নির্দিষ্ট সসীম যোগফল থাকে তবে ঐ অসীম শ্রেণীকে **অভিসারী** (Convergent) বলা হয়। উদা. **1.** এর অসীম শ্রেণীটি অভিসারী।

যদি $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ অসীম হয় ($+\infty$ বা $-\infty$) তবে অসীম শ্রেণীটিকে **অপসারী** (Divergent) বলে। অর্থাৎ এইক্ষেত্রে কোন সসীম যোগফল থাকে না।

উদা. 2. $1+2+3+\ \dots\ \infty$ প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

এখানে $S_n = 1+2+3+\ \dots\ +n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. দেখা যাচ্ছে যে, n এর মান যত বৃদ্ধি পাবে Sn এর মানও তত বৃদ্ধি পেতে থাকবে। অর্থাৎ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$

সুতরাং উপরের শ্রেণীটি অপসারী এবং এর যোগফল নির্ণয় করা যায় না।

উদা. 3. $1-1+1-1+1-1+\ \dots\ \infty$ প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

এখানে $S_n = 1-1+1-1+\ \dots\ +(-1)^n$

$= 0$, যখন n যুগ্ম সংখ্যা

$= 1$, যখন n অযুগ্ম সংখ্যা

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$ বা 1 অর্থাৎ কোন নির্দিষ্ট মান নেই।

এক্ষেত্রে বলা হয় শ্রেণীটি 0 এবং 1-এর মধ্যে দোলায়মান (oscillatory)।

২১.ক.৫.২. অসীম গুণোত্তর শ্রেণী

$a+ar+ar^2+\ \dots\ +ar^{n-1}+\ \dots$এর প্রকৃতি

এখানে $S_n = a+ar+\dots+ar^{n-1} = a\dfrac{1-r^n}{1-r}\ (r\neq 1) = \dfrac{a}{1-r}-\dfrac{ar^n}{1-r^n}$

(a) যদি $|r|<1$ হয় অর্থাৎ $-1<r<1$ হয় তবে $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ হবে।

অতএব $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-r}$ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা। সুতরাং প্রদত্ত অসীম গুণোত্তর শ্রেণীটি অভিসারী এবং এর যোগফল $\dfrac{a}{1-r}$. যখন $-1<r<1$.

(b) আবার যখন $|r|>1$ হবে তখন $n\to\infty$ হলে $r^n\to\infty$ হবে।

সুতরাং $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ অতএব গুণোত্তর শ্রেণীটি অপসারী হবে যখন $r>1$ হবে।

(c) আবার যখন $r=1$, আমরা পাই $a+a+a+\ldots$ অর্থাৎ $S_n = a+a+\ldots a = na$

সুতরাং $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ অতএব শ্রেণীটি অপসারী।

(d) যখন $r=-1$, শ্রেণীটি হয় $a-a+a-a\ldots\infty$

$S_n = a-a+a-a+\ldots+(-1)^n a = 0$ বা a

যখন n যুগ্ম বা অযুগ্ম। অর্থাৎ এক্ষেত্রে শ্রেণীটি 0 এবং a-র মধ্যে দোলায়মান।

(e) যখন $r<-1$ তখন $n\to\infty$ হ'লে, $S_n\to\pm\infty$, সুতরাং শ্রেণীটি অসীমভাবে দোলায়মান। কারণ n যুগ্ম হলে $r^n\to+\infty$ এবং n অযুগ্ম হ'লে $r^n\to-\infty$ হবে।

সুতরাং অসীম গুণোত্তর শ্রেণী $a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}+\ldots\infty$ ·

(i) অভিসারী, যখন $|r|<1$ বা $-1<r<1$.

(ii) অপসারী যখন $|r|>1$ বা $r>1$ এবং যখন $r=1$

(iii) দোলায়মান, যখন $r=-1$, এবং $r<-1$.

উদা. 4. যোগফল নির্ণয় করুন : $\cdot4+\cdot04+\cdot004+\ldots\infty$

প্রদত্ত শ্রেণী $= \dfrac{4}{10}+\dfrac{4}{100}+\dfrac{4}{1000}+\ \ldots.$

$= \dfrac{4}{10}\left(1+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10^2}+\ldots\right)$ একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী।

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণীর সমষ্টি $= \dfrac{4}{10}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{4}{9}.$

উদা. 5. এক ব্যক্তি বাৎসরিক কিস্তিতে টাকা পাওয়ার অধিকারী। প্রত্যেক কিস্তির টাকা তার ঠিক পূর্ববর্তী কিস্তি অপেক্ষা এক দশমাংশ কম। যদি প্রথম কিস্তির মূল্য 800 টাকা হয় তবে দেখান যে ঐ ব্যক্তি যত বৎসরই বাঁচুন না কেন তিনি 8000 টাকার বেশী পাবেন না।

এখানে প্রথম কিস্তি = 800 টাকা

$\therefore$ ২য় কিস্তি $= 800 - \frac{1}{10} \times 800 = 720.$

তৃতীয় কিস্তি $= 720 - \frac{1}{10} \times 720 = 720 - 72 = 648$

সুতরাং কিস্তিগুলি 800, 720, 648, ...

$\therefore$ ব্যক্তিটির মোট পাওনা 800 + 720 + 648 + ...

ইহা একটি গুণোত্তরীয় অসীম শ্রেণী এবং সাধারণ অনুপাত $\frac{9}{10} < 1.$

$\therefore$ যোগফল $= \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} \times 800 = 8000.$

২১.ক.৫.৩. একটি প্রয়োজনীয় অসীম শ্রেণী

$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$ এই অসীম শ্রেণীটি

(i) অভিসারী, যখন $p > 1$

(ii) অপসারী, যখন $p \leq 1$. এই শ্রেণীটিকে p শ্রেণী বলে।

উদা. 7 প্রকৃতি নির্ণয় করুন ঃ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \infty$

p-শ্রেণীতে $p = 1$ বসিয়ে এই শ্রেণীটি পাওয়া যায়। এখানে $p = 1$, সুতরাং শ্রেণীটি অপসারী।

২১.ক.৫.৪. অনুশীলনী

1. যোগফল নির্ণয় করুন ঃ

   (i) $1 + \frac{1}{1{\cdot}04} + \frac{1}{(1{\cdot}04)^2} + \ldots$ **[উ: 26]**

   (ii) $0{\cdot}9 + {\cdot}81 + {\cdot}729 + \ldots$ **[উ: 9]**

2. **কোন অসীম গুণোত্তরীয় শ্রেণীর প্রত্যেক পদ তার পরবর্তী সকল পদের যোগফলের দ্বিগুণ। প্রথম পদটি 2 হলে শ্রেণীটি নির্ণয় করুন।** **[উ: $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9} \ldots \left(r = \frac{1}{3}\right)$]**

3. কোন অসীম গুণোত্তরীয় শ্রেণীর যোগফল 2 এবং তার পদগুলির বর্গের যোগফল $\frac{4}{3}$। প্রথম পদটি নির্ণয় করুন। [উ: $\frac{8}{3}$]

4. যোগফল নির্ণয় করুন : $\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\ \dots$ [উ: $\frac{13}{24}$]

5. কোন অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর যোগফল 1·6 এবং দ্বিতীয় পদটি –0·5। প্রথম তিনটি পদ নির্ণয় করুন। [উ: 2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$]

6. নিম্নলিখিত আবৃত্ত দশমিকগুলির প্রত্যেকটিকে মূলদ সংখ্যায় প্রকাশ করুন।

(i) $0{\cdot}5\dot{5}$ (ii) $0{\cdot}\dot{3}\dot{6}$ (iii) $2{\cdot}0\dot{2}\dot{5}$

7. $S_1, S_2, S_3 \dots S_n$ যদি n-সংখ্যক অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর যোগফল হয়, যাদের প্রথম পদ যথাক্রমে 1, 2, 3, … n এবং সাধারণ অনুপাত যথাক্রমে $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{n+1}$,

তবে দেখান যে, $S_1+S_2+S_3+\ \dots\ +S_2=\frac{n(n+3)}{2}$.

8. নিম্নলিখিত অসীম শ্রেণীসমূহ অভিসারী অথবা অপসারী নির্ণয় করুন।

(i) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ \dots.$ অসীম পর্যন্ত। [উঃ অভিসারী]

(ii) $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{7^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{7^3}+\ \dots\ \infty$ [উঃ অভিসারী]

(iii) $2+2+2+2+\ \dots.\ \infty$ **[উঃ অপসারী]** (iv) $3-3+3-3+3-3+\ \dots\ \infty$ [উঃ দোদুল্যমান]

9. **কোন অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর যোগফল 15 এবং তার পদগুলির বর্গের যোগফল 45. শ্রেণীটি নির্ণয় করুন।**

[সংকেত : শ্রেণীটি a, ar, ar^2 ……∞

শ্রেণীটির পদগুলির বর্গ $=(a)^2,(ar)^2,(ar^2)^2\ \dots\ \infty$

$\therefore\ \frac{a}{1-r}=15$ এবং $\frac{a^2}{1-r^2}=45$]

একক ২১. খ. ❑ সমীকরণ (EQUATION)

২১.খ.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন

- **সমীকরণ কী**
- **দ্বিঘাত সমীকরণের তত্ত্ব**
- **দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানের উপায়**

২১.খ.১ সমীকরণ ঃ সরল এবং দ্বিঘাত

দুটি বীজগাণিতিক রাশি বা রাশিমালার সমতাকে সমীকরণ বলে। যথা-$5x+22=12x+1$ একটি সমীকরণ। কেবল $x=3$ হলে উক্তিটি সত্য হয়। $x=3$ উপরের সমীকরণটির একটি সমাধান অর্থাৎ এটি সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

যে সমীকরণে একটি একঘাত অজ্ঞাত রাশি (x) থাকে তাকে একঘাত সমীকরণ বা সরল সমীকরণ বলা হয়।

দ্বিতীয় এবং তৃতীয় ঘাতের সমীকরণকে যথাক্রমে দ্বিঘাত (quadratic) এবং ত্রিঘাত (cubic) সমীকরণ বলে।

$7x+2=0$ বা $ax+b=0$ সরল সমীকরণ। $ax^2+bx+c=0,\ (a\neq 0)$ বা $x^2+y^2=r^2$ দ্বিঘাত সমীকরণ। $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ একটি ত্রিঘাত সমীকরণ।

২১.খ.২ কয়েকটি বিশেষ উপপাদ্য

ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem) ঃ বাস্তব সহগযুক্ত কোন বহুপদ রাশিমালাকে $(x-h)$ দ্বারা ভাগ করলে, ভাগশেষটি ঐ রাশিমালায় x-এর স্থানে h বসিয়ে পাওয়া যায়।

উৎপাদক উপপাদ্য (Factor Theorem) ঃ x-চলরাশিযুক্ত কোন বহুপদ রাশিমালায় x-এর স্থলে h বসালে যদি রাশিমালাটির মান শূন্য হয়, তবে $(x-h)$ রাশিমালাটির একটি উৎপাদক।

বীজগণিতের মৌল উপপাদ্য (Fundamental Theorem of Algebra) ঃ বাস্তব সহগযুক্ত সকল সমীকরণের অন্ততঃ একটি বীজ থাকে।

উদা. 1. সমাধান করুন ঃ

$$\frac{3x}{4}-8=\frac{2x}{5}+3.$$

বা, $\dfrac{3x-3z}{4}=\dfrac{2x+15}{5}$ বা, $5(3x-32)=4(2x+15)$

বা, $15x-160=8x+60.$

বা, $7x=220$ বা, $x=\dfrac{220}{7}=31\dfrac{3}{7}.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=31\dfrac{3}{7}.$

উদা. 2. $3(x+3)^2+5(x+5)^2=8(x+8)^2$

বা, $3(x^2+6x+9)+5(x^2+10x+25)=8(x^2+16x+64)$

বা, $18x+27+50x+125=128x+512$

বা, $60x=360$ বা, $x=\dfrac{360}{60}=6.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=6.$

২১.খ.৩ দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

একটি চলরাশিযুক্ত দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$ সমাধানের প্রধানতঃ দুটি পদ্ধতির সাহায্য নেওয়া হয় ঃ

(i) উৎপাদক পদ্ধতি (ii) বর্গ নির্ণয় পদ্ধতি।

(i) একটি উদাহরণ নেওয়া যাক।

$3x^2-8x+4=0$

বা, $3x^2-6x-2x+4=0$ বা, $3x(x-2)-2(x-2)=0$

বা, $(x-2)(3x-2)=0$,

সুতরাং $x-2=0$

অথবা $(3x-2)=0$,

বা, $x=2$ অথবা $x=\frac{2}{3}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=2$ বা $\frac{2}{3}$.

(ii) $ax^2+bx+c=0$. (আদর্শ দ্বিঘাত সমীকরণ) $(a\neq 0)$.

বা, $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ বা, $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$

বা, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ বা, $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\therefore \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

সুতরাং x-এর দুটি মান $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

উদা. 3. সমাধান করুন ঃ $3x^2-10x+6=0$.

এখানে, $a=3$, $b=-10$, $c=6$.

$$\therefore \quad x=\frac{10\pm\sqrt{100-72}}{6}=\frac{10\pm\sqrt{28}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{7}}{3}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=\frac{5\pm\sqrt{7}}{3}$

২১.খ.৩.১ দ্বিঘাত সমীকরণে পরিবর্তিত করা যায় এরূপ সমীকরণ

উদা. 1. সমাধান করুন : $4^x-5.2^{x+2}+64=0$

বা, $(2x)^2-20.\ 2^x+64=0.$ মনে করি, $2^x=y.$

$\therefore\ y^2-20y+64=0$ বা, $(y-4)(y-16)=0$

$\therefore\ y=4$ বা, $y=16$

$\therefore\ 2^x=4$ বা, $2^x=2^2$ বা, $x=2$

আবার $2^x=16$ বা, $2^x=2^4$ বা, $x=4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=2,4$

উদা. 2. সমাধান করুন : $\sqrt{2x-5}-\sqrt{x-6}=3$

বা, $\sqrt{2x+5}=3+\sqrt{x-6}$, বর্গ নিয়ে পাই,

$$2x+5=\left(3+\sqrt{x-6}\right)^2=9+6\sqrt{x-6}+x-6$$

$$=x+3+6\sqrt{x-6}$$

বা, $x+2=6\sqrt{x-6}$, পুনরায় বর্গ নিয়ে পাই,

$(x+2)^2=36(x-6)$ বা, $x^2+4x+4=36x-216$

বা, $x^2-32x+220=0$ বা, $(x-10)(x-22)=0$

বা, $x=10$ এবং $x=22$.

উদা. 3. সমাধান করুন : $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)-9=0$

পুনরায় সাজিয়ে, $\{(x+2)(x+8)\}\{(x+4)(x+6)\}-9=0$

বা, $(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)-9=0$

$y=x^2+10x$ ধরে পাই,

$(y+16)(y+24)-9=0$ বা, $y^2+40y+375=0$

বা, $(y+25)(y+15)=0\ \therefore\ y=-25$ বা, -15

যখন $y=-25$, $x^2+10x+25=0$, বা, $(a+5)^2=0$

বা, $x=-5,\ -5.$

যখন $y=-15$, বা, $x^2+10x+15=0$

বা, $x=\dfrac{-10\pm\sqrt{100-60}}{2}=-5\pm\sqrt{10}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $-5,\ -5,\ -5\pm\sqrt{10}$

২১.খ.৩.২ প্রশ্নমালা

সমাধান করুন ঃ

1. $\sqrt{6x-5}-\sqrt{3x-2}=2$ [উত্তর ঃ 9]
2. $2\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+8}=2$ [উত্তর ঃ ± 5]
3. $\sqrt{3x^2-7x+30}+\sqrt{3x^2-7x-5}=7$ [উত্তর ঃ 3, $-\frac{2}{3}$]
4. $x^2-13x+42=0$ [উত্তর ঃ $x=6$ বা 7]
5. $x^2+2x-24=0$ [উত্তর ঃ $x=4,\ -6$]
6. $2^{2x}-3.2^{x+2}+32=0$ [উত্তর ঃ 2, 3]
7. $3^x+3^{3-x}=12$ [উত্তর ঃ 1, 2]
8. $5^{2x}-6.5^{x+1}+125=0$ [উত্তর ঃ 1, 2]
9. $(x+1)(x-3)(4x-3)(4x-5)=4$ [উত্তর ঃ 1, 1, $\dfrac{4\pm\sqrt{65}}{4}$]
10. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\dfrac{7}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=2$ [উত্তর ঃ $2\pm\sqrt{3}$]

২১.খ.৩.৩ দ্বিঘাত সমীকরণের তত্ত্ব (Theory of Quadratic Equation)

আদর্শ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0,\ (a\neq 0)$

আমরা জানি, $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ... (1)

দ্রষ্টব্য ঃ একটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি এবং কেবল দুটিই বীজ আছে।

- **দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সম্পর্ক**

মনে করি, $ax^2+bx+c=0,\ (a\neq 0)$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β. অতএব,

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \ \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \boxed{\alpha+\beta = -\frac{b}{a}}, \boxed{\alpha\beta = \frac{c}{a}}$$

- **পূরক বীজ (Conjugate roots) :**

যদি $p+\sqrt{q}$ এবং $p-\sqrt{q}$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজ হয় তবে একটিকে অপরটির পূরক বীজ বলে।

উপপাদ্য ঃ মূলদ সহগযুক্ত কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ অমূলদ হলে অপর বীজটি তার পূরক হবে।

- **বীজদ্বয়ের প্রকৃতি ঃ** (i) যদি $b^2-4ac>0$ হয় তবে বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে। [(1) থেকে পাই]

(ii) যদি $b^2=4ac$ হয়, তবে বীজদ্বয় বাস্তব এবং সমান।

(iii) যদি $b^2-4ac<0$ হয় তবে বীজদ্বয় অবাস্তব এবং অসমান হবে।

(iv) যদি $b=0$, তবে বীজদ্বয়ের মান সমান এবং বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে।

(b^2-4ac)-কে **নিরূপক** (Discriminant) বলে।

- **বীজদ্বয় জানা থাকলে সমীকরণ নির্ণয় ঃ**

মনেকরি, α, β, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়। সমীকরণটি লেখা যায়

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad [\because a\neq 0]$$

বা, $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

অর্থাৎ x^2 – (বীজদ্বয়ের যোগফল) x + বীজদ্বয়ের গুণফল = 0

বা, $(x-\alpha)(x-\beta)=0$

২১.খ.৪ উদাহরণমালা

উদা. 1. দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার একটি বীজ $3+\sqrt{4}$.

যেহেতু একটি বীজ $3+\sqrt{4}$ (অমূলদ) অপর বীজটি হবে $3-\sqrt{4}$.

মনেকরি, $\alpha=3+\sqrt{4}$, $\beta=3-\sqrt{4}$

নির্ণেয় সমীকরণ $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

বা, $x^2-6x+5=0$

উদা. 2. দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজদ্বয় $x^2-15x+56=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় থেকে 2 কম।

মনেকরি, α, β, $x^2-15x+56=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়,

$\therefore\ \alpha+\beta=15,\ \alpha\beta=56$

নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয় $\alpha-2,\ \beta-2$

এখন $(\alpha-2)+(\beta-2)=\alpha+\beta-4=15-4=11$

$$(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$$

$$=56-30+4=30$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2-11x+30=0$

উদা. 3. $ax^2+bx+c=0$ এবং $a^1x^2+b^1x+c^1=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকবার শর্ত নির্ণয় করুন।

মনেকরি, α দুটি সমীকরণেরই একটি বীজ।

$\therefore\ a\alpha^2+b\alpha+c=0$

এবং $a^1\alpha^2+b^1\alpha+c^1=0$

বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{\alpha^2}{bc^1-cb^1}=\frac{\alpha}{a^1c-c^1a}=\frac{1}{ab^1-b^1a}$$

প্রথম দুইটি সমতা থেকে $\alpha=\dfrac{bc^1-cb^1}{a^1c-c^1a}$ ... (1)

শেষ দুটি সমতা থেকে $\alpha=\dfrac{ca^1-ac^1}{ab^1-ba^1}$ ... (2)

(1) এবং (2) থেকে $\dfrac{bc^1-cb^1}{a^1c-c^1a}=\dfrac{ca^1-ac^1}{ab^1-a^1b}$

বা, $(bc^1-cb^1)(ab^1-a^1b)=(ca^1-ac^1)^2$

এটাই নির্ণেয় শর্ত।

উদা. 4. $ax^2+bx+c=0$ এর বীজদ্বয় ঋণাত্মক হলে দেখান যে a, b, c একই চিহ্ন যুক্ত হবে।

মনেকরি, α, β দুটি বীজ এবং $\alpha = -p^2$ এবং $\beta = -q^2$

$\therefore\ \alpha + \beta = -(p^2 + q^2) = -\frac{b}{a}$ বা, $p^2 + q^2 = \frac{b}{a}$. এখানে বামপক্ষ ধনাত্মক, সুতরাং a এবং b উভয়েই ধনাত্মক অথবা উভয়েই ঋণাত্মক হবে। আবার $\alpha\beta = (-p^2)(-q^2) = p^2q^2 = \frac{c}{a}$

$\therefore\ p^2q^2 = \frac{c}{a}$. p^2q^2 ধনাত্মক সুতরাং a এবং c-র একই চিহ্ন হবে। অতএব a, b, c-র একই চিহ্ন হবে।

২১.খ.৫ প্রশ্নমালা

1. যদি $4x^2 + 9x + c = 0$-এর একটি বীজ অপরটির দ্বিগুণ হয় তবে বীজদ্বয় এবং c নির্ণয় করুন।

[**উত্তর ঃ** $-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}$]

2. নিম্নের সমীকরণগুলির বীজগুলির প্রকৃতি নির্ণয় করুন ঃ

(i) $4x^2 - 4x + 1 = 0$. [**উত্তর ঃ** বাস্তব, মূলদ ও সমান]

(ii) $x^2 - 6x + 2 = 0$. [**উত্তর ঃ** বাস্তব, অমূলদ ও অসমান]

3. m-এর কোন মানের জন্য $(m+2)x^2 + (3m-2)x + 2m - 3 = 0$-র সমান বীজ থাকবে।

[**উত্তর ঃ** 2, 14]

4. একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজদ্বয় $\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}$. [**উত্তর ঃ** $12x^2 + x - 6 = 0$]

5. দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার একটি বীজ $(5 - 4\sqrt{3})$ [**উত্তর ঃ** $x^2 - 10x - 23 = 0$].

6. দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার একটি বীজ $\frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{p + \sqrt{p^2 - 4q}}$

[**উত্তর ঃ** $qx^2 - (p^2 - 2q)x + q = 0$]

7. $ax^2 + bx + c = 0$-এর একটি বীজ যদি অপরটির চারগুণ হয় তবে দেখান যে $4b^2 = 25ac$.

8. যদি $ax^2 + bx + c = 0$-এর বীজদ্বয় $m : n$ অনুপাতে থাকে; দেখান যে, $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$.

9. যদি $x^2 + px + q = 0$ এবং $x^2 + qx + p = 0$-এর একটি সাধারণ বীজ থাকে তবে দেখান যে $p = q$ অথবা $p + q + 1 = 0$

10. একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজদ্বয় $3x^2-7x+5=0$ বীজদ্বয়ের অন্যোন্যক।

[উত্তর : $5x^2-7x+3=0$]

২১.খ.৬ প্রতিসম রাশিমালা (Symmetric Expression)

α, β দুই রাশিযুক্ত যে রাশিমালায় α, β-র স্থান বিনিময়ের ফলেও যদি রাশিমালাটি অপরিবর্তিত থাকে তবে তাকে প্রতিসম বলে। যথা, $\alpha^2+\beta^2$, $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$, $\alpha\beta$ ইত্যাদি।

উদা. 1. যদি α, β $2x^2-3x+4=0$ এর দুইটি বীজ হয় তবে $\alpha^3+\beta^3$-এর মান নির্ণয় করুন।

এখানে, $\alpha+\beta=+\dfrac{3}{2}$, $\alpha\beta=\dfrac{4}{2}=2$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{27}{8}-6\times\frac{3}{2}=\frac{27}{8}-9=\frac{-45}{8}$$

উদা. 2. α, β, $ax^2+bx+c=0$-এর দুটি বীজ হল $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$-এর মান নির্ণয় করুন।

এখানে, $\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

এখন, $$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{\dfrac{b^2}{a^2}-2\dfrac{c}{a}}{\dfrac{c}{a}}=\frac{b^2-2ac}{ac}$$

উদা. 3. যদি α এবং β $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের দুটি বীজ হয় তবে

$\dfrac{1}{(a\alpha+b)^3}+\dfrac{1}{(a\beta+b)^3}$-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $ax^2+bx+c=0$ ... (1) α, β এই সমীকরণের দুটি বীজ। $\therefore$ $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a};\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

এখন, $a\alpha+a\beta=-b$ বা, $a\alpha+b=-a\beta$ এবং $a\beta+b=-a\alpha$

$$\therefore\ \frac{1}{(a\alpha+b)^3}+\frac{1}{(a\beta+b)^3}=\frac{1}{(-a\beta)^3}+\frac{1}{(-a\alpha)^3}=-\frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\alpha^3}\right)$$

$$=-\frac{1}{a^3}\left(\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3\beta^3}\right)=-\frac{1}{a^3}\left[\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^3\beta^3}\right]$$

$$=-\frac{1}{a^3}\cdot\frac{-\frac{b^3}{a^3}-3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)}{\frac{c^3}{a^3}}=\frac{b^3-3abc}{a^3c^3}$$

- **x-এর বাস্তব মানের জন্য ax^2+bx+c-এর সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান ঃ**

1. a ধনাত্মক হলে $\frac{4ac-b^2}{4a}$ সর্বনিম্ন মান।

2. a ঋণাত্মক হলে $\frac{4ac-b^2}{4a}$ সর্বোচ্চ মান।

ax^2+bx+c-এর চিহ্ন ঃ

(i) যদি উপরের রাশিমালার বীজদ্বয় বাস্তব এবং সমান হয় তবে ax^2+bx+c এবং a-র চিহ্ন একই হবে।

(ii) যদি বীজদ্বয় বাস্তব এবং অসমান হয় (ধরি $\alpha>\beta$ তবে x, α এবং β-র মধ্যে না থাকলে a এবং ax^2+bx+c-এর একই চিহ্ন হবে এবং x, α এবং β-র মধ্যে থাকলে a এবং ax^2+bx+c-এর বিপরীত চিহ্ন হবে।

উদা. 1. x বাস্তব হলে, $3x^2-5x+4$-এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করুন।

মনে করি, $y=3x^2-5x+4 \quad \therefore\ 3x^2-5x+4-y=0$

নিরূপক $=25-12(4-y)=12y-23=12\left(y-\frac{23}{12}\right)$

x বাস্তব সুতরাং নিরূপক ঋণাত্মক হবে না অর্থাৎ $y>\frac{23}{12}$

$\therefore\ 3x^2-5x+4$-এর সর্বনিম্ন মান $\frac{23}{12}$

উদা. 2. $1+8x-6x^2$-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করুন।

মনেকরি, $y=1+8x-6x^2 \quad \therefore\ (1-y)+8x-6x^2=0$

বা, $6x^2-8x+(y-1)=0$

নিরূপক $64-24(y-1)=64+24-24y=88-24y=4(22-6y)$.

সুতরাং $(22-6y)$ ঋণাত্মক হবে না।

$\therefore \frac{22}{6}$ বা $\frac{11}{3}$ সর্বোচ্চ মান।

উদা. 3. দেখান যে x-এর বাস্তব মানের জন্য $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$-এর মান 5 এবং 9-এর মধ্যে থাকতে পারে না।

মনেকরি, $y=\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$

বা, $x^2(1-y)+2x(17-y)+7y-71=0$

নিরূপক $=4(17-y)^2-4(1-y)(7y-71)$

$=32(y-9)(y-5)$

x বাস্তব, সুতরাং নিরূপক ঋণাত্মক হবে না।

যদি $y>9$ বা $y<5$ হয় তবে নিরূপক ধনাত্মক হয়। যদি $y>5$, কিন্তু $y<9$ নিরূপক ঋণাত্মক হবে। সুতরাং y-এর মান 5 এবং 9-এর মধ্যে থাকতে পারে না।

২১.খ.৭ প্রশ্নমালা

1. যদি α ও β, $ax^2+bx+c=0$-এর বীজদ্বয় হয় তবে $\frac{\alpha^2}{\beta}-\frac{\beta^2}{\alpha}$-এর মান নির্ণয় করুন।

[উঃ $\pm\frac{(b^2-ac)\sqrt{b^2-4ac}}{a^2c}$]

2. $1+8x-6x^2$-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{11}{3}$]

3. $x^2-6x+10$-এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করুন। [উঃ 1]

4. দেখান যে x-এর বাস্তব মানের জন্য $\frac{6x^2-22x+21}{5x^2-18+17}$-এর মান 1 এবং $\frac{5}{4}$-এর মধ্যে থাকে।

5. দেখান যে x-এর বাস্তব মানের জন্য $\frac{2x^2-2x+4}{x^2-4x+3}$-এর মান 1 এবং -7-এর মধ্যে থাকতে পারে না।

২১.খ.৮ একঘাত বিশিষ্ট সহ-সমীকরণ (Simultaneous Linear Equations)

$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \ldots \quad (1)$

$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \ldots \quad (2)$

একটি একঘাত সহ-সমীকরণ গঠন করে। x ও y-এর মান নির্ণয় করতে হবে যা (1) এবং (2)-কে সিদ্ধ করে।

(1) এবং (2) থেকে বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই

$$\frac{x}{b_1c_2-c_1b_2}=\frac{y}{c_1a_2-a_1c_2}=\frac{1}{a_1b_2-b_1a_2}$$

$$\therefore \quad x=\frac{b_1c_2-c_1b_2}{a_1b_2-b_1a_2},\ y=\frac{c_1a_2-a_1c_2}{a_1b_2-b_1a_2} \quad [a_1b_2-b_1a_2\neq 0]$$

এটি হ'ল নির্ণেয় সমাধান।

উদা. 1. সমাধান করুন : $3x+2y+17=0,\ 5x-6y-9=0$

বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই $\dfrac{x}{-18+102}=\dfrac{y}{85+27}=\dfrac{1}{-18-10}$

বা, $\dfrac{x}{84}=\dfrac{y}{112}=\dfrac{-1}{28} \qquad \therefore \quad x=-\dfrac{84}{28}=-3$

$$y=\frac{-112}{28}=-4.$$

উদা. 2. সমাধান করুন :

$\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{y}=6 \quad \ldots \quad (1),\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{8}{y}=7\dfrac{19}{21}=7+\dfrac{19}{21} \quad \ldots \quad (2)$

(1) × 5, $\quad \dfrac{15}{x}+\dfrac{35}{y}=30$

(2) × 3, $\quad \dfrac{15}{x}+\dfrac{24}{y}=21+\dfrac{19}{7}$

বিয়োগ ক'রে, $\dfrac{11}{y}=9-\dfrac{19}{7}=\dfrac{63-19}{7}=\dfrac{44}{7}$

$\therefore \quad \dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{7} \quad \therefore \quad y=\dfrac{7}{4}$

(1) এ $\frac{1}{y}$-এর মান বসিয়ে পাই $x=\frac{3}{2}$.

২১.খ.৯ সহ-দ্বিঘাত সমীকরণ ঃ দুটি অজ্ঞাত রাশি

একটি দ্বিঘাত ও একটি একঘাত ঃ একঘাত সমীকরণ থেকে একটি অজ্ঞাত রাশির মান দ্বিঘাত সমীকরণটিতে বসাতে হবে।

উদা. 1. সমাধান করুন ঃ $x^2+xy=12 \quad \ldots (1), \quad 2x-y=5 \quad \ldots (2)$

(2) থেকে পাই $y=2x-5$. (1)-এ বসিয়ে পাই

$x^2+x(2x-5)=12$ বা, $x^2+2x^2-5x-12=0$

বা, $3x^2-5x-12=0$ বা, $(x-3)(3x+4)=0$

$\therefore\ x=3$ বা, $x=-\frac{4}{3}$.

যখন $x=3,\ y=2.3-5=1$

যখন $x=-\frac{4}{3},\quad y=-\frac{4}{3}.2-5=-\frac{8}{3}-5=-\frac{23}{3}$.

উদা. 2. সমাধান করুন ঃ $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2} \quad \ldots (1)$

$$x+y=10 \quad \ldots (2)$$

(1) থেকে $\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{5}{2}$ বা, $\frac{10}{\sqrt{xy}}=\frac{5}{2}$ বা, $\frac{1}{\sqrt{xy}}=\frac{1}{4}$.

বা, $\sqrt{xy}=4,\quad xy=16 \quad \ldots (3)$

(2) থেকে $x=10-y \quad \therefore\ (10-y)y=16$. বা, $10y-y^2=16$.

বা, $y^2-10y+16=0$ বা, $(y-2)(y-8)=0 \quad \therefore\ y=2,8$

যখন $y=2$, (2) থেকে $x=8$

যখন $y=8$, (2) থেকে $x=2$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy. \ =100-4.16$ [(2) এবং (3) হইতে]

$\therefore\ (x-y)^2=36 \quad \therefore\ x-y=\pm 6. \quad \ldots (4)$

(2) এবং (4) থেকে যোগ ও বিয়োগ দ্বারা x, y নির্ণয় করা যায়।

২১.খ.১০ প্রশ্নমালা

সমাধান করুন :

1. $x^2+xy=15, x-y=1.$ [উঃ $x=3, -\frac{5}{2}$]

2. $x^2+y^2=13, x+y=5.$ [উঃ $x=2,\ 3$]

3. $2x^2+3xy+y^2=15, 5x+2y=12.$ [উঃ $x=2,\ 14\ ;\ y=1,\ -29$]

4. $x+y=\frac{5}{6}, \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1.$ [উঃ $x=\frac{1}{3}, \frac{5}{2}; y=\frac{1}{2}, \frac{-5}{3}$]

5. $x-y=16, \sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{16}{15}$ [উঃ $x=25,\ -9\ ;\ y=9,\ -25$]

6. $x+y+xy=5, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}$ [উঃ $x=2,\ y=1,\ x=1,\ y=2$]

7. $x+y=5, x^2+2y^2-xy=11$ [উঃ $x=3,\ \frac{13}{4};\ y=2,\ \frac{7}{4}$]

২১.খ.১১ সহ-সমীকরণ : তিনটি অজ্ঞাত রাশি

যখন তিনটি সমীকরণের মধ্যে দুইটি x, y, z-এ একঘাত তখন সেই দুটি থেকে x এবং y-কে z-এর সাপেক্ষে প্রকাশ ক'রে তৃতীয় সমীকরণে বসাতে হবে।

উদা. 1. সমাধান করুন :

$x+y+z=6$ ... (1)

$2x-y+5z=15$ ... (2)

$yz+zx+xy=11$ ... (3)

(1), (2) যোগ ক'রে পাই $3x+6z=21$ বা, $x+2z=7$

বা, $x=7-2z$ ... (4)

আবার $(2)-2\times(1)$ থেকে পাই $-3y+3z=3$

বা, $y=z-1$ ... (5). (4) এবং (5) থেকে x, y-এর মান (3)-এ বসিয়ে,

$(z-1)z+z(7-2z)+(7-2z)(z-1)=1$

বা, $z^2-5z+6=0$ বা, $(z-3)(z-2)=0$ $\therefore$ $z=3,2.$

(4) এবং (5) থেকে $x = 1,\ 3$ এবং $y = 2,\ 1.$

দ্রষ্টব্য ঃ একঘাত সমীকরণ দুটিতে যদি ধ্রুবক রাশি না থাকে তখন বজ্রগুণন পদ্ধতি সুবিধাজনক।

উদা. 2. সমাধান করুন ঃ $xy = a^2, yz = b^2, zx = c^2$

$\therefore\ \ x^2y^2z^2 = a^2b^2c^2$ বা, $xyz = \pm abc$

$\therefore\ \ \dfrac{xyz}{xy} = \pm\dfrac{abc}{a^2}$ বা, $z = \pm\dfrac{bc}{a}$

অনুরূপে $x = \pm\dfrac{ca}{b}, y = \pm\dfrac{ab}{c}.$

উদা. 3.

$$(y+z)(z+x) = 40 \quad \ldots \quad (1)$$
$$(z+x)(x+y) = 36 \quad \ldots \quad (2)$$
$$(x+y)(y+z) = 90 \quad \ldots \quad (3)$$

$(1)\times(2)\times(3), (y+z)^2\,(z+x)^2\,(x+y)^2 = 40\times36\times90.$

বা, $(y+z)(z+x)(x+y) = \pm10\times6\times2\times3 = \pm360 \quad \ldots \quad (4)$

(1), (2), (3) এবং (4) থেকে পাই

$x+y = \pm9, y+z = \pm10, z+x = \pm4 \quad \ldots \quad (5)$

$\therefore\ \ 2(x+y+z) = \pm(9+10+4) = \pm23$

$\therefore\ \ x+y+z = \pm\dfrac{23}{2} \quad \ldots \quad (6)$

(5) এবং (6) থেকে $x = \pm\dfrac{3}{2},\ y = \pm\dfrac{15}{2},\ z = \pm\dfrac{5}{2}.$

উদা. 4.

$$x^2 - yz = a \quad \ldots \quad (1)$$
$$y^2 - zx = b \quad \ldots \quad (2)$$
$$z^2 - xy = c \quad \ldots \quad (3)$$

$(1)\times y + (2)\times z + (3)\times x, \qquad cx + ay + bz = 0 \quad \ldots \quad (4)$

$(1)\times z + (2)\times x + (3)\times y, \qquad bx + cy + az = 0 \quad \ldots \quad (5)$

(4) ও (5) থেকে বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই $\dfrac{x}{a^2 - bc} = \dfrac{y}{b^2 - ca} = \dfrac{z}{c^2 - ab} = k$ (ধরি)

$\therefore\ \ x = k(a^2 - bc),\ \ y = k(b^2 - ca),\ \ z = k(c^2 - ab)$

(1)-এ বসিয়ে পাই $K = \pm \frac{1}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}}$

$\therefore \quad x = \pm \frac{a^2 - bc}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}}$ অনুরূপে y এবং z পাওয়া যাবে।

২১.খ.১২ অনুশীলনী

1. $4x + 5y - 3z = 5,\ 2x - 3y + 4z = 8,\ x^2 + y^2 + z^2 = 14.$

[উঃ $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$ বা, $x = 3,\ y = -2,\ z = -1$]

2. $x(y+z) = 5, \quad y(z+x) = 8, \quad z(x+y) = 9.$

[উঃ $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$ বা, $x = -1,\ y = -2,\ z = -3$]

3. $y + z = \frac{1}{x}, \quad z + x = \frac{1}{y}, \quad x + y = \frac{1}{z}$ [উঃ $x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$]

4. $xz + y = 7z, \quad yz + x = 8z, \quad x + y + z = 12.$

[উঃ $x = 4, \frac{60}{7}; \quad y = 6, \frac{66}{7}; \quad z = 2, -6$]

5. $x + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}, \quad y + \frac{1}{z} = \frac{7}{3}, \quad z + \frac{1}{x} = 4.$ [উঃ $x = 1, \frac{3}{10}; \quad y = 2, \frac{5}{6}; \quad z = 3, \frac{2}{3}$]

6. $x^2 - yz = 5, \quad y^2 - zx = 3, \quad z^2 - xy = -1.$ [উঃ $x = 2, -2, y = 1, -1, z = -1, 1$]

7. $xy = 56; \quad yz = 40; \quad zx = 35.$ [উঃ $x = \pm 7, y = \pm 8, z = \pm 5$]

8. একটি সমকোণী ত্রিভুজের পরিসীমা 60 সে.মি. এবং ক্ষেত্রফল 150 বর্গসে.মি. হলে ত্রিভুজটির বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন। [উঃ 15 সে.মি., 20 সে.মি. এবং 25 সে.মি.]

[সংকেত ঃ মনে করি সমকোণী ত্রিভুজটির অতিভুজের দৈর্ঘ্য x সেমি, এবং অপর দুই বাহুর দৈর্ঘ্য y এবং z সে.মি., তাহলে প্রশ্নানুসারে, $x + y + z = 60$ ... (1); $\frac{1}{2}yz = 150$ ... (2) এবং $y^2 + z^2 = x^2$ ...(3) [$\because$ ত্রিভুজটি সমকোণী)]

9. কোন একটি শিল্পে উৎপন্ন সামগ্রীর চাহিদা ও যোগানের সূত্র নীচে দেওয়া হল ঃ

$pq = 100, q = 3p + 20$, যেখানে p মূল্য ও q পরিমাণকে প্রকাশ করে। সাম্যাবস্থায় মূল্য ও পরিমাণের মান নির্ণয় করুন। [উঃ $3\frac{1}{3}$ একক; 30 একক]

10. কোন দ্রব্যের চাহিদা সমীকরণ $p - 3q = 22$ এবং যোগান সমীকরণ $q^2 + 2p + 4q = 100$ যেখানে p দ্রব্যটির দাম এবং q দ্রব্যটির পরিমাণ। তা হলে দ্রব্যটির বাজার ভারসাম্য দাম ও বাজার ভারসাম্য পরিমাণ নির্ণয় করুন।

একক ২১. গ. ❑ লগারিদ্‌ম্ (LOGARITHM)

২১.গ.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন —

- লগারিদ্‌ম্ কী
- লগারিদ্‌মের সূত্র
- বিপরীত লগারিদ্‌ম্

২১.গ.১ লগারিদ্‌ম্ (Logarithm) কী?

আমরা জানি, $3^4 = 81$. এখানে 3-কে নিধান (base) এবং 4-কে সূচক বলা হয়। 4 এবং 81-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে বলা হয় 4, 81-এর লগারিদ্‌ম্ যখন নিধান 3 এবং লেখা হয় $4 = \log_3 81$.

যদি $a^x = N$ হয় $(a > 0, a \neq 1)$ তবে এবং $N > 0$ কে N-এর লগারিদ্‌ম্ বলে যার নিধান (base) a এবং সংক্ষেপে লেখা হয় $x = \log_a N$

N ধনাত্মক সংখ্যাটিকে a নিধান সাপেক্ষে x-এর অ্যান্টিলগারিদ্‌ম্ বলে এবং লেখা হয় $N = anti\log_a x.$

আমরা জানি, (i) $a^0 = 1 \quad \therefore \boxed{\log_a 1 = 0}$

(ii) $a^1 = a \quad \therefore \boxed{\log_a a = 1}$

অর্থাৎ যা নিধান তার লগারিদ্‌ম্ সর্বদা 1।

(iii) $a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \therefore \quad \log_a\left(\frac{1}{a}\right) = -1$

(iv) $a^x = N$ হলে $x = \log_a N$

x-এর মান বসালে পাই $a\log_a N = N$

আমরা জানি, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$... ইত্যাদি।

$\therefore \quad \log_{10} 100 = 2, \quad \log_{10} 1000 = 3.$ ...$x > y$ হলে $\log_a^x > \log_a y$. a যে কোন ধনাত্মক নিধান।

লগারিদ্‌ম্-এর আলোচনায় নিধান জানা থাকলে বারবার নিধান লেখবার প্রয়োজন নেই। যখন লগারিদ্‌মের 10 তখন বলা হয় সাধারণ লগারিদ্‌ম্।

২১.গ.১.১. লগারিদ্‌ম্-এর কতিপয় সূত্র

(i) $\log_a(m \times n) = \log_a m + \log_a n$

মনেকরি, $\log_a m = x$ এবং $\log_a n = y$ সুতরাং $a^x = m$ এবং $a^y = n.$

$\therefore \quad m \times n = a^x . a^y = a^{x+y}$

সংজ্ঞা থেকে পাই $\log_a(m \times n) = x + y = \log_a m + \log_a n$

অনুরূপে $\log_a(m \times n \times p) = \log_a m + \log_a n + \log_a p$ ইত্যাদি।

(ii) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

(i) থেকে পাই $\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$\therefore \quad \log_a\left(\frac{m}{n}\right) = x - y = \log_a m - \log_a n$

(iii) $\log_a(m^n) = n\log_a m$

মনেকরি, $\log_a^m = x \quad \therefore \quad a^x = m$

এখন $m^n = (a^x)^n = a^{nx}$

$\therefore \quad \log_a m^n = nx = n\log_a m$.

(iv) $\log_b m = \dfrac{\log_a m}{\log_a b}$—একে নিধান পরিবর্তন বলে।

মনেকরি, $\log_b^m = y \quad \therefore \quad b^y = m$ এবং $\log_a^m = x$

$\therefore \quad a^x = m$ অর্থাৎ $b^y = a^x \quad \therefore \quad b = a^{\frac{x}{y}}$

$$\therefore \quad \frac{x}{y} = \log_a b = \frac{\log_a m}{\log_b m}$$

$$\therefore \quad \log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}.$$

$m = a$ বসালে পাই $\log_b a = \dfrac{\log_a a}{\log_a b} = \dfrac{1}{\log_a b}$

২১.গ.১.২ উদাহরণমালা

উদা. 1. $\log 66 = \log(2\times3\times11) = \log 2 + \log 3 + \log 11$

উদা. 2. $\log 6\frac{4}{11} = \log\frac{70}{11} = \log\frac{7\times5\times2}{11}$

$$= \log 7 + \log 5 + \log 2 - \log 11$$

এখানে নিধান লেখা হয়নি।

উদা. 3. $\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2$

উদা. 4. প্রমাণ করুন যে, $\log_b^a \times \log_c^b \times \log_a^c = 1$

বামপক্ষ $= \frac{\log_a a}{\cancel{\log_a b}} \times \frac{\cancel{\log_a b}}{\cancel{\log_a c}} \times \cancel{\log_a c} = 1$

উদা. 5. 144-এর লগারিদ্‌ম্ নির্ণয় করুন যখন নিধান $2\sqrt{3}$.

মনেকরি, x নির্ণেয় লগারিদ্‌ম্। সুতরাং $\left(2\sqrt{3}\right)^x = 144$

বা, $\left(2\sqrt{3}\right)^x = 2^4 \times 3^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^4 \quad \therefore \quad x = 4.$

উদা. 6. সরল করুন ঃ $\log\frac{\sqrt{a^3 . b^{-2}}}{b^2 c^5}$

$$\log\frac{\sqrt{a^3 . b^{-2}}}{b^2 c^5} = \log\frac{a^{3/2} . b^{-1}}{b^2 c^5} = \log\frac{a^{3/2}}{b^3 c^5}$$

$$= \frac{3}{2}\log a - \log(b^3 c^5) = \frac{3}{2}\log a - \log b^3 - \log c^5$$

$$= \frac{3}{2}\log a - 3\log b - 5\log c$$

উদা. 7. যদি $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y}$ হয় দেখান যে $x^x y^y z^z = 1$

মনেকরি, প্রত্যেকটি অনুপাত $= k$

$$\therefore \quad \frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y} = k$$

বা, $\frac{x\log x}{x(y-z)} = \frac{y\log y}{y(z-x)} = \frac{z\log z}{z(x-y)} = k$

$$\therefore \quad \log x^x = kx(y-z), \quad \log y^y = ky(z-x), \quad \log z^z = k(x-y)$$

$$\therefore \quad \log x^x + \log y^y + \log z^z = 0$$

বা, $\log(x^x \times y^y \times z^z) = 0 = \log 1$

$$\therefore \quad x^x \times y^y \times z^z = 1$$

উদা. 8. যে সংখ্যাটির লগারিদ্‌ম্ ½ যখন নিধান 9 সেই সংখ্যাটি নির্ণয় করুন।

মনেকরি, নির্ণেয় সংখ্যা N.

$\therefore \quad \log_9 N = \frac{1}{2}$ বা, $9^{\frac{1}{2}} = N$ বা, $N = 3$.

উদা. 9. $\text{Antilog}_5 3$ নির্ণয় করুন।

মনেকরি, $x = \text{antilog}_5 3$ $\therefore$ $x = 5^3 = 125$.

উদা. 10. $\log_x(8x-3) - \log_x 4 = 2$, হলে x নির্ণয় করুন।

এখানে $\log_x \frac{8x-3}{4} = 2$. $\therefore$ $x^2 = \frac{8x-3}{4}$

বা, $4x^2 - 8x + 3 = 0$. বা, $(2x-3)(2x-1) = 0$

$\therefore$ $x = \frac{3}{2}$ বা, $\frac{1}{2}$.

২১.গ.১.৩. প্রশ্নমালা

(1) 512-এর লগারিদ্‌ম্‌ নির্ণয় করুন যখন নিধান $2\sqrt{2}$. [উঃ 6]

(2) প্রমাণ করুন ঃ $\log_a x \times \log_b y = \log_b x \times \log_a y$

(3) প্রমাণ করুন ঃ $x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y} = 1$.

(4) $\log a, \log b, \log c$-এর সাপেক্ষে $\log \dfrac{a^3\sqrt{b^3c^5}}{\sqrt{a^{-\frac{3}{2}}b^5a^{-\frac{2}{3}}}}$ কে সরল করুন।

[উঃ $\frac{15}{4}\log a - \log b + \frac{17}{3}\log c$]

(5) যদি $\log_a b = 10$ এবং $\log_{6a}(32b) = 5$ হয় তবে a নির্ণয় করুন। [উঃ $a = 3$]

(6) যদি $\log_{10} 2 = \cdot 3010, \log_{10} 3 = \cdot 4771, \log_{10} 7 = \cdot 8451$ হয় তবে দেখান যে,

(i) $\log_{10} 108 = 2\cdot 0333$ (ii) $\log_{10} \sqrt[3]{5} = \cdot 2330$.

(7) দেখান যে $\log_3 \log_2 \log_2 256 = 1$.

(8) প্রমাণ করুন যে $\log_{10}^2 > \cdot 3$.

(9) যদি $\log_p x = a$ এবং $\log_q x = b$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে $\log_{p/q} x = \frac{ab}{b-a}$.

(10) a, b, c গুণোত্তর প্রগতিতে থাকলে প্রমাণ করুন যে $\log_a x, \log_b x, \log_c x$ বিপরীত প্রগতিতে থাকবে।

(11) $a = \log_x(yz), b = \log_y(zx)$ এবং $c = \log_z(xy)$ হলে দেখান যে—

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1 (xyz \neq 1)$$

(12) যদি x ধনাত্মক এবং 1 অপেক্ষা ছোট হয়, তবে দেখান যে

$\log(1+x) + \log(1+x^2) + \log(1+x^4) + \log(1+x^8) + \ldots \infty$

$= -\log(1-x)$.

২১.গ.২. সাধারণ লগারিদ্‌ম্‌ (Common Logarithms)

যদি নিধান 10 হয়, তবে লগারিদ্‌ম্‌কে সাধারণ লগারিদ্‌ম্‌ বলে। যদি কোন নিধান লেখা না থাকে তবে নিধান 10 ধরতে হবে। অর্থাৎ $\log_{10} 3$ বোঝাতে লেখা হয় $\log 3$।

মনে রাখতে হবে বর্তমান আলোচনায় কেবল ধনাত্মক সংখ্যা সমূহেরই লগারিদ্‌ম্‌ নির্ণয় করা হবে।

পূর্ণক (Characteristic) এবং অংশক (Mantisa)

আমরা জানি, $\log_{10}^{10} = 1$ এবং $\log_{10}^{100} = 2$

$\therefore$ 10 থেকে বড় এবং 100 থেকে ছোট যে কোন সংখ্যার সাধারণ লগারিদ্‌ম্‌ 1 থেকে বড় এবং 2 থেকে ছোট হবে। সুতরাং $10 < x < 100$ হলে $1 < \log_{10}^{x} < 2$. সুতরাং $\log_{10} x$-এর মান 1 এবং একটি প্রকৃত ধনাত্মক দশমিক ভগ্নাংশের যোগফল হবে। অনুরূপে প্রত্যেক সংখ্যার সাধারণ লগারিদ্‌ম্‌ একটি অখণ্ড সংখ্যা 3 একটি প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশের যোগফল হয়। লগারিদ্‌মের অখণ্ড অংশকে **পূর্ণক** (Characteristic) এবং ধনাত্মক দশমিক অংশকে **অংশক** (Mantisa) বলে।

উদা. $\log 33 \cdot 9 = 1 \cdot 5289$ এখানে 1 পূর্ণক এবং ·5289 অংশক।

২১.গ.২.১. পূর্ণক নির্ণয়ের প্রণালী

আমরা জানি, যখন $10 < x < 100$ তখন $\log_{10}^{x}$-এর পূর্ণক 1, অর্থাৎ দুই অঙ্কের যে কোন সংখ্যার পূর্ণক 1. যথা $\log 53$-এর পূর্ণক 1, $\log 79 \cdot 21$-এর পূর্ণক 1, কারণ সংখ্যাটির অখণ্ড অংশ দুই অঙ্কের।

অনুরূপে, যে সকল সংখ্যার অখণ্ড অংশ তিন অঙ্কের তাদের লগারিদ্‌মের পূর্ণক 2. অনুরূপে **কোন সংখ্যার অখণ্ড অংশের অঙ্ক সংখ্যা যত তা অপেক্ষা 1 কম হবে তার লগারিদ্‌ম্‌ এর পূর্ণক।** $\log 1 \cdot 98$-এর পূর্ণক 0 ইত্যাদি।

1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক সংখ্যার লগারিদম্-এর পূর্ণক :

$10^{-1} = \frac{1}{10} = \cdot 1 \qquad \therefore \log \cdot 1 = -1$

$10^{-2} = \frac{1}{100} = \cdot 01 \qquad \therefore \log \cdot 01 = -2$ ইত্যাদি।

মনেকরি, log ·04 নির্ণয় করতে হবে। যেহেতু $\cdot 01 < \cdot 04 < \cdot 1$

$\therefore \log .01 < \log .04 < \log 1$

অর্থাৎ, $\log \cdot 04 = -2 +$ দশমিকাংশ। এর পূর্ণক ঋণাত্মক এবং অংশক ধনাত্মক। সুতরাং **দশমিক বিন্দুর পরে যতগুলি শূন্য থাকবে সেই শূন্য সংখ্যা অপেক্ষা পূর্ণক 1 বেশী এবং তা ঋণাত্মক হবে।**

যে সকল সংখ্যার সার্থক অঙ্কগুলি সমান শুধু দশমিকের স্থান পৃথক তাদের লগের অংশক সমান।

যথা, 5·378, ·005378, 5378, 537·8 সংখ্যাগুলি সমান যখন দশমিক বিন্দু থাকবে না এবং এদের লগের অংশক সমান হবে।

২১.গ.২.২. অংশক নির্ণয়ের পদ্ধতি

5·378-এর অংশক নির্ণয়ের জন্য প্রথমে লগ তালিকার অন্তিম বাম প্রান্তিক স্তম্ভে 53 সংখ্যাটি বের করুন। এখন এর দক্ষিণে অনুভূমিক রেখা বরাবর সেই স্তম্ভ পর্যন্ত যেতে হবে যার শীর্ষে 7 আছে এবং সংখ্যাটি পাওয়া গেল 72997. চতুর্থ অঙ্ক 8-এর জন্য মধ্যক-পার্থক্য তালিকার এবং তার যে স্তম্ভে 8 আছে তা যে অনুভূমিক সারির বাম প্রান্তে 53 আছে সেইখানে 65 দেখা যাবে। এখানে log 5·378-এর অংশক হবে

$$\begin{array}{r} \cdot 72997 \\ +65 \\ \hline \cdot 73062 \end{array}$$

সুতরাং $\log 5 \cdot 378 = 0 \cdot 73062$. এখানে পূর্ণক $(1-1) = 0$

দ্রষ্টব্য : $\log \cdot 002 = -3 + \cdot 3010 = \bar{3} \cdot 3010$

কিন্তু –3·3010 লেখা যাবে না।

$-3 \cdot 3010 = -4 + (1 - \cdot 3010) = -4 + \cdot 6990 = \bar{4} \cdot 6990$

২১.গ.৩ অ্যান্টিলগারিদম্ বা অ্যান্টিলগ বা বিপরীত লগারিদম্ (Anti Logarithm বা Antilog)

মনেকরি, কোন সংখ্যা x-এর লগ y হয় তবে y-কে x-এর অ্যান্টিলগ বলে।

আমরা জানি $\log 2 = \cdot 30103$ সুতরাং ·30103-এর অ্যান্টিলগ 2.

২১.গ.৩.১. উদাহরণমালা

উদা. 1. অ্যান্টিলগ 2·5736 নির্ণয় করুন।

পূর্ণক 2-কে না ধ'রে কেবল অংশক ·5736-কে নিয়ে অ্যান্টিলগ-তালিকা দেখতে হবে। পূর্বে লগ-তালিকা দেখবার নিয়ম এখানেও প্রয়োজন। অ্যান্টিলগ-তালিকা থেকে পাই,

$$\begin{array}{r} 37411 \\ 52 \\ \hline 37463 \end{array}$$

এখানে পূর্ণক 2 সুতরাং অখণ্ড অংশে তিনটি অঙ্ক আছে।

সুতরাং অ্যান্টিলগ 2·5736 = 374·63.

উদা. 2. অ্যান্টিলগ $\bar{2}\cdot5736$ নির্ণয় করুন।

অ্যান্টিলগ তালিকা থেকে 5736-এর ক্ষেত্রে পাই 3746. যেহেতু পূর্ণক –2 সুতরাং অ্যান্টিলগ $\bar{2}\cdot5736 = \cdot03746$.

উদা. 3. 5^{25}-এ কতগুলি অঙ্ক আছে? দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot30103$

$$\log 5^{25} = 25\log 5 = 25\log\frac{10}{2} = 25(\log 10 - \log 2)$$

$$= 25(1 - \cdot30103)$$

$$= 25\times\cdot69897 = 17.47425$$

সুতরাং নির্ণেয় অঙ্কের সংখ্যা = 17 + 1 = 18.

উদা. 4. মান নির্ণয় করুন : $\sqrt[3]{(7\cdot2\times6\cdot3)/62\cdot5}$

দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot3010300, \log 3 = \cdot4771213, \log 7 = \cdot8450980$.

মনেকরি, N নির্ণেয় মান।

$$\therefore\ \log N = \left(\frac{7\cdot2\times6\cdot3}{62\cdot5}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log\frac{7\cdot2\times6\cdot3}{62\cdot5}$$

$$= \frac{1}{3}\log\frac{72\times63}{6250} = \frac{1}{3}\log\frac{2^3\times3^4\times7}{10\times5^4}$$

$$= \frac{1}{3}[3\log2 + 4\log3 + \log7 - \log10 - 4\log5]$$

$$=\frac{1}{3}\left[3\log 2+4\log 3+\log 7-\log 10-4\log\frac{10}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{3}[7\log 2+4\log 3+\log 7-5\log 10]=-1+\cdot 9535977$$

$$\therefore\ N=\text{অ্যান্টিলগ}\ \bar{1}\cdot 9535977=\cdot 898665$$

উদা. 5. লগ-তালিকা ব্যবহার করে মান নির্ণয় করুন : $\sqrt[18]{1129}$

মনেকরি, $x=\sqrt[18]{1129}=(1129)^{\frac{1}{18}}$

$\therefore\ \log x=\frac{1}{18}\log 1129.\ =\frac{1}{18}\times 3\cdot 0527=0\cdot 1696$

$\therefore\ x$ = অ্যান্টিলগ $\cdot 1696=1\cdot 478.$

উদা. 6. সমাধান করুন : $6^{3-4x}\ 4^{x+5}=8$

দেওয়া আছে $\log 2$ এবং $\log 3$-এর মান।

উভয়দিকে লগ নিয়ে পাই, $(3-4x)\log 6+(x+5)\log 4=\log 8$

বা, $3\log 6-4x\log 6+x\log 4+5\log 4=\log 8$

বা, $x(\log 4-4\log 6)=\log 8-3\log 6-5\log 4$

$\therefore\ x=\dfrac{3\log 2-3(\log 2+\log 3)-10\log 2}{2\log 2-4(\log 2+\log 3)}=1\cdot 77$ আনুমানিক

$\log 2$ এবং $\log 3$-র মান বসিয়ে।

উদা. 7. সমাধান করুন : $2^x=3^y$ ...(1), $2^{y+1}=3^{x-1}$ ...(2)

(1) থেকে $x\log 2=y\log 3\quad\therefore\ y=x\dfrac{\log 2}{\log 3}.$

(2) থেকে $(y+1)\log 2=(x-1)\log 3$

বা, $-x\log 3+y\log 2=-\log 3-\log 2$

বা, $-x\log 3+\dfrac{x(\log 2)^2}{\log 3}=-(\log 3+\log 2)$

বা, $x=\dfrac{(\log 3+\log 2)\log 3}{(\log 3)^2-(\log 2)^2}=2\cdot 71$ [$\log 2, \log 3$-র মান বসিয়ে]

এবং $y=\dfrac{\log 2}{\log 3-\log 2}=1\cdot 71.$

২১.গ.৩.২ অনুশীলনী

(1) প্রদত্ত $\log 2=\cdot 3010300, \log 3=\cdot 4771213,\ \log 7=\cdot 8450980$. লগ-নির্ণয় করুন :

(i) $(0.405)^{\frac{1}{6}}$. [উঃ $\bar{1}\cdot 9345759=-0\cdot 0654241$]

(ii) $(0\cdot 0025)^{\frac{11}{9}}$ [উঃ $\bar{4}\cdot 8197044=-3\cdot 1802956$]

(2) 5^{43}-এর অঙ্ক-সংখ্যা নির্ণয় করুন। [উঃ 18]

(3) মান নির্ণয় করুন : $\dfrac{\sqrt[5]{2\cdot 415}}{(0\cdot 824)^4}$ [উঃ $2\cdot 588$]

(4) সমাধান করুন :

(i) $5^{1-x}=6^{x-3}$ [উঃ $2\cdot 05$]

(ii) $a^x+9a^{-x}=3(b^x+b^{-x})$. [উঃ $\dfrac{\log 3}{\log a\pm\log b}$]

(iii) $2^{x+y}=6^y,\ 3^x=3.2^{y+1}$ [উঃ $x=\cdot 60206, y=-1\cdot 39799$]

একক ২১. ঘ. ❑ সূচক শ্রেণী ও লগারিদম্ শ্রেণী (Exponential and logarithmic series)

২১.ঘ.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন —

- সূচক শ্রেণী কী এবং
- লগারিদ্ম্ উপপাদ্য

২১.ঘ.১ সূচক শ্রেণী (Exponential Series)

সূচক শ্রেণী : $1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\ \dots\ +\frac{1}{\underline{|r}}+\ \dots$ — (1)

এই অসীম শ্রেণীটির যোগফল আছে এবং এই যোগফলকে 'e' প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। এর মান 2 এবং 3-এর মধ্যবর্তী অর্থাৎ $2<e<3$ এবং এটা মূলদ সংখ্যা নয়। e শ্রেণীর ডানদিকের পদগুলির 6 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধমান $e = 2{\cdot}718282$. e একটি অমেয় (incommensurable number) সংখ্যা।

প্রমাণ করা যায় যে, x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য

$e^x = 1+\frac{x}{\underline{|1}}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\ \dots\ +\frac{x^r}{\underline{|r}}+\ \dots\ \infty$ — (2) এটিকে সূচক উপপাদ্য বলে এবং এই শ্রেণীটিকে সূচক শ্রেণী বলা হয়।

যদি $\log_e^a = \mathrm{N}$ হয়, (a, ধনাত্মক) তবে $a = e^{\mathrm{N}}$

$$\therefore\ a^x = e^{Nx} = e^{x\log_e^a} = 1+\frac{x\log_e^a}{\underline{|1}}+\frac{x^2(\log_e^a)^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3(\log_e^a)^3}{\underline{|3}}+\ \dots\ +\frac{x^r(\log_e^a)^r}{\underline{|r}}\ \dots \quad \text{— (3)}$$

(2)-এ x এর স্থানে $-x$ এবং -1 বসিয়ে পাই,

$$e^{-x} = 1-\frac{x}{\underline{|1}}+\frac{x^2}{\underline{|2}}-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\ \dots\ +(-1)^r.\frac{x^r}{\underline{|r}}+\ \dots \quad \text{— (4)}$$

এবং $\quad e^{-1} = 1 - \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots + (-1)^r \frac{1}{\underline{|r}} + \ldots \text{ — (5)}$

২১.ঘ.২ লগারিদ্‌ম্‌ শ্রেণী ও লগারিদম উপপাদ্য (Logarithmic Series)

যদি $-1 < x \leq 1$ হয় তবে সূচক উপপাদ্য থেকে প্রমাণ করা যায় যে,

$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{r-1}\frac{x^r}{r} + \ldots \infty$ এই অসীম শ্রেণীটি অভিসারী হবে। এটিকে লগারিদ্‌ম্‌ শ্রেণী বলা হয়। এর যোগফলকে $\log_e(1+x)$ দ্বারা সূচিত করা হয়। অর্থাৎ

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{r-1}\frac{x^r}{r} + \ldots \text{ — (6)}$$

এটিকে লগারিদ্‌ম্‌ উপাপাদ্য বলে।

(6) এ x-এর জায়গায় $-x$ বসিয়ে পাই—

$$\log_e(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^r}{r} - \ldots \infty \text{ — (7)}$$

এখানে $-1 \leq x < 1$; হলে ডানপক্ষ অভিসারী হবে।

e নিধানের লগারিদ্‌ম্‌কে নেপিরিয়ান (Nepierian System) পদ্ধতি বলে। নেপিয়ার (Napier, 1550-1617) লগারিদ্‌ম্‌-এর আবিষ্কারক।

২১.ঘ.৩ উদাহরণমালা

উদা. 1. প্রমাণ করুন যে $e^{-1} = \frac{2}{\underline{|3}} + \frac{4}{\underline{|5}} + \frac{6}{\underline{|7}} + \ldots \infty$

আমরা জানি, $e^{-1} = 1 - \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}} + \frac{1}{\underline{|4}} - \frac{1}{\underline{|5}} + \frac{1}{\underline{|6}} - \frac{1}{\underline{|7}} + \ldots \infty$

$$= \left(\frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}}\right) + \left(\frac{1}{\underline{|4}} - \frac{1}{\underline{|5}}\right) + \left(\frac{1}{\underline{|6}} - \frac{1}{\underline{|7}}\right) + \ldots \infty$$

$$= \frac{2}{\underline{|3}} + \frac{4}{\underline{|5}} + \frac{6}{\underline{|7}} + \ldots \infty$$

উদা. 2. দেখান যে $1 + \frac{1+2}{\underline{|2}} + \frac{1+2+2^2}{\underline{|3}} + \frac{1+2+2^2+2^3}{\underline{|4}} + \ldots = e^2 - e.$

এখানে n-তম পদ $= \dfrac{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}}{\lfloor n} = \dfrac{2^n-1}{2-1}\cdot\dfrac{1}{\lfloor n} = \dfrac{2^n-1}{\lfloor n}$

বামপক্ষ $= 1+\dfrac{1+2}{\lfloor 2}+\dfrac{1+2+2^2}{\lfloor 3}+\dfrac{1+2+2^2+2^3}{\lfloor 4}+\ \ldots\ \infty$

$= (2-1)+\dfrac{2^2-1}{\lfloor 2}+\dfrac{2^3-1}{\lfloor 3}+\dfrac{2^4-1}{\lfloor 4}+\ \ldots\ \infty$

$= \left(\dfrac{2}{\lfloor 1}+\dfrac{2^2}{\lfloor 2}+\dfrac{2^3}{\lfloor 3}+\ \ldots\ \infty\right)-\left(\dfrac{1}{\lfloor 1}+\dfrac{1}{\lfloor 2}+\dfrac{1}{\lfloor 3}+\ \ldots\ \infty\right)$

$= \left(e^2-1\right)-\left(e-1\right). \qquad = e^2-e.$

উদা. 3. যোগফল নির্ণয় করুন : $\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{6\cdot 7}+\ \ldots\ \infty$

n-তম পদ $= \dfrac{1}{2n.(2n-1)} = \dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2n+1}$

$\therefore$ প্রথম পদ ($n=1$ নিয়ে) $t_1 = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$

দ্বিতীয় পদ $t_2 = \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}$

তৃতীয় পদ $t_3 = \dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{7}$

. . . .

. . . .

n-তম পদ $t_n = \dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2n+1}$

যোগ করে পাই $t_1+t_2+t_3+\ \ldots\ $ tn, $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{7}+\ \ldots+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2n+1}$

$\therefore\ 1-\left(t_1+t_2+\ \ldots\ +t_n\right) = 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\ \ldots\ -\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2n+1}$

অসীম শ্রেণীর যোগফলের সংজ্ঞা অনুসারে,

$\lim\limits_{n\to\infty}\ \left[1-\left(t_1+t_2+\ \ldots + t_n\right)\right] = \log_e^2$ $\qquad$ [(6)-এ x = 1 বসিয়ে]

∴ অসীম পর্যন্ত নির্ণেয় যোগফল = $1-\log_e^2$.

উদা. 4. $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ \dots\ \infty$ হলে দেখান যে, $x=y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\ \dots\ \infty$

$$y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ \dots\ =\log_e(1+x),\ -1<x\leq 1$$

$$\therefore\ e^y=e^{\log(1+x)}=1+x$$

$$\therefore\ x=e^y-1=y+\frac{y^2}{\lfloor 2}+\frac{y^3}{\lfloor 3}+\ \dots\ \infty$$

উদা. 5. দেখান যে, $\log_e\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ \dots\ \infty\right]\ (-1<x<1.)$

আমরা জানি যদি $-1<x\leq 1$ হয় তবে

$$\log_e(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\ \dots\ \infty$$

এবং $\log_e(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\ \dots\ \infty$ যদি $-1\leq x<1$ হয়।

$$\therefore\ \log_e(1+x)-\log_e(1-x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ \dots\ \infty\right)$$

বা, $\log_e\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ \dots\ \infty\right]$

আমরা জানি, $\log_{10}^{N}=\frac{\log_e^N}{\log_e^{10}}$, এবং $\frac{1}{\log_e^{10}}=\cdot 43429448$

$$\therefore\ \log_{10}^2=\log_e^2\times\cdot 4342944$$

$$=\cdot 6931468\times\cdot 4342944.\cong\cdot 30103\ \text{(আনুমানিক)}$$

২১.ঘ.৪ অনুশীলনী

1) চার দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় করুন : $\frac{1}{5\sqrt{e}}$ [উ: 8187 আনুমানিক]

2) $\log\ (1+x+x^2)$-এর বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগ নির্ণয় করুন যখন $|x|<1$.

[উ: n যদি 3-এর গুণিতক না হয় তবে x^n-এর সহগ $\frac{1}{n}$ আবার যদি n 3-এর গুণিতক হয় তবে x^n-এর সহগ $\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{n}\right)$

3) দেখান যে $\frac{2}{\lfloor 1} + \frac{4}{\lfloor 3} + \frac{6}{\lfloor 5} + \ldots \infty = e.$

4) দেখান যে $\left(1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 4} + \ldots\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 5} + \ldots\right)^2 = 1.$

5) প্রমাণ করুন যে $\frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1+2}{\lfloor 3} + \frac{1+2+3}{\lfloor 4} + \ldots = \frac{e}{2}.$

অসীম পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় করুন :

6) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \ldots \infty$ [উ: $\log_e^2$]

7) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \ldots \infty$ [উ: $2 - \log 4$]

8) দেখান যে, $1 + \frac{1+3}{2!} + \frac{1+3+3^2}{3!} + \frac{1+3+3^2+3^3}{4!} \ldots \infty \; = \frac{1}{2}\, e\left(e^2 - 1\right)$

9) প্রমাণ করুন : $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^3} + \ldots = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \ldots$

10) যদি $y = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$ এবং

$z = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \ldots$ হয়, তবে দেখান যে $x = \log_e \frac{1}{1-e^z}$

একক ২২. ক. ❑ বিন্যাস এবং সমবায়

গঠন

২২.ক.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন —

- বিন্যাস ও সমবায় কী এবং
- বিন্যাসের সূত্র

২২.ক.১ বিন্যাস ও সমবায়—প্রাথমিক ধারণা

বিন্যাস (Combination) : কতিপয় বস্তুর সবকটি অথবা কয়েকটি একটি নির্দিষ্ট ক্রম অনুসারে সাজালে ঐ বিশেষ সজ্জিত অবস্থাকে বিন্যাস (Permutation) বলে। মনে করি, a, b দুটি বস্তু। দুটিকে নিয়ে ab এবং ba এই দুটি ক্রমে সাজানো যায়। অর্থাৎ, এক্ষেত্রে দুটি বিন্যাস পাওয়া যায়। a, b, c তিনটি বস্তু হ'লে নিম্ন লিখিত ছয়টি বিন্যাস পাই : abc, acb, bca, bac, cab, cba. a, b, c থেকে দুটি করে নিয়ে নিম্ন লিখিত বিন্যাস পাওয়া যায় : ab, ba, bc, cb, ac, ca.

সমবায় (Combination) : কতিপয় বস্তুর সবকটি অথবা কয়েকটি নিয়ে ক্রম নিরপেক্ষ যে বিভিন্ন দল বা সংকলন করা যায় তার প্রতিটিকে একটি সমবায় বলে।

a ও b কে নিয়ে ক্রম নিরপেক্ষ একটি মাত্র দল ab গঠন করা যায়। (এখানে ab এবং ba একই দল)। a, b, c কে নিয়েও একটি মাত্র দলই গঠন করা যায় অর্থাৎ একটি মাত্র সমবায় সম্ভব। আবার, a, b, c থেকে দুটি ক'রে নিয়ে তিনটি সমবায় ab, bc, ca গঠন করা যায়।

একটি সমবায় থেকে একাধিক বিন্যাস পাওয়া যেতে পারে। যথা ab একটি সমবায়। এটা থেকে দুটি বিন্যাস ab ও ba পাওয়া যায়।

উদা. 1. 2, 5, 7, 9 অঙ্কগুলি থেকে তিনটি ক'রে নিয়ে কতগুলি সংখ্যা নির্ণয় করা যায় যাতে একটি অঙ্ক দুবার নেওয়া যাবে না?

শতকের স্থানে চারটি অঙ্কের যে কোন একটি নিতে পারি অর্থাৎ শতকের স্থানটি চারভাবে পূর্ণ করা যায়। শতকের স্থান পূর্ণ হবার পর দশকের স্থানে তিনটি অঙ্কের যে কোন একটি নেওয়া যায় অর্থাৎ, দশকের স্থান তিনভাবে পূর্ণ করা যায়। অনুরূপে এককের স্থান দুইভাবে পূর্ণ করা যায়। অতএব নির্ণেয় সংখ্যা $4 \times 3 \times 2 = 24$.

যেহেতু একটি সংখ্যা 257-এর ক্রম পরিবর্তন করলে অন্য সংখ্যা পাওয়া যায় সুতরাং এক্ষেত্রে আমাদের **বিন্যাস** বিবেচনা করতে হবে। তিনটি ক'রে নিয়ে 24টি বিন্যাস পান কিনা দেখুন।

উদা. 2. 5 জন সদস্য থেকে 3 জনকে একটি কমিটিতে কত প্রকারে নির্বাচিত করা যায়?

পাঁচজন সদস্যকে 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কদ্বারা চিহ্নিত করা যাক। তিন জনের কমিটি তৈরী করতে হবে। এখানে ক্রম বিবেচনা করা অর্থহীন। নিম্নরূপে কমিটি গঠন করা যায় ঃ

সদস্য ঃ 1 2 3 4 5

কমিটি ঃ 123, 124, 125, 134, 135, 145,
234, 235, 345, 245

যেহেতু এখানে সদস্য নির্বাচন ক্রম-নিরপেক্ষ সুতরাং **সমবায়** বিবেচনা করতে হবে।

২২.ক.২ বিন্যাস

উদা. 1 থেকে একটি সূত্র বিবৃত করা যায় ঃ

সূত্র ঃ যদি কোন কাজ m বিভিন্ন প্রকারে করা যায় এবং যদি m প্রকারের মধ্যে যে কোন এক প্রকারে উক্ত কাজ করা হয় এবং যদি দ্বিতীয় একটি কাজ n উপায়ে করা যায় তবে ঐ দুটি কাজ একটির পর একটি $m \times n$ বিভিন্ন প্রকারে করা যায় ইত্যাদি।

উদা. 3. 2, 5, 7, 9 চারিটি অঙ্ক থেকে তিনটি অঙ্ক দ্বারা গঠিত কতগুলি সংখ্যা নির্ণয় করা যায়? প্রতিটি সংখ্যা পুনরায় ব্যবহার করা যেতে পারে।

উদা. 1-এর মত শতকের স্থান 4 উপায়ে পূর্ণ করা যায়। যেহেতু একটি অঙ্ককে পুনরায় ব্যবহার করা যায়, দশকের স্থানটিও 4 এবং অনুরূপে এককের স্থানটিও 4 উপায়ে পূর্ণ করা যায়। সুতরাং নির্ণেয় উপায় $= 4 \times 4 \times 4 = 64$.

২২.ক.২.১ প্রতিপাদ্য

n-সংখ্যক বস্তু থেকে r সংখ্যক ক'রে বস্তু নিয়ে বিভিন্ন বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয় $[r \leq n]$.

এই বিন্যাসের সংখ্যাটিকে ^nP_r চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। কোন বিন্যাসে একটি বস্তু কেবল একবারই থাকতে পারে।

মনেকরি, r সংখ্যক ঘর আছে।

1	2	3		r–1	r
n	n–1	n–2			n–(r–1)

প্রথম ঘরে n বস্তুর যে কোন একটিকে রাখতে পারেন এবং এটি n উপায়ে করা যায়। যেহেতু, এই বস্তুটিকে আর ব্যবহার করা যাবে না সুতরাং দ্বিতীয় স্থান $(n-1)$ উপায়ে একটি বস্তু রাখা যায়। অনুরূপে r-ঘরটিতে $n-(r-1)$ উপায়ে একটি বস্তু রাখা যায়। অতএব, n সংখ্যক বস্তু থেকে r-বস্তু ক'রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা পূর্বে বিবৃত সূত্র অনুসারে $n\,(n-1)\ldots(n-r+1)$

অর্থাৎ, $^nP_r = n\,(n-1)\ldots\ldots\ldots(n-r+1)$

যদি $r = n$ নেওয়া যায় তবে

$^nP_n = n\,(n-1)$ .... $2.1 = \lfloor\underline{n}$ বা $n!$ এইরূপ চিহ্ন ব্যবহার করা হয় এবং $\lfloor\underline{n}$ বা $n!$ কে ফ্যাকটোরিয়াল n এইরূপ বলা হয়। $\lfloor\underline{o} = 1$ ধরা হয়।

$\therefore\ ^nP_r = n\,(n-1)(n-2)\ldots\ \ldots\ (n-r+1)$

$$= \frac{n\,(n-1)(n-2)\ldots\ \ldots(n-r+1).(n-r)\ldots\ 2.1}{(n-r)(n-r-1)\ldots\ \ldots 2.1}$$

$$= \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}}$$

উদা. 4. : $^9P_6 = \dfrac{\lfloor\underline{9}}{\lfloor\underline{9-6}} = \dfrac{\lfloor\underline{9}}{\lfloor\underline{3}} = \dfrac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1}$

দ্রষ্টব্য ঃ $\lfloor\underline{n} = n.\lfloor\underline{n-1}$

কারণ $\lfloor\underline{n} = $ n.(n–1(n–2) 3.2.1

$\lfloor\underline{n-1} = $ (n–1) (n–2) ... 3.2.1

$\therefore\ \lfloor\underline{n} = $ n.$\lfloor\underline{n-1}$ অনুরূপে, $\lfloor\underline{n} = $ n (n–1).$\lfloor\underline{n-2}$

উদা. $\lfloor\underline{10} = 10.\lfloor\underline{9} = 10.9.\lfloor\underline{8}$ ইত্যাদি।

২২.ক.২.২. সবগুলি বিভিন্ন নয় এরূপ বস্তু সমূহের বিন্যাস

প্রতিপাদ্য ঃ সবগুলি বিভিন্ন নয় এরূপ n-সংখ্যক বস্তুর সবগুলিকে একযোগে নিয়ে বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়।

মনেকরি, n-বস্তু n-অক্ষর দ্বারা চিহ্নিত করা হল যার মধ্যে 'a' p-সংখ্যক, 'b' q-সংখ্যক এবং 'c' r-সংখ্যক আছে এবং বাকীগুলি বিভিন্ন। মনেকরি, x নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা। যদি p-সংখ্যক 'a' বিভিন্ন হত তবে প্রতিটি x বিন্যাসের জন্য এদের নিজেদের বিন্যাস সংখ্যা হত $\lfloor p$. সুতরাং x বিন্যাসের জন্য হত $x\lfloor p$ বিন্যাস যেখানে 'b' q-সংখ্যক এবং 'c' r-সংখ্যক আছে। অনুরূপে q-সংখ্যক 'b' এবং r-সংখ্যক 'c' কেও বিভিন্ন ধরলে x বিন্যাসের জন্য মোট বিন্যাস সংখ্যা হবে $x\times\lfloor p\times\lfloor q\times\lfloor r$ অর্থাৎ n বস্তুই যদি বিভিন্ন হত তবে বিন্যাস সংখ্যা হত $x\times\lfloor p\times\lfloor q\times\lfloor r$. আবার জানি n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সবগুলিকে একযোগে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $=\lfloor n$.

$$\therefore\ x\times\lfloor p\times\lfloor q\times\lfloor r = \lfloor n$$

বা, $$\boxed{x=\frac{\lfloor n}{\lfloor p\times\lfloor q\times\lfloor r}}$$

উদা. 5. ENGINEERING শব্দটিকে কত প্রকারে সাজান যায়?

এখানে মোট অক্ষর = 11, E = 3টি, N = 3টি, G = 2টি, I = 2টি।

সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস $=\dfrac{\lfloor 11}{\lfloor 3\times\lfloor 3\times\lfloor 2\times\lfloor 2}$

$$=\frac{11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times3\times2\times1\times2\times1\times2\times1}=2,77,200.$$

উদা. 6. FAILURE শব্দের অক্ষরগুলির দ্বারা কতগুলি বিন্যাস করা যেতে পারে যেখানে AEIU সর্বদা একসাথে থাকবে?

(AEIU) কে একটি বস্তু ধরে আমরা FLR(AEIU) এই চারটি বস্তু পাই। এদের বিন্যাস $\lfloor 4$. আবার AEIU কে $\lfloor 4$ বিন্যাসে সাজানো যায়। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস $=\lfloor 4\times\lfloor 4=576$

উদা. 7. n-সংখ্যক বালককে কতভাবে সাজান যায় যাতে সবচেয়ে লম্বা এবং সবচেয়ে বেঁটে বালক একত্রে থাকবে না।

n-সংখ্যক বালককে $\lfloor n$ বিন্যাসে সাজান যায়। সবচেয়ে লম্বা এবং বেঁটে বালকদ্বয় সব সময় একত্রে থাকবে ধরলে বিন্যাস সংখ্যা হবে $\lfloor n-1$. আবার ঐ বালক দুজনাকে 2 ভাবে সাজান যায়। সুতরাং ঐ বালক দুটি সর্বদা একত্রে থাকবে এরূপ বিন্যাসের সংখ্যা $2\lfloor n-1$.

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা (যেখানে ঐ বালকদ্বয় একত্রে থাকবে না) = $\lfloor\underline{n} - 2\lfloor\underline{n-1}$

উদা. ৪. 10টি বস্তু থেকে 4টি ক'রে নিয়ে কতগুলি বিন্যাস হবে যাতে (i) একটি নির্দিষ্ট বস্তু সকল বিন্যাসেই থাকবে; (ii) নির্দিষ্ট বস্তুটি কোন বিন্যাসেই থাকবে না।

মনে করতে পারি যে 10টি বস্তু থেকে 4টি বস্তুকে 4টি ঘরে রাখতে হবে। (i) নির্দিষ্ট বস্তুটিকে চারটি ঘরের যে কোন একটিতে 4 ভাবে রাখা যায়। বাকি নয়টি বস্তু থেকে যে কোনও তিনটিকে বাকি তিনটি ঘরে $^9P_3$ ভাবে রাখা যায়। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস $= 4 \times {}^9P_3$

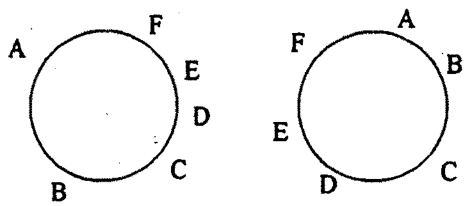
(ii) নির্দিষ্ট বস্তুটি বাদ দিলে থাকে নয়টি বস্তু। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস $= {}^9P_4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6$

উদা. 9. কত সংখ্যক উপায়ে 6 ব্যক্তিকে বৃত্তাকারে সাজান যায়?

এক ব্যক্তিকে নির্দিষ্ট ক'রে তার সাপেক্ষে অন্য ব্যক্তিদের সাজানো হয়। নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা = $\lfloor\underline{5} = 120$

দ্রষ্টব্য ঃ যদি নির্দিষ্ট ব্যক্তির সাপেক্ষে সাজাবার সময় ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে এবং বিপরীত দিকের মধ্যে কোন তফাৎ না ধরা হয় তবে এই সংখ্যা $= \frac{1}{2} \times 120 = 60$,

মনে করি, 6 ব্যক্তি যথাক্রমে A, B, C, D, E, F. চিত্র দুটিতে আপেক্ষিক অবস্থান অভিন্ন নয়।



২২.ক.২.৩ প্রশ্নমালা

1) একটি ঘরে 7 টি ফাঁকা চেয়ার আছে। 4 জন লোক কত উপায়ে চেয়ারগুলিতে বসতে পারে? [উঃ 840]

2) 1000 এবং 10,000-এর মধ্যে 2, 3, 4, 5, 6, 8 অংকগুলির দ্বারা কতগুলি সংখ্যা নির্ণয় করা যায়। কোন অঙ্ক একই সংখ্যায় দুবার ব্যবহার করা যাবে না। [উঃ 360]

3) 7টি বস্তু থেকে 3টি ক'রে নিয়ে কতগুলি বিন্যাস হবে যখন একটি নির্দিষ্ট (i) সব বিন্যাসেই থাকবে (ii) কোন বিন্যাসে থাকবে না? [উঃ 120, 90]

4) x বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র এবং y কলা বিভাগের, কত প্রকারে একটি সারিতে দাঁড় করান যায় যাতে কোন দুজন কলা বিভাগের ছাত্র একত্র থাকবে না $(y < x)$. [উঃ $\dfrac{\lfloor\underline{x} \cdot \lfloor\underline{x+1}}{\lfloor\underline{x-y+1}}$]

5) নীচের শব্দের সবগুলি অক্ষর নিয়ে কতগুলি বিন্যাস সম্ভব?

(i) CALCUTTA [উঃ 5040]

(ii) ELECTRICITY [উঃ 24,94,800]

6) 1000 থেকে ছোট এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য এরূপ কতগুলি সংখ্যা 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলির দ্বারা গঠিত হতে পারে? একটি অঙ্ক একটি সংখ্যায় একবারের বেশী ব্যবহৃত হবে না।

[উঃ 154]

7) A এবং B-র মাঝে 42টি ষ্টেশন আছে। বিভিন্ন প্রকারের কতগুলি বিভিন্ন রকমের টিকিট ছাপাতে হবে যাতে একজন যাত্রী যে কোন একটি ষ্টেশন থেকে অন্য যে কোন ষ্টেশনে যেতে পারে? [উঃ 1722]

8) প্রমাণ করুন যে, ${}^{n-1}P_r + r\,{}^{n-1}P_{r-1} = {}^{n}P_r$.

9) ${}^{m-n}P_2 = 56$, ${}^{m-n}P_2 = 12$ হলে m এবং n নির্ণয় করুন। [উঃ $m = 6$, $n = 2$]

10) (i) যদি ${}^{2n+1}P_{n-1} : {}^{2n-1}P_n = 3 : 5$ হয়, তবে n-র মান নির্ণয় করুন। [উঃ $n = 4$]

(ii) যদি ${}^{8}P_{n-1} : {}^{9}P_{n-2} = 20 : 9$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে $n = 6$.

(iii) $\left({}^{8}P_2 + {}^{8}P_3\right) \div {}^{9}P_3 \rightarrow$ এর মান নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{7}{9}$]

(iv) প্রমাণ করুন যে, ${}^{2n}P_{2n} = 1.3.5. \ldots (2n-1).2^n.\underline{|n}$.

২২.ক.৩ সমবায় (Combination)

সমবায়ের সংজ্ঞা পূর্বেই আলোচিত হয়েছে। n টি বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে r টি $(r \leq n)$ বস্তু নিয়ে যতগুলি সমবায় পাওয়া যায় সেই সংখ্যাকে ${}^{n}c_r$ চিহ্নদ্বারা সূচিত করা হয়।

প্রতিপাদ্য : n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে r-সংখ্যক বস্তু নিয়ে সমবায় সংখ্যা নির্ণয় $(r \leq n)$:

মনেকরি, সমবায় সংখ্যা ${}^{n}c_r$. এখন ${}^{n}c_r$ সমবায়ের প্রতিটি সমবায়ে r-সংখ্যক বস্তু আছে এবং তাদের নিয়ে $\underline{|r}$ বিন্যাস হবে। সুতরাং ${}^{n}c_r$ সমবায় থেকে যে বিন্যাস পাওয়া যায় তার সংখ্যা $\underline{|r} \times {}^{n}c_r = n$ -সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে rটি করে নিয়ে বিন্যাসের সংখ্যা $= {}^{n}P_r$

সুতরাং $\underline{|r}.\times {}^{n}c_r = {}^{n}P_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$

$$\therefore \boxed{{}^{n}c_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}}$$

$r = n$ হ'লে ${}^{n}c_n = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n}\,\underline{|o}} = 1$ আবার $r = o$ বসালে ${}^{n}c_o = 1$.

$$\therefore \boxed{{}^{n}c_n = {}^{n}c_o = 1}$$

দুইটি সম্বন্ধ : ${}^{n}c_r = {}^{n}c_{n-r}$

আমরা জানি, $^nc_r = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$ এবং $^nc_{n-r} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n-(n-r)}\,\underline{|n-r}} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$

[দ্রষ্টব্য ঃ যদি $^nc_p = {^nc_q}$ হয়, তবে হয় $p=q$ বা $p+q=n$]

সুতরাং $^nc_r = {^nc_{n-r}}$

(ii) $^nc_r + {^nc_{r-1}} = {^{n-1}c_r}$

বামপক্ষ, $^nc_r + {^nc_{r-1}} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}} + \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r+1}}$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r}}\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r}} \cdot \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)} = \frac{\underline{|n}\,(n+1)}{\underline{|r}\,\underline{|n-r+1}}$$

$$= \frac{\underline{|n+1}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r+1}} = {^{n+1}c_r}$$

২২.ক.৩.১ উদাহরণমালা

উদা. 1. 8 জন পুরুষ এবং 6 জন স্ত্রীলোকের মধ্যে থেকে 5 জনার কয়টি বিভিন্ন কমিটি গঠন করা যায়?

মোট 8+6=14 জন থেকে ক্রম নিরপেক্ষ ভাবে যে কোন 5 জনকে নির্বাচিত করতে হবে।

নির্ণেয় কমিটির সংখ্যা = $^{14}c_5 = 2002$

উদা. 2. 15টি বালকের একটি দলে 7 জন স্কাউট আছে। কত প্রকারে 12টি বালকের কতগুলি দল গড়া যায় যাতে প্রতি দলে অন্তত 6 জন স্কাউট থাকবে?

দলটিতে 6 জন স্কাউট এবং 6 জন অন্য বালক থাকতে পারে বা 7 জন স্কাউট এবং 5 জন অন্য বালক থাকতে পারে। নির্ণেয় সমবায় = $^7c_6 \times {^8c_6} + {^7c_7} \times {^8c_5}$

$= {^7c_1} \times {^8c_2} + 1 \times {^8c_3} = 7 \times 28 + 56 = 252$

উদা. 3. $(m+n)$ বিভিন্ন বস্তু কত উপায়ে দুটি ভাগে ভাগ করা যায় যাতে একটি ভাগে m বস্তু এবং অপর ভাগে n বস্তু থাকে?

$(m+n)$ বস্তু থেকে m বস্তু নেওয়া যায় $^{m+n}c_m$ উপায়ে। প্রতিটি উপায়ের সঙ্গে দ্বিতীয় একটি ভাগ থাকবে যাতে n বস্তু আছে। সুতরাং নির্ণেয় উপায় $^{m+n}c_m$।

দ্রষ্টব্য ঃ যদি $m = n$ হয় তবে মোট উপায় $= \dfrac{\lfloor 2m}{\lfloor m \lfloor m \cdot \lfloor 2}$ কারণ এখানে দুটি ভাগ পরস্পর পাল্টালে কোন নূতন সমবায় পাওয়া যায় না।

যথা, 22 জন ফুটবলারকে 11 জন ক'রে দুটি দলে ভাগ করা যায় $\dfrac{\lfloor 22}{\lfloor 11 \lfloor 11 \lfloor 2}$ উপায়ে।

উদা. 4. একটি সমতলে n-সংখ্যক বিন্দু আছে যার (i) কোন তিনটি সমরেখ নয় (ii) যার p-সংখ্যক বিন্দু সমরেখ। কয়টি রেখা এবং কয়টি ত্রিভুজ গঠন করা যাবে এই বিন্দুগুলি দ্বারা?

(i) দুটি বিন্দু দিয়ে একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। সুতরাং নির্ণেয় সরলরেখা ${}^nc_2$.

(ii) যদি p-সমরেখ বিন্দুর কোন তিনটি সমরেখ না হত তা হলে ${}^pc_2$ সরলরেখা পাওয়া যেত কিন্তু তার পরিবর্তে p-সংখ্যক বিন্দু দিয়ে একটি মাত্র সরলরেখা পাওয়া যাবে। অর্থাৎ $({}^pc_2-1)$ এতগুলি সরলরেখা কম হবে।

সুতরাং, সরলরেখার নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^nc_2 - ({}^pc_2 - 1)$.

ত্রিভুজের সংখ্যা ঃ কোন তিনটি বিন্দু সমরেখ না হলে n-সংখ্যক বিন্দু থেকে ${}^nc_3$ সংখ্যক ত্রিভুজ পাওয়া যায়। আবার p-সংখ্যক বিন্দু সমরেখ হলে ${}^pc_3$ সংখ্যক ত্রিভুজ কম হবে।

$\therefore$ উৎপন্ন ত্রিভুজ সংখ্যা $= {}^nc_3 - {}^pc_3$.

উদা. 5. n-সংখ্যক বস্তু থেকে এক যোগে যতগুলি ইচ্ছা বস্তু নিয়ে সমবায় সংখ্যা নির্ণয়।

প্রতি নির্বাচনে দুইটি প্রক্রিয়া সম্ভব (i) বস্তুটি নির্বাচিত হতে পারে অথবা (ii) বস্তুটি নির্বাচিত না হতে পারে। প্রদত্ত n বস্তুর প্রতিটির ক্ষেত্রে 2 প্রকার প্রক্রিয়া হবে।

সুতরাং মোট প্রক্রিয়া সংখ্যা $= 2\times2\times2\ldots$ n সংখ্যক উৎপাদক।

$= 2^n$-এর মধ্যে একটি প্রক্রিয়া আছে যাতে সব বস্তুই পরিত্যক্ত। সুতরাং নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $= 2^n - 1$.

২২.ক.৩.২ অনুশীলনী

1) (i) যদি ${}^nc_8 : {}^nc_6 = \dfrac{15}{28}$ হয় তবে n নির্ণয় করুন। **[উঃ 12]**

(ii) যদি ${}^{18}c_r = {}^{18}c_{r+2}$ হয় তবে r এবং ${}^{11}c_r$-এর মান নির্ণয় করুন।

2) একটি প্রশ্নপত্রের 10টি প্রশ্নের মধ্যে একজন পরীক্ষার্থী কত উপায়ে 7টি প্রশ্ন বাছতে পারে?

[উঃ 120]

3) 10 জন ছাত্র এবং 15 জন ছাত্রী থেকে কত উপায়ে 7 জনার একটি কমিটি গড়া যায় যাতে প্রতি কমিটিতে অন্ততঃ 4 জন ছাত্র থাকবে? **[উঃ 1,25,265]**

4) 12 জন লোককে কত উপায়ে দুটি ভাগে ভাগ করা যায়? [উঃ 2,047]

5) এক ব্যক্তির 50 জন বন্ধু আছে। সে কত উপায়ে এক অথবা 6 বেশী বন্ধুকে নিমন্ত্রণ করতে পারে? [উঃ 31]

6) প্রমাণ করুন যে, ${}^{n}c_{r} = \frac{n-r+1}{r}\ {}^{n}c_{r-1}$

7) 21 টি ম্যাচের ফলাফল (জয়, পরাজয় বা ড্র) বলতে হবে। কতগুলি বিভিন্ন পূর্বাভাসে ঠিক 18টি সঠিক ফল থাকবে? [উঃ 10,640]

8) কোন সমতলে 10টি বিন্দু আছে তার মধ্যে 4টি বিন্দু সমরেখ এবং বাকীগুলির কোন তিনটি সমরেখ নয়। বিন্দুগুলি যোগ ক'রে

(i) কতগুলি ত্রিভুজ পাওয়া যাবে? [উঃ 116]

(ii) কতগুলি সরলরেখা পাওয়া যাবে? [উঃ 40]

একক ২২. খ. ❑ দ্বিপদ উপপাদ্য (BINOMIAL THEOREM)

গঠন

২২.খ.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন—

- দ্বিপদ রাশি ও দ্বিপদ উপপাদ্য কী
- বিস্তৃতি
- ভগ্নাংশ বা ধনাত্মক সূচকের দ্বিপদ উপপাদ্য

২২.খ.১ দ্বিপদ রাশি ও দ্বিপদ উপপাদ্য

কোন রাশিতে দুটি পদ থাকলে তাকে দ্বিপদ রাশি বলে। যথা $ax + b$, $a + x$ ইত্যাদি। আমরা জানি $(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$ বা, $(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$. এখন $(a + x)^n$ এর মান, যখন

n খুব বড় (যেমন x=50 বা 100) নির্ণয় করা দুরূহ ব্যাপার। স্যার আইজাক নিউটন কোন দ্বিপদ রাশির যে কোন ধনাত্মক ঘাতের বিস্তার নির্ণয়ের একটি সাধারণ সূত্র বর্ণনা করেন। এই সূত্রকে **দ্বিপদ উপপাদ্য** (Binomial Theorem) বলে।

দ্বিপদ উপপাদ্য : যদি n ধণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয় তবে,

$$(a+x)^n = {}^nc_0\, a^n + {}^nc_1\, a^{n-1}\, x + {}^nc_2\, a^{n-2}\, x^2 + ...+ {}^nc_r\, a^{n-r}\, x^r + ...+ {}^nc_n\, x^n \quad (1)$$

${}^nc_o$, ${}^nc_1$, ${}^nc_2$ .... ${}^nc_r$ .... ${}^nc_n$ কে **দ্বিপদ সহগ** বলে (Binomial co-efficients)

(1) এ $a = 1$ বসালে পাই,

$(1 + x)^n = 1 + {}^nc_1\, x + {}^nc_2\, x^2 + ... + {}^nc_r\, x^r + ... + x^n$ .....(2)

২২.খ.১.১ বিস্তৃতির সমদূরবর্তী পদ (Equidistant Term)

প্রতিপাদ্য : কোন বিস্তৃতির শুরু থেকে এবং শেষ থেকে সমদূরবর্তী দুটি পদের দ্বিপদ সহগসমূহ সমান।

শুরু থেকে (r+1)-তম পদের সহগ = ${}^nc_r$. আবার শেষ থেকে (r+1)-তম পদের সহগ = শুরু থেকে (n+1–r)-তম পদের সহগ। (n+1–r)-তম পদের সহগ = ${}^nc_{n-r}$

আমরা জানি, ${}^nc_r = {}^nc_{n-r}$ সুতরাং প্রতিপাদ্যটি প্রমাণিত।

২২.খ.১.২ উদাহরণমালা

উদা. 1. $(2x+3)^6$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় করুন।

$$\begin{aligned}(2x+3)^6 &= (2x)^6 + {}^6c_1(2x)^5.3 + {}^6c_2.(2x)^4.3^2 + {}^6c_3\,(2x)^3.3^3 + {}^6c_4\,(2x)^2.3^4 \\ &\quad + {}^6c_5(2x)\,.3^5 + {}^6c_6\,.3^6 \\ &= 64x^6 + 576x^5 + 2160x^4 + 4320x^3 + 4860x^2 + 2916x + 729.\end{aligned}$$

উদা. 2. $\left(x^3 - \frac{1}{2x^2}\right)^5$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় করুন।

$$\begin{aligned}\left(x^3 - \frac{1}{2x^2}\right)^5 &= (x^3)^5 + {}^5c_1(x^3)^4\left(\frac{-1}{2x^2}\right) + {}^5c_2(x^3)^3\left(\frac{-1}{2x^2}\right)^2 \\ &\quad + {}^5c_3(x^3)^2\left(\frac{-1}{2x^2}\right)^3 + {}^5c_4(x^3).\left(\frac{-1}{2x^2}\right)^4 + {}^5c_5\left(\frac{-1}{2x^2}\right)^5 \\ &= x^{15} - \frac{5}{2}x^{10} + \frac{5}{2}x^5 - \frac{5}{4} + \frac{5}{16x^5} - \frac{1}{32x^{10}}\end{aligned}$$

উদা 3. $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{11}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় করুন।

মোট পদের সংখ্যা = 11+1=12. সুতরাং 6-তম পদ এবং 7-তম পদ দুটি মধ্যপদ।

6-তম পদ = $^{11}c_5\,(x^2)^6 . \left(\frac{-2}{x}\right)^5 = -\,14784x^7$

7-তম পদ = $^{11}c_6\,(x^2)^5 . \left(\frac{-2}{x}\right)^6 = 29568x^4$

উদা. 4. $(2x^2-x)^{10}$ -এর বিস্তৃতিতে x^{16}-এর সহগ নির্ণয় করুন।

মনেকরি $(r+1)$-তম পদে x^{16} আছে। এখন $(r+1)$ তম পদ $= {}^{10}c_r\,(2x^2)^{10-r} . (-x)^r$

$= {}^{10}c_r . 2^{10-r} \quad x^{20-2r-r}$. প্রশ্নানুসারে $20 - r = 16 \quad \therefore\ r = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= {}^{10}c_4 . 2^6(-1)^4 = 13440.$

উদা. 5. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ -এর বিস্তৃতিতে x-বর্জিত পদ নির্ণয় করুন।

মনেকরি, $(r+1)$-তম পদ x-বর্জিত।

এখন $(r+1)$-তম পদ $= {}^{2n}c_r\,x^{2n-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}^{2n}c_r\,(-1)^r . x^{2n-2r}$

প্রশ্নানুসারে, $2(n-r) = 0$ বা, $r = n$.

সুতরাং নির্ণেয় পদ $= (-1)^n . {}^{2n}c_n = \frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}} \cdot (-1)^n$

উদা. 6. $(\cdot 999)^4$ -এর 3 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধমান নির্ণয় করুন।

(দ্বিপদ-উপপাদ্যের সাহায্যে)।

$(\cdot 999)^4 = (1 - \cdot 001)^4 = 1 - {}^4c_1 \times (\cdot 001) + {}^4c_2 \times (\cdot 001)^2 - \ldots$

$= 1 - 4 \times \cdot 001 + 6 \times \cdot 000001 + \ldots$

$= 1 - \cdot 004 = \cdot 996$

২২.খ.১.৩ প্রশ্নমালা

1) বিস্তার করুন ঃ

(i) $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^7$ [উঃ $x^{14} - 7x^{11} + 21x^8 - 35x^5 + 35x^2 - \frac{21}{x} + \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^7}$]

(ii) $\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2x}\right)^6$

2) সপ্তমপদ নির্ণয় করুন : $(2x-1)^{11}$ [উ : $14784x^5$]

3) মধ্যপদ নির্ণয় করুন : $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n-1}$ [উ : $(-1)^{n-1}.\frac{\lfloor\underline{2n-1}}{\lfloor\underline{n}\,\lfloor\underline{n-1}}$]

4) মধ্যপদ দুটি নির্ণয় করুন. : $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^9$ [উ : $4032x^6$, $-4032x^3$]

5) $\left(x^3-\frac{1}{3x^4}\right)^{27}$-এর বিস্তৃতিতে x বর্জ্জিত পদটি নির্ণয় করুন। [উ : $-\frac{\lfloor\underline{27}}{\lfloor\underline{13}\,\lfloor\underline{14}\,.\,3^{13}}$]

6) $\left(\frac{3}{2}x^3+\frac{2}{3x^2}\right)^{15}$ -এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{40040}{27}$]

7) $\left(2x-\frac{1}{4x^2}\right)^9$ -এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ নির্ণয় করুন। [উ : 84]

8) $(1+x)^{2n+1}$ -এর বিস্তৃতিতে যদি x^r এবং x^{r+1} এর সহগ সমান হয়, তবে r নির্ণয় করুন।
[উ : (n+1)]

9) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{3n+1}$ -এর বিস্তৃতিতে x^{n+1} -এর সহগ নির্ণয় করুন। [উ : $\frac{\lfloor\underline{3n+1}}{\lfloor\underline{n}\,\lfloor\underline{2n+1}}$]

10) $(1+3x)^n$ -এর বিস্তৃতির প্রথম ও শেষ প্রান্ত থেকে p-তম পদদ্বয় নির্ণয় করুন।

[উ : $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+2)\,3^{p-1}x^{p-1}}{\lfloor\underline{(p-1)}}$]

11) মধ্যপদ বা পদদ্বয় নির্ণয় করুন :

(i) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}$ [উ : -252]

(ii) $\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)^{10}$ [উ : 252]

12) প্রমাণ করুন যে $(1+x)^{2n}$-এর বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগ $(1+x)^{2n-1}$ -এর বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগের দ্বিগুণ।

13) $(1+x)^m\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ -এর বিস্তৃতির x-বর্জিত পদটি নির্ণয় করুন। [উ : $\frac{\lfloor\underline{m+n}}{\lfloor\underline{m}\,\lfloor\underline{n}}$]

14) প্রমাণ করুন যে $(1+x)^{2n}$ -এর বিস্তৃতির মধ্যপদের সহগটি $(1+x)^{2n-1}$ -এর বিস্তৃতির মধ্যপদ দুটির সহগদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

15) $(1\cdot03)^{10}$ -এর চারটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে মান নির্ণয় কর। [উ : $1\cdot3439$]

16. $(2+\sqrt{3})^7$ এবং $(2-\sqrt{3})^7$-এর যোগফল এবং গুণফল নির্ণয় করুন। [উ : 10,084]

২২.খ.২ দ্বিপদ সহগের ধর্ম (Properties of Binomial Coefficients)

আমরা জানি, $(1+x)^n = 1 + {}^nc_1x + {}^nc_2x^2 + \ldots + {}^nc_rx^r + \ldots + {}^nc_n x^n$

$$= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_rx^r + \ldots + c_nx^n \ldots (1)$$

এখানে $c_r = {}^nc_r$. (1)-এ $x = 1$ বসিয়ে পাই—

$2^n = c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ = সহগের যোগফল।

$\therefore {}^nc_1 + {}^nc_2 + \ldots + {}^nc_n = 2^n - c_0$

$=2^n-1, \ldots (2)$ = n-বস্তুর মোট সমবায়।

(1)-এ $x=-1$ বসালে পাই—

$0 = 1 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - c_5 + \ldots$

$\therefore c_1 + c_3 + c_5 + \ldots = c_2 + c_4 + \ldots$

সুতরাং অযুগ্ম সহগের যোগফল = যুগ্ম সহগের যোগফল

$$\therefore c_1 + c_3 + c_5 + \ldots = c_2 + c_4 + \ldots = \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1} \quad \ldots\ldots (3)$$

(1)-এ x-এর জায়গায় $\frac{1}{x}$ বসালে পাই—

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots + \frac{c_n}{x^n}$$

$$\therefore (1+x)^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^n = (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n)$$

$$\times\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots + \frac{c_n}{x^n}\right)$$

ডানপক্ষে x-বর্জিত পদ $= c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2$

বামপক্ষে x-বর্জিত পদ $= \frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$-এ x-বর্জিত পদ

$$= (1+x)^{2n} \text{ এ } x^n \text{ -এর সহগ}$$

$$= {}^{2n}c_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}$$

$$\therefore\ c_0^2 + c_1^2 + \ldots + c_n^2 = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n} \quad \ldots (4)$$

২২.খ.২.১ উদাহরণমালা

উদা.1. যদি $(1+x)^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$ তবে $\frac{c_0}{1} + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \frac{c_3}{4} + \ldots$ এর মান নির্ণয় করুন।

প্রদত্ত রাশি $= 1 + \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{\lfloor 3} + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 4} + \ldots + \frac{1}{n+1}$

$$= \frac{1}{n+1}\left[(n+1) + \frac{n(n+1)}{\lfloor 2} + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{\lfloor 3} + \ldots + 1\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\left\{1 + (n+1) + \frac{(n+1)\,n}{\lfloor 2} + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{\lfloor 3} + \ldots + 1\right\} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{[1+1]^{n+1} - 1\right\} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

উদা. 2. যদি $(1+x)^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে

$$c_0 + 3c_1 + 5c_3 + \ldots + (2n+1)c_n = (n+1)2^n$$

মনেকরি, $S = c_0 + 3c_1 + 5c_3 + \ldots + (2n+1)c_n \qquad \ldots\ldots(1)$

বিপরীতক্রমে সাজিয়ে লিখে পাই—

$$S = (2n+1)c_0 + (2n-1)c_1 + (2n-3)c_2 + \ldots + c_n \qquad \ldots..(2)$$

কারণ, $c_n = c_0,\ c_{n-1} = c_1$ ইত্যাদি।

(1) + (2), $2S = (2n+2)c_0 + (2n+2)c_1 + (2n+2)c_2 + \ldots + (2n+2)c_n$

$$= 2(n+1)\,[\,c_0 + c_1 + \ldots + c_n\,]$$

$$= 2(n+1).2^n$$

$\therefore\ S = (n+1)2^n$

২২.খ.২.২ প্রশ্নমালা

1) যদি $(1+x)^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$ হয় তবে দেখান যে :

(i) $c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \ldots + nc_n = n.2^{n-1}$

(ii) $c_1 - 2c_2 + 3c_3 + \ldots + n(-1)^{n-1}c_n = 0$

(iii) $c_0 + 2c_1 + 3c_2 + \ldots + (n+1)c_n = 2^n + n2^{n-1}$

(iv) $c_0 - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} - \frac{c_3}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{c_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

(v) $c_0c_n + c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + \ldots + c_n.c_0 = = \frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}$

(vi) $\frac{c_0}{1} + \frac{c_2}{3} + \frac{c_4}{5} + \ldots = \frac{2^n}{n+1}$

(vii) $\frac{c_1}{c_0} + \frac{2c_2}{c_1} + \frac{3c_3}{c_2} + \ldots + \frac{nc_n}{c_{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$

২২.খ.৩ ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক সূচকের দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem for Fractional and Negative Indices.)

ভগ্নাংশ ও ঋণাত্মক সূচকের দ্বিপদ উপপাদ্য

যদি $|x| < 1$ অর্থাৎ $-1 < x < 1$ হয় তবে n-এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r + \ldots\ldots\infty \quad \ldots (1)$$

যদি n ধনাত্মক পূর্ন সংখ্যা হয় তবে রাশিটির শেষ পদ থাকবে অন্যথায় শেষ পদ থাকবে না। $|x| < 1$ হলে (1)-এর ডানপক্ষ অভিসারী হবে। একে **অসীম দ্বিপদ শ্রেণী** বলে।

প্রমাণ এই পর্যায়ের বাইরে।

২২.খ.৪ উদাহরণমালা

উদা. 1. $(1+x)^{-2}$ এর প্রথম চারটি পদ নির্ণয় করুন।

$$(1+x)^{-2} = 1 + (-2)x + \frac{(-2)(-3)}{1.2}x^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

$$= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$$

উদা. 2. $(1-x)^{-1} = 1 + (-1)(-x) + \frac{(-1)(-2)}{1.2}(-x)^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{1.2.3}(-x)^3 + \ldots$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^r + \ldots$$

উদা. 3. $(1-x)^{-2}=1+(-2)(-x)+\frac{(-2)(-3)}{1.2}(-x)^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{1.2.3}(-x)^3+\ldots$

$$=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(r+1)x^r+\ldots\ldots$$

উদা. 4. $(1-x)^{-n}=1+(-n)(-x)+\frac{(-n)(-n-1)}{\lfloor 2}(-x)^2+\ldots$

$$+\frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r+\ldots$$

$$=1+nx+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}x^2+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r+\ldots$$

উদা. 5. $(1-x)^{-3}=1+(-3)(-x)+\frac{(-3)(-4)}{1.2}(-x)^2$

$$=1+3x+6x^2+\ldots+\frac{(r+1)(r+2)}{\lfloor r}x^r+\ldots$$

উদা. 6. 1001-এর তৃতীয় মূল নির্ণয় করুন।

$$\sqrt[3]{1001}=(1001)^{1/3}=(10^3+1)^{1/3}=10\left(1+\frac{1}{10^3}\right)^{1/3}$$

$$=10\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1.2}\left(\frac{1}{10^3}\right)^2+\ldots\right]$$

$$=10\left(1+\frac{\cdot 001}{3}-\frac{\cdot 000001}{9}+\ldots\right)$$

$$=10\,(1+\cdot 00033)=10\cdot 0033.$$

উদা. 7. বিস্তার করুন : $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}=(1+x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=(1+x)\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\cdot 2}.x^4+\ldots\right)$$

$$=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{8}x^4+\ldots$$

উদা. 8. বিস্তার করুন : $\frac{1}{1+x+x^2}$

$$\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{1-x}{1-x^3}=(1-x)(1-x^3)^{-1}$$

$$= (1-x)\ (1+x^3+x^6+x^9+\ldots+(x^3)^r+\ldots$$

$$= 1-x+x^3+x^6-x^7+\ldots$$

উদা. 9. প্রমাণ করুন যে,

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n=1-n\left(\frac{2x}{1+x}\right)+\frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2+\ldots$$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=\left(1-\frac{2x}{1+x}\right)^{-1}$$

$$\therefore \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n=\left(1-\frac{2x}{1+x}\right)^{-n}=1+n\left(\frac{2x}{1+x}\right)+\frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2+\ldots$$

উদা. 10. যদি $y=2x+3x^2+4x^3+\ldots\infty$ তবে x-কে y-এর সাপেক্ষে তিন পদ পর্যন্ত নির্ণয় করুন

$$y=2x+3x^2+4x^3+\ldots$$

$$\therefore\ 1+y=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$$

$$=(1-x)^{-2}\quad\therefore\quad 1+y=\frac{1}{(1-x)^2}\quad\therefore\ (1-x)^2=\frac{1}{1+y}$$

বা, $1-x=(1+y)^{\frac{-1}{2}}=1-\frac{1}{2}y+\frac{3}{8}y^2-\frac{5}{16}y^3+\ldots$

বা, $x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{8}y^2+\frac{5}{16}y^3-\ldots$

২২.খ.৫ অনুশীলনী

1) প্রথম চারটি পদ নিণয় করুন : $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ [উ: $1-2x-2x^2-4x^3\ldots$]

2) $(r+1)$-তম পদ নির্ণয় করুন : $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ [উ: $(-1)^r\frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{\underline{|r}}x^r$]

3) পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় করুন :

(i) $\sqrt{24}$ [উ: 4·89898]

(ii) $\sqrt[3]{998}$ [উ: 9·99333]

4) $(1 + x + x^2 + \ldots)^{-n}$ এর x^n-এর সহগ নির্ণয় করুন। [উ: $(-1)^n$]

5) দেখান যে $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$

6) যদি $y = x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots \infty$ হয় তবে দেখান যে

$$x = y + y^2 + y^3 + \ldots \infty$$

7) দেখান যে, $\sqrt{3} = 1 + \frac{1.2}{2.3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \ldots \infty$

8) ·5 কে একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণীতে প্রকাশ করুন এবং ভগ্নাংশে এর মান নির্ণয় করুন।

[উ: $\frac{5}{9}$]

একক ২৩. ক. ❑ চক্রবৃদ্ধি সুদ (Compound Interest)

গঠন

২৩.ক.১ চক্রবৃদ্ধি বলতে কী বোঝায়?

কোন ব্যক্তি বা সংস্থা থেকে অর্থ ঋণ নিলে ঋণগ্রহিতা ঐ অর্থ আপন প্রয়োজনে ব্যবহার করার জন্য উক্ত ব্যক্তি বা সংস্থাকে প্রতিশ্রুতিমত কিছু অতিরিক্ত অর্থ প্রদান করে। এই অতিরিক্ত অর্থকে সুদ (Interest) এবং ঋণকৃত অর্থকে আসল (Principal) বলে। সাধারণত সুদ স্থিরিকৃত সমান সময়ের ব্যবধানে দেওয়া হয়ে থাকে। সুদ বৎসরান্তে, প্রতি ছয়মাস অন্তে বা তিনমাস অন্তে ইত্যাদি দেওয়া হয়ে থাকে। একটি নির্দিষ্ট সময় অন্তর যে নির্দিষ্ট পরিমাণ সুদ দেওয়া হয় তাকে সুদের হার বলে। যখন শুধু আসলই সুদ উৎপন্ন করে তখন সেই সুদকে সরল সুদ বলে। সুদ এবং আসলের সমষ্টিকে সবৃদ্ধিমূল বলে। যখন প্রতি নির্দিষ্ট সময় অন্তর পরবর্তী নির্দিষ্ট সময়ের জন্য সবৃদ্ধিমূলের উপর সুদ নির্ধারিত হয় তখন এই সুদকে চক্রবৃদ্ধি (Compound interest) বলে।

২৩.ক.২ সরল সুদের সূত্র

মনেকরি, আসল = P_o, সুদের শতকরা বার্ষিক হার (অর্থাৎ 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ) = r, বৎসর সংখ্যা = n এবং n বৎসর পর সুদ + আসল = P_n.

P_o টাকার n বৎসরের সুদ (বার্ষিক হার r) = $\frac{P_o rn}{100}$

$$\therefore\ P_n P_o + \frac{P_o rn}{100}$$

বা, $\boxed{P_n = P_o\left(1+\frac{rn}{100}\right)}$

২৩.ক.৩ চক্রবৃদ্ধি হারের সূত্র

1 বৎসর পরে সুদ-আসল (সরল সুদের সূত্র থেকে) $= P_o\left(1+\frac{r}{100}\right)$

2য় বর্ষে আসল $= P_o\left(1+\frac{r}{100}\right)$ এবং সুদ $= P_o\left(1+\frac{r}{100}\right)\frac{r}{100}$

$\therefore$ 2য় বর্ষে সুদ-আসল $= P_o\left(1+\frac{r}{100}\right)+P_o\left(1+\frac{r}{100}\right)\frac{r}{100}$

$$= P_o\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

অনুরূপে n বৎসর পরে সুদ-আসল $\boxed{P_n = P_o\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}$ যদি এই মান r% হারে কমে যায়

তবে $P_n = P_o\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$

দ্রষ্টব্য : P-এর একক টাকা না হয়ে অন্য কোন একক হলেও সূত্রটি সত্য।

উপরের সূত্র থেকে পাই $\boxed{P_o = P_n\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}}$

২৩.ক.৪ উদাহরণমালা

উদা. 1. বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হারে 12 বৎসর পরে 200 টাকা সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হবে?

এখানে P_o = 200 টাকা, $r = 8$, $n = 12$ বৎসর।

$\therefore\ P_n = P_{12} = P_o\left(1+\frac{r}{100}\right)^n = 200\left(1+\frac{8}{100}\right)^{12} = 200\times(1\cdot08)^{12}$

$\therefore\ \log P_{12} = \log 200 + 12\log 1\cdot08.$

$= \log 2\times10^2 + 12\log 1\cdot08 = \log2 + 2\log_{10}10 + 12\log 1\cdot08$

$= \cdot3010 + 2 + 12\times\cdot0334$

$= 2\cdot3010 + 12\times\cdot0334 = 2\cdot7018$

$\therefore\ P_{12}$ = অ্যান্টিলগ $(2\cdot7018) = 503\cdot2$

নির্ণেয় সমূল-চক্রবৃদ্ধি = 503·20 টাকা।

উদা. 2. কত টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 4% বার্ষিক হারে 18 বৎসরে 10,000 টাকা হবে?

এখানে $P_{18} = 10,000$ টাকা, $r = 4$, $n = 18$ বৎসর, $P_o = ?$

$$\therefore\ 10,000 = P_o\left(1+\frac{4}{100}\right)^{18} = (1\cdot04)^{18}$$

$$\therefore\ \log 10^4 = \log P_o + 18 \log 1\cdot04.$$

বা, $4 = \log P_o + 18\times\cdot0170 = \log P_o + \cdot3060.$

বা, $\log P_o = 3\cdot6940.$

$\therefore\ P_o =$ অ্যান্টিলগ $(3\cdot6940) = 4936$ টা. (প্রায়)।

উদা. 3. সুদ বৎসরান্তে দেয় এইরূপ চক্রবৃদ্ধিতে লগ্নী করার ফলে কোন টাকার দ্বিতীয় বৎসর অন্তে 2704 টাকা এবং তৃতীয় বৎসর অন্তে 2812 টা. 16 প. সমূল চক্রবৃদ্ধি হয়। সুদের হার এবং মূলধন নির্ণয় করুন।

প্রশ্নানুসারে, $2704 = P_o\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$ এবং $2812\cdot16 = P_o\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$.

$\therefore\ \frac{2812\cdot16}{2704} = 1+\frac{r}{100}$ বা, $1\cdot04 = 1+\frac{r}{100}$

বা, $r = 100\times\cdot04 = 4\%$ উপরের যে কোন একটিতে r-এর মান বসিয়ে পাই $P_o = 2500$ টাকা।

উদা. 4. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত সময়ে সবৃদ্ধিমূল আসলের দ্বিগুণ হবে?

এখানে $P_n = 2P_o$, $r = 5$ $n =$ নির্ণেয় বৎসর।

$$\therefore\ 2P_o = P_o\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$$

বা, $2 = (1\cdot05)^n$ বা, $\log 2 = n \log 1\cdot05$

বা, $\cdot3010 = n\times\cdot0212$ বা, $n = \frac{3010}{212} = 14\cdot2$ বৎসর (প্রায়)।

উদা. 5. একটি যন্ত্রের আয়ু 10 বৎসর এবং ক্রয়মূল্য 10,000 টাকা। যদি প্রতি বৎসর 10% হারে অবচয় হয় তবে 10 বৎসর পরে যন্ত্রটির মূল্য কত হবে?

যেহেতু চক্রবৃদ্ধি হারে মূল্য কমছে সুতরাং $P_n = P_o\left(1-\frac{10}{100}\right)^{10} = 10000\times(1-\cdot1)^{10} = 10000\times(\cdot9)^{10}$

$$\therefore\ \log P_n = \log 10^4 + 10\log\cdot9 = 4 + 10\times(-1+\cdot9542)$$
$$= 3\cdot542$$

$\therefore\ P_n =$ অ্যান্টিলগ $(3\cdot542) = 3483$ টাকা (প্রায়)।

উদা. 6. কোন রাজ্যের লোক সংখ্যার বাৎসরিক বৃদ্ধি প্রতি হাজারে 25 এবং বর্তমান লোক সংখ্যা 26,24,000। 3 বৎসর পরে লোক সংখ্যা কত হবে? এক বৎসর পূর্বে তা কত ছিল?

এখানে $P_o = 26{,}24{,}000$, $n = 3$, $r = 2{\cdot}5$, $P_n = ?$

আমরা জানি, $P_n = 26{,}24{,}000 \left(1+\frac{2{\cdot}5}{100}\right)^3.$

$= 2624 \times 10^3 \times (1{\cdot}025)^3.$

$\therefore \log P_n = 3 + \log 2624 + 3 \log 1{\cdot}025$

$= 3 + 3{\cdot}4190 + 3 \times {\cdot}0107 = 6{\cdot}4511.$

$P_n =$ অ্যান্টিলগ $(6{\cdot}4511) = 28{,}26{,}000.$

মনেকরি, এক বৎসর আগে ঐ রাজ্যের লোকসংখ্যা ছিল P_{-1}

এখন, $P_o = P_{-1}(1 + {\cdot}025)$

$$\therefore P_{-1} = \frac{P_o}{1.025} = \frac{2624000}{1.025} = 25{,}60{,}000$$

উদা. 7. কোন ব্যক্তি টাকা প্রতি বাৎসরিক r টাকা হার সুদে P টাকা ধার করল। যদি প্রতি বৎসর সে ঐ বৎসরের সুদ এবং ঐ সুদের সমপরিমাণ আসল শোধ করে তবে দেখান যে n বৎসর পরে তার ধার থাকবে $P(1-r)^n$ টাকা।

প্রথম বৎসর পরে ঐ ব্যক্তির ঋণ $P_1 = P(1-r)$

দ্বিতীয় বৎসর পরে ঐ ব্যক্তির ঋণ $P_2 = P(1-r) - P(1-r).r$

$= P(1-r)(1-r)$

এইভাবে মনেকরি x বৎসর পরে ঐ ব্যক্তির ঋণ P_x এবং $x+1$ বৎসর পরে ঐ ব্যক্তির ঋণ P_{x-1}

এখন, $P_{x+1} = P_x - P_x.r = P_x(1-r).$

$\therefore P_n = (1-r).P_{n-1}$

$P_{n-1} = (1-r)P_{n-2}$

$P_{n-2} = (1-r)P_{n-3}$

$P_2 = (1-r)P_1$

$P_1 = P(1-r).$

$\therefore P_n = (1-r)^n P.$

২৩.ক.৫ অনুশীলনী

1. এক ব্যক্তি বার্ষিক 3% হারে সরল সুদে কিছু টাকা ধার ক'রে 5% চক্রবৃদ্ধি হারে সেই টাকা অন্যকে ধার দিল। যদি 3 বৎসর পরে 541 টাকা লাভ হয়ে থাকে, তবে সে কত টাকা ধার করেছিল? [উ: 8000 টাকা (প্রায়)]

2. কোন ব্যক্তি সেভিংস ব্যাঙ্কে 5000 টাকা জমা রাখেন। চক্রবৃদ্ধি সুদের হার প্রথম 2 বৎসর বার্ষিক $4\frac{1}{2}$% এবং পরের 3 বৎসরে বার্ষিক 5%। 5 বৎসর পরে তার মোট কত টাকা হবে?

[উ: 6320·78 টাকা]

3. চক্রবৃদ্ধিতে লগ্নী করার ফলে কোন টাকার দ্বিতীয় বৎসর শেষে 2704 টাকা এবং তৃতীয় বৎসর শেষে 2812·16 টাকা সমূল চক্রবৃদ্ধি হল। সুদের বাৎসরিক হার এবং মূলধন নির্ণয় করুন।

[উ: 4%, 2500 টাকা]

4. যদি কোন শহরের লোকসংখ্যা প্রতিবৎসর ঐ বৎসরের শুরুতে যে লোকসংখ্যা ছিল তার 2% বৃদ্ধি পায়, তবে কত সময়ে জনসংখ্যা 40% বৃদ্ধি পাবে? [উ: 17 বৎসর (প্রায়)]

5. একটি মেসিনের প্রারম্ভিক মূল্যের উপর 10% অবচয় ঘটে। মেসিনটির ক্রয় মূল্য 5810 টাকা এবং কিছুদিন ব্যবহার করার পরে 2250 টাকায় বিক্রয় করা হয়েছিল। মেসিনটি কত বৎসর ব্যবহার করা হয়েছিল? [উ: 9 বৎসর (প্রায়)]

6. পোষ্ট অফিস 5 বৎসর মেয়াদের স্থায়ী জমার জন্য 14% হারে সরল সুদে দেয়। এই সুদ অর্ধ বৎসরান্তে দেয় চক্রবৃদ্ধির সমান হলে সুদের বার্ষিক হার কত? [উ: 10·8%]

7. প্রতি বৎসরের শেষে অবচয় ধার্য করার পর কোন যন্ত্রের মূল্য যন্ত্রটির মূল্যের 90% হ'ল। যন্ত্রটির ক্রয়মূল্য 12000 টাকা এবং ধাতুমূল্য 200 টাকা। যন্ত্রটি কতকাল ব্যবহার করা হয়েছিল?

[উ: 38·8 বৎসর (প্রায়)]

8. কোন লোক সংখ্যার ক্ষেত্রে বার্ষিক জন্ম ও মৃত্যুর হার প্রতি হাজারে যথাক্রমে 39·4 এবং 19.4। কোন বহিরাগমন এবং নির্গমন না ঘটলে কত বৎসরে ঐ লোকসংখ্যা দ্বিগুণ হবে? [উ: 35 বৎসর]

একক ২৩. খ. ❑ বার্ষিকী বা বার্ষিক বৃত্তি (Annuities)

গঠন

২৩.খ.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন —

- বার্ষিকী কী
- বার্ষিক বৃত্তির সূত্র

২৩.খ.১ বার্ষিক বৃত্তির সংজ্ঞা (Annuities)

কোনও শর্তাধীনে প্রতি বৎসর অন্তর দেয় কোনও নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থকে বার্ষিকী বলে। যে সামগ্রিক সময়ের জন্য বার্ষিকী দেওয়া হয় তাকে মেয়াদ বলে। এই মেয়াদ কয়েক বৎসর হতে পারে, আবার চিরকালও হতে পারে।

বার্ষিক বৃত্তির মেয়াদ যদি অসীম হয় তবে কিস্তির সংখ্যাও অসীম হবে অর্থাৎ কোন কিস্তিই শেষ কিস্তি নয়, একে চিরস্থায়ী কিস্তি বলে।

২৩.খ.২ বার্ষিক বৃত্তির সূত্র

প্রতি বৎসর P হিসাবে সাধারণ বার্ষিক বৃত্তি যদি n বৎসর স্থগিত থাকে তবে চক্রবৃদ্ধি ধ'রে মোট বার্ষিক বৃত্তি নির্ণয় :

মনেকরি, $i = 1$ টাকার 1 বৎসরের সুদ। যেহেতু বার্ষিক কিস্তি n বৎসর স্থগিত থাকবে সুতরাং প্রথম কিস্তি যা 1 বৎসর পরে দেয় তা $(n-1)$ বৎসর স্থগিত থাকবে। এর সমূল চক্রবৃদ্ধি হবে $P(1+i)^{n-1}$, দ্বিতীয় কিস্তি $(n-2)$ বৎসরের জন্য স্থগিত থাকবে এবং এর সমূল চক্রবৃদ্ধি হবে $P(1+i)^{n-2}$। অনুরূপে তৃতীয় কিস্তিতে সমূল চক্রবৃদ্ধি হবে $P(1+i)^{n-3}$ এবং এইরূপে শেষ কিস্তির সমূল-চক্রবৃদ্ধি হবে P .

সুতরাং এই n-সংখ্যক সমূল চক্রবৃদ্ধির সমষ্টি A হলে,

$$A = P(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-2} + \dots + P.$$

এটি একটি গুণোত্তরীয় প্রগতি। এখানে প্রথম পদ = $P(1+i)^{n-1}$ সাধারণ অনুপাত = $(1+i)^{-1}$ এবং পদসংখ্যা n.

$$\therefore\ A=\frac{P\left(1+i\right)^{n-1}}{i}$$

যদি বৎসরে p বার অর্থপ্রদান করা হয় তবে,

$$\boxed{\therefore\ A=\frac{P}{i}\left[\left(1+\frac{i}{p}\right)^{np}-1\right]}$$

সূত্র : n বৎসর মেয়াদী সাধারণ বার্ষিক কিস্তি P হলে চক্রবৃদ্ধি ধ'রে বর্তমান মূল্য নির্ণয় :

মনেকরি, T_n = নির্ণেয় বর্তমান মূল্য

$i = 1$ টাকার 1 বৎসরের সুদ।

$\therefore$ 1 বৎসর পরে দেয় প্রথম কিস্তি P-এর বর্তমান মূল্য $=\frac{P}{1+i}$

2 বৎসর পরে দেয় দ্বিতীয় কিস্তি P-এর বর্তমান মূল্য $=\frac{P}{(1+i)^2}$ ইত্যাদি n বৎসর পরে দেয় শেষ কিস্তি P-এর বর্তমান মূল্য $=\frac{P}{(1+i)^n}$

$$\therefore\ T_n=P\left[\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

বা, $T_n=\frac{P}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}\right]=\frac{P}{i}\left[1-(1+i)^{-n}\right]$ [$\because$ গুণোত্তরীয় শ্রেণী]

যদি বৎসরে p বার অর্থ দেওয়া হয় তবে প্রদত্ত কিস্তি হয় $\frac{P}{p}$ এবং এক্ষেত্রে,

$$T_n=\frac{\left(\frac{P}{p}\right)}{\left(\frac{i}{p}\right)}\left[1-\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}\right]$$

বা, $\boxed{T_n=\frac{P}{i}\left[1-\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}\right]}$

চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য

$$\boxed{T_\infty=\frac{P}{i}}\quad\left[\because\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}=0\right]$$

২৩.খ.৩ উদাহরণমালা

উদা. 1. 4% চক্রবৃদ্ধি হারে 1000 টাকার বার্ষিক বৃত্তির 15 বৎসরের মোট অঙ্ক নির্ণয় করুন।

এখানে $P = 1000$, $n = 15$ এবং $i = \frac{4}{100} = \cdot 04$.

$\therefore$ মোট অঙ্ক $A = \frac{P}{i}\left[(1+i)^n - 1\right] = 1000 \times 25\left[(1\cdot 04)^{15} - 1\right]$

মনেকরি, $x = (1\cdot 04)^{15}$. $\therefore \log x = 15 \log 1\cdot 04$.

$\therefore \log x = 15 [\log 10\cdot 4 - \log 10] = 15 [\log 10\cdot 4 - 1]$

$= 15 \times \cdot 017 = \cdot 255$.

$\therefore x =$ অ্যান্টিলগ $(\cdot 255) = 1\cdot 799$

$\therefore A = 1000 \times 25 \ [1\cdot 799 - 1] = 1000 \times 25 \times \cdot 799 = 25 \times 799 = 19{,}975$ টাকা।

উদা. 2. বার্ষিক 6% চক্রবৃদ্ধি হারে 10 বৎসরে দেয় একটি বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য 15,000 টাকা হলে বার্ষিকীর পরিমাণ কত?

এখানে $T_n = 15{,}000$, $i = \frac{6}{100} = \cdot 06$

$n = 10$, $P = ?$

আমরা জানি, $T_n = \frac{P}{i}\left[1 - (1+i)^{-n}\right]$

এখানে $15{,}000 = \frac{P}{\cdot 06}\left[1 - (1\cdot 06)^{-10}\right]$

মনেকরি, $x = (1\cdot 06)^{-10}$ $\therefore \log x = -10 \log 1\cdot 06$.

বা, $\log x = -10 [\log 10\cdot 6 - 1] = -10 \ [1\cdot 0253 - 1]$

$= -10 \times \cdot 0253 = -\cdot 253 + 1 - 1$

$= \bar{1} \cdot 747$

$\therefore x =$ অ্যান্টিলগ $(\bar{1} \cdot 747) = \cdot 5585$

$\therefore 15{,}000 = \frac{P}{\cdot 06}[1 - \cdot 5585] = \frac{P}{\cdot 06} \times \cdot 4415$

$\therefore P = \frac{.06 \times 15{,}000}{.4415} = 2{,}038$ টাকা (প্রায়)

উদা. 3. 12 বৎসর মেয়াদী 150 টাকার নিয়মিত বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য নির্ণয় করুন।

[প্রদত্ত : $(1\cdot 035)^{12} = 1\cdot 511056$.]

আমরা জানি, $T_n = \frac{P}{i}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$

এখানে $P = 150$, $n = 12$, $i = \frac{3\cdot5}{100} = \cdot035.$

$$\therefore\ T_n = \frac{150 \times 100}{3\cdot5}\left[1 - \frac{1}{(1\cdot035)^{12}}\right] = 1449\cdot50 \text{ টাকা।}$$

উদা. 4. এক ব্যক্তি 50,000 টাকা মূল্যে একটি বাড়ী কিনতে ইচ্ছুক। তিনি নগদ 20,000 টাকা এবং বাকী টাকা 10টি সমান বার্ষিক কিস্তিতে দিতে প্রস্তুত। যদি 8% হারে বার্ষিক সুদ ধার্য হয় তবে ঐ ব্যক্তিকে বার্ষিক কত টাকা দিতে হবে? [প্রদত্ত : $1/(1\cdot08)^{10} = \cdot4634$]

আমরা জানি, $T_n = \frac{P}{i}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$

এখানে, $T_n = 30{,}000$, $i = \frac{8}{100} = \cdot08$, $n = 10$, $P = ?$

$$\therefore\ 30{,}000 = \frac{P}{\cdot08}[1 - \cdot4634] = \frac{P}{\cdot08} \times \cdot5366$$

$$\therefore\ P = \frac{30{,}000 \times \cdot08}{\cdot5366} = 4472 \text{ টাকা।}$$

উদা. 5. এক ব্যক্তি 10,000 টাকা ঋণ নিলেন। বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে বাৎসরিক 1000 টাকার কিস্তিতে তা শোধ করবেন। কত বৎসরে ঐ ঋণ শোধ হবে?

আমরা জানি, $T_n = \frac{P}{i}\left[1 - (1+i)^{-n}\right]$

এখানে $P = 1000$, $i = \frac{5}{100} = \cdot05$, $T_n = 10{,}000$, $n = ?$

$$\therefore\ 10{,}000 = \frac{1000}{\cdot05}\left[1 - (1\cdot05)^{-n}\right]$$

$$= 1000 \times 20\ [1 - (1\cdot05)^{-n}]$$

বা, $\frac{1}{2} = 1 - (1\cdot05)^{-n}$ বা, $(1\cdot05)^{-n} = \frac{1}{2}$ বা, $(1\cdot05)^n = 2$

$\therefore\ n \log\ (1\cdot05) = \log 2 \qquad \therefore\ n = \frac{\log\ 2}{\log\ 1\cdot05} = 14\cdot2$ বৎসর (প্রায়)।

২৩.খ.৪ অনুশীলনী

1. কত মূল্যে 4 বৎসর মেয়াদের 1050 টাকার বার্ষিক বৃত্তি ক্রয় করা যাবে, যদি চক্রবৃদ্ধি হার বার্ষিক $3\frac{1}{2}$% হয়? [উ: 3846 টাকা]

2. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে বৎসরান্তে দেয় এবং দশ বৎসর মেয়াদী 500 টাকার বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য নির্ণয় করুন। [উ: 3862 টাকা]

3. বার্ষিক 4% হারে 15 বৎসরের মেয়াদের 150 টাকার বার্ষিক বৃত্তির মোট অঙ্ক নির্ণয় করুন। বৃত্তি এবং সুদ প্রতি অর্ধ বৎসর অন্তে দেওয়া হয়। [উ: 3041·25 টাকা]

4. একটি কোম্পানী 10,000 টাকা এই শর্তে ধার করল যে বার্ষিক 5% হার সুদে তা 1000 টাকার বার্ষিক কিস্তিতে শোধ করা হবে। কত বৎসরে ধার শোধ হবে? [উ: 14·2 বৎসর প্রায়]

5. এক ব্যক্তি 6% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 40,000 টাকা ধার নিলেন। তিনি প্রথম চার বৎসর প্রতি বৎসরে 9000 টাকা ক'রে শোধ করবেন এবং বাকী টাকা পঞ্চম বৎসরের শেষে শোধ করবেন। শেষ কিস্তিতে তিনি কত টাকা দেবেন? [উ: 11,800 টাকা]

6. এক ব্যক্তি 40,000 টাকা মূল্যের একটি বাড়ী ক্রয় করলেন। তিনি 10,000 টাকা নগদ দেবেন এবং ক্রয়ের দিন থেকে 1 বৎসর পরে প্রথম কিস্তি সহ 10টি সমান বার্ষিক কিস্তিতে অবশিষ্ট টাকা শোধ করবেন। বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার হলে, প্রত্যেক কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় করুন। [উ: 3884 টাকা (প্রায়)]

7. কোন কোম্পানী 10 বৎসর পরে দেয় 60,000 টাকার ডিবেঞ্চার পরিশোধ করবার জন্য বৎসরে 5000 টাকা জমা রাখে। তা বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে জমতে থাকলে ডিবেঞ্চার শোধ ক'রে কত টাকা উদ্বৃত্ত থাকবে? [উ: 2900 টাকা]

8. 25 বৎসরের শেষে 54,000 টাকা মূল্যের কিছু যন্ত্রপাতি বদলাবার জন্য একটি ঋণ পরিশোধ তহবিল (Sinking Fund) গঠন করা হল। যদি লগ্নী থেকে বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে আয় হয় তবে প্রতি বৎসর লাভ থেকে কত পরিমাণ অর্থ ঐ তহবিলে জমা দেওয়া উচিৎ যদি ঐ সময় অন্তে যন্ত্রপাতির ধাতুমূল্য হিসাবে 4000 টাকা পাওয়া যায়? [উ: 1047 টাকা (প্রায়)]

9. এক ব্যক্তি প্রতি বৎসর অন্তে 300 টাকা মূল্যের একটি বৃত্তি বিতরণ করবার জন্য একটি যৌতুক তহবিল (Endowment Fund) গঠন করতে ইচ্ছুক। বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হারে তহবিলের টাকা লগ্নী করলে যৌতুকের টাকার পরিমাণ নির্ণয় করুন। [উ: 3000 টাকা]

10. বার্ষিক $2\frac{3}{4}$% চক্রবৃদ্ধি হারে 5500 টাকা লগ্নী ক'রে কত টাকার চিরস্থায়ী কিস্তি ক্রয় করা যাবে? [উ: 151 টাকা]

একক ২৩. গ. ☐ অসমতা (Inequalities)

গঠন

২৩.গ.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন—

- অসমতা কী
- অসমীকরণ কী
- পরমমান কী

২৩.গ.১ অসমতা

অসমতা : ধরা যাক্ a এবং b দুটি অসমান রাশি। যদি a b অপেক্ষা বড় হয় তবে লেখা হয় $a > b$ এবং যদি a, b অপেক্ষা ছোট হয় তবে লেখা হয় $a < b$। দুটি রাশি a এবং b-এর সম্পর্কটিকে অসমতা বলা হয়।

২৩.গ.২ অসমীকরণ

যদি x একটি চলরাশি হয় এবং p, q দুটি বাস্তব সংখ্যা হয় তবে

$px+q=0$ একটি সমীকরণ যা x-এর একটি নির্দিষ্ট মান $\left(-\dfrac{q}{p}\right)$ দ্বারা সিদ্ধ হয়।

একইভাবে, $px+q>0$ একটি অসমীকরণ যা x-এর কতিপয় মানের সেট $\left(x>-\frac{q}{p}\right)$ দ্বারা সিদ্ধ হয়। এবং একইভাবে $px+q<0$-ও একটি অসমীকরণ যা x-এর অপর একসেট মানের $\left(x<-\frac{q}{p}\right)$ জন্য সিদ্ধ হয়।

অসমতা কলনবিদ্যায় একটি গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। তাই বিষয়টি কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে বোঝার চেষ্টা করা যাক।

২৩.গ.৩ উদাহরণমালা

উদা. 1. সমাধান করুন $4(1-x)\le 8$

সমাধান $4(1-x)\le 8$

$1-x\le 2$ [4 দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ করে পাই]

$1-x\le 1$ [উভয়পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে]

$x\ge -1$ [উভয়পক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করে]

নির্ণেয় সমাধান : $x\ge -1$

উদা. 2. সমাধান করুন : $\frac{1}{8}(x^2-7x+12)>0$

সমাধান $\frac{1}{8}(x^2-7x+12)>0$

বা, $x^2-7x+12>0$

বা, $(x-3)(x-4)>0$

$(x-3)(x-4)$ গুণফলটি ধনাত্মক হবে যদি দুটি উৎপাদক ধনাত্মক,

অথবা দুটি উৎপাদকই ঋণাত্মক হয়।

অর্থাৎ, যদি $x-3>0$, $x-4>0$ হয়

অথবা, যদি, $x-3<0$, $x-4<0$ হয়।

প্রথম ক্ষেত্রে $x>4$ এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $x<3$।

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান : $x<3$ বা, $x>4$

উদা. 3. সমাধান কর : $\frac{x+3}{2-x}>1$

সমাধান $\frac{x+3}{2-x}>1$

অসমতাটি অসংজ্ঞাত হয় যদি $2-x=0$ হয় অর্থাৎ $x=2$ হয়।

$\therefore\ x \neq 2$

এখন দুটি সম্ভাবনা আছে। $2-x>0$ অথবা $2-x<0$.

মনেকরি, $2-x>0$ অর্থাৎ $x<2$; তখন অসমতাটিকে $(2-x)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x+3>2-x$

বা, $2x>-1$

বা, $x>-\frac{1}{2}$

এক্ষেত্রে সমাধান হ'ল $-\frac{1}{2}<x<2$

আবার মনেকরি, $2-x<0$ অর্থাৎ $x>2$; তখন $(2-x)$ দ্বারা অসমীকরণটিকে গুণ ক'রে পাই,

$x+3<2-x$ [$\because\ 2-x<0$, অসমতা চিহ্নটি পরিবর্তিত করা হ'ল]

বা, $x<-\frac{1}{2}$

কিন্তু $x>2$ ধরা হয়েছিল। সুতরাং এক্ষেত্রে প্রদত্ত অসমীকরণটির কোনো সমাধান নেই।

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান $-1<x<2$.

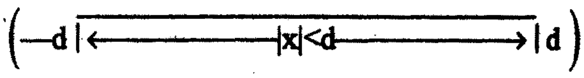
২৩.গ.৪ পরমমান

যদি 'a' একটি বাস্তব সংখ্যা হয় তবে এর ধনাত্মক মান বোঝাতে $|a|$ আকারে লেখা হয় এবং $|a|$-কে পড়া হয় মড্ a. $|a|$-র সংজ্ঞা নিম্নরূপ

$|a| = a$ যদি $a \geq 0$

$= -a$ যদি $a \leq 0$

অর্থাৎ a বা $-a$-এর পরমমান হ'ল $|a|$.



আবার, $|a|=\sqrt{a^2}$ লেখা যায়।

জ্যামিতিক ভাষায় $|a|$ হল a এবং 0-এর মধ্যে দূরত্ব।

$|a - c|$ হল a এবং c-এর মধ্যে দূরত্ব।

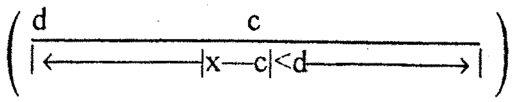
ধরা যাক্ $|x| < d$

স্পষ্টতঃই $|x| < d$ অসমতাটি

সম্ভব কেবলমাত্র যদি $-d < x < d$ হয়।

ধরা যাক, $|x - c| < d$

$|x - c|$ হল x এবং c-এর মধ্যে দূরত্ব।



$|x - c| < d$ সম্ভব হবে কেবলমাত্র যদি,

$-d < x - c < d$ হয়

অর্থাৎ $-d + c < x < d + c$ হয়

অর্থাৎ $c - d < x < c + d$ হয়।

আরেকটি অসমতা নেওয়া যাক।

$$0 < |x - c| < d$$

স্পষ্টতঃই x-এর মান c হবে না। সুতরাং x-এর মান c অপেক্ষা ছোট এবং $c - d$ অপেক্ষা বড় হবে। অথবা x-এর মান c অপেক্ষা বড় এবং $c + d$ অপেক্ষা ছোট হবে।

অর্থাৎ $0 < |x - c| < d$ সম্ভব কেবলমাত্র যদি $c - d < x < c$ অথবা $c + d > x > c$ হয়।

a এবং b-এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য নিম্নলিখিত সম্পর্কগুলি সত্য হবে।

1. $|a| = 0$ এর অর্থ হল $a = 0$
2. $|-a| = a$
3. $|ab| = |a||b|$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$
5. $||a| - |b|| \leq |a - b|$

২৩.গ.৫ উদাহরণমালা

উদা. 1. সমাধান করুন $|5 - 2x| < 1.$

সমাধান $|5 - 2x| < 1$

বা, $-1 < 5 - 2x < 1$

বা, $-6 < -2x < -4$

বা, $3 > x > 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান ঃ $2 < x < 3$.

উদা. 2. সমাধান করুন $|2x - 4| < x - 1$

সমাধান $|2x - 4| < x - 1$

প্রদত্ত অসমীকরণটি থেকে আমরা লিখতে পারি,

$$\left.\begin{array}{l} x - 1 > 0 \\ \text{এবং } -x + 1 < 2x - 4 < x - 1 \end{array}\right\}$$

এখন $-x + 1 < 2x - 4$ থেকে পাই, $3x > 5$ বা, $x > 5/3$

আবার $2x - 4 < x - 1$ থেকে পাই, $x < 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হল, $\frac{5}{3} < x < 3$.

উদা. 3. সমাধান করুন ঃ $|x + 2| - |x - 1| < x - \frac{3}{2}$

উঃ প্রদত্ত অসমীকরণটির,

$|x+2|$ রাশিটি $= x + 2$ যদি $x + 2 \geq 0$ বা, $x \geq -2$ হয়

$= -(x+2)$ যদি $x + 2 \leq 0$ বা, $x \leq -2$ হয়

এবং $|x-1|$ রাশিটি $= x - 1$ যদি $x - 1 \geq 0$ বা, $x \geq 1$ হয়

$= -(x-1)$ যদি $x - 1 \leq 0$ বা, $x \leq 1$ হয়

$\therefore$ প্রদত্ত অসমীকরণটি তিনটি বিভিন্ন অবস্থায় বিচার করতে হবে।

(i) $x \leq -2$ (ii) $-2 < x < 1$ (iii) $x \geq 1$

(i) $x \leq -2$ হলে, $x \leq 1$-ও হবে

প্রদত্ত অসমীকরণটিকে লেখা যায়

$$-(x+2) + (x-1) < x - \frac{3}{2} \Rightarrow -3 < x - \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x > -\frac{3}{2}, \text{ এটা অসম্ভব।}$$

সুতরাং, $x \leq -2$-এর জন্য অসমীকরণটির কোনও সমাধান নেই।

(ii) $-2 < x < 1$ হলে প্রদত্ত অসমীকরণটিকে লেখা যায়—

$$x+2+x-1 < x-\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ $x < -\frac{5}{2}$...এ-ও অসম্ভব [$\because$ $-2 < x < 1$]

(iii) $x \geq 1$ হ'লে প্রদত্ত অসমীকরণটিকে লেখা যায়—

$$x+2-(x-1) < x-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 3 < x-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x > \frac{9}{2}$$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমীকরণটির সমাধান হ'ল $\frac{9}{2} < x < \infty$

২৩.গ.৬ অনুশীলনী

সমাধান করুন

1. $\frac{1}{x} < 1.$ [উঃ $1 < x < \infty$ এবং $-\infty < x < 0$]
2. $\frac{x}{x+2} \leq \frac{1}{x}.$ [উঃ $-2 < x \leq -1$ এবং $0 < x \leq 2$]
3. $(x-1)^2 (x+1)^3 (x-4) < 0$ [উঃ $-1 < x < 1$ এবং $1 < x < 4$]
4. $(x-1)(x+1) < 0$ [উঃ $-1 < x < 1$]
5. $x^3 + x < 0$ [উঃ $-\infty < x < 0$]
6. $\frac{x}{x-5} \geq 0$ [উঃ $x > 5$, বা, $x \leq 0$]
7. $|x-10| = 0$ [উঃ $x = 10$]
8. $|(x-3)(x-9)| = 0$ [উঃ $x = 3, x = 9$]
9. $|x-2| > 1$ [উঃ $1 < x < 3$]
10. $|x-2| < x$ [উঃ $x > 1$]

একক ২৪. ক. ❑ দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা, সঞ্চারপথ ও তার সমীকরণ

গঠন

২৪.ক.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন —

- স্থানাঙ্ক কী
- দুটি বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় পদ্ধতি
- তিনটি বিন্দু সমরেখ হবার শর্ত
- ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় পদ্ধতি
- সঞ্চারপথ ও তার সমীকরণ নির্ণয় পদ্ধতি
- সরলরেখার প্রবণতা নির্ণয়
- সরলরেখা নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি সমূহ

২৪.ক.১ প্রস্তাবনা

স্কুল জ্যামিতিতে সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র, যেমন ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, বর্গক্ষেত্র, বহুভুজ সম্বন্ধে, নানা ধর্ম উপপাদ্য আকারে প্রমাণ করা হয়। এছাড়া বৃত্ত ও তার ধর্ম সম্বন্ধে নানা উপপাদ্য আলোচিত হয়। উপপাদ্য ছাড়া ত্রিভুজ ও বৃত্তের নানা অংকন পদ্ধতি-ও শেখানো হয়। জ্যামিতিক উপপাদ্য প্রমাণ বা অংকনে কোন এক নির্দিষ্ট নিয়মের প্রয়োগ দেখা যায় না। বীজগণিতের সাহায্যে নানা জ্যামিতিক ধর্ম বা বিষয় প্রমাণ করার মধ্য দিয়ে স্থানাঙ্ক জ্যামিতির চর্চা শুরু হয়। খৃষ্টপূর্ব তিন শতাব্দীতে গ্রীক গণিতজ্ঞ অ্যাপলোনিয়াস

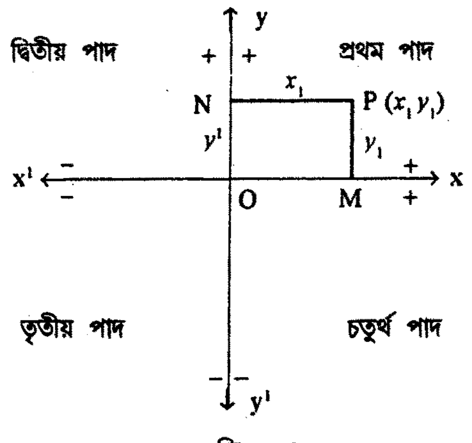
(Appollonius) এই বিষয়ের সূচনা করেন। তারপর সপ্তদশ শতাব্দীর প্রথমার্ধে ফরাসি গণিতজ্ঞ ফারমেট (1601—1655) ও রেনে দেকার্তে (1596—1650) স্থানাঙ্ক জ্যামিতির গোড়া পত্তন করেন।

২৪.ক.২ স্থানাঙ্ক কী?

সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দুর অবস্থান যদি এক জোড়া বাস্তব সংখ্যাকে ক্রম আকারে লিখে স্থির করা যায় তাহলে ক্রম আকারে লিখিত দুইটি বাস্তব সংখ্যাকে (প্রথম বন্ধনীর সাহায্যে লিখে) বিন্দুটির স্থানাঙ্ক বলা হয়। নিম্নলিখিত উপায়ে কোন একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নিরূপণ করা হয়।

ধরি পরস্পর লম্ব দুইটি সরলরেখা XOX^1, এবং YOY^1, O বিন্দুতে ছেদ করেছে। মনেকরি সমতলে অবস্থিত P একটি বিন্দু। P বিন্দু থেকে উক্ত সরলরেখার উপর দুটি লম্ব PN ও PM টানা হল (চিত্র-1)।

XOX^1 রেখাকে X অক্ষ, YOY^1 রেখাকে Y-অক্ষ, O বিন্দুকে মূল বিন্দু বলা হয়। ধরি $OM = (PN) = x_1$ এবং $PM (= ON) = y_1$



চিত্র : 1

(x_1, y_1) কে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক বলা হয়, x_1 কে P বিন্দুর ভুজ, y_1 কে P বিন্দুর কোটি বলা হয়।

$\overrightarrow{OX}$ বরাবর x-এর মান ধনাত্মক, $\overrightarrow{OX^1}$ বরাবর x-এর মান ঋণাত্মক। অনুরূপ ভাবে $\overrightarrow{OY}$ বরাবর y-এর মান ধনাত্মক, $\overrightarrow{OY^1}$ বরাবর y-এর মান ঋণাত্মক। XOX^1 ও YOY^1 রেখাদ্বয় সমতলকে চারটি পাদে বিভক্ত করে (চিত্র-1 দেখুন)। প্রথম পাদে কোন একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x,y) ধরা হলে x ও y দুইটি

ধনাত্মক চিহ্ন যুক্ত হবে; অনুরূপভাবে দ্বিতীয় পাদে x ঋণাত্মক, y ধনাত্মক, তৃতীয় পাদে x ও y উভয়েই ঋণাত্মক এবং চতুর্থ পাদে x ধনাত্মক এবং y ঋণাত্মক।

দ্রষ্টব্য 1. যেহেতু লম্বরেখা XOX^1 ও YOY^1 নানা প্রকারে নির্বাচন করা যায় সেইহেতু একই বিন্দুর স্থানাঙ্ক বিভিন্ন হবে।

দ্রষ্টব্য 2. যদি একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) ধরা হয় তাহলে (y, x) ভিন্ন একটি বিন্দু নির্দিষ্ট করে। অর্থাৎ স্থানাঙ্ক নিরূপণে x ও y -এর ক্রম (অর্থাৎ প্রথমে x (বা ভূজ) এবং পরে y (কোটি) বিশেষভাবে লক্ষ্য রাখা প্রয়োজন। মূল বিন্দুর স্থানাঙ্ক (O, O) ধরা হয়। সমতলের যে অংশ $\angle XOY$ কোণের অন্তর্ভুক্ত তাকে প্রথম পাদ (First quadrant), $\angle YOX^1$ -এর অন্তর্ভুক্ত অংশকে দ্বিতীয় পাদ (Second quadrant), $\angle X^1OY^1$ কোণের অন্তর্ভুক্ত অংশকে তৃতীয় পাদ (Third quadrant) এবং $\angle Y^1OX$ কোণের অন্তর্ভুক্ত অংশকে চতুর্থ পাদ (Fourth quadrant) বলে। প্রথম পাদে ভূজ বা কোটি উভয়েই ধনাত্মক, দ্বিতীয় পাদে ভূজ ঋণাত্মক ও কোটি ধনাত্মক, তৃতীয় পাদে ভূজ ও কোটি উভয়েই ঋণাত্মক এবং চতুর্থ পাদে ভূজ ধনাত্মক ও কোটি ঋণাত্মক (চিত্র-1 দেখুন।)।

২৪.ক.৩ প্রদত্ত দুটি বিন্দুর দূরত্ব

মনেকরি, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2 y_2)$ দুইটি প্রদত্ত বিন্দু, P এবং Q-এর মধ্যে দূরত্ব PQ নির্ণয় করতে হবে। PN, QM, OX-এর উপর এবং PR, QM-এর উপর লম্ব টানা হল। সমকোণী ত্রিভুজ PQR থেকে পাই, (চিত্র-2)।

$$PQ^2 = PR^2 + QR^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

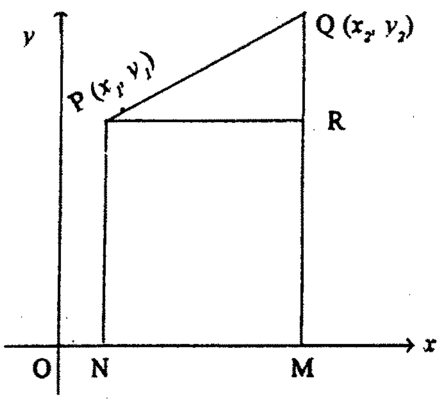
$\therefore\ PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ নির্ণেয় দূরত্ব।
[$\overline{PQ}$ সর্বদাই ধনাত্মক।]

[$\therefore\ \overline{PR} = \overline{NM} = \overline{OM} - \overline{ON} = x_2 - x_1$ এবং
$\overline{QR} = \overline{QM} - \overline{RM} = \overline{QM} - \overline{PN} = y_2 - y_1$]

মূলবিন্দু O (o, o) থেকে P (x_1, y_1) বিন্দুর দূরত্ব হবে,

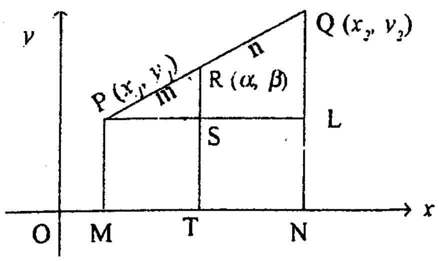
$$\overline{OP} = \sqrt{(x_1 - O)^2 + (y_1 - O)^2}$$

$$= \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}$$

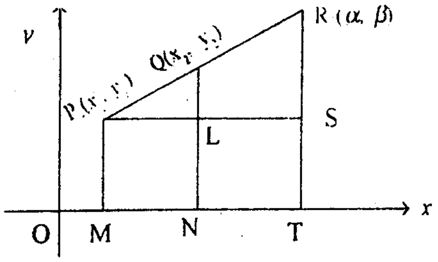


চিত্র : 2

২৪.ক.৪ দুটি প্রদত্ত বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত করেছে এরূপ বিন্দুর স্থানাঙ্ক



চিত্র : 3 (i)



চিত্র : 3 (ii)

মনেকরি, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ দুটি বিন্দু। ধরি, $R(\alpha, \beta)$ বিন্দু PQ রেখাংশকে m : n অনুপাতে অন্তঃবিভক্ত করে। R-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে। এখানে $PR/RQ = m/n$

চিত্র (i) এ, RPS এবং QPL দুটি সদৃশ ত্রিভুজ থেকে পাই,

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{PL}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{PR}+\overline{RQ}} = \frac{m}{m+n}$$

$$\overline{PS} = \overline{MT} = \overline{OT} - \overline{ON} = \alpha - x_1, \overline{PL} = \overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} = x_2 - x_1$$

সুতরাং $\dfrac{\alpha - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{m}{m+n}$ বা, $\boxed{\alpha = \dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}}$

অনুরূপে $\dfrac{\overline{SR}}{\overline{LQ}} = \dfrac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}$ থেকে পাই $\boxed{\beta = \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}}$

মনে করি, R (α, β), PQ-এর বহিঃস্থ একটি বিন্দু [চিত্র 3 (ii)] এবং PLQ এবং PSR [চিত্র 3 (ii)] সদৃশ ত্রিভূজ থেকে পাই $\dfrac{\overline{PS}}{\overline{PL}} = \dfrac{\overline{PR}}{\overline{PQ}} = \dfrac{m}{m-n}$. $\overline{PS} = \overline{MT} = \overline{OT} - \overline{OM}$

$$= \alpha - x_1$$

$$\overline{PL} = \overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM}$$

$$= y_2 - y_1$$

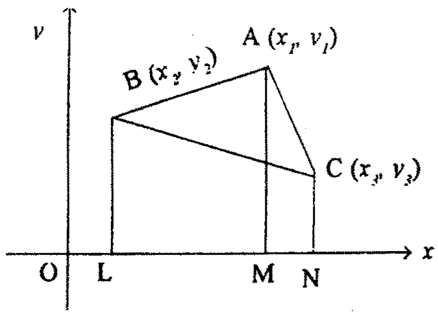
বা, $\dfrac{\alpha - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{m}{m-n}$ সুতরাং $\boxed{\alpha = \dfrac{mx_2 - nx_1}{m-n}}$

অনুরূপে, $\dfrac{\overline{SR}}{\overline{LQ}} = \dfrac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}$ থেকে পাই $\boxed{\beta = \dfrac{my_2 - ny_1}{m-n}}$

২৪.ক.৫ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

মনেকরি, A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) এবং C(x_3, y_3) তিনটি বিন্দু। ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে। AM, BL এবং CN, x-অক্ষের উপর লম্ব।

মনেকরি, Δ,ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল। চিত্র-4(i) থেকে পাই।



চিত্র : 4 (i)

Δ = ক্ষেত্রফল ট্রাপিজিয়াম $\angle$MAB

+ ক্ষেত্রফল ট্রাপিজিয়াম MNCA – ক্ষেত্রফল ট্রাপিজিয়াম BLNC.

$$= \tfrac{1}{2}(\overline{MA} + \overline{LB}) \times \overline{LM} + \tfrac{1}{2}(\overline{AM} + \overline{CN}) \times \overline{MN} - \tfrac{1}{2}(\overline{BL} + \overline{NC}) \times \overline{LN}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + (y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - (y_2 + y_3)(x_3 - x_2)\right]$$

$$\therefore \boxed{\Delta = \tfrac{1}{2}\left[(x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_3 - y_2x_3) + (x_3y_1 - y_3x_1)\right]}$$

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বর্গ এককে প্রকাশ করা হয়।

২৪.ক.৬ তিনটি বিন্দু সমরেখ হবার শর্ত

তিনটি বিন্দু দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল যদি শূন্য হয় তবে বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে।

Δ = O সিদ্ধ হবে যদি $(x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_3 - y_2x_3) + (x_3y_1 - y_3x_1) = 0$ হয়।

২৪.ক.৭ উদাহরণমালা

উদা. 1. ধরুন (x, y) বিন্দু, (a, b) বিন্দু এবং (b, a) বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী। দেখান যে $x = y$ যদি $a - b \neq 0$ হয়।

সমাধান :

প্রশ্নানুসারে, $(x-a)^2+(y-b)^2=(x-b)^2+(y-a)^2$

বা, $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=x^2+b^2-2bx+y^2-2ay+a^2$

বা, $-2ax-2by=-2bx-2ay$ বা, $2b(x-y)-2a(x-y)=0$

বা, $(x-y)(2b+2a)=0$ যেহেতু $2a-2b\neq 0$ $[a-b\neq 0]$

$\therefore\ x=y.$

উদা. 2. (–5, 2), (2, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে যে বিন্দু 3 : 4 অনুপাতে অন্তঃবিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনেকরি, নির্ণেয় স্থানাঙ্ক (α, β), সূত্রানুসারে,

$$\alpha=\frac{-5\times 4+2\times 3}{3+4}=\frac{-14}{7}=-2$$

$$\beta=\frac{2\times 3+4\times 2}{3+4}=\frac{14}{7}=2$$

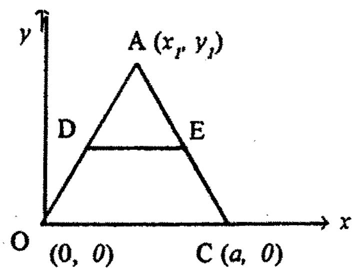
$\therefore\ (\alpha,\ \beta)\ =\ (-2,\ 2).$

উদা. 3. (2, 3) ও (5, –4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ x-অক্ষ দ্বারা কি অনুপাতে বিভক্ত হয়?

সমাধান : মনেকরি নির্ণেয় অনুপাত $m : n$. রেখাংশটি যে বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে তার কোটি শূণ্য হবে।

সুতরাং $\dfrac{-m\times 4+3n}{m+n}=0$ বা, $3n=4m$

বা, $m:n=3:4$



চিত্র ঃ 5

উদা. 4. প্রমাণ করুন যে একটি ত্রিভুজের যে কোন দুটি বাহুর মধ্য বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ তৃতীয় বাহুর অর্ধেক।

সমাধান : ত্রিভুজের একটি শীর্ষকে মূলবিন্দু এবং একটি বাহুকে x-অক্ষের বরাবর ধরা হল। D এবং E যথাক্রমে OA এবং AC-র মধ্য বিন্দুদ্বয় (চিত্র-5)।

সুতরাং D-এর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{x_1}{2},\dfrac{y_1}{2}\right)$ এবং E-এর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{x_1+a}{2},\dfrac{y_1}{2}\right)$.

$$\therefore\ DE^2 = \left\{\left(\frac{x_1+a}{2}-\frac{x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{2}-\frac{y_1}{2}\right)^2\right\}=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\therefore\ DE = \frac{a}{2}\ \ i.e,\ \ DE = \tfrac{1}{2}OC$$

উদা. 5. প্রমাণ করুন যে, $(3a, 0)$, $(0, 3b)$ এবং $(a, 2b)$ বিন্দুগুলি সমরেখ।

সমাধান : তিনটি বিন্দুদ্বারা প্রাপ্ত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $\Delta = \frac{1}{2}[3ab-3ab]$

$= \frac{1}{2}\times 0 = 0$ সুতরাং বিন্দুগুলি সমরেখ।

২৪.ক.৮ অনুশীলনী

1. (a, –b) এবং (–a, b) বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় করুন। [উঃ $2\sqrt{a^2+b^2}$]

2. দেখান যে, (–3, 5), (6, –1) এবং (10, 5) একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুত্রয়।

3. (2, –3) এবং (7, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ x-অক্ষ দ্বারা কি অনুপাতে বিভক্ত হয়?
[উঃ 3 : 5]

4. (x_1, y_1), এবং (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু ত্রয়। মধ্যমা তিনটির ছেদ বিন্দু (ভরকেন্দ্র) নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),\ \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$]

5. দেখান যে, (1, 4), (3,–2) এবং (–3, 16) সমরেখ।

6. (0, 0), (5, 3) এবং (1, 9) দ্বারা নির্ণেয় ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
[উঃ 21 বর্গ একক।]

7. (x, y) বিন্দুটি (5, 0), (0, 5) এবং (3, 4) বিন্দু তিনটি থেকে সমদূরবর্তী হলে প্রমাণ করুন যে $x = y = 0$.

8. প্রমাণ করুন যে (–7, 3) ও (14, –6) বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখা মূল বিন্দুগামী।

9. (1, 3) বিন্দুটি (4, 6) ও (3, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে কি অনুপাতে বিভক্ত করে?
[উঃ 3 : 2 বহিঃস্থভাবে]

২৪.ক.৯ সঞ্চারপথ ও তার সমীকরণ (Locus and its equation)

একটি বিন্দু যদি এক বা একাধিক শর্ত মেনে সমতলে গতিশীল থাকে, তবে তার গতিপথকে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ (Locus) বলে।

যেমন একটি গতিশীল বিন্দু যদি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সতত সমদূরবর্তী থাকে তবে তাঁর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

চলমান কোন বিন্দু যে শর্তাধীনে চলে তা চলমান বিন্দুটির স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এই বীজগাণিতিক প্রকাশিত রূপকেই ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ বলে।

২৪.ক.১০ উদাহরণমালা

উদা. 1. একটি বিন্দুর সঞ্চারণের জ্যামিতিক শর্ত হল যে তার সব অবস্থানে x-অক্ষ থেকে তার দূরত্ব y-অক্ষ থেকে তার দূরত্বের চারগুণ।

সমাধান : মনেকরি (x, y) গতিশীল কোন একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক। উপরি উক্ত শর্ত থেকে পাই $x = 4y$ এটিই বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ। এই সমীকরণটি গতিশীল বিন্দুটির যে কোন অবস্থানের স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ হবে। লক্ষ্য করলে দেখা যাবে এর সঞ্চারপথের বহিঃস্থ কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ হবে না। যেমন $(1, 5)$ বিন্দুটি $x = 4y$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

উদা. 2. $(0, 0)$ এবং $(3, 0)$ থেকে সতত সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনেকরি, (x, y) কোন গতিশীল বিন্দুর স্থানাঙ্ক। $(0, 0)$ থেকে (x, y)-এর দূরত্ব হল $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$ আবার $(3, 0)$ থেকে (x, y)-এর দূরত্ব হল $\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}$, অতএব শর্তানুসারে

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

অথবা, $x^2+y^2=(x-3)^2+y^2$, অথবা, $2x-3=0$

এটিই সঞ্চারপথের সমীকরণ।

উদা. 3. A এবং B বিন্দু যথাক্রমে $(-4, 0)$ ও $(-1, 0)$ এবং P এমন একটি চলমান বিন্দু যে $AP : PB = 2 : 1$. P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করুন।

সমাধান মনেকরি, (x, y) P বিন্দুর স্থানাঙ্ক। শর্তানুসারে, $\dfrac{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}=\dfrac{2}{1}$, সরল করে পাই — $x^2+y^2=4$, এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 4. একটি গতিশীল বিন্দু P-র যে কোন অবস্থানের স্থানাঙ্ক $\left(ct+\frac{c}{t},\ ct-\frac{c}{t}\right)$ (t-এর সকল মানে); P-বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনেকরি, P-বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y). প্রশ্নানুযায়ী, $(x,y) \equiv \left(ct+\frac{c}{t},\ ct-\frac{c}{t}\right)$.

$\therefore\ x = ct+\frac{c}{t}$.........(1) $y = ct-\frac{c}{t}$.........(2)

(1) ও (2) যোগ করে পাই— $x + y = 2ct$ বা, $(x+y)(x-y) = 2ct \times \frac{2c}{t}$

এবং (1) ও (2) বিয়োগ করে পাই— $x - y = \frac{2c}{t}$

বা, $x^2 - y^2 = 4c^2$ এটিই নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

২৪.ক.১১ প্রশ্নমালা

1. একটি গতিশীল বিন্দুর y-অক্ষ থেকে দূরত্ব, x-অক্ষ থেকে দূরত্ব অপেক্ষা 3 কম। বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন। **উ** : $x = y - 3$

2. একটি চলমান বিন্দুর (2, 3) বিন্দু থেকে দূরত্ব সতত 4 হলে তার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন। **উ** : $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

3. কোন সমতলে একটি বিন্দু এরূপে চলমান যে পরস্পর সমকোণে নত দুটি স্থির সরলরেখা থেকে উহার দূরত্বদ্বয়ের সমষ্টি সতত ধ্রুবক। বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় করুন।

[পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত রেখা দুটিকে অক্ষদ্বয় ধরবেন] **উ** : $x + y =$ ধ্রুবক

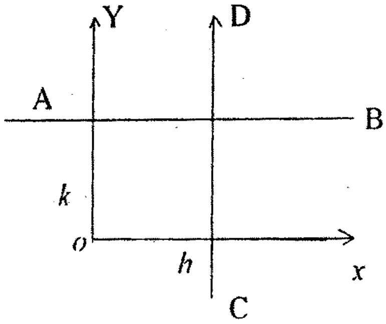
4. A (–2, 4) এবং B (6, 8) দুটি বিন্দু। একটি বিন্দু P (x, y) এরূপভাবে চলমান যে PAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সর্বদা 10 বর্গ একক। P-এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন। **উ** : $2y - x = 10$

5. কোন সমতলে একটি বিন্দু এরূপে চলমান যে y-অক্ষ থেকে বিন্দুটির দূরত্ব, (2, 2) বিন্দু থেকে তার দূরত্বের দ্বিগুণ। **উ** : $3x^2 + 4y^2 - 16x - 16y + 32 = 0$

২৪.ক.১২ অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ

x-অক্ষের সমান্তরাল AB সরলরেখার উপর যে কোন বিন্দুর কোটি হল k। সুতরাং AB-এর সমীকরণ হল $y = k$.

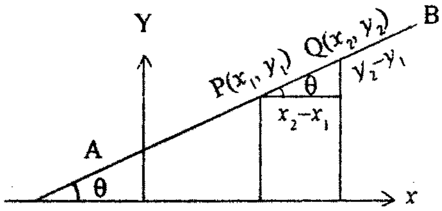
অনুরূপভাবে y-অক্ষের সমান্তরাল CD রেখার সমীকরণ হল $x = h$. যদি $k = 0$ হয় তবে x-অক্ষের সমীকরণ হয় $y = 0$ এবং অনুরূপভাবে $h = 0$ হলে y-অক্ষের সমীকরণ হয় $x = 0$.



চিত্র : 6

২৪.ক.১৩ সরলরেখার প্রবণতা (Gradient of a Straight line or slope of a straight line)

সরলরেখার উপর কোন চলমান বিন্দুর ভুজের একক পরিবর্তনের জন্য কোটির যে পরিবর্তন হয় তাকে ঐ সরলরেখার প্রবণতা (Gradient) বলে।



চিত্র : 7

মনেকরি, একটি সরলরেখার উপর $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ দুটি বিন্দু। সুতরাং AB রেখার

$$\text{প্রবণতা} = \frac{\text{কোটির পরিবর্তন}}{\text{ভুজের পরিবর্তন}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$$

উদা. (1, 2) ও (3, 4) বিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখার প্রবণতা নির্ণয় করুন।

এখানে কোটির বৃদ্ধি $= 4 - 2 = 2$ এবং

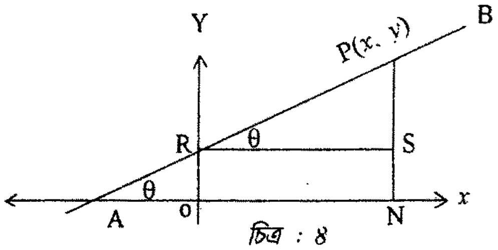
ভুজের বৃদ্ধি $= 3 - 1 = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রবণতা $= \frac{2}{2} = 1.$

২৪.ক.১৪ সরলরেখার সমীকরণের বিভিন্ন আকার (Equation of a straight line)

২৪.ক.১৪.১ প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকার (Gradient-intercept form)

মনেকরি, AB সরলরেখার প্রবণতা m এবং OR = C, y-অক্ষের ছেদিতাংশ। P (x, y), AB সরলরেখার উপর যে কোন একটি বিন্দু। PN, 'OX'-এর উপর এবং RS 'PN'-এর উপর লম্ব। এখন (চিত্র-৪) ধরি, AB ও OX-এর অন্তর্ভুক্ত কোন θ।



চিত্র : ৪

$$\therefore \tan\theta = \frac{SP}{RS} = \frac{PN-SN}{ON} = \frac{PN-OR}{ON} = \frac{y-c}{x}$$

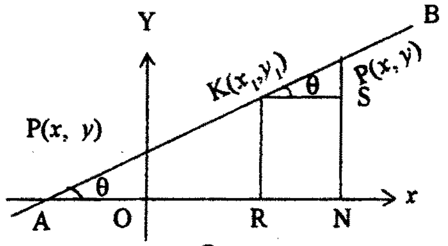
বা, $y = mx + c$, এটিই AB সরলরেখার সমীকরণ। এখানে $m = \tan\theta$

(i) যদি সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী হয় তবে $c = 0$

(ii) যদি দুটি সরলরেখার প্রবণতা সমান হয় তবে সরলরেখা দুটি সমান্তরাল হবে।

২৪.ক.১৪.২ নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

মনেকরি, $k(x_1, y_1)$ AB সরলরেখার উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু, $P(x, y)$ AB-র উপর যে কোন একটি বিন্দু এবং m, AB-র প্রবণতা। চিত্র : 9 থেকে পাই,



চিত্র : 9

$$m = \frac{SP}{KS} = \frac{NP-KR}{RN} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

সুতরাং $y - y_1 = m(x-x_1)$ নির্ণেয় সমীকরণ।

বিকল্প পদ্ধতি। মনেকরি, $y = mx + c$ — (1) AB সরলরেখাটির নির্ণেয় সমীকরণ। $k(x_1, y_1)$ এই সরলরেখার উপর একটি বিন্দু হলে, $y_1 = mx_1 + c$ — (2)

(1) থেকে (2) বিয়োগ করে পাই,

$y - y_1 = m(x - x_1)$। এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

২৪.ক.১৪.৩ সুসমঞ্জস আকারে সরলরেখার সমীকরণ

উপরের অনুচ্ছেদ অনুসারে AB সরলরেখার সমীকরণ $y - y_1 = m(x - x_1)$.

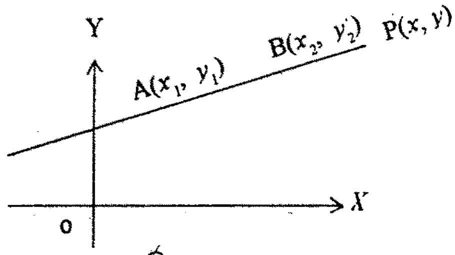
$$= \tan\theta\ (x - x_1)$$

বা, $\dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y - y_1}{\sin\theta} = r$ যেখানে $r = Pk\ [\theta \neq 90°]$

এটিই সুসমঞ্জস আকারে AB সরলরেখার সমীকরণ।

২৪.ক.১৪.৪ দুটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ।

মনেকরি, $A(x_1, y_1)$, $B(X_2, y_2)$ সরলরেখার উপর দুটি বিন্দু এবং $P(x, y)$ সরলরেখার উপর যে কোন একটি বিন্দু।



চিত্র : 10

আমরা জানি, AB সরলরেখার প্রবণতা $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

এবং যেহেতু $A(x_1, y_1)$, AB সরলরেখার উপর একটি বিন্দু, AB সরলরেখার সমীকরণ হল $y - y_1 = m(x - x_1)$

বা, $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ বা, $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

উদা : 1. একটি সরলরেখার প্রবণতা $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ এবং y অক্ষের ছেদিতাংশ 3। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনেকরি, নির্ণেয় সরলরেখাটির সমীকরণ $y = mx + c$। এখানে $m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $c = 3$

সুতরাং সরলরেখাটির সমীকরণ হল $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + 3$ বা, $\sqrt{2}y = x + 3\sqrt{2}$

উদা : 2. $(-2, 3)$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখার প্রবণতা $\sqrt{3}$, সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : যেহেতু সরলরেখাটি $(-2, 3)$ বিন্দুগামী, এর সমীকরণ $y - 3 = m\ (x + 2)$, এখানে $m = \sqrt{3}$

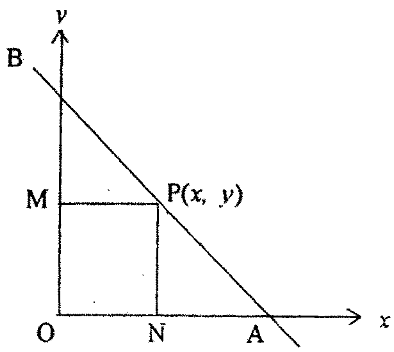
সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ $y - 3 = \sqrt{3}(x + 2)$।

উদা : 3. $(2, 3)$ এবং $(-3, 4)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : আমরা জানি, $(2, 3)$ বিন্দু দিয়ে সরলরেখার সমীকরণ $y - 3 = m(x - 2)$, এখানে $m = \dfrac{4-3}{-3-2}$ বা, $m = -\dfrac{1}{5}$ সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ $y - 3 = -\dfrac{1}{5}(x - 2)$ বা, $-5y + 15 = x - 2$

বা, $x + 5y - 17 = 0$.

২৪.ক.১৪.৫ যে সরলরেখা উভয় অক্ষ থেকে নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করে তার সমীকরণ

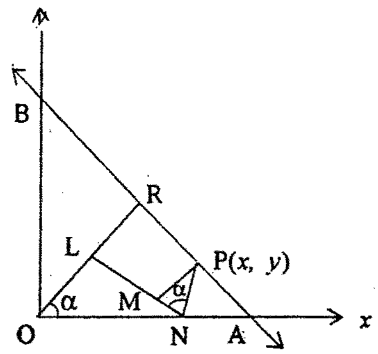


চিত্র : 11

মনেকরি, OA = a এবং OB = b. $P(x, y)$, AB সরলরেখার উপর যে কোন বিন্দু এবং PN, PM যথাক্রমে OX এবং OY-র উপর লম্ব। এখন ΔAPN এবং ΔABO সদৃশ ত্রিভুজদ্বয় থেকে পাই $\frac{NA}{OA}=\frac{PN}{OB}$ বা, $\frac{OA-ON}{OA}=\frac{PN}{OB}$

বা, $\frac{a-x}{a}=\frac{y}{b}$ বা, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. এটিই নির্ণেয় সমীকরণ। [a ≠ 0, b ≠ 0 ধরা হয়েছে]

২৪.ক.১৪.৬ লম্ব আকারে সরলরেখার সমীকরণ



চিত্র : 12

OR, AB-র উপর লম্ব। মনেকরি, OR = P এবং OR x অক্ষের সঙ্গে α কোণ করেছে। P(x, y), AB-র উপর যে কোন একটি বিন্দু। PN x-অক্ষের উপর লম্ব, NL, OR-এর উপর এবং PM, LN-এর উপর লম্ব টানা হল (চিত্র : 12) । এখন P = OR = OL + LR = OL + PM = ON cos α + NPSin α [যেহেতু ∠PNM = 90° – ∠ONL = ∠NOL = α]

অতএব, $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ সরলরেখা AB-র লম্ব আকারে সমীকরণ।

২৪.ক.১৪.৭ সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ : বিভিন্ন আকারে প্রকাশ

x, y সাপেক্ষে একঘাত সাধারণ সমীকরণ Ax + By + C = 0 সতত একটি সরলরেখা নির্ণয় করে। (প্রমাণের প্রয়োজন নাই)।

(i) Ax + By + C = 0 কে $y = mx + c$ আকারে প্রকাশ।

সরলরেখার সমীকরণ Ax + By + C = 0

বা, By = – Ax – C বা, $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ (B ≠ 0 ধরে)

এটি $y = mx + c$ আকারের যেখানে $m = -\frac{A}{B}$ এবং $c = -\frac{C}{B}$

(ii) **Ax + By + C = 0 কে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ আকারে প্রকাশ।**

সরলরেখার সমীকরণ Ax + By + C = 0 বা, Ax + By = – C

বা, $\frac{x}{\frac{-c}{A}} + \frac{y}{\frac{-c}{B}} =$ বা, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ যেখানে $a = \frac{-c}{A}$ এবং $b = \frac{-c}{B}$.

(iii) **Ax + By + C = 0** কে অভিলম্ব আকারে প্রকাশ।

Ax + By + C = 0, $+\sqrt{A^2+B^2}$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{A}{+\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y = -\frac{C}{+\sqrt{A^2+B^2}}$$

যদি $\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ হয় তবে $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, সুতরাং আমরা পাই $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ যেখানে $p = -\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$, সর্বদা ধনাত্মক। অতএব সেই অনুসারে '+' বা '–' চিহ্ন নিতে হবে।

২৪.ক.১৫ উদাহরণমালা

উদা : 1. একটি সরলরেখা (–4, 9) বিন্দু দিয়ে গিয়েছে এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যে তার ছিন্ন অংশটি ঐ বিন্দুতে 3 : 2 অনুপাতে অন্তঃবিভক্ত হয়েছে। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনেকরি, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ এবং x অক্ষকে A এবং y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করল। A ও B-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (a, 0) এবং (0, b)।

AB রেখা যে বিন্দুতে 3:2 অনুপাতে বিভক্ত হবে সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক হল $= \frac{3.0+2a}{3+2}$ এবং $\frac{3b+2.0}{3+2}$

বা, $\frac{2a}{5}$ এবং $\frac{3b}{5}$ কিন্তু এই বিন্দুর স্থানাঙ্ক প্রদত্ত আছে (–4, 9).

সুতরাং $\frac{2a}{5} = -4$ এবং $\frac{3b}{5} = 9$

বা, $a = -10$ এবং $b = 15$

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ হল $\frac{x}{-10}+\frac{y}{15}=1$ বা, $3x - 2y + 30 = 0$.

উদা : 2. যে সরলরেখা অক্ষদ্বয় থেকে দুটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত সমান অংশ ছিন্ন করে ও $(-3, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনেকরি, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$

বা, $x - y = a$ রেখাটি $(-3, 2)$ বিন্দুগামী, $\therefore -3 -2 = a$ বা, $a = -5$

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ হল $x - y + 5 = 0$

উদা : 3. একটি সরলরেখা x-অক্ষের সঙ্গে $135°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং $(3, -4)$ বিন্দুগামী। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : সরলরেখাটির প্রবণতা, $m = \tan 135° = -1$,

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ হল $y + 4 = -1 (x - 3)$ বা, $x + y + 1 = 0$

উদা : 4. $(2, 3)$ ও $(3, 2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যে ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

সমাধান : $(2, 3)$ ও $(3, 2)$ গামী সরলরেখার সমীকরণ হল $\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-3}{2-3}$ বা, $-x + 2 = y - 3$ বা, $x + y - 5 = 0$ এটিই নির্ণেয় সমীকরণ। ছেদিতাংশ রূপে লিখলে পাই $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$ সরলরেখাটির দ্বারা ছেদিতাংশ হল 5 ও 5. সুতরাং সরলরেখাটির দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য $\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$ একক।

উদা : 5. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ **এমন একটি চলমান সরলরেখা যে সতত $a + b = 8$, এই রেখার অক্ষদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশের মধ্য বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করুন।**

সমাধান : মনেকরি, সরলরেখাটির উল্লিখিত মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_0, y_0), আমরা পাই,

$x_0 = \frac{0+a}{2}$, $y_0 = \frac{b+0}{2}$

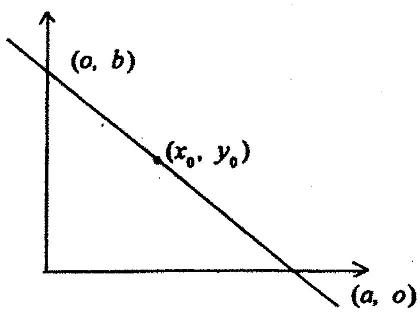
বা, $x_0 = \frac{a}{2}$ এবং $y_0 = \frac{b}{2}$

বা, $a = 2x_0$, $b = 2y_0$

$a + b = 8$ -এ বসিয়ে পাই

$2x_0 + 2y_0 = 8$ বা, $x_0 + y_0 = 4$

সুতরাং (x_0, y_0)-র সঞ্চারপথ হল $x + y = 4$



২৪.ক.১৬ প্রশ্নমালা

1. নিম্নলিখিত প্রত্যেক বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার প্রবণতা নির্ণয় করুন :

(i) (0, –5) এবং (–4, 7) উ: $\left[\frac{12}{-4}=-3\right]$

(ii) (–5, 4) এবং (3, 4) উ: [0]

2. (–1, 5) এবং (2, 8) বিন্দুগামী সরলরেখা ধনাত্মক x-অক্ষের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করুন। উ: [45°]

3. নিম্নের প্রত্যেকটি সরলরেখার প্রবণতা ও y-অক্ষের উপর ছেদবিন্দু নির্ণয় করুন।

(i) $y + 3x = 4$ উ: [–3, (0, 4)]

(ii) $x + y = 0$ উ: [–1, (0, 0)]

(iii) $x + 2y + 5 = 0$ উ: $\left[\frac{-1}{2},\left(0,\frac{-5}{2}\right)\right]$

4. নিম্নের সরলরেখাগুলির অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ নির্ণয় করুন :

(i) $2x + 3y = 6$ উ: [3, 2]

(ii) $7x - 5y = 1$ উ: $\left[\frac{1}{7},\frac{-1}{5}\right]$

5. x অক্ষ এবং y অক্ষ থেকে ছেদিতাংশগুলি নিম্নে দেওয়া হল। সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় করুন :

(i) $a=\frac{7}{2},\ b=\frac{-5}{2}$ উ: [10x – 14y = 35]

(ii) $a=-\frac{3}{4}$, b = –4 উ: [16x + 3y + 12 = 0]

6. নিম্নলিখিত সরলরেখাগুলির উপর মূল বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন :

(i) $3x + 4y - 5 = 0$ উ: [1]

(ii) $2x + 3y + 4 = 0$ উ: $\left[\frac{4}{\sqrt{13}}\right]$

7. নিম্নের প্রত্যেক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন :

(i) x-অক্ষের সঙ্গে 30° কোণে নত এবং y-অক্ষের সহিত ছেদিতাংশ 1. উ: $\left[x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0\right]$

(ii) x-অক্ষের সঙ্গে $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ কোণে নত এবং y-অক্ষের উপর ছেদিতাংশ $\frac{1}{4}$।

উ: [3x – 4y + 1 = 0]

8. নিম্নলিখিত সরলরেখাগুলির সমীকরণগুলিকে লম্ব আকারে প্রকাশ করুন :

(i) $\sqrt{3x}+y=4$ উ: $[x\cos 30° + y\sin 30° = 2]$

(ii) x + y + 2 = 0 উ: $\left[x\cos 225°+y\sin 225°=\sqrt{2}\right]$

(iii) $x-y+5\sqrt{2}=0$ উ: $[x\cos 135° + y\sin 135° = 5]$

9. একটি সরলরেখা x-অক্ষের সঙ্গে 120° কোণে নত এবং মূল বিন্দু থেকে তার লম্ব দূরত্ব 3 সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন। উ: $\left[\sqrt{3}x+y=6\right]$

10. যে সরলরেখা x অক্ষের সঙ্গে 45° কোণে নত এবং (4, 7) ও (6, 5) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমদ্বিখণ্ডক তার সমীকরণ নির্ণয় করুন। উ: $[x - y + 1 = 0]$

11. (2, 3) বিন্দুগামী যে সরলরেখার দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশদ্বয়ের সমষ্টি 10 তার সমীকরণ নির্ণয় করুন। উ: [3x + 2y − 12 = 0 অথবা x + y = 5]

12. একটি সরলরেখা এরূপে গতিশীল যে তার সব অবস্থানে তার দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ দুইটির অন্যোন্যকের সমষ্টি ধ্রুবক। প্রমাণ করুন যে রেখাটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়।

13. কোন সরলরেখা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) গামী। দেখান যে অক্ষদ্বয়ের দ্বারা এই রেখার ছেদিতাংশের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হবে $\frac{x_1}{2x}+\frac{y_1}{2y}=1$

14. একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সঙ্গে একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। যদি অতিভুজ 13 এবং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 30 হয় তবে সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

উ: [5x + 12y = ± 60, 12x + 5y = ± 60]

15. (2, 3) বিন্দুগামী এবং (4, −7) ও (−7, 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন। উ: [x + y = 5]

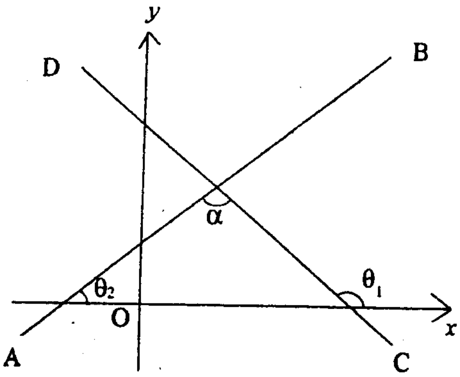
16. (−3, 4) বিন্দুগামী এবং y + 3 = 0 সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন। উ: [y = 4]

17. দেখান যে (1, 5), (3, 14) ও (−1, −4) বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন। উ: [9x − 2y + 1 = 0]

২৪.ক.১৭ দুটি সরলরেখার অন্তর্ভূত কোণ নির্ণয়।

(a) মনেকরি, AB ও CD সরলরেখা দুটির সমীকরণ $y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ এবং এদের অন্তর্ভূত কোণ α (চিত্র-13) অর্থাৎ AB রেখাকে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়ে CD-এর সমান্তরাল করলে α কোণ উৎপন্ন হয়।

সরলরেখা দুটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে θ_1 and θ_2 কোণ উৎপন্ন করে। সুতরাং $m_1 = \tan\theta_1$ এবং $m_2 = \tan\theta_2$, চিত্র থেকে পাই, $\theta_1 = \alpha + \theta_2$ বা, $\alpha = \theta_1 - \theta_2$



চিত্র : 13

$$\therefore \tan\alpha = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

সুতরাং $\tan\alpha = \dfrac{m_1 - m_2}{1+m_1m_2}$ বা, $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{m_1 - m_2}{1+m_1m_2}$

দ্রষ্টব্য— যখন দুটি সরলরেখা এক সমকোণে না থেকে পরস্পর ছেদ করে তখন তাদের অন্তর্ভূত কোণের একটি সূক্ষ্মকোণ ও অপরটি স্থূলকোণ হবে।

(b) যদি সরলরেখা দুটির সমীকরণ হয়—

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ এবং

$A_2x + B_2y + C_2 = 0$ তবে

$m_1 = -\dfrac{A_1}{B_1}$ এবং $m_2 = -\dfrac{A_2}{B_2}$

অতএব $\tan\alpha = \dfrac{m_1 - m_2}{1+m_1m_2} = \dfrac{B_1A_2 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}$

(c) মনেকরি, সরলরেখা দুটির সমীকরণের আকার $x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 = p_1$ এবং $x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 = p_2$. সরলরেখা দুটির উপর মূলবিন্দু থেকে লম্ব x-অক্ষের সঙ্গে α_1 এবং α_2 কোণ উৎপন্ন করে। অতএব, $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ বা, $\alpha = \pi - (\alpha_1 - \alpha_2)$ হবে।

উদাহরণ : $y = 2x - 3$, $3y = -3x + 2$ সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে $m_1 = 2$, $m_2 = -3$. সূত্র অনুযায়ী, $\tan\alpha = \dfrac{2-(-3)}{1+2.(-3)} = -1$ অর্থাৎ $\alpha = -45^\circ$ or 135°

সুতরাং অন্তর্ভূত কোণ 135° অর্থাৎ প্রথম রেখাটিকে ধনাত্মক দিকে ঘোরালে দ্বিতীয় রেখার সঙ্গে সমান্তরাল হবে।

দুটি সরলরেখা সমান্তরাল হবার শর্ত :

সরলরেখা দুটি সমান্তরাল হলে, $\theta_1 = \theta_2$ হবে।

অর্থাৎ $\boxed{m_1 = m_2}$ অথবা $\boxed{\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}}$ হবে।

দুটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত :

যদি $\alpha = 90°$ হয় তবে $\cot\alpha = 0$

বা, $\cot\alpha = \dfrac{1 + m_1m_2}{m_1 - m_2} = 0$, অতএব, $1 + m_1m_2 = 0$ বা, $\boxed{m_1m_2 = -1}$ অথবা $\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0}$

দ্রষ্টব্য : (i) কোন সরলরেখা সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করবার সময় প্রদত্ত রেখার সমীকরণে শুধু ধ্রুবক পদটি পরিবর্তন করতে হয়।

উদা : $2x + 3y + 4 = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখা হল $2x + 3y + k = 0$

(ii) প্রদত্ত একটি সরলরেখার সঙ্গে লম্বভাবে অবস্থিত কোন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করার সময় x ও y-এর সহগ দুটি বিনিময় করে তাদের যে কোন একটির চিহ্ন পরিবর্তন করে একটি ধ্রুবক পদ যোগ করতে হবে।

উদা : $2x + 3y + 4 = 0$ সরলরেখার লম্ব সরলরেখা হল $3x - 2y + k' = 0$

উদা : 1. $x - \sqrt{3}y = 1$ এবং $\sqrt{3}x - y = 2$ সরলরেখা দুটির অন্তর্ভূত কোণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : সরলরেখা দুটি 'm' আকারে লিখলে পাই $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $y = \sqrt{3}x - 2$

এখানে $m_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $m_2 = \sqrt{3}$. যদি α সরলরেখা দুটির অন্তর্ভূত কোণ হয়, তবে,

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{3}} = \frac{\frac{3-1}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore \alpha = 30°$ [সূক্ষ্মকোণটি]

উদা : 2. (4, 3) বিন্দুগামী এবং $2x + 3y = 5$ সমান্তরাল সরলরেখা নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখা হল $2x + 3y = k$। এই সরলরেখাটি (4, 3) বিন্দুগামী হলে পাই $2.4 + 3.3 = k$ বা, $k = 17$ সুতরাং নির্ণেয় সরলরেখাটি হল $2x + 3y = 17$.

উদা : 3. (3, 2) বিন্দুগামী এবং $2x - y + 4 = 0$ এর উপর লম্ব সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

প্রদত্ত সরলরেখার উপর লম্ব সরলরেখা হল $-x-2y=k$. এই সরলরেখাটি (3, 2) বিন্দুগামী হলে পাই $-3-2.2=k$ বা $k=-7$

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ হল, $-x-2y=-7$ বা, $x+2y-7=0$

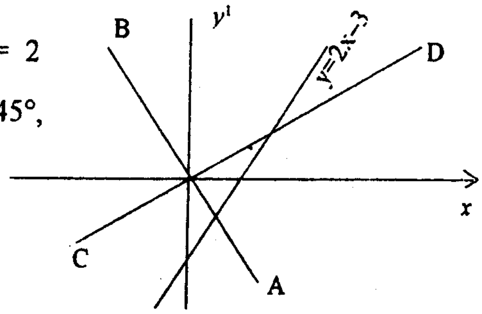
উদা : 4. মূলবিন্দুগামী একটি সরলরেখা, $y=2x-3$ সরলরেখার সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করে। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে $y=2x-3$ -এর প্রবণতা $m_1=2$

ধরি, নির্ণেয় রেখাটির প্রবণতা m_2; $\alpha=45°$ or $-45°$,

$$\therefore \frac{2-m_2}{1+2m_2}=\pm 1$$

$$\Rightarrow m_2=-3,\ \frac{1}{3}$$



চিত্র : 14

এক্ষেত্রে দুইটি সরলরেখা AB ও CD (চিত্র-14) পাওয়া যায় যারা নির্দিষ্ট শর্ত সিদ্ধ করে।

CD -এর সমীকরণ $y=\frac{1}{3}x$ -এর AB -এর সমীকরণ $y=-3x$।

২৪.ক.১৮ দুটি সরলরেখার ছেদ বিন্দু

মনেকরি, প্রদত্ত সরলরেখা দুটির সমীকরণ,

$a_1x+b_1y+c_1=0$ — (1)

$a_2x+b_2y+c_2=0$ — (2)

মনেকরি, (x_1, y_1) সরলরেখা দুটির ছেদ বিন্দু।

সুতরাং $a_1x_1+b_1y_1+c_1=0$ — (3)

$a_2x_1+b_2y_1+c_2=0$ — (4)

(3) এবং (4) থেকে বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x_1}{b_1c_2-c_1b_2}=\frac{y_1}{a_2c_1-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-b_1a_2}$$

$$\therefore x_1=\frac{b_1c_2-c_1b_2}{a_1b_2-b_1a_2}\quad y_1=\frac{a_2c_1-c_2a_1}{a_1b_2-b_1a_2}$$

দ্রষ্টব্য : যদি $a_1b_2-b_1a_2=0$ হয় তবে সরলরেখা দুটি সমান্তরাল হবে।

২৪.ক.১৯ তিনটি সরলরেখার সমবিন্দু হওয়ার শর্ত

মনেকরি, তিনটি সরলরেখা হল—

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ — (1)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ — (2)

$a_3x + b_3y + c_3 = 0$ — (3)

(1) এবং (2) সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক হল—

$$\left(\frac{b_1c_2 - c_1b_2}{a_1b_2 - b_1a_2}, \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}\right)$$

(3) সরলরেখাটি ঐ স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ হলে তিনটি সরলরেখা এক বিন্দুগামী হবে। সুতরাং নির্ণেয় শর্ত হল :

$$a_3\left(\frac{b_1c_2 - c_1b_2}{a_1b_2 - b_1a_2}\right) + b_3\left(\frac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}\right) + c_3 = 0$$

বা, $a_3(b_1c_2 - c_1b_2) + b_3(c_1a_2 - a_1c_2) + c_3(a_1b_2 - b_1a_2) = 0$

২৪.ক.২০ দুটি প্রদত্ত সরলরেখার ছেদবিন্দু দিয়ে সরলরেখার সমীকরণ

মনেকরি, (x_1, y_1), $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দু। সুতরাং (x_1, y_1) সরলরেখার সমীকরণ দুটিকে সিদ্ধ করবে।

অতএব,

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 - b_1y_1 - c_1 = 0 \\ a_2x_1 - b_2y_1 - c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{— (1)}$$

λ যে কোন ধ্রুবক হলে, $a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ — (2) সমীকরণটি x, y সাপেক্ষে একটি একঘাত সমীকরণ। সুতরাং একটি সরলরেখা নির্ণয় করে। এখন (2) সমীকরণের বামপক্ষে x, y -এর জায়গায় x_1, y_1 বসালে পাই,

$(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1) + \lambda\,(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2) = 0 + \lambda.0 = 0$ [(1) থেকে পাই]

সুতরাং (2) সরলরেখা (x_1, y_1) গামী।

সুতরাং (2) হল নির্ণেয় সরলরেখা। যদি আর একটি শর্ত জানা থাকে তবে λ-র নির্দিষ্ট মান নির্ণয় করা যায়।

উদা : 1. $3x - 4y + 5 = 0$ এবং $x + 7y - 9 = 0$ সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দু এবং $(2, 3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : উপরের সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হল—

$3x - 4y + 5 + \lambda (x + 7y - 9) = 0$ — (1)

এটি $(2, 3)$ বিন্দুগামী, সুতরাং

$3.2 - 4.3 + 5 + \lambda (2 + 7.3 - 9) = 0$

বা, $-1 + \lambda.14 = 0$ বা, $\lambda = \frac{1}{14}$

(1) এ λ-র মান বসিয়ে নির্ণেয় সমীকরণটি পাই।

উদা : 2. $4x + y - 4 = 0$ এবং $3x + 2y - 5 = 0$ সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দু এবং $3x - 7y + 5 = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : $4x + y - 4 = 0$ এবং $3x + 2y - 5 = 0$ সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হল $(4x + y - 4) + \lambda (3x + 2y - 5) = 0$ — (1)

বা, $x(4 + 3\lambda) + y(1 + 2\lambda) - (4 + 5\lambda) = 0$ এর প্রবণতা হল— $(4+3\lambda)/(1+2\lambda)$,

আবার $3x - 7y + 5 = 0$-এর প্রবণতা হল $3/7$.

প্রদত্ত শর্ত অনুসারে,

$$\frac{-(4+3\lambda)}{1+2\lambda} = \frac{3}{7}$$

বা, $-28 - 21\lambda = 3 + 6\lambda$ বা, $27\lambda = -31$

বা, $\lambda = -\frac{31}{27}$

λ-র মান (1)-এ বসিয়ে নির্ণেয় সমীকরণটি পাওয়া যাবে।

উদা : 3. $3x + 2y - 5 = 0$ ও $4x - 5y + 7 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $x - 3y + 1 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

$3x + 2y - 5 = 0$ এবং $4x - 5y + 7 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ।

$3x + 2y - 5 + \lambda (4x - 5y + 7) = 0$ — (1)

বা, $x(3 + 4\lambda) + y(2 - 5\lambda) - 5 + 7\lambda = 0$

এর প্রবণতা $-\frac{3+4\lambda}{2-5\lambda}$. $x - 3y + 1 = 0$ রেখার প্রবণতা $\frac{1}{3}$

শর্তানুসারে, $-\frac{1}{3}\cdot\frac{3+4\lambda}{2-5\lambda} = -1$ বা, $(2 - 5\lambda)3 = 3 + 4\lambda$ বা, $6 - 15\lambda = 3 + 4\lambda$

বা, $19\lambda = 3$ বা, $\lambda = \frac{3}{19}$

λ-র মান (1)-এ বসিয়ে নির্ণেয় সমীকরণ পাই।

উদা : 4. যদি $2x - 3y + k = 0$, $3x - 4y - 1 = 0$ এবং $4x - 5y - 2 = 0$ সরলরেখা তিনটি একবিন্দুগামী হয় তবে k-র মান নির্ণয় করুন।

$3x - 4y - 1 = 0$ এবং $4x - 5y - 2 = 0$

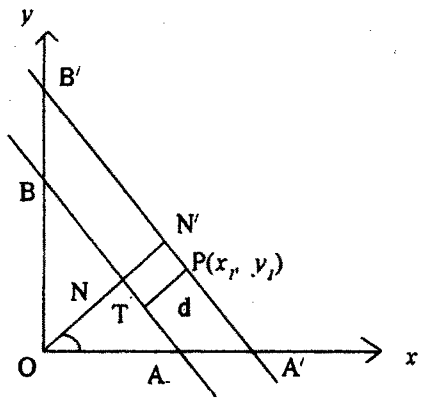
সমাধান করে পাই $x = 3$ এবং $y = 2$. যেহেতু তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু, সুতরাং (3, 2), $2x - 3y + k = 0$ কে সিদ্ধ করবে। অতএব,

$2.3 - 3.2 + k = 0$ বা, $k = 0$

২৪.ক.২১ বহিঃস্থ একটি বিন্দু থেকে একটি সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয়

মনেকরি, $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$

প্রদত্ত সরলরেখা এবং $P(x_1, y_1)$ প্রদত্ত বিন্দু। P থেকে AB-র লম্ব দূরত্ব PT = d নির্ণয় করতে হবে। চিত্র-15 -এ $\angle XON = \alpha$. P বিন্দুর মধ্য দিয়ে এবং AB-র সমান্তরাল করে A'B' রেখা টানা হল। মনেকরি, বর্ধিত ON, A'B' কে N' বিন্দুতে ছেদ করল। চিত্র থেকে NN' = PT = d, সুতরাং ON' = d + p.



চিত্র : 15

এখন P বিন্দুগামী AB সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হল—

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p + d$

$P(x_1, y_1)$ এই সরলরেখার উপর একটি বিন্দু, সুতরাং

$x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha = p + d$

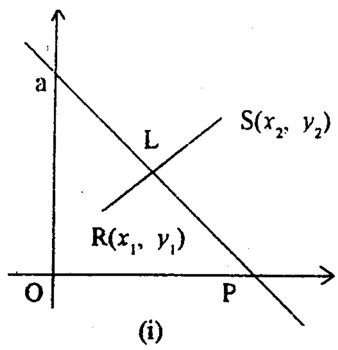
বা, $\boxed{d = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p}$

যদি $ax + by + c = 0$, AB সরলরেখার সমীকরণ হয়, তবে

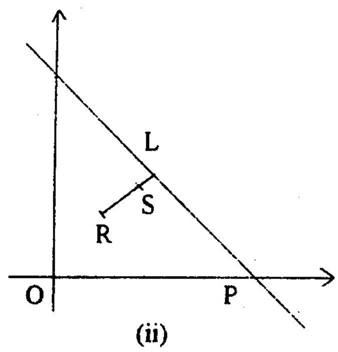
$\boxed{d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$ (d ধনাত্মক নিতে হবে)

২৪.ক.২২ একটি সরলরেখা সাপেক্ষে একটি বিন্দুর অবস্থান

মনেকরি, PQ সরলরেখার সমীকরণ $ax + by + c = 0$ এবং $R(x_1, y_1)$ এবং $S(x_2, y_2)$ দুটি প্রদত্ত বিন্দু।



(i)



(ii)

মনেকরি, RS, PQ কে L বিন্দুতে ছেদ করে এবং $\frac{RL}{LS} = \frac{m}{n}$. প্রথম চিত্রে R এবং S PQ-এর উভয় পার্শ্বে অবস্থিত। সুতরাং L বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$. যেহেতু L বিন্দু PQ-এর উপর অবস্থিত,

$$a\frac{mx_2 + nx_1}{m+n} + b\frac{my_2 + ny_1}{m+n} + c = 0$$

বা, $\frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c} = -\frac{m}{n}$ — (1)

দ্বিতীয় চিত্রে R এবং S PQ-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত। সুতরাং L এর স্থানাঙ্ক হল—

$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$ একইভাবে পাই

$\frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c} = +\frac{m}{n}$ — (2)

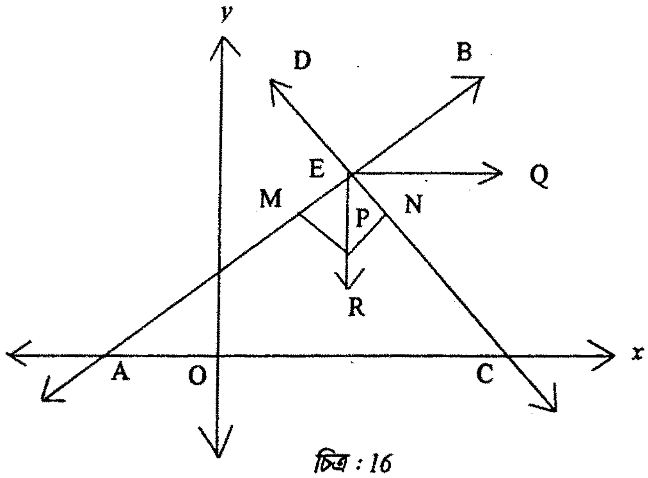
যেহেতু $\frac{m}{n}$ ধনাত্মক, $\frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c}$, (1)-এ ঋণাত্মক এবং (2)-এ ধনাত্মক।

সুতরাং $ax_1 + by_1 + c$ এবং $ax_2 + by_2 + c$ (1)-এ বিপরীত চিহ্নযুক্ত এবং (2)-এ একই চিহ্নযুক্ত হবে।

অতএব (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2), $ax + by + c = 0$ সরলরেখার একই পার্শ্বে থাকবে যদি $ax_1 + by_1 - c$ এবং $ax_2 + by_2 + c$ একই চিহ্নযুক্ত হয় এবং (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিপরীত পার্শ্বে থাকবে যদি ভিন্ন চিহ্নযুক্ত হয়।

২৪.ক.২৩ দুটি সরলরেখার অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয়

মনেকরি, AB এবং CD সরলরেখা দুটির সমীকরণ (চিত্র-16) যথাক্রমে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. মনেকরি তারা E বিন্দুতে ছেদ করছে।



চিত্র : 16

AEC কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর যে কোন বিন্দু $p(\alpha, \beta)$ থেকে PM, PN লম্ব টানা হল। এখন PM = PN চিত্র অনুসারে মূলবিন্দু AEC কোণের মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং P এবং মূলবিন্দু সরলরেখা দুটির একই পার্শ্বে অবস্থিত। অতএব PM = PN. অর্থাৎ $\dfrac{a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \dfrac{a_2\alpha + b_2\beta + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

আবার BEC কোণের ক্ষেত্রে মূলবিন্দুটি কোণের মধ্যে অবস্থিত নয়। বিন্দুটি যখন BEC কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর থাকবে তখন মূলবিন্দু এবং সমদ্বিখণ্ডকের উপর বিন্দুটি AB রেখার একই পার্শ্বে এবং CD রেখার বিপরীত পার্শ্বে থাকবে। সুতরাং বিন্দুটি থেকে উভয় সরলরেখার উপর লম্ব দূরত্বের মান সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে। অর্থাৎ

$$\frac{a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{a_2\alpha + b_2\beta + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

সুতরাং (α, β)-র সঞ্চারপথই নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ। নির্ণেয় সমীকরণ হল—

$$\boxed{\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}}$$

দ্রষ্টব্য : যে কোণের মধ্যে মূলবিন্দু আছে তার সমদ্বিখণ্ডকের ক্ষেত্রে + চিহ্ন নিতে হবে।

২৪.ক.২৪ উদাহরণমালা

উদা : 1. (2, –3) বিন্দু থেকে $15x - 8y - 3 = 0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান : সূত্রানুসারে, $d=\frac{15.2-8.(-3)-3}{\sqrt{15^2+8^2}}=\frac{30+21}{\sqrt{225+64}}$

বা, $d=\frac{51}{\sqrt{289}}=\frac{51}{17}=3$.

উদা : 2. P(2, 3) এবং Q(–5, –2) বিন্দু দুটির $4x - 5y + 9 = 0$ সাপেক্ষে অবস্থান নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে $4.2 - 5.3 + 9 = +2$ এবং $4.(-5) -5.(-2) + 9 = -20 +10 +9 = -1$ বিপরীত চিহ্নযুক্ত হওয়ায় সূত্রানুসারে বিন্দু দুটি সরলরেখাটির বিপরীত পার্শ্বে থাকবে।

উদা : 3. $x - 8y + 13 = 0$ এবং $4x - 7y + 2 = 0$ সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : সূত্রানুসারে, নির্ণেয় সমীকরণ

$$\frac{x-8y+13}{\sqrt{1^2+8^2}}=\pm\frac{4x-7y+2}{\sqrt{4^2+7^2}}$$

বা, $3x + y - 11 = 0$ এবং $x - 3y + 3 = 0$

২৪.ক.২৫ অনুশীলনী

1. $3x - y - 1 = 0$ এবং $x + 2y - 5 = 0$ **সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দু নির্ণয় করুন।**

উ: [1, 2]

2. $2x + 3y + 4 = 0$ এবং $3x + 3y + 5 = 0$ **সরলরেখা দুটির ছেদ বিন্দুগামী এবং** $6x - 7y + 8 = 0$ **সরলরেখার উপর লম্ব সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।**

উ: [$7x + 6y + 3 = 0$]

3. $4x + 3y = 6$ এবং $x - 2y = 7$ সরলরেখা দুটির ছেদ-বিন্দুগামী এবং x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন। উ: [$y + 2 = 0$]

4. নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি সরলরেখা যুগলের অন্তর্ভূত কোণ নির্ণয় করুন :

(i) $\sqrt{3}x - y = 0$ এবং $x - \sqrt{3}y + 3 = 0$ উ: [30°]

(ii) $y = x + 2$ এবং $y = 2$ উ: [45°]

(iii) $3x - 4y + 5 = 0$ এবং $x + 7y - 9 = 0$ উ: [45°]

(iv) $x \cos 15° - y \sin 15° + 5 = 0$ এবং $x \sin 105° + y \cos 105° - 5 = 0$ উ: [0°]

5. দেখান যে, $x - 6y + 2 = 0$, $x + 2 = 0$ এবং $3x + 5y + 6 = 0$ একবিন্দুগামী।

6. যদি $3x + 5y - 2 = 0$, $2x + 3y = 0$ এবং $ax + by + 1 = 0$ সমবিন্দু হয় তবে a এবং b-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করুন। উ: [$6a = 1 + 4b$]

7. দেখান যে $(-2, 6)$ এবং মূল বিন্দু, $3x + 2y - 7 = 0$ সরলরেখার একই দিকে অবস্থিত।

8. দেখান যে $(3, 2)$ এবং $(7, 3)$ $2x - 5y + 3 = 0$ সরলরেখার উভয় পার্শ্বে অবস্থিত।

9. $5x - 12y - 5 = 0$ এবং $5x - 12y + 21 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করুন। উ: [2]

10. $(-4, 7)$ বিন্দুগামী এবং $5x - 7y + 2 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন। উ: [$7x + 5y - 7 = 0$]

11. $(2, 3)$ বিন্দুগামী এবং $(3, -4)$ ও $(-5, 6)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সঙ্গে লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন। উ: [$4x - 5y + 7 = 0$]

12. $(3, 1)$ বিন্দু থেকে $5x - 12y + 1 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করুন। উ: $\left[\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right]$

13. নিম্নের রেখাগুলির অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

(i) $3x - 4y + 7 = 0$, $7x + 24y + 5 = 0$

উ: [$4x - 22y + 15 = 0$, $11x + 2y + 20 = 0$]

(ii) $2y = 3x - 1$, $3y = 2x + 1$ উ: [$x - y = 0$, $x + y - 2 = 0$]

14. $3x - 4y + 1 = 0$ এবং $4x + 3y - 1 = 0$ সরলরেখা দুটি থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করুন। উ: [$x + 7y - 2 = 0$, $7x - y = 0$]

15. কোন সামগ্রীর x- একক উৎপাদন করতে মোট y টাকা খরচ হয়। মোট উৎপাদন ব্যয়ের একটি অংশ ধ্রুবক এবং অপর অংশ উৎপাদিত এককের সংখ্যার সহিত সমানুপাতী। যদি সামগ্রীর 500 ও 1000 একক উৎপাদন করতে যথাক্রমে 6,000 টাকা ও 9,000 টাকা খরচ হয় তবে,

(i) x ও y-এর মধ্যে রৈখিক (linear) সম্পর্ক নির্ণয় করুন।

(ii) প্রাপ্ত সরলরেখার প্রবণতা নির্ণয় কর। প্রবণতার দ্বারা এক্ষেত্রে কি প্রকাশিত হয়?

(iii) যদি প্রতি একক সামগ্রী 10 টাকায় বিক্রয় করা হয় তবে কত একক সামগ্রী উৎপাদন করলে,

ক) কোন লাভ-ক্ষতি হবে না?

খ) 1200 টাকা লাভ হবে?

গ) 500 টাকা ক্ষতি হবে?

উ: [(i) $y = 6x + 3{,}000$

(ii) প্রবণতা = 6; প্রতি একক উৎপাদন বৃদ্ধির জন্য মোট ব্যয় 6 টাকা বৃদ্ধি পাবে।

(iii) ক) 750 একক; খ) 1000 একক; গ) 625 একক।]

16. A (0, 6), B (–2, –2) এবং C (4, 2) শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের BC বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করুন। উ: [$3x + 2y = 3$]

17. কোন আয়তক্ষেত্রের পর পর তিনটি বাহুর সমীকরণ যদি $2x + 3y + 1 = 0$, $ax + 4y + 3 = 0$ এবং $6x + by + 5 = 0$ হয়, তবে, '*a*' এবং '*b*'-র মান নির্ণয় কর। [সংকেত : ১ম রেখাটির সহিত ২য় রেখাটি লম্ব এবং ৩য় রেখাটি সমান্তরাল] **উ: [a = –6, b = 9]**

18. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখার মূলবিন্দু থেকে লম্বদূরত্ব যদি p হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

একক ২৪. খ. ❑ বৃত্ত ও অধিবৃত্ত

গঠন

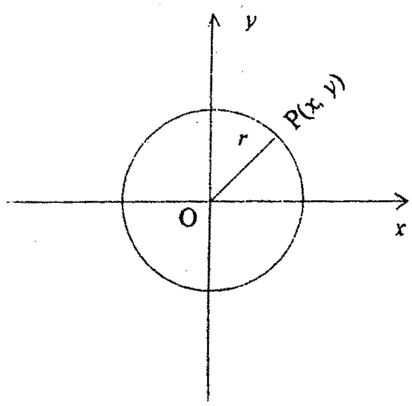
২৪.খ.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন —

- বৃত্তের সমীকরণ এবং
- বৃত্তের সাপেক্ষে বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করতে পারবেন।

২৪.খ.১ বৃত্ত ও তার সমীকরণ

বৃত্ত : যদি সমতলে অবস্থিত কোন গতিশীল বিন্দু ঐ সমতলের কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সতত সমদূরবর্তী থাকে, তবে ঐ চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথকে বৃত্ত বলে। ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকে বৃত্তের কেন্দ্র এবং নির্দিষ্ট দূরত্বকে বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে।



চিত্র : 17

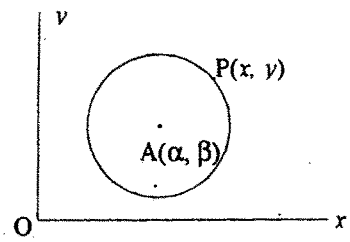
- **বৃত্তের সমীকরণ**

(a) বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ জানা থাকলে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়।

(i) মনেকরি, বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু O এবং P (x, y) (চিত্র-17) বৃত্তের উপর যে কোন একটি বিন্দু। সুতরাং বৃত্তের ব্যাসার্ধ r. $r = OP = \sqrt{x^2+y^2}$, বা, $x^2 + y^2 = r^2$—(1)

(1) নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ।

(ii) মনেকরি, $A(\alpha, \beta)$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক।



$\therefore$ ব্যাসার্ধ $= r = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$

বা, $\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = r^2}$—(2)

(2) নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ।

(2) থেকে পাই $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 = r^2$

বা, $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) = 0$

বা, $\boxed{x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0}$—(3)

এখানে $\alpha = -g$, $\beta = -f$, এবং $c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$,

$\therefore$ $\boxed{r = \sqrt{g^2+f^2-c} \text{ এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক } (-g, -f).}$

(3) নম্বর সমীকরণকে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ বলে।

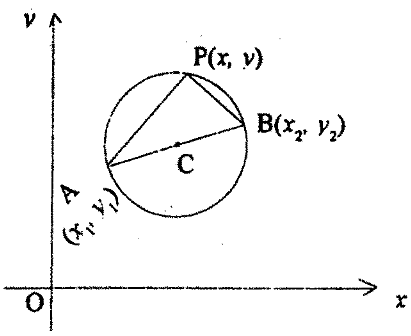
দ্রষ্টব্য : বাস্তব বৃত্তের ক্ষেত্রে $r > 0$, বা, $g^2 + f^2 > c$

যদি $g^2 + f^2 = c$ হয় তবে $r = 0$ এবং বৃত্তটি একটি বিন্দুতে পরিণত হয়।

সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ :

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ একটি বৃত্ত নির্ণয় করবে যদি $a = b$ $(\neq 0)$ এবং $h = 0$ হয়।

২৪.খ.২ দুটি প্রদত্ত বিন্দুর সংযোজক রেখা যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ



মনেকরি, A (x_1, y_1) এবং B (x_2, y_2) বিন্দু দুটির সংযোজক সরল রেখাংশ একটি বৃত্তের ব্যাস এবং P (x, y) বৃত্তের উপর যে কোন একটি বিন্দু। জ্যামিতিক শর্ত থেকে জানি ∠APB = এক সমকোণ। অর্থাৎ,

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} \cdot \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1$$

বা, $\boxed{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0}$

নির্ণেয় বৃত্ত।

দ্রষ্টব্য : বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, এখানে g, f এবং c তিনটি অজানা সংখ্যা আছে। সুতরাং তিনটি শর্ত জানা থাকলে একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করা যায়। যদি বৃত্তের সমীকরণের আকার হয় $x^2+y^2=r^2$ তবে একটি শর্ত জানা থাকলেই বৃত্তটি নির্ণয় করা যায়।

২৪.খ.৩ তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে একটি বৃত্ত

মনেকরি, (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং $(x_3 y_3)$ প্রদত্ত তিনটি বিন্দু এবং $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ..... (1) বৃত্তটি এই তিনটি বিন্দুগামী। সুতরাং,

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0 \text{ —(2)}$$

$$x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c=0 \text{ —(3)}$$

এবং $$x_3^2+y_3^2+2gx_3+2fy_3+c=0 \text{ —(4)}$$

(2), (3) এবং (4) সমীকরণগুলি থেকে g, f এবং c নির্ণয় করা যায়। ঐ মানগুলি (1) সমীকরণে বসালে নির্ণেয় বৃত্তটির সমীকরণ পাওয়া যায়।

২৪.৪ বৃত্তের সাপেক্ষে কোন বিন্দুর অবস্থান

মনেকরি, $P(x_1, y_1)$, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তটির সমতলে একটি বিন্দু। মনেকরি, $C(-g, -f)$ বৃত্তটির কেন্দ্র। আবার $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$, তার ব্যাসার্ধ। এখন $P(x_1, y_1)$ বিন্দুটি বৃত্তের অন্তস্থ, উপরিস্থিত অথবা বহিস্থ কোন বিন্দু হবে যদি CP যথাক্রমে r (ব্যাসার্ধ) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, সমান অথবা বৃহত্তর হবে।

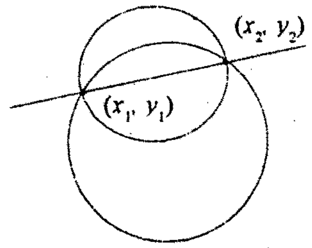
অর্থাৎ $\sqrt{(x_1+g)^2+(y_1+f)^2} <, =,$ অথবা $> \sqrt{g^2+f^2-c}$ হবে।

অর্থাৎ $(x_1+g)^2+(y_1+f)^2 <, =,$ অথবা $> g^2+f^2-c$ হবে।

অর্থাৎ $\boxed{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c <, = \text{ অথবা } > 0 \text{ হবে।}}$

২৪.খ.৫ একটি সরলরেখা এবং একটি বৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয়গামী বৃত্তের সমীকরণ

মনেকরি, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ..... (1) (a_1, b_1 উভয়ে $\neq 0$ একটি সরলরেখা এবং $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ একটি বৃত্ত। এখন $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c + K(a_1x + b_1y + c_1) = 0$ —(3)



K-র সকল মানের জন্য বৃত্তের সমীকরণ এবং এটি (1) এবং (2)-এর ছেদবিন্দুদ্বয় (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) দ্বারা সিদ্ধ হয়। সুতরাং (3) সমীকরণ নির্ণেয় সকল বৃত্ত সমূহের সমীকরণ। কোন একটি শর্ত জানা থাকলে k-এর মান নির্ণয় করা যায় এবং (3) থেকে একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত পাওয়া যায়।

অনুরূপে, $K_1(x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c) + K_2(x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2) = 0$ —(1)

(যেখানে K_1, K_2 উভয়ে $\neq 0$ এবং $K_1 + K_2 \neq 0$)

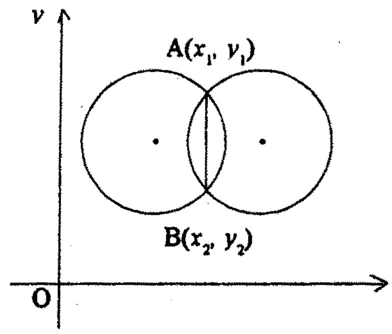
সমীকরণটি K_1 এবং K_2-র বিভিন্ন মানের জন্য

$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ —(2)

$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ —(3)

ছেদবিন্দুগামী সকল বৃত্তের সমীকরণ।

২৪.খ.৬ দুটি বৃত্তের সাধারণ জ্যার সমীকরণ



মনেকরি, AB,

$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ —(1)

এবং $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ —(2)

বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা।

যেহেতু A (x_1, y_1) উভয় বৃত্তের উপর একটি বিন্দু,

সুতরাং $x_1^2 + y_1^2 + 2g_1x_1 + 2f_1y_1 + c_1 = 0$

এবং $x_1^2 + y_1^2 + 2g_2x_1 + 2f_2y_1 + c_2 = 0$

বিয়োগ করে পাই $2(g_1 - g_2)x_1 + 2(f_1 - f_2)y_1 + c_1 - c_2 = 0$ ...... (3)

অনুরূপে B (x_2, y_2) উভয় বৃত্তের উপর বিন্দু,

$\therefore 2(g_1 - g_2)x_2 + 2(f_1 - f_2)y_2 + (c_1 - c_2) = 0$ –(4)

সুতরাং (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) উভয়েই

$2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + c_1 - c_2 = 0$ –(5) সমীকরণকে সিদ্ধ করে এবং এটি একটি সরলরেখার সমীকরণ। সুতরাং (5) নির্ণেয় জ্যার সমীকরণ।

২৪.খ.৭ উদাহরণমালা

উদা. 1. কেন্দ্র (–4, 5) এবং (1, 2) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : নির্ণেয় বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(1+4)^2+(2-5)^2} = \sqrt{34}$

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ হল

$$(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 34$$

বা, $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 7 = 0$

উদা. 2. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ বৃত্তটির সঙ্গে সমকেন্দ্রিক এবং (5, –2) বিন্দুগামী বৃত্ত নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্তের সমকেন্দ্রিক যে কোন বৃত্তের সমীকরণ হল—

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + k = 0$ যেহেতু এই বৃত্তটি (5, –2) বিন্দুগামী সুতরাং

$25 + 4 - 4.5 + 6.(-2) + k = 0$

বা, $k = 3$

অতএব, নির্ণেয় বৃত্ত হল $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$

উদা : 3. (5, 3) এবং (3, 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে ব্যাস ধরে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

নির্ণেয় বৃত্ত হল, $(x - 5)(x - 3) + (y - 3)(y - 1) = 0$

বা, $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 18 = 0$

উদা. 4. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি হল (0, 0), (3, 0) ও (0, 5) এই শীর্ষ বিন্দুগুলিগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

মনেকরি বৃত্তটির সমীকরণ

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

যেহেতু বৃত্তটি (0, 0), (3, 0), (0, 5) বিন্দুগামী

সুতরাং $c = 0$, $9 + 6g = 0$, $25 + 10f = 0$

$\therefore\ g = -\frac{9}{6} = \frac{-3}{2}$ এবং $f = -\frac{25}{10} = \frac{-5}{2}$

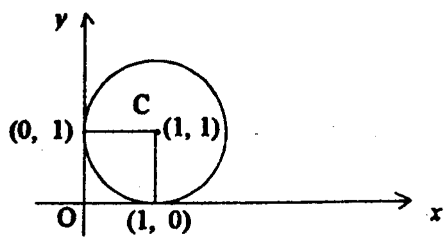
নির্ণেয় বৃত্ত হল $x^2 + y^2 - 3x - 5y = 0$

উদা. 5. অক্ষদ্বয়কে (1, 0) এবং (0, 1) বিন্দুতে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : বৃত্তটির কেন্দ্র (1, 1) এবং ব্যাসার্ধ = 1. (চিত্র) অতএব নির্ণেয় সমীকরণ হল

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1^2$$

বা, $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$



২৪.খ.৮ কণিক সেকশন বা শঙ্কুচ্ছেদ

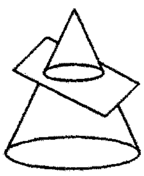
সমতল দ্বারা বৃত্তাকার শঙ্কুর বিভিন্ন প্রকার ছেদ্ (Section)-কে কণিক সেকশন বা শঙ্কুচ্ছেদ বলে। শঙ্কুর শীর্ষবিন্দুগামী সমতল দ্বারা ছেদ একজোড়া সরলরেখা নির্ণয় করে। সমতলটি শঙ্কুর ভূমির সমান্তরাল হলে ছেদটি একটি বৃত্ত নির্ণয় করে এবং সমতলটি ভূমির সমান্তরাল না থাকলে ছেদটি অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত বা পরাবৃত্ত উৎপন্ন করে (চিত্র – 17 দেখ)।

অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত ও পরাবৃত্ত এদের একটি সাধারণ ধর্ম আছে। প্রত্যেকটি বক্রই কোন সমতলে গতিশীল এরূপ একটি বিন্দুর সঞ্চারপথ যে, বিন্দুটির সর্ব অবস্থানে ঐ সমতলস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকেও কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা (নির্দিষ্ট বিন্দুগামী নয়) থেকে তার দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত সতত ধ্রুবক। ঐ স্থির বিন্দুকে কনিকটির নাভি (focus) এবং নির্দিষ্ট সরলরেখাটিকে কনিকটির নিয়ামক (directrix) বলে। ধ্রুবকটিকে উৎকেন্দ্রতা (Eccentricity) বলে এবং এটিকে 'e' দ্বারা সূচিত করা হয়।

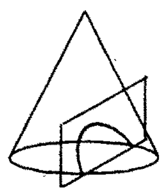
কণিকটি একটি অধিবৃত্ত (Parabola) যখন $e = 1$

কণিকটি একটি উপবৃত্ত (Ellipse) যখন $e < 1$

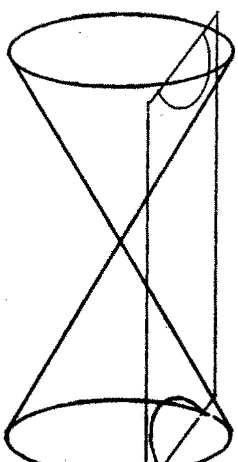
কণিকটি একটি পরাবৃত্ত (Hyperbola) যখন $e > 1$



চিত্র : 17(a) উপবৃত্ত।



চিত্র : 17(b) অধিবৃত্ত।

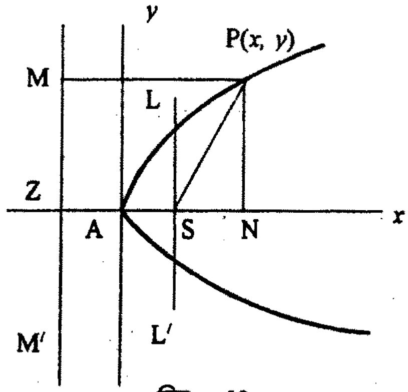


চিত্র : 17(c) পরাবৃত্ত।

২৪.খ.৯ অধিবৃত্ত (Parabola)

সমতলে অবস্থিত একটি বিন্দু যদি গতিশীল থাকে এবং ঐ সমতলের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে এবং কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা থেকে ঐ বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত সতত সমান হয় (e = 1) হয়, তবে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথকে অধিবৃত্ত (Parabola) বলে।

অধিবৃত্তের আদর্শ (Standard) সমীকরণ



চিত্র : 18

SP = PM এখন $SP=\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}$

এবং $PM=\dfrac{x+a}{\sqrt{1^2+0^2}}=x+a$ অর্থাৎ

$(x-a)^2+y^2=(x+a)^2$

বা, $x^2-2ax+y^2+a^2=x^2+2ax+a^2$

বা, $\boxed{y^2=4ax}$

এটিই অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ।

এখানে শীর্ষ (Vertex)-কে মূলবিন্দু এবং অধিবৃত্তের অক্ষকে x-অক্ষ ধরা হয়েছে।

সুতরাং

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তে

(a) শীর্ষের স্থানাঙ্ক A(0,0)

(b) নাভির স্থানাঙ্ক S(a,0)

(c) নিয়ামকের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক Z(–a, 0)

(d) অধিবৃত্তের অক্ষের সমীকরণ : y = 0 (x অক্ষ)

(e) শীর্ষবিন্দু A তে স্পর্শকের সমীকরণ : x = 0 (y অক্ষ)

(f) নিয়ামকের সমীকরণ : নিয়ামকটি y অক্ষের সমান্তরাল, তাই এর সমীকরণ হবে X = K (K একটি ধ্রুবক)।

∴ অধিবৃত্তটি Z(–a,0) বিন্দুগামী, তাই Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক X = K সমীকরণটি সিদ্ধ করে।

সুতরাং K = –a

∴ নিয়ামকের সমীকরণ : X = –a

বা $\boxed{X + a = 0}$

আবার লেখা যায়, নাভি থেকে নিয়ামকের দূরত্ব = 2a

(g) নাভি লম্বের দৈর্ঘ্য = 4a

২৪.খ.৯.১ অধিবৃত্তের কিছু ধর্ম

1) অধিবৃত্ত তার অক্ষরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। (কারণ প্রতি x-এর জন্য দুইটি সমান মানের বিপরীত চিহ্নযুক্ত y পাওয়া যায়)

2) $y^2 = 4ax$ থেকে পাই $y = \pm 2\sqrt{ax}$. সুতরাং x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে অধিবৃত্তের কোন বিন্দু নেই।

3) অধিবৃত্ত একটি অবদ্ধ (open) বক্র।

(কারণ অধিবৃত্তের অক্ষের সমান্তরাল কোন সরলরেখা হল $y = k$. সুতরাং $k^2 = 4ax$ থেকে x-এর মাত্র একটি মানই পাওয়া যায়)

২৪.খ.৯.২ নাভিলম্ব (Latus rectum)

চিত্রে LL', S বিন্দুতে অধিবৃত্তের অক্ষের উপর লম্ব LL' কে অধিবৃত্তের নাভিলম্ব বলে।
অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$ নাভির স্থানাঙ্ক $(a, 0)$. সুতরাং L-এর স্থানাঙ্ক (a, y)

$\therefore$ $SL^2 = 4a.a = 4a^2$. $\therefore$ $SL = 2a$

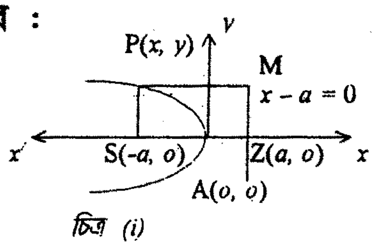
$\therefore$ $LSL' = 4a$.

২৪.খ.৯.৩ অধিবৃত্তের প্যারামেট্রিক সমীকরণ :

অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$. t -এর যে কোন মানের জন্য $x = at^2$ এবং $y = 2at$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। সুতরাং অধিবৃত্তটির প্যারামেট্রিক সমীকরণ হল $x = at^2$, $y = 2at$. অতএব অধিবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক একটিমাত্র চলরাশি t দ্বারা প্রকাশিত হতে পারে।

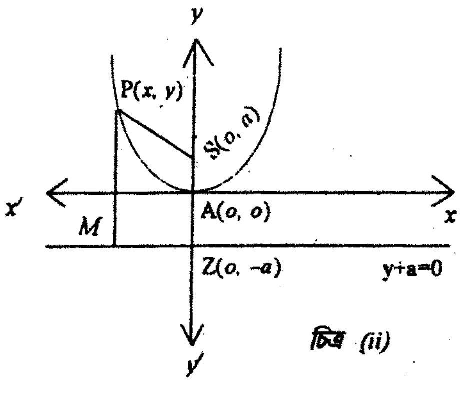
২৪.খ.৯.৪ অধিবৃত্তের সমীকরণের বিভিন্ন আকার :

চিত্র (i), এই ক্ষেত্রে অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = -4ax$.



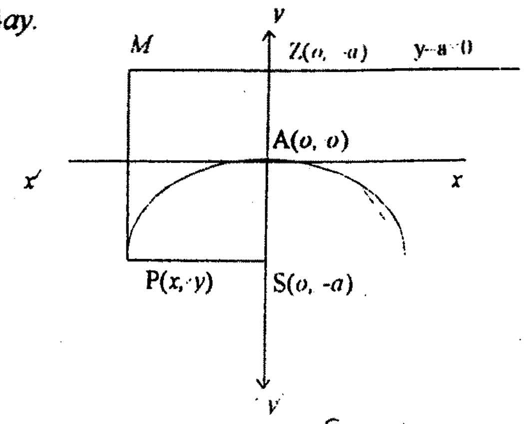
চিত্র (i)

চিত্র (ii), এই ক্ষেত্রে অধিবৃত্তের সমীকরণ $x^2 = 4ay$.



চিত্র (ii)

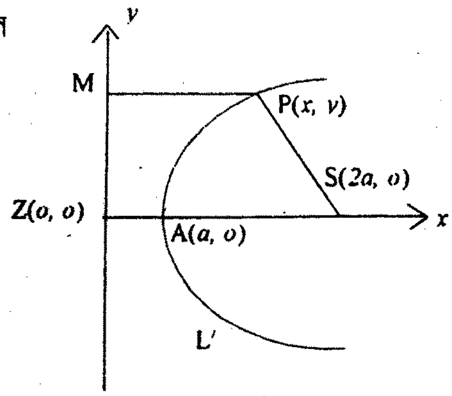
চিত্র-(iii) এই ক্ষেত্রে অধিবৃত্তের সমীকরণ $x^2 = -4ay$.



চিত্র (iii)

অধিবৃত্তের অক্ষকে x-অক্ষ এবং নিয়ামককে y-অক্ষ ধরলে

চিত্র-(iv) অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4a(x - a)$.



চিত্র (iv)

অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$ হলে মনে রাখতে হবে :

শীর্ষবিন্দু (Vertex) : (0, 0)

নাভি (Focus) : $(a, 0)$

নিয়ামকের সমীকরণ : $x + a = 0$.

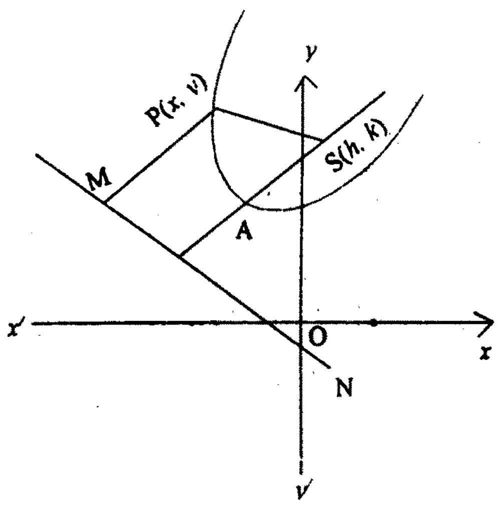
নাভিলম্ব (latus rectum)-র দৈর্ঘ্য $= 4a$.

২৪.খ.৯.৫ নাভির স্থানাঙ্ক ও নিয়ামকের সমীকরণ দেওয়া থাকলে অধিবৃত্তের সমীকরণ :

মনেকরি, নির্ণেয় অধিবৃত্তের নাভি S-এর স্থানাঙ্ক (h, k) এবং তার নিয়ামক MN সরলরেখার সমীকরণ হয় $ax + by + c = 0$.

অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

মনেকরি নির্ণেয় অধিবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু এবং P বিন্দু থেকে নিয়ামক MN-র উপর PM লম্ব টানা হয়েছে।



$\overline{SP} = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$ এবং

$\overline{PM} = \left|\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

যেহেতু, P-বিন্দু, অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত

সুতরাং $\overline{SP} = \overline{PM}$ বা $SP^2 = PM^2$

বা, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = \dfrac{(ax+by+c)}{a^2+b^2}$

বা, $(a^2+b^2)\{(x-h)^2+(y-k)^2\} = (ax+by+c)^2$

এটিই নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ।

অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ হবে—

i) $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$ [শীর্ষবিন্দু (α, β) জানা থাকলে]

বা, (ii) $x = Ay^2 + By + C$ [এই সমীকরণ-কে প্রয়োজনে (i)-এর আকারে প্রকাশ করে নেওয়া হয়]

অধিবৃত্তের অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ হবে—

(i) $(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$ [শীর্ষবিন্দু (α, β) জানা থাকলে]

বা, (ii) $y = Ax^2 + Bx + C$ [এই সমীকরণ-কে প্রয়োজনে (i) -এর আকারে প্রকাশ করা যায়]

২৪.খ.১০ উদাহরণমালা

উদা. 1. নিম্নলিখিত অধিবৃত্তগুলির নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য ও নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন :

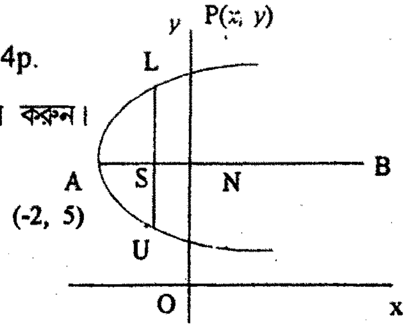
(i) $3y^2 = 4x$ (ii) $x^2 = 3y$ (iii) $x^2 = -4py$

(i) এখানে, $y^2 = \frac{4}{3}x$, অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $y^2 = 4ax$.

$\therefore\ a = \frac{1}{3}$. নাভির স্থানাঙ্ক $(\frac{1}{3}, 0)$ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $4.a = \frac{4}{3}$.

(ii) $x^2 = 4by$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই,

$$b = \frac{3}{4} \text{ নাভির স্থানাঙ্ক } \left(0, \frac{3}{4}\right) \text{ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য } 4b = 3.$$



(iii) এখানে নাভির স্থানাঙ্ক (0, –P) এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 4p.

উদা. 2. উদা.1.-এর অধিবৃত্তগুলির নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

(i) আদর্শ সমীকরণে নিয়ামকের সমীকরণ $x + a = 0$.

এখানে $a = \frac{1}{3}$. সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ $x + \frac{1}{3} = 0$

বা, $3x + 1 = 0$.

(ii) নিয়ামকের সমীকরণ $y + b = 0$. এখানে $b = \frac{3}{4}$

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ $y+\frac{3}{4}=0$ বা $4y+3=0$.

(iii) নিয়ামকের সমীকরণ $y-b=0$. এখানে $y-p=0$.

উদা. 3. নিম্নলিখিত অধিবৃত্তগুলির অক্ষ, শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক, নাভির স্থানাঙ্ক, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, নিয়ামকের সমীকরণ এবং নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

(i) $(y-5)^2=3(x+2)$ (ii) $4(x-2)^2=-5(y+3)$ (iii) $y^2=6(x+y)$ (iv) $x^2-6x-8y-7$.

সমাধান : 1. $(y-5)^2=3(x+2)$

এই সমীকরণটিকে $(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$-এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $\beta=5$ এবং $\alpha=-2$ ও $4a=3$

বা, $a=\frac{3}{4}$

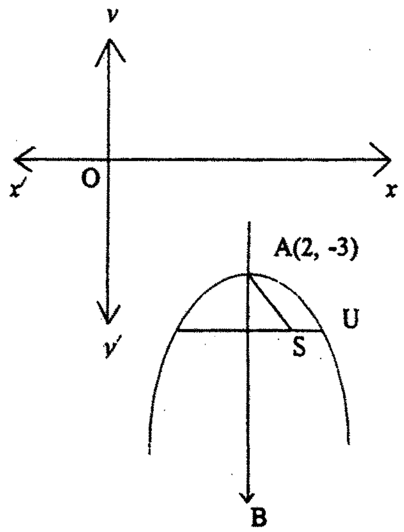
$\therefore$ প্রদত্ত অধিবৃত্তের অক্ষ ধনাত্মক x-অক্ষের সমান্তরাল, এবং এর সমীকরণ হবে $y=5$ বা $y-5=0$

শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2, 5)$; নাভির স্থানাঙ্ক $\left(\frac{-5}{4}, 5\right)$, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=3$ একক।

নিয়ামকের সমীকরণ $x+2+\frac{3}{4}=0$ বা $4x+11=0$

নাভিলম্বের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{-5}{4}, \frac{13}{2}\right)$ এবং $\left(\frac{-5}{4}, \frac{7}{2}\right)$

$Y^2=4ax,\ x=x+2,\ y=y-5$



নাভি $X=a,\ Y=0,\ \therefore\ x=\frac{3}{4}-2=\frac{-5}{4}$

$y=5\ \therefore$ নাভি $\left(\frac{-5}{4}, 5\right)$ নিয়ামক $x+a=0$

$x+2+\frac{3}{4}=0,\ x=-\frac{11}{4}$

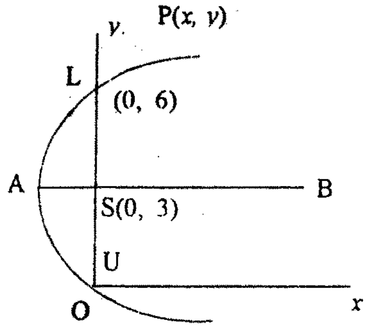
নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দু $(a, 2a)$, $(a, -2a)$

$X=a\ \therefore\ x=\frac{3}{4}-2,\ Y=2a,\ y=\frac{3}{2}+5=\frac{13}{2}$

$Y = -2a,\ y = \frac{-3}{2} + 5$

(ii) $4(x - 2)^2 = -5(y + 3)$

বা, $(x-2)^2 = -\frac{5}{4}(y+3)$



এই সমীকরণটিকে $(x - \alpha)^2 = -4a(y - \beta)$-এই সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই।

শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, −3) এবং অক্ষ, ঋণাত্মক y-অক্ষের সমান্তরাল এবং এর সমীকরণ হবে $x = 2$ বা,

$x - 2 = 0;\ 4a = \frac{-5}{4}\ \therefore\ a = \frac{-5}{16}$

নাভির স্থানাঙ্ক হবে $\left(2, \frac{-53}{16}\right)$

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{5}{4}$ একক।

নিয়ামকের সমীকরণ $16y + 43 = 0\ \left[y + 3 = \frac{5}{16}\right]$

নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{11}{8}, \frac{-53}{16}\right)$ ও $\left(\frac{21}{8}, \frac{-53}{16}\right)$

$x^2 = 4ay,\ x = x - 2,\ y = y + 3$

নাভি $= (0,\ a),\ x = 2,\ y = \frac{-5}{16} - 3 = \frac{-53}{16}$

নিয়ামক $y = a,\ y + 3 = \frac{-5}{16},\ y = \frac{-43}{16}$

$X = 2a,\ Y = a,\ x - 2 = \frac{-5}{8}\ \therefore\ x = \frac{11}{8}$

$y + 3 = -\frac{5}{16}$

(iii) $y^2 = 6(x + y)$ or, $y^2 - 6y = 6x$

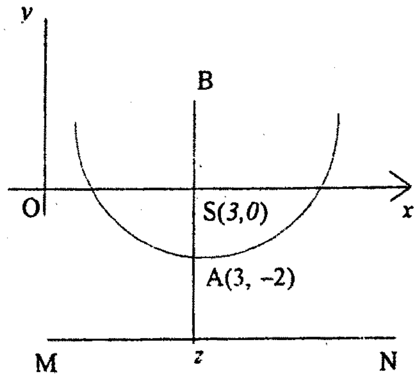
or, $y^2 - 6y + 9 = 6x + 9$

or, $(y - 3)^2 = 6\left(x + \frac{3}{2}\right)$ .... (1)

এই সমীকরণটিকে $Y^2 = 4ax$ আকারে পরিবর্তনের জন্য

মনেকরি, $x + \frac{3}{2} = X$ বা, $x = X - \frac{3}{2}$

এবং $y - 3 = Y$ বা, $y = Y + 3$.



$\therefore$ (1) সমীকরণটি হয় $Y^2 = 6x$ .... (2)

এবং এর অক্ষ হয় x-অক্ষ। সুতরাং (1)-এর অক্ষ হয় x-অক্ষের সমান্তরাল। (2)-এর শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $X = 0,\ Y = 0$

$\therefore$ (1) অধিবৃত্তের শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{-3}{2}, 3\right)$ $\left[x + \frac{3}{2} = 0\right.$ বা, $x = \frac{-3}{2}$ এবং $\left.y = 3\right]$

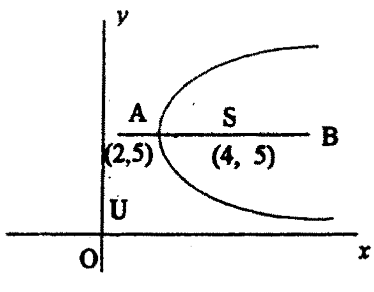
নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a = 6$ একক।

$\therefore$ $4a = 6$ বা $a = \frac{3}{2}$

$\therefore$ (2)-এর নাভির স্থানাঙ্ক $x = a = \frac{3}{2}$ এবং $Y = 0$

$\therefore$ (1)-এর নাভির স্থানাঙ্ক $x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$ এবং $y = 3$

অর্থাৎ (0, 3),



(2)-এর নিয়ামকের সমীকরণ $X + a = 0$ বা $x + \frac{3}{2} = 0$

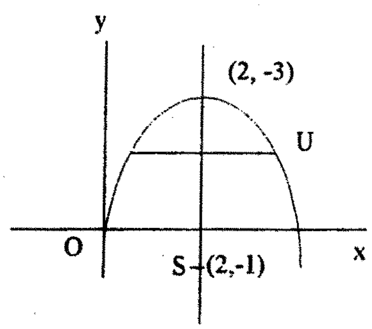
$\therefore$ (1) এর „ „ $x = \frac{-3}{2} - \frac{3}{2} = -3$

বা $x + 3 = 0$

(2)-এর নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(a, \pm 2a)$

অর্থাৎ $X = a = \frac{3}{2}$ এবং $Y = \pm 2.\frac{3}{2}$ বা $Y = \pm 3$

$\therefore$ (1)-এর নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হবে, (0, 6) এবং (0, 0),



[দ্রষ্টব্য (i) অঙ্কটির সমাধান (iii)-এর পদ্ধতিতে করা যায় এবং (iii) অঙ্কটির সমাধান (i)-এর পদ্ধতিতে করা যায়।]

(iv) $x^2 - 6x + 8y = 7$

বা, $x^2 - 6x + 9 = 8y + 7 + 9$

বা, $(x - 3)^2 = 8(y + 2)$. —(1)

মনেকরি, $x - 3 = X$ বা $x = X + 3$

এবং $y + 2 = Y$ বা $y = Y - 2$.

$\therefore$ (1) সমীকরণটি হয় $X^2 = 8Y$ —(2)

(1)-এর বা (2)-এর নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a = 8$ একক।

$\therefore$ $a = 2$.

(2)-এর অক্ষ y অক্ষ।

$\therefore$ (1)-এর অক্ষ y, x-অক্ষের সমান্তরাল।

(2)-এর শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $X = 0$, $Y = 0$

$\therefore$ (1) এর শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $x = 3$, $y = -2$

বা, (3, –2).

(2)-এর নাভির স্থানাঙ্ক $X = 0$ ও $Y = a = 2$

$\therefore$ (1)-এর নাভির স্থানাঙ্ক $x = 0 + 3 = 3$ ও $y = 2 - 2 = 0$ বা (3, 0)

(2)-এর নিয়ামকের সমীকরণ $Y = -a$ বা, $Y + 2 = 0$.

$\therefore$ (1) এর নিয়ামকের সমীকরণ $y = -4$ বা $y + 4 = 0$.

(2)-এর নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm 2a, a)$

অর্থাৎ $x = \pm 2a = \pm 4$ এবং $Y = a = 2$

(1)-এর নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $x = 7, -1$ এবং $y = 0$.

অর্থাৎ (7, 0) এবং (–1, 0)

[দ্রষ্টব্য (ii) নং অঙ্কের সমাধান এই পদ্ধতিতে করা যায় এবং (iv) নং অঙ্কের সমাধান (ii) নং অঙ্কের পদ্ধতিতে করা যায়।

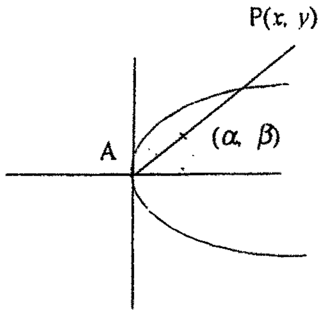
উদা. 4. i) একটি অধিবৃত্তের শীর্ষ ও নাভির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, 5) ও (4, 5) ; এর সমীকরণ নির্ণয় করুন।

ii) একটি অধিবৃত্তের শীর্ষ ও নভির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, 3) ও (2, –1) হলে দেখান যে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ হয় $x^2 - 4x + 16y = 44$.

সমাধান i) নির্ণেয় অধিবৃত্তের শীর্ষ ও নাভির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, 5) ও (4, 5), এখানে শীর্ষ ও নাভি উভয়েরই কোটি সমান। সুতরাং অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল।

আবার 9 = অধিবৃত্তের শীর্ষ থেকে নাভির দূরত্ব।

= নাভির ভুজ – শীর্ষের ভুজ $= 4 - 2 = 2$



∴ নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ হবে,

$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ বা $(y - 5)^2 = 4.2(x - 2)$

বা $(y - 5)^2 = 8(x - 2)$.

(ii) নির্ণেয় অধিবৃত্তের শীর্ষ ও নাভির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, 3) ও (2, –1). এখানে শীর্ষ ও নাভি উভয়েরই ভুজ সমান।

∴ অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল।

আবার a = অধিবৃত্তের শীর্ষ থেকে নাভির দূরত্ব

= নাভির কোটি – শীর্ষের কোটি

$= AS = (-1) - 3 = -4$.

∴ নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ হবে $(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$

বা, $(x - 2)^2 = 4.(-4)(y - 3)$

বা, $(x - 2)^2 = -16(y - 3)$

বা, $x^2 - 4x + 16y = 44$ প্রমাণিত।

উদা. 5. $y^2 = 20x$ অধিবৃত্তের উপর যে বিন্দুর কোটি ভুজের দ্বিগুণ তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

মনেকরি, (α, β) $y^2 = 20x$ অধিবৃত্তের উপর একটি বিন্দু।

প্রশ্নানুযায়ী, $\beta = 2\alpha$

এখন যেহেতু $(\alpha, 2\alpha)$ বিন্দুটি $y^2 = 20x$-এর উপর অবস্থিত,

সুতরাং $(2\alpha)^2 = 20.\alpha$

বা $4\alpha^2 - 20\alpha = 0$ বা $\alpha^2 - 5\alpha = 0$ বা $\alpha(\alpha - 5) = 0$

বা $\alpha = 0$ বা 5

$\alpha = 0$ হলে, $2\alpha = 0$ কিন্তু (0, 0) বিন্দুটি মূলবিন্দু।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক (5, 10).

উদা. 6. একটি অধিবৃত্তের নাভি (3, 0) এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x = -3$. অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

এখানে S-এর স্থানাঙ্ক (3, 0), মনে করি, $P(x, y)$ অধিবৃত্তের উপর যে কোন একটি বিন্দু।

$\therefore$ $SP^2 = (x-3)^2 + (y-0)^2$. PM নিয়ামকের উপর লম্ব হলে $PM^2 = (x+3)^2$.

সংজ্ঞা অনুসারে, SP = PM. অর্থাৎ

$(x-3)^2 + y^2 = (x+3)^2$

বা, $x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + 6x + 9$

বা, $y^2 = 12x$.

উদা. 7. একটি অধিবৃত্তের নাভি (1, 1) এবং নিয়ামক $y = -3$. অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

এখানে নাভি S(1, 1), মনেকরি $P(x, y)$ অধিবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু।

$\therefore$ $SP^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$. **PM যদি নিয়ামকের উপর লম্ব হয় তবে** $PM^2 = (y+3)^2$

$SP^2 = PM^2$ **থেকে পাই,**

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (y+3)^2$ বা, $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 6y + 9$

বা, $x^2 - 2x - 8y - 7 = 0$

বা, $(x-1)^2 = 8(y+1)$

উদা. 8. $y^2 - 4x - 4y = 0$ **অধিবৃত্তটির অক্ষ, শীর্ষ এবং নিয়ামক নির্ণয় করুন।**

$y^2 - 4x - 4y = 0$

বা, $(y-2)^2 = 4(x+1)$. বা $Y^2 = 4X$ —(1)

এখানে $Y = y - 2$ এবং $X = x + 1$.

(1) থেকে পাই, অক্ষের সমীকরণ $Y = 0$ বা, $y - 2 = 0$

শীর্ষ $X = 0$, $Y = 0$ বা $x + 1 = 0$, $y - 2 = 0$

বা, $x = -1$, $y = 2$. অর্থাৎ শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(-1,\ 2)$.

নিয়ামকের সমীকরণ

$X + 1 = 0$ বা $x + 1 + 1 = 0$

বা, $x + 2 = 0$.

উদা. 9. প্রমাণ করুন যে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুগামী জ্যা সমূহের মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ $y^2 = 2ax$.

শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0), মনেকরি, $P(x_1,\ y_1)$ অধিবৃত্তের একটি বিন্দু। PA একটি শীর্ষবিন্দুগামী জ্যা। যার মধ্যবিন্দু মনেকরি $(\alpha,\ \beta)$.

সুতরাং $\alpha = \dfrac{x_1 + 0}{2}$ এবং $\beta = \dfrac{y_1 + 0}{2}$ বা, $x_1 = 2\alpha$ এবং $y_1 = 2\beta$ এখন $(x_1,\ y_1)$, $y^2 = 4ax$ -এর উপর একটি বিন্দু। অতএব, $y_1{}^2 = 4ax_1$, বা $4\beta^2 = 4a.2\alpha$. বা $\beta^2 = 2a\alpha$. সুতরাং $(\alpha,\ \beta)$-র সঞ্চারপথ $y^2 = 2ax$.

উদা. 10. একটি ব্যবসায়ী প্রতিষ্ঠানের মাসিক x টন পণ্য উৎপাদনের গড় পরিবর্তনশীল ব্যয় (y টাকা) হলে $\left(\dfrac{1}{10}x^2 - 3x + 62\cdot5\right)$ টাকা, প্রমাণ করুন যে, গড় পরিবর্তনশীল রেখাটি একটি অধিবৃত্ত। অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দুতে উৎপাদনের পরিমাণ ও গড় পরিবর্তনশীল ব্যয় নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রশ্নানুযায়ী, $y = \dfrac{1}{10}x^2 - 3x + 62.5$ .... (1)

বা, $10y = x^2 - 30x + 625$

বা, $x^2 - 30x + 225 = 10y - 400$

বা, $(x-15)^2 = 10(y-40)$ ....(2)

এখন ধরি, $x - 15 = X$ বা, $x = X + 15$

এবং $y - 40 = Y$ বা, $y = Y + 40$

এবং $4a = 10$ বা, $a = \dfrac{5}{2}$.

$\therefore$ (2) সমীকরণটিকে লেখা যায় $X^2 = 10Y$ ($X^2 = 4aY$ আকার)

এটি একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

$\therefore$ গড় পরিবর্তনশীল রেখাটি একটি অধিবৃত্ত।

অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু হবে $X = 0,\ Y = 0$

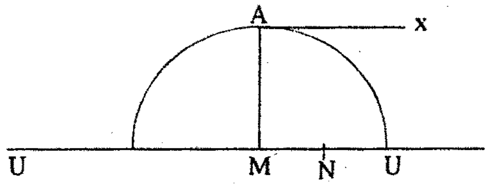
বা, $x = 15,\ y = 40$ [$\because x = X + 15$ এবং $y = Y + 40$]

$\therefore$ অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দুতে উৎপাদনের পরিমাণ $= x$ টন $= 15$ টন এবং গড় পরিবর্তনশীল ব্যয়ের পরিমাণ $= y$ টাকা $= 40$ টাকা।

উদা. 11. একটি কোম্পানীর উৎপাদিত দ্রব্যের চাহিদা হয় $p = 50 - \frac{x}{2}$, যেখানে p হল দ্রব্যের দাম ও x হল দ্রব্যের পরিমাণ। দেখান যে, মোট আয় (রেভিনিউ) রেখাটি হয় একটি অধিবৃত্ত। এই অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুতে দ্রব্যটির দাম ও পরিমাণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করি, y টাকা আয় (রেভিনিউ) হয়, x একক দ্রব্যের জন্য।

$\therefore\ y = px = \left(50 - \frac{x}{2}\right)x$



AM=10 CD=100
MN=20 - PN ??

বা, $y = 50x - \frac{x^2}{2}$

বা, $x^2 - 100x = -2y$ বা, $(x - 50)^2 = -2(y - 1250)$ —(1)

মনেকরি, $x - 50 = X$ এবং $y - 1250 = Y$

$\therefore$ (1) সমীকরণটি হয় $X^2 = -2Y$ ($X^2 = -4aY$ আকারের)

এটি একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ। এর শীর্ষবিন্দু $X = 0,\ Y = 0.$

$\therefore$ (2)-এর শীর্ষবিন্দু (50, 1250) $\therefore$ শীর্ষ বিন্দুতে দ্রব্যটির দাম $= p = 50 - \frac{50}{2} = 25$ টাকা

এবং দ্রব্যের পরিমাণ $= 50$ একক।

২৪.খ.১১ অনুশীলনী

[ক]

1. বৃত্তটি নির্ণয় করুন যার কেন্দ্র (2, 3) এবং ব্যাসার্ধ 5. [$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$]

2. নিম্নলিখিত বৃত্তগুলির কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

(*i*) $2x^2 + 2y^2 = 3\left[(0,\ 0,)\ \sqrt{3/2}\right]$

(*ii*) $x^2 + y^2 = k(x+k)\left[(k/2,\ 0,)\ \sqrt{5}\frac{k}{2}\right]$

3. (2, 1), (0, 5) এবং (–1, 2) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন। [$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$]

4. কেন্দ্র (2, 3) এবং (5, 7) বিন্দুগামী বৃত্ত নির্ণয় করুন। [$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$]

5. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 এবং তা উভয় অক্ষকে স্পর্শ করেছে। তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

[$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$]

6. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $3x + 4y = 7$ সরলরেখার উপর অবস্থিত এবং বৃত্তটি (1, –2) এবং (4, –3) বিন্দুদ্বয়গামী। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন। [$15x^2 + 15y^2 + 18y - 94x + 55 = 0$]

7. একটি বৃত্তের কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং বৃত্তটি মূলবিন্দু এবং (a, b) বিন্দুগামী। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন। [$b(x^2 + y^2) - (a^2 + b^2)y = 0$]

8. (7, –5) এবং (–3, 9) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় করুন। [$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 66 = 0$]

9. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 1 = 0$ বৃত্তের সঙ্গে সমকেন্দ্রিক এবং (5, 7) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন। [$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$]

10. মূল বিন্দুগামী যে বৃত্ত অক্ষদ্বয় থেকে 5 এবং 7 দৈর্ঘ্যের জ্যা ছেদ করে তার সমীকরণ নির্ণয় করুন। [$x^2 + y^2 - 5x - 7y = 0$]

11. (i) (–3, –4) (ii) (–4, 4), (iii) (5, 7) বিন্দু তিনটির $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$ বৃত্তের সাপেক্ষে অবস্থান নির্ণয় করুন। [i) বৃত্তের উপর অবস্থিত,

ii) বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত,

iii) বৃত্তের বাইরে অবস্থিত]

12. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং যা (0, 3) ও (4, 1) বিন্দুগামী। [$x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$]

13. যদি $x^2 + y^2 + 2ax + c^2 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 2by + c^2 = 0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পর স্পর্শ করে তবে দেখান যে, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$

14. $3x + y = 5$ সরলরেখা ও $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের ছেদবিন্দু ও ছেদিত জ্যার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

[(0, 5), (3, –4), $3\sqrt{10}$ একক]

[খ]

1. (i) নাভি (2, 0) এবং নিয়ামক $x = 0$, অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন। [$y^2 = 4(x - 1)$]

(ii) অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার নাভি (2, 1) এবং নিয়ামক $2x + y + 1 = 0$

[$x^2 - 4xy + 4y^2 - 24x - 12y + 24 = 0$]

(iii) নাভি (4, 0) এবং নিয়ামক $x = -4$.

[$y^2 = 16x$]

2. $x^2 - 2ax + 2ay - 0$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু লাভিলম্ব, নিয়ামক এবং নাভি নির্ণয় করুন।

$[a, {}^{a}/_{2}; 2a ; y = a; (a, 0)]$.

3. প্রমাণ কর যে, $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুগামী জ্যা সমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ $y^2 = 2ax$.

4. $y^2 = 8x$ অধিবৃত্তটির জ্যা নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু (3, 2). $[2x - y = 4]$

5. একটি অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু ও নাভি x-অক্ষের উপর মূল বিন্দু থেকে যথাক্রমে a ও a' দূরত্বে অবস্থিত। প্রমাণ করুন যে অধিবৃত্তটির সমীকরণ $y^2 = 4(a' - a)(x - a)$.

6. নীচের প্রত্যেকটি অধিবৃত্তের অক্ষ, শীর্ষ নাভি, নাভি ম্বের দৈর্ঘ্য, নিয়ামকের সমীকরণ ও নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

(i) $y^2 = -12x$, (ii) $3x^2 + 8y = 0$, (iii) $y^2 - 8x - 2y + 25 = 0$, (iv) $y = lx^2 + mn + n$ $(l \neq 0)$

Ans. (i) অক্ষ $\rightarrow x$ অক্ষ; শীর্ষ $\rightarrow (0, 0)$; নাভি $\rightarrow (-3, 0)$; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= 12$ একক; নিয়ামকের সমীকরণ $\rightarrow x - 3 = 0$ [নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় $(-3, \pm 6)$।]

(ii) অক্ষ $\rightarrow y$ অক্ষ; শীর্ষ $\rightarrow (0,0)$; নাভি $(0, -\frac{2}{3})$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{8}{3}$ একক; নিয়ামকের সমীকরণ $\Rightarrow 3y - 2 = 0$ নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় $\left(\pm\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

(iii) অক্ষ $\rightarrow x$—অক্ষের সমান্তরাল; শীর্ষ $\rightarrow (3, 1)$; নাভি $\rightarrow (5, 1)$; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= 8$ একক; নিয়ামকের সমীকরণ $x - 1 = 0$; নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় $(5, 5)$ ও $(5, -3)$

(iv) অক্ষ $\rightarrow y$-অক্ষের সমান্তরাল, শীর্ষবিন্দু $\rightarrow \left(-\frac{m}{2l}, \frac{4ln - m^2}{4l}\right)$ নাভি $\rightarrow \left(-\frac{m}{2l}, \frac{4ln - m^2}{4l} + \frac{1}{4l}\right)$

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{1}{l}$ একক; নিয়ামক $\rightarrow y + \frac{1}{4l} = \frac{4ln - m^2}{4l}$

7. এমন একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং যা (0, 0), (8, 2) ও (–4, –1) বিন্দুগামী।

[**সংকেত** : মনেকরি, অধিবৃত্তের সমীকরণ $x = Ay^2 + By + C$ —— (1)

$\therefore 0 = 0 + 0 + C$ বা $C = 0$ —(2)

$8 = 4A + 2B + C$ বা, $4A + 2B = 8$ বা $B + 2A = 4$——(3)

এবং $-4 = A - B + C$ বা $A - B = -4$ —(4)

(3) ও (4) সমাধান করে, A ও B-র মান বার করে (1) নং সমীকরণে বসিয়ে দিলে, নির্ণেয় সমীকরণ পাওয়া যাবে।

8. যদি $x^2 = 4py$ অধিবৃত্তটি $2(x^2 + y^2) - 16x + 8y - 10 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্রগামী হয়, তবে অধিবৃত্তটির উপর অবস্থিত এমন একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন যার নাভি দূরত্ব 12 একক।

[সংকেত : প্রদত্ত বৃত্তটির কেন্দ্র (4,–2)

$x^2 = 4py$ বৃত্তটির কেন্দ্রগামী। $\therefore\ 16 = 8p$ বা $p = 2$.

$\therefore$ অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক (0, 2) এবং অধিবৃত্তের সমীকরণ হয় $x^2 = 8y$.

মনেকরি, অধিবৃত্তের উপর যে কোন একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(h,\ k)$

$\therefore$ $(h,\ k)$ থেকে নাভির দূরত্ব $= \sqrt{(h-0)^2 + (k-2)^2}$

প্রশ্নানুযায়ী, $\sqrt{h^2 + (k-2)^2} = 12$

বা $h^2 + k^2 - 4k + 4 = 144$

বা, $8k + k^2 - 4k + 140 = 0$ [$\because$ $(h,\ k)$, $x^2 = 8y$-র উপর অবস্থিত $\therefore\ h^2 = 8k$]

বা, $k^2 + 4k - 140 = 0$

বা, $(k + 14)(k - 10) = 0$

এখানে, $k \neq\ 14$ ($\because$ অধিবৃত্তের অক্ষ ধনাত্মক y-অক্ষ)

$\therefore\ k = 10$ $\qquad\qquad$ $\therefore\ h = \pm 4\sqrt{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(\pm 4\sqrt{5}, 10)$

9. একটি অধিবৃত্তের অক্ষ, y-অক্ষের সমান্তরাল এবং উহা (0, 0), (2, 2) এবং (–2, –6) বিন্দুগামী। অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

10. একটি রেলসেতুর বেষ্টনকারী বস্তুটি একটি অধিবৃত্ত বেষ্টনকারী বস্তুটির খিলানের দুই পিলার (two ends) পাদদেশ থেকে 10 ফুট উচ্চে উচ্চতম বিন্দুটিই তার শীর্ষবিন্দু। খিলানের দুই পিলপার মধ্যবর্তী দূরত্ব 100 ফুট হলে মধ্যবিন্দু থেকে 20 ফুট দূরে তার উচ্চতা নির্ধারণ করুন।

11. একটি সামগ্রী মাসে x টন উৎপাদন করতে কোন প্রতিষ্ঠানের গড় পরিবর্তনশীল ব্যয় (y টাকা) হল $\left(\frac{1}{10}x^2 - 3x + 50\right)$ টাকা। দেখাও যে, গড় পরিবর্তনশীল ব্যয়রেখাটি একটি অধিবৃত্ত। তার শীর্ষবিন্দুতে উৎপাদন ও পরিবর্তনশীল ব্যয় নির্ণয় করুন।

12. একটি অধিবৃত্তের নাভি (3, 4) বিন্দুতে এবং তার নিয়ামকের সমীকরণ $3x + 4y + 25 = 0$, অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

13. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের নাভিগামী কোন জ্যা-এর প্রান্ত-বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at^2, 2at)$ হলে দেখান যে, ঐ জ্যার অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{t^2}, \frac{-2a}{t}\right)$.

একক ২৪. গ. ❑ উপবৃত্ত এবং পরাবৃত্ত

গঠন

২৪.গ.০ উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন।

- উপবৃত্তের সমীকরণ
- ইহার নাভি, নিয়ামক
- নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবেন।

২৪.গ.১ উপবৃত্ত (Ellipse)

সমতলে অবস্থিত কোন গতিশীল বিন্দু যদি এরূপে গতিশীল থাকে যে সমতলের কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে এর দূরত্ব এবং সমতলে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা (যা ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুগামী নয়) থেকে দূরত্বের অনুপাত সতত ধ্রুবক এবং 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয় ($e < 1$) তবে ঐ গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথকে উপবৃত্ত বলে। নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে নাভি (Focus) এবং নির্দিষ্ট সরলরেখাটিকে নিয়ামক (Directrix), e কে উৎকেন্দ্রতা বলে।

মনেকরি, S নাভি, (চিত্র -18) MZ নিয়ামক এবং e উৎকেন্দ্রতা। SZ, MZ -এর উপর লম্ব। SZ -এর উপর A এবং A' এরূপ দুইটি বিন্দু যাতে $SA = eAZ$ — (1) এবং $SA' = eA'Z$ হয় — (2) উপবৃত্তের সংজ্ঞানুযায়ী, A এবং A' উপবৃত্তের উপর দুটি বিন্দু। মনেকরি, C, AA' -এর মধ্যবিন্দু। (1) এবং (2) যোগ করে পাই $SA + SA' = e(AZ + A'Z)$

বা, $AA' = e[(CZ - CA) + (CZ + CA')]$

বা, $2CA = 2e.CZ$ যেহেতু $CA = CA'$. সুতরাং $CA = e.CZ$

(2) থেকে (1) বিয়োগ করে পাই $SA' - SA = e(A'Z - AZ)$

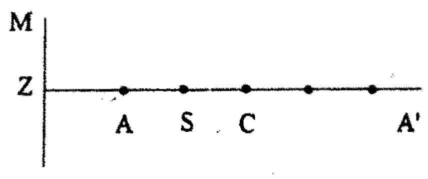
বা, $(CS + CA') - (CA - CS) = e\,AA'$

বা, $2CS = 2eCA$

$\therefore \boxed{CS = e\,CA}$

যদি $AA' = 2a$ হয় তবে $\boxed{CZ = \frac{a}{e}}$

এবং $\boxed{CS = ae}$

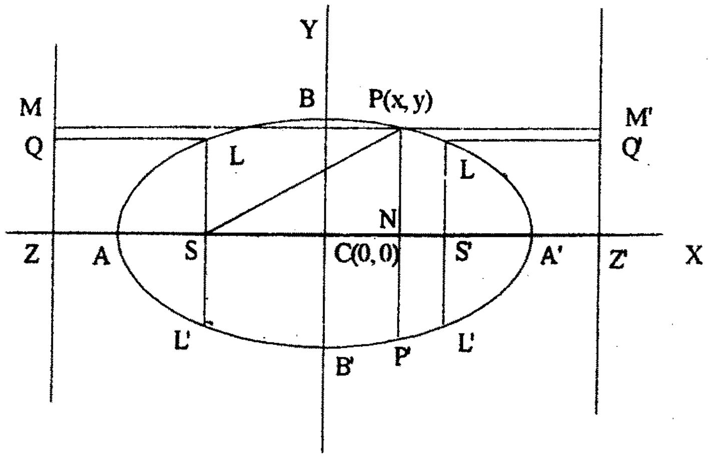


চিত্র ঃ 18

A, A' কে উপবৃত্তের শীর্ষ বিন্দু এবং C কে কেন্দ্র বলে। AA' কে উপবৃত্তটির পরাক্ষ (Major axis) বলা হয়।

২৪.গ.২ উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

মনেকরি, উপবৃত্তের কেন্দ্র C, A, A' শীর্ষবিন্দু এবং S নাভি (চিত্র-19)। মনেকরি, MZ নিয়ামক এবং MZ-এর উপর লম্ব এবং S বিন্দুগামী সরলরেখা x-অক্ষ। C-কে মূলবিন্দু এবং Cx-এর উপর লম্ব Cy কে y অক্ষ ধরা হল।



চিত্র ঃ 19

এখন S, A এবং Z এর স্থানাঙ্ক হল যথাক্রমে $(-ae, 0)$, $(-a, 0)$ এবং $\left(\frac{-a}{e}, 0\right)$. মনেকরি, উপবৃত্তের উপর P(x, y) যে কোন একটি বিন্দু। সংজ্ঞা থেকে পাই $SP = ePM$.

বা, $SP^2 = e^2\ PM^2$

বা, $(x + ae)^2 + y^2 = e^2\left(x+\frac{a}{e}\right)^2$

বা, $x^2\ (1 - e^2) + y^2 = a^2\ (1 - e^2)$

বা, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$

$\boxed{a^2\ (1 - e^2) = b^2}$ **ধরে পাই** $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$

এটিই উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ।

$\boxed{b^2 = a^2\ (1 - e^2)}$ **থেকে পাই** $\boxed{e^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}$

যেহেতু $e < 1$, সুতরাং $b < a$. y -অক্ষ উপবৃত্তকে B (0, b) এবং B'(0, –b) বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে। B'B কে উপবৃত্তের উপাক্ষ (Minor axis) বলে। $BB' = 2b$.

২৪.গ.২.১ দ্বিতীয় নাভি এবং দ্বিতীয় নিয়ামক

মনেকরি, S', CA'-এর উপর এমন একটি বিন্দু যে $CS = CS' = ae$ এবং Z' এমন একটি বিন্দু যে $CZ' = a/e$. মনেকরি, M'Z' এর সমীকরণ $x = a/e$ এবং PM', M'Z' -এর উপর লম্ব টানা হল।

এখন $S'P^2 = e^2PM'^2$ থেকে পাই,

$$(x-ae)^2+y^2=e^2\left(\frac{a}{e}-x\right)^2$$

বা, $x^2\ (1 - e^2) + y^2 = a^2\ (1 - e^2)$

বা, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $[b^2 = a^2\ (1 - e^2)]$

এটি উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ। সুতরাং S' দ্বিতীয় নাভি এবং M'Z' দ্বিতীয় নিয়ামক। দ্বিতীয় নাভি S'-এর স্থানাঙ্ক $(ae,\ 0)$ এবং দ্বিতীয় নিয়ামক M'Z'-এর সমীকরণ : $x=\frac{a}{e}$

২৪.গ.২.২ নাভিদ্বয় থেকে একটি বিন্দুর দূরত্ব

মনেকরি, $P(x, y_1)$ উপবৃত্তের উপর একটি বিন্দু। আমরা জানি, $SP = ePM$, $S'P = ePM'$

$\therefore\ SP + S'P = e\ (PM + PM')$ এখন $PM = x_1 + a/e$ এবং $PM' = a/e - x_1$

সুতরাং $\boxed{SP+S'P=e.\frac{2a}{e}=2a}$ সুতরাং $SP + S'P =$ পরাক্ষের দৈর্ঘ্য।

২৪.গ.২.৩ নাভিলম্বের (Latus rectum) দৈর্ঘ্য

উপরের চিত্র থেকে পাই—

$S'L = eLQ' = = e\ S'Z' = e(CZ' - CS')$

$= e(a/e - ae)$

$= a(1 - e^2)$

$\therefore\ LL' = 2S'L = 2a\ (1 - e^2) = \frac{2}{a}.a^2(1-e^2)$

বা, $\boxed{LL'=\frac{2b^2}{a}}$

দ্রষ্টব্য : নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, $L\left(ae, \dfrac{b^2}{a}\right)$ এবং $L'\left(ae, \dfrac{-b^2}{a}\right)$ অথবা $\left(-ae, \dfrac{b^2}{a}\right)$ এবং $\left(-ae, \dfrac{-b^2}{a}\right)$

২৪.গ.২.৪ প্যারামেট্রিক সমীকরণ (Parametric Equation)

উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $x = a\cos\theta$ এবং $y = b\sin\theta$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

$x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ উপবৃত্তের প্যারামেট্রিক সমীকরণ। শুধু θ জানা থাকলেই উপবৃত্তের একটি বিন্দু নির্ণয় করা যায়।

২৪.গ.২.৫ সংক্ষিপ্তসার

উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ হলে—

(1) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : $(0, 0)$

(2) নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $(ae, 0)$ এবং $(-ae, 0)$

(3) শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $(a, 0)$ এবং $(-a, 0)$

(4) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $x = a/e$ এবং $x = \dfrac{-a}{e}$

(5) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য : $2b^2/a$

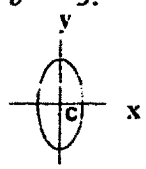
(6) পরাক্ষের (major axis) দৈর্ঘ্য : $2a$

(7) উপাক্ষের (minor axis) দৈর্ঘ্য : $2b$

২৪.গ.৩ উদাহরণমালা

উদা : 1. $9x^2 + 4y^2 = 36$ উপবৃত্তটির নাভিদ্বয়, নিয়ামকদ্বয় এবং উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় করুন।

সমাধান : উপবৃত্তটির আদর্শ সমীকরণ : $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$. এখানে $a = 2$, $b = 3$.



যেহেতু $b > a$, উপবৃত্তের পরাক্ষ, y-অক্ষ। আমরা জানি,

$a^2 = b^2(1 - e^2)$.

বা, $4 = 9(1-e^2) \therefore e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

এখানে পরাক্ষ = 2.3 = 6. সুতরাং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, \pm\sqrt{5})$, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ $y = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}$

উদা : 2. $5x^2 + 9y^2 = 45$ উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান : উপৃত্তটির আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

আমরা জানি, $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$. এখানে $a^2 = 9$, $b^2 = 5$.

$\therefore e^2 = \frac{9-5}{9} = \frac{4}{9}$ বা, $e = \frac{2}{3}$

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.5}{3} = \frac{10}{3}$.

নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$ বা, $\left(\pm 3.\frac{2}{3}, 0\right)$ বা, $(\pm 2, 0)$

উদা : 3. একটি উপবৃত্তের উপাক্ষ নাভিদ্বয়ের দূরত্বের সমান। দেখান যে $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$

সমাধান : মনেকরি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. নাভিদ্বয় $S(ae, 0)$, $S(-ae, 0)$, সুতরাং $SS' = \sqrt{(2ae)^2} = 2ae$

উপাক্ষ $= 2b$.

প্রশ্নানুসারে, $2ae = 2b$

বা, $b = ae$ বা, $e = \frac{b}{a}$,

আমরা জানি,

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$$

বা, $2e^2 = 1$ বা, $e^2 = \frac{1}{2}$, $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$

উদা : 4. $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{5}=1$ .... (1) উপবৃত্তের কেন্দ্র, নাভিদ্বয় এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণটি $\frac{X^2}{3^2}+\frac{Y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$ .... (2) যেখানে $X = x + 2$, $Y = y - 1$

$\therefore$ প্রদত্ত উপবৃত্তের কেন্দ্র (–2, 1), উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা $e^2=\frac{9-5}{9}=\frac{4}{9}$, বা, $e=\frac{2}{3}$ (2)-এর নাভিদ্বয় $(\pm ae,\ 0) = (\pm 2,\ 0)$

সুতরাং (1)-এর নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (0, 1) এবং (–4, 1). (2)-এর নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ $X=\pm\frac{a}{e}$ $=\pm 3.\frac{3}{2}=\pm\frac{9}{2}$.

সুতরাং (1) এর নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ $x+2=\pm\frac{9}{2}$ বা, $x=\pm\frac{9}{2}-2$ বা, $x=\frac{5}{2}$ এবং $x=-\frac{13}{2}$.

উদা : 5. একটি উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা $\frac{\sqrt{2}}{5}$ এবং উপবৃত্তটি (–3, 1) বিন্দুগামী। উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনেকরি, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তটির সমীকরণ। এটি (–3, 1) বিন্দুগামী,

সুতরাং $\frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$ ..... (1)

আবার, $b^2 = a^2(1 - e^2) = a^2\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{3a^2}{5}$ ..... (2)

(1) এবং (2) থেকে পাই $a^2=\frac{32}{3}$ এবং $b^2=\frac{32}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{3x^2}{32}+\frac{5y^2}{32}=1$ বা, $3x^2 + 5y^2 = 32$

উদা : 6. কেন্দ্রকে মূল বিন্দু ও পরাক্ষকে x অক্ষ ধরে যে উপবৃত্তের নাভিলম্ব 5 ও উৎকেন্দ্রতা $\frac{2}{3}$ তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনেকরি, উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

প্রশ্নানুসারে, $5=\frac{2b^2}{a}$ এবং

$e=\frac{2}{3},\quad e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$

অতএব, $\frac{4}{9}=1-\frac{b^2}{a^2}$ বা, $\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

আবার $\frac{5}{2a}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{9}$.

সুতরাং $2a = 9$ বা, $a=\frac{9}{2}$

এখন $5=2b^2\times\frac{2}{9}=\frac{4}{9}b^2$ বা, $b^2=\frac{45}{4}$

সুতরাং উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{4x^2}{9^2}+\frac{4y^2}{45}=1$

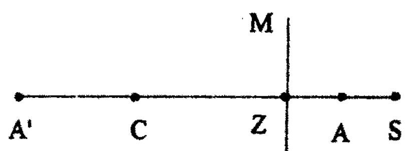
বা, $\frac{4x^2}{81}+\frac{4y^2}{45}=1$

২৪.গ.৪ পরাবৃত্ত (Hyperbola)

কোন বিন্দু যদি কোন সমতলে এরূপে গতিশীল থাকে যে ঐ সমতলের কোন নির্দিষ্ট বিন্দু ও কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা (যা ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুগামী নয়) থেকে তার দূরত্ব দুটির অনুপাত একটি ধ্রুবক যা 1 অপেক্ষা বৃহত্তর ($e > 1$) তবে ঐ গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথ-কে পরাবৃত্ত বলে। নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে নাভি, নির্দিষ্ট রেখাটিকে নিয়ামক ও 'e' কে উৎকেন্দ্রতা বলে।

পরাবৃত্তের শীর্ষ এবং কেন্দ্র

মনেকরি, পরাবৃত্তের নাভি S, MZ নিয়ামক এবং e উৎকেন্দ্রতা (চিত্র -20)। SZ নিয়ামকের উপর লম্ব। SZ-এর উপর A এবং A' এমন দুইটি বিন্দু যে $\frac{SA}{AZ}=\frac{SA'}{A'Z}=e$



চিত্র ঃ 20

$\therefore$ SA = eAZ — (1) এবং SA' = eA'Z — (2)

সংজ্ঞা অনুসারে, A এবং A' পরাবৃত্তের উপর দুটি বিন্দু। মনেকরি, AA' = $2a$ এবং C, AA' -এর মধ্যবিন্দু।

অতএব, CA = CA' = a (1) এবং (2) থেকে পাই SA + SA' = e (AZ + A'Z)

বা, (CS − CA) + (CS + CA') = eAA' = $2ae$

$\boxed{\therefore\ CS = ae}$ — (3)

আবার, $SA' - SA = e\ (A'Z - AZ)$

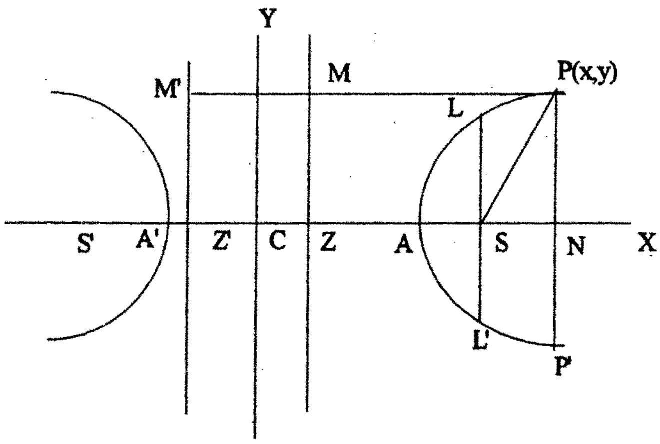
বা, $AA' = e(CA' + CZ) - (CA - CZ)$

বা, $2a = 2eCZ$

বা, $\boxed{CZ = \dfrac{a}{e}}$ — (4)

A, A'-কে পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং C-কে কেন্দ্র বলে।

২৪.গ.৫ পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ



চিত্র ঃ 21

মনেকরি, পরাবৃত্তের কেন্দ্র C. A, A' শীর্ষবিন্দুদ্বয় এবং S নাভি (চিত্র-21)। মনেকরি, MZ নিয়ামক এবং Cx এবং Cy যথাক্রমে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ। এক্ষেত্রে S, A এবং Z-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(ae, 0)$, $(a, 0)$ এবং $\left(a/_e, 0\right)$. যদি $P(x, y)$ পরাবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু হয় তবে সংজ্ঞা অনুসারে,

$SP = ePM \ \therefore\ SP^2 = e^2PM^2$

$$\therefore\ (x - ae)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$$

বা, $x^2\ (e^2 - 1) - y^2 = a^2(e^2 - 1)$

উভয়পক্ষকে $a^2(e^2-1)$ দিয়ে ভাগ করে পাই $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1$. $\boxed{b^2=a^2(e^2-1)}$ ধরে পাই

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এটিই পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ। পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে $b>$ = অথবা $<a$ হতে পারে।

$b^2=a^2(e^2-1)$ থেকে পাই $\boxed{e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}}$

২৪.গ.৫.১ দ্বিতীয় নাভি এবং নিয়ামক

S', CA'-এর উপর এরূপ একটি বিন্দু যে CS' = CS = ae এবং Z' এরূপ একটি বিন্দু যে CZ' = CZ = a/e, M'Z' এবং PM' যথাক্রমে x-অক্ষ এবং M'Z'-এর উপর লম্ব।

সুতরাং, $PS'^2 = e^2M'P^2$ থেকে পাই—

$$(x+ae)^2+y^2=e^2\left(x+a/e\right)^2$$

সরল করে পাই $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ। সুতরাং S' দ্বিতীয় নাভি এবং M'Z' দ্বিতীয় নিয়ামক।

২৪.গ.৫.২ নাভিলম্ব (Latus rectum)

পরাবৃত্তের উপর L বিন্দুর স্থানাঙ্ক (ae, SL),

$\frac{a^2e^2}{a^2}-\frac{SL^2}{b^2}=1$ বা, $SL^2=b^2(e^2-1)$ বা, $SL^2=b^2.\frac{b^2}{a^2}$ $\therefore SL=\frac{b^2}{a}$

অতএব, $\boxed{LSL'=\frac{2b^2}{a}}$

২৪.গ.৫.৩ পরাবৃত্তের উপর একটি বিন্দুর নাভি দূরত্ব

মনেকরি, $P(x_1, y_1)$ পরাবৃত্তের একটি বিন্দু।

এখন, SP = ePM, S'P = ePM'

সুতরাং, SP' − SP = e (PM' − PM)

PM' = $x_1 + a/e$ এবং PM = $x_1 - a/e$

$$\therefore SP'-SP=e\left(x_1+\frac{a}{e}-x_1+\frac{a}{e}\right)=2a$$

২৪.গ.৫.৪ প্যারামেট্রিক সমীকরণ

পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $x = a \sec\theta$, $y = b \tan\theta$ দ্বারা সিদ্ধ হয়।

সুতরাং $x = a \sec\theta$, $y = b \tan\theta$ কে পরাবৃত্তের প্যারামেট্রিক সমীকরণ বলে।

২৪.গ.৫.৫ সংক্ষিপ্তসার

যদি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের সমীকরণ হয়, তবে—

(1) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : (0, 0)

(2) নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $(\pm ae, 0)$

(3) তির্যক অক্ষ : $2a$

(4) অনুবন্ধী অক্ষ : $2b$

(5) $e^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}$

(6) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $x = \pm\frac{a}{e}$

(7) নাভিলম্বের (Latus rectum) দৈর্ঘ্য : $\frac{2b^2}{a}$

২৪.গ.৬ পরাবৃত্তের সমীকরণের বিভিন্ন আকার

(i) যদি পরাবৃত্তের কেন্দ্র মূল বিন্দুতে, নাভি y-অক্ষের উপর ও নিয়ামক x- অক্ষের সমান্তরাল হয়, তবে পরাবৃত্তের সমীকরণ হবে,

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1;$$

যেখানে পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষ হবে y-অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষ হবে x-অক্ষ। নাভির স্থানাঙ্ক হবে $(0, \pm ae)$; নিয়ামকের সমীকরণ হবে $y = \pm\frac{a}{e}$; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a}$ এবং উৎকেন্দ্রতা $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

(ii) যদি পরাবৃত্তের কেন্দ্র (α, β) বিন্দুতে এবং তির্যক ও অনুবন্ধী অক্ষ যথাক্রমে x ও y অক্ষের সমান্তরাল হয়, তবে তার সমীকরণ হবে,

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

(iii) যদি পরাবৃত্তের কেন্দ্র (α, β) বিন্দুতে এবং তির্যক অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল এবং অনুবন্ধী অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল, তবে তার সমীকরণ হবে,

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$$

প্রত্যেক ক্ষেত্রে, তীর্যক ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $2a$ ও $2b$।

২৪.গ.৭ অনুবন্ধী পরাবৃত্ত

যদি কোন পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষ অপর একটি পরাবৃত্তের যথাক্রমে অনুবন্ধী অক্ষ ও তির্যক অক্ষ হয়, তবে পরাবৃত্ত দুইটির একটিকে অপরটিকে অনুবন্ধী পরাবৃত্ত (Conjugate hyperbola) বলে।

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a$ এবং অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b$ এবং তারা যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষের উপর অবস্থিত। সুতরাং, অনুবন্ধী পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b$ ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a$ এবং তারা যথাক্রমে y-অক্ষ ও x-অক্ষের উপর অবস্থিত।

$\therefore \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ..... (1), পরাবৃত্তের অনুবন্ধী পরাবৃত্তের সমীকরণ হবে $\therefore \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ ..... (2)

(1) ও (2) পরাবৃত্তদ্বয় পরস্পর অনুবন্ধী।

(1)-র উৎকেন্দ্রতা e_1 হলে $b^2 = a^2 (e_1^2 - 1)$ হবে,

এবং (2)-র উৎকেন্দ্রতা e_2 হলে $a^2 = b^2 (e_2^2 - 1)$ হবে।

২৪.গ.৮ সম-পরাবৃত্ত (Rectangular Hyperbola)

যে পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষ $(= 2a)$ এবং অনুবন্ধী অক্ষ $(= 2b)$ সমান দৈর্ঘ্যের হয় তাহলে পরাবৃত্তটিকে **সম-পরাবৃত্ত** বলা হয়।

এক্ষেত্রে সম-পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ হবে $x^2 - y^2 = a^2$ (বা b^2)

যেহেতু $2a = 2b$

সম-পরাবৃত্তের উকেন্দ্রতা

আমরা জানি, $e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}$

সম পরাবৃত্তে, a = b, সুতরাং $e^2 = \frac{2a^2}{a} = 2$ বা, $e = \sqrt{2}$.

২৪.গ.৯ উদাহরণমালা

উদা : 1. $4x^2 - 9y^2 = 36$ পরাবৃত্তটির অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য, নাভির স্থানাঙ্ক, উৎকেন্দ্রতা এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

সমাধান : পরাবৃত্তটির সমীকরণ লেখা যেতে পারে $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$. সুতরাং a = 3, b = 2. অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 2a = 6 এবং 2b = 4. $e^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{9+4}{9} = \frac{13}{9}$ $\therefore = \frac{\sqrt{13}}{3}$

নাভির স্থানাঙ্ক $(\pm\sqrt{13}, 0)$, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{2b^2}{a} = \frac{8}{3}$

উদা : 2. একটি পরাবৃত্তের তির্যক এবং অনুবন্ধী অক্ষ যথাক্রমে 4 ও 3, পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনেকরি, পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. এখানে $2a = 4$, এবং $2b = 3$

অর্থাৎ $a = 2$ এবং $b = \frac{3}{2}$

নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x^2}{4} - \frac{4y^2}{9} = 1$ বা $9x^2 - 16y^2 = 36$.

উদা : 3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ও $\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1$ পরাবৃত্তদ্বয়ের উৎকেন্দ্রদ্বয় সমান হলে দেখান যে $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

সমাধান : প্রথম পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রত্রা $= \frac{a^2+b^2}{a^2}$ এবং দ্বিতীয় পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা $= \frac{c^2+d^2}{c^2}$

প্রশ্নানুসারে, $= \frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{c^2+d^2}{c^2}$ বা $1 + \frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{d^2}{c^2}$ বা, $\frac{b^2}{a^2} = \frac{d^2}{c^2}$ বা, $\frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2}$ বা, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

উদা : 4. একটি পরাবৃত্তের নাভিদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব 10 এবং অনুবন্ধী অক্ষ হল 6. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$ এবং $(-ae, 0)$

প্রশ্নানুসারে, $(2ae)^2 = 10^2$ বা, $2ae = 10$

$\therefore ae = 5$ বা, $a = \frac{5}{e}$, $2b = 6$ বা, $b = 3$

মনেকরি পরাবৃত্তের সমীকরণ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$e^2=1+\frac{b^2}{a^2}=1+\frac{9e^2}{25}$$

$$\therefore\ e^2\left(1-\frac{9}{25}\right)=1 \text{ বা, } \frac{16e^2}{25}=1$$

বা, $e=5/4$, সুতরাং $a=\frac{5}{e}=\frac{5\times 4}{5}=4$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

উদা : 5. $\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$ পরাবৃত্তের কেন্দ্র, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রতা, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : $\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$ ..... (1)

এই সমীকরণটি $\frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{9}=1$ ..... (2) আকারের

যেখানে $X = x + 1$ বা $x = X - 1$

এবং $Y = y + 2$ বা, $y = Y - 2$.

(2)-এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $X = 0;\ Y = 0$

$\therefore$ (1)-এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $x = -1$ এবং $y = -2$ অর্থাৎ $(-1, -2)$

(1)-এর নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2.9}{4}=\frac{9}{2}$ একক (এখানে $a^2 = 16$ এবং $b^2 = 9$)

(1)-এর উৎকেন্দ্রতা $=e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{16+9}}{4}=\frac{5}{4}$

(2)-এর নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $= (\pm ae, 0)$ অর্থাৎ $X = \pm ae = \pm 5$ এবং $Y = 0$

$\therefore$ (1)-এর নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $= x = \pm 5 - 1 = 4$ এবং -6, $y = -2$

অর্থাৎ **(4, – 2)** এবং **(–6, –2)**

(2)-এর নিয়ামকের সমীকরণ $X=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{4}{5/4}=\pm\frac{16}{5}$

$\therefore$ (1)-এর নিয়ামকের সমীকরণ হবে $x=\frac{16}{5}-1=\frac{11}{5}$ বা, $5x-11=0$

এবং $x=\frac{-16}{5}-1=\frac{-21}{5}$ বা, $5x+21=0$

উদা : **6.** $3x^2-4y^2-12x-8y+20=0$ পরাবৃত্তটির (i) কেন্দ্র, (ii) শীর্ষদ্বয়, (iii) অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ, (iv) অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য, (v) উৎকেন্দ্রতা, (vi) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য (vii) নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক এবং (viii) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : $3x^2-4y^2-12x-8y+20=0$

বা, $(3x^2-12x)-4(y^2+2y)=-20$

বা, $3(x^2-4x+4)-4(y^2+2y+1)=-20+8$

বা, $\frac{(y+1)^2}{3}-\frac{(x-2)^2}{4}=1$ ..... (1)

ইহা $\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{4}=1$ অধিবৃত্তের আকার যেখানে,

$x-2=X$ বা, $x=X+2$

এবং $y+1=Y$ বা, $y=Y-1$.

$\frac{Y^2}{3}-\frac{X^2}{4}=1$ ..... (2) $[\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ আকার]

(i) (2)-এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $X=0;\ Y=0$

$\therefore$ (1)-এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $x=2;\ y=-1$ অর্থাৎ $(2,-1)$

(ii) (2)-এর শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0,\pm a)=(0,\pm\sqrt{3})$ [এখানে $a^2=3\ \therefore\ a=\sqrt{3}$ এবং $b^2=4\ \therefore\ b=2$]

(1)-এর শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $x-2=0$ বা, $x=2$ এবং $y+1=\pm\sqrt{3}$ বা, $y=\sqrt{3}-1$ এবং $-\sqrt{3}-1$ অর্থাৎ $(0,\sqrt{3}-1)$ ও $(0,-\sqrt{3}-1)$

(iii) (2)-এর অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ $X=0$ (তির্যক অক্ষ) এবং $Y=0$ (অনুবন্ধী অক্ষ)

$\therefore$ (1)-এর অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ হবে $x-2=0$ (তির্যক অক্ষ) এবং $y+1=0$ (অনুবন্ধী অক্ষ)

(iv) অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য $\Rightarrow$ তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2a = $2\sqrt{3}$ একক এবং অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য = 2b = 2.2 = **4 একক**।

(v) উৎকেন্দ্রতা $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{7}{3}}$

(vi) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2.4}{\sqrt{3}}=\frac{8}{\sqrt{3}}$ একক।

(vii) (2)-এর নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (0, ±*ae)* অর্থাৎ X = 0 এবং $Y=\pm ae=\pm\sqrt{3}.\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\pm\sqrt{7}$

$\therefore$ (1)-এর নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক x = 2 এবং $y=\sqrt{7}-1$ বা, $y=-\sqrt{7}-1$ অর্থাৎ $\left(2,\sqrt{7}-1\right)$ এবং $\left(2,-\sqrt{7}-1\right)$

(viii) (2)-এর নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ হবে, $Y=\pm\frac{a}{e}$ বা, $Y+1=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7/3}}=\pm\frac{3}{\sqrt{7}}$ বা, $\sqrt{7}y+\sqrt{7}-3=0$ এবং $\sqrt{7}y+\sqrt{7}+3=0$.

উদা : 7. স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়কে পরাবৃত্তের অক্ষদ্বয় ধরে পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (±5, 0) এবং অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য = 8.

সমাধান : মনেকরি, পরাবৃত্তে সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ [এর অক্ষদ্বয়, স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় বরাবর থাকে]

এর নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (±*ae*, 0) এবং অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য = 8

$\therefore$ ae = 5 এবং $2b$ = 8 বা b = 4

আমরা জানি, $b^2 = a^2 (e^2 - 1)$

বা, $16 = 25 - a^2$ (ae = 5 $\therefore$ $a^2e^2 = 25$)

বা, $a^2 = 9$.

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ হবে $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

উদা : 8. কোন সমপরাবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 6 হলে উহার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

মনেকরি, সমপরাবৃত্তের সমীকরণ $x^2 - y^2 = a^2$ [সম পরাবৃত্তে a = b হয়]

এর নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, 2a = 6 $\left[\frac{2b^2}{a} = \frac{2a^2}{a} = 2a\right]$

বা, a = 3.

∴ নির্ণেয় সমপরাবৃত্তের সমীকরণ $x^2 - y^2 = 9$

উদা : 9. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন, যার শীর্ষবিন্দুদ্বয় (±4, 0) এবং নাভিদ্বয় (±6, 0).

সমাধান : শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের y-স্থানাঙ্ক শূন্য। সুতরাং পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষ x-অক্ষের উপর অবস্থিত। শীর্ষ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের মধ্যবিন্দু হবে পরাবৃত্তের কেন্দ্র।

∴ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= \left\{\frac{4+(-4)}{2}, \frac{0+0}{2}\right\} = (0, 0)$

∴ পরাবৃত্তের সমীকরণ হবে = $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

এর নাভির স্থানাঙ্ক ($\pm ae$, 0)

প্রশ্নানুযায়ী, ae = 6 আবার $b^2 = a^2 (e^2 - 1)$

বা, $b^2 = (6)^2 - (4)^2$ [∵ 2a = শীর্ষ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যের দূরত্ব = 8 ∴ a = 4]

বা, $b^2 = 20$

∴ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$

২৪.গ.১০ অনুশীলনী

[ক]

1) $x^2 + 3y^2 = a^2$ **উপবৃত্তের উৎরেকন্দ্রতা, নাভিলম্ব এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।**

$\left[\frac{1}{3}\sqrt{6};\ \frac{2}{3}a;\ \left(\pm\frac{1}{3}a\sqrt{6},\ 0\right)\right]$

2) $x^2 + 2y^2 - 8y + 6 = 0$ **উপবৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করুন।** [0, 2]

3) নাভিলম্ব 5 এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{2}{3}$ হলে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন। [$20x^2 + 36y^2 = 405$]

4) (–3, 1) বিন্দুগামী উপবৃত্ত নির্ণয় করুন যার উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{\frac{2}{5}}$, [$3x^2 + 5y^2 = 32$]

5) শীর্ষ বিন্দু (1, 0), নাভি (3, 0) এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{2}{3}$ হলে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন। [$5x^2 + 9y^2 - 70x + 65 = 0$]

[খ]

6. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তটি x + y = 3 এবং 2x − 3y = 1 সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী এবং তার উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{3}$ হলে, পরাবৃত্তটির নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন। [$2\sqrt{14}$ একক]

7. দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু (p, 0), (−p, 0) থেকে গতিশীল একটি বিন্দুর দুরত্বদ্বয়ের অন্তর সর্বদা 2c-র সমান। যদি p > c হয়, তবে দেখাও যে, গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি পরাবৃত্ত।

8. কোন পরাবৃত্তের শীর্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (9, 2) ও (1, 2) এবং নাভিদ্বয়ের দূরত্ব 10 । পরাবৃত্তটির সমীকরণ ও তার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন। [$\frac{(x-5)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$, নাভিলম্ব = $\frac{9}{2}$ একক]

9. $3x^2 - 2y^2 = 3$ পরাবৃত্ত ও $x + y = 1$ সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক ও ছেদিত জ্যার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

10. $x^2 - y^2 = 9$ সম পরাবৃত্তের নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

11. e এবং e' যথাক্রমে কোন পরাবৃত্তের ও তার অনুবন্ধী পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা হলে প্রমাণ করুন যে $\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=1$.

২৪.গ.১১ গ্রন্থপঞ্জী

১. ব্যবসায়িক গণিত → ঘোষ ও সাহা

২. ব্যবসায়িক গণিত → সৌরেন্দ্র নাথ দে

ই. সি. ও. - ১
বাণিজ্য বিষয়ের
ঐচ্ছিক পাঠক্রম
(ব্যবসায়িক গণিত)

পর্যায়
৬

একক ২৫ ❑ বাস্তব চলের ধারণা, অপেক্ষক, অপেক্ষকের লিমিট এবং সন্ততি

গঠন

২৫.০ উদ্দেশ্য

এই এককে বাস্তব সংখ্যার ধারণা, বাস্তব চলের অপেক্ষক, অপেক্ষকের লিমিট ও সন্ততি সম্বন্ধে আলোচনা করা হবে। পরবর্তী এককে অন্তরকলনের সংজ্ঞা, নানা ধর্ম জানতে গেলে এই এককের প্রয়োজন।

অন্তরকলন বিদ্যায় অপেক্ষকের চল এবং অপেক্ষকের মধ্যেকার নির্ভরতা নিরূপণ, পরাধীন চল-এর স্বাধীন চল সাপেক্ষে পরিবর্তনের হার নির্ণয়, উত্তরোত্তর অন্তরকলন, অপেক্ষককে অসীম শ্রেণী রূপে প্রকাশ ইত্যাদি বিষয় আলোচিত হয়। বস্তুজগৎ যে সব সূত্র মেনে চলে তা প্রকাশ করতে অন্তরকলন ও সমাকলন বিদ্যা খুবই প্রয়োজনীয়।

২৫.১ বাস্তব সংখ্যার ধারণা

অন্তরকলন বিদ্যার আলোচনার পূর্বে বাস্তব সংখ্যা তত্ত্বের আলোচনা আবশ্যিক। প্রাথমিক অবস্থায় গণনার প্রয়োজন 1, 2, 3, 4... ইত্যাদি স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural numbers) বা ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার (Positive integers) উৎপত্তি। যোগ ও গুণ প্রক্রিয়া স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির ওপর প্রয়োগ করলে স্বাভাবিক সংখ্যাই পাওয়া যায়। সুতরাং যোগ এবং গুণ প্রক্রিয়া স্বাধীনভাবেই প্রয়োগ করা যায়। কিন্তু যোগের বিপরীত বিয়োগ সম্ভব হবে যদি ঋণাত্মক সংখ্যা ($-1, -2, -3$ ইত্যাদি) ও 0 (শূন্য) ব্যবহার করা হয়। আবার ভাগ প্রক্রিয়ার জন্য র‍্যাশনাল সংখ্যা অর্থাৎ দুটি পূর্ণ সংখ্যা p, q এর অনুপাত $\frac{p}{q}$ যেখানে $q \neq 0$; এরূপ সংখ্যা ব্যবহার না করে প্রয়োগ করা যায় না। কারণ $3=5+K$ হলে $K=-2$ এবং $5=7K$ হলে $k=\frac{5}{7}$($\frac{p}{q}$ আকারের) হবে। অর্থাৎ এই দুটি প্রক্রিয়া ঋণাত্মক সংখ্যা, শূন্য এবং ভগ্নাংশের ধারণার প্রয়োজন ঘটায়। ভগ্নাংশ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক উভয়ই হতে পারে। $-1, -2, -3, -4$ ... ইত্যাদি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। সামগ্রিকভাবে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা, শূন্য এবং ধনাত্মক ও ঋণাত্মক ভগ্নাংশ নিয়ে মূলদ বা র‍্যাশনাল (rational) সংখ্যাসমূহ গঠিত হয়। মনে রাখতে হবে $\frac{0}{0}, \frac{5}{0}, \frac{k}{0}$ ইত্যাদি অর্থহীন। কারণ মনে করি $\frac{k}{0}=m$ অর্থাৎ $k=0\times m$ কিন্তু এটা সত্য নয় কারণ কোন সংখ্যাকে 0 দ্বারা গুণ করলে শূন্যই হয়।

মূলদ সংখ্যা (rational number) ঃ মনে করি $r=\frac{p}{q}$ যেখানে p, q উভয়েই পূর্ণ সংখ্যা এবং $q \neq 0$ আমরা q ধনাত্মক ধরলাম। p ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অথবা শূন্য হতে পারে। এখানে r -কে একটি র‍্যাশনাল বা মূলদ সংখ্যা বলা হয়। $\frac{p}{q}$ একটি মূলদ সংখ্যা হলে আমরা মনে করতে পারি p এবং q এর মধ্যে 1 ব্যতীত কোনও সাধারণ উৎপাদক নেই। দশমিকের পর সসীম পদযুক্ত সংখ্যা এবং পৌনঃপুনিক দশমিক সংখ্যা সমূহ মূলদ সংখ্যা, যেহেতু তাদের $\frac{p}{q}$ এই রূপে প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ — $\frac{3}{2}, \frac{4}{7}, 5(=\frac{5}{1}), -3(=\frac{-3}{1}), 0(=\frac{0}{1})$ .... মূলদ সংখ্যার উদাহরণ।

মূলদ সংখ্যার ধর্ম ঃ (i) যে কোনও দুইটি মূলদ সংখ্যার যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল এবং ভাগফল (যেখানে সম্ভব) একটি মূলদ সংখ্যা হয়।

(ii) x এবং y দুটি অসমান মূলদ সংখ্যা হলে $x > y$ অথবা $x < y$ হবে।

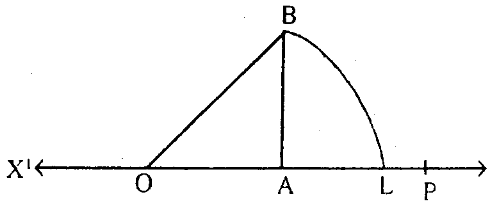
(iii) x, y, z তিনটি মূলদ সংখ্যা হলে এবং $x > y$, $y > z$ হলে $x > z$ হবে। অর্থাৎ মূলদ সংখ্যাসমূহ ক্রমবিন্যস্ত (ordered)।

(iv) মনে করি x, y দুইটি মূলদ সংখ্যা এবং $x > y$. x এবং y এর মধ্যে অসংখ্য মূলদ সংখ্যা নির্ণয় করা যায়। $\frac{x+y}{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা এবং $x > \frac{x+y}{2} > y$ এই প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে x এবং $\frac{x+y}{2}$ ও $\frac{x+y}{2}$ এবং y এর মধ্যে মূলদ সংখ্যা পাওয়া যায়। অনুরূপভাবে বারবার এই প্রক্রিয়া দ্বারা x এবং y এর মধ্যে অসংখ্য মূলদ সংখ্যা নির্ণয় করা যায়।

সুতরাং মূলদ সংখ্যাসমূহ নিবিড় (Dense).

মূলদ বিন্দু ঃ মূলদ সংখ্যার জ্যামিতিক প্রকাশ ঃ

XOX' সরলরেখার উপর O যে কোনও একটি বিন্দু নেওয়া হল যা XOX' কে দুটি ভাগে ভাগ করেছে। OX -কে ধনাত্মক অংশ এবং OX'-কে ঋণাত্মক অংশ বলা হয়। X-এর উপর A একটি বিন্দু নেওয়া হল এবং OA দৈর্ঘ্যকে একক দৈর্ঘ্য বলা হল। এক্ষণে 0 এবং 1 সংখ্যাদ্বয় O এবং A দ্বারা সূচিত হবে। XOX'-কে সংখ্যা রেখা (number line) বলা হয়। সংখ্যারেখার ধনাত্মক দিকে অর্থাৎ OX -এর উপর যে কোনও একটি বিন্দু P নিলাম যেখানে OP=K.OA,



চিত্র—1

অথবা, OX' -এর উপর p' বিন্দু নেওয়া হল যেখানে $OP' = -K.OA$ তা হলে P অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা K এবং p' অখণ্ড ঋণাত্মক সংখ্যা –K কে সূচিত করবে। সংখ্যা রেখার (বা সংখ্যা অক্ষ) ওপর যে কোনও মূলদ সংখ্যা $\frac{p}{q}$ (p ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) সূচিত করতে হলে সংখ্যারেখার উপর Q বিন্দু নেওয়া হল যা পূর্ণ সংখ্যা p-কে সূচিত করবে। p ধনাত্মক হলে Q, OX এর ওপর এবং p ঋণাত্মক হলে Q, OX'-এর ওপর অবস্থিত হবে। এক্ষণে OQ -কে q সংখ্যক সমান ভাগে ভাগ করা হল এবং OQ -এর উপর R একটি বিন্দু নেওয়া হল যাতে OQ=q OR হয়। এখানে R বিন্দুটি মূলদ সংখ্যা $\frac{p}{q}$ কে সূচিত করবে। এরূপে যে কোনও মূলদ সংখ্যাই XOX' এর ওপর একটি বিন্দু দ্বারা সূচিত হবে।

আবার সংখ্যারেখার উপর অসংখ্য বিন্দু আছে যারা মূলদ সংখ্যাকে সূচিত করে না। এটি দেখাবার জন্য OAB একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ নেওয়া হল যেখানে OA=AB=1; $\angle A$ = সমকোণ। সুতরাং $OB^2 = OA^2 + AB^2 = 2$ অথবা, $x^2 = 2$। যেখানে $OB = x$, $OL = \sqrt{2}$ এখানে L বিন্দু x সংখ্যাকে নির্দেশ করে। কিন্তু এমন কোনও মূলদ সংখ্যা নেই যাহার বর্গ 2। কারণ সম্ভব হলে ধরা যাক L বিন্দু একটি মূলদ সংখ্যা $\frac{p}{q}(= x)$ সূচিত করে যেখানে p, q পূর্ণসংখ্যা দুটির মধ্যে 1 ব্যতীত কোনও সাধারণ উৎপাদক নেই। সুতরাং $(\frac{p}{q})^2 = 2$ অর্থাৎ $p^2 = 2q^2$. অতএব p^2 একটি যুগ্ম সংখ্যা। সুতরাং p একটি যুগ্ম সংখ্যা। ধরা যাক p = 2m (m একটি পূর্ণ সংখ্যা)।

$\therefore p^2 = 4m^2 = 2q^2$ বা, $q^2 = 2m^2$. সুতরাং q একটি যুগ্ম সংখ্যা।

অতএব p এবং q এর একটি সাধারণ উৎপাদক থাকবে৭ কিন্তু সম্ভব নহে। অতএব L বিন্দুটি সংখ্যা রেখার ওপর কোনও মূলদ সংখ্যা সূচিত করবে না। L বিন্দুর মতো অসংখ্য বিন্দু সংখ্যারেখার ওপর নির্ণয় করা যায় যারা মূলদ সংখ্যা সূচিত করে না। এইরূপ সংখ্যা সমূহকে অমূলদ সংখ্যা (irrational number) বলা হয়। উদাহরণ ঃ $\sqrt{5}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}$ ইত্যাদি। আরও অনেক প্রকারের সংখ্যা আছে যারা মূলদ নয়। সমগ্র মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যাকে একসঙ্গে বলা হয় বাস্তব সংখ্যা (real number)। সংখ্যারেখার উপর যে কোনও বিন্দু একটি বাস্তব সংখ্যাকে সূচিত করবে এবং বিপরীতভাবে প্রত্যেকটি বাস্তব সংখ্যার জন্য সংখ্যারেখার ওপর একটি বিন্দু থাকবে। এটা বাস্তব সংখ্যা সম্বন্ধে আমাদের একটি প্রকল্প বা hypothesis।

২৫.১.১ কতিপয় সংজ্ঞা

ধ্রুবক (Constant) : কোনও গাণিতিক আলোচনায় কোনও গাণিতিক প্রতীকের মান সর্বদা অপরিবর্তিত থাকলে উহাকে **ধ্রুবক** (constant) বলে। ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি একটি ধ্রুবক। অর্থাৎ ধ্রুবকের একটি নির্দিষ্ট মান থাকে।

চলরাশি (Variable) : গাণিতিক পর্যালোচনায় কোনও প্রতীকের মান পরিবর্তনশীল হলে তাকে **চলরাশি** (variable) বলে। যদি কোনও চলরাশি x শুধু বাস্তব সংখ্যাই প্রাপ্ত হয় তবে x -কে বাস্তব চলরাশি (real variable) বলে। x দ্বারা তাপমাত্রা বা গাড়ির গতি নির্দেশ করলে x একটি চলরাশি।

ব্যাপ্তি অঞ্চল (Domain) : কোনও গাণিতিক প্রক্রিয়ায় চলরাশি x-এর সম্ভাব্য সমস্ত মানের সংগ্রহকে x-এর **ব্যাপ্তি (domain)** বলে। উদাহরণস্বরূপ যদি x প্রকৃত ধনাত্মক ভগ্নাংশ (proper fraction) হয় তবে $0 < x < 1$ এই প্রতীক ব্যবহার করা হয়। একে **মুক্ত পরিসর** (open interval) বলে। অর্থাৎ x, 0 এবং 1 এর মধ্যে যে কোনও মান গ্রহণ করতে পারে। যদি উপরন্তু x, 0 এবং 1 মানও গ্রহণ করতে পারে। তবে লেখা হয় $0 \le x \le 1$. একে **বদ্ধ পরিসর** (closed interval) বলে। মুক্ত পরিসর (0, 1) চিহ্ন দ্বারা এবং বদ্ধ পরিসর [0, 1] চিহ্নের দ্বারাও নির্দেশ করা হয়। অনুরূপে $0 \le x \le 1$ এবং $0 \le x \le 1$ পরিসর দুটিকে [0, 1] এবং [0, 1] চিহ্নদ্বয় সন্তত (continuous) চলরাশি দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

বাস্তব সংখ্যার পরম মান : যদি x একটি বাস্তব সংখ্যা হয় তবে x -এর পরম মান $|x|$ দ্বারা নির্দেশিত হয়। পরম মানের সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

$|x| = x$, যদি $x \ge 0$

$= -x$ যদি $x < 0$

অর্থাৎ, কোনও সংখ্যার পরমমান তার সংখ্যাগত ধনাত্মক মানটিকে বোঝায়।

সংজ্ঞা অনুসারে $|3| = |-3| = 3$ যদি $x \ge 0$ হয় তবে $|x| = |-x| = x$.

$|x| = 5$ হলে $x = +5$ অথবা -5 হবে।

যদি x এবং y দুইটি বাস্তব সংখ্যা হয় তবে দেখানো যায় যে,

(i) $|x| \le a$ অর্থাৎ $-a \le x \le +a$

(যেখানে a একটি ধনাত্মক সংখ্যা)

(ii) $|x| \ge a$ অর্থাৎ $x \ge a$ এবং $x \le -a$.

$(a > 0)$

(iii) $|x \pm y| \le |x| + |y|$

(iv) $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$

(v) $|xy| = |x||y|$

(vi) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ y \neq 0$

২৫.১.২ প্রশ্নমালা

1) নিম্নের বক্তব্যগুলি সঠিক কিনা বলুন ঃ

(i) $-4 \leq x \leq 10$ অর্থাৎ $|x-3| \leq 7$.

(ii) $-7 \leq x \leq -3$ অর্থাৎ $|x+5| \leq 2$

(iii) $0 < |x-a| < \delta$ অর্থাৎ $a-\delta < x < a+\delta, x \neq a$

2) **সমাধান করুন ঃ**

(i) $|2x-3| < 1$ — উঃ (1, 2)

(ii) $|x| = x+5, |x| = x-5$ — উঃ $-\frac{5}{2}$, সমাধান নেই।

(iii) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ — উঃ ± 3

২৫.২ অপেক্ষকের ধারণা (Idea of function of a single variable)

আমরা গাণিতিক আলোচনায় 'সেট' (set) কথাটি ব্যবহার করে থাকি। সাধারণভাবে বলতে গেলে একটি সেট হচ্ছে কতগুলি বস্তুর সংগ্রহ (collection)। স্বাভাবিকভাবে, কলণ গণিতে আমরা সাধারণত বাস্তবসংখ্যার সেট নিয়ে কথা বলব। যেমন {1, 2, 3, ...} এই স্বাভাবিক সংখ্যা সমূহ একটি সেট যার পদসমূহ হল 1, 2, 3, ... ইত্যাদি।

আবার $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ **আর একটি সেট।**

সমগ্র বাস্তব সংখ্যার সেটকে অনেক সময় R দিয়ে বোঝানো হয়। এখন A একটি সেট যার পদগুলির বাস্তব সংখ্যা নেওয়া হল, যেমন, $A = \{x; 0 \leq x \leq 1\}$ অর্থাৎ 0 ও 1 এর অন্তর্বর্তী সমস্ত বাস্তব সংখ্যা A এর পদ। আমরা অনেক সময় গাণিতিক প্রতীক (Mathematical symbol) ব্যবহার করে থাকি। যেমন x একটি প্রতীক যার মান আমরা মনে করতে পারি উপরের A সেটের যে কোনও পদের সমান হতে পারে। এইরূপভাবে কোনও একটি সেটের পদগুলির যে কোনোটির সমান হতে পারে এমন একটি গাণিতিক প্রতীককে আমরা চল (variable) বলে থাকি। যেমন এখানে x একটি চল যা 0 ও 1-এর মধ্যবর্তী যে কোনও মানের সমান হতে পারে।

আরও উদাহরণ ঃ $B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2\}$ একটি সেট এবং আমরা প্রতীক y দিয়ে চিহ্নিত করলে y এর মান $1^2, 2^2, 3^2$ বা 4^2 যে কোনওটি হতে পারে।

যদি কখনও একটি প্রতীক Z এমন হয় যে তার সেটে কেবল মাত্র একটি সংখ্যা আছে, সেক্ষেত্রে সেই প্রতীক Z -কে আমরা ধ্রুবক (constant) বলব।

যেমন একটি বৃত্তের পরিধি ও তাহার ব্যাসের অনুপাতকে আমরা প্রতীক p দিয়ে বোঝাই। p -এর প্রকৃতপক্ষে সকল বৃত্তের জন্য একই মান হয়। p -কে ধ্রুবক বলা যেতে পারে।

চলরাশির উদাহরণ হিসাবে আমরা একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে y চলরাশি এবং বর্গক্ষেত্রের বাহুকে x চলরাশি লিখলে আমরা জানি যে চলরাশি দুটি পরস্পর $y = x^2$ এই সূত্র দ্বারা যুক্ত। এখানে y-এর মান x চলরাশির মানের উপর নির্ভর করছে। আবার একটি গাড়ি একটি সরলপথে চলতে থাকলে, গাড়িটি 1 সেকেণ্ডে যদি 10 মিটার যায়, 2 সেকেণ্ডে 25 মিটার যায়, 3 সেকেণ্ড সময়ে 40 মিটার যায়, তাহলে আমরা সময়কে t প্রতীক ও দূরত্ব পরিমাণকে s প্রতীক দিয়ে চিহ্নিত করলে s চলকে t চলের উপর নির্ভর করছে বলা যায়। আমরা এটি বোঝাবার জন্য অনধীন (independent) ও অধীন (dependent) এই দুই প্রকার চলের কথা ভাবতে পারি। অনধীন চল যেমন সময় t-এর মান 0 থেকে 3 সেকেণ্ড-এর মধ্যে যে কোন মান নিতে পারে। t-এর মান দেওয়া থাকলে সেই সময় গাড়ি যতটা যায় তার মান s পাওয়া যায়। অতএব s চল t চলের মানের উপর নির্ভর করছে। আমরা t -কে অনধীন চল ও s-কে অধীন চল বলব।

'$x \to a$', a যদি একটি বাস্তব সংখ্যা হয়, তা হলে $x \to a$ এ দ্বারা আমরা বুঝাই যে x সে সমস্ত মান গ্রহণ করছে যে $|x - a|$-এর মান যে কোনও ছোটো সংখ্যার দেওয়া থাকলে $|x - a|$ তার থেকে কম মানসমূহ গ্রহণ করে। x -এর মান a -এর সঙ্গে সমান কখনই হবে না।

$x \to \infty$, যদি x একটি চল এমন সব মান গ্রহণ করে যে যে কোনও একটি .....

এখন অপেক্ষকের ধারণা দেওয়া যায়।

দুটি চল x ও y আছে।

একটি **অপেক্ষক** f হ'ল x এর সেট E। একটি নিয়ম যা দ্বারা x এর E সেটের প্রতি মানের জন্য y চলের একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়। এখানে x **অনধীন চল** এবং y **অধীন চল**। E সেটটিকে **অপেক্ষকের ক্ষেত্র** (domain) বলে এবং y যে সব মান অধিগ্রহণ করে সেই সেটটিকে **অপেক্ষকের পাল্লা** (Range) বা **বিস্তারাঞ্চল** বলা হয়। অপেক্ষক আবার এভাবেও প্রকাশ করা যায় ঃ—

যদি দুটি চলরাশি x এবং y এরূপে সম্পর্কযুক্ত থাকে যে x-এর একটি নির্দিষ্ট ক্ষেত্রের প্রতিটি মানের জন্য y -এর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায় তাহলে y -কে ঐ ক্ষেত্রে x -এর একটি অপেক্ষক বলা হয় এবং $y = f(x)$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এখানে f দ্বারা নিয়মকে চিহ্নিত করে যা দ্বারা x-এর E সেটের প্রতি মানের জন্য একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা y পাওয়া যায়।

২৫.২.১ অপেক্ষক নির্দেশ করার পদ্ধতি

সাধারণত **তিনটি** উপায়ে যে কোনও একটি অপেক্ষক দ্বারা নির্দেশিত করা যায়। সেগুলি হল ঃ

(ক) ফর্মুলা আকারে প্রকাশ;

(খ) সরণি আকারে প্রকাশ;

(গ) লেখচিত্র আকারে প্রকাশ।

(ক) একটি ক্ষেত্রের উপর সংজ্ঞায়িত অপেক্ষককে এক বা একাধিক ফর্মুলার দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ—(i) $y = 3x^2 = f(x)$,

$$\text{(ii) } y = \begin{cases} x \text{ if } x \le 0 \\ x^2 \text{ if } x > 0 \end{cases}$$

(i) $f(x) = 3x^2$ অপেক্ষকে x -এর মান যে কোনও বাস্তব সংখ্যা হলে $f(x)$ -এর মান একটি বাস্তব সংখ্যা হবে। আবার x -এর বদলে $-x$ বসালে, $f(x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f-(x)$, অতএব f -এর পাল্লা $(0, R)$, যেখানে R যে কোনও একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা নেওয়া যায়।

(ii) এখানে $f(x)$ দুটি সূত্র দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে। f -এর পরিসর সমগ্র বাস্তব সংখ্যা এবং পাল্লাও সমগ্র বাস্তব সংখ্যা।

উদাহরণ ঃ নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির ক্ষেত্র নির্ণয় করুন।

(a) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, (b)$f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$ (c) $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$

সমাধান ঃ (a) x-এর যে মানের জন্য $(4-x^2) \ge 0$ যে সব মান f-এর ক্ষেত্র।

$4 \ge x^2 \Rightarrow -2 \le x \le 2$. সুতরাং $f(x)$ -এর ক্ষেত্র হবে $-2 \le x \le 2$

বা $[-2, 2]$ আর $y = f(x)$-এর পাল্লা হবে $0 \le y \le 2$

(b) x এর যে মানের জন্য $x^2 - 3x + 2 = 0$ তার জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত নয়।

এবং $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ এবং $x=2$. $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)}$ সমস্ত বাস্তব রাশি $f(x)$ -এর ক্ষেত্র। অর্থাৎ $x < 1$ বা $1 < x < 2$ বা $x > 2$, এই তিনটি অসমীকরণ প্রত্যেকটি অপেক্ষকের ক্ষেত্র।

(c) $x = 4$ হলে $f(x)$ সংজ্ঞায়িত নয়। সুতরাং 4 ছাড়া সমস্ত বাস্তব সংখ্যা x-এর $f(x) = x+4$ অতএব $x > 4$ এবং $x > 4$ এই দুটি অঞ্চল $f(x)$-এর ক্ষেত্র।

(খ) যদি স্বাধীন চল x একটি সীমিত সেট থেকে মান গ্রহণ করে সেক্ষেত্রে x-এর মানগুলি $x_1, x_2, \ldots x_n$ ক্রম আকারে প্রকাশ করা যায়, এখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। x-এর এই মানগুলির

$y = f(x)$ এর মান ধরা হল যথাক্রমে এবং $y_1, y_2, ...y_n$. x এবং $f(x) = y$ এর মান নিচের সারণিতে দেখানো হয়েছে।

x	x_1	x_2	..........................x_n
$y(x)$	y_1	y_2	..........................y_n

লগারিদ্মিক অপেক্ষক বা ত্রিকোণমিতির অপেক্ষককে সারণি আকারে প্রকাশ করা যায়।

স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে xy-সমতলে, x এর মান যদি বাস্তব রাশির সেট থেকে গ্রহণ করে, তাহলে $P(x, y)$ বিন্দু চিহ্নিত করা যায়—যার ভুজ x এবং কোটি y (বা $f(x)$ এভাবে সব বিন্দুগুলি একটি চিত্র গঠন করে। এই চিত্রকে অপেক্ষকের **লৈখিক রূপায়ণ** বা চিত্র বলে (Graph)।

এক কথায়, $y = f(x)$ যার ক্ষেত্র E সেট, তার লৈখিক রূপায়ণ হবে

$$M = \{(x, f(x); x \in E\}$$

অপেক্ষকের লৈখিক রূপায়ণ বৈজ্ঞানিক পরীক্ষায় বা আধুনিক উৎপাদনে বিশেষভাবে প্রয়োগ করা হয়।

২৫.২.২ কয়েকটি বিশেষ অপেক্ষক এবং তাদের লেখচিত্র

(ক) **যুগ্ম ও অযুগ্ম অপেক্ষক ঃ** (Even and Odd functions)

ধরা যাক $y = f(x)$ অপেক্ষকটি একটি নির্দিষ্ট অন্তরালে সংজ্ঞায়িত এবং অন্তরালটি O (মূলবিন্দু) সাপেক্ষে x-অক্ষে প্রতিসম। এই অপেক্ষক $y = f(x)$ **যুগ্ম** বলা হয় যদি যে কোনও x-এর জন্য

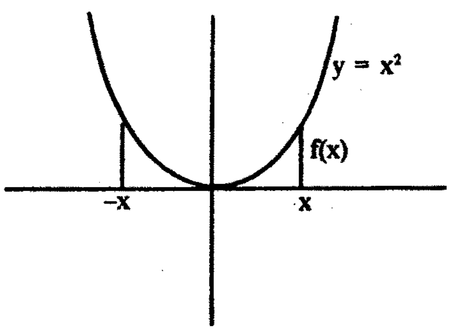
$$f(x) = f(-x)$$

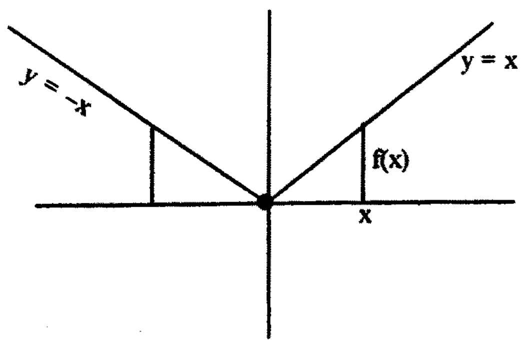
এবং **অযুগ্ম** বলা হয় যদি যে কোনও x-এর জন্য

$$f(x) = -f(-x)$$

উদাহরণ ঃ (i) $y = x^2$ অপেক্ষকটি যুগ্ম। এখানে $f(x) = x^2$ এবং $f(-x) = x^2$ $\therefore f(x) = f(-x)$

(ii) $y = (x)$ অপেক্ষকটি যুগ্ম যেহেতু $f(x) = |x| = |-x| = f(-x)$



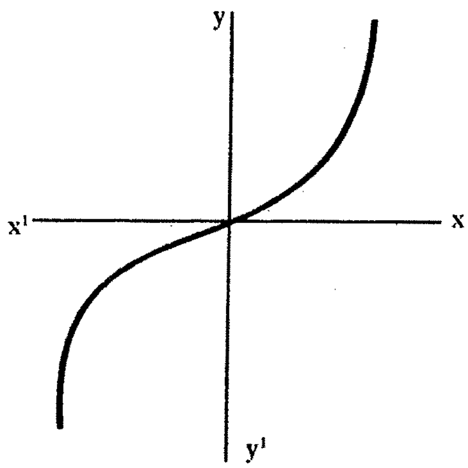


(i) এর লেখচিত্র ঃ

(ii) এর লেখচিত্র ঃ

(iii) $y = f(x) = x^3$ অপেক্ষকটি অযুগ্ম যেহেতু $f(x) = x^3 = -(-x)^3 = -f(-x)$

x^3 -এর লেখচিত্র ঃ



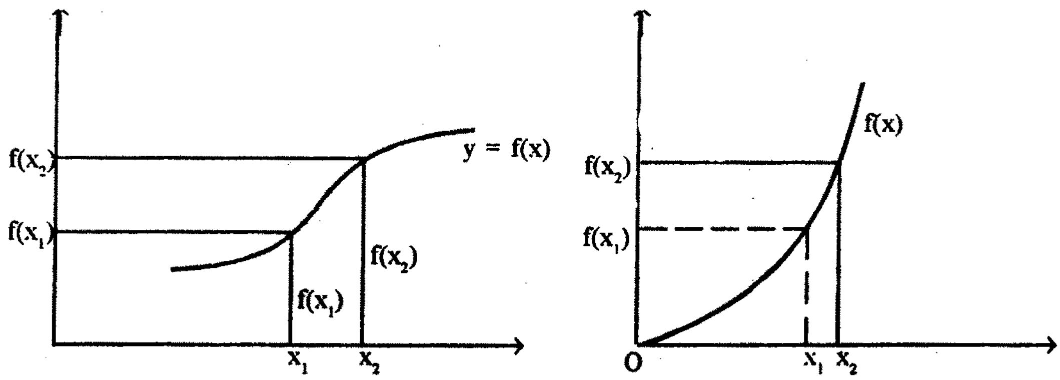
উদাহরণ ঃ (iv) $f(x) = x^3 + x^2$ অপেক্ষকটি যুগ্ম বা অযুগ্ম নয়।

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = x^3 + x^2 \neq f(x)$$

(খ) সমক্রমী অপেক্ষক (Monotonic functions)

ধরুন অপেক্ষক $y = f(x)$ যা একটি অন্তরালে [a, b]-তে সংজ্ঞায়িত। f(x) -কে [a, b] অন্তরালে ক্রমবর্ধমান (Increasing) সমক্রমী বলা হয় যদি

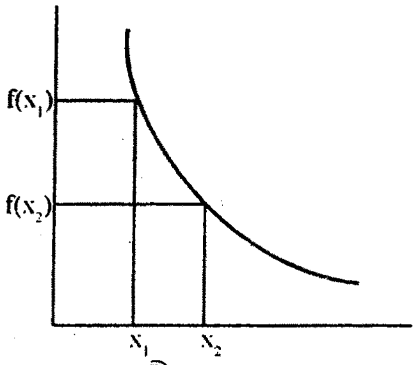
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2);\ x_1 x_2 \in [a,b]$



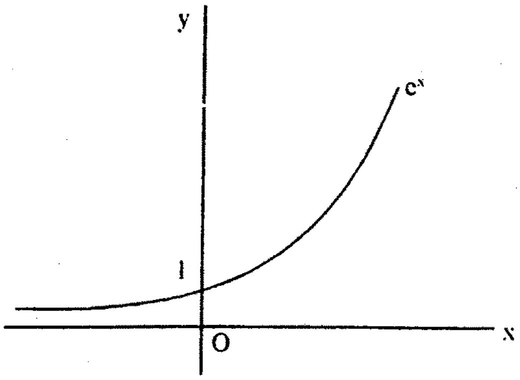
উপরোক্ত চিত্রগুলি দু'টি ক্রমবর্ধমান অপেক্ষকের।

যদি $x_1 \not> x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) x_1 x_2 \in [a, b]$ তাহলে f(x)-কে [a, b] অন্তরালে ক্রমহ্রাসমান (decreasing) অপেক্ষক বলা হয়।

যদি কোনও অপেক্ষক [a, b] অন্তরালে ক্রমবর্ধমান বা ক্রমহ্রাসমান হয় তাহলে f(x)-কে সমক্রমী (Monotonic) বলে।



(ক্রম ক্ষীয়মান অপেক্ষক)



(এক্স পোনেনশিয়াল অপেক্ষক)

(গ) **এক্সপোনেনশিয়াল অপেক্ষক** (Exponential function)

এই অপেক্ষকটি আমরা $y = e^x$ এই রূপে লিখি, যেখানে e হল একটি ধ্রুবক যার আসন্ন মান 2.718 (দশমিকের তিন ঘর পর্যন্ত) e^x -এর একটি ধর্ম হল $e^{x_1}.e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$

আর e^x সব বাস্তব x -এর জন্য সংজ্ঞা, এবং $e^x > 0$

• **লগারিদ্‌ম অপেক্ষক** (Logarithmic Function)

$y = \log_e x$ এই অপেক্ষকটি এক্সপোনেন্‌শিয়ালের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত। $y = \log_e x$ হলে $e^y = x$ হয়। অতএব বোঝা যাচ্ছে $\log_e x$ শুধুমাত্র $x > 0$ জন্য সংজ্ঞাত।

আবার $\log_e x_1 + \log_e x_2 = \log_e x_1x_2$

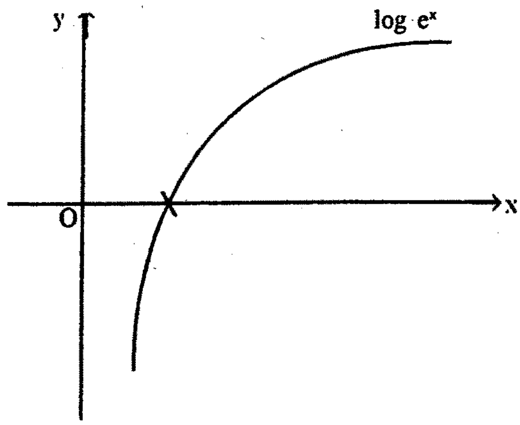
$$\log_e x_1 - \log_e x_2 = \log_e \tfrac{x_1}{x_2} \text{ যেখানে } x_1 > 0,\ x_2 > 0$$

পার্শ্বের $y = \log_e x$ -এর লেখচিত্রের মতো এখানে e হল লগারিদমের ভূমি (বা base).

অন্য ভূমি (বা base) নিয়েও লগারিদম সংজ্ঞাত হয়। বিশেষ করে বহু ব্যবহৃত হল $\log_{10} x$ যদি $\log_{10} x = y$ হয় তবে $10^y = x$.

ফলে $\log_{10} x_1 + \log_{10} x_2 = \log_{10} x_1x_2$

এবং $\log_{10} x_1 - \log_{10} x_2 = \log_{10} \frac{x_1}{x_2}$ ইত্যাদি।



বিপরীত অপেক্ষক ঃ মনে করি y=f(x) অপেক্ষকটি x-এর **পরিসর** A-তে সংজ্ঞাত এবং y-এর পরিসরটি হইতেছে B. যদি $x = \phi(y)$ অপেক্ষকটি B পরিসরে এরূপে সংজ্ঞাত হয় যে y -এর একটি মানের জন্য Aতে x-এর একটি মাত্র মান পাওয়া যায় তবে f(x) এবং $\phi(y)$ অপেক্ষক দুটিকে একে অন্যের বিপরীত অপেক্ষক বলা হয়। যথা, $y = f(x) = 5x+2$, হলে $x = \frac{1}{5}(y-2) = \phi(y)$ এখানে f(x) এবং $\phi(y)$ একে অন্যের বিপরীত অপেক্ষক।

পর্যাবৃত্ত (Periodic) **অপেক্ষক ঃ** f(x) যে পরিসরে সংজ্ঞাত সেই পরিসরের x -এর সকল মানের জন্য যদি (f)x = f(x+k) হয় তবে f(x) -কে পর্যাবৃত্ত (periodic) অপেক্ষক বলা হয় যার (period) হচ্ছে k.

যথা ঃ মনে করি f(x) = Sin x. এখানে $f(x+2\pi) = \text{Sin } (x+2\pi) = \text{Sin } x$ এখানে period হচ্ছে 2π.

উদা 1. যদি $f(x) = \frac{5x^2+1}{2-x}$ হয় তবে $f(3x)$ এবং $f(x^3)$ নির্ণয় করুন।

$$f(3x) = \frac{5(3x)^2+1}{2-(3x)} = \frac{45x^2+1}{2-3x}$$

$$f(x^3) = \frac{5(x^3)^2+1}{2-(x^3)} = \frac{5x^6+1}{2-x^3}$$

উদাহরণ 2 ঃ যদি $f(x+1) = x^2-3x+2$ হয় f(x) নির্ণয় করুন। এখানে $x+1=y$ বসালে $f(y) = (y-1)^2 - 3(y-1) + 2$ হয়।

অতএব, y -এর স্থানে x লিখলে $f(x) = (x-1)^2 - 3(x-1) + 2$

$$= x^2 - 2x + 1 - 3x + 3 + 2 = x^2 - 5x + 6$$

উদাহরণ 3 ঃ যদি $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}$ হয় তবে x -এর পরিসর নির্ণয় করুন।

এখানে $x-1 \geq 0$ এবং $6-x \geq 0$ হতে হবে।

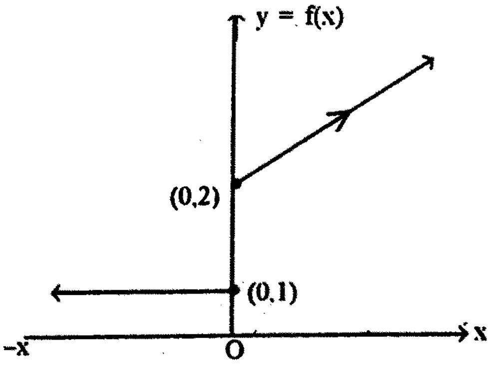
অর্থাৎ $x \geq 1$ এবং $x \leq 6$ **অতএব পরিসর হচ্ছে** [1, 6]

উদা. 4. $f(x) = 1, x < 0$

$= 0, x = 0$

$= x+2, x > 0$

অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন করুন ঃ



উদা. 5. দেখান যে $y = f(x) = x^2 - |x|$ একটি যুগ্ম অপেক্ষক।

$f(-x) = (-x)^2 - |-x| = x^2 - |x| = f(x)$

সুতরাং f(x) একটি যুগ্ম অপেক্ষক।

২৫.২.৩ প্রশ্নমালা

1. যদি $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ হয় তবে f(2) এবং $f(x^2)$ নির্ণয় করুন।

$[-\frac{1}{3}, \frac{1-x^2}{1+x^2}]$

2. যদি $y = f(x) = \frac{lx+m}{nx-l}$ তবে দেখান যে x = f(y).

3. $f(x) = m\frac{x-l}{m-l} + l.\frac{x-m}{l-m}$ হলে দেখান যে $f(l+m) = f(l) + f(m)$

4. $f(x) = ax^2 + bx + c, f(1) = 3, f(2) = 7, f(3) = 13$ হলে a, b, c নির্ণয় করুন।

[a = b = c = 1]

5. যদি $f(x) = \frac{x}{1-x}$ হয়, দেখান যে, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{(1-x)(1-x-h)}$ $[h \neq 0]$

6. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির পরিসর নির্ণয় করুন।

(i) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ (ii) $f(x) = \sqrt{(x-2)(x-3)}$ (iii) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

(iv) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ [(i) x=2 বাদে সব বাস্তব সংখ্যা, (ii) $2 < x < 3$

(iii) x = 3 বাদে সব বাস্তব সংখ্যা

(iv) $-1 < x < 1$.

7. দেখান যে (i) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$ একটি অযুগ্ম অপেক্ষক।

(ii) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ অপেক্ষকটি যুগ্মও নহে অযুগ্মও নহে।

8. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির লেখচিত্র অংকন করুন।

(i) $f(x) = |x|$ (ii) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ (iii) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ (iv) $f(x) = 2, x \geq 0$

(v) $f(x) = x, 0 \leq x \leq \frac{1}{2} = 1-x, \frac{1}{2} < x \leq 1 = 0, x < 0$

২৫.৩ অপেক্ষকের লিমিট বা সীমা (limit)

মনে করুন একটি বাস্তব চলরাশি x, 2.01, 2.001, 2.0001.... ইত্যাদি মানগুলি পরপর নেওয়া হল যা সবসময় 2 থেকে বড় থাকছে কিন্তু x এবং 2 এর মধ্যে তফাৎ ক্রমশ কমছে। অর্থাৎ x ক্রমাগত 2-এর নিকটবর্তী হচ্ছে। কিন্তু $x \neq 2$ থাকছে। এরূপ ক্ষেত্রে $x \to 2+$ এই চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। অর্থাৎ সংখ্যা অক্ষের উপর x এর ডানদিক থেকে 2 এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে। x এবং 2 এর মধ্যে দূরত্ব যতটা ইচ্ছা কমানো যেতে পারে। আবার মনে করি x, 1.99, 1.999, 1.9999 ..... ইত্যাদি মানগুলি নিচ্ছে এবং সংখ্যাঅক্ষের উপর x-এর বাম দিক থেকে 2 এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে এবং সর্বদা 2 অপেক্ষা ছোট থাকছে। এক্ষেত্রেও x এবং 2-এর মধ্যে দূরত্ব যত ইচ্ছা কমানো যেতে পারে কিন্তু $x \neq 2$ থাকবে।

এইক্ষেত্রে $x \to 2-$ চিহ্নটি লেখা হয়।

$x \to 2$ চিহ্নটির অর্থ x ডানদিক অথবা বামদিক থেকে 2-এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে। অর্থাৎ x-এর লিমিট 2.

৩.১ উদাহরণ ঃ মনে করি f(x) = 2x+3. x যখন ডানদিক থেকে 2-এর দিকে অগ্রসর হয় তখন f(x) এর মান যথাক্রমে হচ্ছে 7.02, 7.002, 7.0002....... ইত্যাদি। অর্থাৎ f(x) ক্রমশ 7 এর ডান দিক থেকে 7 থেকে সর্বদা বড় থেকে 7 এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে। আবার যখন x 2-এর বামদিক থেকে 2-এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে তখন f(x)-এর মান যথাক্রমে হচ্ছে 6.98, 6.998, 6.9998...... ইত্যাদি। অর্থাৎ f(x) সর্বদা 7 অপেক্ষা ছোট থেকে 7-এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে।

প্রথম ক্ষেত্রে লেখা হয়—

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (2x+3) = 7$$

অর্থাৎ f(x) -এর ডানসীমা হচ্ছে 7. আবার দ্বিতীয় ক্ষেত্রে লেখা হয় $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$

অর্থাৎ f(x) -এর বামসীমা 7. অর্থাৎ f(x) -এর সীমা 7. এক্ষেত্রে দক্ষিণ সীমা ও বামসীমা সমান এবং এক্ষেত্রে আমরা বলি $\lim_{x \to 2} f(x)$ বিদ্যমান এবং =7

মনে করি 'a' একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা এবং $x \to a (x \neq a)$. এরূপ ক্ষেত্রে কোনও অপেক্ষক f(x) যদি এরূপ হয় যে $f(x) \to l$ (l একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা) তবে লেখা হয় $\lim_{x \to a} f(x) = l$ অর্থাৎ $x \to a$ হইলে f(x) এর সীমা (limit)। অর্থাৎ x এবং a -র মধ্যে দূরত্ব $|x-a|$ যথেচ্ছ ক্ষুদ্র করলে f(x) এবং l-এর মধ্যে দূরত্ব $|f(x)-l|$ ইচ্ছামত ক্ষুদ্র করা যায়।

গণিতের ভাষায়, $\in > 0$ যদি একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক রাশি হয় এবং $\in$ -এর উপর নির্ভরশীল একটি ধনাত্মক রাশি δ এরূপ যদি পাওয়া যায় যে, $0 < |x-a| \leq \delta$ হলে $|f(x)-l| < \in$ হয় তবে বলা হয়, x a-এর নিকটবর্তী হলে f(x) -এর সীমা l.

অর্থাৎ $\lim_{x \to a} f(x) = l$ এই সংজ্ঞা থেকে বুঝা যায় সীমা থাকলে দক্ষিণসীমা এবং বামসীমা সমান হবে।

উদাহরণ 1. $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ অপেক্ষকটির সীমা নির্ণয় করুন যখন $x \to 3$ অর্থাৎ $x = 3$ বিন্দুতে f(x) সংজ্ঞাত।

$x = 3$ বসালে $f(3) = \frac{0}{0}$ অর্থাৎ অর্থহীন। মনে করি $x = 3+h,\ h \neq 0$

$f(3+h) = \frac{(3+h)^2-9}{3+h-3} = \frac{9+6h+h^2-9}{h} = (6+h)$

এক্ষণে $x \to 3$ হলে $h \to 0$ হবে। অর্থাৎ $\lim\limits_{h\to 0} f(3+h)$-এর সীমা 6

অনুরূপে $x = 3-h$ নিয়ে f(x) এর সীমা পাই 6.

$\therefore \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$

উদা. 2. সীমা নির্ণয় করুন : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x+x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(2+x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}(2+x)\ [\because x \neq 0] = 2$

উদা. 3 সীমা নির্ণয় করুন : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+2x)-(1-3x)}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{5x}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{5}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}}\ (\because x \neq 0) = \frac{5}{2}$

উদা. 4 সীমা নির্ণয় করুন $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

$\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$\lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}\ [\because x \neq 4] = \frac{1}{4}\ [\because x \to 4$ হলে $\sqrt{x} \to 2$

উদা. 5. দেখান যে, $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = x^{a^{n-1}}$, n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে $\frac{x^n-a^n}{x-a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots\ a^{n-1}$

$\therefore \lim\limits_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = a^{n-1} + a^{n-2}a + a^{n-3}.a^2 + \ \ldots + a^{n-1}$

$= na^{n-1}$

উপপাদ্য 1-এর পরে প্রয়োগ হিসাবে।

উদা. 6. দেখান যে $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^{\frac{9}{2}} - a^{\frac{9}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}} \, (a > 0) = 3a^3$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^{\frac{9}{2}} - a^{\frac{9}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{x^{\frac{9}{2}} - a^{\frac{9}{2}}}{x - a}\right) \Big/ \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{x - a}\right) = \frac{\frac{9}{2}a^{\frac{7}{2}}}{\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}}$$ (5 নং উদাহরণ থেকে)

$$= 3\frac{a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = 3a^3$$

উদা. 7 যদি $f(x) = x^2, \; x < 1$ তবে $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ নির্ণয় করুন।

$$= 2.5, \; x = 1$$

$$= x^2 + 2, \; x > 1$$

এখানে, $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} x^2 + 1 = 2$

আবার, $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-}$

$\therefore$ সীমা নির্ণেয় নহে।

২৫.৩.২ অসীমগামী চল ও অপেক্ষকের আলোচনা

কোনও চল x যদি ক্রমাগত বাড়তে থাকে এবং যে কোনও বৃহৎ ধনাত্মক সংখ্যা থেকে বড় মান গ্রহণ করে—তখন সেই চল x অসীমে যায় বা $x \to \infty$ (infinite)

মনে করি $f(x) = \frac{1}{x}$. এক্ষণে x এর মান ধনাত্মক থেকে যত ছোট হতে থাকবে f(x) -এর মান তত বড় হতে থাকবে। এরূপস্থলে লেখা হয় $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$ এবং $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ এস্থলে দক্ষিণপক্ষ সীমা এবং বামপক্ষ সীমা সমান নহে। আবার $f(x) = \frac{1}{x^2}$ হইলে $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x^2} = \infty$ এবং $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x^2} = -\infty$

আবার $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0, \; \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = \infty, \; \lim\limits_{x \to \infty} x^2 = \infty$

উপপাদ্য 1. সীমা বিষয়ক উপপাদ্য

যদি $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ এবং $\lim\limits_{x \to a} \phi(x) = \ell^1$ হয়

তবে, (i) $\lim_{x\to a}[f(x)\pm\phi(x)] = \ell \pm \ell^1$

(ii) $\lim_{x\to a}[f(x).\phi(x)] = l$

(iii) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{\ell}{\ell^1}$ যদি $\ell^1 \neq 0$ হয়।

(iv) $\lim_{x\to a} c.f(x) = c\ell$ [প্রমাণ দেওয়া হল না।]

২৫.৩.৩ কয়েকটি আদর্শ লিমিট বা সীমা (Several Standard Limits)

আমরা নিম্নের কয়েকটি আদর্শ লিমিট ব্যবহার করব। (প্রমাণ এই পুস্তকে দেওয়া হল না।)

(i) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_e(1+x) = 1$

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

(iv) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

উদা. ৪. সীমা নির্ণয় কর $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x(1+\frac{1}{x})}$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{x})} = 2 \quad [\because \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0]$

২৫.৩.৪ প্রশ্নমালা

---

1. **সীমা নির্ণয় করুন ঃ**

(i) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-2}{2x+2}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(iii) $\lim_{x\to a}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}(a \neq 0)$ (iv) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x-6}{3x^2+2x+1}$

(v) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}$ (vi) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+1}$

2. যদি $f(x) = x,\ x > 0$ হয় তবে $\lim_{x\to 0} f(x)$ নির্ণয় করুন।

$= 0,\ x = 0$

$= -x,\ x < 0$

3. যদি $f(x)=x^2, x>1$ তবে $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ নির্ণয় করুন।

$$=2, x=1$$

$$=x, x<1.$$

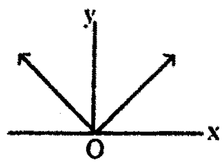
[উঃ (i) $\frac{1}{4}$, (ii) 1, (iii) $\frac{1}{a}$, (iv) $\frac{2}{3}$, (v) -1, (vi) 0. 2.(0), 3.(1)]

২৫.৪ অপেক্ষকের সন্ততি

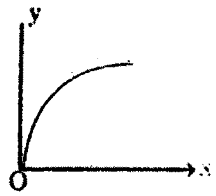
কোনও অপেক্ষকের লেখচিত্রে কোনও ছেদ না থাকে তবে সাধারণভাবে অপেক্ষকটিকে লেখচিত্রের সীমার মধ্যে সন্তত (continuous) বলা হয়। যদি কোনও বিন্দুতে লেখচিত্র ছেদ থাকে তবে সেই বিন্দুতে অপেক্ষকটিকে ঐ বিন্দুতে অসন্তত (discontinuous) বলা হয়।

উদাহরণ—

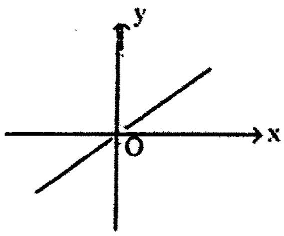
(i) $f(x)=|x|$



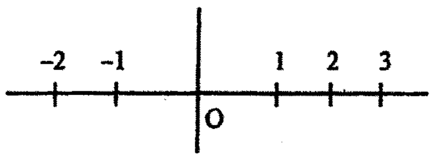
(ii) $f(x)=\sqrt{x}$



(iii) $f(x)=\frac{x^2}{x}$



(iv) $f(x)=[x]$, $[x]$ অর্থাৎ x থেকে বড় নয় এরূপ বৃহত্তম পূর্ণ সংখ্যামান অর্থাৎ $x=3.2$ হলে $[x_1]=3$



(i) এবং (ii) এর অপেক্ষক দুটি সন্তত। (iii) এবং (iv) -এর অপেক্ষক দুইটি $x=0$ এবং $x=1, 2, \ldots -1, -2$ ইত্যাদি বিন্দুতে সন্তত নহে।

(v) $f(x)=\sqrt{(x-1)(x-2)}$ অপেক্ষকটির $1<x<2$ পরিসরে কোনও বাস্তববিন্দু থাকবে না। অতএব এই পরিসরে $f(x)$ অসংজ্ঞাত হবে। অতএব ঐ পরিসর অসন্তত।

২৫.৪.১ সন্ততির গাণিতিক সংজ্ঞা

f(x) অপেক্ষকটিকে x = a বিন্দুতে সন্তত বলা হবে

যদি $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ অর্থাৎ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

কোনও পরিসরের সকল বিন্দুতে যদি f(x) সন্তত হয় তবে (x)-কে ঐ পরিসরে সন্তত বলা হয়।

উদা. 1. দেখান যে f(x) = 5x+3, x = 1 বিন্দুতে সন্তত।

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(5x+3) = 8$ আবার f(1) = 8

অতএব $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$ এবং f(x) অপেক্ষকটি x = 1 বিন্দুতে সন্তত।

এক্ষেত্রে f(x), x-এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য সন্তত কারণ $\lim\limits_{x\to a}(5x+3) = 5a+3$

উদা. 2. যদি $f(x) = -x,\ x \le 0$

$$= x,\ 0 < x < 1$$

$$= 2 - x,\ x \ge 1$$

তবে দেখান যে f(x), x = 0 এবং x = 1 -এ সন্তত।

এখানে f(0) = 0, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-}(-x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} x = 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = f(0) = 0$

সুতরাং f(x), x = 0 বিন্দুতে সন্তত।

আবার, f(1) = 2–1=1. $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+}(2-x) = 1$

আবার, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} x = 1$

$\therefore f(1) = \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 1$

সুতরাং f(x), x = 1 বিন্দুতে সন্তত।

উদা. 3. যদি $f(x) = \frac{|x|}{x},\ x \ne 0$

$$= -1,\ x = 0$$

দেখান যে, x = 0 বিন্দুতে f(x) সন্তত নহে।

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1}$$

(যেহেতু $x \to 0$ অতএব $x \neq 0$)

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0-}(-1) = -1$$

অতএব $\lim_{x\to 0+} f(x) \neq \lim_{x\to 0-} f(x)$ অতএব x = 0 -তে f(x) সন্তত নয়।

উদা. 4. $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ অপেক্ষকটি x = 1 বিন্দুতে কত হলে f(x), x=1 বিন্দুতে সন্তত হবে?

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1)$$

(যেহেতু $x \to 1$ অতএব $x-1 \neq 0$) $= 2$

$\therefore f(1) = 2$ হলে f(x), x = 1 বিন্দুতে সন্তত হবে।

উপপাদ্য 2.

সন্তত অপেক্ষকের কয়েকটি ধর্ম

লিমিটের সম্পর্কে উপপাদ্য 1 এর প্রয়োগ করে সন্ততির নিম্নের উপপাদ্য দেওয়া যায় ঃ

মনে করি,

$f(x)$ এবং $\phi(x)$ $x = c$ বিন্দুতে সন্তত। তা হলে

(i) $f(x)+\phi(x)$ এবং $f(x)-\phi(x)$, x = c বিন্দুতে সন্তত হবে।

(ii) $f(x).\phi(x)$, $x = c$ বিন্দুতে সন্তত হবে।

(iii) যদি $\phi(c) \neq 0$ হয়, তবে $\frac{f(x)}{\phi(x)}$, x = c বিন্দুতে সন্তত হবে।

(iv) $|f(x)|$ বা $|\phi(x)|$, c বিন্দুতে সন্তত।

মান (i) লিমিট উপপাদ্য অনুসারে—

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a)$$

(যেহেতু f(x), g(x), x = a বিন্দুতে সন্তত। অতএব (f(x)+g(x)) ফাংশনটি x = a বিন্দুতে সন্তত একটির প্রমাণ।

২৫.৪.২ প্রশ্নমালা

(1) $f(x)=\frac{x^3+2x+5}{x^2-8x+12}$ অপেক্ষকটির অসন্ততির বিন্দুগুলি নির্ণয় করুন। [উ ঃ 6, 2]

(2) $f(x)=\frac{|x|}{2x}$ অপেক্ষকটির অসন্ততির বিন্দু নির্ণয় করুন। [$x = 0$]

(3) প্রমাণ করুন যে $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$ অপেক্ষকটি $x = 1$ বিন্দুতে সন্তত নহে।

(4) যদি $f(x)=\frac{1}{2}-x,\ 0<x<\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{2}-x,\ \frac{1}{2}<x<1$

তবে দেখান যে $f(x)$ $x=\frac{1}{2}$ বিন্দুতে অসন্তত।

(5) যদি $f(x)=3+2x,\ -\frac{3}{2}\le x<0$

$=3-2x,\ 0\le x<\frac{3}{2}$

$=-3-2x,\ x\ge\frac{3}{2}$

হয় তবে দেখান যে $f(x)$, $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত কিন্তু $x=\frac{3}{2}$ বিন্দুতে অসন্তত।

(6) $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$ হলে $f(x)$, $x = 4$ বিন্দুতে সংজ্ঞাত নহে। $f(4)$ -এর মান কত হলে $f(x)$ অপেক্ষকটি $x = 4$ বিন্দুতে সন্তত হবে? [8]

(7) যদি $f(x)=2,\ -1<x\le 0$

$=3,\ 0<x\le 1$

$=4,\ 1<x\le 2$

তবে দেখান যে $f(x)$, $x = 0$ এবং $x = 1$ বিন্দুতে অসন্তত।

(8) যদি $f(x)=1, x>0$

$=0, x=0$

$=-1, x<0$

দেখান যে $f(x)$, $x = 0$ বিন্দুতে অসন্তত।

২৫.৫ সারাংশ

এই এককে বাস্তব সংখ্যা ও বাস্তব চলের ধারণা, বাস্তব সংখ্যার চরম মান, ১.১ এককে দেওয়া হয়েছে।

১.২ এককে অপেক্ষকের ধারণা, অপেক্ষকের লেখাচিত্র, বিশেষ ধরনের অপেক্ষক এবং সংজ্ঞা, উদাহরণ সহযোগে বোঝানো হয়েছে।

অপেক্ষকের সীমা, অপেক্ষকের সন্ততি, সীমা ও সন্ততির কয়েকটি ধর্ম সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে।

২৫.৬ অনুশীলনী

১। শূন্যস্থান পূরণ করুন ঃ

(ক) $\frac{2}{3}$ একটি .... সংখ্যা (খ) $\sqrt{2}$ একটি .... সংখ্যা (গ) $|x|=$.......

(ঘ) $|x| = x+5$ তাহলে x এর মান ..... (ঙ) sinx ও cosx ..... অপেক্ষক।

২। (ক) $\sqrt{x^2-5}$ এর ক্ষেত্র নির্ণয় করুন।

(খ) একটি যুগ্ম ও অযুগ্ম অপেক্ষকের উদাহরণ ও তাদের লেখচিত্র আঁকুন।

(গ) সমক্রমী অপেক্ষকের একটি উদাহরণ লিখুন।

(ঘ) আবৃত অপেক্ষকের উদাহরণ ও তার লেখচিত্র আঁকুন।

৩। শূন্যস্থান পূরণ করুন ঃ

(i) $f(x) = x^2$, $x = 0$ বিন্দুতে .... (ii) $x = 0$ বিন্দুতে $\frac{|x|}{x}=$......

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\sin\frac{x}{2}=$....... (iv) tan x অপেক্ষকের অসন্ততির বিন্দু ......

৪। যদি $f(x)=\frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$ এবং একটি বাস্তব সংখ্যা হয়, দেখান যে $|f(k)-f(-k)|=2$

৫। x-এর কোন কোন মানের জন্য $f(x)=\sqrt{8+2x-3x^2}$ অপেক্ষকটি সংজ্ঞায়িত হবে তা নির্ণয় করুন

৬। x-এর কোন কোন মানের জন্য $f(x)=\sqrt{\log e\frac{4x-x^3}{3}\cdot x}$ সংজ্ঞায়িত হবে তা নির্ণয় করুন।

৭। ধর $f(x)-x^2\cos\frac{1}{x}$ যখন $x\neq 0 = 0$ যখন $x = 0$ $f(x)$ অপেক্ষকটি $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত কিনা তা নির্ণয় করুন।

৮। যদি $f(x) = x\cos^{-1}x$, $\frac{dy}{dx}$ কত হবে?

৯। যদি $\log(xy) = x^2 + y^2$ দেখান যে $\frac{dy}{dx}=\frac{y(2x^2-1)}{x(1-2y^2)}$

১০। সংজ্ঞা থেকে দেখান যে $\frac{d}{dx}(10^x) = 10^x \cdot 2 \cdot 3$

১১। যদি $x^2 + y^2 - 1 = 0$ তাহলে $\frac{dy}{dx}$ কত হবে?

১২। যদি $f(x, y) = x\sin x + y\sin y - \pi = 0$ তাহলে, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ নির্ণয় করুন।

১৩। যদি $f(x, y) = x^3 + 3x + y^3 + 3y - 8 = 0$ তাহলে $x = y = 1$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

একক ২৬ ☐ অবকলন ও অপেক্ষকের বিস্তৃতি

গঠন

২৬.০ উদ্দেশ্য

২৬.১ নতিমাত্রা

২৬.২ অপেক্ষকের অন্তরকলন বা অবকলন

২৬.২.১ উদাহরণমালা

২৬.২.২ অন্তরকলন সহগের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

২৬.২.৩ অবকল বা অন্তরকল

২৬.২.৪ অন্তরকলনের কয়েকটি সাধারণ নিয়ম

২৬.২.৫ লগারিদম্-মূলক অবকলন

২৬.২.৬ অব্যক্ত অপেক্ষকের অন্তরকলন

২৬.২.৭ অবকলন সহগের দ্বারা পরিবর্তনের হার নির্ণয়

২৬.২.৮ প্রশ্নমালা

২৬.৩ ক্রমিক অন্তরকলন

২৬.৩.১ উদাহরণমালা

২৬.৩.২ প্রশ্নমালা

২৬.৩.৩ প্রয়োগমূলক উদাহরণ

২৬.৪ অপেক্ষকের বিস্তৃতি

২৬.৪.১ ম্যাকলরিনের উপপাদ্য (সসীম আকার)

২৬.৪.২ প্রশ্নমালা

২৬.৪.৫ টেলরের উপপাদ্য (অসীম আকার)

২৬.৪.৬ প্রশ্নমালা

২৬.৫ অপেক্ষকের চরমমান

২৬.৫.১ বক্ররেখার কোনও বিন্দুতে অবতলতা ও উত্তলতা

২৬.৫.২ প্রশ্নমালা

২৬.৫ আংশিক অন্তরকলন প্রক্রিয়া

২৬.৬.১ প্রশ্নমালা

২৬.০ উদ্দেশ্য

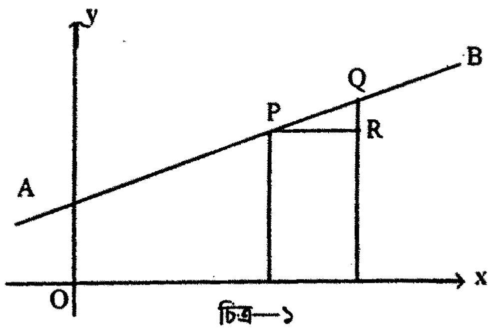
এই এককে অন্তরকলনের ধারণা, উদ্দেশ্য, জ্যামিতিক ব্যাখ্যা তুলে ধরা হয়েছে। এছাড়া বিভিন্ন আকারের অপেক্ষকের অন্তরকলন, অন্তরকলনের সাধারণ নিয়মাবলী আলোচিত হয়েছে।

অপেক্ষকের সসীম বিস্তৃতি—টেলর ও ম্যাকলরিনের বিস্তৃতি সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলি, অপেক্ষকের চরমমান ও তার নির্ণয়ের পদ্ধতি আলোচনা ও পরিশেষে আংশিক অন্তরকলন প্রক্রিয়ার ধারণা দেওয়া হয়েছে।

২৬.১ নতিমাত্রা (Gradient)

(i) সরলরেখার নতি ঃ AB সরলরেখার Q বিন্দুর ভুজ P বিন্দুর ভুজ হইতে PR বৃদ্ধি পেয়েছে। আবার Q বিন্দুর কোটি QR বৃদ্ধি পেয়েছে। $\frac{QR}{PR}$ অনুপাতকে P বিন্দুতে AB সরলরেখার নতি (Gradient) বলে (চিত্র ১ দেখুন)।

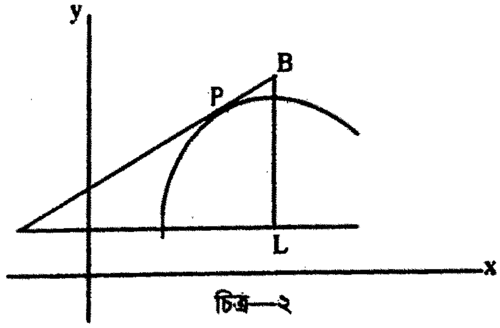
মনে রাখতে হবে একটি সরলরেখার নতিমাত্রা প্রতি বিন্দুতে সমান। Q বিন্দুটি P অন্য পার্শ্বে নেওয়া হলেও P বিন্দুতে নতিই একই থাকবে।



চিত্র—১

(ii) বক্ররেখার নতি ঃ কোনও বক্ররেখার উপর কোনও বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতিকে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখার নতি বলা হয়। এখানে AB, P বিন্দুতে বক্ররেখাটির একটি স্পর্শক (চিত্র-২)। $\frac{BL}{AL}$ অনুপাতটি P বিন্দুতে বক্ররেখাটির নতি হবে।

যদি বক্ররেখার উপর কোনও বিন্দুতে স্পর্শক y-অক্ষের সমান্তরাল হয় তবে তার উপর দুটি বিন্দুর ভুজের বৃদ্ধি শূন্য হবে। এক্ষেত্রে স্পর্শকের নতি অসীম (infinity) বলা হবে। আবার বক্ররেখার উপর কোন বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হলে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির নতি শূন্য হবে।



চিত্র—২

২৬.২ অপেক্ষকের অন্তরকলন বা অবকলন (Differentiation)

সংজ্ঞা : মনে করি $y = f(x)$ অপেক্ষকটি x-এর কোনও পরিসরে সংজ্ঞাত। এখন যদি একটি বিন্দু x-এর সাপেক্ষে কোনও ক্ষুদ্র পরিবর্তন Δx (বা δx বা h) দেওয়া যায় তবে মনে করি y-এর পরিবর্তন হবে Δy (বা δy বা k)।

$\therefore\ y + \Delta y^{1} = f(x + \Delta x)$ বা, $\Delta y = f(x + \Delta x) - y = f(x + \Delta x) - f(x)$

বা, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

যদি $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ -এর অস্তিত্ব থাকে এবং সসীম হয় তবে ঐ লিমিটটিকে f (x)-এর x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ (derivative) বা অবকলন সহগ (differential coefficient) বলে এবং $\dfrac{dy}{dx}\left(=\dfrac{d}{dx}(y)\right)$ বা $f'(x)$ দ্বারা চিহ্নিত হয়।

অর্থাৎ $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ এর অস্তিত্ব থাকলে লেখা হয় $f'(c) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$

অর্থাৎ $f'(c)$, $f(x)$ এর $x = c$ বিন্দুতে অবকলন সহগ অবকলন প্রক্রিয়া সীমা নির্ণয়ের মাধ্যমে হয়ে থাকে। অতএব $f(x)$ অপেক্ষকের x-বিন্দুতে অবলকন নির্ণয় করা যাবে যদি

$\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ হয়।

অর্থাৎ দক্ষিণ অবকলন সহগ এবং বাম অবকলন সহগ অস্তিত্বশীল এবং উহারা সমান হবে। অর্থাৎ $Rf'(x) = Lf'(x)$.

২৬.২.১ উদাহরণমালা

উদা. 1. যদি $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$ হয় তবে

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 + 5(x+h) + 1 - 3x^2 - 5x - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{3x^2} + 6hx + 3h^2 + \cancel{5x} + 5h + \cancel{1} - \cancel{3x^2} - \cancel{5x} - \cancel{1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3h^2+6hx+5h}{h} = \lim_{h\to 0}(3h+6x+5)$$

$$= \lim_{h\to 0} 3h + \lim_{h\to 0} 6x + \lim_{h\to 0} 5$$ (উপপাদ্য প্রয়োগ করে)

$= 0 + 6x + 5 = 6x + 5$

উদা 2. মনে করি, $f(x) = 3x+2,\ x \le 0$

$$= -3x+2,\ x > 0.$$

$$Rf'(0) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(-3h+2)-2}{h} = -3$$

আবার, $Lf'(0) = \lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{3h+2-2}{h} = 3$

$\therefore\ Rf'(0) \ne Lf'(0),$

অতএব, $f'(0)$ এর অস্তিত্ব নেই।

উদা. 3. মনে করি, $f(x) = \sqrt{x};\ x > 0$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[\sqrt{(x+h)}-\sqrt{x}\right]}{h\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

উদা. 4. মনে করি, $f(x) = \frac{1}{x},\ x \ne 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{x-x-h}{x(x+h)} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = \frac{1}{x^2} \quad (\because x \ne 0)$$

উদা. 5. মনে করি, $f(x) = x^n$, n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{X \to x} \frac{X^n - x^n}{X - x} \; [X = x + h]$$

$$= \lim_{X \to x} (X^{n-1} + X^{n-2}x + \dots + x^{n-1}) = nx^{n-1}$$

অতএব, $f'(x) = nx^{n-1}$ (n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)

মনে রাখিতে হবে, n যে কোনও মূলদ সংখ্যা হলে প্রমাণ করা যায় যে, $f(x) = x^n$ এই ফাংশনটি n র‍্যাশনাল (মূলদ) হলে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলনযোগ্য, এবং $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ যদি $x \neq 0$ হয়। n ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে $n = -m$ লিখলে m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। অতএব এইক্ষেত্রে $x \neq 0$ হলে আমরা পাই

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{-m} - x^{-m}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^m - (x+h)^m}{h(x+h)^m x^m} = -\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{x^m (x+h)^m}$$

দক্ষিণ পক্ষের প্রথম লিমিট প্রথম ক্ষেত্র থেকে পাই $= mx^{m-1}$

অতএব, $f'(x) = -\frac{mx^{m-1}}{x^m x^m} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$

উদা. 6. a বিন্দুতে f(x)-এর অন্তরকলন, অর্থাৎ $f'(a)$ থাকলে f(x) অপেক্ষক $x = a$ বিন্দুতে সন্তত হবে।

আমরা জানি, $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

এখন $f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times h \; (h \neq 0)$

$\therefore \lim_{h \to 0} \left(f(a+h) - f(a)\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times \lim_{h \to 0} h$ (যেহেতু প্রতিটি লিমিট আছে)

$= f'(a) \times 0 = 0$

$\therefore \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

সন্ততির সংজ্ঞা থেকে পাই যে $f(x)$, $x = a$ বিন্দুতে সন্তত।

উদা.7. $f(x)=e^x$. $f'(x)$ নির্ণয় করুন।

সংজ্ঞানুসারে $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0} e^x.\frac{e^h-1}{h}=e^x.\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$

$=e^x$ $[\because \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1]$

উদা. 8. $f(x)=e^{ax}$ $f'(x)$ নির্ণয় করুন।

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{a(x+h)}-e^{ax}}{h}=\lim_{h\to 0} e^{ax}\frac{(e^{ah}-1)}{ah}.a$

$=a.e^{ax}\lim_{h\to 0}\frac{e^{ah}-1}{ah}=ae^{ax}$ $[\because \lim_{h\to 0}\frac{e^{ah}-1}{ah}=1]$

উদা. 9. $f(x)=a^x.f'(x)$ নির্ণয় করুন।

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x.\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{e^{h\log a}-1}{\log a.h}\log a$

$=a^x.\log a.\lim_{h\to 0}\frac{e^{h'}-1}{h'}$ $[h'=h\log a]=a^x\log a.$

উদা. 10. $f(x)=\log_e x$, $f'(x)$ নির্ণয় করুন, যেখানে $x>0$.

$f'(x)=\overset{\lim}{h\to 0}\frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h}=\overset{\lim}{h\to 0}\frac{1}{h}.\log_e(\frac{x+h}{x})$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}.\frac{x}{h}\log_e(1+\frac{h}{x})=\frac{1}{x}\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\log(1+z)$ $[z=\frac{h}{x}$ ধরে$]$

(যেহেতু x-এর মান h -এর উপর নির্ভর করে না)

$=\frac{1}{x}[\because \overset{\lim}{h\to 0}\frac{1}{z}\log_e(1+z)=1]$

উদা. 11. $f(x)=c$ ধ্রুবক $f'(x)$ নির্ণয় করুন।

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0$ $[h\neq 0]$

অতএব একটি ধ্রুবক ফাংশনের অবকল সহগ $=0$

- $f(x)=\sin x$ ও $f(x)=\cos x$ -এর অন্তরকলন

  (1) $f(x)=\sin x$ হলে

  $f(x+h)=\sin(x+h)$

$\therefore \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}$

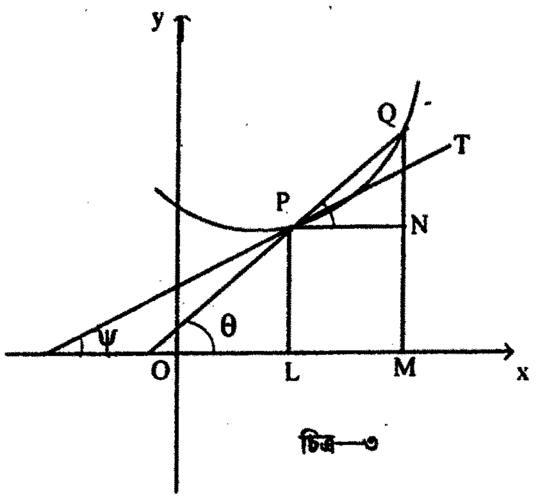
$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x.1 = \cos x$

(2) অনুরূপভাবে পাওয়া যায়

$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

২৬.২.২ অন্তরকল সহগের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

মনে করি, P (x,y) একটি সন্তত বক্ররেখা $y = f(x)$-এর উপর অবস্থিত। মনে করি, P বিন্দুতে বক্ররেখাটির একটি স্পর্শক আছে যা y-অক্ষের সমান্তরাল নহে। মনে করি, $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$, $y = f(x)$-এর উপর অপর একটি বিন্দু। PL, QM Ox -এর উপর লম্ব টানা হল। এবং OX-এর সমান্তরাল করে PN টানা হল (চিত্র —৩)।



চিত্র—৩

$PN = LM = OM - OL = x + \Delta x - x = \Delta x$

এখন

$NQ = MQ - MN = MQ - LP$

$= y + \Delta y - y = \Delta y$

যেহেতু P এবং Q, $y = f(x)$ -এর উপর দুইটি বিন্দু,

অতএব $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

অথবা $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

সুতরাং PQ জ্যা-এর নতি

$= \tan\theta = \tan QPN = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

যদি $Q \to P$ হয় $PQ \to PT$ এবং $\Delta x \to 0$

$\therefore$ PT এর নতি $= \tan\psi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$

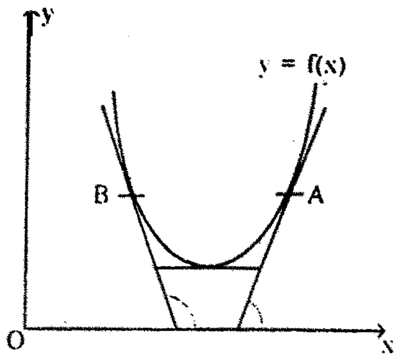
অতএব $f'(x)$, P বিন্দুতে $y = f(x)$-এর স্পর্শকের নতি নির্দেশ করে।

মনে রাখবেন ঃ

1. যদি $f'(x) > 0$ তবে (x, y) বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সঙ্গে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে এবং x বৃদ্ধি পেলে f(x) বা y বৃদ্ধি পায় (চিত্র—4, A বিন্দু)।

2. যদি $f'(x) < 0$ হয়, তবে (x,y) বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সঙ্গে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে এবং x বৃদ্ধি পেলে f (x) বা y হ্রাসপ্রাপ্ত হয়। (চিত্র 4, B বিন্দু)।

3. যদি $f'(x) = 0$ হয় তবে (x, y) বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হয় (চিত্র - 4)



২৬.২.৩ অবকল বা অন্তরকল (Differential)

মনে করি $y = f(x)$ একটি আপেক্ষক এবং $\frac{dx}{dy}$ বা $f'(x)$ নির্ণেয়।

$$\therefore\ f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

বা, $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \in$ এখানে $\in$ এমন একটি সংখ্যা যে $\in \to 0$ যখন $\Delta x \to 0$.

বা, $f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x. f'(x) + \in.\Delta x$ $\in \to 0$ যখন $\Delta x \to 0$

$\Delta x\, f'(x)$ কে $y = f(x)$ এর x-বিন্দুতে অবকল বা অন্তরকল (differential) বলা হয় এবং df বা dy দ্বারা নির্দেশ করা হয়। $dy = df = f'(x)\,\Delta x$.

যদি $f(x) = x$ ধরা হয় তবে $f'(x) = 1$

এবং $df = dx = 1.\Delta x$.

অর্থাৎ $dx = \Delta x$ অর্থাৎ dx-কে স্বাধীন চল x-এর অবকল dx ও x-এর বৃদ্ধি (increment) Δx সমার্থক।

অতএব আমরা পাই $\therefore\ dy = f'(x)\,dx$.

উদা. যদি $y = x^4$ হয় তবে $dy = 4x^3 dx$.

যদি $y = \log_e x$ হয়, তবে $dy = \frac{1}{e}.dx$.

উদা : দেখান x-এর বৃদ্ধির সঙ্গে $y = (x^3 - 3x^2 + 3x)$ অপেক্ষকটি কিরূপ বৃদ্ধি পায়?

$y = x^3 - 3x^2 + 3x$ বা, $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} > 0$, x-এর সব বাস্তব মানের জন্য।

$\therefore y = f(x)$ অপেক্ষকটি x-এর সহিত বৃদ্ধি পায়।

২৬.২.৪ অন্তরকলনের কয়েকটি সাধারণ নিয়ম

যদি u(x), v(x), w(x) ......কয়েকটি সসীম সংখ্যক অপেক্ষক হয় তবে,

I. $\dfrac{d}{dx}[u(x) \pm v(x) \pm w(x) ...] = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx} \pm \dfrac{dw}{dx} \pm ...$

II. $\dfrac{d}{dx}[u(x).\ v(x)] = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}.$

$$\frac{d}{dx}[u(x).\ v(x).\ w(x)] = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$$

$\dfrac{d}{dx}[c.u(x)] = c.\dfrac{du}{dx}$ [c ধ্রুবক].

III. $\dfrac{d}{dx}[\frac{u(x)}{v(x)}],\ u(x) \neq 0.$

$$= \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{du}{dx}}{v^2}$$

IV. যদি $y = f(u)$ এবং $u = \varphi 4(x)$ হয় তবে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dy}\frac{du}{dx} = f'(u).\varphi'(x).$$

উদা. x-এর সাপেক্ষে অবকল সহগ নির্ণয় করুন ঃ $3x^5 + 7x^4 - 2x^2 - x + 6$

মনে করি $y = 3x^5 + 7x^4 - 2x^2 - x + 6.$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[3x^5] + \frac{d}{dx}[7x^4] - \frac{d}{dx}[2x^2] - \frac{d}{dx}[x] + \frac{d}{dx}[6].$$

$$= 3.5x^4 + 4.7x^3 - 2.2x - 1 + 0$$

$$= 15x^4 + 28x^3 - 4x - 1.$$

উদা. $y = x^n . e^x$. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন ঃ

$$\frac{dy}{dx} = x^n . \frac{d}{dx}(e^x) + e^x . \frac{d}{dx}(x^n) = x^n . e^x + e^x . nx^{n-1}$$

উদা ঃ $y = (x^2+7)(x^3+10)$. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন ঃ

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+7)\frac{d}{dx}(x^3+10) + (x^3+10)\frac{d}{dx}(x^2+7).$$

$$= (x^2+7)(3x^2) + (x^3+10)(2x).$$

$$= 3x^4 + 21x^2 + 2x^4 + 20x = 5x^4 + 21x^2 + 20x.$$

উদা ঃ $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন ঃ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-x^2)\frac{d}{dx}(1+x^2) - (1+x^2)\frac{d}{dx}(1-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{(1-x^2).2x - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x(1-x^2) + 2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{2x(1-\cancel{x^2}+1+\cancel{x^2})}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

উদা ঃ $y = \frac{x^n}{\log x}$. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন ঃ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x . \frac{d}{dx}(x^n) - x^n . \frac{d}{dx}(\log x)}{(\log x)^2} = \frac{\log x . nx^{n-1} - \frac{x^n}{x}}{(\log x)^2}$$

$$= \frac{n \log x . x^n - x^n}{x(\log x)^2} = \frac{x^{n-1}(n \log x - 1)}{(\log x)^2}$$

উদা. $y = e^{ax^2+bx+c}$ $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন ঃ

মনে করি $u = ax^2 + bx + c$. $\therefore$ $y = e^u$. $u = ax^2 + bx + c$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u.(2ax + b) = e^{ax^2+bx+c}.(2ax + b).$$

উদা ঃ $y = (1 - 5x)^4$. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন ঃ

মনে করি, $(1 - 5x) = u$. সুতরাং $y = u^4$ এবং $u = 1 - 5x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3.(-5) = -20u^3 = -20(1 - 5x)^3$$

২৬.২.৫ লগারিদম্-মূলক অবকলন

উদা. $x^y.y^x = 1$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন ঃ

উভয়পক্ষে লগারিদম্ নিয়ে পাই

$\log_e x^y + \log_e y^x = \log_e 1$ বা, $y\log_e x + x\log_e y = 0$.

x-এর সাপেক্ষে অবকলন নিলে (y-কে x-এর অপেক্ষক মনে করে)

$$\frac{dy}{dx}.\log_e x + y.\tfrac{1}{x} + 1.\log_e y + x\tfrac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = 0.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}(\log_e x + \tfrac{x}{y}) = -(\tfrac{y}{x} + \log_e y) \text{ বা, } \frac{dy}{dx} = -\frac{(\tfrac{y}{x} + \log_e y)}{(\tfrac{x}{y} + \log_e x)}$$

উদা. $y = x^x$ $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন ঃ

$\log y = \log_e x^x = x\log_e x$,

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dx}{dy} = \log_e x + x.\tfrac{1}{x} = \log_e x + 1$$

বা, $\frac{dy}{dx} = y(\log_e x + 1) = x^x(\log_e x + 1)$

২৬.২.৬ অব্যক্ত অপেক্ষকের অন্তরকলন (Differentiate of Implicit Function)

$f(x,y) = 0$ সমীকরণ থেকে $y = 4(x)$ আকারে প্রকাশ করা কখনও কখনও অসুবিধাজনক। যদিও এসব ক্ষেত্রে y x-এর অপেক্ষক হতে পারে। এইসব স্থলে y-কে x-এর অব্যক্ত অপেক্ষক (Implicit Function) বলে।

উদা. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ একটি অব্যক্ত অপেক্ষক।

এইক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করতে যে কোনও বিন্দু (x,y) যেখানে $hx + by \neq 0$

x-এর সাপেক্ষে অবকলন নিলে পাই, (এখানে y, x-এর আপেক্ষক)

$$2ax + 2hy + 2hx.\frac{dy}{dx} + 2by\frac{dy}{dx} = 0$$

বা, $-(ax + by) = \frac{dy}{dx}(hx + by)$ বা, $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax + hy}{hx + by}$

উদা. $x^3 + y^3 = 3axy$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন ঃ

x-এর সাপেক্ষে অবকলন লইলে পাই

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3ay + 3ax\frac{dy}{dx}.$$

বা, $(3x^2 - 3ay) = \frac{dy}{dx}(3ax - 3y^2)$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2ay}{ax - y^2}$, যেখানে $ax - y^2 \neq 0$

প্রচলিক সমীকরণ থেকে অপেক্ষকের অবকলন নির্ণয় (Parametric Differentiation) :

y, x-এর অপেক্ষক এবং তাদের সম্পর্ক একটি প্রচল t-এর বিভিন্ন মানের জন্য জানা আছে।

$x = \phi(t)$ এবং $y = \Psi(t)$, t প্রচল।

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$ যেখানে $\frac{dx}{dt} \neq 0$. [যদি $\frac{dt}{dx}$ নির্ণেয় হয়]

উদা. $x = \sqrt{1+t}$, $y = \sqrt{1-t}$ যেখানে $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$. হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(1+t)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+t}} \text{ হলে } \frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\frac{1(-1)}{\sqrt{1-t}}.$$

$$\frac{dy}{dx}= \therefore \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-t}}\Big/\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-t}} \quad =-\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}.$$

উদা. $x=t^2+\frac{1}{t^2}$, $y=t+\frac{1}{t}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন ঃ

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(t^2+t^{-2}) \ =2t-2t^{-3} \text{ এবং } \frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{t^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(1-\tfrac{1}{t^2})\Big/2(t-t^{-3}) \ = \ \frac{(t^2-1)}{t^2}\ \frac{t^3.}{2(t^4-1)}=\frac{t}{2(t^2+1)}$$

উদা. x^2 -এর সাপেক্ষে x^5-এর অবকলন নির্ণয় করুন ঃ

মনে করি $y=x^5$ এবং $z=x^2$

$$\therefore \frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dz} \ = \ \frac{dy}{dx}\Big/\frac{dz}{dx}$$

এখন, $\frac{dy}{dx}=5x^4$ এবং $\frac{dz}{dx}=2x.$

$$\therefore \frac{dy}{dz}=\frac{5x^4}{2x}=\frac{5}{2}x^3.$$

২৬.২.৭ অবকলন সহগের দ্বারা পরিবর্তনের হার নির্ণয়

মনে করি, $y = f(x)$ অপেক্ষকটি একটি বক্ররেখা নির্ণয় করে। মনে করি, x_1 এবং x_2 $y = f(x)$ -এর উপর দুইটি বিন্দু। $y_1 = f(x_1)$ এবং $y_2 = f(x_2)$

$\therefore \ \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ $\therefore$ ইহাকে (x_1,x_2)-র মধ্যে y-এর গড় পরিবর্তন বলা হয়।

এখন যদি $\Delta x\to 0$ হয়, এবং যদি $\lim\limits_{x_2\to x_1}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(x_1)$

$=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}$ নির্ণেয় হয় তবে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}$ -কে x_1 বিন্দুতে y-এর পরিবর্তনের হার বলা হয়।

উদা. যদি $y = x^3$ এবং x, 10 একক প্রতি মিনিটে বৃদ্ধি পায় তবে যখন x=3 হইলে y-এর পরিবর্তনের হার নির্ণয় করুন।

t = সময়ের একক মিনিট।

$\frac{dy}{dt} = 3\frac{dx}{dt}x^2 = 3.\times 10.x^2$

$\therefore \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=3} = 3\times 10\times 9 = 270$ একক/মিনিটে।

উদা. $8y = x^3 - 12x + 16$ বক্ররেখার (0, 2) বিন্দুতে স্পর্শকের গতি নির্ণয় কর এবং স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

$8.\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12 \quad \therefore 8\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = -12$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$ অতএব (0, 2) বিন্দুতে স্পর্শকের নতি হল $(-\frac{3}{2})$

অতএব ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ : $y - 2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}(x-0)$

or $y - 2 = -\frac{3}{2}x$ বা, $2y-4+3x = 0$

উদা. মনে করি $f(x) = |x|$ অর্থাৎ
$$f(x) = x,\ x>0$$
$$= 0,\ x = 0$$
$$= -x,\ x<0$$

আমরা দেখেছি $f(0+0) = f(0-0) = f(0) = 0$

$\therefore f(x), x = 0$ বিন্দুতে সন্তত।

কিন্তু $L.f'(0) = \lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{-h-0}{h} = -1$

আবার, $Rf'(0) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{h-0}{h} = 1$

$\therefore Lf'(0) \neq rf'(0)$. সুতরাং $f'(0)$ নির্ণেয় নয়।

২৬.২.৮ প্রশ্নমালা

1. সংজ্ঞা থেকে x-এর সাপেক্ষে অবকলন সহগ নির্ণয় করুন ঃ

(i) $x^3 + 2x$ [উ ঃ $3x^2 + 2$] (ii) $\frac{1}{x}$ [উ ঃ $-\frac{1}{x^2}$] (iii) e^{2x} [উ ঃ $2\cdot e^{2x}$]

(iv) $\frac{1}{\sqrt{x}}(x>0)$ [উ ঃ $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}$] (v) 10^{2x} [উ ঃ $2.10^{2x}\log_e 10$]

(vi) $e^{\sqrt{x}}$ [উঃ $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$]

2. নিম্নলিখিত অপেক্ষগুলির x-এর সাপেক্ষে অবকল সহগ নির্ণয় করুন ঃ

(i) $(x^2-3)^3$ [উঃ $3(x^2-3)^2.2x$]

(ii) $(x+2)(x+1)^2$ [উঃ (ii) $(x+2)(x+1)^2$]

(iii) $\frac{(1+x)^3}{x}$ [উঃ $-x^{-2}+3+2x$]

(iv) $\frac{1}{1-2x^2}$ [উঃ $\frac{4x}{(1-2x^2)^2}$]

(v) $4x^{-\frac{3}{4}}+6x^{\frac{1}{2}}+2$ [উঃ $-3x^{-\frac{7}{4}}+3x^{-\frac{1}{2}}$]

3. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির x-এর সাপেক্ষে অবকল সহগ নির্ণয় করুন ঃ

(i) $x^n e^x$ [উঃ $e^x(nx^{n-1}+x^n)$]

(ii) $x^2 \log x$ [উঃ $2x\log x+x$]

(iii) $(x^2+7)(x^3+10)$ [উঃ $2x(x^3+10)+(x^2+7)3x^2$]

(iv) $10^x.x^{10}$ [উঃ $10^x(10x^9+x^{10}\log_e 10)$]

(v) $\sqrt{x}.e^x$ [উঃ $e^x[\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}]$]

(vi) $x^2\log x^2$ [উঃ $2(x+2x\log x]$

4. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির x-এর সাপেক্ষে অবকল সহগ নির্ণয় করুন ঃ

(i) $\frac{x}{e^x-1}$ [উঃ $\frac{(e^x-1)-xe^x}{(e^x-1)^2}$]

(ii) $\frac{x^n}{\log x}$ [উঃ $\frac{nx^{n-1}\log x-x^{n-1}}{(\log x)^2}$]

(iii) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ [উঃ $\frac{4x}{(1-x^2)^2}$]

(iv) $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ $\left[\text{উঃ } \frac{1}{\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})^2} \right]$

(v) $x.\dfrac{e^x+e^{3x}}{e^x+e^{-x}}$ [উঃ $e^{2x}(1+2x)$]

(v) $\frac{x^3-2+x^{-3}}{x-2+x^{-1}}$ [উঃ $2(x+1-x^{-2}-x^{-3})$]

5. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির x-এর সাপেক্ষে অবকলন সহগ নির্ণয় করুন ঃ

(i) $\sqrt{x^2+a^2}$ $\left[\text{উঃ } \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \right]$

(ii) e^{x^4} $\left[\text{উঃ } 4x^3.e^{x^4} \right]$

(iii) e^{ax^2+bx+c} $\left[\text{উঃ } e^{ax^2+bx+c}(2ax+b) \right]$

(iv) $\sqrt{\log x}$ $\left[\text{উঃ } \dfrac{1}{2x\sqrt{\log x}} \right]$

(v) a^{5x+1} $\left[\text{উঃ } 5a^{5x+1}.\log_e a \right]$

(vi) $\log\sqrt{lox}$ $\left[\text{উঃ } \dfrac{1}{2x} \right]$

(vii) $\log \log x$ $\left[\text{উঃ } \dfrac{1}{x\log x} \right]$

(viii) $\log(x+\sqrt{x^2+a^2}]$ $\left[\text{উঃ } \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right]$

(x) $\log(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})$ $\left[\text{উঃ } \dfrac{1}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}} \right]$

২৬.৩.৩ প্রয়োগমূলক উদাহরণ

উদ্মহরণ 1.

ধরুন সম্পূর্ণ মূল্য অপেক্ষক $C = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

গড়মূল্য অপেক্ষক এবং মার্জিনাল মূল্য অপেক্ষক নির্ণয় করুন এবং তাদের লেখচিত্র কি ধরনের হবে তা আলোচনা করুন।

উত্তর : গড়মূল্য $= \frac{C}{x} = \frac{ax^2 + bx + c}{x} = ax + b + \frac{c}{x}$

মার্জিনাল মূল্য $= \frac{dC}{dx} = 2ax + b$

সম্পূর্ণ মূল্য অপেক্ষক একটি অধিবৃত্ত। এই অধিবৃত্তটি ধনাত্মক চতুর্থাংশ cox এর মধ্যে অবস্থিত। ইহা C অক্ষকে (o, c) বিন্দুতে ছেদ করে। এই অধিবৃত্তের অক্ষ C-অক্ষের সমান্তরাল।

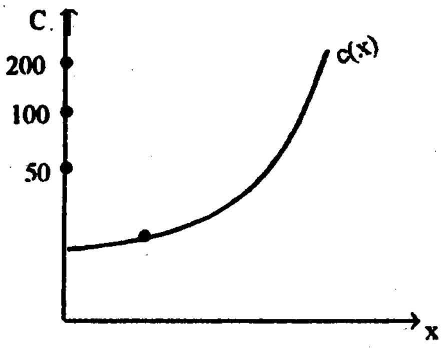
গড়মূল্য অপেক্ষক সাধারণত **U আকৃতি বক্ররেখা।**

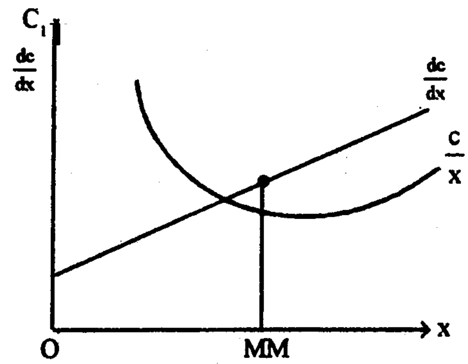
মার্জিনাল অপেক্ষক একটি **সরল রেখা** যার নতিমাত্রা 2a.

উদাহরণ 2. যদি সম্পূর্ণ মূল্য অপেক্ষক $C = \frac{1}{50}x^2 + x + 40$, যেখানে x হল দ্রব্য পরিমাণ। তাহলে গড়মূল্য ও মার্জিনাল মূল্য অপেক্ষক নির্ণয় করুন এবং তাদের লেখচিত্র আঁকুন। (দেওয়া আছে গড়মূল্য $= \frac{C}{x}$, মার্জিনাল মূল্য $= \frac{dC}{dx}$

গড়মূল্য $= \frac{C}{x} = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{50}x^2 + x + 40\right] = \frac{x}{50} + 1 + \frac{40}{x}$

মার্জিনাল মূল্য $= \frac{dC}{dx} = \frac{1}{25}x + 1$





লক্ষ্য করুন : (১) মার্জিন্যাল মূল্যরেখা গড়মূল্য বক্ররেখার লঘিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়।

(২) $\left(\frac{c}{x}\right) \to \alpha$ যদি $x \to 0+$

(৩) গড়মূল্য অপেক্ষক ক্রমবর্ধমান কিন্তু সম্পূর্ণ মূল্য অপেক্ষক সব সময় ক্রম বর্ধমান হয় না।

উদাহরণ 3.

সম্পূর্ণ ক্রয়মূল্য অপেক্ষক $C = ae^{bx}$, $a > 0$, $b > 0$.

গড়মূল্য ও মার্জিনাল অপেক্ষকদ্বয় নির্ণয় করুন এবং ইহাদের লেখচিত্র আঁকুন।

উদাহরণ 4.

নিম্নোক্ত সম্পূর্ণ ক্রয়মূল্য অপেক্ষক সাপেক্ষে, গড়মূল্য অপেক্ষক, মার্জিনাল মূল্য অপেক্ষক নির্ণয় করুন।

(ক) $C = \sqrt{2x+3} + 4$ (খ) $C = 2x^2 \cdot \dfrac{x+1}{x+3} + 2$

(গ) $C = \dfrac{x(x+200)}{(x+100)}$

ধরি x একটি বিশেষ পণ্য, যার চাহিদা বাজারে বর্তমান। কত পরিমাণ x -এর চাহিদা তা অনেকটা পণ্যটির মূল্যের উপর নির্ভরশীল। যদি প্রতি একক পণ্যের মূল্য p হয় এবং x পরিমাণ পণ্য যদি চাহিদা হয়, তাহলে x -কে p -এর অপেক্ষক হিসেবে লেখা সম্ভব; গাণিতিক আকারে লেখা হয়

$x = \phi(p)$

P(p) কে x-এর **চাহিদা অপেক্ষক** বলা হয়।

p স্বাধীন চল, x পরাধীন চল এবং এরা কেবলমাত্র **ধনাত্মক মান গ্রহণ** করে।

যদি p-এর মান বাড়ে তাহলে x-এর মান কমে অর্থাৎ চাহিদা অপেক্ষক টি **ক্রম-হ্রাসমান**।

p কে x-এর নির্ভরশীল ধরা হয়, তখন $p = \psi(x)$ লেখা যায়।

p(x) এবং $\psi(x)$ অপেক্ষক দুটি একমান বিশিষ্ট, সন্তত ও ক্রমহ্রাসমান।

6. **নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির ক্ষেত্রে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :**

(i) $y = x^x$ [উঃ $x^x(\log x + 1)$]

(ii) $y = x^{\log x}$ [উঃ $2\log x \,.\, x^{(\log x - 1)}$]

(iii) $y = x^{x^x}$ [উঃ $x^{x^x}\, x^x\left\{\log x(\log x+1)+\dfrac{1}{x}\right\}$]

(iv) $y = \left(\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}\right)^{1/2}$ [উঃ $\dfrac{-2a^2x}{(a^2+x^2)\sqrt{a^4-x^4}}$]

(v) $y = \left(\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^n$ [উঃ $\dfrac{x.y}{x\sqrt{1-x^2}}$]

7. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

(i) $3x^4 - x^2y + 2y^3 = 0$ [উঃ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x(6x^2 - y)}{x^2 - 6y^2}$]

(ii) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ [উঃ $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$]

(iii) $x = y \log(xy)$ [উঃ $\frac{dy}{dx} = -\frac{y(x-y)}{x(x+y)}$]

(iv) $x^y = y^x$ [উঃ $\frac{y(x\log y - y)}{x(y\log x - x)}$]

(v) $x^y \cdot y^x = 1$ [উঃ $-\frac{y^2(1-\log x)}{x^2(1-\log y)}$]

(vi) $e^{xy} - 4xy = \left[-\frac{y}{x}\right]$

8. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

(i) $x = at^2$, $y = 2at$ [উঃ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$]

(ii) $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = 3at^2/1+t^3$ [উঃ $t(2-t^3)\left[(1-2t^3)\right]$

(iii) $x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = b\cdot\frac{2t}{1+t^2}$ [উঃ $\frac{b}{2at}(t^2-1)$]

(iv) $x = t^2 + \frac{1}{t^2}, y = t + \frac{1}{t}$ [উঃ $\frac{t}{2(t^2+1)}$]

২৬.৩ ক্রমিক অন্তরকলন (Successive Differentiation).

যদি $y = f(x)$, x এর একটি অপেক্ষক হয় তবে $f'(x)$ বা $\frac{dy}{dx}$ সাধারণত আবার x -এর একটি অপেক্ষক হয়। যদি $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ নির্ণেয় হয় তবে এই সীমাকে দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকল সহগ বলে এবং

$f''(x)$ বা $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। অনুরূপে $f'''(x)$, $f^{iv}(x)$.....$f^n(x)$ গুলিকে যথাক্রমে তৃতীয়, চতুর্থ .... n-তম অন্তরকল সহগ বলে। মনে রাখবেন $f^n(x) = \dfrac{d^ny}{dx^n} = y_n = y^{(n)} = D^ny$ etc.

২৬.৩.১ উদাহরণমালা

উদা. মনে করি $y = x^4$, $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3$

আবার $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}(4x^3) = 4\dfrac{d}{dx}(x^3) = 4.3x^2 = 12x^2 = \dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(12x^2) = 12\frac{d}{dx}(x^2) = 24x = \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{d}{dx}(24x) = 24\cdot\frac{d}{dx}(x) = 24 = \frac{d^4y}{dx^4}$$

অর্থাৎ, $\dfrac{d^4y}{dx^4} = 4!$, $\dfrac{d^5y}{dx^5} = 0$

উদা. যদি $y = x^n$ হয়, (n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা) তবে

$$\frac{d^ny}{dx^n} = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1$$

উদা. $y = e^{ax}$, $\therefore$ $y_1 = a\cdot e^{ax}$, $y_2 = a^2e^{ax} \cdots y_n = a^ne^{ax}$

উদা. $y = \dfrac{1}{x+a} = (x+a)^{-1}$, $y_1 = \dfrac{-1}{(x+a)^2} = -1\cdot(x+a)^{-2}$

$y_2 = (-1)(-2)(x+a)^{-3}$ অনুরূপে $y_n = \dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$

$= (-1)^2.1.2.(x+a)^{-3}$

উদা. $y = (ax+b)^m$ হলে $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ নির্ণয় করুন।

$$\frac{dy}{dx} = m(ax+b)^{m-1}.a,\ \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)(ax+b)^{m-2}.a^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-3)(ax+b)^{m-3}.a^3$$

উদা. $y = \log_e(x+a)$ হইলে $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করুন।

$$\frac{dy}{dx} = +\frac{1}{x+a}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(+\frac{1}{x+a}\right) = \frac{-1}{(x+a)^2}$$

অনুরূপে দেখান যায় যে $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)\,!}{(x+a)^n}$

উদা. $y = \frac{1}{x^2-a^2}$ হলে $\frac{d^ny}{dx^n}$ নির্ণয় করুন।

$$y = \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{1}{x-a}\right) - \frac{1}{2a}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{1}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{2a}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{(x+a)^2}$$

$$= \frac{1}{2a}\left[(-1)\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{(-1)}{(x+a)^2}\right]$$

অনুরূপে, $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{(-1)^n\, n\,!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right]$

উদা. $x = at^2$, $y = 2at$ হলে দেখান যে $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2at^3}$

$$\frac{dx}{dt} = 2at, \frac{dy}{dt} = 2a \;\therefore\; \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \left(-\frac{1}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{2at}$$

$$= -\frac{1}{2at^3}$$

২৬.৩.২ প্রশ্নমালা,

1. $y = x^2\log_e x$ হলে y_3 নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{2}{x}$]

2. $y = e^{\frac{1}{x}}$ হলে y_3 নির্ণয় করুন। [উঃ $-\frac{1}{x^6}\left(6x^2+6x+1\right)$]

3. $y = \frac{\log_e x}{x}$ হলে দেখান যে $y_2(1) = -3$

4. $y = x^2 e^x$ হলে দেখান যে $y_2(0) = 2$

5. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ হলে y_2 নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{-2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}$]

6. যদি $x = f(t)$, $y = q(t)$ হয় তবে দেখান যে

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_1^3} \left[x_1 = \frac{dx}{dt}, y_1 = \frac{dy}{dt}\right]$$

7. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে y_2 নির্ণয় করুন।

(i) $y = \sqrt{x}$ [উঃ $-\frac{1}{4x^{3/2}}$]

(ii) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ [উঃ $\frac{h^2 - ab}{(hx + by)^3}$, $hx + by \neq 0$]

৪. যদি $y = x^2 \log_e x$ হয় তবে দেখান যে $xy_3 = 2$.

9. $y = xe^{-x}$ হলে দেখান যে $xy_2 + xy_1 + y = 0$.

২৬.৪ অপেক্ষকের বিস্তৃতি (Expansion of a function)

টেলরের উপপাদ্য : (সসীম আকার) (নিম্নের উপপাদ্যগুলি প্রমাণ ছাড়া বিবৃত হল)

যদি (i) $f^{n-1}(x)$, $a \le x \le b$ বদ্ধ পরিসরে সন্তত হয় এবং

(ii) $f^n(x)$ $a < x < b$ মুক্ত পরিসরে নির্ণেয় হয় তবে

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots$$

$$+ \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!}f^n(\xi), a < \xi < b \qquad \text{— (A)}$$

[প্রমাণ দেওয়া হল না]

যদি $b = a + h$ হয় অর্থাৎ $b - a = h$ তবে

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)}f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{n!}f^n(a + \theta h)$$

যেখানে $0 < \theta < 1$ — (B)

a এর জায়গায় x বসালে পাওয়া যায়

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)}f^{n-1}(x)+\frac{h^n}{n!}f^n(x+\theta h)$$

$$0<\theta<1 \text{ — (C)}$$

যেখানে টেলরের উপপাদ্যের শর্তগুলি (x, x + h) এই অন্তরালে সত্য। n সংখ্যক পদের পর (A), (B) ও (C)-তে অবশিষ্ট $\frac{(b-a)^n}{n!}f^n(\xi)$ বা, $\frac{h^n}{n!}f^n(a+\theta h)$ বা, $\frac{h^n}{n!}(x+\theta h)$, $0<\theta<1$

পদগুলিকে R_n দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং n পদের পর অবশিষ্ট পদ বলা হয়। এখানে R_n ল্যাগ্রঞ্জের আকারে প্রকাশিত। (Lagrange's form of remainder).

টেলরের উপপাদ্যের (C) -তে যদি x = 0 এবং h-এর পরিবর্তে x লেখা হয় তবে পাওয়া যায়

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+\frac{x^n}{n!}f^n(\theta x),\ 0<\theta<1$$

একে সসীম আকারের ম্যাকলরিনের শ্রেণী বলা হয়।

২৬.৪.১ ম্যাকলরিনের উপপাদ্য (সসীম আকার)

যদি (i) $f^{n-1}(x), 0\le x\le h$ বদ্ধ পরিসরে সন্তত হয় এবং

(ii) $f^n(x)$, $0<x<h$ মুক্ত পরিসরে নির্ণেয় হয় তবে

$$f(h)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+R_n,\ 0<\theta<1$$

এখানে $R_n=\frac{h^2}{n!}f^n(\theta h)$

h = x বসিয়ে পাওয়া যায়

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+R_n,\ 0<\theta<1$$

ইহাকে x = 0 সামীপ্যে, f (x) এর বিস্তার (সসীম আকারে) বলা হয়।

উদা. 1. দেখান যে

$$\log_e(x+h)=\log_e x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{h^{n-1}}{(n-1)x^{n-1}}+R_n$$

এখানে $R_n=\frac{h^2}{n!}f^n(x+\theta h)$

মনে করি, $f(x) = \log_e x$, অতএব $f^n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\ x^{-n}$

$\therefore$ $f^n(x)$ নির্ণেয় যখন $x > 0$.

$\therefore$ টেলরের উপপাদ্য থেকে পাই

$$\log_e(x+h) = \log_e x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3\cdot x^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{h^{n-1}}{(n-1)x^{n-1}} + R_n$$

$$R_n = (-1)^{n-1}\frac{h^n}{n}\frac{1}{(x+\theta h)^n},\ 0 < \theta < 1$$

উদা. 2. যদি $f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(\theta h)$, $0 < \theta < 1$ হয়,

তবে $h = 1$ হলে θ-র মান নির্ণয় করুন। যেখানে আছে $f(x) = (1-x)^{5/2}$

$f(h) = (1-h)^{5/2}$ $\therefore$ $f'(h) = -\frac{5}{2}(1-h)^{3/2}$, এবং $f''(h) = \frac{15}{4}(1-h)^{1/2}$

$\therefore$ $f(0) = 1$ এবং $f'(0) = -5/2$

$$(1-h)^{5/2} = 1 - \frac{5}{2}h + \frac{h^2}{2!}\cdot\frac{15}{4}(1-\theta h)^{1/2}$$

$h = 1$ বসালে পাই $0 = 1 - \frac{5}{2} + \frac{15}{8}(1-\theta)^{1/2}$

বা, $(1-\theta)^{1/2} = \frac{4}{5}$ বা, $(1-\theta) = \frac{16}{25}$ বা, $1 - \frac{16}{25} = \theta$

বা, $\theta = \frac{9}{25}$

২৬.৪.২ প্রশ্নমালা

নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির $x = 0$ সাপেক্ষে সসীম আকারে বিস্তার নির্ণয় করুন ঃ

(1) $(1-x)^{-1}$ যেখানে $x < 1$ [উঃ $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + R_n$,

$R_n = x^n(1-\theta x)^{-n-1}$]

(2) $\log_e(1-x)$ [উঃ $-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \cdots - \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n$ যখন $x < 1$ $R_n = \frac{-x^n}{n}(1-\theta x)^{n-1}$]

(3) $(a + x)^m$ [উঃ $a^m + mx \cdot a^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 a^{m-2} + \cdots$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}a^{m-n+1} + R_n$$

$$R_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n(a+\theta x)^{m-n},\ 0<\theta<1 \Big]$$

(4) $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$ এবং $f(x) = Ax^2 + Bx + C, (A \neq 0)$

হলে দেখান যে $\theta = \frac{1}{2}$

5. $f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(\theta h),\ 0 < \theta < 1$

এবং $f(x) = \frac{1}{1+x}$ হলে θ-র মান নির্ণয় করুন

যখন $h = y$ [উঃ $\theta = \frac{1}{7}$]

২৬.৪.৫ টেলরের উপপাদ্য (অসীম আকার) (Taylor'stheorems(Infinite expansion)

n-এর যে কোনও ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা মানের জন্য (n যত বড়ই হোক) যদি n-ক্রমের অন্তরকলজ $f^n(x)(x-\delta,\ x+\delta)$ বদ্ধপরিসরে নির্ণেয় এবং সসীম হয় এবং যদি $R_n \to 0$ হয় যখন $n \to \infty$ হয় তবে

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots\infty \text{ পর্যন্ত } [|h| < \delta]$$

অর্থাৎ f (x + h)-কে x বিন্দুর সাপেক্ষে অসীম শ্রেণীর টেলর বিস্তৃতি করা যায়।

ম্যাক্‌লরিনের উপপাদ্য (অসীম আকার) (Maclaurin's infinite power series expansion)

n এর যে কোনও ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা মানের জন্য (n যত বড়ই হোক) যদি n-ক্রমের অন্তরকলজ $f^n(x)$ (− δ, δ) বদ্ধপরিসরে নির্ণেয় এবং সসীম হয় এবং যদি $R_n \to 0$ হয় যখন $n \to \infty$ তবে

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \cdots\infty \text{ পর্যন্ত} \qquad [|h| < \delta]$$

উদা 1. x-এর ক্রমবর্ধমান খাতে e^x -এর বিস্তার (অসীম আকারে) নির্ণয় করুন।

মনে করি $f(x) = e^x\ \therefore\ f^n(x) = e^x,\ \therefore\ f^n(0) = 1$. সুতরাং $f^n(x)$ নির্ণেয় এবং সসীম n -এর মান যত বড়ই হোক।

$$\therefore\ R_n = \frac{x^n}{n!}f^n(\theta x) = \frac{x^n}{n!}e^{\theta x},\ 0 < \theta < 1$$

যেহেতু $e^{\theta x} < e^{|x|}$ (সসীম) এবং $\frac{x^n}{n!} \to 0$ যখন $n \to \infty$

অর্থাৎ, $R_n \to 0$ যখন $n \to \infty$.

$\therefore\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \infty$ পর্যন্ত।

যে কোনও সসীম x-এর জন্য।

উদা 2. x -এর ক্রমবর্ধমান খাতে $\log(1+x)$ এর বিস্তার (অসীম শ্রেণী আকারে) নির্ণয় করুন।

মনে করি $f(x) = \log_e(1+x)$ $\therefore\ f^n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$

এবং $f^n(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

এখানে $\log_e(1+x)$ এবং ইহার বিভিন্ন ক্রমের অন্তরকলন সন্তত হবে যখন $x > -1$

$R_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^n}$ যেখানে $0 < \theta < 1$. উচ্চতর গণিতে দেখানো সম্ভব যে $R_n \to 0$ যখন $-1 < x \leq 1$.

সুতরাং ম্যাক্‌লরিনের উপপাদ্য অনুসারে

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots -1 < x \leq 1$$

২৬.৪.৬ প্রশ্নমালা

নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির x এর ক্রমবর্ধমান খাতে অসীম শ্রেণী আকারে বিস্তার নির্ণয় করুন।

(1) $\log(1-x)$ $\left[\text{উঃ } -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots\right]$

(2) $\frac{1}{1+x}$ [উঃ $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots |x|1$]

(3) e^{x+h} $\left[\text{উঃ } e^h\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\right]$

(4) $\frac{1}{1+x^2}$ [উঃ $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots, -1 < x < 1$]

5. দেখাও যে

(i) $e^x = e\left[1 + \frac{(x-1)}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \cdots \text{ অসীম পর্যন্ত }\right]$

(ii) $e^x \log(1+x) = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{9x^5}{5!} + \cdots$

(iii) $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}(x-2)+\frac{1}{2^3}(x-2)^2-\cdots,\ (0<x<4)$

(iv) $a^x=1+x\log_e a+\frac{x^2}{2!}(\log a)^2+\frac{x^3}{3!}(\log a)^3+\cdots$ x এর সব মানের জন্য।

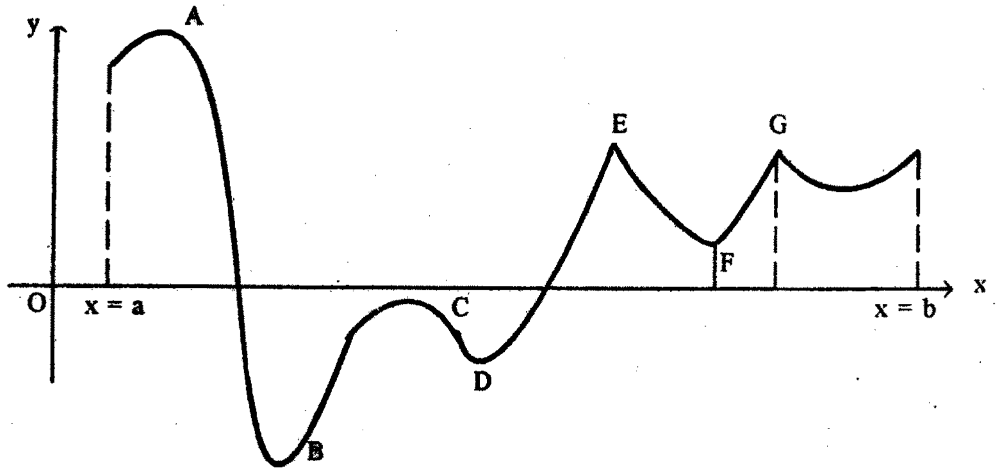
২৬.৫ অপেক্ষকের চরমমান (Extreme values of Functions) — ঊর্ধ্ব চরম মান (Local Maximum) নিম্ন চরম মান (Local Minimum)

মনে করি, $y = f(x)$ অপেক্ষকটি $x = c$ এর সামীপ্যে সংজ্ঞাত। $f(x)$ অপেক্ষকটি $x = c$ তে স্থানীয় ভাবে **ঊর্ধ্ব চরম মান** প্রাপ্ত হয়েছে বলা হবে যদি, $x = c$ এর একটি সামীপ্যে x এর যে কোনও মানের জন্য $f(c) > f(x)$ হয়।

অর্থাৎ যদি $f(c+h) - f(c) < 0$ যখন $|h|$ যথেচ্ছ ছোট।

অনুরূপে $f(x)$, $x = d$ তে **নিম্ন চরম মান** প্রাপ্ত হবে যদি x -এর একটি সামীপ্যে x এর সকল মানের জন্য $f(d) < f(x)$ হয়।

অর্থাৎ, $f(d+h) - f(d) > 0$, যখন $|h|$ যথেচ্ছ ছোট।



উপরের চিত্রে $x = a$ এবং $x = b$ এর মধ্যে $f(x)$ এর চিত্র অংকিত হয়েছে। A, B, C, D, G বিন্দুগুলিতে অংকিত স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল। A, C, E বিন্দুগুলিতে $f(x)$ স্থানীয়ভাবে ঊর্ধ চরম মান প্রাপ্ত হয়েছে এবং B, D, F বিন্দুগুলিতে স্থানীয় ভাবে নিম্ন চরম মান প্রাপ্ত হয়েছে। মনে রাখতে হবে যে, কোনও বিন্দুতে নিম্ন চরম মান অন্য কোনও বিন্দুতে ঊর্ধ চরম মান অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে। G এবং H বিন্দুতে $f(x)$ এর কোন চরম মান নেই। x এর যে মানের জন্য $f(x)$ এর চরম মান আছে তাকে চরম বিন্দু (extremum pt.) বলে।

উপপাদ্য 1. যদি $f''(c)$ নির্ণেয় হয় এবং $f'(c) = 0$ হয়, কিন্তু $f''(c) \neq 0$ তবে $f(x)$, $x = c$-তে ঊর্ধ চরম মান প্রাপ্ত হবে যদি $f''(c) < 0$ হয় ; $x = c$ -তে $f(x)$ নিম্ন চরম মান প্রাপ্ত হবে যদি $f''(c) > 0$ হয়।

উপপাদ্য 2. যদি $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{n-1}(c) = 0$ **এবং** $f^n(c) \neq 0$ তবে (i) n যুগ্ম সংখ্যা হলে f (0), f (x) -এর ঊর্ধ চরম মান। যদি $f^n(c) < 0$ এবং x = c বিন্দুতে f (x) নিম্ন চরম মান প্রাপ্ত হবে যদি $f^n(c) > 0$ হয়।

(ii) যদি n অযুগ্ম সংখ্যা হয় তবে f (c)-র কোনও চরম মান নেই।

উদা 1. x এর যে মানগুলির জন্য $x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ এর চরমমান আছে সেই মানগুলি নির্ণয় করুন।

মনে করি, $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x^2 - 6x + 5)$

$\therefore f'(x) = 0$ থেকে পাই $x^2 - 6x + 5 = 0$ বা, $x - 5x - x + 5 = 0$

বা, $(x - 5)(x - 1) = 0$ অতএব $x = 1$ এবং $x = 5$ বিন্দুদ্বয়ে f (x) -এর চরম মান থাকতে পারে। এখন $f''(x) = 6x - 18$, এখন $f''(1) < 0$ এবং $f''(5) > 0$

সুতরাং x = 1 বিন্দুতে f (x) -এর ঊর্ধ চরম মান আছে এবং x = 5 বিন্দুতে f (x)-এর নিম্ন চরম মান আছে।

f (x) -এর ঊর্ধ চরম মান $= 1^3 - 9 \times 1^2 + 15 \times 1 - 3 = 1 - 9 + 5 - 3 = 4$

f (x) এর নিম্ন চরম মান $= 5^3 - 9 \times 5^2 + 15 \times 5 - 3$

$= 125 - 225 + 75 - 3 = -28$

উদা 2. দেখান যে $x + \frac{1}{x}$ এর ঊর্ধ চরম মান উহার নিম্ন চরম মান অপেক্ষা ছোট।

মনে করি, $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ $\therefore f'(x) = 0$ থেকে পাই $\frac{1}{x^2} = 1$ বা, $x^2 = 1$

$\therefore x = \pm 1$

এখন $f''(x) = +\frac{2}{x^3}$ $\therefore f''(1) > 0$ এবং $f''(-1) < 0$

সুতরাং অপেক্ষকটির x = – 1-এ ঊর্ধ চরম মান আছে এবং x = 1 -এ-নিম্ন চরম মান আছে।

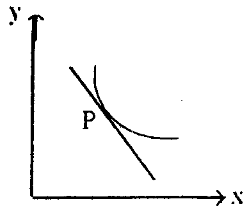
ঊর্ধ চরম মান = – 2 এবং নিম্নচরমমান = 2

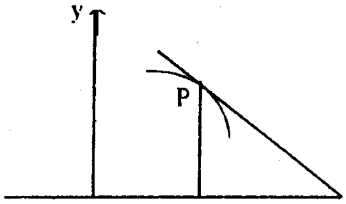
∴ ঊর্ধ চরম মান < নিম্ন চরম মান।

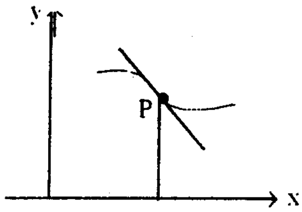
২৬.৫.১ বক্ররেখার কোনও বিন্দুতে অবতলতা ও উত্তলতা (Concavity and Convexity).

ধরা যাক y = f (x) একটি বক্ররেখার (আয়তক্ষেত্রাকার অক্ষরেখাদ্বয়ের সাপেক্ষে) সমীকরণ। ঐ বক্ররেখার এমন একটি বিন্দু যার স্পর্শক y-অক্ষের সমান্তরাল নয়। এখন বক্ররেখাটি যদি ঐ স্পর্শককে M বিন্দুতে অতিক্রম করে স্পর্শকের একধার থেকে অন্যধারে না যায়, তা হলে আমরা বলি যে বক্ররেখাটি P

বিন্দুতে ধনাত্মক y-অক্ষ দিকে অবতল (Concave) । যদি বক্ররেখাটি ঐ স্পর্শকের সাপেক্ষে ধনাত্মক y-অক্ষ দিকে থাকে। আবার যদি বক্ররেখাটি স্পর্শকের সাপেক্ষে ঋণাত্মক y-অক্ষের দিকে থাকে, তবে আমরা বলি বক্ররেখাটি ঋণাত্মক y-অক্ষ দিকে অবতল অথবা বক্ররেখাটি ঐ বিন্দুতে ধনাত্মক y-অক্ষ দিকে উত্তল (Convex)।







(i) অবতল বিন্দু (ii) উত্তল বিন্দু (iii) ইনফ্লেক্সন বিন্দু

উদা 3. দেখান যে $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 4$ এর কোনও চরম মান নেই।

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 24 = 3(x^2 - 4x + 8)$

$\quad = 3\,[\,(x-2)^2 + 4\,]$

এখানে $f'(x)$, x -এর কোনও মানের জন্যই শূন্য হবে না।

অতএব $f(x)$ -এর কোনও চরম মান নেই।

২৬.৫.২ প্রশ্নমালা

(1) $f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x - 2$ হলে কোনও বিন্দুতে $f(x)$ -এর ঊর্ধ্ব চরম মান এবং নিম্ন চরম মান আছে নির্ণয় করুন।

[উঃ $x = \frac{1}{2}$ (ঊর্ধ্ব চরম মান
$x = 2$ (নিম্ন চরম মান]

(2) দেখান যে $x^3 - 6x^2 + 12x - 3$ এর $x = 2$ বিন্দুতে কোনও চরম মান নেই।

(3) দেখান যে $x^3 - 3x^2 + 6x + 3$ এর কোনও চরম মান নেই।

(4) নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির চরম মান নিয়ে আলোচনা করুন।

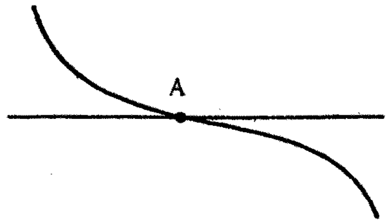
(i) x^6 [$x = 0$ তে নিম্ন চরম মান আছে]

(ii) $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4$ [$x = 1$-এ নিম্ন চরম মান, $x = 0$-তে ঊর্ধ্ব চরম মান]

(5) দেখান যে, $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ -এর ঊর্ধ্ব চরম মান $e^{\frac{1}{e}}$

(6) দেখান যে $x/\log_e x$ এর নিম্ন চরম মান e.

ইনফ্লেকশন বিন্দু (Point of Inflexion) : কোনও বক্ররেখার কোনও নির্দিষ্ট বিন্দু A -তে স্পর্শকরেখা বক্ররেখাটিকে অতিক্রম করে। এমত অবস্থায় বক্ররেখাটি P-এর সাপেক্ষে (স্পর্শক রেখার উপর অবস্থিত নহে।) A-এর একদিকে অবতল এবং অপর পার্শ্বে উত্তল হয়।



এরূপ বিন্দু A-কে f (x) অপেক্ষকটির ইন্‌ফ্লেকশন বিন্দু বলে।

টীকা : (i) যদি একটি বক্ররেখা y = f (x)-এর A বিন্দুতে $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ এবং $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$ হয় তবে A বিন্দু ইনফ্লেক্শন বিন্দু হবে।

উদা 1. দেখান যে $\left(a-2,-\frac{2}{e^2}\right)$, $y=(x-a)e^{x-a}$ অপেক্ষকের ইন্‌ফ্লেকশন বিন্দু।

$$y=(x-a)e^{x-a} \quad \therefore \ \frac{dy}{dx}=e^{x-a}+(x-a)e^{x-a}=(1+x-a)e^{x-a}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(2+x-a)e^{x-a}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=(3+x-a)e^{x-a}$$

x = a − 2 বিন্দুতে (যেখানে $y = -2e^{-2}$) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$

এবং $\frac{d^3y}{dx^3}=e^{-2}\neq 0$

অতএব $\left(a-2, {-2}/{e^2}\right)$ একটি ইনফ্লেকশন বিন্দু।

২৬.৫.৩ প্রশ্নমালা

1. দেখান যে মূল বিন্দু $y = x^2\log_e (1-x)$ এর একটি ইনফ্লেকশন বিন্দু।

2. $c^2y = (x-a)^3$ এর ইনফ্লেকশন বিন্দু নির্ণয় করুন। [উঃ (a, 0)]

২৬.৬ আংশিক অন্তরকলন প্রক্রিয়া (Partial Differentiation).

সংজ্ঞা : যদি তিনটি চলরাশি u, x, y এরূপ ভাবে সম্পর্ক যুক্ত হয় যে x, y এর যে কোনও এক জোড়া মানের জন্য u-এর একটি মাত্র মান পাওয়া যায় যেখানে $a \le x \le b$ এবং $c \le y \le d$, তবে u-কে অনধীন দুইটি চলরাশি x এবং y-এর অপেক্ষক বলা হয় এবং লেখা হয় $u = f(x, y)$.

উদা. একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল A, ত্রিভুজটির ভূমির দৈর্ঘ্য b এবং উচ্চতা h এর উপর নির্ভরশীল। অর্থাৎ $A = f(b, h)$.

অনুরূপভাবে তিনটি অথবা অধিক নিরপেক্ষ চলরাশির অপেক্ষকের সংজ্ঞা দেওয়া যায়।

আংশিক অন্তরকলন : মনে করি, $u = f(x, y)$. x -এর সাপেক্ষে u এর আংশিক অন্তরকলন $\frac{\partial u}{\partial x}$ বা f_x বা u_x হল y এর মান অপরিবর্তিত রেখে শুধুমাত্র x এর সাপেক্ষে u এর অন্তরকলন।

অর্থাৎ $\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$ যখন এই সীমা নির্ণেয় হয়। অনুরূপে x এর মানকে অপরিবর্তিত রেখে y-এর সাপেক্ষে অন্তরকলনকে y সাপেক্ষ u-এর আংশিক অন্তরকলন পাওয়া যায়

অর্থাৎ, $\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$ যখন এই সীমা নির্ণেয় হয়।

উদা 1. মনে করি $u = f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2$

এখানে $\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax + 2hy$ এবং $\frac{\partial u}{\partial y} = 2hx + 2by$

সাধারণত $\frac{\partial u}{\partial x}$ বা $\frac{\partial u}{\partial y}$ আবার x, y এর অপেক্ষক। সুতরাং দ্বিতীয়, তৃতীয় ... ক্রমের অপেক্ষক নির্ণয় করা যেতে পারে।

এদের $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u_{yx}$ চিহ্নের দ্বারা নির্দেশ করা হয়। যেহেতু অনেক ক্ষেত্রে $u_{xy} = u_{yx}$ হয়, আমাদের আলোচনায় আমরা $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ ধরব।

উদা 2. $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ হলে f_x, f_y নির্ণয় করুন।

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[\log_e(x^2+y^2)\right] = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad \left(\because \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial (x^2+y^2)} \cdot \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial x}\right)$$

অন্তরকলনের নিয়ম প্রয়োগ করে

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[\log(x^2+y^2)\right] = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

উদা 3. $f(x,y)=e^{x^2+xy+y^2}$ হলে f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} নির্ণয় করুন।

$$f_x = e^{x^2+xy+y^2}\ 2x+y\ ,\ f_{xx}=\frac{\partial f_x}{\partial x}=e^{x^2+xy+y^2}\cdot(2x+y)^2+2e^{x^2+xy+y^2}$$

(যেহেতু এখানে y অপরিবর্তিত)

$$f_{xy}=\frac{\partial f_x}{\partial x}=e^{x^2+xy+y^2}\ (x+2y)(2x+y)+e^{x^2+xy+y^2}\cdot 1\cdot$$

$$f_y = e^{x^2+xy+y^2}\cdot(x+2y)$$

$$f_{yx}=e^{x^2+xy+y^2}\cdot(x+2y)(2x+y)+e^{x^2+xy+y^2}\cdot 1\cdot$$

এখানে আমরা দেখিলাম $f_{xy} = f_{yx}$.

২৬.৬.১ প্রশ্নমালা

1. $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ হলে fx , fy নির্ণয় করুন। $\left[\text{উঃ } -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}},\ -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right]$

2. f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} নির্ণয় করুন যেখানে $f(x,y)=\log(x^2y+xy^2)$

$$\left[\text{উঃ } -\left\{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right\}, -\frac{1}{(x+y)^2},\ -\left\{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right\}\right]$$

3. যদি $V = x^2 + y^2 + z^2$ হয়, দেখান যে $xV_x+yV_y+zV_z=2V$

4. যদি $U = f(xyz)$ হয় দেখান যে $xU_x=yU_y=zU_z$

5. $u = \log(x^2 + y^2)$ হলে দেখান যে $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

২৬.৭ সমঘাতী অপেক্ষক (Homogeneous Function).

সংজ্ঞা : $f(x, y)$ অপেক্ষকটিকে n ডিগ্রীর সমঘাতী অপেক্ষক বলা হয় যদি t -এর যে কোনও মানের জন্য $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ হয়। (n একটি বাস্তব সংখ্যা)

উদা. $f(x,y)=ax^2+2hxy+by^2$

$\therefore\ f(tx, ty) = (at^2x^2 + 2h\,tx\,ty + bt^2y^2) = t^2(ax^2 + 2hxy + by^2)$

সুতরাং f (x, y) দুই ডিগ্রীর সমঘাতী অপেক্ষক।

অয়লারের উপপাদ্য (Euler's theorem)

যদি x, y এর অপেক্ষক f (x, y) n ডিগ্রীর সমঘাতী অপেক্ষক হয় তবে $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$

উদা. $u = ax^2 + 2hxy + by^2$ হলে অয়লার উপপাদ্যের যথার্থতা নির্ণয় করুন।

এখানে u একটি দুই ডিগ্রীর সমঘাতী অপেক্ষক।

এখন $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2ax + 2hy$, $\therefore\ x\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2ax^2 + 2hxy$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2hx + 2by$ $\therefore\ y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2hxy + 2by^2$

$\therefore\ x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2(ax^2 + by^2 + 2hxy) = 2u$

অতএব যথার্থতা প্রমাণিত।

টীকা : মনে করি f (x, y) = 0 একটি অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষক। তা হলে y -এর এক্ষনে অন্তরকলন পাওয়া যায় $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f_x}{f_y}\ (fy \neq 0)$

উদা. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ হলে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

এখানে y -কে x-এর অপেক্ষক ধরে উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করলে পাই

$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\dfrac{dy}{dx} = 0$ বা, $\dfrac{dy}{dx} = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{1/3}$

আবার, $f_x = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ এবং $f_y = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f_x}{f_y} = -\dfrac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

২৬.৭.১ প্রশ্নমালা

1. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির সমঘাতী দেখান ও অয়লারের উপপাদ্যের যথার্থতা দেখান।

(i) $u = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3y^2x$

(ii) $u = \frac{x-y}{x+y}$

(iii) $u = \left(x^{1/4} + y^{1/4}\right)\left(x^{1/5} - y^{1/5}\right)$

(iv) $u = \log y - \log x$.

2. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

(i) $e^x + e^y = 2xy$ $\left[\text{উঃ } \frac{e^x - 2y}{2x + e^y}\right]$

(ii) $x^y + y^x = a^b$ $\left[\text{উঃ } \frac{yx^{y-1} + y^x \log y}{xy^{x-1} + x^y \log x}\right]$

(iii) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ $\left[\text{উঃ } -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}\right]$

3. যদি $v = f(u)$ হয় যেখানে $u(x, y)$ n ডিগ্রীর সমঘাতী অপেক্ষক, তবে দেখান যে $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} = nu\frac{\partial v}{\partial u}$

4. যদি $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ হয় তবে $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ নির্ণয় করে দেখান যে $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

5. $z = \frac{x}{x^2 + y^2}$ হলে দেখান যে $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

২৬.৮ অনুশীলনী

১। ম্যাকলরিন উপপাদ্যের সাহায্যে (i) $f(x) = xe^x$ এবং (ii) $f(x) = \frac{x+1}{1+x}$ এর বিস্তৃতি (সসীম আকারে) প্রকাশ করুন।

২। টেলার উপপাদ্যের সাহায্যে $f(x) = \log x$ বা $(x-1)$ এর বিস্তৃতি (সসীম আকারে) প্রকাশ করুন।

৩। $v(x) = 4(a-x)^2. x$ অপেক্ষকটির চরম মানসমূহ নির্ণয় করুন।

৪। e^x-এর বিস্তৃতি নির্ণয় করুন (টেলর উপপাদ্যের সাহায্যে)।

একক ২৭ ❑ সমাকলন এবং এর জ্যামিতিক তাৎপর্য

গঠন

২৭.৬ **সমাকলনের দ্বারা ক্ষেত্রফল নির্ণয়**

২৭.৬.১ প্রশ্নমালা

২৭.৭ **অনুশীলনী**

২৭.০ উদ্দেশ্য

এই এককে অপেক্ষকের সমাকলের ধারণা, সমাকলের ধর্ম, কতিপয় আদর্শ সমাকলন, সমাকলন পদ্ধতি, আংশিক সমাকলন, মূলদ ভগ্নাংশের সমাকলন আলোচিত হয়েছে।

এছাড়া নির্দিষ্ট সমাকল ও তার মূল উপপাদ্য, নির্দিষ্ট সমাকলের কয়েকটি ধর্ম, সমাকলনের সাহায্যে ক্ষেত্রফল ধারণা দেওয়া হয়েছে। প্রতিটি বিষয়ে ধারণা সহজতর করার জন্য নানা উদাহরণের সাহায্য নেওয়া হয়েছে।

২৭.১ অন্তরকলনের বিপরীত প্রক্রিয়া হিসাবে অনির্দিষ্ট সমাকল (Indefinite Integral as the inverse of differential)

আমরা একটি x -এর অপেক্ষক ϕ (x), জানতে চাই যার অন্তরকলন একটি পরিচিত অপেক্ষক f (x), সুতরাং

$$\frac{d f(x)}{dx} = \phi(x) \quad \ldots \; (3.2.1)$$

(৩.২.১) সমীকরণটি হতে f (x) এর সম্পূর্ণ ধারণা পাওয়া যায় না। আমরা জানি যদি f (x) এর সাথে একটি ধ্রুবক যোগ করি তবে তার অন্তরকলনের কোনও পরিবর্তন হয় না, অতএব, যদি f (x) (3.2.1) সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে, তখন f (x) -এর স্থানে g (x) = f (x) + c বসালেও এই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

অনির্দিষ্ট সমাকলনের সংজ্ঞা (Definition of Indefinite Integral) :

যে সকল অপেক্ষক f (x) (3.2.1) সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে তাকে ϕ (x) অপেক্ষকের **অনির্দিষ্ট সমাকলন** বলা হয় এবং তা $\int \phi(x)dx$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(৩.২.১) সমীকরণটির যে কোনও সমাধান, f (x) সমাধানের বিয়োগ ফল একটি ধ্রুবক হয়। যদি সমীকরণটির অন্য একটি সমাধানকে g (x) দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাহলে

$$\frac{d}{dx}[-f(x) + g(x)] = \phi(x) - \phi(x) = 0$$

অর্থাৎ – f (x) + g (x) = ধ্রুবক সংখ্যা = c (ধরিলাম)

$\therefore$ g (x) = f (x) + c

এখানে c একটি যে কোনও বাস্তব ধ্রুবক রাশি।

২৭.১.১ অপেক্ষকের সমাকল

এখানে কয়েকটি অপেক্ষকের অবকল এবং তাদের সমাকল দেওয়া হল।

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, n\int x^{n-1}dx = x^n + c$

$\frac{d}{dx}(e^{kx}) = ke^{kx}, k\int e^{kx}dx = e^{kx} + c$

$\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}, \int \frac{1}{x}dx = \log_e x + c$ যখন $x > 0$

$\frac{d}{dx}(\sin mx) = m\cos mx, m\int \cos mx dx = \sin mx + c$

$\frac{d}{dx}(\cos mx) = -m\sin mx$, অতএব $-m\int \sin mx dx = \cos mx + c$

যদি $(n-1) = m$ ধরা হয়, তাহলে $n = m + 1$ এবং $\int x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n} + c$

বা, $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$ যদি $m + 1 \neq 0$ অর্থাৎ যদি $m \neq -1$

যদি $m = -1$, তাহলে $\int x^m dx = \int \frac{dx}{x} = \log_e|x| + c$

এই সূত্রটি x -এর ধনাত্মক ও ঋনাত্মক মান-এর জন্য সিদ্ধ করে না যদি $x > 0$, $\log_e x$-এর মান নির্ণয় করা যায়। আর যদি $x < 0$, তা হলে $\log(x)$-এর মান অনির্ণেয় কিন্তু $\log(-x)$ নির্ণয় করা সম্ভব। এজন্য

$\int \frac{dx}{x} = \log_e|x| + c$

সূত্রটি $x = 0$ ছাড়া সকল ধনাত্মক ও ঋনাত্মক মানের জন্য প্রযোজ্য।

২৭.১.২ সমাকলের সাধারণ ধর্ম্ম

যদি $f(x)$ ও $g(x)$ দুটি অপেক্ষক হয়, তাহলে

$\int [Af(x) \pm Bg(x)]\,dx = A\int f(x)\,dx \pm B\int g(x)\,dx$

এখানে A ও B দুটি ধ্রুবক সংখ্যা

সীমিত সংখ্যক অপেক্ষক $f_1(x), f_2(x), ...f_n(x)$ এর জন্য

$$\int [A_1f_1(x) \pm A_2f_2(x) \pm \cdots \pm A_nf_n(x)]\,dx = A_1\int f_1(x)\,dx \pm A_2\int f_2(x)\,dx \;.....$$

$$\pm A_n\int f_n(x)dx$$

কয়েকটি উদাহরণ

১। $\int\left(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k\right)dx$

$= a_0\int x^k dx + a_1\int x^{k-1}dx + \cdots + a_{k-1}\int x dx + a_k\int x^0 dx$

$= \frac{a_0}{k+1}x^k + a_1\frac{x^k}{k} + \cdots + a_{k-1}\frac{x^2}{2} + a_k{}^x + c$

২। সমাকল নির্ণয় করুন (i) $\int(2+x)^3dx = \int(8+12x+6x^2+x^3)dx$

$= 8\int dx + 12\int xdx + 6\int x^2dx + \int x^3dx$

$= 8x + 6x^2 + 2x^3 + \frac{x^4}{4} + c$

(ii) $\int\frac{x^2+2x+3}{x}dx$

$= \int\left(x+2+\frac{3}{x}\right)dx$

$= \int xdx + 2\int dx + 3\int\frac{1}{x}dx$

$= \frac{x^2}{2} + 2x + 3\log|x + c$

৩। সমাকলন নির্ণয় করুন ঃ

(i) $\int\frac{2e^{2x}+3e^{4x}+4}{e^{3x}}dx$

$= \int\frac{2e^{2x}}{e^{3x}}dx + \int\frac{3e^{4x}}{e^{3x}}dx + \int\frac{4}{e^{3x}}dx$

$= 2\int e^{-x}dx + 3\int e^{x}dx + 4\int e^{-3x}dx$

$= -2e^{-x} + 3e^{x} - \frac{4}{3}e^{-3x} + c$

(ii) $\int\left(e^{a\log x} + e^{x\log a}\right)dx$

$= \int x^a dx + \int a^x dx$

$= \frac{x^{a+1}}{a+1} + \frac{1}{\log_e a}a^x + c$ (যেখানে $a+1 \neq 0$ এবং $a > 0$)

২৭.১.৩ প্রশ্নমালা

1. x -এর সাপেক্ষে সমাকলন করুন :

(i) $\sqrt[3]{x}$ [উঃ $\frac{3}{4}x^{4/3}+c$]

(ii) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ [উঃ $\frac{3}{2}x^{2/3}+c$]

(iii) $\sqrt{x}\left(x^5+\frac{3}{x}\right)$ [উঃ $\frac{2}{13}x^{\frac{13}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}+c$]

(iv) $x\sqrt{x}-\frac{1}{3}\sqrt{x}+\frac{11}{\sqrt{x}}$ [উঃ $\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{2}{9}x^{3/2}+22x^{1/2}+c$]

(v) $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ [উঃ $\frac{2}{3}x^{3/2}+2\sqrt{x}+c$]

(vi) $\frac{x^3+a^3}{\sqrt{x}(x+a)}$ [উঃ $\frac{2}{15}\sqrt{x}\left(3x^2-5ax+15a^2+c\right)$

2. সমাকলন নির্ণয় করুন :

(i) $\int\frac{e^{5\log x}-e^{4\log x}}{e^{3\log x}-e^{2\log x}}dx$ [উঃ $\frac{1}{3}x^3+c$]

(ii) $\int\frac{8^{1+x}+4^{1-x}}{2^x}dx$ [উঃ $\frac{4}{\log_{e^2}}\left(2^{2x}-\frac{1}{3}2^{-3x}+c\right)$]

3. x-এর সাপেক্ষে সমাকলন করুন :

(i) $3^x + 3^{-x}$ [উঃ $\frac{1}{\log_{e^3}}3^x-\frac{1}{\log_{e^3}}3^{-x}+c$]

(ii) $\frac{e^{3x}+e^x}{e^x+e^{-x}}$ [উঃ $\frac{1}{2}e^{2x}+c$]

(iii) $5^{x+2}+\frac{1}{5^{x-2}}$ [উঃ $\frac{25}{\log_{e^5}}5^x-\frac{25}{\log_{e^5}}5^{-x}+c$]

4. সমাধান করুন : $\frac{dy}{dx}=x^2+3$, যখন $x = 4$, $y = 3$ [উঃ $3y=x^3+9x-91$]

২৭.১.৪ সমাকলনের কতিপয় নিয়মাবলী

আমরা জানি, $\frac{dy}{dx}[f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)+\cdots]$

$=f_1'(x)+f_2'(x)-f_3'(x)+\cdots$

$\therefore$ (i) $\int\left[f_1'(x)+f_2'(x)-f_3'(x)+\cdots\right]dx=f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)+\cdots+c$

(ii) $\int A\,f(x)dx=A\int f(x)dx$

উদা. x-এর সাপেক্ষে নিচের অপেক্ষকগুলির সমাকল নির্ণয় করুন ঃ

(i) $x^{5/2}.\int x^{5/2}dx=\frac{x^{5/2+1}}{5/2+1}+c=\frac{2}{7}^{x^{7/2}}+c$

(ii) $x^{-3/4}.\int x^{-3/4}dx=\frac{x^{-3/4+1}}{\frac{-3}{4}+1}+c=4^{x^{\frac{1}{4}}}+c$

(iii) $\frac{(1+x)^3}{x}\cdot\int\frac{(1+x)^3}{x}dx=\int\frac{1+x^3+3x^2+3x}{x}dx$

$=\int\frac{dx}{x}+\int x^2dx+\int 3xdx+\int 3dx=\log x+\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+3x+c$

(iv) $\frac{e^{3x}+e^{5x}}{e^x+e^{-x}}\cdot\int\frac{e^{3x}+e^{5x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{e^{3x}+(1+e^{2x})}{(e^{2x}+1).\frac{1}{ex}}dx$

$=\int e^{4x}dx==\frac{1}{4}e^{4x}+c$

উদা. যখন x = 1, তখন y = 3 হলে $\frac{dy}{dx}=1+x$ এর সমাধান নির্ণয় করুন।

$\frac{dy}{dx}=1+x,\ \therefore\ y=\int(1+x)dx=x+\frac{x^2}{2}+c$. উপরের শর্ত থেকে পাই

$3=1+\frac{1}{2}+c$ বা, $c=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$, $\therefore\ y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}$

২৭.২ সমাকলন (Integration)

অন্তরকলন গণিত থেকে আমরা জানি,

$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x, \frac{d}{dx}\left(x^2+2\right) = 2x, \frac{d}{dx}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = 2x$

$\frac{d}{dx}\left(x^2 + \frac{5}{2}\right) = 2x$ এবং সাধারণভাবে

$\frac{d}{dx}\left(x^2 + c\right) = 2x$, এখানে c যে কোনও ধ্রুবক হতে পারে।

এক্ষণে 2x-এর উপর অন্তরকলনের বিপরীত প্রক্রিয়া প্রয়োগ করলে পাওয়া যাবে $x^2 + c$ এই বিপরীত প্রক্রিয়াকে বলা হয় সমাকলন (Integration). সমাকলন প্রক্রিয়াকে $\int$ এই চিহ্নদ্বারা লেখা হয়। অর্থাৎ, $\int 2x dx = x^2 + c$. সমাকলন x-এর সাপেক্ষে বোঝাবার জন্য dx লেখা হয়। যেহেতু c যে কোনও একটি ধ্রুবক সুতরাং $\int 2x dx$ -কে অনির্দিষ্ট সমাকল (Indefinite integral) বলে। অনুরূপে—

$\frac{d}{dx}\left(x^3 + c\right) = 3x^2$ এবং $\int 3x^2 dx = x^3 + c$

যদি $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$ হয়, তবে $\frac{d}{dx}[F(x) + c] = f(x)$

অর্থাৎ, $\int f(x)dx = F(x) + c$ সুতরাং সমাকলন প্রক্রিয়া অন্তরকলন প্রক্রিয়ার বিপরীত প্রক্রিয়া।

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}\right) = x^n$ অর্থাৎ, $\int x^3 dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$ $[n \neq -1]$

c সমাকল ধ্রুবক।

উদা. (i) $\int \frac{dx}{x^n} = \int x^{-n} \cdot dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \int \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{x}$

(iii) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c, \int e^{mz} dx = \frac{e^{mx}}{m} + c$

$\left[\because \frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{1}{x}\right]$

২৭.২.১ পরিবর্ত পদ্ধতি (Method of Substitution)

মনে করি, $I = \int f(x)\, dx$ এবং $x = \phi(z)$ — (1) এমন একটি ফাংশন যাহার অন্তরকলন আছে।

$\therefore \frac{dI}{dx} = f(x)$ এবং $\frac{dx}{dz} = \phi'(z)$ এবং $dx = \phi(z)dz$

এখন $\frac{dI}{dz} = \frac{dI}{dx}\cdot\frac{dx}{dz} = f(x)\cdot\phi'(z) = f[\phi(z)]\phi'(z)$

সুতরাং $I = \int f[\phi(z)]\,\phi'(z)\,dz$ — (2)

অতএব দেখা যাচ্ছে যে সমাকলন (1) থেকে সমাকলন (2) পেতে গেলে $f(x)$-এর জায়গায় $f[\phi(z)]$ এবং dx-এর জায়গায় $\phi'(z)dz$ বসাতে হবে।

পরিবর্ত পদ্ধতি অনেক ক্ষেত্রেই সমাকলনকে সহজতর করে।

উদা 1. $I = \int (a+bx)^n\,dx$, $(n \neq -1)$

মনে করি $a + bx = z$ $\therefore$ উভয় পক্ষের অবকল নিলে পাই $bdx = dz$

$$\therefore\ I = \int z^n \cdot \frac{1}{b}dz = \frac{1}{b}\cdot\frac{z^{n+1}}{n+1} + c = \frac{1}{b(n+1)}\cdot(a+bx)^{n+1} + c$$

উদা 2. মনে করি $I = \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ এবং $f(x) = z$ $\quad\therefore\ f'(x)dx = dz$

$$\therefore\ I = \int \frac{1}{z}dz = \log|z| + c = \log|f(x)| + c$$

উদা 3. $I = \int x\sqrt{x^2+1}\,dx$. মনে করি $x^2 + 1 = z$ এবং $\therefore\ 2xdx = dz$

$$\therefore\ I = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{z}\,dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot z^{3/2} + c$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2} + c$$

উদা 4. $\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}$ মনে করি $1 + e^{-x} = z$

$\therefore\ -e^{-x}dx = dz$

$$\therefore\ I = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = \int \frac{-dz}{z} = -\log_e z + c = -\log_e(1+e^{-x}) + c$$

উদা 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$

মনে করি $\sqrt{x} = z$ $\therefore\ x = z^2$

$$dx = 2zdz$$

$$I = \int \frac{2zdz}{z+z^2} = 2\int\frac{dz}{z+1} = 2\log_e(z+1) + c = 2\log_e\left(\sqrt{x}+1\right) + c$$

উদা 6. $\int \frac{dx}{x(a+b\log_e x)}$

মনে করি $a + b\log_e x = z$

$$\therefore\ b\cdot\frac{1}{x}dx = dz$$

$\therefore\ I = \frac{1}{b}\int\frac{dz}{z} = \frac{1}{b}\log_e z + c = \frac{1}{b}\log_e(a+b\log x)+c$

২৭.২.২ প্রশ্নমালা

সমাকলন নির্ণয় করুন ঃ

(i) $\int x^2\sqrt{a^3+x^3}\,dx$ [উঃ $\frac{2}{9}\left(a^3+x^3\right)^{3/2}+c$]

(ii) $\int\frac{xdx}{(2x+1)^3}$ [উঃ $-(4x+1)/8(2x+1)^2+c$]

(iii) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-1}$ [উঃ $2\sqrt{x}-2\log\left(\sqrt{x}-1\right)$

2. (i) $\int(3x+2)\sqrt{2x+1}\,dx$ [উঃ $\frac{3}{10}(2x+1)^{5/2}+\frac{1}{6}(2x+1)^{3/2}+c$]

(ii) $\int\frac{1+x}{1-x}dx$ [উঃ $-x-2\log(1-x)+c$]

(iii) $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{a+bx}}$ [উঃ $\frac{3}{5}b^{-2}(a+bx)^{5/3}-\frac{3}{2}ab^{-2}(a+bx)^{2/3}+c$]

3. $\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ [উঃ $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+c$]

[$1-x=\frac{1}{z}$ ধরুন]

4. $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,ax$ [উঃ $e^{x+\frac{1}{x}}+c$]

5. $\int\frac{(\log x)^2}{x}dx$ [উঃ $\frac{1}{3}(\log x)^3+c$]

6. $\int\frac{dx}{x\log x}$ [উঃ $\log(\log x)+c$]

7. $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}dx$ [$z = x - \frac{1}{x}$ ধর] [উঃ $\frac{x}{1-x^2}+c$]

8. $\int \frac{(1+\log x)^3}{x}dx$ [উঃ $\frac{1}{4}(1+\log x)^4+c$]

9 $\int \frac{x^7 dx}{(1-x^4)^2}$ [উঃ $\frac{1}{4}\{\log(1-x^4)+\frac{1}{1-x^4}+c$]

10. $\int\left(\frac{x^{1/2}}{1+x^{3/4}}\right)dx$ [$z^4 = x$ ধর] [উঃ $\frac{4}{3}\left\{x^{3/4}-\log\left(1+x^{3/4}\right)\right\}+c$]

২৭.২.৩ কতিপয় আদর্শ সমাকলন

সমাকলন নির্ণয় করুন ঃ

(i) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|, |x| \neq |a|, a \neq 0$

(ii) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\left(\frac{a+x}{a-x}\right)\right|$

(iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \log\left|\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right|$

(iv) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}(a \neq 0)$

(v) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{z^2 \pm k^2}$

[(i) অথবা (iv)-এর অনুরূপ]

(vi) $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx \quad (a \neq 0, p \neq 0)$

$= \frac{p}{2a}\left\{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \frac{2aq-pb}{p}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}\right.$

$= \frac{p}{2a}\log_e(ax^2+bx+c)+$(v) এর অনুরূপ।

(vii) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, (a>0) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm k^2}} \quad \left[z = x + \frac{b}{2a}\right]$$

= (iii) এর অনুরূপ।

(viii) $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx, (a \neq 0, p \neq 0) = \frac{p}{2a} \int \frac{(2ax+b) + \frac{2aq}{p} - b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$

$$= \frac{p}{2a} \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx + \frac{2aq-pb}{p} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$= \frac{p}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}$ +(vii) এর অনুরূপ।

(ix) $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}$ $(a \neq 0, c \neq 0)$

মনে করি $cx + d = z^2$

$\therefore\ I = 2\int \frac{dz}{az^2 + (bc-ad)}$ (iv) -এর অনুরূপ।

(x) $\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(a \neq 0, p \neq 0)$

মনে করি $px + q = \frac{1}{z}$

$I = -\int \frac{dz}{\sqrt{AZ^2+BZ+C}}$ (vii) -এর অনুরূপ।

(xi) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

২৭.২.৪ উদাহরণমালা

উদা 1. $\int \frac{xdx}{x^4-1}$ মনে করি $x^2 = z \therefore 2xdx = dz$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dZ}{c^2-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\log\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + c \qquad \text{[(i) হতে]}$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + c$$

উদা 2. $\int \frac{dx}{1+x-x^2} = \int \frac{dx}{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+x-x^2} = \int \frac{dx}{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$

$$= \int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} = \int \frac{dz}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-z^2} = \frac{1}{2\frac{\sqrt{5}}{2}}\log\left|\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+z}{\frac{\sqrt{5}}{2}-z}\right|+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\log\frac{\sqrt{5}+2x-1}{\sqrt{5}-2x+1}+c$$

উদা 3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+a^4}}$ put $x^2 = z \therefore 2xdx = dz$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+a^4}} = \frac{1}{2}\log\left[\left(z+\sqrt{z^2+a^4}\right)\right]+c$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2+\sqrt{z^4+a^4}\right|+c$$

উদা 4. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$ মনে করি $e^x = z \therefore e^x dx = dz$

$I = \int \frac{dz}{z^2+1} = \tan^{-1} z + c = \tan^{-1}(e^x)+c$ [(iv) ব্যবহার করে]

উদা 5. $\int \frac{xdx}{x^4+2x^2+2}$ মনে করি $e^x = z \therefore 2xdx = dz$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{x^4+2x^2+1+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{(z+1)^2+1} = \frac{1}{2}.\tan^{-1}(z+1)+c$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2+1)+c$$

উদা 6. $\int \frac{7x-9}{x^2-2x+35}dx = \int \frac{\frac{7}{2}(2x-2)-2}{x^2-2x+35}dx$

$$= \frac{7}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+35}dx - 2\int \frac{dx}{x^2-2x+35}$$

$$= \frac{7}{2}\log(x^2-2x+35) - 2\int \frac{dx}{(x-1)^2+34} = \frac{7}{2}\log(x^2+2x+35)\frac{-2}{\sqrt{34}}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{34}}\right)+c$$

উদা 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-(\frac{3}{2})^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2-(\frac{3}{2})^2}} \quad \left[z = x+\frac{1}{2}\right]$

$= \log\left[(x+\frac{1}{2}) + \sqrt{x^2+x-2}\right] + c$

উদা 8. $\int \frac{x-2}{\sqrt{2x^2-8x+5}}dx = \int \frac{\frac{1}{4}(4x-8)dx}{\sqrt{2x^2-8x+5}}$

মনে করি, $2x^2-8x+.5 = z \qquad \therefore (4x-8)dx = dz$

$I = \frac{1}{4}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{4}\int z^{-\frac{1}{2}}dz = \frac{1}{2}\sqrt{z}+c = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2-8x+5+c}$

উদা 9. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$ মনে করি $1+x = z^2 \quad \therefore dx = 2zdz$

$I = \int \frac{2\cancel{z}dz}{(z^2+1)\cdot\cancel{z}} = 2\int \frac{dz}{z^2+1} = \tan^{-1}z + c = \tan^{-1}\sqrt{1+x} + c$

উদা 10. $\int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{x^2+3x+2}}$ মনে করি $2x+3 = \frac{1}{z} \;\therefore\; 2dx = -\frac{1}{z^2}dz$

$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-3\right), \; z = \frac{1}{2x+3}$

$\therefore\; I = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2\cdot\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}-3\right)^2 + 3\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-3\right)+2}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$

$= -\sin^{-1}z + c = -\sin^{-1}\left(\frac{1}{2x+3}\right) + c$

২৭.২.৫ প্রশ্নমালা

মান নির্ণয় করুন ঃ

1. $\int \frac{dx}{6x^2+7x+2}$ [উঃ $\log\frac{2x+1}{3x+2}+c$]

2. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+2e^x+5}$ [উঃ $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(e^x+1\right)\right]+c$]

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$ [উঃ $\sin^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+c$]

4. $\int \frac{x+1}{3+2x-x^2}dx$ [উঃ $-\log(x-3)+c$]

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ [উঃ $\sin^{-1}\frac{x-a}{a}+c$]

6. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ [উঃ $2\sqrt{x^2+x+1}+2\log\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+c$]

7. $\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{4x+3}}$ [উঃ $\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{4x+3}-1}{\sqrt{4x+3}+1}\right)+c$]

8. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+2}}$ [উঃ $\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\,(x+1)}\right)+c$]

9. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ [উঃ $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+c$]

10. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-1}$ [উঃ $2\sqrt{x}+\log\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+c$]

11. $\int \frac{dx}{x\left[10+7\log x+(\log x)^2\right]}$ [উঃ $\frac{1}{3}\log\frac{2+\log x}{5+\log x}$]

12. $\int \frac{x^2dx}{x^2-4}$ [উঃ $x+\log\frac{x-2}{x+2}+c$]

13. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$ [উঃ $\sin^{-1}\left(\frac{3x+1}{(1+x)\sqrt{5}}\right)+c$]

14. $\int \sqrt{\frac{x-3}{x-4}}\,dx$ [উঃ $\sqrt{(x-3)(x-4)}+\log\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}\right)+c$]

15. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x}}$ [উঃ $\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+c$]

২৭.৩ আংশিক সমাকলন (Integration by parts)

মনে করি, u এবং v_1 x এর দুইটি অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক। অন্তরকলন পদ্ধতি হইতে জানি,

$$\frac{d}{dx}(uv_1) = \frac{du}{dx} \cdot v_1 + u\frac{dv_1}{dx}$$

x এর সাপেক্ষে উভয়পক্ষে সমাকলন করিলে পাওয়া যায়

$$uv_1 = \int\left(\frac{du}{dx} v_1\right)dx + \int\left(u\frac{dv_1}{dx}\right)dx$$

অর্থাৎ, $\int\left(u\frac{dv_1}{dx}\right)dx = uv_1 - \int\left(\frac{du}{dx} v_1\right)dx$

মনে করি, $\frac{dv_1}{dx} = v$ অর্থাৎ $v_1 = \int v\,dx$

সুতরাং $\int uvdx = u\int vdx - \int\left(\frac{du}{dx}\int vdx\right)dx$

ইহাই দুইটি অপেক্ষকের গুণফলের আংশিক সমাকলনের সূত্র এবং ইহাকে আংশিক সমাকলন পদ্ধতি বলা হয়।

দুইটি অপেক্ষকের গুণফলের সমাকল

= প্রথম অপেক্ষক (অপরিবর্তিত) × দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকল

– প্রথম অপেক্ষকের অন্তরকল সহগ এবং দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকলের গুণফলের সমাকল।

টীকা ঃ কোনটি প্রথম অপেক্ষক এবং কোনটি দ্বিতীয় অপেক্ষক তাহা অভিজ্ঞতা বলিয়া দিবে। তবে সাধারণত যেটির সমাকল জানা সেটিকে দ্বিতীয় অপেক্ষক ধরা হয়।

২৭.৩.১ উদাহরণমালা

উদা 1. সমাকলন করুন ঃ $\int xe^x dx$

$$\int xe^x dx = x\int e^x - \int\left(\frac{d}{dx}(x)\cdot\int e^x dx\right)dx$$

$$= xe^x - \int 1\cdot e^x dx = xe^x - e^x + c$$

x -কে প্রথম অপেক্ষক না ধরে দ্বিতীয় অপেক্ষক ধরলে পাই

$$\int xe^x dx = e^x\cdot\frac{x^2}{2} - \int\left(\frac{d}{dx}(e^x)\int xdx\right)dx = e^x\cdot\frac{x^2}{2} - \int e^x\cdot\frac{x^2}{2}dx$$

এখানে $\frac{1}{2}\int e^x\cdot x^2 dx$ সমাকলনটি $\int xe^x dx$ হতেও কঠিন। সুতরাং x-কে দ্বিতীয় অপেক্ষক ধরা হবে না।

উদা 2. সমাকলন করুন : $\int \log x\, dx = \int 1 \cdot \log x\, dx$

যেহেতু log x -এর সমাকলন জানা নাই তাই log x-কে প্রথম অপেক্ষক এবং 1-কে দ্বিতীয় অপেক্ষক ধরা হল।

$$\int 1\cdot \log x\, dx = \log x \cdot \int 1 \cdot dx - \int \left(\frac{d}{dx}(\log x) \cdot \int 1 dx\right) dx$$

$$= x \log x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \log x - x + c$$

উদা 3. সমাকলন করুন : $\int x^3 e^x dx$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - \int 3x^2 \cdot e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 \cdot e^x + \int 6xe^x dx$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\left[xe^x - \int 1 \cdot e^x dx\right]$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + c$$

উদা 4. সমাকলন করুন : $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx = \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2} e^x dx = \int \frac{e^x}{x+1} dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2} dx$

$$= \frac{1}{x+1} \cdot e^x - \int -\frac{1}{(x+1)^2} \cdot e^x dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2} dx + c$$

$$= \frac{1}{x+1} e^x + \cancel{\int \frac{e^x}{(x+1)^2} dx} - \cancel{\int \frac{e^x}{(x+1)^2} dx} + c = \frac{e^x}{x+1} + c$$

উদা 5. দেখান যে, $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = e^x \cdot f(x) + c$

$$\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = \int e^x f(x) dx + \int f'(x)\, e^x dx$$

$$= e^x \cdot f(x) - \int e^x \cdot \cancel{f'(x)}\, dx + \int f'(x) \cancel{e^x} dx + c = e^x f(x) + c$$

কতিপয় আদর্শ সমাকল :

(A) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \log \left|\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)\right|$

$$\int 1 \cdot \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{2xx}{2\sqrt{x^2+a^2}} dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\therefore\ 2\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \cdot \log\left|\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right| + c$$

বা, $\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right| + c$

(B) $\sqrt{x^2-a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

উপরের পদ্ধতি প্রয়োগ করে প্রমাণ করা যাবে।

(C) $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

উদা 6. সমাকলন করুন ঃ $I = \int \sqrt{25x^2+16}\, dx$

মনে করি $5x = z$ $\quad\therefore\ 5dx = dz$

$$\therefore\ I = \frac{1}{5}\int \sqrt{z^2+4^2}dz = \frac{1}{5}\left[\frac{z}{2}\sqrt{z^2+4^2} + \frac{4^2}{2}\log\left|\left(z+\sqrt{z^2+4^2}\right)\right| + c\right.$$

$$= \frac{1}{10}\cdot 5x\sqrt{25x^2+16} + \frac{8}{5}\log\left|\left(5x+\sqrt{25x^2+16}\right)\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{25x^2+16} + \frac{8}{5}\log\left|\left(5x+\sqrt{25x^2+16}\right)\right| + c$$

উদা 7. $\int \sqrt{25-9x^2}\, dx$

মনে করি $3x = z$

$\therefore\ 3dx = dz$

$$I = \frac{1}{3}\int \sqrt{25-z^2}dz = \frac{1}{3}\left[\frac{z}{2}\sqrt{25-z^2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{z}{5}\right] + c$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{25-9x^2} + \frac{25}{6}\sin^{-1}\frac{3x}{5} + c$$

উদা 8. $\int \sqrt{8-2x-x^2}\, dx = \int \sqrt{9-2x-x^2-1}\, dx$

$$= \int \sqrt{9-(x+1)^2}\, dx = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{9-(x+1)^2} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{(x+1)}{3} + c$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{8-2x-x^2} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x+1}{3} + c$$

উদা 9. $\int (x-1)\sqrt{x^2-x+1}\,dx$

মনে করি $(x-1) = A\frac{d}{dx}\left(x^2-x+1\right)+B = A\cdot 2x - A + B$

$\therefore$ $2A = 1$ এবং $A - B = 1$ $\therefore$ $A=\frac{1}{2}$ ও $B=-\frac{1}{2}$

$\therefore$

$$I=\int\left[\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}\right]\sqrt{x^2-x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int(2x-1)\sqrt{x^2-x+1}\,dx-\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-x+1}\,dx$$

প্রথম সমাকলটিতে $x^2 - x + 1 = z$ ধরলে পাই $\frac{1}{2}\int(2x-1)\sqrt{x^2-x+1}=\frac{1}{3}\left(x^2-x+1\right)^{3/2}$

এখন $\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx=\frac{1}{2}\frac{x-\frac{1}{2}}{2}\sqrt{x^2-x+1}$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\log\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2-x+1}$$

$$\therefore\ I=\frac{1}{3}\left(x^2-x+1\right)^{3/2}-\frac{1}{8}(2x-1)\sqrt{x^2-x+1}-\frac{3}{16}\log\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right|+c$$

২৭.৩.২ প্রশ্নমালা

1. x -এর সাপেক্ষে সমাকলন করুন ঃ

(i) xe^{ax} [উঃ $\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)+c$]

(ii) $x\log(1+x)$ [উঃ $\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\log(1+x)-\frac{1}{4}\left(x^2-2x\right)+c$]

(iii) $x^3\log x$ [উঃ $\frac{1}{4}x^4\left(\log x-\frac{1}{4}\right)+c$]

(iv) $\frac{\log(x+1)}{(x+2)^2}$ [উঃ $-(1+x)^{-1}\{\log(1+x)+1\}+c$]

(v) $\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$ [উঃ $\frac{x}{1+\log x}+c$]

(vi) $(\log x)^2$ [উঃ $x(\log x)^2-2x\log x+2x+c$]

2. x -এর সাপেক্ষে সমাকলন করুন ঃ

(i) $\int e^x \frac{x^2+1}{(x+1)^2} dx$ [উঃ $e^x \cdot \frac{x-1}{x+1} + c$]

(ii) $\int \frac{xe^x}{(x^2+1)^2} dx$ [উঃ $\frac{e^x}{x+1} + c$]

3. সমাকলন করুন ঃ

(i) $\int \sqrt{5-2x+x^2}\, dx$ [উঃ $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{5-2x+x^2} + 2\log(x-1) + \sqrt{5-2x+x^2} + c$]

(ii) $\int \sqrt{2ax+x^2}\, dx$ [উঃ $\frac{1}{2}(x-a)\sqrt{2ax+x^2} + \frac{1}{2}a^2 \sin^{-1}\frac{x-a}{a} + c$]

4. সমাকলন করুন ঃ

(i) $\int (x-1)\sqrt{x^2-1}\, dx$ [উঃ $\frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2} - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + c$]

২৭.৪ মূলদ ভগ্নাংশের সমাকলন (Integration of Rational Fraction)

উদাহরণ সমূহের মাধ্যমে সমাকলন পদ্ধতি বর্ণিত হল ঃ

উদা 1. $\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} dx$ এর মান নির্ণয় করুন। [এখানে হর একঘাত বাস্তব উৎপাদকের গুণফল]

মনে করি, $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$ বা, $x - 1 = A(x-3) + B(x-2)$

$x = 3$ বসালে পাই $3 - 1 = A \times 0 + B.1$ বা, $B = 2$

$x = 2$ বসালে পাই $2 - 1 = -A + B.0$ $\therefore$ $A = -1$

$$\therefore \int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} dx = A\int \frac{dx}{x-2} + B\int \frac{dx}{x-3} = 2\int \frac{dx}{x-3} - \frac{dx}{x-2}$$

$$= 2\log(x-3) - \log(x-2) + c = \log\frac{(x-3)^2}{x-2} + c$$

উদা 2. $\int \frac{dx}{(x-a)^2(x-b)}$ [একঘাত পৌনঃপুনিক বাস্তব উৎপাদকের গুণফল]

মনে করি, $\frac{1}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + \frac{C}{x-b}$

$\therefore$ $1=A(x-b)+B(x-a)(x-b)+c(x-a)^2$

মনে করি, $x = a$ $\therefore$ $1 + A\ (a-b)$ বা, $A = \frac{1}{a-b}$

মনে করি, $x = b$ $\therefore$ $1 + C\ (b-a)^2$ $\therefore$ $C = \frac{1}{(b-a)^2}$

উভয় পক্ষকে x^2 -এর সহগ নিলে পাই, $0 = B + C$

$\therefore$ $B = -\frac{1}{(a-b)^2}$

$\therefore$ $\int \frac{dx}{(x-a)^2(x-b)} = A\int \frac{dx}{(x-a)^2} + B\int \frac{dx}{x-a} + C\int \frac{dx}{x-b}$

$= -A\frac{1}{(x-a)} + B\log(x-a) + C\log(x-b) + k$

$= -\frac{1}{(a-b)(x-a)} - \frac{1}{(a-b)^2}\log(x-a) + \frac{1}{(a-b)^2}\log(x-b) + k$

$= \frac{1}{(b-a)(x-a)} + \frac{1}{(a-b)^2}\log\frac{x-b}{x-a} + k$

উদা 3. $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+4)}$ [বাস্তব দ্বিঘাত উৎপাদকের গুণফল]

মনে করি, $\frac{x}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

$\therefore x = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1)$

মনে করি, $x = 1$, $\therefore$ $1 = 5A$ বা, $A = \frac{1}{5}$

উভয় পক্ষ থেকে x-এর সহগ নিলে পাই

$1 = -B + C$

উভয় পক্ষ থেকে x^2-এর সহগ নিলে পাই

$A + B = 0$ $\therefore$ $A = -B$ $\therefore$ $B = -\frac{1}{5}$

$\therefore$ $C = 1 + B = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

অতএব $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+4)} = A\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}}{x^2+4}dx$

$= \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5}\int \frac{x-4}{x^2+4}dx = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5}\int \frac{xdx}{x^2+4} - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x^2+4}$

$= \frac{1}{5}\log(x-1) - \frac{1}{10}\cdot\int \frac{2xdx}{x^2+4} - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x^2+4}$

$= \frac{1}{5}\log(x-1) - \frac{1}{10}\log(x^2+4) - \frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2} + k$

উদা 4. $\int \frac{x^2}{x^4-x^2-12}dx$

মনে করি, $x^2 = z$

$\therefore \frac{x^2}{x^4-x^2-12} = \frac{z}{z^2-z-12} = \frac{z}{z^2-4z+3z-12} = \frac{z}{z(z-4)+3(z-4)}$

$= \frac{z}{(z-4)(2+3)} = \frac{A}{z-4} + \frac{B}{z+3}$

$\therefore z = A\ (z+3) + B\ (z-4)$

মনে করি, $z = 4$, $\therefore 4 = 7A$ বা, $A = \frac{4}{7}$

মনে করি, $z = -3$, $\therefore -3 = -7B \ \therefore B = \frac{3}{7}$

$\therefore \int \frac{x^2}{x^4-x^2-12}dx = A\int \frac{dx}{x^2-4} + B\int \frac{dx}{x^2+3}$

$= \frac{1}{7}\log\frac{x-2}{x+2} + \frac{\sqrt{3}}{7}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} + c$

উদা 5. $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x-1)^3}$

মনে করি, $x - 1 = z\ (x-2)$

$= zx - 2z$

বা, $x\ (i - z) = 1 - 2z$

$\therefore x = \frac{1-2z}{1+z}$, $\therefore dx \frac{-2(1-z)+(1-z)}{(1-z)^2}dz$

বা, $dx = \frac{-2+1}{(1-z)^2} dz = -\frac{1}{(1-z)^2} dz$

এখন $x - 2 = \frac{1-2z}{1-z} - 2$

$= \frac{1-2z-2+2z}{1-z} = \frac{1}{1-z}$

এবং $(x-1) = \frac{1-2z}{1-z} - 1 = \frac{1-2z-1+z}{1-z}$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x-2)^2(x-1)^3} = -\int \frac{1}{(1-z)^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{(1-z)^2} \cdot \frac{-z^3}{(1-z)^3}} dz$$

$$= +\int \frac{(1-z)^3}{z^3} dz = +\int \frac{1-z^3-3z(1-z)}{z^3} dz$$

$$= \int \left(+\frac{1}{z^3} - 1 - \frac{3}{z^2} + \frac{3}{z}\right) dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} + z - \frac{3}{z} - 3\log z + c$$

$$= \frac{-1}{2}\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 - 3\log\frac{x-2}{x-1} + \left(\frac{x-2}{x-1}\right) - \frac{x-1}{x-2} + c$$

উদা 6. $\int \frac{x^3 dx}{x^2+7x+12}$

x^3 -কে $x^2 + 7x + 12$ দিয়ে ভাগ করে পাই

$$\frac{x^3}{x^2+7x+12} = x - 7 + \frac{\cdot 37x+84}{(x+3)(x+4)} = x - 7 + \frac{27}{x+3} + \frac{64}{x+4}$$

$$\therefore \int \frac{x^3 dx}{x^2+7x+12} = \int x dx - 7\int dx - 27\int \frac{dx}{x+3} + 64\int \frac{dx}{x+4}$$

$$= \frac{x^2}{2} - 7x - 27\log(x+3) + 64\log(x+4) + c$$

২৭.৪.১ প্রশ্নমালা

মান নির্ণয় করুন ঃ

1. $\int \frac{x-1\ dx}{(x+2)(x-3)}$ [উঃ $\frac{1}{5}\{3\log(x+2) + 2\log(x-3)\} + c$]

2. $\int \frac{3x dx}{x^2-x-2}$ [উঃ $\log\{(x-2)^2(x+1\} + c$]

3. $\int \frac{x^2 dx}{(x+1)(x+2)^2}$ [উঃ $\frac{4}{x+2} + \log(x+1) + c$]

4. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$ [উঃ $\frac{1}{x+1} + \log \frac{x}{x+1} + c$]

5. $\int \frac{x dx}{(x+1)(1+x^2)}$ [উঃ $-\frac{1}{2}\log(1+x) + \frac{1}{4}\log(1+x^2) + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + c$]

6. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(2x^2+1)}$ [উঃ $\tan^{-1} x - \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(x\sqrt{2}) + c$]

7. $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$ [উঃ $\frac{1}{4}\log\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\tan^{-1} x + c$]

8. $\int \frac{e^x dx}{e^x - 3e^{-x} + 2}$ [উঃ $\frac{1}{4}\log\left\{(e^x - 1)(e^x + 3)^3\right\} + c$]

9. $\int \frac{x^3 dx}{x^4 + 3x^2 + 2}$ [উঃ $\log(x^2+2) - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c$]

10. $\int \frac{dx}{(x+1)^2 (x+2)^3}$ [উঃ $-\left(\frac{x+2}{x+1}\right) - 3\log\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + 3\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 + c$]

২৭.৫ নির্দিষ্ট সমাকল (Definite Integral)

পূর্ব আলোচনায় সমাকলনকে অন্তরকলনের বিপরীত প্রক্রিয়ারূপে সংজ্ঞা দেওয়া হইয়াছে। এক্ষনে নির্দিষ্ট সমাকলকে একটি সমষ্টির সীমারূপে সংজ্ঞা দেওয়া হবে।

সংজ্ঞা : মনে করি, $f(x)$ অপেক্ষকটি (a, b) পরিসরে সংজ্ঞাত। a, b দুইটি সসীম সংখ্যা এবং $a < b$ এবং (a, b) পরিসরে $f(x)$ সন্তত। (a, b) পরিসরকে $a + h, a + 2h, \cdots a + \overline{n-1}\, h$ বিন্দু দ্বারা h দৈর্ঘ্যের সমান n-সংখ্যক ভাগে ভাগ করা হল। এখানে $nh = b - a$.

এখন $\lim_{h \to 0} h\left[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a + \overline{n-1}\, h)\right]$

$$= \lim_{h \to 0} h \sum_{r=0}^{n-1} f(a + rh) = \lim_{n \to \infty} h \frac{b-a}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot r\right)$$

সমষ্টির সীমাকে (যেখানে সীমা বর্তমান) $f(x)$ -এর a ও b সীমার মধ্যে নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা ধরা হয়। একে $\int_a^b f(x)\, dx$ চিহ্নর দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

অর্থাৎ, $\lim\limits_{h\to 0} h \cdot \sum\limits_{r=0}^{n-1} h\,f(a+rh) = \int_a^b f(x)\,dx$

a -কে সমাকলের নিম্নসীমা এবং b -কে উর্ধ্বসীমা বলে।

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{h\to 0} h \ \sum\limits_{r=1}^{n} f(a+rh)$ এরূপও লেখা হয়।

উদা 1. সংজ্ঞা থেকে $\int_a^b k\,dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

এখানে $f(x) = k$ (ধ্রুবক) $\therefore \int_a^b k\,dx = \lim\limits_{h\to 0} h \ \sum\limits_{r=1}^{n} f(a+rh)$

$= \lim\limits_{h\to 0} h \cdot \sum\limits_{r=1}^{n} k = \lim\limits_{h\to 0} h \cdot nk = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}k = k(b-a)$

উদা 2. সংজ্ঞা থেকে $\int_0^1 x^2dx$ -এর মান নির্ণয় করুন।

সংজ্ঞা থেকে $\int_0^1 x^2dx = \lim\limits_{h\to 0} h \sum\limits_{r=1}^{n} (rh)^2, (nh=1)$

$= \lim\limits_{h\to 0} h \cdot \left[1^2h^2 + 2^2h^2 + \cdots + n^2h^2\right]$

$= \lim\limits_{h\to 0} h^3 \left[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right]$

$= \lim\limits_{h\to 0} h^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{1}{6} \lim\limits_{h\to 0} \left(2n^3h^3 + 3n^2h^2h + nh \cdot h^2\right)$

$= \frac{1}{6} \lim\limits_{h\to 0} \left(2 + 3h + h^2\right)$ $\qquad [\because nh = 1]$

$= \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$

উদা 3. সংজ্ঞা থেকে $\int_a^b e^x dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

সংজ্ঞা থেকে $\int_a^b e^x dx = \lim_{h\to 0} h \cdot \sum_{r=0}^{n-1} e^{a+rh}$, $(nh = b-a)$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[e^{a} + e^{a+h} + \cdots + e^{a+(n-1)h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h \cdot e^{a}\left(1+e^{h} + \cdots + e^{(n-1)h}\right) = \lim_{h\to 0} h \cdot e^{a} \cdot \frac{e^{nh}-1}{e^{h}-1} = e^{a} \cdot \left(e^{b-a}-1\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{h}{e^{h}-1}$$

$$= e^{a}\left(e^{b} \cdot e^{-a} - 1\right) \cdot 1 \qquad \left[\because \lim_{h\to 0} \frac{h}{e^{h}-1} = 1\right]$$

$$= e^{b} - e^{a}$$

২৭.৫.১ প্রশ্নমালা

সংজ্ঞা থেকে সমাকলনগুলির মান নির্ণয় করুন ঃ

1. $\int_a^b e^{-x}dx$ [উঃ $e^{-a} - e^{-b}$]

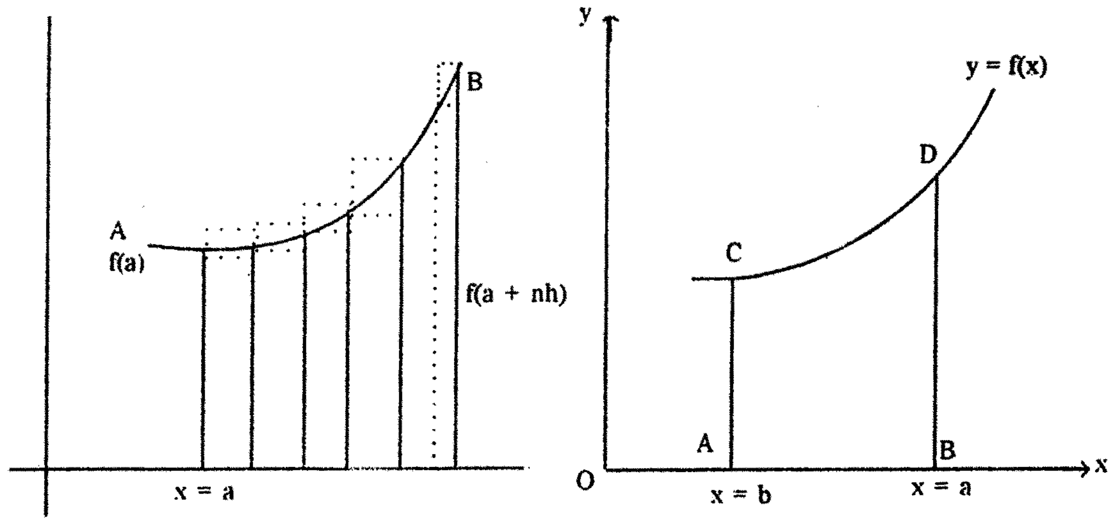
2. $\int_0^1 e^{2x}dx$ [উঃ $\frac{1}{2}(e^{2}-1)$]

3. $\int_0^1 x^3 dx$ [উঃ $\frac{1}{4}$]

4. $\int_0^1 (ax+b)dx$ [উঃ $\frac{1}{2}a+b$]

5. $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ [উঃ $\frac{2}{3}$]

২৭.৫.২ নির্দিষ্ট সমাকলনের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা



নির্দিষ্ট সমাকলনের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

$\int_a^b f(x)dx$, $x = a$-তে কোটি AC, $x = b$-তে কোটি BD, x অক্ষ এবং $y = f(x)$ বক্ররেখার দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফলকে নির্দেশ করে।

এখানে AB একটি বক্ররেখাটির সাপেক্ষে

$h\left[f(a)+f(a+h)+\cdots+f\left(a+\overline{n-1}\,h\right)\right]$ হল

$x = a, x = a + h, \cdots x = a + (n - 1)h$ এই কোটি সমূহ এবং x-অক্ষ দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্র সমূহের ক্ষেত্রফলের সমান।

আবার $h\left[f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+nh)\right]$

এটি হল x -অক্ষ ও $x = a + h, x = a + 2h, \cdots x = a + nh$

এই কোটি সমূহ দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফল সমূহের সমষ্টি।

২৭.৫.৩ সমাকল গণিতের মূল উপপাদ্য (Fundamental Theory of Integral Calculus)

যদি f (x) (a, b) পরিসরে একটি সমাকলনযোগ্য অপেক্ষক হয় এবং যদি একটি অপেক্ষক এমন থাকে যে (a, b) পরিসরে ϕ (x) = f (x) তবে $\int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a) = [\phi(x)]_a^b$

(প্রমাণ দেওয়া হল না।)

উদা 1. $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left[1^{3/2} - 0^{3/2}\right]$

$$= \frac{2}{3}$$

উদা 2. $\int_0^3 x^3\sqrt{1+3x^4}\cdot dx$

মনে করি, $1 + 3x^4 = z$

$\therefore\ 1zx^3 dx = dz$

এখানে উর্ধসীমা ও নিম্নসীমা পরিবর্তন করতে হবে।

যখন x = 0, z = 1, আবার যখন x = 1, z = 4

$\therefore\ \frac{1}{12}\int_1^4 z^{1/2}\,dz = \frac{1}{12}\left[\frac{2}{3}z^{3/2}\right] = \frac{1}{18}\left[4^{3/2} - 1^{3/2}\right] = \frac{7}{18}$

উদা 3. $\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2} = \left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{1}{a}\left[\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0\right]$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{4}$$

২৭.৫.৪ প্রশ্নমালা

নিম্নলিখিত সমাকলগুলি নির্ণয় করুন ঃ

1. $\int_0^1 xe^x dx$ [উঃ 1]
2. $\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx$ [উঃ $\frac{1}{2}\pi a^2$]
3. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ [উঃ $\sin^{-1}\frac{1}{4}$]

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ [উঃ $2^{5/2}/3$]

5. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ [উঃ $\sqrt{2}-1$]

6. $\int_1^2 \frac{dx}{x-(1+2x)^2}$ [উঃ $\log\frac{6}{5}-\frac{2}{15}$]

7. $\int_8^{15} \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}$ [উঃ $\frac{1}{2}\log\frac{5}{3}$]

8. $\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{1+e^x}dx$ [উঃ $\log 3/2$]

9. $\int_2^e \left\{\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\right\} dx$ [উঃ $e-\frac{2}{\log 2}$]

10. $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$ [উঃ $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$]

২৭.৫.৫ নির্দিষ্ট সমাকলের কয়েকটি ধর্ম

(1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz$

(2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,\ a < c < b$

(4) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

(5) $\int_0^{na} f(x)dx = n\int_0^a f(x)dx$ যখন $f(x) = f(a+x)$ হয়।

(6) $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a-x)dx$

(7) $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx$

$= 0$, যদি $f(x)$ অযুগ্ম অপেক্ষক হয়

$= 2\int_0^a f(x)$, যদি $f(x)$ যুগ্ম অপেক্ষক হয়।

উদা 1. প্রমাণ করুন : $\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

মনে করি, $a + b - x = z \qquad \therefore \quad -dx = dz$

যখন $x = a,\ z = b$ আবার যখন $x = b,\ z = a$

$$\therefore \int_b^a f(z)(-dz) = -\int_b^a f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz \ [\text{ ধর্ম } (2)]$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \ [\text{ ধর্ম } (1)]$$

উদা 2. দেখান যে $\int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 0$

এখানে $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2} \quad \therefore \quad f(-x) = -x\sqrt{a^2 - x^2} - f(x)$

অর্থাৎ $f(x)$ অযুগ্ম অপেক্ষক।

$$\therefore \int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 0 \ [\text{ ধর্ম } (7)]$$

২৭.৫.৬ প্রশ্নমালা

দেখান যে :

(1) $\int_{a-c}^{b-c} f(x+c)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

(2) $\int_a^b f(nx)\,dx = \frac{1}{n}\int_{na}^{nb} f(x)\,dx$

(3) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2$

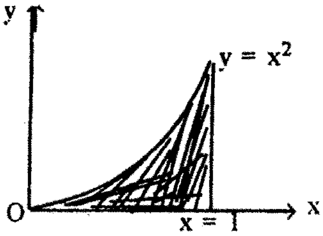
(4) $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^3 x\,dx = 0$

(5) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx = \frac{\pi}{4}$

(6) $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$

২৭.৬ সমাকলনের দ্বারা ক্ষেত্রফল নির্ণয়

উদা 1. x অক্ষ, মূলবিন্দু হতে $x = 1$ দূরে অংকিত কোটি এবং $y = x^2$ বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।



নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^1 y\,dx = \int_0^1 x^2 dx$

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ বর্গ একক।

উদা 2. x অক্ষ, $x = a > 0$, $x = b > 0$ তে কোটিদ্বয় এবং $xy = c^2$ বক্ররেখার অন্তর্গত ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

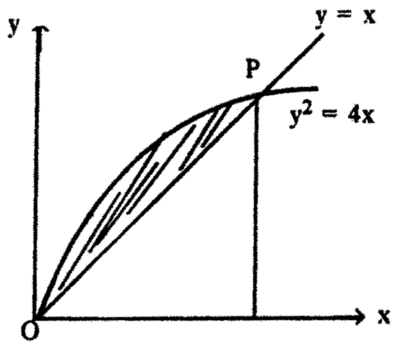
নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_a^b \frac{c^2}{x} dx = c^2[\log x]_a^b$

$= c^2[\log b - \log a] = c^2 \cdot \log\frac{b}{a}$ বর্গ একক।

উদা 3. $y^2 = 4x$ বক্ররেখা এবং $y = x$ সরলরেখার অন্তর্গত ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

P বিন্দুর x স্থানাঙ্ক ঃ $x^2 - 4x = 0$ বা, $x = 0$, $x = 4$

$\therefore$ P বিন্দুর x -স্থানাঙ্ক 4



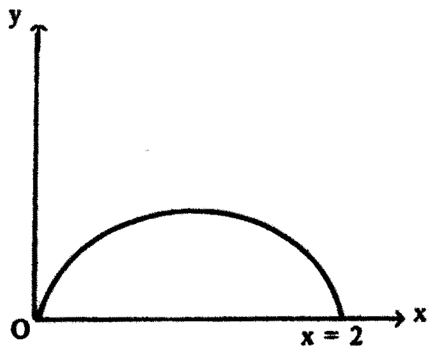
নির্ণেয় ক্ষেত্রফল (চিত্র থেকে) $= \int_0^4 2\sqrt{x}\,dx - \int_0^4 x dx$

$= 2\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{4}{3} \times 4^{3/2} - \frac{4^2}{2}$

$= \frac{32}{3} - 8 = \frac{32 - 4y}{3} = \frac{8}{3}$ বর্গ একক।

উদা 4. $y = x(2 - x)$ বক্ররেখা এবং x-অক্ষদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

$x = 0$ এবং $x = 2$ -তে $y = 0$



নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^2 x(2-x)dx$

$= \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left[2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$

$= 4 - \frac{8}{3} = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}$ বর্গ একক।

২৭.৬.১ প্রশ্নমালা

(1) $y = (x - 1)(4 - x)$ বক্ররেখা এবং x অক্ষদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

[উঃ $4\frac{1}{2}$ বর্গ একক]

(2) x-অক্ষ, $x = 1$, $x = 9$ কোটিদ্বারা $y^2 = x$ বক্ররেখার সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

[উঃ $\frac{52}{3}$ বর্গ একক]

(3) দেখান যে অক্ষদ্বয় এবং $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্ররেখার অন্তর্গত ক্ষেত্রফল $\frac{a^2}{6}$।

(4) $y = 3x$, x-অক্ষ এবং $x = 2$ -তে কোটিদ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

[উঃ 6 বর্গ একক]

(5) $y^2 = x^3$ বক্ররেখা এবং $y = 2x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{64}{5}$]

(6) $y = x^3 + x + 1$ বক্ররেখা, x অক্ষ এবং $x = 1$, $x = 6$ বিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত কোটির অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। [উঃ $346\frac{1}{4}$ বর্গ একক]

(7) $y = x^3$ বক্ররেখা এবং $y = x$ সরলরেখার অন্তর্গত ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।[উঃ $\frac{1}{2}$ বর্গ একক]

(8) $y = (x - 3)(x - 7)$ বক্ররেখা এবং x অক্ষদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

[উঃ $\frac{32}{3}$ বর্গ একক]

(9) $y = 20 - x^2$ এবং $y = x^4$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

[উঃ $61\frac{13}{15}$ বর্গ একক]

(10) দেখান যে $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ অধিবৃত্তদ্বয়ের অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{16}{3}a^2$ বর্গএকক।

২৭.৭ অনুশীলনী

১। শূন্যস্থান পূরণ করুন ঃ

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+x^3}{x}=$ ______

(ii) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^{16}-4^{16}}{x-4}=$ ______

(iii) $\lim\limits_{x\to \alpha} x^2=$ ______

(iv) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}=$ ______

(v) $f(x) = x^2$, $x = 0$ বিন্দুতে ______

(vi) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\frac{\sin x}{2}=$ ______

(vii) $\tan x$ অপেক্ষকের অসন্ততির বিন্দু ______

২। (ক) $y = x^2$, $y = -2x^2$ এর লেখচিত্র আঁকুন।

(খ) $y=(x-3)^2+2$, $y=-(x-3)^2+2$ এর লেখচিত্র আঁকুন।

(গ) $y = x^3 - x$ এর লেখচিত্র আঁকুন।

(ঘ) $y=\frac{1}{x}$ এর লেখচিত্র আঁকুন।

৩। নিম্নোক্ত অপেক্ষকগুলির সমাকলন নির্ণয় করুন।

(i) $\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{x^2}$ (ii) $(x^x)^x$ (iii) $\sqrt{\frac{1+\tan x}{1-\tan x}}$

৪। দেওয়া আছে $\sqrt{6\cdot 25}=2\cdot 5$ তাহলে $\sqrt{6\cdot 33}$ এর মান নির্ণয় করুন।

৫। (i) দেখান যে $\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{\log(ax+b)}{a}+c$

(ii) $\int x^2e^x=(x^2-2x+2)e^x+c$

(iii) $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \log \frac{x-a}{x-b} + c,\ a \neq b$

৬। নিম্নোক্ত অনির্দিষ্ট সমাকলনগুলি নির্ণয় করুন।

(i) $\int \sin(2x+1)\,dx$ (ii) $\int \sqrt{3x-2}\,dx$ (iii) $\int x \cos x\,dx$

(iv) $\int x^3 e^{-x}\,dx$ (v) $\int (x^2+x+1)\cos x\,dx$

৭। (i) $\sqrt{x} = z$ বসিয়ে $\int \frac{xdx}{x+\sqrt{x}}$ এর মান নির্ণয় করুন।

(ii) $\cos = z$ বসিয়ে $\int \frac{\cos^3 x}{\sin 4} xdx$ নির্ণয় করুন।

(iii) $x = at$ বসিয়ে $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ এর মান নির্ণয় করুন।

৮। $\int e^{2x} \sin 3x$ এর মান নির্ণয় করুন।

৯। দেখান যে, $\int_r^k (ax+b)^2\,dx = \frac{(ak+b)^3-(an+b)^3}{3a}$

১০। দেখান যে, $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)^3} = \frac{3}{8}$

১১। $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

১২। $y = \frac{1}{2}x^2$ পরাবৃত্তটি $x^2 + y^2 = 8$ বৃত্তটিকে যে দুইটি অংশে বিভক্ত করে তাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

১৩। $y^2 = ax$ পরাবৃত্তটি $x^2 + y^2 = 2ax$ বৃত্তটিকে যে তিনটি অংশে বিভক্ত করে তাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।