# একক 9 : টানা তারের স্পন্দন (Vibration of stretched strings)



## 9.1 প্রস্তাবনা

আপনারা নিশ্চয়ই সবাই তারের বাজনা শুনতে ভালবাসেন এবং অনেকে হয়ত নিজেরা বাজনা বাজিয়েও থাকেন। তারের বাজনার ক্ষেত্রে আপনারা অবশ্যই লক্ষ করে থাকবেন যে, সবরকম তারের বাদ্যযন্ত্র বাজাবার ভঙ্গি একরকম নয়। কোনও কোনও যন্ত্রে তারের কতকগুলি বিশেষ বিন্দুতে আঘাত করে একটি বিশেষ সুর, সৃষ্টি করা হয়। পিয়ানো ও সন্তুর এ জাতীয় বাদ্যযন্ত্র। আবার আমরা যখন কোনও সেতার বাদকের বাজনা শুনি, তখন দেখি যে তিনি তারটিকে বিশেষ বিশেষ স্থানে চেপে ধরছেন এবং অন্য হাতে অন্য একটি বিশেষ স্থানে তারটিকে পাশের দিকে টেনে ধরে ও ছেড়ে দিয়ে সুর সৃষ্টি করছেন। এটি কতকটা ধনুকের টংকার দেওয়ার মত। এই ধরনের তারে টংকার সুর সৃষ্টি করার যন্ত্রের মধ্যে গিটারও পড়ে। লক্ষ্য করে দেখবেন, গিটারে যে ছয়টি তার আছে, সেগুলির প্রস্থচ্ছেদ বিভিন্ন। আবার বাউলের একতারায় তার একটি থাকলেও তার টান কম বা বেশি করা যায়। এছাড়া আরও একরকমের টানা তারের বাদ্যযন্ত্র আছে। কোনও বেহালাবাদক যখন বেহালায় সুর সৃষ্টি করেন তখন, তিনি তারে আঘাত করেন না বা তার টেনেও সুর সৃষ্টি করেন না। তিনি সুর সৃষ্টি করেন তারের ওপর একটি ছড় টেনে। কাজেই আমরা দেখতে পাচ্ছি যে, বিভিন্ন উপায়ে টানা তারে স্পন্দন সৃষ্টি করা যায়। এই এককে সেই বিভিন্ন উপায়গুলি নিয়ে আমরা বিস্তারিত তাত্ত্বিক আলোচনা করব।

**উদ্দেশ্য :**

এই একককটি আপনাকে টানা তারের কম্পন সম্বন্ধে অনেকটাই জানতে সাহায্য করবে। এটি পড়লে আপনি যে সব কাজ করতে পারবেন সেগুলি হল :

● টানা তারে অনুপ্রস্থ তরঙ্গের সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করতে পারবেন।

● টানা তারের সীমাশর্তগুলি প্রয়োগ করে তরঙ্গ সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করতে পারবেন।

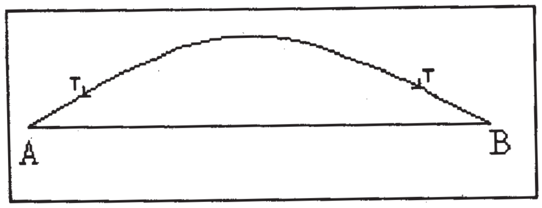
● কম্পনশীল টানা তারের গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির রাশিমালা নির্ণয় করতে পারবেন।

● কর্ষিত, আহত ও ছড়টানা তারের ক্ষেত্রে অনুপ্রস্থ তরঙ্গের সময়-সরণ সমীকরণগুলি প্রতিষ্ঠিত করতে পারবেন এবং সেগুলির সাহায্যে এই তিন ক্ষেত্রে কম্পনের বৈশিষ্ট্যগুলি চিহ্নিত করতে পারবেন।

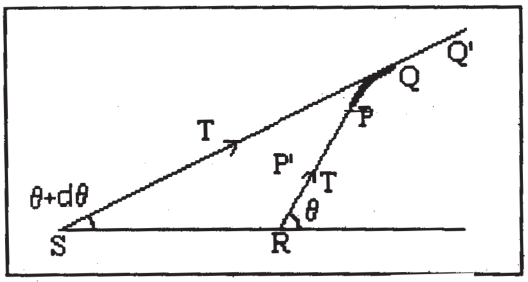
এগুলি ছাড়াও এই এককটি পড়ার পর আপনি নানাবিধ তারের বাদ্যযন্ত্রের গঠন ও শব্দবৈশিষ্ট্য সম্বন্ধে অন্তর্দৃষ্টি লাভ করবেন এবং সেগুলি সম্বন্ধে বুঝিয়ে বলার ক্ষমতা অর্জন করবেন।

## 9.2 টানা তার

মনে করা যাক, একটি সুষম এবং সম্পূর্ণ নমনীয় তার এমনভাবে টান দিয়ে রাখা আছে যাতে তার টান সবসময়ই T থাকে। তারের দুইপ্রান্ত এমনভাবে আটকানো আছে যে, সেখানে তারের কোনও সরণ সম্ভব নয় (চিত্র 9.1)। এবার ধরুন, তারটিকে অনুপ্রস্থভাবে আন্দোলিত করা হল যাতে সমগ্র তারটি এক সমতলে থাকে।




চিত্র 9.1-AB আটকানো স্থির প্রান্ত তারের একটি সমতলে সীমিত আন্দোলন




চিত্র 9.2-তারের অতিক্ষুদ্র অংশের দুই প্রান্তে ক্রিয়াশীল টান

কম্পনরত তারের একটি অতিক্ষুদ্র অংশ PQ চিত্র 9.2—তে দেখানো হয়েছে। তারের টান দৈর্ঘ্য বরাবর ক্রিয়াশীল, সুতরাং বক্রাবস্থায় যে কোনও বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক টানের দিক নির্দেশ করে অর্থাৎ P প্রান্তে টানের দিক $PP'$ এবং Q প্রান্তে $QQ'$। তারের সাম্যাবস্থা AB বরাবর X অক্ষ এবং সরণের দিক বরাবর Y অক্ষ ধরে নিয়ে P ও Q বিন্দুতে টান দুটির উপাংশ নির্ণয় করা যেতে পারে। আমরা ধরে নেব যে, তারটিকে সাম্যাবস্থা থেকে খুব অল্প পরিমাণেই টানা হয়েছে যার জন্য $PP'$ ও $QQ'$ স্পর্শকগুলি AB এর সঙ্গে খুবই

ক্ষুদ্র কোণ রচনা করে। একই কারণে P ও Q বিন্দু দুটির $x$ স্থানাঙ্ক যদি যথাক্রমে $x$ এবং $x + \delta x$ হয়, তবে PQ দৈর্ঘ্যটি এর সমান ধরে নেওয়া যায়।

এখন $PP'$ বরাবর টানের X উপাংশ = $-T\cos \quad -T$

এবং Y উপাংশ = $-T\sin \quad -T\tan \quad = -T$

এখানে কোণের মান ক্ষুদ্র বলে cos কে 1 এর সমান এবং sin কে tan এর সমান ধরা হয়েছে। একইভাবে $+ d$ কোণ অতি ক্ষুদ্র ধরে নিয়ে

$QQ'$ বরাবর টানের X উপাংশ = $T \cos ( \quad + d \quad ) = T$

Y উপাংশ = $T \sin ( \quad + d \quad ) = T \tan ( \quad + d \quad )$

$= T$

অতএব, PQ এর উপর কার্যকরী লব্ধি বলের X উপাংশ = $-T + T = 0$, অর্থাৎ $x$ অক্ষ বরাবর কোনও অনুদৈর্ঘ্য বল নেই।

$$\text{Y উপাংশ} = T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_Q - T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_p = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\delta x$$

আমরা আগেই দেখেছি, PQ অংশটির দৈর্ঘ্য । তারটির একক দৈর্ঘ্যের ভর হলে সেটির দৈর্ঘ্যের ভর হবে । এখন নিউটনের গতীয় সূত্র অনুযায়ী

( = তারটির একক দৈর্ঘ্যের ভর)

অথবা, ...9.1

9.1 সমীকরণের চেহারাটি হয়ত আপনার কাছে পরিচিত। এটি এমন একটি তরঙ্গের সমীকরণ যার $x$ অক্ষ বরাবর বেগ $c$ । সমীকরণটি থেকে বোঝা যাচ্ছে যে, টানা তারে অনুপ্রস্থ তরঙ্গের বেগ $c =$ । এই সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে যে, তারের কোনও নির্দিষ্ট বিন্দুতে সরণ $y$ নির্ভর করে সময় $t$ এবং বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $x$ এর উপর। এখন আমাদের 9.1 সমীকরণটির সমাধান বার করতে হবে। কিন্তু সমীকরণটিতে $x$ ও $t$ এই দুই চলরাশি একত্র থাকায় আমাদের এ দুটিকে আলাদা করার চেষ্টা করতে হবে। ধরা যাক, সরণ $y$ দুটি অপেক্ষকের গুণফল, যাদের একটি $x$ এবং অন্যটি $t$-এর উপর নির্ভরশীল। সেক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি,

$y(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ ...9.2

9.2 রাশিটিকে এবার 9.1 সমীকরণে বসানো যাক। যেহেতু

এবং $\cdot T$ (কেননা X অপেক্ষকটি $t$ এর উপর এবং T অপেক্ষকটি $x$ এর উপর নির্ভর করে না।)

9.1 সমীকরণকে লেখা যায়,

$$\cdot\ T$$

অথবা উভয় দিকে X T দিয়ে ভাগ করে ...9.3

9.3 সমীকরণটি লক্ষ্য করলে বুঝতে পারবেন যে, এর বামদিকে কেবলমাত্র $t$-এর উপর এবং ডানদিকে কেবলমাত্র $x$-এর উপর নির্ভরশীল। এ অবস্থায় উভয় দিককেই ধ্রুবক হতে হবে। ধরা যাক, এই ধ্রুবকটি হল - $p^2$। গাণিতিক সুবিধার জন্য আমরা এখানে একটি নেগেটিভ বর্গ রাশি নিলাম। 9.3 সমীকরণ থেকে এখন আমরা $x$ ও $t$ - এর দুটি পৃথক সমীকরণ পাই:

$$+\ p^2c^2T = 0 \qquad \text{...9.4(a)}$$

এবং $+\ p^2X = 0$ ...9.4(b)

এর মধ্যে প্রথমটি, অর্থাৎ 9.4(a) সমীকরণের একটি সম্ভবপর সমাধান $\cos pct$ এর সমানুপাতী ধরা যেতে পারে। সমীকরণ 9.4(b) এর সাধারণ সমাধান হল $X = A_1\sin px + A_2\cos px$

সুতরাং, 9.1 সমীকরণের সমাধান:

$$y(x,\ t) = X(x)\cdot T(t) = (A_1\ \sin px + A_2\ \cos px)\ \cos pct$$

এখানে $A_1$ ও $A_2$ দুটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক।

কিন্তু আমরা 9.4(a) সমীকরণের সমাধান $\sin pct$ এর সমানুপাতী হিসাবেও ধরতে পারি এবং সেক্ষেত্রে 9.1 সমীকরণের সমাধান হবে :

$$y(x,\ t) = X(x)\cdot T(t) = (B_1\ \sin px + B_2\ \cos px)\ \sin pct$$

যেখানে $B_1$ ও $B_2$ দুটি অন্য অনির্দিষ্ট ধ্রুবক। এখন 9.1 সমীকরণের দুটি সমাধান যোগ করে সাধারণ সমাধান পাওয়া যেতে পারে :

$$y(x,\ t) = (A_1 \sin px + A_2 \cos px) \cos pct + (B_1 \sin px + B_2 \cos px) \sin pct \quad ...9.5$$

**টানা তারের সীমাশর্ত :**

আপনি লক্ষ্য করেছেন যে, 9.5 সমীকরণে $A_1$, $A_2$, $B_1$ ও $B_2$ এই চারটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক রয়েছে। তারের সীমাশর্তগুলির সাহায্যে আপনি এই ধ্রুবকগুলির মান বার করতে পারবেন। প্রথমেই লক্ষ্য করুন, তারের দুই প্রান্ত অর্থাৎ $x = 0$ এবং $x = l$ বিন্দু দুইটিতে সব সময়েই $y = 0$। এখানে l = তারের দৈর্ঘ্য। 9.5 সমীকরণে এই সীমাশর্তগুলি আরোপ করা যাক।

(i) প্রথমটি (অর্থাৎ $x = 0$ হলে $y = 0$) থেকে :

$$A_2 \cos pct + B_2 \sin pct = 0$$

যদি এই সম্পর্কটি $t$-এর সব মানেই সত্য হয় তবে $A_2 = B_2 = 0$। সুতরাং, 9.5 সমীকরণের সরলীকৃত রূপ হল :

$$y(x,\ t) = (A_1 \cos pct + B_1 \sin pct) \sin px \quad ...9.6\ (a)$$

(ii) এবার দ্বিতীয়টি, (অর্থাৎ $x = l$ হলে $y = 0$) থেকে

$$(A_1 \cos pct + B_1 \sin pct) \sin pl = 0$$

এই সম্পর্কটি $t$ এর সব মানের জন্য সত্য হলে $\sin pl = 0$ বা $pl = s$ , যেখানে $s$ = পূর্ণ সংখ্যা। সুতরাং

$p$ এর জায়গায়      লেখা যেতে পারে। 9.6 (a) সমীকরণটি এবার এভাবে লেখা যায় :

$$y(x,\ t) = \left(A_1 \cos\frac{s\pi ct}{l} + B_1 \sin\frac{s\pi ct}{l}\right)\sin\frac{s\pi x}{l} \quad ...9.6(b)$$

যেহেতু $s = 0, 1, 2, 3$ প্রভৃতি $s$ এর সব মানের জন্যই 9.6(b) সমাধানটি খাটে, এই সমাধানগুলির যোগফলটি সবচেয়ে সাধারণ সমাধান হবে। কাজেই 9.1 সমীকরণের সাধারণ সমাধান হল :

$$y\ (x,\ t\ ) = \sum_{s=1}^{\infty}\left(A_s \cos\frac{s\pi ct}{l} + B_s \sin\frac{s\pi ct}{l}\right)\sin\frac{s\pi x}{l} \quad ...9.7$$

উপরের সমীকরণটির রূপ থেকে আপনি বুঝতে পারবেন যে, $x$ নির্ভর এবং $t$ নির্ভর পর্যাবৃত্ত রাশিগুলি আলাদা উৎপাদক হিসাবে রয়েছে, অর্থাৎ এটি অনুপ্রস্থ স্থাণুতরঙ্গ নির্দেস করেছে। $s$ পূর্ণ সংখ্যাটি কম্পনের বিভিন্ন ধরনকে বোঝায়। মূলসুরের জন্য $s = 1$, দ্বিতীয় সমমেলের জন্য $s = 2$ ইত্যাদি এবং 9.7 সমীকরণের ডানদিকের রাশিমালায় এরকম অসংখ্য সমমেলের জন্য সরণ যোগ হয়েছে। যে কোনও একটি সমমেলের জন্য কৌণিক কম্পাঙ্ক      , অর্থাৎ কম্পাঙ্ক ;                । সুতরাং, সমমেলগুলির সম্পাঙ্কের অনুপাত

1 : 2 : 3.... ইত্যাদি।

## 9.2.1 অনুপ্রস্থভাবে কম্পিত তারের শক্তি নির্ণয়

আমরা 9.7 সমীকরণ থেকে দেখেছি যে, একটি কম্পিত তারের যে কোন বিন্দু $x$ - এ $t$ সময়ে সরণ হচ্ছে

$$y = \sum_{s=1}^{\infty} \sin\frac{s\pi x}{l}\left(A_s \cos\frac{s\pi ct}{l} + B_s \sin\frac{s\pi ct}{l}\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} y_s(t) \sin\frac{s\pi x}{l} \qquad ...9.8$$

(যেখানে $y,\ (t) = A_s \cos\frac{s\pi ct}{l} + B_s \sin$ )

অতএব,

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \sin\frac{s\pi x}{l}\frac{s\pi c}{l}\left(-A_s \sin\frac{s\pi ct}{l} + B_s \cos\frac{s\pi ct}{l}\right) \qquad ...9.9$$

তারের ক্ষুদ্র অংশ $dx$ এর ভর $pdx$ এবং তার গতিশক্তি

$= \frac{1}{2} pdx$ [illegible] প্রতি একক দৈর্ঘ্যে তারের ভর)

সুতরাং, $l$ দৈর্ঘ্যের তারের গতিশক্তি $T =$

$$= \frac{\rho}{2}\int_0^l \left[\sum_s \sin\frac{s\pi x}{l}\dot{y}_s(t)\right]^2 dx \qquad ...9.10$$

এই সমাধানটির মধ্যে যে বর্গরাশিটি রয়েছে সেটি আপনি এইভাবে লিখতে পারেন :

$$\left[\sum_s \sin\frac{s\pi x}{l}\dot{y}_s(t)\right]\left[\sum_n \sin\frac{n\pi x}{l}\dot{y}_n(t)\right]$$

$$= \sum_s \sin^2\frac{s\pi x}{l}\dot{y}(t)^2 + \sum\sum_{s\neq n} \sin\frac{s\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\dot{y}_s(t)\dot{y}_s(t)dx$$

এখানে প্রথম রাশিমালাটি যে গুণফল রাশির জন্য $s = n$ এবং দ্বিতীয়টি যেগুলির জন্য $s \quad n$, সেগুলি বোঝাচ্ছে। এখন 9.10 সমাকলনটিকে লেখা যায় :

$T =$

কিন্তু আপনি জানেন যে, $\int_0^l \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ - এর মান $m \neq n$ হলে শূন্য হবে। সুতরাং উপরের রাশিমালার দ্বিতীয় সমীকলনটি শূন্য হবে। কাজেই তারে গতিশক্তি হবে :

$$= \frac{\rho l}{4}\Sigma\left(\frac{s\pi c}{l}\right)^2\left(A_s{}^2\sin^2\frac{s\pi ct}{l}+B_s{}^2\cos^2\frac{s\pi ct}{l}-2A_sB_s\cos\frac{s\pi ct}{l}\sin\frac{s\pi ct}{l}\right) \quad ...9.11$$

কেননা ।

**স্থিতিশক্তি :** এবার আমরা সাম্যাবস্থা থেকে সরে থাকা অবস্থায় তারটির স্থিতিশক্তি নির্ণয় করব। সংজ্ঞা অনুযায়ী কোনও বস্তুর স্থিতিশক্তি

= বস্তুটির অবস্থান পরিবর্তন করার জন্য কৃতকার্য

= প্রযুক্ত বল ও [illegible] সরণের গুণফলের সমাকলিত মান।

9.1 সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা করার সময় আমরা দেখেছি যে, তারের অতি ক্ষুদ্র অংশ এর ওপরে লব্ধি বল Y অক্ষ বরাবর কাজ করে এবং তার মান $T$ । এখন যদি সরণ পরিমাণ বাড়নো হয়, তার জন্য কৃতকার্য হবে : $-T$ । সমগ্র তারের জন্য কৃতকার্য এবং সেহেতু স্থিতিশক্তির বৃদ্ধি :

এখানে $\delta y$ হবে $x$ এর অপেক্ষক। বিশেষত সীমাশর্তের জন্য দুই প্রান্তে এর মান শূন্য হতে হবে। উপরের সমীকরণকে আংশিক সমাকল করলে পাওয়া যায়

সমাকলিত প্রথম অংশটি উভয় সীমাতেই শূন্য কারণ $\delta y$ এর মান এই দুই বিন্দুতে শূন্য। অতএব,

সম্পূর্ণ স্থিতিশক্তি হবে সাম্যাবস্থা (যখন তারের সর্বত্রই $y = 0$ এবং $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$) থেকে এর একটি নির্দিষ্ট মানে আনার জন্য কৃতকার্য। অর্থাৎ,

$$V =$$

$$= \int_0^l \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \qquad ...9.12$$

9.8 নং সমীকরণ থেকে আমরা পেয়েছি,

$$y = \sum_s y_s(t) \sin\frac{s\pi x}{l}$$

$\therefore$

অতএব, সমগ্র তারের স্থিতিশক্তি

$$= \frac{T}{2}\sum_s \left(\frac{s\pi}{l}\right)\left(A_s \cos\frac{s\pi ct}{l} + B_s \sin\frac{s\pi ct}{l}\right)^2 \times \int_0^l \cos^2\frac{s\pi x}{l} dx$$

যেহেতু টান $T = \rho c^2$ এবং

আমরা লিখতে পারি, সমগ্র তারের স্থিতিশক্তি

...9.13

কম্পমান তারের মোট শক্তি গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির যোগফল।

সুতরাং, 9.11 এবং 9.13 সমীকরণ থেকে মোট শক্তি

$$= \rho l \pi^2 \sum_s \left(\frac{sc}{2l}\right)^2 \left(A_s^2 + B_s^2\right)$$

$$= M\pi^2 \sum_s n_s^2 \left(A_s^2 + B_s^2\right) \qquad ...9.14$$

যেখানে $M = \quad l$ = সমগ্র তারের ভর এবং $\quad = n_s$ = কম্পনের $s$-তম সমমেলের কম্পাঙ্ক। এবার যা পড়লেন তার সম্বন্ধে একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

**অনুশীলনী - 1**

ধরুন, $kg$ ওজন দিয়ে টেনে রাখা 1.1 মিটার লম্বা $2.2gm$ ভরের একটি সুষম তার কেবলমাত্র দ্বিতীয় সমমেলে কম্পিত হচ্ছে। তারটির সর্ব্বোচ্চ সরণ $2mm$ এবং $t = 0$ সময়ে তারটির কোথাও কোনও সরণ ছিল না। পরবর্তী সময়ে তারের সরণ-সময় সম্পর্কটি নির্ণয় করুন।

## 9.3 কর্ষিত তার (Plucked string)

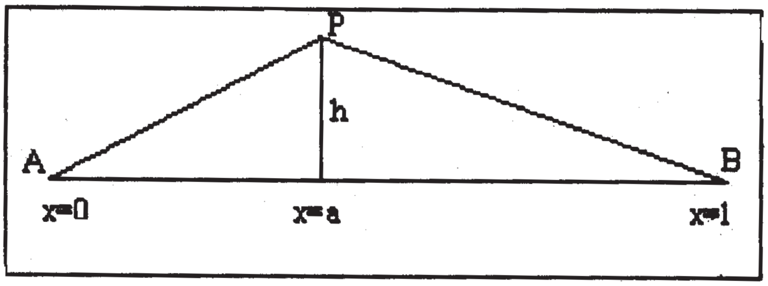
সেতার, গিটার প্রভৃতি বাদ্যযন্ত্রে তারটিকে টেনে ধরে ছেড়ে দেওয়া হয়। ছাড়ার পূর্ব মুহূর্তে তারটিতে কোনও গতি থাকে না। এর আকৃতি 9.3 চিত্রে দেখানো APB এর মত হয়। এই জাতীয় তারকে আমরা কর্ষিত তার বলি।

9.1 সমীকরণে আমরা পেয়েছি অনুদৈর্ঘ্যভাবে কম্পিত একটি তারের অবকল সমীকরণ :

এবং 9.7 সমীকরণ অনুযায়ী এটির সমাধান :

$$y = \sum_s \sin\frac{s\pi x}{l}\left(A_s \cos\frac{s\pi ct}{l} + B_s \sin\frac{s\pi ct}{l}\right) \qquad \text{...9.15}$$

মনে করা যাক, তারটিকে $x = a$ বিন্দুতে পাশের দিকে $h$ দূরত্বে টেনে ধরা হল। এর




চিত্র 9.3-বিন্দুমাত্র স্থানে কর্ষিত তারের প্রাথমিক অবস্থান।

ফলে তারটির আকৃতি দাঁড়াল দুটি সরলরেখা, যারা কর্ষিত বিন্দুতে মিলিত হচ্ছে (চিত্র 9.3 দেখুন)। $t = 0$ সময়ে কর্ষিত বিন্দু $p$ এর $y$ স্থানাঙ্ক $= h$.

$x = 0$ এবং $x = a$ স্থানাঙ্কের মধ্যে যে কোনও বিন্দুতে তারের অনুপ্রস্থ সরণ হবে

$$y_0 = \frac{h}{a}x \qquad (0 \quad x \quad a) \qquad \ldots 9.15(a)$$

আবার, $x = a$ ও $x = l$ এর মধ্যে যে-কোনও স্থানাঙ্কে তারের সরণ

$$y_0 = h \qquad (a \quad x \quad l) \qquad \ldots 9.15(b)$$

$t = 0$ সময়ে তারের বিভিন্ন বিন্দুতে যে প্রাথমিক শর্তগুলি পালিত হয় সেগুলি হল

i) $y = y_0$ ...9.16(a)

এবং ii) ...9.16(b)

এখন আমরা এই প্রারম্ভিক শর্তগুলির সাহায্যে 9.15 সমীকরণের অনির্দিষ্ট ধ্রুবক $A_s$ ও $B_2$ এর মান নির্ণয় করতে চেষ্টা করব। 9.15 সমীকরণে আমরা পেয়েছি,

$y\ (x,\ t) =$

এটি আসলে একটি ফুরিয়ে শ্রেণী Fourier Series এবং $A_s$ ও $B_s$ ফুরিয়ে গুণাঙ্ক। এই সমীকরণ থেকে $t = 0$ সময়ে আমরা পাই :

...9.17(a)

এবং $$\dot{y}(x,0) = \dot{y}_0 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s\pi c}{l} B_s \sin\frac{s\pi x}{l} \qquad \ldots 9.17(b)$$

যদি 9.17(a) ও (b) সমীকরণ দুটির উভয় দিককে $\sin\frac{s\pi x}{l}dx$ দিয়ে গুণ করেন এবং $x = 0$ থেকে $x = l$ সীমার মধ্যে সমাকলন করেন, তবে আপনি পাবেন :

এবং

অর্থাৎ, এবং

এবার 9.15(a) ও (b) থেকে $y_0$ এবং 9.16(b) $\dot{y}_0$ এর মান বসানো যেতে পারে।

অথবা, $\frac{1}{2}A_s = \frac{h}{a}\int_0^a x\sin\frac{s\pi x}{l}dx + \frac{hl}{l-a}\int_a^l \sin\frac{s\pi x}{l}dx - \frac{h}{l-a}\int_a^l x\sin\frac{s\pi x}{l}dx$

$$= \frac{h}{a}\int_0^a x \sin pxdx + \frac{hl}{l-a}\int_a^l \sin pxdx - \frac{h}{l-a}\int_a^l x \sin px\, dx$$

যেখানে $\frac{s\pi}{l} = p$ লেখা হয়েছে।

$$=$$

$$= \frac{h}{a}\left(-\frac{a}{p}\cos pa + \frac{1}{p^2}\sin pa\right) + \frac{hl}{p(l-a)}(\cos pa - \cos pl) - \frac{h}{p(l-a)}\left[-l\cos pl + \frac{1}{p}\sin pl + a\cos pa - \frac{1}{p}\sin pa\right]$$

$= \frac{hl}{p^2 a(l-a)}\sin pa$, কেননা $\sin pl = 0$।

$\therefore$

আবার, $B_s = \frac{2}{s\pi l}\int_0^l \dot{y}_0 \sin\frac{s\pi x}{l}dx = 0$

কেননা তারের সব বিন্দুর জন্যই $\dot{y}_0 = 0$

$A_s$ এবং $B_2$ এর যে মানগুলি আমরা নির্ণয় করলাম সেগুলি ব্যবহার করে কর্ষিত তারের কম্পনের 9.15 সমীকরণটিকে লেখা যায়:

...9.18

$$= \sum_s a_s \cos\frac{s\pi ct}{l}$$

এখানে, $a_s = \dfrac{2hl^2}{s^2\pi^2 a(l-a)} \sin\dfrac{s\pi a}{l} \sin\dfrac{s\pi x}{l}$ ...9.18(a)

এবং এটি তারের কম্পনের $s$-তম সমমেলের বিস্তার। যেহেতু তারের অনুপ্রস্থ তরঙ্গটি স্থাণুতরঙ্গ, এই বিস্তার তারের দৈর্ঘ্য বারবর $x$ স্থানাঙ্কের সঙ্গে পরিবর্তিত হয়।

9.18 সমীকরণ থেকে কর্ষিত তারের কম্পনের সমস্ত তথ্যই আমরা পেতে পারি। তারের কম্পনের মধ্যে যে উপসুরগুলি থাকে, কম্পনের ফলে উৎপন্ন শব্দতরঙ্গেও সেই উপসুরগুলি থাকে এবং সেগুলির আনুপাতিক তীব্রতাও কম্পনের উপসুরগুলির অনুরূপ হয়। সুতরাং, 9.18 সমীকরণটির পর্যালোচনা করে আমরা কর্ষিত তার থেকে উৎপন্ন শব্দতরঙ্গের বৈশিষ্ট্য সম্বন্ধেও কিছুটা বুঝতে পারব।

**কর্ষিত তারের কম্পনের বৈশিষ্ট্য :**

(i) কর্ষণের ফলে সুরের অনুপস্থিতি—একটি তারকে $x = a$ বিন্দুতে কর্ষণ করলে, যে স্বর সৃষ্টি হয় তাতে সবকটি সুর উপস্থিত নাও থাকতে পারে। কারণ কর্ষিত বিন্দুটি কখনওই নিস্পন্দ বিন্দু হতে পারে না কেননা নিস্পন্দ বিন্দুতে $y$ এর মান সমসময়েই শূন্য হয়। কাজেই যে সুরগগুলিতে কর্ষিত বিন্দুতে একটি নিস্পন্দ বিন্দু থাকে, সেই সুরগুলি স্বরে উপস্থিত থাকবে না। সুতরাং, আমাদের দেখতে হবে $s$-এর কোনও কোনও মানের জন্য $x = a$ হলে $a_s = 0$ হবে। এর শর্ত হল :

$\left[\sin\dfrac{s\pi x}{l}\right]_{x=a} = \sin\dfrac{s\pi a}{l} = 0$ বা, $\dfrac{s\pi a}{l} = n\pi$, যেখানে $n$ = পূর্ণসংখ্যা 1, 2, 3, ইত্যাদি অথবা পূর্ণ সংখ্যা

$$s = \frac{nl}{a} \qquad ...9.19$$

সুতরাং, তারটিকে যদি $r$-সংখ্যাক সমান ভাগে ভাগ করা যায় এবং এর $m$-তম ভাগ বিন্দুতে কর্ষণ করা হয় (অর্থাৎ $a$ যদি হয়),তাহলে যে স্বর সৃষ্টি হবে তাতে $s =$ যদি পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে $s$-তম সমমেলটি অনুপস্থিত থাকবে। আবার যেহেতু $n$ যে কোনও পূর্ণ সংখ্যা হতে পারে, $s$-তম সুরের জন্য নিস্পন্দ বিন্দু $2s$-তম, $3s$-তম প্রভৃতি সুরের জন্যও নিস্পন্দ বিন্দু হবে। কাজেকাজেই এইসব উচ্চতর সমমেলগুলি কর্ষিত তারে অনুপস্থিত থাকবে। এটিই হল ইয়ং হেলম্‌হোলৎস্-এর (Young Helmholtz) সূত্র। তারের বাদ্যযন্ত্র নির্মাণে ইয়ং হেলম্‌হোলৎস্ সূত্রের প্রয়োগ ঘটে। কোনও তার মধ্যবিন্দুতে কর্ষিত হলে দ্বিতীয়, চতুর্থ প্রভৃতি যুগ্ম সমমেলগুলি সম্পূর্ণ বর্জিত হয়। এতে স্বরের মাধুর্যের হানি হয়। এজন্য বাদ্যযন্ত্রে তারের এক প্রান্তের কাছাকাছি বিন্দুতে তারটি কর্ষিত হয়, যাতে প্রায় সব সমমেল উৎপন্ন হতে পারে।

তবে সব বাদ্যযন্ত্রের ক্ষেত্রে ইয়ং হেল্‌ম্‌হোলৎস্ সূত্র সম্পূর্ণ খাটে না। এর কারণ, বাদ্যযন্ত্রে ব্যবহৃত ধাতব তার সম্পূর্ণ নমনীয় হয় না এবং কর্ষণের সময় কর্ষিত বিন্দুতে তারটি একটি কোণের পরিবর্তে একটি ক্ষুদ্র বক্ররেখা রচনা করে। এছাড়া তারের বন্ধনী বা যে সেতুর উপর দিয়ে তারটি টানা থাকে সেটি সম্পূর্ণ দৃঢ় হয় না।

**উদাহরণ :** ধরা যাক, তারটিকে প্রান্ত থেকে দৈর্ঘ্যের এক-তৃতীয়াংশ দূরে কর্ষণ করা হল। এক্ষেত্রে $r$ = 3, $m$ = 1। এখন যে সমমেলগুলি অনুপস্থিত থাকবে, সেগুলি ক্রমিক সংখ্যা হল $s = n \cdot \frac{r}{m} = n \cdot 3$ অর্থাৎ $s$ = 3, 6, 9........। উৎপন্ন স্বরে তৃতীয়, ষষ্ঠ, নবম প্রভৃতি সমমেলগুলি থাকবে না।

(ii) **সুরের প্রাবল্য :** 9.18 সমীকরণ থেকে আপনি বুঝতে পারবেন যে, নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একটি কর্ষিত তারের কোনও একটি পরিলক্ষিত বিন্দুতে $s$ - তম সুরের বিস্তার দুটি বিষয়ের ওপর নির্ভর করে। প্রথমটি হল কর্ষিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক ও প্রাথমিক বিচ্যুতির পরিমাণ অর্থাৎ $a$ ও $h$ এবং দ্বিতীয়টি হল তারের আবদ্ধ প্রান্ত থেকে পরিলক্ষিত বিন্দুর দূরত্ব, $x$।

প্রথমত, যদি কর্ষিত বিন্দুর অবস্থান ও প্রাথমিক বিচ্যুতিকে স্থির রাখা যায়, তাহলে $s$ - তম সুরের বিস্তার আবদ্ধ প্রান্ত থেকে বিন্দুটির দূরত্ব $x$-এর উপর নির্ভর করবে। এই বিস্তার সবচেয়ে বেশি ($a_{sm}$) হবে যখন

sin অর্থাৎ, অথবা, $x$ = $j$ = পূর্ণ সংখ্যা।

অতএব, $x$-এর উপরিলিখিত মানের জন্য $a_s = a_{sm} =$ ...9.20

**উদাহরণ :** তারটিকে যদি $a = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে কর্ষণ করা হয় তাহলে $s$ - তম সুরে তারের কম্পনের সর্বোচ্চ বিস্তার হবে

$a_{sm} =$ ...9.21

$s$ যখন যুগ্ম পূর্ণ সংখ্যা (2, 4, 6,...) তখন sin = 0, সুতরাং $_{sm}$ = 0। এটি ঘটবে তারের কম্পনে দ্বিতীয়, চতুর্থ, ষষ্ঠ ইত্যাদি সমমেলের ক্ষেত্রে, অর্থাৎ এই সমমেলগুলি একেবারেই থাকবে না। আবার $a_{sm}$ - এর মান সর্বোচ্চ হবে যখন $s$ একটি অযুগ্ম পূর্ণ সংখ্যা (1, 3, 5,....), কেননা তখন sin = 1এবং $a_{sm}$

= ।

দ্বিতীয়ত, কর্ষিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং আটকানো প্রান্ত থেকে পরিলক্ষিত বিন্দুটির দূরত্ব $x$ যদি স্থির থাকে, তাহলে বিস্তার ($a_s$)$s$-এর বর্গের ব্যস্তানুপাতে পরিবর্তিত হয়। অর্থাৎ, $a_s$ । যেহেতু তীব্রতার বিস্তারে

বর্গের সমানুপাতিক, কাজেই তীব্রতা ($I_s$) - কে আমরা লিখতে পারি $I_s \propto \frac{1}{s^4}$। এর থেকে স্পষ্ট হচ্ছে যে, উচ্চতর সুরগুলির তীব্রতা খুব দ্রুতগতিতে হ্রাস পাবে। ধরুন, তারটি যদি মধ্যবিন্দুতে কর্ষিত হয় প্রথম, তৃতীয়, পঞ্চম সুরগুলির তীব্রতার অনুপাত হবে $I_1 : I_2 : I_3 = 1 : \frac{1}{3^4} : \frac{1}{5^4}$

(iii) **স্বরের জাতি :** যে স্বরে মূলসুর ছাড়া অন্য সমমেল থাকে না তা শ্রুতিমধুর হয় না। কোনও সুরশলাকাকে বাদ্যযন্ত্র হিসাবে ব্যবহার করা যায় না কেননা এগুলির একটিমাত্র কম্পাঙ্ক থাকে। কর্ষিত তারে যে স্বর সৃষ্টি হয় তার জাতি নির্ণীত হয় সেই স্বরে উপস্থিত কতকগুলি সুর আছে তার সংখ্যা এবং সুরগুলির আপেক্ষিক (relative) তীব্রতার দ্বারা। তারটিকে $a$ দূরত্বে কর্ষণ করলে সম্ভাব্য সুরগুলির সংখ্যা অনুপাত দ্বারা নির্ণয় করা যায়। সুতরাং, সৃষ্ট স্বর উন্নত জাতির (good quality) এবং শ্রুতিমধুর হবে যদি তারটিকে বৃহৎ সংখ্যক সমভাগে ভাগ করা যায় এবং এক প্রান্ত থেকে নিকটতম বিভাজন বিন্দুতে কর্ষণ করা হয়। এতে পর পর অনেকগুলি সমমেল উৎপন্ন হবে। যে সুরগুলি অনুপস্থিত থাকবে তাদের তীব্রতা নগণ্য হত, যার ফলে সেগুলির অনুপস্থিতিতে উৎপন্ন শব্দের জাতির কোনও হানি ঘটবে না। উপস্থিত সুরগুলির সংখ্যা যে বস্তুটি দিয়ে কর্ষণ করা হয় তার প্রকৃতির ওপরও নির্ভর করে।

এবার আপনি নিজে একটি অনুশীলনীর উত্তর দেওয়ার চেষ্টা করুন।

**অনুশীলনী** - $\sum_s \left[A_s \cos\frac{s\pi ct}{l} + B_s \sin\frac{s\pi ct}{l}\right] \sin\frac{s\pi x}{l}$

একটি টানা তারকে আবদ্ধ প্রান্ত থেকে দূরত্বে কর্ষণ করা হল। এতে যে স্বর সৃষ্টি হবে তাতে কোন কোন সুর অনুপস্থিত থাকবে?

## 9.4 আহত তার (Struck string)

পিয়ানো একটি জনপ্রিয় বাদ্যযন্ত্র। এর তারকে একটি ফেল্টে (Felt) আবৃত হাতুড়ির দ্বারা আঘাত করা হয় এবং আঘাত করার পর হাতুড়িটি আবার নিজের স্থানে ফেরত আসে। মনে করা যাক, $l$ দৈর্ঘ্য এবং $m$ রৈখিক ঘনত্বের একটি তারকে T টান দ্বারা টেনে রাখা হয়েছে। অপরিবর্তিত অবস্থায় তারটির আবদ্ধ দিক থেকে ($x = 0$) $x = a$ দূরত্বে তারটিকে একটি প্যাডযুক্ত হাতুড়ি দিয়ে এমনভাবে আঘাত করা হল যাতে এই আঘাতের সময় $x = a$ এবং $x = a + da$ এই ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্যের মধ্যেই তারের সঙ্গে হাতুড়ির সংযোগ ঘটে। এখন আমরা টানা তারের সাধারণ সরণের 9.7 সমীকরণ ব্যবহার করব। এই সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$y\,(x, t) =$

এখন আমরা আহত তারের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য টানা শর্তগুলি আরোপ করব।

(i) প্রথম সীমাশর্তটি হল, প্রারম্ভিক অবস্থায়, যখন $t = 0$, তারের সব বিন্দুতে সরণ শূন্য হবে। $y(x, t)$-এর রাশিমালায় $t = 0$ বসালে আপনি পাবেন,

$$y\ (x,\ 0) = \sum_s A_s \sin \frac{s\pi x}{l}$$

উভয়দিককে $\sin \dfrac{r\pi x}{l} dx$ দিয়ে গুণ করে $x = 0$ থেকে $x = l$ পাল্লায় সমাকলন করলে পাওয়া যায় (এখানে $r$ = পূর্ণ সংখ্যা)

বামদিকের রাশিটির মান শূন্য, কেননা $y\ (x,\ 0) = 0$। ডানদিকের সমাকলটির মান $A_r \cdot \dfrac{1}{2}$ কেননা

- এর মান $s$ $r$ হলে শূন্য হবে।

সুতরাং, $A$ [illegible] $= 0$ বা [illegible] $A_3$ প্রভৃতি সবগুলি ধ্রুবকের মানই শূন্য। সুতরাং,

$y(x,\ t) =$ ...9.22

(ii) দ্বিতীয় সীমাশর্তটি হল, প্রারম্ভিক অবস্থায় তারের বেগ

$\dot{y}\,(x,\ t) = u_0$ যখন, $a$ $x < a +$ ( = ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য)

$= 0$ যখন $x$ এর মান ভিন্ন।

অর্থাৎ, হাতুড়ির আঘাতের ফলে তারের $x = a$ বিন্দুর সন্নিহিত দৈর্ঘ্যের একটি খুব ছোট অংশ $u_0$ বেগ লাভ করে কিন্তু প্রারম্ভিক অবস্থায় তারের বাকি অংশ সাম্যাবস্থানে থাকে। এবার সীমাশর্তটি প্রয়োগ করা যাক। $y\ (x,\ t)$ - এর রাশিমালা 9.22 থেকে আমরা পাই :

এই সমীকরণের দুই দিককে $\sin \dfrac{r\pi x}{l} dx$ দিয়ে গুণ করে $x = 0$ ও $x = l$ সীমার মধ্যে সমাকলন করলে

এই সমীকরণের বামদিকের রাশিটির মান:

$$\int_0^a 0\cdot\sin\frac{r\pi x}{l}dx + \int_a^{a+\Delta} u_0\sin\frac{r\pi x}{l}dx + \int_{a+\Delta}^{l} 0\cdot\sin\frac{r\pi x}{l}dx$$

$= u_0\sin\ \frac{r\pi a}{l}\cdot$ কেননা দৈর্ঘ্যের উপর $x$-এর মান $a$ বলে ধরে নেওয়া যায়।

ডানদিকের রাশিটির মান $B_r$

সুতরাং লেখা যায়, $B_s = \frac{2}{s\pi c}u_0\Delta\sin\frac{s\pi a}{l}$ ।

তারের $\Delta$ দৈর্ঘ্যের অংশটুকু যে প্রাথমিক ভরবেগ লাভ করে তার মান

$p = \quad \cdot u_0$, যেখানে $\quad =$ তারের একক দৈর্ঘ্যের ভর।

$u_0 =$

$$\int_0^l \dot{y}(x,0)\sin\frac{r\pi x}{l}dx = \sum_s \int_0^l B_s\frac{s\pi c}{l}\sin\frac{s\pi x}{l}\sin\frac{r\pi x}{l}dx$$

এবং, $B_s =$

$B_s$-এর এই মান ব্যবহার করে 9.22 সমীকরণটি লেখা যায় :

$$y(x,\ t) = \frac{2p}{\pi cp}\sum_s \frac{1}{s}\sin\frac{s\pi a}{l}\sin\frac{s\pi x}{l}\sin\frac{s\pi ct}{l} \qquad ...9.23$$

উপরের সমীকরণ থেকে স্পষ্টই বোঝা যায় যে, আহত তারে যে স্থাণু তরঙ্গের সৃষ্টি হয়, তার বিস্তার তারের এক এক স্থানে এক এক পরিমাণে হয়। আবদ্ধ প্রান্ত থেকে $x$ দূরত্বে $s$-তম সুরে যে কম্পন হয় তার বিস্তার

$$a_s = \frac{2p}{\pi c\rho}\cdot\frac{1}{s}\cdot\sin\frac{s\pi a}{l}\sin\frac{s\pi x}{l} \qquad ...9.24$$

9.23 সমীকরণটিকে তখন এভাবেও লেখা যায় :

$$y\ (x,\ t) = \sum_s a_s\sin\frac{s\pi ct}{l} \qquad ...9.25$$

**আহত তারের কম্পনের বৈশিষ্ট্য :**

(i) **সুরের অনুপস্থিতি :** 9.23 সমীকরণ থেকে আপনি সহজেই বুঝতে পারছেন যে, তারের আবদ্ধ প্রান্ত থেকে আহত বিন্দুর (struck point) দূরত্ব $a$ যদি এমন হয় যে $\sin \frac{s\pi a}{l}$ এর মান শূন্য হয়, তবে তারের কম্পনে $s$-তম সুর অনুপস্থিত থাকবে। এই শর্তের অর্থ $= r$ ($r$ = পূর্ণ সংখ্যা) বা $a = l\cdot$ ।

যদি তারটিকে $s$ সমানভাগে ভাগ করা যায় এবং যে কোনও একটি বিভাজন বিন্দুতে আঘাত করা হয় তাহলে তারের কম্পনে $s$-তম সুরটি অনুপস্থিত হবে। এখানে মূলনীতিটি এই যে, আহত বিন্দুতে যে সুরের একটি নিস্পন্দ বিন্দু থাকত, তারের কম্পনে সেই সুর থাকতে পারে না। আবার কোনও একটি বিন্দু $s$-তম সুরের নিস্পন্দ বিন্দু হলে সেটি $2s$-তম, $3s$-তম ইত্যাদি সুরগুলিরও নিস্পন্দ বিন্দু হবে। অর্থাৎ, $2s$-তম, $3s$-তম ইত্যাদি সুরগুলিও সেক্ষেত্রে অনুপস্থিত হবে।

(ii) **সুরের প্রাবল্য :** 9.23 সমীকরণ থেকে আপনি আগেই দেখেছেন যে, তারের আবদ্ধ প্রান্ত থেকে $x$ দূরত্বে $s$-তম সুরের বিস্তার $a_s$ আহত বিন্দুর '$a$' এর উপর নির্ভর করে। আবার তারটিকে নির্দিষ্ট একটি বিন্দুতে আঘাত করলে, অর্থাৎ আহত বিন্দুর $a$ কে স্থির রাখলে, $s$-তম সুরের বিস্তার বদ্ধ প্রান্ত থেকে দূরত্বের ($= x$) বিভিন্ন মানে বিভিন্ন হয়। বিস্তার $a_s$ সবচেয়ে বেশি হবে যখন sin অথবা, $x =$ $(2n + 1)$, $n$ = পূর্ণ সংখ্যা। বিস্তারের সর্বোচ্চ মান হবে

$$a_{sm} = \qquad \ldots 9.26$$

এই সর্বোচ্চ বিস্তার সমমেলের ক্রম '$s$' - এর সঙ্গে ব্যাস্তানুপাতে পরিবর্তিত হয়। লক্ষ্য করুন, এক্ষেত্রে সুরের তীব্রতা $I \propto \frac{1}{s^2}$। অর্থাৎ সুরের ক্রমের (order) বৃদ্ধির সঙ্গে তীব্রতা হ্রাস পেলেও এই হ্রাসের হার কর্ষিত তারের তুলনায় কম দ্রুত।

**অনুশীলনী - 3**

(a) $l$ দৈর্ঘ্যের একটি তারকে আবদ্ধ প্রান্ত থেকে $\frac{l}{3}$ দূরে আঘাত করা হল। $9.18a$ সমীকরণের সাহায্যে তারের কম্পনের $s$-তম সমমেলের বিস্তারের রাশিমালাটি লিখুন। কোন কোন সুরে বিস্তার সর্বনিম্ন (অর্থাৎ শূন্য) আর কোন কোন সুরের জন্যই বা বিস্তার সর্বোচ্চ হবে? সর্বোচ্চ বিস্তারের রাশিমালাটি নির্ণয় করুন।

(b) আহত তারের গাণিতিক বিশ্লেষণে ধরে নেওয়া হয়েছে যে, হাতুড়িটি তারের অত্যন্ত ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্যে আঘাত করে। এটি সত্য না হলে বিশ্লেষণের কোনও পার্থক্য হবে কি?

## 9.5 ছড়টানা তার (Bowed string)

আমাদের সুপরিচিত বেহালা ও এসরাজ হল ছড়টানা তারের বাদ্যযন্ত্রের উদাহরণ। ছড়টানা তারের কম্পনে একটি অভিনবত্ব আছে। তারটি নিজস্ব কম্পাঙ্কে কম্পিত হলেও এটি তারের স্বাভাবিক কম্পন নয়, কারণ কম্পনের জন্য ছড়ের প্রভাব অবশ্য প্রয়োজনীয়। তারটি গতিশীল ছড় থেকেই কম্পনের জন্য তার প্রয়োজনীয় শক্তি পেয়ে থাকে। কিন্তু তাহলেও এটি পরবশ কম্পন (forced vibration) নয়, কারণ তারটি তার স্বাভাবিক কম্পাঙ্কেই আন্দোলিত হয়, ছড়টির কোনও নিজস্ব কম্পাঙ্ক নেই। এজন্য ছড়টানা তারের কম্পনকে বলা হয় **পোষিত কম্পন** (maintained vibration)।

ছড়ের গতি তারের কম্পনকে বজায় রাখে। একটি ছড়কে তারের ওপর চালালে ছড়টি তারটিকে তার সঙ্গে টেনে নিয়ে যায়। এটি সম্ভব হয় তার ও ছড়ের মধ্যে স্থিতীয় ঘর্ষণের ফলে। ছড়ের দু'দিকের তারের দুটি অংশ ছড়ের দিকে ক্রমে ক্রমে আনত হতে থাকে। ফলে টানা তারের প্রত্যানয়ক বলের মান ক্রমশ বৃদ্ধি পায়। একসময় এই প্রত্যানয়ক বলের মান স্থিতীয় ঘর্ষণ বলের থেকে বেশি হয় এবং তারটি পিছলে গিয়ে নিজস্ব অবস্থানে ফেরত আসতে থাকে। জাড্যের জন্য সেটি নিজস্ব অবস্থান ছাড়িয়ে চলে যায়। তারটি যতক্ষণ ছড়ের সাপেক্ষে গতিশীল থাকে ততক্ষণ তারের উপর প্রত্যানয়ক বল ছাড়াও গতীয় ঘর্ষণ বল কাজ করে। এই ফলেই তারটি মন্দিত হয়ে ক্রমশ স্থির অবস্থায় আসে। তখন ছড় দিয়ে আবার তারটিকে টেনে নিয়ে যাওয়া হয়। যতক্ষণ ছড়টি তারের সংস্পর্শে গতিশীল থাকে ততক্ষণ এই ছড় দিয়ে তারটি সামনে টেনে নিয়ে যাওয়া এবং তারের পিছলে পূর্বের অবস্থানে ফিরে আসা চলতে থাকে। তারের অগ্রগতির সময় স্থিতীয় ঘর্ষণের মানের পার্থক্যের জন্যই তারের কম্পন বজায় থাকে, কারণ স্থিতীয় ঘর্ষণ বল তারের ওপর বেশি কাজ করে।

পোষিত কম্পনের বিশেষত্বগুলি এবার আলোচনা করা যাক।

**পোষিত কম্পনের বিশেষত্ব :**

(i) প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্ক তারের নিজস্ব কম্পাঙ্কের দ্বারাই নিয়ন্ত্রিত হয়।

(ii) প্রযুক্ত বল তন্ত্রকে যে হারে শক্তির যোগান দেয় তা শক্তির অবক্ষয়ের হারের সমান।

(iii) অবিচ্ছিন্নতার সূত্র থেকে বলতে পারা যায় যে, তন্ত্রের কম্পন চলাকালীন শক্তির সরবরাহের হারে হঠাৎ কোনও পরিবর্তন ঘটতে পারে না।

## 9.5.1 হেল্ম্হোলৎস্-এর সূত্র :

ছড়টানা তারের গতির বিষয়ে বিজ্ঞানী হেলম্হোলৎস্-এর তিনটি সূত্র আছে। সূত্রগুলি এই প্রকার:

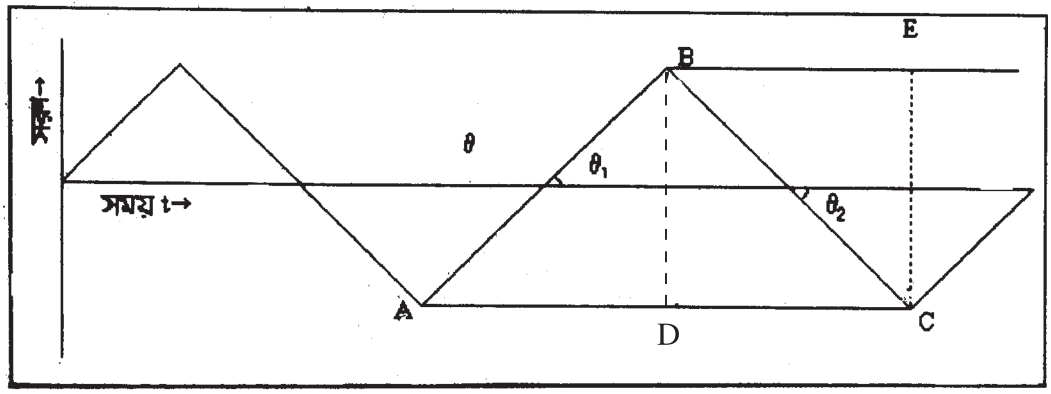
**প্রথম সূত্র —** ছড়ের সংস্পর্শে তারের বিন্দুটির অগ্রগতির বেগ ছড়ের গতিবেগের সমান।

বিজ্ঞানী রমণের যুক্তি অনুযায়ী, যেহেতু তারের কম্পন ছড়ের দ্বারা সৃষ্ট, অতএব তারের সম্মুখ গতির সময়ে ছড় থেকে তারে শক্তি সরবরাহের হার তারটি পিছলে পিছনের দিকে যাওয়ার সময়ের হারের সমান। তারের যে বিন্দুটি ছড়ের সংস্পর্শে থাকে তার সম্মুখ গতিবেগ যদি ছড়ের গতিবেগের কম হত তাহলে তাদের মধ্যে একটি আপেক্ষিক বেগ সৃষ্টি হত এবং তার ফলে দুই এর মধ্যে গতীয় ঘর্ষণ তৈরি হত। তারের পিছনের দিকে পিছলে পড়ার সময় এই আপেক্ষিক বেগের হঠাৎ পরিবর্তন ঘটত এবং ঘর্ষণ বলেরও হঠাৎ ঘর্ষণ বলেরও হঠাৎ পরিবর্তন হত। ফলে শক্তি সরবরাহের হারের সমতা বজায় থাকত না। এতে পোষিত কম্পনের মূলনীতি অর্থাৎ শক্তি সরবরাহের হারের সমতা লঙ্ঘিত হবে। সুতরাং, তারের অগ্রগতির সময়ে ছড়ের গতিবেগ ও তারের স্পর্শবিন্দুর গতিবেগ সমান হবে যাতে উভয়ের মধ্যে স্থিতীয় ঘর্ষণ কাজ করে।

**দ্বিতীয় সূত্র —** কোনও টানা তারের কোনও একটি প্রান্তে যদি ছড় দিয়ে কম্পন ঘটানো যায় তাহলে কম্পিত বিন্দুর অগ্র ও পশ্চাদ্গামী গতিবেগ দুটি স্থির থাকে এবং বেগ দুটির অনুপাত ছড়টি তারটিকে যে দুটি খণ্ডে বিভক্ত করেছে তাদের দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান হয়। সংস্পর্শ বিন্দুর সরণ সময় লেখচিত্রটি পর্যাবৃত্ত এবং করাতের দাঁতের মত দুটি ধাপে আঁকাবাঁকা হয় (চিত্র 9.4)। লেখচিত্রের AB অংশ সংস্পর্শ বিন্দুর অগ্রগতি এবং BC অংশ ঐ বিন্দুর পশ্চাৎগতি নির্দেশ করেছে। চিত্রে অগ্রগতির বেগ $v_1 = \frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}} = \tan\ _1$ এবং পশ্চাৎগতির বেগ $v_2 = \frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}} = \tan\ _2$

দুই বেগের অনুপাত,

কেননা $BD = EC$




চিত্র 9.4 - তারের সংস্পর্শ তারের বিন্দুর সময় সরণ লেখ।

যদি একপ্রান্ত থেকে তারের সংস্পর্শ বিন্দুর দূরত্ব $a$ এবং অন্যপ্রান্ত থেকে $l - a$ ($l$ = তারের দৈর্ঘ্য) হয়, তবে হেল্‌ম্‌হোলৎস - এর দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী $\frac{v_1}{v_2} = \frac{a}{l-a}$ । এই অনুপাত 9.4 চিত্রের অনুপাতের সমান হয়।

**তৃতীয় সূত্র —** একইভাবে ছড় টানা হলে তারের যে কোনও বিন্দুর অগ্রগতি এবং পশ্চাৎগতির বেগের যোগফল $v_1 + v_2$ একটি স্থির রাশি এবং এই সংখ্যাটি $x$-এর উপর নির্ভরশীল নয়।

## 9.5.2 ছড়টানা তারের জন্য হেলম্‌হোলৎস্‌ - এর তত্ত্ব

ধরা যাক, $l$ দৈর্ঘ্যের এবং রৈখিক ঘনত্বের একটি তারকে দুইপ্রান্ত $x = 0$ এবং $x = l$ - এ আটকানো হল এবং T বলে টান করে রাখা হল। এখন এই তারটিকে $x = a$ বিন্দুতে ছড় টেনে স্পন্দিত করা হল। এর ফলে যে অনুপ্রস্থ তরঙ্গের সৃষ্টি হবে তার বেগ হবে :

(9.1 সমীকরণ অনুযায়ী)

এক্ষেত্রেও আমরা কম্পিত তারের যে অবকল সমীকরণ পাব (সমীকরণ 9.1), তার সাধারণ সমাধান 9.7 সমীকরণের অনুরূপ হবে :

$$y = \sum_s \sin\frac{s\pi x}{l}\left[A_s \cos\frac{s\pi ct}{l} + B_s \sin\frac{s\pi ct}{l}\right]$$

যে কোনও বিন্দুতে তারের অনুপ্রস্থ বেগ হবে :

$$\dot{y} = \sum_s \sin\frac{s\pi x}{l}\cdot\frac{s\pi c}{l}\cdot\left(-A_s \sin\frac{s\pi ct}{l} + B_s \cos\frac{s\pi ct}{l}\right) \qquad ...9.26$$

এখন আমাদের $A_s$ ও $B_s$ ধ্রুবকগুলির মান জানতে হবে। 9.26 সমীকরণের উভয় দিককে $\sin\frac{s\pi ct}{l}dt$ দিয়ে গুণ করে তারের মূলসুরের এক পর্যায়কাল অর্থাৎ $t = 0$ থেকে $t = T$ সীমার মধ্যে সমাকলন করলে পাওয়া যাবে :

$$= -A_s \sin\frac{s\pi x}{l}\left(\frac{s\pi c}{l}\cdot\frac{T}{2}\right)$$

$$= -A_s\ s\pi \sin \qquad \text{কেননা } cT = 2l$$

যদি ধরা যায়, তারের অগ্রগতির সময়ে $t = 0$ থেকে $t =$ পর্যন্ত এবং পশ্চাৎগতির সময়ে $t$ = থেকে $t = T$ পর্যন্ত , তবে

[illegible]

$$= -\frac{v_1 l}{s\pi c}\left(\cos\frac{s\pi\tau}{l} - 1\right) + \frac{v_2 l}{s\pi c}\left(1 - \cos\frac{s\pi c\tau}{l}\right)$$

$$=$$

$$=$$

$$\therefore A_s \sin \qquad ...9.27(a)$$

এবার $\dot{y}$ কে cos $dt$ দিয়ে গুণ করে আগের মত সমাকলন করলে পাওয়া যাবে :

$$= B_s \sin \frac{s\pi x}{l} \cdot \frac{s\pi c}{l} \cdot \frac{T}{2}$$

$$= B_s \; s\pi \sin$$

আগের মত      এর মান ব্যবহার করে,

$$= \frac{v_1 l}{s\pi c} \sin \frac{s\pi c\tau}{l} + \frac{v_2 l}{s\pi c} \sin \frac{s\pi c\tau}{l}$$

$$= \frac{2(v_1 + v_2) l}{s\pi c} \sin \frac{s\pi c\tau}{2l} \cos \frac{s\pi c\tau}{2l}$$

$\therefore \; B_s \sin$

$$= \frac{(v_1 + v_2) T}{s^2 \pi^2} \sin \frac{s\pi c\tau}{2l} \cos \frac{s\pi c\tau}{2l} \qquad \text{...9.27(b)}$$

সুতরাং, $y = \sum_s \left[ -\frac{(v_1 + v_2) T}{s^2 \pi^2} \sin^2 \frac{s\pi c\tau}{2l} \cdot \cos \frac{s\pi ct}{l} + \frac{(v_1 + v_2) T}{s^2 \pi^2} \sin \frac{s\pi c\tau}{2l} \cos \frac{s\pi c\tau}{2l} \sin \frac{s\pi ct}{l} \right]$

$$= \frac{(v_1 + v_2) T}{\pi^2} \sum_s \frac{1}{s^2} \cdot \sin \frac{s\pi c\tau}{2l} \left( \sin \frac{s\pi ct}{l} \cos \frac{s\pi c\tau}{2l} - \cos \frac{s\pi ct}{l} \sin \frac{s\pi c\tau}{2l} \right)$$

অর্থাৎ $y = \frac{(v_1 + v_2)}{\pi^2} T \sum_s \frac{1}{s^2} \sin \frac{s\pi c\tau}{2l} \sin \frac{s\pi c}{l} \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \qquad \text{...9.28}$

হেল্‌ম্‌হোলৎসের সূত্র থেকে আমরা জানি যে, তারের পরিলক্ষিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক $x$ এবং তারের অগ্রগতির সময় $\tau$ পরস্পর রৈখিকভাবে সম্পর্কিত। যখন      = 0,   , 2   ইত্যাদির সমান হয় তখন $A_s$ sin

এবং $B_s \; s$ sin      রাশিগুলির মান শূন্য হয়। আবার যখন      = 0,   , 2  ইত্যাদি হয় তখনও 9.28 সমীকরণের ডানদিক শূন্য হবে। যেহেতু এগুলি কোনও ভিন্ন শর্ত হতে পারে না, অতএব আমরা      এর

স্থানে লিখতে পারি। এছাড়া আমরা যদি সময় গণনার মুহূর্তটি পরিমাণে এগিয়ে দিই তবে $t -$ এর স্থানে $t$ লেখা যেতে পারে। এই পরিবর্তনগুলির পর 9.28 সমীকরণকে লেখা যাবে :

$$y = \qquad ...9.29$$

অথবা, $$y = \sum_s a_s \sin\frac{s\pi ct}{l} \qquad ...9.30$$

যেখানে, $$a_s = \frac{(v_1+v_2)T}{\pi^2}\cdot\frac{1}{s^2}\cdot\sin\frac{s\pi x}{l} \qquad ...9.31$$

এখন আপনি কর্ষিত তারের 9.18 সমীকরণ ও আহত তারের 9.23 সমীকরণের সঙ্গে ছড় টানা তারের 9.29 সমীকরণের তুলনা করতে পারেন। লক্ষ্য করে দেখুন, ছড় টানা তার এবং কর্ষিত তার—উভয় ক্ষেত্রেই সমমেলগুলির বিস্তার এর সমানুপাতী। তবে কর্ষিত তারের ক্ষেত্রে কর্ষণের বিন্দুটির স্থানাঙ্ক যতটা গুরুত্বপূর্ণ ছড় টানা তারের ক্ষেত্রে ছড়ের সংস্পর্শে থাকা বিন্দুটির স্থানাঙ্ক ততটা গুরুত্বপূর্ণ নয়।

এবার ছড়টানা তারের বিষয়ে একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

**অনুশীলনী - 4** $\frac{(v_1+v_2)T}{\pi^2}\sum_s \frac{1}{s^2}\sin\frac{s\pi x}{l}\sin\frac{s\pi ct}{l}$

নিচের উক্তিগুলির মধ্যে যেগুলি সত্য সেগুলির পাশে 'স' এবং যেগুলি মিথ্যা সেগুলির পাশে 'মি' লিখুন।

(a) ছড়টানা তারে স্থিতীয় ঘর্ষণের কোনও ভূমিকা নেই। ☐

(b) ছড়টি দ্রুতগতিতে টানা হলে কম্পনের বিস্তার বাড়ে। ☐

(c) ছড়টানা তারের $s$ তম সমমেলের বিস্তার $s^{-2}$ এর সমানুপাতী। ☐

(d) ছড়টানার সময় ছড়ের সংস্পর্শে থাকা বিন্দুর অগ্রগতি ও পশ্চাৎগতি সর্বদাই সমান হয়। ☐

(e) ছড়টানা তারের কম্পনকে প্রণোদিত কম্পন বলা যায়। ☐

(f) পোষিত কম্পনে বাইরে থেকে শক্তির যোগান প্রয়োজন হয়। ☐

(g) একই তার কর্ষিত হলে তার যে মুলসুর হয়, ছড়টানা হলে সেই মূলসুর হয় না। ☐

## 9.6 সারাংশ

এই এককে আমরা দুই প্রান্ত আবদ্ধ এমন টান দিয়ে রাখা তারের কম্পন সম্বন্ধে আলোচনা করেছি। প্রথমেই, এ ধরনের তারে অনুপ্রস্থ সরণের তরঙ্গ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা করে তার সাধারণ সমাধান বার করা হয়েছে এবং এই সমাধানের সাহায্যে তরঙ্গটির গতিশক্তি এবং স্থিতিশক্তির মান নির্ণয় করা হয়েছে।

এরপর আমরা টান দিয়ে রাখা তারে বিভিন্ন পদ্ধতিতে উৎপন্ন কম্পনের গাণিতিক বিশ্লেষণ করেছি এবং সেগুলির চরিত্রগত বৈশিষ্ট্যের আলোচনা করেছি। গাণিতিক বিশ্লেষণের মূল লক্ষ্য তারের সীমাশর্তগুলির প্রয়োগ এবং তার দ্বারা তারের সময়-সরণ সমীকরণ নির্ণয়।

টানা তারের কম্পন তিন প্রকারে সৃষ্টি করা যায়। এগুলি হল (i) কর্ষনের দ্বারা, অর্থাৎ তারের একটি বিন্দুকে পাশের দিকে টেনে ধরে এবং তারপর স্থির অবস্থা থেকে ছেড়ে দিয়ে; (ii) আঘাতের দ্বারা অর্থাৎ হাতুড়ি বা ঐ জাতীয় কোনও বস্তুর দ্বারা তারের কোনও বিন্দুতে আঘাত করে এবং (iii) ছড় টেনে, অর্থাৎ বেহালা প্রভৃতি বাদ্যযন্ত্রে ব্যবহৃত ছড়কে তারের উপর চাপ দিয়ে ধরে তারের সঙ্গে সমকোণে টেনে। এই তিন পদ্ধতির ক্ষেত্রে আমরা যে সময়-সরণ সমীকরণ পেয়েছি সেগুলি হল :

কর্ষিত তারের ক্ষেত্রে : $y =$ ...(সমীকরণ 9.18)

আহত তারের ক্ষেত্রে : $y = \dfrac{2p}{\pi c\rho}\sum_s \dfrac{1}{s}\sin\dfrac{s\pi a}{l}\sin\dfrac{s\pi x}{l}\sin\dfrac{s\pi ct}{l}$ ...(সমীকরণ 9.23)

ছড়টানা তারের ক্ষেত্রে : $y = \dfrac{(v_1+v_2)T}{\pi^2}\sum_s \dfrac{1}{s^2}\sin\dfrac{s\pi x}{l}\sin\dfrac{s\pi ct}{l}$ ...(সমীকরণ 9.29)

তিনটি ক্ষেত্রের রাশিমালাগুলিতে যে প্রতীকগুলি ব্যবহৃত হয়েছে সেগুলির অর্থ পাঠ্যাংশের মধ্যে দেওয়া হয়েছে। এই সময়-সরণ সমীকরণগুলির সাহায্যে টানা তারের বিভিন্ন উপায়ে সৃষ্ট কম্পনের কিছু বৈশিষ্ট্য আমরা আলোচনা করেছি। এগুলির সাহায্যে আপনি তিন পদ্ধতিতে উদ্দীপিত কম্পনের তুলনামূলক আলোচনাও করতে পারবেন।

## 9.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. টান দেওয়া তারে অনুপ্রস্থ তরঙ্গের সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা করুন এবং সেটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় করুন।
2. টানা তারের গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির রাশিমালা নির্ণয় করুন। দেখান যে, মোট যান্ত্রিত শক্তি সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয় না।
3. কর্ষিত তারের সময়-সরণ সমীকরণ নির্ণয় করুন এবং এর থেকে ইয়ং হেল্ম্‌হোলৎস্‌ সূত্রটি বুঝিয়ে দিন।
4. টানা তারের সরণের সাধারণ সমীকরণ :

$$y\ (x,\ t) = \sum_s \left[A_s\cos\frac{s\pi ct}{l} + B_s\sin\frac{s\pi ct}{l}\right]\sin\frac{s\pi x}{l}$$

ধরে নিয়ে আহত তারের সময়-সরণ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত করুন।

5. ছড় টানা তারের কম্পনে ছড় ও তারের মধ্যে গতীয় ও স্থিতীয় ঘর্ষণ বলের ভূমিকা আলোচনা করুন।

6. ছড় টানা তারের সময় সরণ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত করুন।

## 9.8 উত্তরমালা

### অনুশীলনী

1. 9.7 সমীকরণে দ্বিতীয় সমমেলের জন্য $s$-এর মান কেবলমাত্র 2 ধরলে দেখা যায়,

$$y = \left(A_2 \cos\frac{2\pi ct}{l} + B_2 \sin\frac{2\pi ct}{l}\right)\sin\frac{2\pi x}{l}$$

যেহেতু $t = 0$ সময়ে সরণের মান সর্বত্র শূন্য, $A_2 = 0$

এক্ষেত্রে টান $T = 1 \times 9{\cdot}8 = 9{\cdot}8N$

তারের রৈখিক ঘনত্ব $\rho =$ $2 \times 10^{-3} kgm^{-1}$

$\therefore$ তারের তরঙ্গের বেগ $c =$ $= 70ms^{-1}$

সর্বোচ্চ সরণ $B_2 = 2mm$

সুতরাং, $y =$ $2\sin$

$= 2\sin 400t \ \sin 5{\cdot}71x \ mm$

2. 9.18 সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়, $x = a$ বিন্দুতে তারটিকে কর্ষণ করা হলে যে কোনও বিন্দুতে বিস্তার

$a_s =$

তারটিকে $\frac{l}{4}$ দূরত্বে কর্ষণ করা হলে $a =$

অতএব, $a_{sm} =$ । যেহেতু $s = 4, 8, 12,$....ইত্যাদি হলে $\sin\frac{s\pi}{4} = 0$ হয়, কাজেই $a_{sm} =$ 0 হবে, চতুর্থ, অষ্টম, দ্বাদশ ইত্যাদি সুরে।

3(a) সমীকরণ 9.24 থেকে যে কোনও বিন্দুতে বিস্তার :

$a_s =$

সর্বোচ্চ বিস্তারের মান :

$$a_{sm} = \frac{2p}{\pi r c \rho}\frac{1}{s}\sin\frac{s\pi a}{l} \quad \text{(যখন } x = \frac{l}{2s}, \frac{3l}{2s} \text{ ইত্যাদি)।}$$

যদি তারটিকে $a =$ দূরত্বে আঘাত করা যায়, তাহলে

$$a_{sm} =$$

তৃতীয়, ষষ্ঠ, নবম ইত্যাদি সুরে (যখন $s = 3, 6, 9$ ইত্যাদি) $a_{sm}$ এর মান শূন্য হবে অর্থাৎ এই সুরগুলি অনুপস্থিত থাকবে।

আবার $a_{sm}$ সর্বাপেক্ষা বেশি হবে প্রথম, দ্বিতীয়, চতুর্থ ইত্যাদি সুরে (যেমন $s = 1, 2, 4$ ইত্যাদি) যখন $x$-এর মান যথাক্রমে ইত্যাদি। কাজেই আমরা লিখতে পারি, সর্বোচ্চ বিস্তারগুলির মান :

$$a_{1m} = \qquad \text{ইত্যাদি।}$$

3.(b) হাতুড়িটি তারের যে অংশে আঘাত করে, তার দৈর্ঘ্য অতিক্ষুদ্র না হলে 9.23 সমীকরণের প্রতিষ্ঠায় $\int_{a}^{a+\Delta} u_0 \sin\frac{\gamma\pi x}{l}dx$ রাশিটির মান নির্ণয় করার জন্য $x$ এর সঙ্গে $u_0$ এর পরিবর্তন জানা প্রয়োজন হবে। তবে $u_0$ এর পরিবর্তন জানা থাকলেও সমাকলটির মান নির্ণয় করা দূরূহ হবে।

4. (a) মি; (b) স; (c) স; (d) মি; (e) মি; (f) স;(g) মি।

## সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. 9.2 অনুচ্ছেদে এই বিষয় আলোচনা করা হয়েছে।
2. 9.2.1 অংশে আপনি এ বিষয়ে গাণিতিক বিশ্লেষণ পেয়েছেন।
3. 9.3 অংশে এই প্রশ্নের উত্তর আলোচিত হয়েছে।
4. এই সমীকরণ 9.4 অংশে প্রতিষ্ঠিত করা হয়েছে।
5. 9.5 অংশে ছড় টানা তার সম্বন্ধীয় আলোচনাটি দেখে নিন।
6. 9.5 অংশে ছড় টানা তারের সময়-সরণ সমীকরণ প্রতিষ্ঠিত হয়েছে।