একক 2 সরল দোলগতির উপরিপাত

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা

আগের এককে আমরা সরল দোলগতি ও তার গাণিতিক অবকল সমীকরণ সম্বন্ধে আলোচনা করেছি। সরল দোলগতির বেশ কয়েকটি উদাহরণেরও আপনি পরিচয় পেয়েছেন। প্রতিটি ক্ষেত্রেই আমরা দেখেছি, যে কোনও একটি রাশি x, একটি নির্দিষ্ট সমসত্ত্ব দ্বিতীয় ক্রমের অবকল সমীকরণকে সিদ্ধ করে, যেটির সাধারণ রূপ $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x = 0$। এই সমীকরণটির সমাধান $\sin \omega t$ ও $\cos \omega t$ রাশিদ্বয়ের একটি রৈখিক যোগফল এবং এটিই x রাশির সরল দোলগতি সূচিত করে। প্রকৃতিতে অনেক সময় একই সঙ্গে একাধিক সরল দোলগতির উপরিপাত ঘটতে দেখা যায়। সেতারের তারের কোনও একটি বিন্দু একই সঙ্গে একাধিক কম্পাঙ্কের সরল দোলগতিতে কম্পিত হয়। মিশ্রিত কম্পাঙ্কের শব্দ যখন কানের পর্দায় আঘাত করে, তখন পর্দাটি একই সঙ্গে একাধিক বিভিন্ন কম্পাঙ্কের সরল দোলগতিতে কম্পিত হয়। আবার ঝোলানো ঝাড়লণ্ঠন একই সঙ্গে উত্তর-দক্ষিণ ও পূর্ব-পশ্চিমে সরল দোলগতিতে আন্দোলিত হয়। এই এককে আমরা একই দিকে বা পরস্পর লম্ব অভিমুখে দুই দোলগতির উপরিপাত সম্বন্ধে আলোচনা করব।

উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে আপনি—

- সরল দোলগতির উপরিপাতের নীতির বিবৃতি ও ব্যাখ্যা দিতে পারবেন।
- একই সরলরেখায় সমান ও অসমান কম্পাঙ্কের দুই সরল দোলগতির উপরিপাতের ফল বিশ্লেষণ করতে পারবেন।
- স্বরকম্পের উৎপত্তি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- পরস্পর সমকোণে দুই সরল দোলগতির উপরিপাতের ফলে উৎপন্ন লব্ধি গতির বর্ণনা দিতে পারবেন।

2.2 সরল দোলগতির উপরিপাতের নীতি

আপনি আগের এককে বিভিন্ন ধরনের বস্তুসমষ্টির সরল দোলগতির সম্বন্ধে জেনেছেন। এর মধ্যে যেমন সরল দোলকের গতি রয়েছে, তেমনই বৈদ্যুতিক আবেশ ধারক বর্তনীতে ধারকের আধানের হ্রাস-বৃদ্ধিও আছে। অনেক ক্ষেত্রে কোন বস্তুর একসঙ্গে একাধিক সরল দোলগতি বর্তমান থাকতে পারে।

যখন একই বস্তুর দুই বা ততোধিক সরল দোলগতির উপরিপাত ঘটে, তখন যে কোনও সময়ে বস্তুর সরণ ঐ সময়ে প্রতিটি দোলগতির জন্য বস্তুটির যে সরণ ঘটত, সেগুলির ভেক্টর যোগফল হয়। এটিই সরল দোলগতির উপরিপাতের নীতি।

সাধারণভাবে সরণের যোগফল বলতে আমরা ভেক্টর যোগফলই বুঝি। তবে উপরিপাতের দোলগতিগুলি যদি একই সরলরেখা বরাবর অর্থাৎ একরেখীয় হয়, তবে ভেক্টর যোগফল হিসাবে বীজগণিতীয় যোগফলকেই নেওয়া যেতে পারে।

এখন আমরা সরল দোলগতির একটি বিশেষ গাণিতিক ধর্মের দিকে নজর দেব। আপনি পড়েছেন যে, যদি কোনও বস্তু x অক্ষ বরাবর ω কৌণিক কম্পাঙ্কে সরল দোলগতিতে আন্দোলিত হয়, তবে তার গতির অবকল সমীকরণ হয়

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad \text{....... 2.1}$$

যদি বস্তুটি একই কৌণিক কম্পাঙ্কে y অক্ষ বরাবর আন্দোলিত হয়, তার গতি সমীকরণ হবে

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \qquad \text{....... 2.2}$$

অনুরূপভাবে, z অক্ষ বরাবর একই কোণিক কম্পাঙ্কে সরল দোলগতির সমীকরণ হবে

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0 \qquad \text{....... 2.3}$$

এখন যদি 2.1, 2.2 ও 2.3 সমীকরণগুলিকে যথাক্রমে $\hat{i}$,   ও   (x, y, ও z অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর)

দিয়ে গুণ করে যোগ করেন, তবে আপনি পাবেন $= 0$

$$\text{বা} \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega^2\vec{r} = 0 \qquad \text{....... 2.4}$$

এখানে $\vec{r}$ বস্তুটির স্থানাঙ্ক ভেক্টর।

এবার ধরুন, বস্তুটির কোনও একটি সরল দোলগতির জন্য সরণ এবং একই কৌণিক কম্পাঙ্কের অন্য একটি সরল দোলগতির জন্য সরণ । এগুলির জন্য আমরা দুটি পৃথক গতি সমীকরণ লিখতে পারি,

$$\text{এবং} \qquad \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} + \omega^2\vec{r}_2 = \vec{0}$$

$$\text{এ দুটির যোগফল} \quad \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + \omega^2(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \vec{0} \qquad \text{....... 2.5}$$

অর্থাৎ, $\vec{r}_1(t)$ ও যদি পৃথকভাবে সরল দোলগতির অবকল সমীকরণকে সিদ্ধ করে, তবে তাদের যোগফল ও ঐ অবকল সমীকরণকে সিদ্ধ করবে। বলা বাহুল্য, সরল দোলগতির অবকল সমীকরণটি রৈখিক সমসত্ত্ব (linear homogeneous) হওয়ার ফলেই এটি সম্ভব। সমীকরণটিতে বা r^2 রাশি থাকলে রাশিটি সমীকরণটিকে সিদ্ধ করত না।

সরল দোলগতির গতি সমীকরণের এই বিশেষ ধর্মের ফলে দুইটি সমকম্পাঙ্কের দোলগতি উপরিপাতিত হয়ে নতুন একটি দোলগতি উৎপন্ন করে, যার কৌণিক কম্পাক উপরিপাতিত দোল গতি দুইটির কম্পাঙ্কের অনুরূপ। এখন আমরা একরেখীয় ও সমকম্পাঙ্কের দুইটি দোলগতির উপরিপাতনের ফল বিশদভাবে পরীক্ষা করব।

2.3 একরেখীয় সমকম্পাঙ্কের দুই সরল দোলগতির উপরিপাত

ধরা যাক x অক্ষ বরাবর ω কৌণিক কম্পাঙ্কের দুইটি সরল দোলগতির জন্য কোনও বস্তুর সাম্যাবস্থা থেকে সরণ যথাক্রমে

$$x_1 = a_1 \cos(\omega t + \theta_1) \qquad \text{....... 2.6}$$

$$\text{এবং} \qquad x_2 = a_2 \cos(\omega t + \theta_2)$$

দুই সরল দোলগতির উপরিপাতের ফলে লব্ধি সরণ উভয়ের যোগফল

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= a_1 \cos(\omega t + \theta_1) + a_2 \cos(\omega t + \theta_2) \\ &= (a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos\theta_2)\cos\omega t - (a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin\theta_2)\sin\omega t \end{aligned}$$

এখন যদি $(a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2)$ এর জায়গায় $A \cos \theta$ এবং $(a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2)$ এর জায়গায় $A \sin \theta$ লেখা যায় তবে,

$$x = A \cos \theta \cos\omega t - A \sin \theta \sin\omega t$$

$$= A \cos (\omega t + \theta) \qquad (\text{A ও } \theta \text{ দুইটি নতুন ধ্রুবক}) \qquad .... 2.7$$

এখন A ও θ এর মান a_1, a_2, θ_1 ও θ_2 এর হিসাবে জানা প্রয়োজন।

$$A^2 = (A \cos \theta)^2 + (A \sin \theta)^2$$

$$= (a_1^2 \cos^2 \theta_1 + a_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2a_1a_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2)$$

$$+ (a_1^2 \sin^2 \theta_1 + a_2^2 \sin^2 \theta_2 + 2a_1a_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

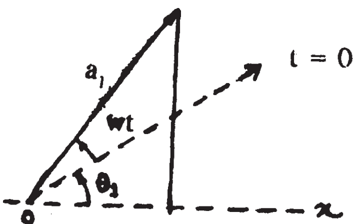
বা, $$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \qquad .... 2.8$$

এবং $$\tan \theta = \frac{A\sin\theta}{A\cos\theta} = \frac{a_1\sin\theta_1 + a_2\sin\theta_2}{a_1\cos\theta_1 + a_2\cos\theta_2} \qquad .... 2.9$$

এখানে একই কৌণিক কম্পাঙ্কের দুইটি সরল দোলগতির উপরিপাতের ফলে আমরা ঐ কম্পাঙ্কের একটি নতুন সরল দোলগতি পেলাম যার বিস্তার A এবং দশাকরণ θ।

ভেক্টর চিত্র

সরল দোলগতির উপরিপাতকে ভেক্টর চিত্র দ্বারা রূপায়িত করা যায়। আপনি নিশ্চয়ই জানেন যে, একটি ঘূর্ণ্যমান ভেক্টর দ্বারা একটি সরল দোলগতিকে সূচিত করা যায়। a_1 দৈর্ঘ্যের একটি ভেক্টর যদি $t = 0$ সময়ে x অক্ষের সঙ্গে θ_1 কোণ রচনা করে ও ω কৌণিক বেগে বামাবর্তে ঘুরতে থাকে তবে t সময়ে x অক্ষের সঙ্গে সেটি $\omega t + \theta_1$ কোন রচনা করবে এবং x অক্ষের উপর সেটির অভিক্ষেপ (projection) হবে (চিত্র 2.1)



$x_1 = a_1 \cos (\omega t + \theta_1)$

চিত্র 2.1

সরল দোলগতির সূচক ভেক্টর

$$x_1 = a_1 \cos (\omega t + \theta_1)$$

অর্থাৎ, ভেক্টরটির অভিক্ষেপ a_1 বিস্তারে ω কৌণিক কম্পাঙ্কে সরল দোলগতিতে আন্দোলিত হবে এবং x অক্ষের সঙ্গে ভেক্টরটির কোণ $(\omega t + \theta_1)$ হবে t সময়ে ঐ গতির দশাকোণ।

এ ধরনের ভেক্টর চিত্রকে আমরা দুইটি সমকম্পাঙ্কের সরল দোলগতিকে সংযুক্ত করার কাজে লাগাতে পারি। 2.2 চিত্রে $t = 0$ সময়ে দুইটি ঘূর্ণ্যমান ভেক্টরের অবস্থান দেখানো হয়েছে, যেগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a_1 ও a_2 এবং দশাকোণ যথাক্রমে θ_1 ও θ_2। ভেক্টর দুইটির লব্ধির দৈর্ঘ্য A এবং প্রাথমিক দশাকোণ θ_1। a_1 ও a_2 দৈর্ঘ্যের ভেক্টর দুইটি

$$x_1 = a_1 \cos (\omega t + \theta_1)$$

ও $$x_2 = a_2 \cos (\omega t + \theta_2)$$

এই দুই সরল দোলগতিকে সূচিত করে। লব্ধি ভেক্টর এর x অক্ষের উপর অভিক্ষেপ $A \cos (\omega t + \theta)$ ঐ দুই সরল দোলগতির উপরিপাতের ফলে উৎপন্ন সরল দোলগতিটি নির্দেশ করছে। চিত্র 2.2 থেকে আপনি সহজেই দেখাতে পারবেন যে,

$$A \cos \theta = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2 \qquad \text{....... 2.10a}$$

এবং, $$A \sin \theta = a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2 \qquad \text{....... 2.10b}$$

এই দুইটি সমীকরণের সাহায্যে আপনি এখন 2.8 ও 2.9 সম্পর্কগুলি পেতে পারেন।

এই পদ্ধতিটি আপনি সমান কম্পাঙ্কের যে কোনও সংখ্যক সরল দোলগতিকে যুক্ত করার কাজে ব্যবহার করতে পারেন। ধরুন, n সংখ্যক সরল দোলগতির সমীকরণ

$$x_1 = a_1 \cos (\omega t + \theta_1),\ x_2 = a_2 \cos (\omega t + \theta_2),\ ....,\ x_n = a_n \cos (\omega t + \theta_n)$$

এই সরল দোলগতিগুলি $a_1, a_2, ..., a_n$ দৈর্ঘ্যের n সংখ্যক ঘূর্ণ্যমান ভেক্টর দ্বারা সূচিত হবে। উপরিপাতের ফলে দোলগতিটির সমীকরণ যদি

$$x = A \cos (\omega t + \theta)$$

হয়, তবে 2.10a, b সমীক[illegible]করণ হবে

$$A \cos \theta =$$

$$A \sin \theta =$$

অর্থাৎ $$A^2 = \qquad \text{....... 2.11a}$$

এবং $$\tan \theta = \qquad \text{....... 2.11b}$$

এখন আপনি কয়েকটি অনুশীলনীর সাহায্যে উপরের আলোচনার প্রয়োগ করতে পারেন।

অনুশীলনী-1 : একটি দোলকের সাধারণ গতি সমীকরণ

$$= 0$$

অনুশীলনী-2 : দুইটি সরল দোলগতির গতি সমীকরণ $x_1 = 5 \cos (50t + 30^o)$ ও $x_2 = 12 \cos (50t + 120^o)$ এগুলির উপরিপাতের ফলে যে সরল দোলগতি উৎপন্ন হবে তার বিস্তার ও দশাকোণ নির্ণয় করুন।

এ পর্যন্ত আপনি একই কম্পাঙ্কের দুই সরল দোলগতির উপরিপাত সম্বন্ধে পড়লেন। কিন্তু কম্পাঙ্ক দুইটি সমান না হলে তার ফল কী হবে? আসুন এবার সেটি পরীক্ষা করে দেখা যাক।

2.4 একরেখীয় ও অসম কম্পাঙ্কের দুই সরল দোলগতির উপরিপাত

সমকম্পাঙ্কের ক্ষেত্রে আমরা উপরিপাতিত দুই সরল দোলগতির কৌণিক কম্পাঙ্ক ω ধরে নিয়ে 2.6 সম্পর্কগুলি লিখেছিলাম। এখন কৌণিক কম্পাঙ্ক দুইটি ভিন্ন ধরে নিলে সমীকরণগুলি হবে

$$x_1 = a_1 \cos (\omega_1 t + \theta_1)$$
$$\text{এবং} \quad x_2 = a_2 \cos (\omega_2 t + \theta_2) \qquad \text{....... 2.12}$$

উপরিপাতের ফলে লব্ধি সরণ

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos (\omega_1 t + \theta_1) + a_2 \cos (\omega_2 t + \theta_2)$$

এখানে উপরিপাতিত দুই সরল দোলগতির দশার অন্তর $(\omega_1 - \omega_2)t + (\theta_1 - \theta_2)$। $(\omega_1 - \omega_2)t$ রাশিটি সময় নির্ভর। কিন্তু $(\theta_1 - \theta_2)$ রাশিটি অপরিবর্তনশীল এবং লব্ধি দোলগতিতে এটির কোনও গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা নেই। এজন্য আমরা θ_1 ও θ_2 প্রারম্ভিক দশাকোণ দুটিকে শূন্য বলে ধরে নেব। এর অর্থ এই, যে যখন $x_1 = a_1$ এবং $x_2 = a_2$ ঠিক তখন থেকেই আমরা সময়ের গণনা শুরু করছি। এখন আমরা লিখতে পারি,

$$x = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t \qquad \text{....... 2.13}$$

প্রথমে আমরা একটি অপেক্ষাকৃত সহজ অবস্থা বিবেচনা করব।

যখন $a_1 = a_2$: ধরা যাক $a_1 = a_2 = a$ এবং $\omega_1 > \omega_2$

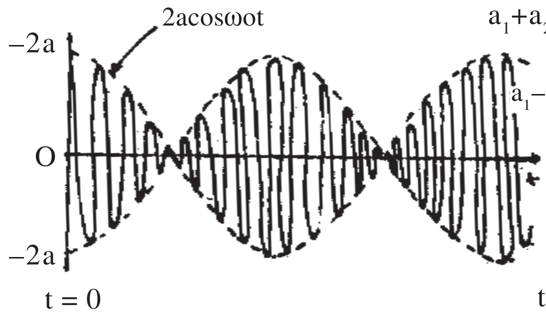
এই অবস্থায় $\quad x = a [\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t]$

$$= \qquad \text{....... 2.14}$$

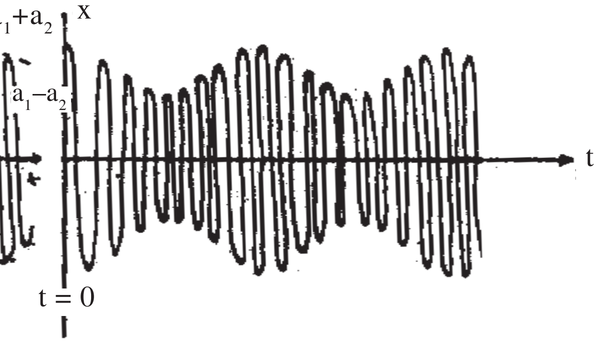
[কেননা আমরা জানি $\cos A + \cos B =$]

এখানে $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ রাশিটি ω_1 ও ω_2 এর গড় মান। ধরা যাক $= \omega$। রাশিটির মান অপেক্ষাকৃত অল্প। এটির স্থানে আমরা ω_0লিখব। এখন 2.14 থেকে আমরা পাই

$$x = 2a \cos \omega_0 t \cos \omega t। \qquad \text{........ 2.15}$$



চিত্র 2.3



চিত্র 2.4

2.15 সমীকরণটি লক্ষ্য করলে এটি কতকটা ω কৌণিক কম্পাঙ্কের সরল দোলগতির সমীকরণ বলে মনে হবে। কিন্তু এখানে দোলগতিটির বিস্তার $2a \cos \omega_0 t$ সময়ের সঙ্গে পরিবর্তনশীল। এটি নিজেই $2a$ বিস্তারে সরল দোলগতিতে আন্দোলিত হয়। এই সরল দোলগতিটির কৌণিক কম্পাঙ্ক ω_0, অর্থাৎ পর্যায়কাল । 2.3 চিত্রে 2.15 সমীকরণ দ্বারা সূচিত দোলগতিটি দেখান হয়েছে। চিত্রটি লক্ষ্য করলে বুঝতে পারবেন যে, এক্ষেত্রে সময় অন্তর দোলগতির বিস্তার সর্বোচ্চ মানে পৌঁছয় অথবা শূন্য হয়। আসলে, উপরিপাতিত দোলগতি দুইটি যখন সমদশায় থাকে, তখন বিস্তার সর্বোচ্চ হয় এবং এগুলি যখন বিপরীত দশায় থাকে, তখন বিস্তার সর্বনিম্ন, এক্ষেত্রে শূন্য হয়।

এবার আমরা আরও সাধারণ অবস্থায়, যখন a_1 ও a_2 অসমান, তখন কী ঘটে তা বোঝার চেষ্টা করব। যখন $a_1 \neq a_2$: ধরা যাক $a_1 > a_2$, $a_1 = a + b$, $a_2 = a - b$ যেখানে a ও b দুইটি নতুন ধ্রুবক। আমরা মনে রাখব $a =$ $b =$ ।

2.13 সূত্রে a_1 ও a_2 এর পরিবর্তে a ও b ব্যবহার করে পাই

$$x = (a + b) \cos \omega_1 t + (a - b) \cos \omega_2 t$$

এখন কিছুটা গাণিতিক সরলীকরণ প্রয়োজন।

$$x = a [\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t] + b [\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t]$$

গণিতের সূত্র $\cos A + \cos B =$

এবং $\quad \cos A - \cos B =$ ব্যবহার করে,

$x =$

পূর্বের মত $= \omega$ এবং $= \omega_0$ লিখলে পাওয়া যাবে

$x = 2a \cos \omega_0 t \,.\, \cos \omega t - 2\text{b} \sin \omega_0 t \,.\, \sin \omega t$

আরও সরলীকরণের জন্য $2a \cos \omega_0 t$ এর স্থানে $A \cos \phi$ এবং $2b \cos \omega_0 t$ এর স্থানে $A \sin \phi$ লেখা যেতে পারে। এর ফলে পাওয়া যায়

$$x = A \cos \phi \;\; \cos \omega t - A \sin \phi \;\; \sin \omega t \qquad .... 2.16$$

$$= A \cos (\omega t + \phi)$$

এই সূত্রে $A^2 \quad = (A \cos \phi)^2 + (A \sin \phi)^2$

$$= (2a \cos \ldots \omega_0 t)^2$$

$$= (a_1 + a_2)^2 \cos^2 \omega_0 t + (a_1 - a_2)^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos 2\omega_0 t$$

বা, $\quad A = \qquad .... 2.17$

এছাড়া $\quad \tan \phi = \dfrac{A \sin\phi}{A \cos\phi} = \quad = \qquad .... 2.18$

2.17 সমীকরণটি পরীক্ষা করলে আপনি বুঝতে পারবেন যে, লব্ধি দোলগতির বিস্তার A সময়ের সঙ্গে $(a_1 + a_2)$ ও $(a_1 - a_2)$ সীমার মধ্যে ওঠানামা করে। $(\omega_1 - \omega_2)t$ রাশির মান যখন $0, 2\pi, 4\pi,$ ..... তখন $A = a_1 + a_2$ এবং $(\omega_1 - \omega_2)t$ এর মান যখন $\pi, 3\pi, 5\pi...,$ তখন $A = a_1 - a_2$। সুতরাং, বিস্তারের এই পরিবর্তনের পর্যায়কাল । 2.4 চিত্রে 2.16 সমীকরণ অনুযায়ী x এর পরিবর্তন দেখানো হয়েছে। অবশ্য এখানে ধরে নেওয়া হয়েছে যে ω_1 ও ω_2 এর মধ্যে পার্থক্য খুব বেশী নয় এবং $(\omega_1 - \omega_2) <<$

অর্থাৎ $\omega_0 << \omega$। এর ফলে A এবং ϕ সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হলেও এই পরিবর্তন অত্যন্ত ধীর। লব্ধি দোলগতির পর্যায়কাল সময়ের মধ্যে সেটির বিস্তারের বিশেষ কোনও পরিবর্তন ঘটে না।

লব্ধি আন্দোলনের বিস্তারের এই পর্যায়ক্রমী ওঠানামাকে বীট (beat) বলা হয়। শব্দ বিজ্ঞানে দেখা যায় যে, কাছাকাছি কম্পাঙ্কের দুইটি স্বর একসঙ্গে ধ্বনিত হলে শব্দের প্রাবল্যে পর্যায়ক্রমে তারতম্য ঘটে। একে আমরা স্বরকম্প বলি। এ সম্বন্ধে আপনি ৭ম এককে আরও বেশি জানতে পারবেন।

এরপর আমরা জটিল রাশির সাহায্যে দুই একরেখীয় সরল দোলগতির উপরিপাতন সম্বন্ধে আলোচনা করব। কিন্তু তার আগে আপনি হয়ত একটি সাংখ্যিক (numerical) প্রশ্নের সমাধান করে নিতে চাইবেন।

অনুশীলনী-3 :

দুইটি একরেখীয় সরল দোলগতির সমীকরণ $x_1 = 20 \sin (52\pi t)$ সেমি ও $x_2 = 24 \sin (48\pi t)$ সেমি, সেখানে t-এর একক সেকেন্ড। লব্ধি দোলগতির সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

2.5 জটিল রাশির ব্যবহার

আপনার হয়ত মনে আছে যে, –1 রাশিটির বর্গমূলকে আমরা j চিহ্ন দিয়ে নির্দেশ করি এবং সেটি অথবা তার কোনও গুণিতককে কাল্পনিক রাশি বলি। কাল্পনিক ও বাস্তব রাশির সমন্বয়ে গঠিত কোনও সংখ্যাকে (যেমন $2 + 3i$) আমরা জটিল রাশি বলে থাকি। $e^{j.\theta}$ এরূপ একটি জটিল রাশি। এটির মান $\cos \theta + j \sin \theta$ অর্থাৎ, এটির বাস্তব অংশ $\cos \theta$ ও কাল্পনিক অংশ $j \sin \theta$। আমরা পরবর্তী আলোচনায় বা বলতে $e^{j\theta}$ রাশির বাস্তব অংশ এবং কা বলতে রাশিটির কাল্পনিক অংশ বোঝাব।

যে কোনও একটি জটিল রাশি $Z (= X + jY)$ কে $Ae^{j\theta}$ রূপে লেখা যায়। সহজেই দেখানো যায় যে, এক্ষেত্রে $A^2 = X^2 + Y^2 = ZZ^*$, যেখানে Z^* জটিল রাশি Z এর যুগ্ম জটিল রাশি (complex conjugate) এবং $\tan \theta =$ । গণিতের এই তথ্যগুলি আমরা এখানে কাজে লাগাব।

আমরা এবার 2.6 সমীকরণগুলিতে ফিরে যাই। এগুলিকে আমরা অন্যভাবে লিখতে পারি। যদি $Z_1 =$ এবং $Z_2 =$ ধরা যায়, তবে $x_1 =$ বা (Z_1), $x_2 =$ বা (Z_2) এবং $x_1 + x_2 =$ বা $(Z_1 + Z_2)$। এখন যদি $Z_1 + Z_2 =$ লেখা হয়, তবে পূর্বের মত (সমীকরণ 2.7)

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \theta)$$

A রাশির মান নির্ণয় করার জন্য আমরা লিখতে পারি,

$$(Z_1 + Z_2)e^{-j\omega t} = Ae^{j\theta}$$ সুতরাং,

$$A^2 = (Z_1 + Z_2)e^{-j\omega t}.(Z_1 + Z_2)^* e^{j\omega t}$$

$$= (Z_1 + Z_2)(Z_1 + Z_2)^*$$

$$=$$ (a_1, a_2 বাস্তব সংখ্যা)

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 \left(e^{j(\theta_1 - \theta_2)} + e^{-j(\theta_1 - \theta_2)}\right)$$

বা, $$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

যা 2.8 সমীকরণের অনুরূপ

আবার যেহেতু, $(Z_1 + Z_2)e^{-j\omega t}$

$$=$$

$$= (a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2) + j(a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2)$$

এই রাশিকে $(X + jY)$ রাশির সঙ্গে তুলনা করে আপনি লিখতে পারেন

$\tan \theta =$ । এটি 2.9 সমীকরণের অনুরূপ।

আপনি নিশ্চয়ই অনুভব করছেন যে, জটিল সংখ্যার সাহায্যে সরল দোলগতির উপরিপাতের গাণিতিক বিশ্লেষণ কিছুটা সহজে করা যায়। এবার আমরা সমরেখ ও অসম কম্পাঙ্কের দুই দোলগতির উপরিপাতের ক্ষেত্রে এই পদ্ধতির প্রয়োগ করব।

জটিল সংখ্যার ব্যবহার করে 2.12 সমীকরণ দুটিতে লেখা যায় :

$$x_1 = \text{বা}$$

ও $$x_2 = \text{বা} \left(a_2 e^{j(\omega_2 t + \theta_2)}\right)$$

পূর্বের মত θ_1 ও θ_2 দশাকোণগুলিকে শূন্য ধরে নিয়ে লেখা যেতে পারে

$$x = \text{বা} \left(a_1 e^{j\omega_1 t} + a_2 e^{j\omega_2 t}\right) \text{ বা } (Z) \text{ যেখানে } Z = a_1 e^{j\omega_1 t} + a_2 e^{j\omega_2 t}$$

যদি $a_1 = a_2 = a$ ধরা হয় তবে

$$Z =$$

লব্ধি দোলগতির বিস্তার যদি A হয় তবে

$$A^2 = ZZ^* = a^2\left(e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t}\right)\left(e^{-j\omega_1 t} + e^{-j\omega_2 t}\right) \quad [a \text{ একটি বাস্তব সংখ্যা}]$$

$$= a^2\left(2 + e^{j(\omega_1-\omega_2)t} + e^{-j(\omega_1-\omega_2)t}\right)$$

$$= 2a^2[1 + 2 \cos (\omega_1 - \omega_2)\mathrm{t}]$$

$$= 4a^2 \cos^2\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

$$\text{বা, } A = 2a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} .t\right) \qquad \text{(সমীকরণ 2.15 তুলনীয়)}$$

অপরপক্ষে, $a_1 > a_2$ ধরে নিলে, পাওয়া যাবে

$$A^2 = ZZ^* = \left(a_1 e^{j\omega_1 t} + a_2 e^{j\omega_2 t}\right)\left(a_1 e^{-j\omega_1 t} + a_2 e^{-j\omega_2 t}\right)$$

$$= a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_1 a_2\left(e^{j(\omega_1-\omega_2)t} + e^{-j(\omega_1-\omega_2)t}\right)$$

$$a\left(e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t}\right)$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t$$

$$\text{অর্থাৎ} \qquad A = \left[a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + 2a_1 a_2 \cos\left(\omega_1 - \omega_2\right)t\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(সমীকরণ 2.17 তুলনীয়)}$$

এখানে আপনি দেখতে পেলেন যে, জটিল সংখ্যা ব্যবহার করে অসম কম্পাঙ্কের দোলগতির উপরিপাতনের বিশ্লেষণও সহজে করা যায়। এবার এ ধরনের একটি অনুশীলনী আপনি নিজেই করে দেখুন।

অনুশীলনী -4 : একই বিস্তারের তিনটি সরল দোলগতির কম্পাঙ্ক সমান কিন্তু দশাকোণগুলির ব্যবধান ϕ। লব্ধি দোলগতির বিস্তার নির্ণয় করুন।

এ পর্যন্ত আমরা একরেখীয় দোলগতির উপরিপাতন সম্বন্ধে আলোচনা করেছি। এখন আমরা পরস্পর সমকোণে একই কম্পাঙ্কের অথবা সরল অনুপাতে দুই বিভিন্ন কম্পাঙ্কের দোলগতির উপরিপাতন সম্বন্ধে আলোচনা করব।

2.6 পরস্পর লম্বাভিমুখী দুই সরল দোলগতির উপরিপাত

আপনি নিশ্চয়ই একটি সরল দোলকের গতি লক্ষ্য করে থাকবেন। একটি সূতার একপ্রান্তে একটি ছোট ঢিল বেঁধে সেটিকে ঝুলিয়ে আপনি একটি সরল দোলক তৈরি করে নিতে পারেন। আদর্শ সরল দোলকের

গতি এক সরলরেখায় আবদ্ধ থাকলেও দোলকের পিণ্ডটি মোটামুটিভাবে অনুভূমিক তলে বিচরণ করতে পারে। এই তলটিকে x-y তল হিসাবে বিবেচনা করলে দেখা যায় যে, x ও y, উভয় দিক বরাবর পিন্ডটি একই কম্পাঙ্কে সরল দোলগতিতে চলাফেরা করে। এ জাতীয় দোলককে আমরা গোলীয় দোলক (spherical pendulum) বলি এবং এটি পরস্পর সমকোণে দুই সরল দোলগতির উপরিপাতনের একটি সহজ উদাহরণ। যখন কোনও বস্তু একই সঙ্গে পরস্পর সমকোণে দুই সরল দোলগতিতে আন্দোলিত হয়, তখন বস্তুটির গতিপথ কেমন হয়, সেটিই এই অংশের আলোচ্য বিষয়। প্রথমে আমরা দুই দোলগতির কম্পাঙ্ক সমান বলে ধরে নেব।

2.6.1 সমকম্পাঙ্ক

ধরা যাক, কোনও বস্তু x ও y দিক বরাবর একই কম্পাঙ্কের যে সরল দোলগতিতে চলাচল করে, সেগুলির সমীকরণ

$$x = a \cos \omega t$$

ও $$y = b \cos (\omega t + \phi) \qquad .... \ 2.19$$

এখানে দুই দোলগতির বিস্তার a ও b। দশার অন্তর ϕ। এখন আমরা a, b ও ϕ এর উপর বিভিন্ন শর্ত আরোপ করে প্রতি ক্ষেত্রে বস্তুটির গতি নির্ণয় করব।

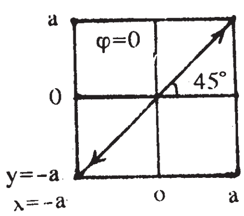
(i) $a = b$, $\phi = 0$: এক্ষেত্রে $x = a \cos \omega t$, $y = a\ cos\ \omega t$ অর্থাৎ, $y = x$। এটি x অক্ষের সঙ্গে 45^o কোণে আনত সরলরেখার সমীকরণ। বস্তুটির গতিপথ 2.5(i) চিত্রে দেখানো হয়েছে।

(ii) $a \neq$ b, $\phi = 0$: এক্ষেত্রে $x = a \cos \omega t$, $y = b\ cos\ \omega t$ অর্থাৎ, $y = \frac{b}{a}.\ x$। এই সমীকরণটি x অক্ষের সঙ্গে কোণে আনত সরলরেখা নির্দেশ করে। 2.5 (ii) চিত্রে এই গতিপথে দেখানো হয়েছে।

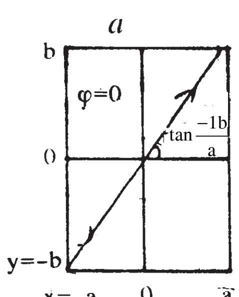
(iii) $a = b$, $\phi = \pi$: এক্ষেত্রে $x = a \cos \omega t$, $y = a\ cos\ (\omega t + \pi) = - a \cos \omega t$। অতএব, $y = -x$, যেটি x অক্ষের সঙ্গে -45^o কোণে আনত সরলরেখার সমীকরণ (চিত্র 2.5(iii))।

(iv) $a \neq b$, $Q = \pi$: $x = a \cos \omega t$, $y = b\ cos\ (\omega t + \pi) = - b \cos \omega t$ অতএব $y =$

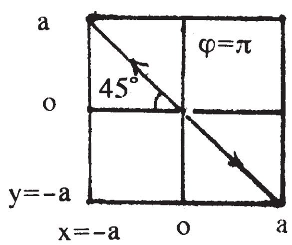
যেটি x অক্ষের সঙ্গে $-\tan^{-1}\frac{b}{a}$ কোণে আনত সরলরেখা নির্দেশ করে (চিত্র 2.5(iv))



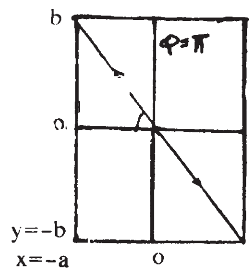
চিত্র 2.5 (i)



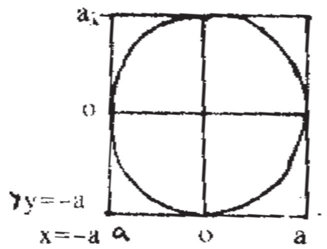
চিত্র 2.5 (ii)



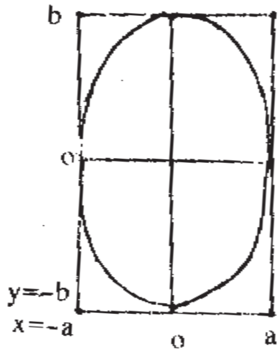
চিত্র 2.5 (iii)



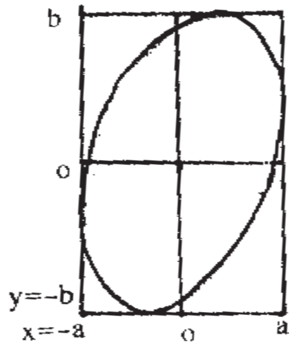
চিত্র 2.5 (iv)



চিত্র 2.5 (v)



চিত্র 2.5 (vi)



(v) $a = b,\ \phi =$: এক্ষেত্রে $x = a \cos \omega t$, $y =$ $= -\,a \sin \omega t$ অপনয়ন করে পাওয়া যায় :

$x^2 + y^2 = a^2$

যা একটি বৃত্তের সমীকরণ। এই ক্ষেত্রে বস্তুটি একটি বৃত্তাকার পথে চলতে থাকে (চিত্র 2.5(v))। লক্ষ্য করার বিষয় এই যে, x অক্ষের সঙ্গে বস্তুটির অবস্থান ভেক্টর যে কোণ রচনা করে, তা হল $= -\,\omega t$, অর্থাৎ, বস্তুটি ঘড়ির কাঁটার দিক বরাবর অর্থাৎ দক্ষিণাবর্তে চলতে থাকে। যদি $y = a\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ হত, তবে বস্তুটির গতির কোনও পার্থক্য ঘটত, তা আপনি ভেবে দেখতে পারেন।

(vi) $a \neq b,\ \phi =$: এখানে $x = a \cos \omega t$, $y =$ $= -\,b \sin \omega t$

যেহেতু, $= \cos \omega t,$ $= -\sin \omega t,$ $= 1,$

যেটি একটি উপবৃত্তের (ellipse) সমীকরণ। পূর্বের মত দেখা যাবে যে বস্তুটি একটি উপবৃত্তাকার পথে ঘড়ির কাঁটার দিক বরাবর চলতে থাকে (চিত্র 2.5(vi))।

(vii) শর্তহীন অবস্থায়, অর্থাৎ $a \neq b$, ϕ অনির্দিষ্ট : $x = a \cos \omega t$, $y = b \cos (\omega t + \phi)$। এই দুটি সমীকরণ থেকে ωt অপনয়ন করা যাক।

$$y = b\,(\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi)$$

$$=$$

অথবা, $\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\cos\phi$ =

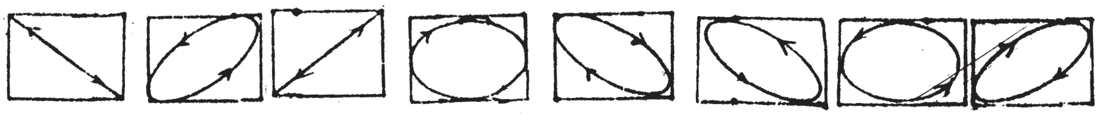
অথবা উভয় দিকের বর্গ নিয়ে, =

অথবা, $= \sin^2 \phi$

এটি একটি হেলানো উপবৃত্তের (inclined ellipse) সমীকরণ। আপনি সহজেই পরীক্ষা করে দেখে নিতে পারেন যে, ϕ এর মান শূন্য হলে এটি (ii) নং অবস্থায় এবং ϕ এর মান হলে এটি (vi) নং অবস্থার সমীকরণে পরিণত হয়। যখন $\pi > \phi > 0$, তখন বস্তুর গতি ঘড়ির কাঁটার দিক বরাবর অর্থাৎ, দক্ষিণাবর্তে হয়। অপরপক্ষে $-\pi < \phi < 0$ হলে, গতি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বা বামাবর্তে হয়।

এবার নিচের অনুশীলনীটির উত্তর দিতে আপনার বোধহয় ভালই লাগবে।

অনুশীলনী-5 : সঙ্গে দেওয়া চিত্রগুলিতে পরস্পর সমকোণে থাকা সমকম্পাঙ্কের দুই সরল দোলগতির উপরিপাতনের ফলে উদ্ভূত গতি দেখানো হয়েছে। প্রত্যেক ক্ষেত্রেই উল্লম্ব দোলগতির দশাকোণ অনুভূমিক দোলগতির তুলনায় শূন্য অথবা এর কোনও গুণিতকে এগিয়ে আছে। প্রতিটি চিত্রের জন্য দশাকোণটির মান লিখুন।



চিত্র (ক) (খ) (গ) (ঘ) (ঙ) (চ) (ছ) (জ)

এই অংশে আমরা সমান কম্পাঙ্কের দুই সরল দোলগতিতেই আলোচনা সীমিত রেখেছি। পরস্পর সমকোণে যে কোনও দুই কম্পাঙ্কের সরল দোলগতি একত্রিত হলে, বস্তুর গতিপথ সাধারণভাবে অত্যন্ত জটিল হয়। কম্পাঙ্ক দুইটির অনুপাত সরল হলে (যথা 1:1, 1:2, 1:3 ইত্যাদি) বস্তুটি *x-y* তলে এক নির্দিষ্ট আবদ্ধ পথে চলতে থাকে। এই আবদ্ধ গতিপথগুলি লিসাজুস্ (উচ্চারণ লিসাজু z) চিত্র (Lissajous figures) নামে পরিচিত। এখন আমরা একটি কম্পাঙ্ক অন্যটির সরল গুণিতক ধরে নিয়ে গতিপথ নির্ণয় করব।

2.6.2 একটি কম্পাঙ্ক অন্যটির গুণিতক (Frequencies in the ratio of 1:2)

(ক) ধরা যাক, y দিক বরাবর সরল দোলগতির কম্পাঙ্ক x দিক বরাবর সরল দোলগতির কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ। কম্পাঙ্ক ভিন্ন হওয়ায় দুই দোলগতির দশান্তর সর্বদাই পরিবর্তিত হতে থাকবে। $t = 0$ সময়ে প্রাথমিক দশান্তর ϕ ধরে নিয়ে আমরা দোলগতিগুলির সমীকরণ লিখতে পারি :

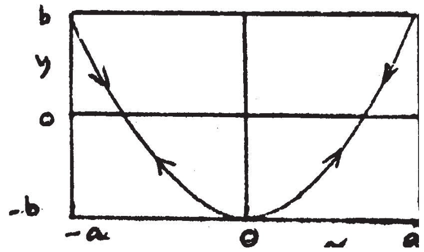
$$x = a \cos \omega t$$
$$y = b \cos (2\omega t + \phi) \qquad \text{....... 2.20}$$

এখন আমরা ϕ এর কয়েকটি নির্দিষ্ট মানের জন্য গতিপথের সমীকরণ নির্ণয় করব।

(i) $\phi = 0$: $x = a \cos \omega t$ এবং $y = b \cos 2\omega t$ থেকে পাওয়া যাবে

$$y = b(2 \cos^2 \omega t - 1)$$

বা, $\quad y =$



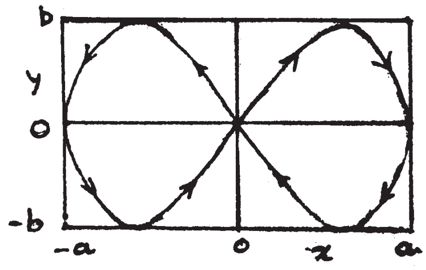
চিত্র 2.6(i)

এটি একটি অধিবৃত্তের (Parabola) সমীকরণ। এর লেখচিত্রটি 2.5(i) চিত্রে দেখানো হয়েছে।

(ii) $\phi =$: এক্ষেত্রে $x = a \cos \omega t$ এবং $y =$ $= - b \sin 2\omega t$।

সুতরাং, $\quad y = -2b \sin \omega t \cos \omega t =$

অথবা, $\quad \dfrac{y^2}{b^2} =$



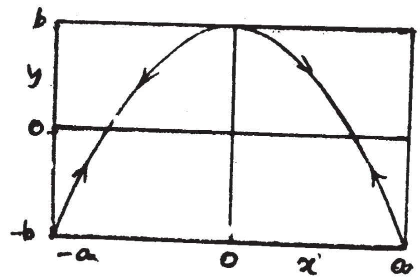
চিত্র 2.6 (ii)

এর লেখচিত্রটি 2.6(ii) চিত্রে দেখানো হল। এটির আকৃতি '৪' সংখ্যাটির মত।

(iii) $\phi = \pi$: এই ক্ষেত্রে $x = a \cos \omega t$

$y = b \cos (2\omega t + \pi) = - b \cos 2\omega t = - b(2 \cos^2 \omega t - 1)$

বা, $\quad y =$



চিত্র 2.6 (iii)

এটিও একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ এবং 2.6(iii) চিত্রে এর লেখচিত্রটি দেখানো হয়েছে।

প্রতিটি ক্ষেত্রেই আপনি লক্ষ্য করবেন যে, দোলগতিতে সঞ্চারমান বিন্দুটি যখন x দিকে একটি সম্পূর্ণ দোলন শেষ করে, ততক্ষণে y দিকে দুইটি দোলন সমাপ্ত হয়।

ϕ কোণের অন্যান্য মানের জন্যও দ্বিমুখী দোলগতির গতিপথের সমীকরণ নির্ণয় সম্ভব। তবে সেগুলি অত্যন্ত জটিল হওয়ায় আমরা ϕ এর অনির্দিষ্ট মানের জন্য গতিপথ নির্ণয় করলাম না।

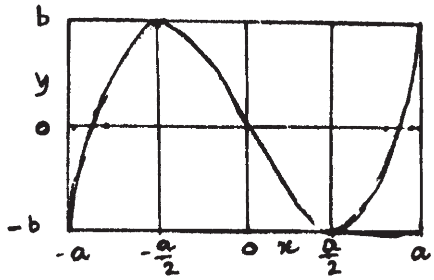
(খ) এবার ধরুন, y দিকের দোলগতির কম্পাঙ্ক x দিকের তিন গুণ। এই ক্ষেত্রে প্রাথমিক দশান্তরের মান শূন্য ধরে নিয়ে আমরা দ্বিমুখী দোলগতির পথটি বার করব। x ও y সমীকরণগুলি লেখা যাক :

$$x = a \cos \omega t$$

$$y = b \cos^3 \omega t \qquad \text{....... 2.21}$$

গণিতের সূত্র অনুযায়ী $y = b\,(4 \cos 3\omega t - 3 \cos \omega t)$

$=$

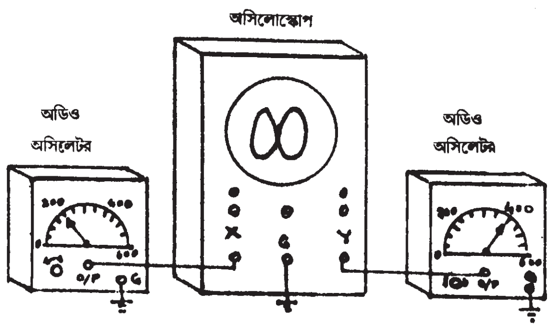


চিত্র 2.7

এটি একটি ত্রিঘাত সমীকরণ। এর লেখচিত্রটি পাশে অঙ্কিত হল। লক্ষ্য করে দেখুন, সঞ্চরমান বিন্দুটি $t = 0$ সময়ে A বিন্দু $(x = a,\ y = b)$ থেকে যাত্রা শুরু করে সময়ের মধ্যে *ABCDEDCBA* পথ অতিক্রম করে। এই সময়ে x দিকে একটি ও y দিকে তিনটি সম্পূর্ণ দোলন (*ABD, DED* ও *DBA*) সমাপ্ত হয়।

(গ) সাধারণভাবে বলা যায় যে, x ও y দিকের কম্পাঙ্ক দুটির অনুপাত যদি দুই পূর্ণসংখ্যার অনুপাতের সমান হয়, তবে সঞ্চরমান বিন্দুটি একটি বদ্ধপথে চলাচল করে। অবশ্য পূর্ণসংখ্যা দুটি যত বড় হয়, বদ্ধপথটিও ততই জটিল হয়।

2.6.3 লিসাজুস চিত্রের প্রদর্শন



চিত্র 2.8

একটি ক্যাথোড-রে অসিলোস্কোপ (cathode-ray oscilloscope) ও দুইটি অডিও-অসিলেটরের (audio-oscillator) সাহায্যে অতি সুন্দরভাবে লিসাজুস চিত্র প্রদর্শন করা যায়। অডিও অসিলেটরগুলি যে কোনও শ্রাব্য কম্পাঙ্কের বৈদ্যুতিক সঙ্কেত (signal) উৎপাদন করতে পারে। এরূপ একটি অসিলেটারের সঙ্কেতকে অসিলোস্কোপের x অক্ষের

ইন্‌পুট এবং অপর একটি অসিলেটারের সঙ্কেতকে অসিলোস্কোপের y অক্ষের ইন্‌পুট হিসাবে ব্যবহার করা হয়। x ইন্‌পুট সঙ্কেতের ফলে অসিলোস্কোপের পর্দায় ইলেকট্রন বিম (beam) দ্বারা সৃষ্ট উজ্জ্বল বিন্দুটি অনুভূমিক দিকে সঙ্কেত-বিভব অনুযায়ী সরল দোলগতিতে চলাচল করে। আবার, y ইন্‌পুট সঙ্কেতটি ঐ বিন্দুকে উল্লম্বদিকে সঙ্কেত-বিভব অনুযায়ী ওঠানামা করায়। এখন যদি দুই সঙ্কেতের কম্পাঙ্ক সরল অনুপাতে থাকে, তবে অনুভূমিক ও উল্লম্ব এই দুই গতির উপরিপাতের ফলে উজ্জ্বল বিন্দুটি অতি দ্রুত লিসাজুস চিত্র অনুসরণ করে ধাবিত হবে এবং অসিলোস্কোপের পর্দায় লিসাজুস চিত্রটি দেখা যাবে।

উপরের পরীক্ষাটি আপনি কোন ইলেকট্রনিক্‌সের পরীক্ষাগারে কাজ করার সুযোগ পেলে করে দেখতে পারবেন। কিন্তু এবার আপনি নিজেই একটি বিশেষ ক্ষেত্রে লিসাজুস চিত্র অঙ্কনের চেষ্টা করুন।

অনুশীলনী-6 : ধরে নিন, $x = a \sin 2\omega t$ এবং $x = a \sin \omega t$ এই দুই সরল দোলগতি উপরিপাতিত হয়েছে। লব্ধি দোলগতির লিসাজুস চিত্রটির সমীকরণ নির্ণয় করুন এবং চিত্রটি আঁকুন।

2.7 সারাংশ

একই সরলরেখায় দুই বা ততোধিক সংখ্যক সরল দোলগতি উপরিপাতিত হয়ে নতুন এক ধরনের দোলগতি উৎপন্ন করতে পারে। আবার পরস্পর সমকোণী দুই সরল দোলগতির উপরিপাতনে একটি দ্বিমাত্রিক গতির সৃষ্টি হতে পারে। এই এককে সরল দোলগতির উপরিপাতনের নীতি এবং যে দুই ধরনের উপরিপাতনের উল্লেখ করা হল, সেগুলি আলোচিত হয়েছে। সরল দোলগতির উপরিপাতনের বিশ্লেষণে জটিল রাশির ব্যবহারের সঙ্গেও আপনি পরিচিত হয়েছেন।

আমরা দেখেছি যে,

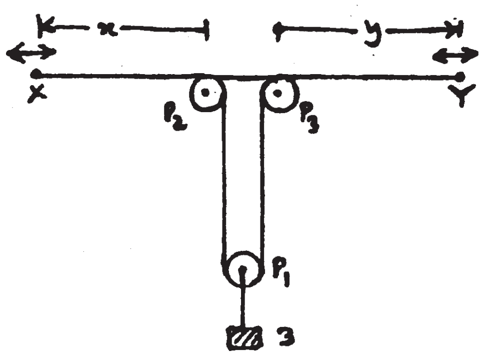
- একই সরলরেখায় সমান কম্পাঙ্কের দুই সরল দোলগতির সংমিশ্রণে ঐ কম্পাঙ্কের একটি নতুন সরল দোলগতির উদ্ভব হয়।
- একই সরলরেখায় অসম কম্পাঙ্কের দুই সরল দোলগতির উপরিপাতনে এমন একটি পর্যাবৃত্ত গতির সৃষ্টি হয়, যাকে সরল দোলগতি বলা যায় না এবং যার পর্যায়কাল দুই সরল দোলগতির পর্যায়কালগুলির ল.সা.গু। তবে কম্পাঙ্কদ্বয়ের ব্যবধান যখন তাদের গড় মানের তুলনায় অতি ক্ষুদ্র, তখন গড় কম্পাঙ্কের এক দোলগতি উৎপন্ন হয়, যার বিস্তার সরল দোলগতিতে ওঠানামা করে।
- পরস্পর সমকোণী দুই সরল দোলগতির কম্পাঙ্ক যদি সরল অনুপাতে থাকে, তবে সেগুলির উপরিপাতনে লিসাজুস চিত্র নামে আবদ্ধ বক্ররেখা বরাবর গতির সৃষ্টি হয়।

2.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. যদি $r_1(t) = r_{10} \sin \omega t$ এবং $r_2(t) = r_{20} \sin \omega t$ কোনও সরল দোলগতির সমীকরণকে সিদ্ধ করে, তবে $r_1(t) + r_2(t)$ ঐ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করবে। এর কারণ কী? সরল দোলগতি দুইটির কম্পাঙ্ক সমান না হলে কী ঘটে?

2. দুইটি সরল দোলগতির সমীকরণ $x_1 = A \cos(\omega t - 30^\circ)$ ও $x_2 = A \cos(\omega t + 30^\circ)$। ভেক্টর পদ্ধতিতে এবং জটিল রাশির পদ্ধতিতে এই দুই সরল দোলগতির লব্ধি নির্ণয় করুন।

3. পাশে যে চিত্রটি দেওয়া হয়েছে তাতে একটি পিণ্ড B P_1 পুলি থেকে ঝোলানো আছে। X ও Y প্রান্তবিশিষ্ট একটি সুতা P_2 ও P_3 পুলির উপর দিয়ে গিয়েছে এবং সেটি P_1 পুলির তলা দিয়ে গিয়ে সেটিকে আলম্বিত রেখেছে। P_2 ও P_3 পুলি থেকে সুতার X ও Y প্রান্তদ্বয়ের দূরত্ব যথাক্রমে x ও y। এখন যদি X ও Y প্রান্ত দুইদিকে এমনভাবে আন্দোলিত করা হয় যাতে x ও y যথাক্রমে 5ও6 সেকেন্ড পর্যায়কালে সমান বিস্তারে সরল দোলগতিতে ওঠানামা করে, তবে B পিণ্ডটির গতি কেমন হবে আলোচনা করুন।



4. কোনও বস্তু x ও y দিক বরাবর একই বিস্তার ও কম্পাঙ্কের সরল দোলগতিতে চলাচল করছে। x দিকের দোলগতির দশাকোণ y দিকের তুলনায় 60° এগিয়ে আছে। বস্তুটির গতিপথ অঙ্কন করুন।

5. সূর্যের মহাকর্ষের প্রভাবে পৃথিবীর কক্ষপথ একটি উপবৃত্ত। পৃথিবীর গতি কি দুইটি সমকম্পাঙ্কের সরল দোলনের মিলিত ফল বলে মনে করা যায়?

6. পরস্পর লম্বাভিমুখী দুটি অসমান কম্পাঙ্কের সরল দোলগতি উপরিপাতিত হয়েছে, যাদের মধ্যবিন্দু একই। এক্ষেত্রে বস্তুকণার উপর লব্ধি বল কি সরণের বিপরীত অভিমুখী এবং সমানুপাতী হবে?

2.9 উত্তরমালা

অনুশীলনী

1. ধরে নিন $\theta_1(t)$ এবং $\theta_2(t)$ উভয়েই প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান। সুতরাং,

$$= 0 \text{ এবং } \qquad = 0$$

দুটি সমীকরণের যোগফল $\qquad = 0.$

কিন্তু দোলকের ক্ষেত্রে উপরিপাতের নীতি প্রযোজ্য হলে প্রয়োজনীয় শর্ত

$$= 0.$$

যেহেতু $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$ সমীকরণটি সাধারণভাবে সত্য নয়, অতএব এক্ষেত্রে উপরিপাতের নীতি প্রয়োগ করা যায় না।

2. প্রথমেই ধরা যাক, $50t + 30^\circ = 50t'$, যার অর্থ এই যে, আমরা $t = -30^\circ/50$ মুহূর্ত থেকে t' সময় গণনা করছি। t এর পরিবর্তে t' ব্যবহার করলে সরল দোলগতি দুইটির সমীকরণ দাঁড়ায়

$$x_1 = 5\cos 50t'$$

ও $$x_2 = 12\cos(50t' + 90^\circ)$$

এখন 2.8 ও 2.9 সূত্র ব্যবহার করে, যেহেতু $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 90^\circ$

বিস্তার $A = \qquad = 13$

এবং দশাকোণ $\theta = \tan^{-1}\frac{12}{5} \approx 67^\circ$

3. লব্ধি দোলগতির সমীকরণ

$$x = x_1 + x_2 = 20\sin(52\pi t) + 24\sin(48\pi t)$$

$$= 22[\sin(52\pi t) + \sin(48\pi t)] - 2[\sin(52\pi t) - \sin(48\pi t)]$$

$$= 44\sin\frac{52+48}{2}\pi t\cos\frac{52-48}{2}\pi t - 4\sin\frac{52-48}{2}\pi t\cos\frac{52+48}{2}\pi t$$

$$= 44\sin 50\pi t\cos 2\pi t - 4\sin 2\pi t\cos 50\pi t$$

ধরে নিন, $44\cos 2\pi t = A\cos\phi$

এবং, $4\sin 2\pi t = A\sin\phi$

$$\therefore x = A\cos\phi\sin 50\pi t - A\sin\phi\cos 50\pi t$$

$$= A\sin(50\pi t - \phi)$$

এখানে, $A^2 = (A\cos\phi)^2 + (A\sin\phi)^2$

$$= (20 + 24)^2\cos^2 2\pi t + (24 - 20)^2\sin^2 2\pi t$$

$$= 20^2 + 24^2 + 2.\ 20.\ 24\cos 4\pi t$$

$$= 976 + 960\cos 4\pi t$$

এবং $\tan\phi = \frac{A\sin\phi}{A\cos\phi} = \qquad .$

4. ধরা যাক দোলগতিগুলির সমীকরণ

$$x_1 = a \cos (\omega t - \phi)$$

$$x_2 = a \cos \omega t$$

এবং, $$x_3 = a \cos (\omega t + \phi)$$

সুতরাং, $x = x_1 + x_2 + x_3 =$ বা (Z) যেখানে

$$Z =$$

$$Z =$$

$$=$$

সুতরাং, লব্ধ দোলগতি (Z র বাস্তব অংশ)

$$x = a \cos \omega t \,(1 + 2 \cos \phi)$$

এবং লব্ধি দোলগতির বিস্তার A

$$A = a\,(1 + 2 \cos \phi)$$

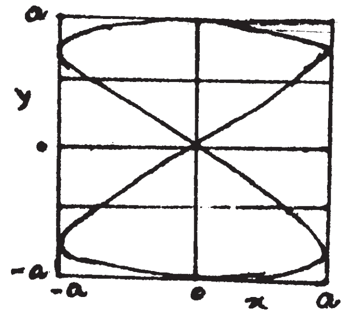
5. দশাকোণের মান (ক) π, (খ) $\frac{7\pi}{4}$, (গ) 0, (ঘ) , (ঙ) , (চ) , (ছ) , (জ)

6. এক্ষেত্রে $\sin \omega t =$ এবং $\cos \omega t =$

$$x = a \sin 2\omega t = 2a \sin \omega t \cos \omega t = 2y\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}$$

লিসাজুস চিত্র আঁকার জন্য সারণী :

$y =$	0	$\pm a$		
$x =$	0	0	$\pm a\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm a$



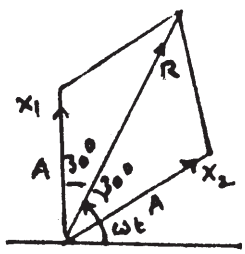
সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. প্রশ্নের প্রথম অংশটি 2.2 অংশে আলোচিত হয়েছে। দ্বিতীয় অংশটির বিষয়ে আপনি 2.4 অংশে পড়েছেন। আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পেরেছেন যে, অসম কম্পাঙ্কের দুই সরল দোলগতির উপরিপাতনে যে পর্যায়গতি উৎপন্ন হয়, তা সরল দোলগতি নয়। 2.16, 2.17, 2.18 সূত্র উদ্ধৃত করে এই অংশের উত্তর দিতে পারবেন।

2. ভেক্টর পদ্ধতিতে : x_1 ও x_2 দোলগতি দুটিকে আমরা A দৈর্ঘ্যের দুইটি ভেক্টর দ্বারা সূচিত করতে পারি। x অক্ষের সঙ্গে এগুলি যথাক্রমে $\omega t - 30^\circ$ ও $\omega t + 30^\circ$ কোণে আনত। লব্ধি দোলগতি R এর দৈর্ঘ্য

$R = (\ldots 2A.A.\cos 60^\circ)^{\frac{1}{2}}$ কেননা x_1 ও x_2 এর অন্তবর্তী কোণ 60º

$= \sqrt{3}A$



জটিল রাশির পদ্ধতিতে : $x_1 + x_2 =$ বা (Z)

যেখানে, $Z =$

$= Ae^{j\omega t}\,(e^{j}.30^o + e^{-j.30^o})$

$= 2ae^{j\omega t}\cos 30^\circ$

$\therefore\ x_1 + x_2 = 2A\cos 30^\circ \cos \omega t = \qquad =$

যার বিস্তার

3. মোট সুতার দৈর্ঘ্য যদি $2L$ হয় এবং P_1 পুলি যদি P_2 অথবা P_3 থেকে z দূরত্বে নিচে থাকে, তবে $2L = x + y + 2z$।

যদি x ও y এর বিস্তার a হয় তবে উভয়ের ক্ষেত্রে প্রাথমিক দশা শূন্য ধরে লেখা যায়

$$x =$$

ও $$y =$$

$$\therefore\ x + y =$$

$$= 2a\cos\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{2\pi}{6}\right)t.\cos\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{5}-\frac{2\pi}{6}\right)t$$

$$=$$

$$\therefore\ z = L - a\cos\left(\frac{1}{30}\pi t\right).\cos\left(\frac{11}{30}\pi t\right)$$

B পিণ্ডটির গতি P_1 পুলির গতির অনুরূপ এবং z রাশিটি এই গতি নির্দেশ করছে। এখানে L একটি ধ্রুবক।

রাশিটির সঙ্গে রাশির তুলনা করলে বোঝা যায়, এটি 60 সেকেন্ড পর্যায়কালের সরল দোলগতিতে পরিবর্তনশীল। অপরপক্ষে, রাশি সেকেন্ড পর্যায়কালের সরল দোলগতি বোঝায়। সুতরাং, z রাশিটি সেকেন্ড পর্যায়কালের দোলগতিতে ওঠানামা করে এবং এই দোলগতির বিস্তার 60 সেকেন্ড পর্যায়কালের সরল দোলগতিতে পরিবর্তিত হয়।

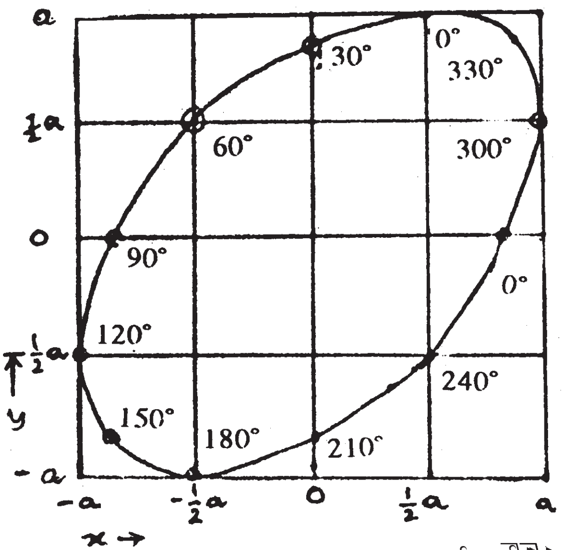
4. এখানে বস্তুটির গতি সমীকরণ লেখা যায় :

$$x = a\cos(\omega t + 60^\circ)$$

$$y = a\cos(\omega t)$$

ωt রাশির বিভিন্ন মানের জন্য এখন আপনি x ও y এর মান নির্ণয় করতে পারেন :

$wt =$	0º	30º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	300º	330º	360º
$x =$		0			$-a$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$-\frac{1}{2}a$	0	$\frac{1}{2}a$		a		
$y =$	a			0		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-a$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$-\frac{1}{2}a$	0	$\frac{1}{2}a$		a



চিত্রে ωt রাশির বিভিন্ন মানের জন্য বস্তুটির অবস্থান ও গতিপথ দেখানো হল। চিত্রটি থেকে আপনি সহজেই বুঝতে পারবেন যে, এক্ষেত্রে বস্তুটি বামাবর্তে অর্থাৎ ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে চলতে থাকে।

5. না, কারণ এখানে মহাকর্ষ বল সব বিন্দুতে সূর্য অভিমুখী হলেও ঐ বলের মান দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতী, দূরত্বের সমানুপাতী নয়।

6. না, বল দুটি যদি ও $-\omega_2{}^2 y$ হয় তবে তাদের লব্ধির মান $\sqrt{\omega_1{}^4 x^2 + \omega_2{}^4 y^2}$, যা $\sqrt{x^2 + y^2}$ এর সমানুপাতী নয়। তাছাড়া এই লব্ধি x অক্ষের সঙ্গে কোণ রচনা করবে, যেখানে লব্ধি সাধারণ মধ্যবিন্দু অভিমুখে কাজ করলে এই কোণ $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ হত।

একক 3 অবমন্দিত দোলগতি (Damped Oscillations)

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা

এই পর্যায়ের প্রথম এককে আপনারা সরল দোলগতির পরিচয় পেয়েছেন। নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছেন যে, একটি সুসমঞ্জস দোলকের মোট শক্তি সদাসর্বদা অপরিবর্তিত থাকে এবং সময়-সরণ লেখচিত্রটি সাইনের (বা কোসাইনের) লেখচিত্রের অনুরূপ হয়। তাহলে কি আমরা ধরে নেব যে, সরল দোলগতির এই বৈশিষ্ট্য চিরকাল অপরিবর্তিত থাকবে? তার শক্তির কোনও ক্ষয় হবে না এবং তা একবার দোলগতি শুরু করলে আবহমান কাল ধরে চলতেই থাকবে? আমাদের অভিজ্ঞতা কিন্তু অন্যরকম বলে, তাই না?

আসলে যে সরল দোলগতির সঙ্গে আমাদের প্রথম পরিচিতি ঘটেছিল, সেখানে সবরকমের অপচয়ী বল অনুপস্থিত বলে ধরা হয়েছিল। এই রকমের দোলগতিকে বলা হয় মুক্ত (free) অথবা অনবমন্দিত (undamped)। সত্যিই তো, কোনওরকম অপচয়ী বা বাধাদানকারী বল যদি উপস্থিত না থাকে, তবে সরল দেলগতিতে আন্দোলিত কণার শক্তি অপরিবর্তিত থাকবে এবং চিরকাল তার একই গতি লক্ষ্য করা যাবে। কিন্তু বাস্তব ক্ষেত্রে আমরা দেখি যে, সরল দোলকের বিস্তার সময়ের সঙ্গে ক্রমশ কমতে থাকে এবং তা ধীরে ধীরে থেমে যায়। স্প্রিং-ভর ব্যবস্থা খানিকক্ষণ কম্পিত হওয়ার পর স্থির হয়ে যায়, ব্যাবর্ত দোলকও (torsional pendulum) একইরকম আচরণ করে। সব ক্ষেত্রেই দেখা যাবে যে, আমরা বিশেষ কোনও বলপ্রয়োগ করে

ঐ সমস্ত কম্পনকে কমানোর বা বন্ধ করার চেষ্টা করিনি, তবু প্রথমে বিস্তার কমানোর সঙ্গে সঙ্গে তাদের শক্তির হ্রাস হয়েছে (1.9 সমীকরণটি একবার দেখে নিন) এবং শেষ পর্যন্ত সেই শক্তি সম্পূর্ণ নিঃশেষিত হয়ে গেছে। বাস্তব জগতে এমনটাই হয়ে থাকে।

আসলে বাস্তব জগতে আমরা প্রকৃত মুক্ত কম্পন পাই না। দুটি কঠিন তলের মধ্যে ঘর্ষণ, প্রবাহীর (যেমন বাতাস) মধ্যে দিয়ে সংঘটিত কোনও কোনও দোলগতির ক্ষেত্রে সান্দ্রতা জনিত বাধা বা কম্পনশীল বস্তুর নিজস্ব উপাদানের ধর্ম সবই দোলগতিতে অবমন্দন ঘটায়। তাই বাস্তব জগতের দোলগতি অবমন্দন জনিত অপচয়ী বলের বিরুদ্ধে গতি বজায় রাখতে গিয়ে ক্রমাগত নিজস্ব শক্তি হারায় এবং শেষ পর্যন্ত সম্পূর্ণ স্তব্ধ হয়ে যায়। যদি এই অবমন্দনের মাত্রা অত্যধিক হয়ে পড়ে, তাহলে দোলগতি একেবারে শুরুই করা যায় না এবং সাম্যাবস্থা থেকে বিচ্যুত কম্পনক্ষম বস্তুটি কোনও দোলগতি প্রদর্শন না করেই সাম্যাবস্থায় আবার ফেরত চলে আসে। যখন অবমন্দনের মাত্রা যথেষ্ট কম, তখনই কেবল দোলগতি পাওয়া যায়। আর এই দোলগতির বিস্তার তথা শক্তি সময়ের সঙ্গে কমতে থাকে। এই এককে (একক 3) আমরা অবমন্দিত দোলগতি নিয়ে আলোচনা করব। বিশেষ জোর দেওয়া হবে সেই ক্ষেত্রটিতে যেখানে অবমন্দন তুলনায় দুর্বল এবং দোলগতি পাওয়া সম্ভব। এই অবমন্দনকে সচরাচর লঘু অবমন্দন হিসেবে চিহ্নিত করা হয়।

আমরা এখানে লঘু অবমন্দনের বৈশিষ্ট্যসমূহ আলোচনা করার সঙ্গে সঙ্গে বাস্তব দোলগতির সঙ্গে পরিচিত হব। তবে অবমন্দনের উপস্থিতি সত্ত্বেও দোলগতি বজায় রাখতে গেলে কম্পনশীল ব্যবস্থাটিতে বাইরে থেকে শক্তির যোগান দেওয়া প্রয়োজন। এজন্য কোনও পর্যাবৃত্ত বল প্রয়োগের দরকার হয়ে পড়ে। ফলে যে ধরনের কম্পনের সৃষ্টি হয়, তাকে বলা হয় *প্রণোদিত কম্পন* বা *দোলগতি* (forced vibration)। পরবর্তী এককে (একক 4) বিষয়টির বিস্তারিত আলোচনা হবে।

উদ্দেশ্য

এই একক পাঠের মধ্য দিয়ে নিম্নলিখিত বিষয়গুলি আপনার আয়ত্ত হবে—

- অবমন্দিত দোলগতির বা অবমন্দিত সমঞ্জস গতির অবকল সমীকরণ গঠন ও তার সমাধান।
- দোলগতির বিস্তার, শক্তি এবং দোলনকাল কীভাবে অবমন্দনের ফলে প্রভাবিত এবং পরিবর্তিত হয়, তার ব্যাখ্যা।
- অবমন্দনের মাত্রা অনুযায়ী তাদের লঘু (বা দুর্বল), ক্রান্তীয় (critical) এবং অতি (heavy) এই তিনটি শ্রেণীতে বিভক্ত করে তাদের বৈশিষ্ট্যসমূহের বিশ্লেষণ।
- লঘু অবমন্দনযুক্ত দোলনশীল ব্যবস্থার ক্ষেত্রে তার বৈশিষ্ট্যসমূহ বিশ্লেষণের জন্য লগীয় হ্রাস, শ্লথন কাল (relaxation time) এবং কিউ-গুণাঙ্ক (Q-factor) নির্ণয়।
- পদার্থবিদ্যার বিভিন্ন শাখায় অবমন্দিত দোলগতির ভূমিকার পর্যালোচনা ও গণনা।

3.2 অবমন্দিত দোলনের অবকল সমীকরণের প্রতিষ্ঠা

অবমন্দিত দোলনের অবকল সমীকরণের প্রসঙ্গ উত্থাপিত হলে স্বভাবতই মনে হয় যে, সরল দোলগতির যে সমীকরণ আমরা একক1-এ পেয়েছি (সমীকরণ 1.1), তার মধ্যে কিছু পরিবর্তন ঘটিয়ে অবমন্দিত দোলগতির সমীকরণ পাওয়া সম্ভব। আপনার এই অনুমান সঠিক, তবে সেই আলোচনায় যাওয়ার আগে উল্লেখ

করা প্রয়োজন যে, এখন থেকে সবরকম অবমন্দন মুক্ত যে এক আদর্শ দোলগতির বিষয় প্রথম এককে আলোচিত হয়েছে, তাকে আমরা মুক্ত দোলগতি বলে উল্লেখ করব।

আগে বলা হয়েছে যে, অবমন্দনের অর্থ হচ্ছে কম্পনশীল বা কম্পনক্ষম ব্যবস্থাঘটিত অপচয়ী বলের উপস্থিতি। এই অপচয়ী বল সর্বদাই গতির বিরুদ্ধে কাজ করবে, যে ভূমিকা আমাদের অতি পরিচিত ঘর্ষণ বল পালন করে থাকে। তাই অবমন্দনজনিত বল, গতির অভিমুখের ওপর নির্ভর করে তার অভিমুখ পরিবর্তন করে থাকে। এখন প্রশ্ন হচ্ছে যে, এই অপচয়ী বলটিকে কীভাবে পাওয়া যাবে? এর উত্তরের জন্য আমরা চিত্র 3.1 এর দিকে দৃষ্টি দেব।

চিত্র 3.1

3.1 চিত্রে দেখানো হয়েছে একটি স্প্রিং-ভর ব্যবস্থা এমনভাবে কম্পিত হচ্ছে যে, স্প্রিং-এর সঙ্গে যুক্ত ভরটি একটি চোঙের মধ্যে দিয়ে চলাফেরা করছে এবং চোঙের মধ্যে ঘর্ষণ অর্থাৎ অবমন্দন জনিত বাধা বলের সম্মুখীন হচ্ছে। আমরা ধরে নিই যে, ভরটি যে বাধা-বলের সম্মুখীন হচ্ছে তার পরিমাণ F_d এবং বলটির মান কোনও বিশেষ মুহূর্তে ভরটির গতিবেগের সমানুপাতিক। এখন আপনি লিখতে পারেন :

$$F_d = -\gamma \frac{dx}{dt} \text{ বলে} \qquad \text{...... 3.1}$$

যেখানে γ একটি ধনাত্মক ধ্রুবক রাশি। γ রাশিটিকে বলা হয় অবমন্দন গুণাঙ্ক (damping coefficient)। এটি একক গতিবেগের জন্য অবমন্দন বল এবং এর একক এইভাবে পাওয়া যায়।

$$\gamma \text{ এর একক} = \frac{\text{বলের একক}}{\text{গতিবেগের একক}} = \frac{N}{ms^{-1}} = kg\ s^{-1}$$

খুব স্বাভাবিকভাবেই প্রশ্ন উঠবে যে, অবমন্দনজনিত বলকে গতিবেগের সমানুপাতিক ধরে নেওয়া কতখানি সঙ্গত? কম্পনশীল বস্তুর গতিবেগ যদি খুব বেশি না হয়, তাহলে এই সমানুপাতিত্ব ধরে নেওয়া যায় এবং বিভিন্ন পরীক্ষার মাধ্যমে তা দেখানো সম্ভব হয়েছে। আর সান্দ্রতাজনিত বাধা যে গতিবেগের সমানুপাতিক হয়ে থাকে, তা একটু আলোচনা করা যেতে পারে।

সান্দ্রতাজনিত বাধার জন্য কোনো সান্দ্রতাবিশিষ্ট প্রবাহীর মধ্যে দিয়ে পতনশীল বা চলমান গোলকাকৃতি বস্তু একটি বাধা বলের সম্মুখীন হয়। এই বিষয়ে বিজ্ঞানী স্টোকস একটি সূত্র দেন (Stokes' law)। এই সূত্রানুযায়ী

$$F_d = 6\pi\eta rv$$

এখানে η মাধমের সান্দ্রতাঙ্ক, r চলমান বস্তুটির ব্যাসার্ধ এবং v বস্তুর গতিবেগ। এই সূত্রানুযায়ী সান্দ্র মাধ্যমে চলমান বস্তুর গতির বিরুদ্ধে ক্রিয়াশীল বাধা বল বস্তুর গতিবেগের সমানুপাতিক।

তা আমরা জানি। অতএব, অবমন্দনজনিত বল কম্পনশীল বস্তুর গতিবেগের সমানুপাতিক, এইটি ধরে নিয়েই আমরা অগ্রসর হব।

চিত্র 3.1 -এ দেখানো স্প্রিং-ভর ব্যবস্থাটি যে সরলরেখা বরাবর চলাফেরা করছে, তাকে x অক্ষ এবং ব্যবস্থাটির সাম্যাবস্থায় ভরটির ভরকেন্দ্রকে মূলবিন্দু বা $x = 0$ বিন্দু ধরে নেওয়া হল। এখন ভরটিকে ডানদিকে অনুভূমিক রেখা বরাবর বিচ্যুত করে ছেড়ে দিলে সেটি কম্পিত হতে শুরু করবে। কোনও মুহূর্তে মূলবিন্দু ($x = 0$) বা সাম্যাবস্থা থেকে x দূরত্বে অবস্থানকালে ভরটির ওপর যে বলগুলি ক্রিয়াশীল হবে, তা হল,

(i) প্রত্যানয়ক বল (restoring force)—kx, যেখানে k হচ্ছে স্প্রিং-ধ্রুবক (spring constant)

(ii) অবমন্দনজনিত বল—γv বা , যেখানে γ হচ্ছে অবমন্দন গুণাঙ্ক (damping coefficient)।

এখানে $v = \frac{dx}{dt}$ অর্থাৎ, বিশেষ মুহূর্তে গতিবেগ।

এখন নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রের সাহায্যে লেখা যায় যে,

বা, = ...3.2

প্রতিটি রাশিকে m দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

বা, $\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} +$ [illegible] ...3.3

এখানে $\omega_0^2 =$ এবং $2b =$ এই দোলগতির কৌণিক কম্পাঙ্ক সূচিত করছে। কে b না লিখে $2b$ লেখা হয়েছে কারণ এর ফলে পরবর্তী পর্যায়ে 3.3 সমীকরণটির সমাধানের রূপটি সরলতর হবে।

লক্ষ্য করার বিষয় যে এই, 3.3 সমীকরণটি মুক্ত দোলগতির অবকল সমীকরণ থেকে ভিন্ন। অবমন্দন জনিত বলের জন্য সমীকরণে পদটির উপস্থিতির ফলে এই অবকল সমীকরণের যে সমাধান পাওযা যাবে, তা স্বভাবতই মুক্ত দোলগতির ক্ষেত্রে প্রাপ্ত সমাধান থেকে ভিন্ন হবে। 3.3 সমীকরণটি একটি দ্বিতীয় মাত্রার (second order) রৈখিক (linear) সমসত্ত্ব (homogeneous) অবকল সমীকরণ এবং সমীকরণের প্রতিটি পদের সহগ (coefficient) ধ্রুবক। এই সমীকরণের সমাধান আমরা নির্ণয় করব। তার আগে একটি বিষয়ের দিকে আপনার দৃষ্টি আকর্ষণ করতে চাই। মুক্ত দোলগতির প্রত্যানয়ক বলের প্রভাবে সরণ 'x' সময়ের সঙ্গে যে ভাবে পরিবর্তিত হয়েছে তা অপরিবর্তিত বিস্তারের কম্পন সূচিত করেছে। অবমন্দন নিশ্চয়ই সেই গতিকে প্রভাবিত করবে। কী ঘটতে পারে অনুমান করতে পারেন? অবমন্দন যেহেতু বাস্তব ক্ষেত্রে দোলগতির বিস্তারকে ক্রমশ হ্রাস করে দেয়, তাই সেই ঘটনার প্রতিফলন 3.3 সমীকরণের সমাধানে থাকা প্রয়োজন। তাহলে কি আমরা আশা করতে পারি যে, 3.3 এর সমাধান একটি ক্রমহ্রাসমান

বিস্তারের দোলগতি সূচিত করবে? হ্যাঁ, নিশ্চয়ই তা খুব সঙ্গত প্রত্যাশা। কিন্তু অবমন্দনের মাত্রা অত্যধিক হয়ে গেলে কী হবে? দোলগতি কি সেক্ষেত্রে আদপেই সম্ভব হবে? আমাদের এই প্রশ্নগুলির উত্তর পাওয়ার জন্য পরবর্তী অনুচ্ছেদে আমরা সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করে তার বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যগুলি পর্যালোচনা করব। প্রসঙ্গত বলা দরকার, 3.3 সমীকরণ একটি অবমন্দিত দোলগতির গতিশীল অবস্থা সূচিত করছে আর এর সমাধানই হবে দোলগতির সময়-দূরত্ব সমীকরণ।

3.3 অবমন্দিত দোলগতির অবকল সমীকরণের সমাধান

3.3 অবকল সমীকরণটির সমাধানের জন্য আমরা সংশ্লিষ্ট গতির বাস্তব চরিত্র মনে রেখে এমন একটি পরীক্ষামূলক সমাধান (trial solution) ধরে নিয়ে এগোবো যার মধ্যে সময়ের সূচক অপেক্ষক (exponential function) আছে। কারণ, আমরা আশা করছি যে, এর সাধারণ সমাধানে একাধারে সূচক ও পর্যাবৃত্ত চরিত্র থাকবে। সূচক রাশিটি সময়ের সঙ্গে বিস্তারের হ্রাস সূচিত করবে এবং পর্যাবৃত্ত রাশি সূচিত করবে ব্যবস্থাটির কম্পনশীল চরিত্র। এক্ষেত্রে আমরা পরীক্ষামূলক সমাধান হিসেবে নিম্নলিখিত সময়-দূরত্ব সমীকরণটি নিতে পারি :

$$x(t) = ae^{\alpha t} \qquad \ldots 3.4$$

এখানে a এবং α দুটি অজ্ঞাত ধ্রুবক রাশি।

লক্ষ্য করার বিষয় যে, (3.4) সমীকরণের বাঁ দিকের রাশিটি দৈর্ঘ্য সূচিত করছে। অতএব, তার একক দৈর্ঘ্যের একক। সুতরাং, ডান দিকটির সামগ্রিক একক দৈর্ঘ্যের একক হবে। এখন e রাশির সূচক হিসেবে ব্যবহৃত সংখ্যাটি অবশ্যই একক শূন্য হবে। তাই এক্ষেত্রে αt-র কোনও একক থাকবে না। যেহেতু t-এর একক সময়ের একক বা সেকেন্ড (s) তাই 'α' এর একক হবে সময়ের বিপরীত (s^{-1})। আর তাই 3.4 সমীকরণের উভয় পাশের এককের সমতার জন্য 'a' এর একক হবে দৈর্ঘ্যের একক (m)।

3.4 সমীকরণকে পরপর দুবার অবকলন করে পাই,

$$= a\alpha e^{\alpha t}$$

$$\therefore \qquad = a\alpha^2 e^{\alpha t}$$

এই সম্পর্ক দুটি 3.3 নং সমীকরণে ব্যবহার করে পাই,

$$= 0 \qquad \ldots 3.5$$

এই সমীকরণটি 't' এর যে কোন মানের জন্যই সঠিক। তাই $e^{\alpha t} \neq 0$ (সকল 't' এর জন্য)

এবং $a \neq 0$ কারণ $a = 0$ হলে 3.4 সমীকরণ অনুযায়ী $x(t)$-র মান সর্বদাই শূন্য হবে। তাই 3.5 সমীকরণে বন্ধনীভুক্ত অংশটিই শূন্য অর্থাৎ

$$\left(\alpha^2 + 2b\alpha + \omega_0^2\right) = 0 \qquad \ldots 3.6$$

এটি α র একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। এই সমীকরণের দুটি বীজ (root) যদি α_1 এবং α_2 হয়, তাহলে দ্বিঘাত সমীকরণের তত্ত্ব অনুযায়ী লেখা যায় যে,

$$\alpha_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2} \quad \text{...3. 7a}$$

$$\alpha_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega_0^2} \quad \text{...3.7b}$$

বস্তুত এই দুটি বীজ α_1 এবং α_2-র প্রকৃতি কম্পনের বৈশিষ্ট্য নির্ধারণ করে।

α এর দুইটি মান α_1 এবং α_2 -র জন্য আমরা সমীকরণের দুইটি সমাধান পাব। এই দুইটি সমাধানকে $x_1(t)$ এবং $x_2(t)$ হিসেবে চিহ্নিত করে লেখা যায় যে,

$$x_1(t) = a_1 \exp\left[-b\left(-\sqrt{b^2 - \omega_0^2}\right)t\right] \quad \text{... 3.8a}$$

$$x_2(t) = a_2 \exp\left[-\left(b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2}\right)t\right] \quad \text{... 3.8b}$$

যে অবকল সমীকরণের 3.3 সমাধান হিসেবে x_1 এবং x_2 কে পাওয়া গেছে সেই সমীকরণটি রৈখিক। অতএব উপরিপাতের (superposition) নীতি াবলম্বন করে x_1 এবং x_2 কে যুক্ত করে একটি সাধারণ সমাধান $x(t)$ পাওয়া যায় :

$$x(t) = x_1\,(t) + x_2(t)$$

$$= \exp(-bt)\left[a_1 \exp\left\{\left(b^2 - \omega_0^2\right)^{\frac{1}{2}} t\right\} + a_2 \exp\left\{-\left(b^2 - \omega_0^2\right)^{\frac{1}{2}} t\right\}\right] \quad \text{...3.9}$$

এখানে a_1 এবং a_2 দুটি স্বেচ্ছ অচর (arbitrary constant) এবং এদের মান নির্ণয় করার জন্য দোলনের প্রাথমিক শর্তাবলী (initial condition) জানা প্রয়োজন। অর্থাৎ, যে কোন সময়ে, ধরা যাক যখন $t = 0$, তখন সরণ বা গতিবেগের মান কী ছিল তা জানা থাকলে a_1, a_2 নির্ণয় করা সম্ভব।

সমীকরণে $(b^2 - \omega_0^2)$ অংশটি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। এই অংশটির মান b এবং ω_0-র তুলনামূলক মানের ওপর নির্ভর করে ধনাত্মক, ঋণাত্মক, অথবা শূন্য হতে পারে এবং এর মধ্যে দিয়ে তিনটি ভিন্ন অবস্থার সৃষ্টি হবে। এই তিনটি ক্ষেত্রে পদার্থবিদ্যার দৃষ্টিকোণ থেকে আমরা তিনটি ভিন্ন অবস্থা দেখতে পাই। গাণিতিক বিশ্লেষণের আগে এগুলির সংক্ষিপ্ত পরিচয় নেওয়া যাক।

(ক) যখন $b^2 > \omega_0^2$ তখন α_1 এবং α_2-র মান বাস্তব এবং কম্পনশীল ব্যবস্থাটিতে অবমন্দন খুবই বেশি। বস্তুত এই অবমন্দনের মাত্রা এতটাই যে, এর ফলে কম্পন সম্ভব হয় না। কম্পনক্ষম বস্তুটিকে তার সাম্য অবস্থান থেকে বিচ্যুত করলে তা কম্পিত না হয়ে ধীরে ধীরে সাম্য অবস্থানে ফিরে আসে। এই অবমন্দনকে আমরা 'অতি অবমন্দন' (heavy damping) বলে থাকি। 3.3.1 অনুচ্ছেদে আপনি এ বিষয়ে আরও জানতে পারবেন।

(খ) যদি $b^2 = \omega_0^{\,2}$ হয় তাহলে α_1 এবং α_2-র মান সমান অর্থাৎ $\alpha_1 = \alpha_2$ । এই ক্ষেত্রে যে ধরনের অবমন্দন লক্ষ্য করা যায় তাকে বলা হয় 'ক্রান্তীয় অবমন্দন' (critical damping)। কোনও কম্পনশীল ব্যবস্থায় ক্রান্তীয় অবমন্দন উপস্থিত থাকলে সেখানেও, কম্পন ঘটতে পারে না। তাহলে কি অতি অবমন্দনের সঙ্গে এর কোন পার্থক্য নেই? না, দুটি ক্ষেত্র কিন্তু এক নয়। এক্ষেত্রে কম্পনশীল বস্তুকে সাম্যাবস্থান থেকে বিচ্যুত করলে তা অতি অবমন্দনের তুলনায় দ্রুত সাম্যাবস্থানে ফিরে আসবে, কিন্তু তা অতিক্রম করে বিপরীত দিকে কোনও সরণ ঘটবে না, অর্থাৎ সাম্যাবস্থানে এসে তা গতিহীন হয়ে পড়বে। 3.3.2 অনুচ্ছেদে আমরা ক্রান্তীয় অবমন্দন সম্পর্কে আলোচনা করব।

(গ) যদি $b^2 < \omega_0^{\,2}$ হয় অর্থাৎ যখন α_1 এবং α_2-র মান দুটি জটিল (complex) বা কাল্পনিক (imaginary) হয়, তাহলে যে অবস্থা সূচিত হয়, পদার্থবিদ্যার দৃষ্টিকোণ থেকে তা সবচেয়ে বেশি গুরুত্বপূর্ণ। এক্ষেত্রে অবমন্দন থাকলেও কম্পন সম্ভব হয়। এই অবমন্দনকে বলা হয় লঘু *অবমন্দন* (weak damping)। বাস্তব জগতে যে সব কম্পন আমরা দেখতে পাই, তার সবগুলিতেই লঘু অবমন্দন বর্তমান। তবে লঘু অবমন্দনের ফলে সময়ের সঙ্গে কম্পনের বিস্তার তথা শক্তি ক্রমশ হ্রাস পায়। এই অবমন্দনের আরও কতগুলি বৈশিষ্ট্য আমরা প্রথমে 3.3.3 এবং পরে 3.5 অনুচ্ছেদে বিস্তারিতভাবে আলোচনা করব।

3.3.1 অতি অবমন্দন ও তার বৈশিষ্ট্যসমূহ

অতি অবমন্দনের ক্ষেত্রে $b^2 > \omega_0^{\,2}$ $(b^2 - \omega_0^{\,2})$ রাশিটি ধনাত্মক এবং 3.7a, b সমীকরণের α_1 এবং α_2 দুটি বাস্তব সংখ্যা।

ধরা যাক, $\beta = \sqrt{b^2 - \omega_0^{\,2}}$

তাহলে 3.9 সমীকরণে উল্লিখিত অবমন্দিত কম্পনের সাধারণ সমাধান পরিবর্তিত হয়ে দাঁড়ায়

$$x(t) = \exp(-bt)[a_1 \exp(\beta t) + a_2 \exp(-\beta t)] \qquad \text{... 3.10}$$

এই সমীকরণ দ্বারা সূচিত গতি কম্পনগতি নয়। এই ধরনের গতিকে রুদ্ধ দোল (dead beat) বলা হয়। তবে কম্পন সম্পন্ন না হলেও সময়ের সঙ্গে দূরত্ব কীভাবে পরিবর্তিত হবে, তা কিন্তু নির্ভর করবে প্রাথমিক শর্তের (initial condition) ওপর। এই প্রাথমিক শর্তের সাহায্যে দুটি স্বেচ্ছ অচর a_1 এবং a_2 ও নির্ধারণ করা যায়।

যেমন ধরা যাক, প্রাথমিক অবস্থায় বস্তুটি তার সাম্যাবস্থানে রয়েছে অর্থাৎ, যখন $t = 0$, $x = 0$। এবার এর ওপর একটি ঘাত (অতি ক্ষুদ্র সময় ধরে সহসা প্রযুক্ত বৃহৎ বল) প্রয়োগ করা হল। তার ফলে প্রাথমিক সময়ে অর্থাৎ, $t = 0$-তে বস্তুটি v_0 বেগ লাভ করল। এখন এই দুটি শর্ত প্রয়োগ করা যাক।

প্রদত্ত দুটি শর্ত হল, যখন $t = 0$, $x = 0$; যখন $t = 0$, বা $v = v_0$

প্রথম শর্ত 3.10 সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$0 = a_1 + a_2 \qquad \text{... (i)}$$

3.10 সমীকরণের উভয় পক্ষকে অবকলন করলে আপনি পাবেন :

$$=$$

এখন দ্বিতীয় শর্তটি বসালে পাওয়া যাবে

$$v_0 = -b[a_1 + a_2] + \beta\,[a_1 - a_2] \qquad \text{... (ii)}$$

(i) ও (ii) ব্যবহার করে সহজেই পাওয়া যাবে

$$a_1 = -\,a_2 =$$

এর সাহায্যে 3.10 সমীকরণ পরিবর্তিত হয়ে দাঁড়ায়

$$x(t) =$$

$$\frac{v_0}{\beta}\phi(t)\cdot\psi(t) \qquad \text{... 3.11}$$

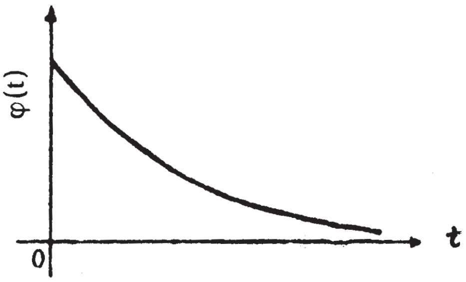
যেখানে $\phi(t) = exp\ (-bt)$

এবং $\psi\ (t) = \dfrac{\exp(\beta t) - \exp(-\beta t)}{2} = \sin\ h\ (\beta t)$

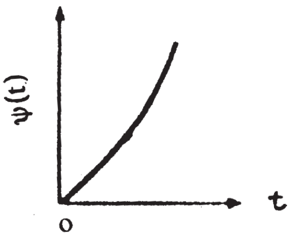
সমীকরণ 3.11 এ দেখা যাচ্ছে যে, $x(t)$, দুটি অপেক্ষক অর্থাৎ $\phi(t)$ এবং $\psi\ (t)$ এর গুণফলের সমান। এই দুটি অপেক্ষকের প্রথমটি অর্থাৎ $\phi(t)$[= exp $(-bt)$], সময়ের সঙ্গে হ্রাস পায় এবং দ্বিতীয়টি অর্থাৎ $\psi\ (t)$[= sinh(βt)], সময়ের সঙ্গে বৃদ্ধি পায়। অতি অবমন্দনের ক্ষেত্রে b এর মান β অপেক্ষা বড় হওয়ায় $\phi(t)$ এর হ্রাস পাওয়ার হার বেশি। তাই দুটি অপেক্ষকের গুণফল প্রথমে সামান্য বৃদ্ধি পেলেও তা দ্রুত হ্রাস পায়। ফলে $x(t)$ প্রথমে সময়ের সঙ্গে সামান্য বৃদ্ধি পেলেও খুব তাড়াতাড়ি তা শূন্য হয়ে যায়। 3.2 চিত্রে সময়ের সঙ্গে এই দুটি অপেক্ষকের পরিবর্তন দেখানো হয়েছে। লক্ষ্য করার বিষয়, 3.2(b)-তে দেখানো লেখচিত্রে sinh(βt) সময়ের সঙ্গে বেড়ে চলে, sin (βt)-র মত তার পর্যাবৃত্ত মান পাওয়া যায় না। বস্তুত এজন্য এক্ষেত্রে $x(t)$-র মানও পর্যাবৃত্ত হয় না এবং কম্পন সম্ভব হয় না। 3.2(a) চিত্রে আপনি দেখতে পাবেন যে $\phi(t)$ সময়ের সঙ্গে কমে যাচ্ছে। তবে এই কমার হার b-এর মানের ওপর নির্ভরশীল। 3.3 চিত্রে 3.11 সমীকরণ অনুযায়ী

t-এর সঙ্গে $x(t)$ এর পরিবর্তন দেখানো হয়েছে। যখন বস্তুটিকে একটি ঘাত প্রয়োগ করে সাম্যাবস্থা থেকে বিচ্যুত করা হয়, তখনকার অতি অবমন্দনজনিত সময় - দূরত্ব রেখচিত্র এখানে দেখা যাচ্ছে। এই চিত্রে দেখানো

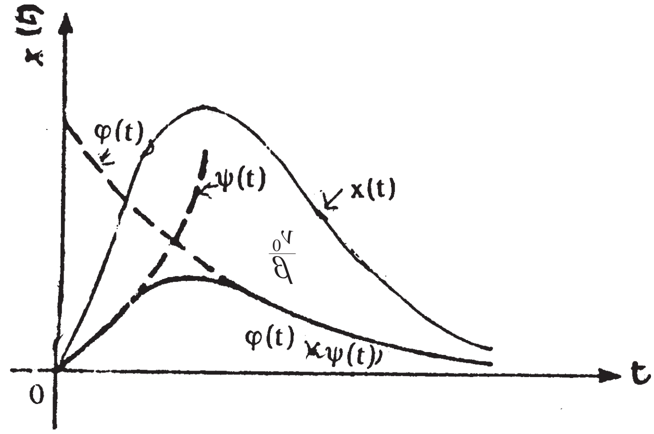
$x(t)$ এর মান 3.2 (a) ও (b) চিত্রের দুটি অপেক্ষকও রাশির গুণনের দ্বারা পাওয়া গেছে।



চিত্র 3.2 (a)



চিত্র 3.2 (b)



চিত্র 3.3

3.3.2 ক্রান্তীয় অবমন্দন

ক্রান্তীয় অবমন্দন প্রকৃতপক্ষে অতি অবমন্দন ও লঘু অবমন্দনের সীমারেখা সূচিত করে। এই অবমন্দনের উপস্থিতিতে কোনও কম্পনক্ষম বস্তুকে যখন তার সাম্যাবস্থান থেকে বিচ্যুত করা হয়, তখন তা সর্বাপেক্ষা দ্রুত সাম্যাবস্থানে ফেরত আসে এবং সেখানেই স্থির হয়ে যায় কোনও কম্পন প্রদর্শন করে না। অবমন্দনের মাত্রা এর থেকে বেশি হলে, তাকে অতি অবমন্দন বলা হবে এবং সেক্ষেত্রেও কম্পন দেখা যাবে না, যদিও কম্পনক্ষম বস্তু অপেক্ষাকৃত বেশি সময় নিয়ে সাম্যাবস্থানে এসে স্থির হয়ে যাবে। আর অবমন্দনের মাত্রা ক্রান্তীয় অবমন্দন থেকে কম হলে, সামগ্রিক ব্যবস্থাটি একবার সাম্যাবস্থা থেকে বিচ্যুত হলে কম্পিত হতে থাকবে।

আপনার মনে হতে পারে, এই ক্রান্তীয় অবমন্দনের কোনও বিশেষ তাৎপর্য আছে কি না। ব্যবহারিক