দৃষ্টিকোণ থেকে এই অবমন্দনের কিছু বিশেষ প্রয়োগ রয়েছে। আপনি দেখে থাকবেন, দরজা ঠেলে খোলার পর তা নিজে থেকেই বন্ধ হয়ে যাওয়ার জন্য একটি বিশেষ ধরনের দরজা বন্ধ করার ব্যবস্থা (door closer) দরজায় লাগানো থাকে। এই ব্যবস্থাটিতে দরজা বন্ধের জন্য ক্রান্তীয় অবমন্দনের প্রয়োগ করা হয়। এতে দরজাটি তার বিচ্যুত অবস্থান থেকে অপেক্ষাকৃত দ্রুত সাম্যাবস্থানে ফেরে এবং তা কম্পিত হওয়ার চেষ্টা না করে স্থির হয়ে দাঁড়িয়ে যায়। অবমন্দনের মাত্রা বেড়ে গেলে দরজাটি দীর্ঘতর সময় নিয়ে বন্ধ হবে আর অবমন্দন কমে গেলে সেটি সাম্যাবস্থানের দু'পাশে দুলতে থাকবে অথবা, তার সুযোগ না থাকলে সাম্যাবস্থানে এসে সজোরে ও সশব্দে চৌকাঠে আঘাত করবে। বলা বাহুল্য, এর কোনওটিই ব্যবহারিক দৃষ্টিকোণ থেকে কাম্য নয়। অতি অবমন্দন বা ক্রান্তীয় অবমন্দনের আর একটি উদাহরণ দেওয়া যেতে পারে। আমরা পরীক্ষাগারে যে সব ভোল্টমিটার, অ্যামিটার ও টেবল গ্যালভ্যানোমিটার ব্যবহার করি অথবা টেপ রেকর্ডারে যে শব্দস্তর নির্দেশক (level indicator) থাকে, সেগুলিতে সূচক-কাঁটা ব্যবহৃত হয়। এই সূচক কাঁটার গতিতে ক্রান্তীয় অবমন্দনের ব্যবস্থা থাকে যাতে সেটি সাম্যাবস্থার দু'ধারে কম্পিত না হয়।

গাণিতিক দৃষ্টিকোণ থেকে বলা যায় যে, ক্রান্তীয় অবমন্দনের ক্ষেত্রে $b^2 - \omega_0^2 = 0$ এবং সেক্ষেত্রে সমীকরণ 3.9 পরিবর্তিত হয়ে দাঁড়ায়,

$$x(t) = (a_1 + a_2) \exp(-bt) = a \exp(-bt) \qquad ...3.12$$

এখানে $a = a_1 + a_2$

লক্ষ্য করবেন যে, 3.12 সমীকরণে একটিমাত্র স্বেচ্ছ অচর রয়েছে, অথচ আপনি জানেন যে, একটি দ্বিমাত্রার অবকল সমীকরণে দুইটি স্বেচ্ছ অচর থাকবে, যাদের মান প্রাথমিক শর্তের ওপর ভিত্তি করে পাওয়া যাবে। 3.12 সমীকরণ কিন্তু তাহলে মূল অবকল সমীকরণ 3.3 এর সমাধান নয়।

সাধারণ সমাধানটি পাওয়ার জন্য আমরা 3.10 সমাধানটিকে এভাবে লিখতে পারি :

$$x(t) = \exp(-bt)\,[a_1 \exp(\beta t) + a_2 \exp(-\beta t)]$$

$$= \exp(-bt)\left[a_1\left(1+\beta t+\frac{1}{2}\beta^2 t^2+....\right)+a_2\left(1-\beta t+\frac{1}{2}\beta^2 t^2+...\right)\right]$$

$$= \exp(-bt)\left[(a_1+a_2)+(a_1-a_2)\beta t+\frac{1}{2}(a_1+a_2)\beta^2 t^2+...\right]$$

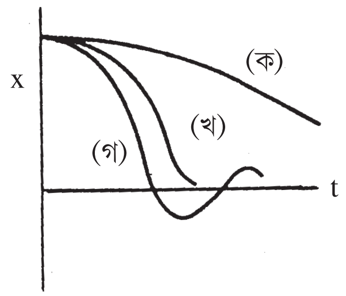
যখন $b \to \omega_0$, তখন $\sqrt{b^2-\omega_0^2}$ বা $\beta \to 0$।

এখন $\beta \to 0$ সীমায় আমরা β^2 এবং β এর তদূর্ধ্ব ঘাতগুলিকে উপেক্ষা করতে পারি। যদি $(a_1 + a_2) = p$ এবং $(a_1 - a_2)\beta = q$ লেখা হয় তবে সমাধানটি হবে :

$$x(t) = (p+qt)\exp(-bt) \qquad ...3.13$$

এখানে p এবং q দুটি স্বেচ্ছ অচর যাদের মান প্রাথমিক শর্তের ওপর নির্ভরশীল। অবকলনের সাহায্যে আপনি দেখে নিতে পারেন যে, 3.13 সমাধানটি প্রকৃতই 3.3 অবকল সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

3.4 চিত্রটিতে একই কম্পনক্ষম ব্যবস্থায় অতি, ক্রান্তীয় ও লঘু এই তিন শ্রেণীর অবমন্দনের জন্য সময়-দূরত্ব লেখচিত্র দেখানো হয়েছে। লেখচিত্রে (ক) অতি অবমন্দন, (খ) ক্রান্তীয় অবমন্দন এবং (গ) লঘু অবমন্দন সূচিত করছে। এই লঘু অবমন্দন ও তার বৈশিষ্ট্যের বিষয় এবার আমরা বিস্তারিত আলোচনা করব।



চিত্র 3.4 সাম্যাবস্থা থেকে একটি কম্পনক্ষম ব্যবস্থাকে বিচ্যুত করে ছেড়ে দিলে বিভিন্ন মাত্রার অবমন্দনের ক্ষেত্রে তার সময় দূরত্ব লেখচিত্র কেমন হবে, তা এখানে দেখানো হয়েছে। তিনটি ক্ষেত্রে যথাক্রমে অতি অবমন্দন (ক), ক্রান্তীয় অবমন্দন (খ) এবং লঘু অবমন্দন (গ) সূচিত হয়েছে।

3.3.3 লঘু অবমন্দন

গাণিতিক দৃষ্টিকোণ থেকে লঘু অবমন্দনের ক্ষেত্রে $b^2 < \omega_0^2$ হয়। এর ফলে 3.7(a) ও (b) সমীকরণে a_1 এবং a_2 এর মান দুটি জটিল রাশি হয়ে পড়ে।

এখন আমরা লিখতে পারি,

$$\left[b^2-\omega_0^2\right]^{\frac{1}{2}} = \qquad = j\omega'$$

যেখানে $j = \sqrt{-1}$ এবং $\omega' =$

লক্ষ্য করবেন যে, ω' একটি বাস্তব সংখ্যা এবং যখন এই লঘু অবমন্দনের মাত্রা অত্যন্ত কম হয়ে যায় অর্থাৎ যখন $b \rightarrow 0$ হয় তখন $\omega'=\omega_0$ অর্থাৎ ω' কম্পনক্ষম ব্যবস্থার স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সমান হয়ে যায়। 3.9 সমীকরণে ω' ব্যবহার করে আমরা যে সময়-দূরত্ব সমীকরণ পাই, তা এইরকম :

$$x(t) = \exp(-bt)\,[a_1 \exp(j\omega' t) + a_2 \exp(-j\omega' t)] \qquad ...3.14$$

$\exp(\pm j\omega' t) = \cos \omega t \pm j \sin \omega' t$ সূত্র ব্যবহার করে সমীকরণ 3.14 কে লেখা যায় :

$$x(t) = \exp(-bt)\,[(a_1 + a_2)\cos \omega' t + j\,(a_1 - a_2)\sin \omega' t] \qquad ...3.15$$

এখানে a_1 এবং a_2 সাধারণভাবে দুটি জটিল রাশি মনে করা যায় এবং সমীকরণ 3.15-এর বাস্তব বা কাল্পনিক যে কোন অংশই মূল সমাধান সূচিত করতে পারে। এই দুটি অংশের যে কোনটিকেই লেখা যায়,

বা $x(t) = \exp(-bt)\,[A' \cos \omega' t + B' \sin \omega' t]$ ...3.16

যেখানে $A' = a_1 + a_2$, $B' = a_1 - a_2$

এখানে A' এবং B' উভয়েই বাস্তব রাশি এবং প্রাথমিক শর্তের সাহায্যে নির্ণয়যোগ্য। আমরা অবশ্য এখন এই রাশিগুলি নির্ণয়ের চেষ্টা করব না। আমরা 3.16 সমীকরণকে মুক্ত কম্পনের সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করার উপযোগী চেহারা দেওয়ার চেষ্টা করব। যদি আমরা ধরি যে,

$$A' = A_0 \cos \phi,\; B' = -A_0 \sin \phi$$

যেখানে $A_0 =$ এবং $\tan \phi =$

এগুলি 3.16 সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$x(t) = A_0 \exp(-bt)\,[\cos \phi \;\cos \omega' t - \sin \phi \;\sin \omega' t]$$

$$= A_0 \exp(-bt) \cos(\omega' t + \phi) \qquad ...3.17(a)$$

3.17 সমীকরণটি লঘু অবমন্দনের ($b^2 < \omega_0^2$) ক্ষেত্রে 3.3 অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান। এখানে 3,16 সমীকরণের A' এবং B' এর পরিবর্তে A_0 এবং ϕ এই দুইটি স্বেচ্ছ অচর পাওয়া গেছে।

আপনারা এখন সহজেই 3.17 সমীকরণের সঙ্গে প্রথম এককে সরল দোলগতির যে সময় দূরত্ব সমীকরণ পেয়েছিলেন তার সঙ্গে তুলনা করতে পারবেন। এই তুলনা করতে গেলে যে বিষয়গুলি আপনার দৃষ্টি আকর্ষণ করার সেগুলি হল,

(i) এই অবমন্দিত কম্পনের কৌণিক কম্পাঙ্ক ω_0 নয়, এই কম্পাঙ্ক অর্থাৎ অবমন্দনের জন্য কম্পাঙ্কের হ্রাস ঘটেছে। অবমন্দন যত লঘু হবে এই পরিবর্তন হবে ততই সামান্য।

(ii) 3.17 সমীকরণে দেখা যাচ্ছে যে, অবমন্দিত দোলনের বিস্তার হিসেবে আমরা পাই

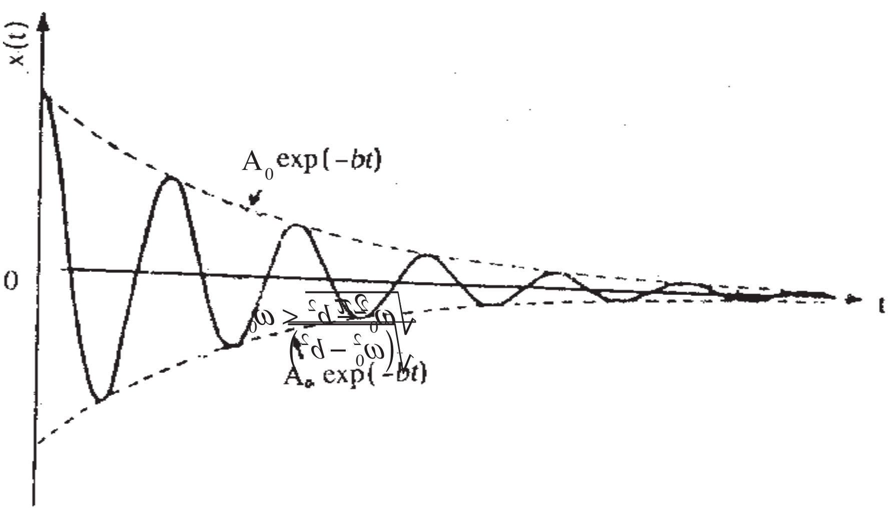
$$A(t) = A_0 e^{-bt} \qquad ...3.17(b)$$

এর অর্থ, এক্ষেত্রে বিস্তার সময়ের সঙ্গে ক্রমহ্রাসমান। দোলনের প্রাথমিক বিস্তারের সময়ের সঙ্গে e^{-bt} হারে হ্রাসপ্রাপ্তি অবমন্দিত দোলনের সবচেয়ে বড় বৈশিষ্ট্য। বস্তুত, এই বিস্তার ক্রমশ কমে যাওয়ার ফলে দোলনশীল ব্যবস্থাটির শক্তিও ক্রমশ হ্রাস পায়। অবমন্দনকারী বলের বিরুদ্ধে কার্য করাই এই হ্রাসের কারণ।

তাহলে বলা যায় যে, লঘু অবমন্দনের ফলে পরিবর্তিত কম্পাঙ্কে ক্রমহ্রাসমান বিস্তারে দোলন সম্পাদিত হয়। 3.17a সমীকরণে সময়ের গণনা যদি এমনভাবে করা হয় যাতে প্রারম্ভিক দশাকোণ $\phi = 0$ হয় তবে এই সমীকরণের রূপ হবে,

$$x(t) = A_0 \exp(-bt) \cos \omega' t$$

3.5 চিত্রে এই সমীকরণের লেখচিত্রটি দেখতে পাবেন। লেখচিত্রটির মধ্যে ড্যাশ দেওয়া রেখা দ্বারা সময়ের সঙ্গে বিস্তারের সূচক (exponential) হারে পরিবর্তন দেখানো হয়েছে। মূল লেখচিত্রটি ক্রমহ্রাসমান বিস্তারের দোলনগতি সূচিত করছে।



চিত্র 3.5 লঘু অবমন্দনের ক্ষেত্রে সময় দূরত্ব লেখচিত্র।
অসন্তত (broken) রেখা সময়ের সঙ্গে
বিস্তারের পরিবর্তন দেখাচ্ছে।

অবমন্দিত দোলনের দোলনকাল T' হলে লেখা যায় যে,

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \qquad = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}} \qquad ...3.18$$

3.18-এ দেখা যাচ্ছে যে, অবমন্দিত দোলনের দোলনকাল অবমন্দিত দোলনকালের থেকে বেশি কারণ $b > 0$ এবং । আবার লক্ষ্য করুন যে $b = 0$ হলে উভয় ক্ষেত্রে T এর মান অনবমন্দিত

দোলনকালের সমান হয়। কারণ $b = 0$-র অর্থ দোলন অবমন্দনহীন। অতএব তা সঙ্গত কারণেই অনবমন্দিত (undamped) দোলনকালের সমান। আবার অবমন্দনের জন্য দোলনকাল দীর্ঘয়িত হওয়ার বিষয়টিও প্রত্যাশিত, কেন না বাধার বিরুদ্ধে একই পথ অতিক্রম করতে গিয়ে সময় বেশি লাগছে।

আমরা এখন পর্যন্ত যা আলোচনা করেছি তা আরও ভাল করে বোঝবার জন্য একটি গাণিতিক প্রশ্ন উত্থাপন করা যাক। আপনারা এই অনুশীলনীটি করার চেষ্টা করুন। প্রয়োজনে আগের কয়েকটি পৃষ্ঠার বিষয়বস্তু আরও একবার দেখে নিন।

অনুশীলনী -1 :

লঘু অবমন্দিত একটি স্প্রিং-ভর ব্যবস্থার বিস্তার $.08m$ থেকে $.02m$ নেমে আসতে 160s সময় নেয়। এই সময়ের মধ্যে যদি ব্যবস্থাটি 80টি কম্পন সম্পন্ন করে থাকে তাহলে এই দোলনের দোলনকাল কত? এই দোলনকাল অনবমন্দিত দোলনকালের থেকে কতটা ভিন্ন? আমরা কি এই পার্থক্যকে উপেক্ষা করতে পারি?

3.4 লঘু অবমন্দিত দোলকের মোট শক্তি

লঘু অবমন্দনের জন্য যখন কম্পনশীল ব্যবস্থার বিস্তার ক্রমাগত হ্রাস পায়, তখন ব্যবস্থাটির শক্তিরও ক্ষয় হতে থাকে। অবশ্য এই শক্তি কত দ্রুত ক্ষয়িত হবে তা নির্ভর করে ব্যবস্থাটিতে উপস্থিত অবমন্দনের উপর। এই পর্যায়ের প্রথম এককে আপনারা দেখেছেন যে কোন মুক্ত বা অনবমন্দিত দোলগতির ক্ষেত্রে মোট শক্তি E কে লেখা যায়,

$$E = \qquad \text{...3.19}$$

এখানে $\omega_0^2 =$ বা $k = m\omega_0^2$

এবং k কে কম্পনশীলব্যবস্থাটির স্প্রিং-গুণাঙ্ক (Spring factor) বলা হয়। এক্ষেত্রে কোন অবমন্দন উপস্থিত না থাকায় A সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয় না, অর্থাৎ A একটি ধ্রুবক।

কিন্তু অবমন্দিত দোলনের ক্ষেত্রে A ধ্রুবক নয় এবং আমরা জানি যে, কোন সময়ের বিস্তার A দোলনের প্রারম্ভিক বিস্তার A_0-র থেকে সূচক হারে হ্রাস পায় অর্থাৎ

$$A = A_0 e^{-bt}$$

যেহেতু দোলনের মোট শক্তি E বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক, তাই লেখা যায় যে,

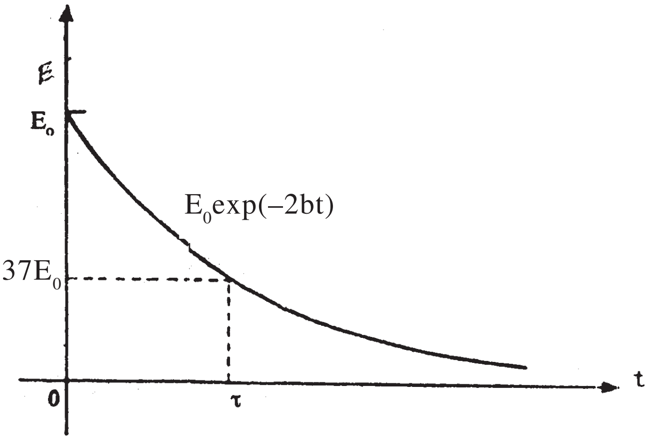
$$E \propto A^2$$

বা $E \propto [A_0 e^{-bt}]^2$

বা $E = C\, A_0^2 e^{-2bt} = E_0 e^{-2bt}$ ...3.20

এখানে C একটি ধ্রুবক রাশি (ভেদীয় ধ্রুবক) এবং $CA^2 = E_0$ যেখানে E_0 প্রারম্ভিক শক্তি সূচিত করছে।

3.20 সমীকরণে দেখা যাচ্ছে যে, মোট শক্তি E লঘু অবমন্দিত দোলনের ক্ষেত্রে সময়ের সঙ্গে সূচক হারে হ্রাস পায়। তবে এই হ্রাস বিস্তারের হ্রাসের তুলনায় দ্রুততর কারণ বিস্তারের হ্রাসের হার e^{-bt} কিন্তু মোট শক্তির হ্রাসের হার e^{-2bt}।



চিত্র 3.6 লঘু অবমন্দন - সহ কম্পনে সময়ের সঙ্গে শক্তির হ্রাস।

3.6 নং চিত্রে সময়ের সঙ্গে মোট শক্তি E এর পরিবর্তনের লেখচিত্র দেখানো হয়েছে। লক্ষ্য করুন যে, এই লেখচিত্রটি সময়ের সঙ্গে বিস্তারের পরিবর্তনের লেখচিত্রের (চিত্র 3.5 এর ড্যাশ দেওয়া রেখা) তুলনায় বেশি নতিবিশিষ্ট। যার অর্থ, শক্তির হ্রাস ঘটছে দ্রুততর হারে।

প্রথম এককের 1.9 সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করলে দেখা যাবে যে, মোট শক্তি E =

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 A_0^{\,2} e^{-2bt}$$

সুতরাং, 3.20 সমীকরণের C ধ্রুবকটি আসলে $\frac{1}{2} m\omega^2$ । এবার আপনি আর একটি অনুশীলনীর উত্তর দিয়ে নিতে পারেন।

অনুশীলনী -2 :

একটি স্প্রিং-ভর ব্যবস্থায় স্প্রিং-ধ্রুবক $2Nm^{-1}$ যুক্ত ভরটি $2kg$ এবং ক্রিয়াশীল অবমন্দন বল 0.4 Nsm^{-1}

(i) ভরটির গতি কি কম্পনযুক্ত (oscillatory)?

(ii) একক গতিবেগে কত অবমন্দন বলের জন্য গতিটি ক্রান্তীয়ভাবে অবমন্দিত হবে?

(iii) স্প্রিং ধ্রুবক ও অবমন্দন বল প্রদত্ত মানে থাকলে কোন ভরের জন্য ক্রান্তীয় অবমন্দন পাওয়া যাবে?

(iv) প্রাথমিক শক্তি ক্ষয়িত হয়ে এক তৃতীয়াংশ মানে পৌঁছতে কত সময় লাগবে?

3.5 অবমন্দিত দোলনের কয়েকটি বৈশিষ্ট্য

আপনি এখন জানেন যে, কেবলমাত্র লঘু অবমন্দনের ক্ষেত্রেই কম্পন পাওয়া সম্ভব এবং অবমন্দনের ফলে কম্পনের বিস্তার সময়ের সঙ্গে ক্রমশ হ্রাস পায়। বাস্তব জগতের কম্পনশীল ব্যবস্থায় কেবলমাত্র লঘু অবমন্দন

উপস্থিত থাকলেও, সেই অবমন্দনের কেবলমাত্র গুণগত পরিচয় নয়, তার পরিমাণগত পরিচয়ও অত্যন্ত প্রয়োজনীয়। তাই অবমন্দনকে প্রাথমিকভাবে লঘু হিসাবে চিহ্নিত করার পরে, তার আরও পরিচয় দেওয়ার জন্য আমরা লঘু অবমন্দনের কতগুলি বৈশিষ্ট্যের দিকে নজর দিই।

সাধারণত লঘু অবমন্দনের বৈশিষ্ট্য চিহ্নিত করার জন্য অবমন্দনের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট তিনটি বিষয়ের গণনা করা হয়ে থাকে। এগুলির মান আমাদের লঘু অবমন্দনের পরিমাণ সম্পর্কে ধারণা দেয় এবং দুটি ভিন্ন ক্ষেত্রে উপস্থিত লঘু অবমন্দনের পরিমাণগত তুলনা করার সুযোগ দেয়। যে তিনটি রাশি এজন্য বিশেষভাবে গণনা করা হয় সেগুলি হল,

(ক) লগীয় হ্রাস (Log decrement) (λ)

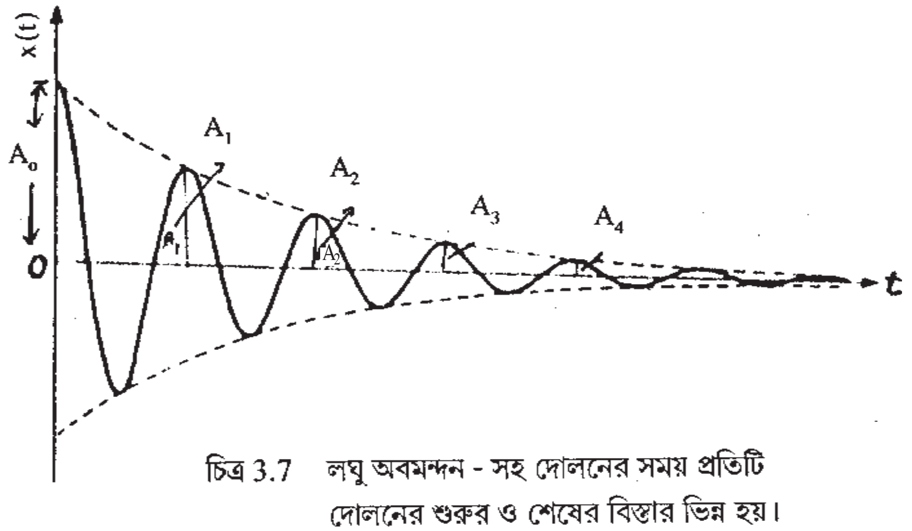
(খ) শ্লথন কাল (Relaxation time) (τ)

(গ) Q (কিউ) গুণাঙ্ক (Q - factor) (Q)

এই রাশিগুলির একটির বা একাধিকের গণনার মাধ্যমে আমরা অবমন্দনের বৈশিষ্ট্য বুঝতে পারি। কখন, কোন রাশিটি গণনা করা সুবিধাজনক, তা কম্পনক্ষম ব্যবস্থাটির ওপর নির্ভর করে। এখন এই তিনটি রাশির গণনার প্রক্রিয়া নিয়ে আলোচনা করব।

3.5.1 লগীয় হ্রাস

লঘু অবমন্দনের মাত্রা পরিমাপের সবচেয়ে সুবিধাজনক উপায় হচ্ছে, কোনও বাস্তব কম্পনের বিস্তার সময়ের সঙ্গে কী হারে হ্রাস পায়, তা নির্ণয় করা। লগীয় হ্রাসের গণনার মাধ্যমে এটা করা সম্ভব। লগীয় হ্রাস (λ) বলতে একটি পূর্ণ দোলনের প্রারম্ভিক ও অন্তিম বিস্তারের অর্থাৎ, যথাক্রমে দোলনটি শুরু ও শেষ হওয়ার পর বিস্তারের অনুপাতের প্রাকৃত লগারিদম্‌কে (natural logarithm) বোঝায়। একটি পূর্ণ দোলনের ঠিক শুরুর ও শেষের বিস্তার অবমন্দনের জন্যই ভিন্ন হয়, তাই এই অনুপাতের লগারিদম্ অর্থাৎ, লগীয় হ্রাস থেকে অবমন্দন সম্পর্কে একটি চমৎকার পরিমাণগত ধারণা পাওয়া যায়।



চিত্র 3.7 লঘু অবমন্দন - সহ দোলনের সময় প্রতিটি দোলনের শুরুর ও শেষের বিস্তার ভিন্ন হয়।

3.7 চিত্রে আবার লঘু অবমন্দনযুক্ত কম্পনের সময় দূরত্ব লেখচিত্রটি দেখানো হয়েছে। লক্ষ্য করুন যে, পরপর তিনটি দোলনের ক্ষেত্রে একই দিকে বিস্তার যথাক্রমে A_0, A_1 এবং A_2। যে দোলনের প্রারম্ভিক বিস্তার ছিল A_0, একটি দোলন পূর্ণ হওয়ার সঙ্গে তা কমে হয়েছে A_1 এবং A_1 বিস্তার নিয়ে যে দোলন শুরু হয়েছে একটি পূর্ণ দোলনের শেষে তা হয়ে গেছে A_2। এখন আমরা জানি যে, লঘু অবমন্দনের ক্ষেত্রে

$A(t) = A_0 e^{-bt}$ (সমীকরণ 3.17 (a))

এক্ষেত্রে A_0 থেকে বিস্তার A_1 এ আসতে একটি পূর্ণ দোলনের সময় নিচ্ছে। তাই এক্ষেত্রে সময় t ঐ কম্পনের দোলনকালের (T) সমান। অতএব 3.17(a) সমীকরণ ব্যবহার করে লেখা যায় যে,

বা $\dfrac{A_0}{A_1} = \exp(bT)$

এখন আমরা সমীকরণ 3.3 থেকে জানি যে,

$$2b = \frac{\gamma}{m} \;\therefore\; b =$$

সুতরাং লেখা যায় যে,

$$= \exp \qquad \text{...3.21}$$

এই অনুপাতকে হ্রাস (decrement) d বলা হয় এবং এই অনুপাতের প্রাকৃত লগারিদম্‌কে আমরা লগীয় হ্রাস (logarithmic decrement) বলি।

সুতরাং, লগীয় হ্রাস λ কে লেখা যায়।

$$\lambda = \qquad = bt = \qquad \text{...3.22}$$

যেহেতু $A_0 > A$, লগীয় হ্রাস λ একটি ধনাত্মক রাশি। এখন আমরা বলতে পারি যে, λ রাশিটি অবমন্দন b এবং ব্যবস্থাটির দোলনকাল T এর ওপর নির্ভরশীল।

আপনি কি লক্ষ্য করেছেন যে, হ্রাস বা একই দিকে নেওয়া একটি পূর্ণ দোলনকালের ব্যবধানে দুটি বিস্তারের অনুপাত সর্বদাই সমান? আমরা এখানে হ্রাস হিসেবে অনুপাতকে চিহ্নিত করলেও বা একইভাবে

, প্রভৃতি অনুপাত ও হ্রাসের (d) সমান এবং প্রতিক্ষেত্রেই $\log_e d$ এর মান লগীয় হ্রাস সূচিত করে। যেমন,

$$= \quad = \exp(bt) = d$$

$$\therefore \quad \lambda = \ln\frac{A_1}{A_2} = \ln\, d = \text{bt} \qquad ...3.23$$

(লগীয় হ্রাসের আরেকটি বিকল্প ও ব্যবহারিক দিক থেকে সুবিধাজনক সংজ্ঞা রয়েছে। এই এককের অন্তর্ভুক্ত সর্বশেষ প্রশ্নাবলীর 4 নং প্রশ্নটির উত্তর করার চেষ্টা করুন, সেখানে বিষয়টি আলোচিত হয়েছে।)

3.5.2 শ্লথন কাল

লঘু অবমন্দন সংবলিত দোলনে সময়ের সঙ্গে যে বিস্তারের সূচক হ্রাস হয়, তা আমরা আগেই দেখেছি। একথাও আমাদের জানা আছে যে, কোনও সূচক হ্রাসের ক্ষেত্রে ক্রমহ্রাসমান রাশিটি কোনও পরিমাপযোগ্য সসীম সময়ে শূন্য মানে পৌঁছয় না। অবমন্দনের পরিমাপ করার জন্য তাই দোলনের বিস্তার কোনও নির্দিষ্ট অনুপাতে হ্রাস পেতে কতটা সময় লাগে সেটি নির্ণয় করা হয়।

সাধারণত কোনও ভৌত রাশি যখন সূচক হারে হ্রাস পায়, তখন ভৌত রাশিটি তার প্রাথমিক বা সর্বোচ্চ মানের e^{-1} অংশে অর্থাৎ, 36.8 শতাংশে পৌঁছতে যে সময় নেয়, তার হিসাব করা হয়। এই সময়টিকে বলা হয় অবমন্দিত দোলনের *শ্লথনকাল* (relaxation time)। 3.6 চিত্রে এই শ্লথনকালটি দেখানো হয়েছে। একে লেখা হয় τ (টাউ) হিসেবে।

যে অবমন্দনের ক্ষেত্রে শ্লথনকাল তুলনায় দীর্ঘতর অর্থাৎ, যেক্ষেত্রে প্রাথমিক বা সর্বোচ্চ বিস্তার তার 36.8 শতাংশে পরিণত হতে অপেক্ষাকৃত বেশি সময় নেয়, বোঝা যায় যে সেখানে অবমন্দনের মাত্রা কম। শ্লথনকাল যত ছোট হয়, অবমন্দনের মাত্রাও হয় তত বেশি। তাই শ্লথনকাল নির্ণয়ের মধ্যে দিয়ে অবমন্দনের পরিমাপ করা যায়। অবশ্য এটি মনে রাখতে হবে যে, শ্লথনকালের ধারণা কেবলমাত্র লঘু অবমন্দনের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।

শ্লথনকাল গণনার জন্য এবার 3.17(a) সমীকরণে ফিরে যাওয়া যাক। ঐ সমীকরণ অনুযায়ী t সময়ে লঘু অবমন্দিত দোলনের বিস্তার $A(t) = A_0 e^{-bt}$

এখান থেকে দেখা যাচ্ছে, যদি $t = \tau$ (শ্লথন কাল) হয় তবে $A(\tau) = A_0 e^{-b\tau} = A_0 e^{-1}$

$$\therefore \ b\tau = 1$$

অর্থাৎ, $\tau = \quad =$ ...3.24

এখানে দেখা যাচ্ছে যে, τ হচ্ছে b এর বিপরীত রাশি। অতএব b এর মান যত বড় হবে, τ এর মান তত ছোট হবে। আবার b এর মান বড় হওয়ার অর্থ অবমন্দনের মাত্রা বৃদ্ধি। তাই ছোট শ্লথন কাল অধিকতর অবমন্দন সূচিত করে এবং তা আগেও উল্লেখ করা হয়েছে। লক্ষ্য করবেন যে, শ্লথন কাল (τ) কেবলমাত্র b এর ওপর নির্ভরশীল। কিন্তু লগীয় হ্রাস (τ)b এবং দোলনকাল T এর ওপর নির্ভর করে। তাই অবমন্দনের মাত্রা বোঝানোর জন্য τ বা λ র কোনটি ব্যবহার করা হবে তা ক্ষেত্রবিশেষ এবং আমাদের প্রাপ্তব্য তথ্যের দিকে লক্ষ্য রেখে নির্ধারিত করতে হবে।

3.5.3 কিউ (Q) - গুণাঙ্ক

কিউ (Q)- গুণাঙ্ক (Q - factor বা quality factor) নামে পরিচিত একটি বিশেষ রাশি গণনার মাধ্যমেও অবমন্দনের পরিমাণ নির্দেশ করা যায়।

ধরা যাক, কোনও একটি কম্পনশীল ব্যবস্থায় E_0 হচ্ছে অনবমন্দিত অবস্থার মোট শক্তি। এখন এই ব্যবস্থাটিতে অবমন্দন উপস্থিত থাকলে এই শক্তি ক্রমাগত হ্রাসপ্রাপ্ত হয়। এই শক্তি, আমরা জানি যে, সূচক হারে কমতে থাকে এবং কিছু সময় পরে তা E_0-এর মানের e^{-1} অংশ বা প্রায় 37 শতাংশে পরিণত হয়। এই সময়ের মধ্যে ব্যবস্থাটি কয়েকটি দোলন সম্পন্ন করবে। একটি দোলন সম্পন্ন করার অর্থ দশাকোণের 2π রেডিয়ান অতিক্রম করা। এভাবে E_0 তার 37 শতাংশে নেমে আসার সময়টুকুর মধ্যে (যা প্রকৃতপক্ষে ব্যবস্থাটির শ্লথন কাল, τ এর অর্ধেকের সমান) বস্তুটির কম্পনের দশাকোণ যত রেডিয়ান অতিক্রম করেছে, তা ঐ ব্যবস্থাটির কিউ -গুণাঙ্কের পরিমাপক।

3.20 সমীকরণ থেকে বোঝা যায় যে, E_0 তার 37 শতাংশ বা $E_0 e^{-1}$ মানে পৌঁছতে t সময় নিলে,

$$t = \quad = \qquad \ldots 3.25$$

যেহেতু অবমন্দিত দোলনের কৌণিক কম্পাঙ্ক ω', t সময়ে কম্পনশীল ব্যবস্থাটি যত রেডিয়ান অতিক্রম করেছে তার পরিমাণ দাঁড়ায় $\omega' \times t$

যেহেতু এই সংখ্যাটিই কিউ-গুণাঙ্ক হিসাবে সংজ্ঞায়িত হয়েছে, তাই বলা যায় যে,

কিউ - গুণাঙ্ক $Q = \omega' t = \quad = \quad = \qquad \ldots 3.26$

3.26 সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে যে, কিউ - গুণাঙ্ককে শ্লথন কালের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় অর্থাৎ, দুটি রাশি সম্পর্কযুক্ত। আরও লক্ষ্য করার বিষয় এই যে, কিউ- গুণাঙ্কে Q একটি এককহীন বিশুদ্ধ সংখ্যা।

আপনি যদি 3.3 সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা বিষয়ক আলোচনায় একটু ফিরে যান, তাহলে দেখতে পাবেন যে γ হচ্ছে অবমন্দন গুণাঙ্ক। γ -এর বৃহত্তর মান অধিকতর অবমন্দন সূচিত করে। আবার অত্যন্ত লঘু অবমন্দনের ক্ষেত্রে γ -এর মান খুবই কম হয় এবং সেক্ষেত্রে 3.2 সমীকরণের Q -এর মান খুবই বড় হয়। সুরশলাকার কম্পনের ক্ষেত্রে Q গুণাঙ্কের মান মোটামুটিভাবে কয়েক হাজারের মত এবং সেখানে অবমন্দন খুবই কম।

বস্তুত 3.26 সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে, অনবমন্দিত দোলকের ক্ষেত্রে, যেখানে অবমন্দন অনুপস্থিত থাকায় $\gamma = 0$, Q গুণাঙ্কের মান হবে অসীম। তবে প্রকৃতপক্ষে কোনও দোলকের ক্ষেত্রেই অবনমন্দন গুণাঙ্কের মান শূন্য হয় না। ফলে Q এর মানও সসীম থাকে।

অবমন্দনের মাত্রা খুবই কম হলে যখন ধরে নেওয়া যায় যে $\omega_0^2 >> b^2$, তখন অবমন্দনের ফলে পরিবর্তিত কৌণিক কম্পাঙ্ক ω' কে লেখা যায়

$$\omega' \approx \omega_0 =$$

এর ফলে Q - এর মান দাঁড়ায়

$$Q = \quad = \quad . \quad = \quad = \qquad ...3.27$$

অর্থাৎ, এক্ষেত্রে Q - এর মান স্প্রিং-ধ্রুবকের বর্গমূলের সঙ্গে সমানুপাতিক এবং γ এর ব্যস্তানুপাতিক হয়। প্রণোদিত দোলন (forced vibration) ও অনুনাদ (resonance) এর ক্ষেত্রে Q - গুণাঙ্কের বিশেষ তাৎপর্য ও গুরুত্ব আছে। এ বিষয়ে আপনি পরবর্তী চতুর্থ এককে জানতে পারবেন। Q - গুণাঙ্কের বিকল্প সংজ্ঞা সম্বন্ধে সেখানে আলোচনা হবে। এখানে বেশ কয়েকটি বিষয় আমরা আলোচনা করলাম। আসুন এবার বোধহয় দু'-একটি অনুশীলনীর মুখোমুখি হতে আপনার ভালোই লাগবে।

অনুশীলনী -3 :

একটি ভরহীন স্প্রিং-এর সঙ্গে যুক্ত 200g ভরের দোলনকাল 0.25। ভরটির দোলনের বিস্তার তার প্রাথমিক মানের এক-চতুর্থাংশে নেমে আসতে 100s সময় লেগে। ব্যবস্থাটির অবমন্দন গুণাঙ্ক γ, শ্লথন কাল, Q - গুণাঙ্ক এবং স্প্রিংটির স্প্রিং-ধ্রুবক নির্ণয় করুন। এক্ষেত্রে লগীয় হ্রাসের মান কত?

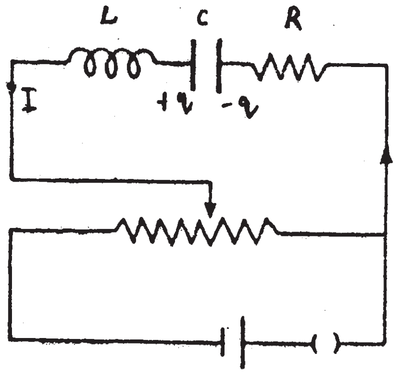
অনুশীলনী - 4 :

341 Hz কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট একটি সুরশলাকার Q - গুণাঙ্ক 1800। সুরশলাকাটির প্রারম্ভিক শক্তি হ্রাস পেয়ে 20 শতাংশ হতে কত সময় লাগবে?

3.6 অবমন্দিত দোলনের উদাহরণ : শ্রেণী সমবায়ে যুক্ত আবেশ, ধারক ও রোধসহ বর্তনী

আপনারা এই পর্যায়ের প্রথম এককে দেখেছেন যে, একটি রোধহীন বর্তনীতে যখন একটি আবেশ (L) এবং ধারক (C) শ্রেণী সমবায়ে যুক্ত থাকে এবং বর্তনীতে একটি ব্যাটারি যোগ করে ধারককে সম্পূর্ণ আহিত করে সরিয়ে নেওয়া হয়, তখন ধারকের ঐ আধান একটি সরল দোলগতি প্রদর্শন করে। কিন্তু ভেবে দেখুন, বাস্তব ক্ষেত্রে কি রোধহীন বর্তনী পাওয়া সম্ভব? আমরা যদি সেখানে সচেতনভাবে কোনও রোধ (R) যুক্ত নাও করি, তাহলেও আবেশটি যে পরিবাহী দ্বারা তৈরি, তার নিজস্ব রোধ এবং সংযোগ তারের (connecting wire) রোধ বর্তনীতে অন্তর্ভুক্ত হবে। তাই L - C - R বর্তনীই প্রকৃতপক্ষে একটি বাস্তব বর্তনী এবং আমরা এখানে তার আচরণ বিশ্লেষণ করে দেখব যে, সমপ্রবাহের উৎসযুক্ত হয়ে ধারককে সম্পূর্ণভাবে আহিত করার পরে উৎসটিকে সরিয়ে নিলে ঐ বর্তনীতে সময়ের সঙ্গে আধান কী রকম পরিবর্তন দেখায়। চিত্র 3.8 এ একটি L - C - R বর্তনী দেখানো হয়েছে। প্রথম এককের 1.4.6 অংশের সমীকরণ = 0 পরিবর্তিত হয়ে দাঁড়াবে

$$\frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} + RI = 0$$



চিত্র 3.8 শ্রেণী সমবায়ে যুক্ত আবেশক (L), ধারক (C) এবং রোধক (R) - সহ বর্তনী।

যেহেতু, $I = +\frac{dq}{dt}$, এই সমীকরণটি সাজিয়ে নিয়ে লেখা যায়,

$$= 0 \qquad ...3.28$$

উভয় পক্ষকে L দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$= 0 \qquad ...3.29$$

এই সমীকরণটি 3.3 সমীকরণের অনুরূপ। আমরা 3.3 সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই,

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ এবং b =

অর্থাৎ, বর্তনীর স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক নির্ধারণ করে L এবং C, এবং অবমন্দন নিয়ন্ত্রিত হয় R এবং L-এর দ্বারা। -র একক হবে s^{-2} এবং এর একক হবে s^{-1}, বা ω_0-র অনুরূপ।

একইভাবে 3.3 সমীকরণের লঘু অবমন্দনের ক্ষেত্রে সমাধানের সঙ্গে তুলনা করে বলা যায় যে, যখন এই বর্তনীতে $b << \omega_0$ অর্থাৎ $R <<$, তখন সময়ের সঙ্গে ধারকের আধানের পরিবর্তন নিম্নলিখিত সমীকরণ অনুযায়ী হবে,

$$q(t) = \qquad ...3.30$$

যেখানে কৌণিক কম্পাঙ্ক ω_1 হচ্ছে,

$$\omega_1 = \qquad = \qquad ...3.31$$

অতএব, এখানেও দেখা যাচ্ছে যে, q সময়ের সঙ্গে সূচক হারে হ্রাস পায়, আবার cos $(\omega_1 t+\phi)$ -এর জন্য আন্দোলিত হয়। L - C - R বর্তনীতে, R বৃদ্ধি করলে অবমন্দন বৃদ্ধি পায় এবং R এখানে অবমন্দন গুণাঙ্ক γ এর ভূমিকা পালন করে। L এর ভূমিকা 3.3 সমীকরণের ভরের সমতুল, কারণ 3.3 সমীকরণে $2b$ $= \frac{\gamma}{m}$ এবং 3.30 সমীকরণে $2b =$ ।

3.30 সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে যে, মোক্ষণের (discharge) সময় আধানের মানের বিস্তার সূচক হারে হ্রাস পাবে।

লক্ষ্য করুন, আধানের কম্পন সম্ভব হওয়ার জন্য $R <$ হওয়া প্রয়োজন। কিন্তু R যদি -এর তুলনায় উপেক্ষণীয় হয়ে যায়, তাহলে মোক্ষণের কম্পাঙ্ক ω_1 এবং ω_0 প্রায় সমান হয়ে যায়, অর্থাৎ তখন

$\omega_1^2 \cong \omega_0^2 =$

বস্তুত, আমরা এখানে বর্তনীর Q - গুণাঙ্ক হিসাবে L ও C -র হিসাবে Q-গুণাঙ্কের একটি রাশিমালা পেতে পারি। আপনি এটি নিজে করে দেখতে পারেন।

L - C - R বর্তনীতে রোধ R -এর দিকে বিশেষ দৃষ্টি দেওয়ার প্রয়োজন রয়েছে। রোধই বর্তনীতে অবমন্দনের সঞ্চার করে। রোধের মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে অবমন্দন বৃদ্ধি পায়। রোধের মান অতিক্রম করলে বর্তনীটি অতি অবমন্দিত হয়, সেটিতে আর কম্পন ঘটে না। এবারের অনুশীলনীটি $L - C - R$ বর্তনী সংক্রান্ত।

অনুশীলনী - 5 :

একটি $L - C - R$ বর্তনীতে $L = 5mH$ এবং $C = 1\mu F$। যদি দুটি ক্ষেত্রে R যথাক্রমে 2Ω এবং 100Ω, হয় তবে আধানের কম্পন গতির কৌণিক কম্পাঙ্ক ও গুণাঙ্ক উভয় ক্ষেত্রে কত হবে?

3.7 সারাংশ

এই এককে যে বিষয়গুলি সম্বন্ধে আলোচনা করা হল। সেগুলি হল—

1. বাস্তব জগতের দোলনে অবমন্দন উপস্থিত থাকে এবং অবমন্দনের ফলে দোলনের বিস্তার ও শক্তি সময়ের সঙ্গে হ্রাস পায়।

2. অবমন্দিত দোলগতির অবকল সমীকরণ হিসাবে

$= 0$ সমীকরণটি পাওয়া যায়।

এখানে $2b = \dfrac{\gamma}{m}$, । γ = একক বেগ পিছু অবমন্দনকারী বলের পরিমাণ, k = একক সরণ পিছু প্রত্যানয়ক বলের পরিমাণ।

3. বিভিন্ন মাত্রার অবমন্দনের ক্ষেত্রে অবকল সমীকরণের সমাধানের রূপটি ভিন্ন হয়। কেবলমাত্র লঘু অবমন্দনের ক্ষেত্রে দোলগতি লক্ষ্য করা যায় এবং পদার্থবিদ্যার দৃষ্টিকোণ থেকে এই শ্রেণীর অবমন্দন সর্বাপেক্ষা গুরুত্বপূর্ণ। লঘু অবমন্দনের ক্ষেত্রে সমাধানটি লেখা যায়,

$$x(t) = A_0 e^{-bt} \cos(\omega' t + Q)$$

যেখানে, $\omega' =$

অতি বা ক্রান্তীয় অবমন্দনের ক্ষেত্রে দোলগতি সম্ভবপর হয় না।

4. অবমন্দিত দোলগতির ক্ষেত্রে বিস্তার ও শক্তি সময়ের সঙ্গে সূচক হারে পরিবর্তিত হয়। যেমন

$$A = A_0 e^{-bt}$$

এবং $E = E_0 e^{-2bt}$

এখানে, E মোট শক্তি এবং A_0 ও E_0 যথাক্রমে দোলনের প্রারম্ভিক বিস্তার ও মোট শক্তি।

5. লঘু অবমন্দনের ফলে দোলনকালও পরিবর্তিত হয়। যদিও $b << \omega_0$ হলে এই পরিবর্তন অতি সামান্য হয় এবং প্রায়শই তা অগ্রাহ্য করা হয়। লঘু অবমন্দনের ফলে যে দোলনকাল পাওয়া যায় তা হল,

$$T = \qquad =$$

6. লঘু অবমন্দনের মাত্রা পরিমাণগতভাবে নির্দেশ করার উদ্দেশ্যে কয়েকটি রাশি ব্যবহার করা হয়। এগুলি হল, লগীয় হ্রাস (λ), শ্লথন কাল (τ) এবং কিউ (Q) -গুণাঙ্ক। এই রাশিগুলি b, t, ω প্রভৃতির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

7. আবেশ (L), ধারক (c) এবং রোধ (R) শ্রেণী সমবায়ে যুক্ত এমন বর্তনীতে ব্যাটারি বা কোনও সম বিভব উৎস যুক্ত করে ধারকটিকে পূর্ণ আহিত করার পর ব্যাটারি বা উৎসটিকে বিচ্ছিন্ন করলে ধারকের আধান সময়ের সঙ্গে হ্রাস পায় এবং অবমন্দিত দোলগতি প্রদর্শন করে। এই অবমন্দন বর্তনীর রোধের ওপর নির্ভরশীল।

3.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. ভরহীন এবং $8Nm^{-1}$ স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট একটি স্প্রিংকে একটি দৃঢ় বিন্দু থেকে ঝুলিয়ে তার নিচে 0.2 kg ভর যুক্ত করা হল। দেখা গেল যে, স্প্রিং-এর সঙ্গে যুক্ত ভরটি অবমন্দিত দোলনে আন্দোলিত হচ্ছে

এবং তার শক্তি প্রাথমিক শক্তির 37 শতাংশ নেমে আসতে 40s সময় নিচ্ছে। অবমন্দন গুণাঙ্ক, লগীয় হ্রাস এবং শ্লথন কাল এক্ষেত্রে কত? ব্যবস্থাটির Q-গুণাঙ্ক গণনা করুন।

2. একটি সরল দোলকের বিস্তার 4^o থেকে 3^o তে হ্রাস পাওয়ার সময় 30টি পূর্ণ দোলন সম্পন্ন হয়। দোলকের দোলনকাল 2.2s হলে শ্লথন কাল ও লগীয় হ্রাস গণনা করুন।

3. $L– C – R$ শ্রেণী সমবায়ে যুক্ত একটি বর্তনীতে $L = 15mH$, $C = 3\mu F$ এবং $R = 10\Omega$। এই বর্তনীতে একটি ব্যাটারি যুক্ত করে ধারকটিকে পূর্ণ আহিত করার পর ব্যাটারিটিকে বিচ্ছিন্ন করা হল। এখন ধারকের আধানের হ্রাস কী কম্পন গতি প্রদর্শন করবে? আধানের বিস্তারের পরিমাণ কত সময়ে অর্ধেক হবে? R এর ন্যূনতম কোন মানের জন্য আধানের হ্রাস কম্পন গতিতে সম্ভবপর হবে না?

4. 3.5.1 অনুচ্ছেদে আপনি দেখেছেন যে, লগীয় হ্রাস λ নির্ণয়ের জন্য কীভাবে পর পর দুটি কম্পনের বিস্তার ও তাদের অনুপাতকে ব্যবহার করা হয়েছে। কিন্তু ব্যবহারিক ক্ষেত্রে যখন পরীক্ষামুলক ভাবে λ -র মান নির্ণয় করতে হয়, তখন আরও নির্ভরযোগ্য মান পাওয়ার জন্য সাধারণত এমন দুটি কম্পনের বিস্তারকে বিচার করা হয়, যাদের মধ্যে 'n' ($n > 1$) সংখ্যক পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন হয়েছে। যদি a_0 এবং a_n এক্ষেত্রের প্রথম ও (n+1) তম কম্পনের বিস্তার হয়, তাহলে দেখান যে, λ -র বিকল্প রাশিমালা হল λ =

উত্তরমালা

অনুশীলনী

1. যেহেতু $A = A_0 e^{-bt}$ এবং এখানে

$A_0 = .08m$, $A = .02m$, $t = 160s$, আমরা পাই,

$$= \quad = .25 = e^{-160b}$$

বা, $e^{160b} = 4$

$\therefore\ 160b = \ln 4 = 1.386$

এখান থেকে পাওয়া যায় $b = .00866 s^{-1}$

অবমন্দিত দোলনকাল $T = \quad = 2s \qquad \therefore\ \omega' = \quad = \pi s^{-1}$

কিন্তু $\omega' =$, অর্থাৎ $\omega_0 = \quad =$

$\therefore$ অবমন্দিত দোলনকাল = $\frac{2\pi}{\omega_0}$ = = 1.999992s বা 2s

সুতরাং, দুই দোলনকালের মধ্যে পার্থক্য উপেক্ষণীয়।

2. দেওয়া আছে, ভর $m = 2kg$ এবং স্প্রিং ধ্রুবক $k = 2Nm^{-1}$ এবং একক গতিবেগে অবমন্দন বল $\gamma = 0.4Nsm^{-1}$

$\therefore\ b = \frac{\gamma}{2m}$ = = $0.1s^{-1}$

অবমন্দিত কৌণিক কম্পাঙ্ক ω_0 = = $1s^{-1}$

(i) দেখা যাচ্ছে যে, $\omega_0^2 > b^2$, অতএব গতিটি কম্পন যুক্ত হবে। কারণ, $\omega_0^2 > b^2$ হওয়ার অর্থ এই যে, ব্যবস্থাটিতে অবমন্দন থাকলেও তা লঘু অবমন্দন।

(ii) ক্রান্তীয় অবমন্দনের জন্য $\omega_0 = b$ অর্থাৎ, $b = 1s^{-1}$

সুতরাং, $\gamma = 2bm = 2 \times 1 \times 2 = 4NSm^{-1}$ অর্থাৎ, একক গতিবেগে $4N$ বলের জন্য গতিটির ক্রান্তীয় অবমন্দন ঘটবে।

(iii) ভর m-এর পরিবর্তন করে $\omega_0 = b$ সম্পর্কটি পালন করা হলে ক্রান্তীয় অবমন্দন সৃষ্টি হবে। এক্ষেত্রে

$\omega_0^2 = b^2$ অথবা, = , বা, m = । γ ও k এর মান বসিয়ে,

m = = .02 kg।

(iv) আমরা জানি যে,

মোট শক্তি $E(t) = E_0 e^{-2bt}$

এক্ষেত্রে $b = 0.1s^{-1}$ এবং =

$\therefore$ = e^{-2bt} ln 3 = $2bt$, বা, t = = = 5.5s

3. দোলনকাল $T = 0.2s$, $\therefore$ কৌণিক কম্পাঙ্ক $\omega' =$ $= 10\pi$

বিস্তার হ্রাসের ক্ষেত্রে

$A(t) = A_0 e^{-bt}$ $\therefore$ $= A_0 e^{-b.100}$

$\therefore \ln 4 = b.100$ $\therefore b = .01386 s^{-1}$

যেহেতু $m = 200g = 0.2kg$, লেখা যায় যে, অবমন্দন গুণাঙ্ক

$\gamma = 2bm = 2.0.2 \times .01386 = .0055\ NSm^{-1}$

শ্লথন কাল $\tau =$ $=$ $= 72s$

Q গুণাঙ্ক $=$ $=$ $=$ প্রায় 1100

যেহেতু $b << \omega'$, $\omega_0 \approx \omega'$

এখন $K = m\omega_0^2 \approx m\omega'^2$

$= 0.2 \times (10\pi)^2$

$= 197 Nm^{-1}$

লগীয় হ্রাস $\lambda = bt = .01386 \times .2 \approx 2.8 \times 10^{-3}$। লক্ষ্য করুন, এই গাণিতিক প্রশ্নটির উত্তরের জন্য আমরা আমাদের সুবিধামত বিভিন্ন সম্পর্কগুলি ব্যবহার করেছি। কিন্তু বিকল্প সম্পর্ক ব্যবহার করেও উত্তরগুলি পাওয়া সম্ভব। যেমন, $\lambda =$, $Q =$ । এগুলি আপনি ব্যবহার করে দেখতে পারেন।

4. $Q = 1800$ এবং কম্পাঙ্ক $\upsilon =$ $= 341Hz$

Q এর উচ্চ মান অতি লঘু অবমন্দন সূচিত করছে

$\therefore Q =$ $\therefore \tau =$ $=$ $= 1.68s$

যেহেতু $\tau =$ $\therefore b =$ $= .595 s^{-1}$

$E = E_0 b^{-2bt}$

এক্ষেত্রে = 20% = 0.2 =

$\therefore \ln 5 = 2bt \quad \therefore t = \quad = 1.35s$

5. প্রথম ক্ষেত্রে $L = 5mH,\ C = 1\mu F,\ R = 2\Omega$

$\therefore$ কৌণিক কম্পাঙ্ক $\omega_1 = \quad = \sqrt{2\times10^8 - 4\times10^4} = 1.4 \times 10^4 s^{-1}$

লক্ষ্য করুন, যেহেতু $\frac{1}{LC} >>$, অতএব এখানে ধারকের কম্পিত মোক্ষণ (oscillatory discharge) ঘটবে এবং $\omega_1 \cong \omega_0 =$ হবে। দ্বিতীয় ক্ষেত্রে কৌণিক কম্পাঙ্ক

$\omega_2 = \quad = 1.0 \times 10^4 s^{-1}$। এই ক্ষেত্রে যেহেতু R = 100Ω অবমন্দনের মাত্রা এখানে অনেক বেশি এবং বর্তনীর স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক $\omega_0(=141.2 \times 10^2 s^{-1})$। এই কৌণিক কম্পাঙ্ক ω_2-এর থেকে অনেকখানি ভিন্ন।

প্রথম ক্ষেত্রে Q-গুণাঙ্ক $Q_1 = \frac{\omega_1}{2b} = \quad = \quad = 35$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $Q_2 = \frac{1.0\times10^4\times5\times10^{-3}}{100} = 0.5$

লক্ষ্য করুন, প্রথম ক্ষেত্রে অবমন্দন কম থাকায় Q এর মান বেশি।

3.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. $K = 8Nm^{-1}$। আমরা জানি $E = E_0 e^{-2bt}$। 37 শতাংশ পর্যন্ত হ্রাসের অর্থ প্রাথমিক শক্তি E_0 তার 0.37 অংশে নেমে আসতে $40s$ সময় নিচ্ছে

$\therefore e^{-2bt} = e^{-2b.40} = 0.37$

$\therefore 80b = -\ln 0.37 = 1.0$ অর্থাৎ, $b = \frac{1}{80}s^{-1}$

$\therefore$ অবমন্দন গুণাঙ্ক $\gamma = 2bm =$

$= .005\ NSm^{-1}$

অনবমন্দিত দোলনকাল $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.2}{8}} \approx 1s$

$\therefore\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi s^{-1}$

লগীয় হ্রাস $\lambda = bt = bT = \qquad = 0.0125$

শ্লথন কাল $\tau = \qquad = 80s$

Q গুণাঙ্ক $Q = \qquad = \qquad =$

$[\because m = 0.2kg]$

$= 2\pi \times 40 \approx 250$

লক্ষ্য করুন, অবমন্দন গুণাঙ্ক অত্যন্ত কম হওয়ায় এখানে $\omega' \cong \omega_0$

2. দোলনকাল $T = 2.2s \therefore 30T = 66s$

যেহেতু $A = A_0 e^{-bt}$

$\therefore\ \frac{3}{4} = e^{-66b} \qquad \therefore \ln \qquad = 66b$

অর্থাৎ, $b = \qquad = 4.4 \times 10^{-3} s^{-1}$

শ্লথনকাল $\tau = \qquad = 230\ s.$

লগীয় হ্রাস $\lambda = bt = .0096$

3. এখানে   =   = 141Ω, যেহেতু, R (1.0Ω) <   । ধারকের আধান কম্পনগতিতে হ্রাস পাবে।

আধানের বিস্তারের পরিমাণ q =   =

$$\therefore\ t = \frac{2L}{R}\ln 2 = \frac{2.15\times10^{-3}}{1.0}.0.693 = 0.0207s$$

আধানের মোক্ষণ (discharge) কম্পনগতিতে না হওয়ার জন্য প্রয়োজনীয় ন্যূনতম রোধ $2\sqrt{\frac{L}{C}}$ বা 141Ω।

4. আমরা হ্রাস বা d-র যে সংজ্ঞার সঙ্গে 3.5.1 অনুচ্ছেদে পরিচিত হয়েছি, তার ভিত্তিতে লেখা যায় যে,

$= d = e^{\lambda}$

এখানে $a_n - 1$ এবং a_n যথাক্রমে n তম এবং $(n + 1)$ তম বিস্তার।

$\therefore$ লগীয় হ্রাস $\lambda = \ln d =$

কিন্তু a_0 যদি প্রথম এবং a_n যদি $(n + 1)$ তম বিস্তার হয় তবে লেখা যায় যে,

=

$= d \times d \times d \ ......d \times d$

$= d^n$

কেননা, প্রতিটি বন্ধনীভুক্ত অনুপাত d-র সমান

অর্থাৎ,

সুতরাং , ln $= \ln d^n = n \ln d = n\lambda$

$\therefore\ \lambda$ =

একক 4 প্রণোদিত কম্পন ও অনুনাদ (Forced vibration and Resonance)

গঠন

4.1 প্রস্তাবনা

পূর্ববর্তী এককে (একক 3) আমরা দেখেছি, অবমন্দনের ফলে কীভাবে একটি দোলনের বিস্তার ও শক্তি ক্রমশ হ্রাস পেতে পেতে সম্পূর্ণ বিলীন হয়ে যায়। তাহলে কি বাস্তব জগতে কোনও দোলনই দীর্ঘস্থায়ী হওয়া সম্ভব নয়? অথচ কোনও কোনও ক্ষেত্রে, যেমন ঘড়ির পেন্ডুলামের দোলন বা বিদ্যুৎ চালিত সুরশলাকার কম্পনের সময় আমাদের মনে হয় ঐ দোলন বা কম্পন যেন আবহমান কাল ধরে চলতে পারে। বস্তুত এই ক্ষেত্রগুলিতেও কিছু অবমন্দন উপস্থিত থাকে। তা সত্ত্বেও এইসব দোলন বজায় রাখা সম্ভব হয় একটি বিশেষ কারণে। এইরকম প্রতিটি ক্ষেত্রে কম্পনশীল ব্যবস্থাটিতে বাইরে থেকে শক্তি সরবরাহ করা হয় এবং এই শক্তি অবমন্দনের উপস্থিতি সত্ত্বেও কম্পন বজায় রাখতে সক্ষম হয়।

কোনও কম্পনক্ষম তন্ত্রে (system) বাইরে থেকে শক্তি সরবরাহ করার জন্য সাধারণত সময়ের সঙ্গে পরিবর্তনশীল একটি বল প্রয়োগ করা হয়। এই পরিবর্তনশীল বলটি প্রায়শই পর্যাবৃত্তভাবে (harmonically) হ্রাস-বৃদ্ধি পায় এবং তার কম্পাঙ্ক তন্ত্রের স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক থেকে সচরাচর ভিন্ন হয়ে থাকে। বস্তুত এই কম্পাঙ্ক এবং তন্ত্রটির স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক (natural frequency) যখন এক হয়ে যায়, তখন একটি বিশেষ অবস্থার সৃষ্টি হয়। পদার্থবিদ্যার পরিভাষায়, বাইরে থেকে আরোপিত পর্যাবৃত্ত বলের অধীনে কম্পনকে *প্রণোদিত*

কম্পন (forced vibration) এবং দুই কম্পাঙ্কের সমতার ফলে বিশেষ অবস্থাটিকে *অনুনাদ* (resonance) বলা হয়। এই এককে দুটি বিষয়ই বিস্তারিত আলোচনা করা হবে।

আসুন, আমরা বরং এখানে আরও কয়েকটি সংশ্লিষ্ট পরিভাষার সঙ্গে পরিচিত হই। বাইরে থেকে যে বল প্রযুক্ত হয়ে প্রণোদিত কম্পনের সূচনা করে এবং অবমন্দন সত্ত্বেও কম্পনে রাখে, তাকে আমরা চালক বল বলি এবং ঐ বল যে ব্যবস্থার ওপর প্রযুক্ত হয়, তাকে আমরা চালিত ব্যবস্থা বলি। প্রণোদিত দোলন বা কম্পনের ক্ষেত্রে সামগ্রিকভাবে শক্তি সরবরাহের অভিমুখ থাকে চালক থেকে চালিতের দিকে। চালিত ব্যবস্থা চালকের বৈশিষ্ট্যের অর্থাৎ, চালক বলের মান বা কম্পাঙ্কের কোনও পরিবর্তন ঘটায় না। প্রণোদিত দোলনের এটি অন্যতম বৈশিষ্ট্য।

অন্যদিকে, কিছু বিশেষ ধরনের ব্যবস্থায় কিছু শক্তি সরবরাহের অভিমুখ পর্যায়ক্রমে পাল্টে যায় এবং চালক তন্ত্র ও চালিত তন্ত্রের ভূমিকা ক্রমান্বয়ে হস্তান্তরিত হতে থাকে। এই ধরনের দুটি তন্ত্রে যে কম্পন দেখা যায়, তা প্রণোদিত কম্পন থেকে ভিন্ন। এই কম্পনকে বলা হয় যুগ্মিত কম্পন (coupled vibration)। দুটি কম্পনক্ষম তন্ত্রের মধ্যে একটি বিশেষ সংযোজন, যাকে পরিভাষায় বলা হয় যুগ্মন (coupling) উপস্থিত থাকলে, এটি লক্ষ্য করা যায়। আমরা পরবর্তী এককে (একক - 5) বিষয়টি আলোচনা করব।

পদার্থবিদ্যার বিভিন্ন শাখায় প্রণোদিত কম্পন ও অনুনাদের ব্যাপক প্রয়োগ রয়েছে। গুরুত্বপূর্ণ এই প্রায়োগিক বিষয়গুলি নিয়ে আমরা এই এককে পরে আলোচনা করব।

উদ্দেশ্য

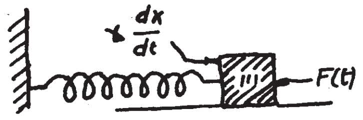
এই এককে আলোচিত বিষয়বস্তু পাঠ করার পরে আপনি প্রণোদিত কম্পন ও অনুনাদের সম্বন্ধে অনেকটা জানতে পারবেন। এ বিষয়ে আপনি যে কাজগুলি করতে পারবেন, সেগুলি হল—

- লঘু অবমন্দন সহ কম্পনশীল তন্ত্রে পর্যাবৃত্ত বল প্রয়োগের ফলে সৃষ্ট অবস্থার গাণিতিক বিবরণের জন্য প্রয়োজনীয় অবকল সমীকরণের প্রতিষ্ঠা ও তার সমাধান করতে পারবেন।
- প্রযুক্ত পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্ক, বিস্তার, দশার সঙ্গে স্থায়ী অবস্থার (steady state) প্রণোদিত কম্পনের বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যের সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন।
- অনুনাদ (resonance) এবং তার বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যগুলি বিশ্লেষণ করতে এবং প্রণোদিত কম্পনে একটি পূর্ণ চক্রে চালক থেকে চালিতের দিকে শক্তি সরবরাহের গড় হার নির্ণয় করতে পারবেন।
- প্রণোদিত কম্পনের ক্ষেত্রে কিউ গুণাঙ্ক (Q-factor) গণনা এবং তার গুরুত্ব বর্ণনা করতে পারবেন।
- প্রত্যাবর্তী বিভব উৎস সমেত বৈদ্যুতিক আবেশ-ধারক-রোধ বর্তনীর মত বিশেষ ক্ষেত্রে প্রণোদিত দোলনের বিশ্লেষণ প্রয়োগ করতে পারবেন, ঐ ধরনের তন্ত্রের সার্বিক আচরণের পর্যালোচনা করতে পারবেন।

4.2 প্রণোদিত কম্পনের গাণিতিক বিশ্লেষণ—লঘু অবমন্দন সহ প্রণোদিত কম্পনের অবকল সমীকরণের প্রতিষ্ঠা

পূর্ববর্তী এককের (একক -3) 3.3 অনুচ্ছেদে আপনি একটি স্প্রিং-ভর ব্যবস্থার কথা পড়েছেন। এখানে 4.1 চিত্রে ঠিক ঐরকম একটি স্প্রিং-ভর ব্যবস্থা দেখানো হয়েছে। স্প্রিং-এর সঙ্গে যুক্ত m ভরটি লঘু অবমন্দন

সহ কম্পিত হতে পারে, এটা আমরা আগে দেখেছি। এখন এই ব্যবস্থার ওপর 4.1 চিত্রে যেমন দেখানো হয়েছে, তেমন একটি সময় নির্ভর পর্যাবৃত্ত বল $F(t)$ প্রয়োগ করা হল। এখন আমরা বিশ্লেষণ করার চেষ্টা করব, বাইরে থেকে প্রযুক্ত এই বলের প্রভাবে m ভরটি ঠিক কীভাবে কম্পিত হবে।



চিত্র 4.1 **লঘু অবমন্দন এবং বহির্প্রযুক্ত সমঞ্জস বল $F(t)$ সহ স্প্রিং ভর ব্যবস্থা।**

আমরা বলেছি $F(t)$ একটি পর্যাবৃত্ত বল, তাই লেখা যায় যে,

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \qquad \ldots 4.1$$

এখানে F_0 হচ্ছে বলটির সর্বোচ্চ মান বা বিস্তার এবং ω হচ্ছে তার কৌণিক কম্পাঙ্ক। এখানে আমরা $F(t) = F_0 \cos (\omega t + \phi)$ লিখতে পারতাম, তবে যখন $F = F_0$ সেই মুহূর্ত থেকে সময়ের গণনা শুরু করলে ϕ এর মান শূন্য নেওয়া যাবে।

এবার আমরা বহির্প্রযুক্ত এই বলের প্রভাবে স্প্রিং-এর সঙ্গে যুক্ত ভরটির প্রণোদিত কম্পনের আলোচনার জন্য পূর্ববর্তী এককের (3.2) সমীকরণটি পুনরুদ্ধৃত করছি। পদগুলিকে সাজিয়ে নিয়ে,

$$= 0 \qquad \ldots 4.2$$

তন্ত্রের ওপর $F(t)$ বলটি প্রযুক্ত হওয়ার পরে (4.2) সমীকরণটি পরিবর্তিত হয়ে দাঁড়াবে,

$$= F_0 \cos \omega t$$

উভয় পক্ষকে m দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$= f_0 \cos \omega t \qquad \ldots 4.3$$

এখানে, $2b = \gamma/m$, $\omega_0^2 =$ এবং, $f_0 =$

লক্ষ্য করার বিষয়, (4.3) সমীকরণটির ডানদিকে শূন্য নয়। সেখানে উপস্থিত রয়েছে $f_0 \cos \omega t$। এর ফলে এই সমীকরণটি 4.2 থেকে ভিন্ন এবং এই অবকল সমীকরণের সমাধান করতে হবে কিছুটা ভিন্ন পদ্ধতিতে।

4.3 অবকল সমীকরণটি দ্বিতীয় মাত্রার রৈখিক সমীকরণ। কিন্তু সমীকরণটির ডানদিক শূন্য না হওয়ায়, এটি একটি অসমসত্ত্ব (inhomogeneous) সমীকরণ। এই সমীকরণের সমাধানের মাধ্যমে প্রণোদিত দোলনের সময়-দূরত্ব সম্পর্ক নির্ণয় করা যাবে এবং সম্পর্কটি বিশ্লেষণের মাধ্যমে প্রণোদিত দোলনের বৈশিষ্ট্যগুলি পর্যালোচনা করা সম্ভব হবে। পরের অনুচ্ছেদে আমরা এই কাজটি করব।

4.3 প্রণোদিত কম্পনের অবকল সমীকরণের সমাধান

4.3 সমীকরণটির সমাধানের আগে (4.2) সমীকরণটির সঙ্গে তার একটু তুলনা করা যাক। বস্তুত এর ফলে আমাদের বুঝতে সুবিধা হবে যে, ঠিক কী ধরনের সমাধান আমরা পেতে পারি। লক্ষ্য করবেন যে, (4.2) সমীকরণটি একটি অবমন্দিত দোলন সূচিত করছে এবং লঘু অবমন্দনের ক্ষেত্রে তন্ত্রটি তার স্বাভাবিক কৌণিক কম্পাঙ্ক ω_0 থেকে ঈষৎ পরিবর্তিত একটি কৌণিক কম্পাঙ্ক $\omega' = \left(\omega_0^2 - b^2\right)^{1/2}$ নিয়ে আন্দোলিত হয়। আমরা একক-3-এ এটাও দেখেছি যে, লঘু অবমন্দনের জন্য ω_0-র এই পরিবর্তন অল্প এবং $b << \omega_0$ হলে $\omega_0 \cong \omega'$ বলা যায়।

এবার এই কম্পনশীল তন্ত্রে আরোপিত হয়েছে একটি বাইরের চালক বল, যার নিজস্ব কৌণিক কম্পাঙ্ক ω। চালক বল চেষ্টা করবে তন্ত্রটিকে তার নিজস্ব কম্পাঙ্কে আন্দোলিত করতে, ফলে আমরা দুটি ভিন্ন কম্পাঙ্কের আন্দোলনের উপরিপাত প্রত্যক্ষ করব। এর প্রথমটি তন্ত্রের স্বাভাবিক কম্পাঙ্কে আন্দোলন এবং দ্বিতীয়টি চালক বলের কম্পাঙ্কে আন্দোলন। আপনি ভাবতে পারেন যে, যদি এই দুটি কম্পাঙ্ক সমান হয়ে যায়, তাহলে আমরা দুটি ভিন্ন কম্পাঙ্কের আন্দোলন পাব না এবং সেক্ষেত্রে কী ঘটবে? এই ঘটনা একটি বিশেষ অবস্থার সৃষ্টি করবে, যার আলোচনা আমরা যথাসময়ে করব। আপাতত আমরা $\omega \neq \omega_0$ ধরে নিয়ে 4.3 সমীকরণের সমাধানের চেষ্টা করব।

আপনি হয়ত আন্দাজ করতে পেরেছেন যে, (4.3) সমীকরণের সমাধান $x(t)$ গঠিত হবে দুটি অংশের সমন্বয়ে কারণ, এখানে দুটি পৃথক কম্পাঙ্কের কম্পন উপস্থিত থাকবে। তাই লেখা যায় যে,

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \qquad ...4.4$$

এখানে $x_1(t)$ হচ্ছে 4.2 সমীকরণের সমাধান, যেটি চালক বলের অনুপস্থিতিতে আমরা লঘু অবমন্দন-সহ কম্পনের ক্ষেত্রে পেয়েছিলাম।

সুতরাং $$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2b\frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2 x_1 = 0 \qquad ...4.5$$

আর $x_2(t)$ হচ্ছে 4.3 সমীকরণের সমাধান অর্থাৎ, চালক বল তার প্রভাবে তন্ত্রকে যেভাবে চালনা করতে চাইছে, তা সূচিত করবে x_2।

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + 2b\frac{dx_2}{dt} + \omega_0^2 x_2 = f_0 \cos \omega t \qquad ...4.6$$

অতএব পূর্ণ সমাধান (complete solution) $x(t)$ কে $x_1(t)$ এবং $x_2(t)$ -র যোগফল হিসাবে পাওয়া যায় (সমীকরণ 4.4) অবকল সমীকরণ বিষয়ক পাঠ্যক্রমে আপনারা লক্ষ্য করবেন যে, $x_1(t)$ এবং $x_2(t)$ কে গাণিতিক পরিভাষায় যথাক্রমে পূরক অপেক্ষক (complementary function) এবং বিশেষ সমাকল (particular integral) নামে অভিহিত করা হয়। 4.5 এবং 4.6 সমীকরণ দুটিকে যোগ করে পাই,

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2)+2b\frac{d}{dt}(x_1+x_2)+\omega_0^2(x_1+x_2) \ = f_0 \cos \omega t \qquad ...4.7$$

4.7 সমীকরণ থেকে বোঝা যায় যে, 4.4 সমীকরণে কেন x কে x_1 এবং x_2 -র সমষ্টি হিসাবে লেখা হয়েছে। আমরা এবার x_1 ও x_2-র দ্বারা সূচিত পূর্ণ সমাধানের দুটি অংশ এবং তাদের বৈশিষ্ট্যগুলি আলোচনা করব।

4.3.1 স্বল্পস্থায়ী অবস্থার সমাধান (Transient solution)

আপনি নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছেন যে, আমরা ইতিমধ্যেই পূর্ববর্তী এককের (একক 3) 3.4.3 অনুচ্ছেরে 4.5 সমীকরণটির সমাধান করেছি। এই সমাধান অর্থাৎ, 3.17 সমীকরণ অনুসরণ করে 4.5 সমীকরণের সমাধান লেখা যায়।

$$x_1(t) = \mathrm{A}_0 \exp(-\mathrm{b}t)[\cos(\omega' t + \phi)] \qquad ...4.8$$

এখানে $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ এবং অন্যান্য চিহ্নগুলি পরিচিত অর্থ বহন করছে।

একক 3-এর আলোচনায় আপনি এও দেখেছেন যে, 4.8 সমাধানে $x_1(t)$ এর মান অবমন্দনের ফলে সময়ের সঙ্গে হ্রাস পাবে এবং ক্রমশ তা প্রায় শূন্য হয়ে যাবে। এইজন্য এই সমাধানটিকে বলা হয় স্বল্পস্থায়ী অবস্থার সমাধান (Transient solution)। প্রশ্ন উঠতে পারে যে, এই স্বল্পস্থায়ী সমাধানের প্রকৃত আয়ু কতক্ষণ? স্বল্পস্থায়ী বলতে সাধারণত কতটা সময় বোঝায়?

সন্দেহ নেই, এই স্বল্প স্থায়িত্বের সময় আবার অবমন্দনের মাত্রার ওপর নির্ভরশীল। সাধারণত বলা হয় যে, অতিক্রান্ত সময় t যখন শ্লথন কাল τ এর থেকে বেশ অনেকখানি বড় ($t >> \tau$ বা $t > 5\tau$) হয়ে যায়, তখন এই স্বল্পস্থায়ী অবস্থাটি আর ধরা পড়ে না। আমরা একক 3-এ দেখেছি যে, এরকম ক্ষেত্রে দোলন প্রায় বন্ধ হয়ে যায়। এখানে কিন্তু চালক বলের উপস্থিতির জন্য পরিস্থিতি ভিন্ন। তাই সাধারণত পূর্ণ সমাধানের (complete solution) দুটি অংশের একটি $[x_1]$ শূন্য হয়ে গেলেও, x কিন্তু x_2 র উপস্থিতির জন্য শূন্য হয় না—বস্তুত তন্ত্রটি তখন চালক বলের কম্পাঙ্কে একইভাবে আন্দোলিত হতে থাকে। পরবর্তী অনুচ্ছেদে আমরা এই স্থায়ী অবস্থার সমাধানটি নির্ণয় করব।

4.3.2 স্থায়ী অবস্থার সমাধান (Steady state solution)

আমরা আগেই দেখেছি, প্রাথমিক কিছুটা সময় অতিক্রান্ত হওয়ার পরে $x_1(t)$ এর মান অতি নগণ্য হয়ে যায় এবং $x(t)$ ক্রমশ 4.6 সমীকরণের বিশেষ সমাকল $x_2(t)$ এর সমান হতে থাকে। $x_2(t)$ সমাধানটি সম্পূর্ণভাবে চালক বলের কম্পাঙ্কের ওপর নির্ভরশীল $x_1(t)$ বিলীন হয়ে যাওয়ার পরে যখন $x(t)$ সম্পূর্ণভাবে $x_2(t)$ দ্বারা নির্ধারিত হয় (transfer) , তখন আমরা যে সমাধানটি পাই, তাকে বলা হয় স্থিরাবস্থার সমাধান (Steady state solution)। এই অবস্থার কম্পন, যতক্ষণ চালক বল উপস্থিত থাকবে, ততক্ষণ চলতে থাকবে। আমরা ধরে নেব যে, এই কম্পনের কম্পাঙ্ক চালক বলের কম্পাঙ্কের সমান হবে। এই দুটি পর্যায় আরও একটু বিশ্লেষণ

করা প্রয়োজন। ধরা যাক, লঘু অবমন্দন সহ একটি স্প্রিং-ভর ব্যবস্থা প্রাথমিক ভাবে সাম্যাবস্থানে স্থির রয়েছে। এবার এর ওপর একটি সমঞ্জস বল প্রযুক্ত হল, যে বলের কম্পাঙ্ক এই স্প্রি-ভর ব্যবস্থার স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক অপেক্ষা ভিন্ন। এবার কী ঘটবে? স্প্রিং-ভর ব্যবস্থাটি তার নিজস্ব কম্পাঙ্কে (যা লঘু অবমন্দনের ফলে অতি সামান্য পরিবর্তিত হয়েছে।) আন্দোলিত হতে চেষ্টা করবে। কিন্তু বহির্প্রযুক্ত সমঞ্জস বল চেষ্টা করবে ব্যবস্থাটিকে বলের কম্পাঙ্কে আন্দোলিত করতে। এই দ্বিমুখী প্রয়াস খুব বেশিক্ষণ অবশ্য চলবে না, কারণ অবমন্দনের ফলে স্প্রিং-ভর ব্যবস্থা তার শক্তি হারাবে এবং তার বিস্তার হ্রাস পেতে পেতে শূন্য হতে চাইবে। অন্যদিকে সমঞ্জস বল পর্যাবৃত্ত হারে ব্যবস্থাটির ওপর উপস্থিত থেকে ক্রমাগত তার কম্পাঙ্ক সেখানে আরোপ করবে। এই কাজটি সম্পূর্ণ হওয়ার আগের সময়টুকু পর্যন্ত অল্পস্থায়ী কম্পন দেখা যাবে। তারপর শুরু হবে স্থায়ী অবস্থার কম্পন, যে কম্পনের সময়-দূরত্ব সমীকরণ আমরা এবার নির্ণয়ের চেষ্টা করব।

4.6 সমীকরণের সমাধানের জন্য আমরা ধরে নিই যে, ঐ সমীকরণের বিশেষ সমাধান $x_2(t)$ কে লেখা যায়,

$$x_2(t) = B \cos (\omega t - \theta) \qquad ...4.9$$

এখানে B এবং θ দুটি অজ্ঞাত ধ্রুবক।

আপনার মনে হওয়া স্বাভাবিক, কেন আমরা $x_2(t)$ কে সমীকরণ 4.9 এর মত লিখলাম? এর স্বপক্ষে দুটি যুক্তি রয়েছে। প্রথমত, আমরা পদার্থবিদ্যার দৃষ্টিকোণ থেকে বুঝতে পারছি যে, স্থায়ী অবস্থার সমাধানের ক্ষেত্রে সময়-দুরত্ব সমীকরণের কম্পাঙ্ক হিসাবে চালক বলের কম্পাঙ্ক w উপস্থিত থাকে, কারণ এখন দোলগতি সম্পূর্ণরূপে চালক বলের দ্বারা নিয়ন্ত্রিত। দ্বিতীয়ত, অবমন্দনের উপস্থিতিতে চালক বল এবং সরণের মধ্যে একটা দশার পার্থক্য থেকে যাবে। অর্থাৎ, বলের দশা অংশটি ωt হলে, সরণের দশা হবে $(\omega t - \theta)$।

4.9 সমীকরণে উপস্থিত দুটি ধ্রুবক B এবং θ কে নির্ণয়ের উদ্দেশ্যে আমরা 4.9 এর উভয় পক্ষকে সময়ের সাপেক্ষে দু'বার অবকলন করে পাই।

$$= -B\omega \sin (\omega t - \theta)$$

$$= -B\omega^2 \cos (\omega t - \theta)$$

x_2,   এবং   এর মান 4.6 সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\, B \cos (\omega t - \theta) - 2B\, b\omega \sin (\omega t - \theta) = f_0 \cos \omega t$$

$\cos (\omega t - \theta)$ এবং $\sin (\omega t - \theta)$ কে বিস্তৃত করে লিখে এবং $\cos \omega t$ এবং $\sin \omega t$ এর সহগগুলিকে একত্র করে পাই

$$[(\omega_0^2 - \omega^2)\, B \cos \theta + 2Bb\omega \sin \theta - f_0] \cos \omega t +$$
$$[(\omega_0^2 - \omega^2)\, B \sin \theta - 2Bb\omega \cos \theta\,] \sin \omega t = 0 \qquad ...4.10$$

আমরা জানি যে, sin ωt এবং cos ωt একই সঙ্গে শূন্য হতে পারে না। বস্তুত যখন এদের একটি শূন্য হয়, অপরটি তখন তার চরম মানে পৌঁছয়। অতএব 4.10 সমীকরণের বাঁদিকে cos ωt এবং sin ωt, উভয়ের সহগ আলাদাভাবে শূন্য হওয়া প্রয়োজন। সুতরাং লেখা যায় যে,

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\, B \cos\theta + 2B\, b\omega \sin\theta = f_0 \qquad ...4.11$$

এবং $$(\omega_0^2 - \omega^2)\, B \sin\theta - 2Bb\omega \cos\theta = 0 \qquad ...4.12$$

(4.12) সমীকরণ থেকে আমরা সরাসরি পাই,

$$\tan\theta = \qquad ...4.13a$$

$$\text{বা, } \theta = \qquad ...4.13b$$

এই (4.13) সমীকরণ থেকে দুটি ধ্রুবকের একটি অর্থাৎ, θ এর মান পাওয়া যাচ্ছে। এখন আপনি দেখাতে পারেন যে, $\sin\theta =$ এবং $\cos\theta = \dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}}$

অপর ধ্রুবক B বা বিস্তারের মান পাওয়ার জন্য sin θ ও cos θ এর মান 4.11 সমীকরণে ব্যবহার করে আমরা পাই

$$B = \frac{f_0}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\theta + 2b\omega\sin\theta}$$

$$= \qquad = \frac{F_0}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad ...4.14$$

স্থায়ী অবস্থার সমাধানের সম্পূর্ণ রাশিমালাটি তাহলে এবার লেখা যাক,

$$x_2(t) = \frac{F_0}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}}\cos(\omega t - \theta) \qquad ...4.15$$

আপনি নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছেন যে, এই সমাধানে সরণের কৌণিক কম্পাঙ্ক ω এবং এটির বিস্তার কয়েকটি বিষয়ের ওপর নির্ভর করে। এগুলি হল,

(i) চালক বলের বিস্তার (F_0)

(ii) চালক বলের কৌণিক কম্পাঙ্ক (ω)

(iii) কম্পনশীল ভর (m)

(iv) কম্পনশীল তন্ত্রের স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক (ω_0) এবং

(v) অবমন্দন ধ্রুবক (b)

তাছাড়া 4.13 সমীকরণ থেকে আমরা θ কোণের মান পাই। এটি প্রযুক্ত চালক বল সরণের তুলনায় যে দশা কোণে অগ্রবর্তী থাকে, সেটিকে সূচিত করে। লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে, θ কোণও কয়েকটি বিষয়ের ওপর নির্ভরশীল। এগুলি হল,

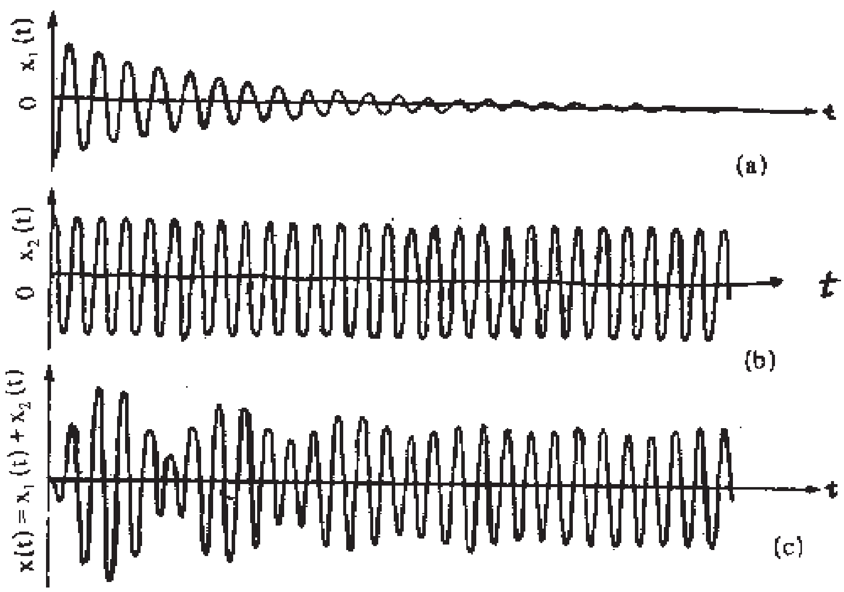
(i) চালক বলের কম্পাঙ্ক (ω)

(ii) কম্পনশীল তন্ত্রের স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক (ω_0)

(iii) অবমন্দন ধ্রুবক (b)

পরবর্তী অনুচ্ছেদে θ -র বিষয়টি আবার আলোচনায় আসবে। 4.3 সমীকরণের সম্পূর্ণ সমাধানের রূপটি এখন লেখা যেতে পারে :

$$x(t) = A_0 \exp(-bt)\cos(\omega' t + \phi) + \frac{F_0 \cos(\omega t - \theta)}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad ...4.16$$



চিত্র 4.2 সময়ের (t) সঙ্গে স্বল্পস্থায়ী অবস্থার সমাধান (x_1) [a] স্থায়ী অবস্থার সমাধান (x_2) [b] এবং সম্পূর্ণ সমাধানের ($x - x_1 + x_2$) [c] লেখচিত্র। [c] চিত্রে স্বরকম্প লক্ষ্য করা যাচ্ছে।

আমরা এবার সময়ের (t) সঙ্গে x_1, x_2এবং x এর পরিবর্তনের বিষয়টিতে দৃষ্টি দিতে চাই। 4.2 চিত্রে সময়ের সঙ্গে এগুলির পরিবর্তনের লেখচিত্র দেখানো হয়েছে। এর প্রথমটি অর্থাৎ 4.2a, (t – x_1) আমাদের অতি পরিচিত অবমন্দিত মুক্ত দোলনের লেখচিত্র। এক্ষেত্রে এটি স্বল্পস্থায়ী সমাধান সূচিত করছে। সময়ের সঙ্গে বিস্তার এখানে প্রত্যাশিত ভাবেই হ্রাস পাচ্ছে। 4.2b, (t – x_2) লেখচিত্রে স্থায়ী অবস্থার সমাধানটি দেখানো হয়েছে। লক্ষ্য করুন, এখানে কিন্তু সময়ের সঙ্গে বিস্তারের কোনও পরিবর্তন দেখা যাচ্ছে না। স্থিরাবস্থার এটি অন্যতম বৈশিষ্ট্য।

4.2c, (t – x) লেখচিত্রে সময়ের সঙ্গে x_1 + x_2) এর পরিবর্তন দেখানো হয়েছে। এখানে প্রথমদিকে বিস্তার পরিবর্তনশীল। কেননা এই পর্যায়ে তন্ত্রটি একদিকে নিজস্ব ω_0 কৌণিক কম্পাঙ্কে আন্দোলিত হতে চায় এবং অবমন্দনের জন্য তার বিস্তার ক্রমশ কমতে থাকে। কিন্তু বাইরে থেকে প্রযুক্ত বল তন্ত্রটিকে তার নিজস্ব কৌণিক কম্পাঙ্কে (ω) চালনা করতে চায়। ভিন্ন কম্পাঙ্কের দুই আন্দোলনের উপরিপাতনের ফলে অল্প সময়ের জন্য তন্ত্রে বিস্তারের হ্রাস-বৃদ্ধি লক্ষ্য করা যায়। এই অবস্থাটিকে বলা হয় অল্পস্থায়ী স্বরকম্প (transient beats)। অবশ্য এই অবস্থাটি অল্প সময় স্থায়ী হয় কেননা, তন্ত্রের নিজস্ব কম্পাঙ্কে আন্দোলন লয়প্রাপ্ত হওয়ার পর চালক বল তার নিজস্ব কম্পাঙ্কে তন্ত্রকে আন্দোলিত করে এবং শক্তির সরবরাহের মাধ্যমে বিস্তার অক্ষুণ্ণ থাকে। তাই সময়ের সঙ্গে সরণের পরিবর্তন অল্প সময় পরেই x_2 এর পরিবর্তনের অনুরূপ হয়ে যায়। অল্পস্থায়ী স্বরকম্পের অবসান ঘটার পর স্থায়ী অবস্থার সমাধানটি একাই তন্ত্রের আচরণ প্রকাশ করে। এই আলোচনার পরে নিচের অনুশীলনীটি করতে আপনার নিশ্চয়ই ভাল লাগবে।

অনুশীলনী -1 : $200Nm^{-1}$ স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট একটি স্প্রিং থেকে 0.2 kg ভর ঝুলছে। ভরটির ওপর ক্রিয়াশীল অবমন্দন বল $-\ 2v\ Nm^{-1}s$ যেখানে v ভরটির বেগ। যদি এই ভরটির ওপর 12 cos $50t$ নিউটন বল ক্রিয়া করে, তাহলে স্থায়ী অবস্থায় ভরটির বিস্তার ও প্রযুক্ত বলের সঙ্গে সরণের দশা পার্থক্য নির্ণয় করুন।

4.4 চালক বলের কম্পাঙ্কের ভূমিকা।

আগের অনুচ্ছেদের 4.15 সমীকরণ থেকে স্থায়ী অবস্থার কম্পনের যে সমাধান পাওয়া গেছে, সেখানে নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছেন যে, স্থায়ী অবস্থায় তন্ত্রের কম্পাঙ্ক চালক বলের কম্পাঙ্কের সমান। তাহলে নিশ্চয়ই বলা যায় যে, চালক বলের কম্পাঙ্ক পরিবর্তিত হলে, তন্ত্রের আন্দোলনের কম্পাঙ্কও পাল্টে যাবে। বিষয়টি কিন্তু এখানেই শেষ নয়। কারণ, $x_2(t)$ এর বিস্তার (B) এবং দশাকোণ (θ), দুটিতেই চালক বলের কম্পাঙ্ক ω এবং তন্ত্রের স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক ω_0 উভয়েই উপস্থিত রয়েছে। তাই এই প্রশ্ন খুবই সঙ্গত যে, ω এবং ω_0 -র তুলনামূলক মানের ওপর প্রণোদিত কম্পনের বৈশিষ্ট্যগুলি কীভাবে নির্ভরশীল। আমরা এই অনুচ্ছেদে $\omega << \omega_0$ এবং $\omega >> \omega_0$, এই দুই ক্ষেত্রের বৈশিষ্ট্য আলোচনা করব। তৃতীয় ক্ষেত্রটি, যখন $\omega = \omega_0$, আলোচিত হবে পরবর্তী অনুচ্ছেদে।

যখন $\omega << \omega_0$, (অর্থাৎ চালক বলের কম্পাঙ্ক তন্ত্রের স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের তুলনায় খুবই ছোট)

আমরা জানি [(4.14) সমীকরণ থেকে],

$$B = \frac{f_0}{\left[\left(\omega_0^{\,2}-\omega^2\right)^2+4b^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

এখান থেকে লেখা যায় যে,

$$B = \frac{f_0}{\omega_0^{\,2}\left[\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2+4b^2\frac{\omega^2}{\omega_0^{\,4}}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

যেহেতু $\omega << \omega_0$, $\dfrac{\omega}{\omega_0}$<<1, সুতরাং 1 এর তুলনায় পদকে নগণ্য ধরে আমরা পাই,

$$B_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \qquad =$$

যেখানে $\omega_0^2 =$ এবং k = প্রত্যানয়ন গুণাঙ্ক (stiffness const.), এক্ষেত্রে বিস্তার প্রত্যানয়ন গুণাঙ্ক দ্বারা নিয়ন্ত্রিত হয় এবং ω_0 বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে হ্রাস পায়। তাই এই অবস্থায় তন্ত্রের যে গতি লক্ষ্য করা যায়, তাকে প্রত্যানয়ন গুণাঙ্ক নিয়ন্ত্রিত গতি (stiffness control motion) বলা হয়।

দশার বিষয়টি বিবেচনার জন্য 4.13a সমীকরণটিতে ফিরে যাওয়া যাক।

$$\tan\,\theta =$$

$$= \frac{2b\omega}{\omega_0^{\,2}\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^{\,2}}\right)} \to 0 \text{ যখন } \frac{\omega}{\omega_0} << 1$$

সুতরাং দশাকোণ $\theta \to 0$ অর্থাৎ এক্ষেত্রে চালক বল এবং স্থায়ী অবস্থার সরণের মধ্যে দশার পার্থক্য প্রায় শূন্য হয়ে যায়। 4.3 চিত্রে ω-র সঙ্গে θ -র পরিবর্তনের লেখচিত্রটি দেখলে বিষয়টি বুঝতে আপনার সুবিধা হবে।

যখন $\omega >> \omega_0$ (অর্থাৎ চালক বলের কম্পাঙ্ক তন্ত্রের স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের তুলনায় খুবই ছোট),

এক্ষেত্রে যখন $\omega >> \omega_0$, $\quad << 1$

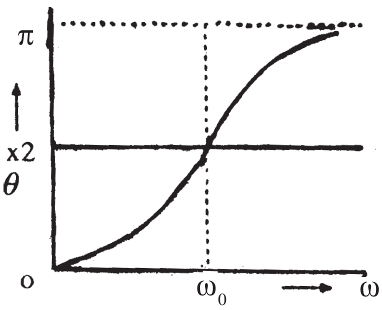
$$\cong \frac{f_0}{\omega^2} = \frac{F_0}{m\omega^2}$$

এক্ষেত্রে ω বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে বিস্তার হ্রাস পায়। এছাড়া কম্পনশীল ভরটির মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে বিস্তার হ্রাস পায়।

এক্ষেত্রে, $\tan\,\theta = \dfrac{2b\omega}{\omega_0^{\,2} - \omega^2} = -\dfrac{2b}{\omega\left(1 - \dfrac{\omega_0^{\,2}}{\omega^2}\right)} \to 0$,যখন, $\quad \to 0$

অতএব, $\theta \;\to \pi$

কারণ, এক্ষেত্রে $\tan\,\theta$ -র মান ω বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে শূন্যের নিকটবর্তী হলেও, তা ঋণাত্মক মানের দিক থেকে শূন্যের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। অতএব, θ স্থূল কোণ সূচিত করছে ও যখন $\omega \to \infty$ হচ্ছে তখন θ কোন π (180º) এর নিকটবর্তী হচ্ছে। (4.3 চিত্র দেখুন)।



চিত্র 4.3 চালক বল $F(t)$ -র কম্পাঙ্ক ω -র সঙ্গে দশাকোণ θ -র পরিবর্তন।

তাই বলা যায় যে, চালক বলের কম্পাঙ্ক তন্ত্রের স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের তুলনায় যত বড় হয়, তত চালক বল ও সরণের মধ্যে দশার পার্থক্য π বা 180º র নিকটবর্তী হয়, অর্থাৎ তারা বিপরীত দশায় অবস্থান করে। 4.3 চিত্রে এই বিষয়টি দেখানো হয়েছে। পরবর্তী অনুচ্ছেদের 4.4 চিত্রে দেখানো হয়েছে কম্পাঙ্ক ω -র সঙ্গে বিস্তার B -র পরিবর্তন।

আসুন এবার বরং নিচের অনুশীলনীটি চেষ্টা করে দেখুন।

অনুশীলনী -2 : একটি 0.1kg ভর $150Nm^{-1}$ স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট স্প্রিং-এ ঝোলানো রয়েছে। ভরটির ওপর ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ বল যদি $F_d = 5v\;N$ হয় (v ভরটির বেগ), তাহলে অবমন্দিত দোলনের অবকল সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করে ঐ দোলনের কম্পাঙ্ক নির্ণয় করুন। যদি এবার এই তন্ত্রটির উপর $F = 3\,\cos\,20t\;N$ মানের পর্যাবৃত্ত বল আরোপিত হয়, তাহলে স্থায়ী অবস্থায় প্রণোদিত কম্পনের বিস্তার ও দশা পার্থক্য নির্ণয় করুন।

4.5 অনুনাদ

4.5 অনুচ্ছেদের আলোচনায় আপনি দেখেছেন যে, স্থায়ী অবস্থার কম্পনের (Steady state vibration) ক্ষেত্রে ω এবং ω_0 এর পার্থক্য যত বেশি হয়, কম্পনের বিস্তার ততই হ্রাস পায়। তাই $\omega >> \omega_0$ বা $\omega << \omega_0$ হলে বিস্তার উভয় ক্ষেত্রেই বেশ কমে যায়। স্বাভাবিকভাবেই আপনার মনে হতে পারে যে, ω আর ω_0 -এর পার্থক্য বেশি হলে বিস্তার যখন কমে যায়, তখন ঐ দুটি কৌণিক কম্পাঙ্ক কাছাকাছি এলে বিস্তার সম্ভবত বৃদ্ধি পেতে পারে। এবার আমরা $\omega = \omega_0$ হলে অর্থাৎ, চালক বল ও তন্ত্রের স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক দুইটি সমান হয়ে গেলে কী হবে সেই বিষয়ে আলোচনা করব। 4.14 সমীকরণে স্থিরাবস্থার বিস্তারের রাশিমালাটি ইতিমধ্যেই পাওয়া গেছে :

এখানে $\omega = \omega_0$ বসিয়ে পাই

...4.17

অর্থাৎ, তন্ত্রের স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক ω_0 এবং চালক বলের কম্পাঙ্ক (ω) সমান হয়ে গেলে B-এর রাশিমালার হর (denominator) হ্রাস পায় এবং B-এর মান বৃদ্ধি পায়। এই অবস্থাটিকে অনুনাদ বলা হয়। লক্ষ্য করুন যে, B(ω_0)-এর এই মান $\frac{f_0}{2b\omega_0}$, b বা অবমন্দন ধ্রুবকের ওপর নির্ভরশীল। বস্তুত, অবমন্দন তথা b এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে $B(\omega_0)$ এর মান হ্রাস পায়। যে কোনও বাস্তব কম্পনশীল তন্ত্রে সর্বদাই কিছু অবমন্দন উপস্থিত থাকে অর্থাৎ, b এর মান শূন্য হয় না। ফলে $B(\omega_0)$ এর মান অসীমের দিকে চলে যায় না।

$\omega = \omega_0$ হওয়ার সঙ্গে সঙ্গে দশা কোণ θ কীরকম হবে?

4.13a সমীকরণ থেকে

$\tan\theta =$

ফলে, $\omega = \omega_0$ হলে, $\tan\theta = \infty$ $\quad \therefore \theta = \frac{\pi}{2}$

অতএব এক্ষেত্রে চালক বলের তুলনায় সরণ দশাকোণ পিছিয়ে থাকবে।

4.17 সমীকরণে বিস্তারের যে মান $B(\omega_0)$ পাওয়া গেছে, তা বিস্তারের সর্বোচ্চমান নয়। বিস্তারের সর্বোচ্চ মান পাওয়ার জন্য আমাদের কিছুটা ভিন্ন রাস্তায় এগোতে হবে। কেবল তাই নয়, প্রণোদিত দোলনের ক্ষেত্রে আমরা দেখতে পাব, তন্ত্রের গতিবেগ বিশেষ শর্ত সাপেক্ষে সর্বোচ্চ হয় এবং এই শর্ত সর্বোচ্চ বিস্তার পাওয়ার শর্ত অপেক্ষা ভিন্ন। কম্পনশীল বস্তুর বিস্তার যখন সর্বোচ্চ হয়, তখন তার স্থিতিশক্তি সর্বোচ্চ মানে পৌঁছয় এবং যখন তার গতিবেগ সর্বপেক্ষা বেশি হয়, তখন তার গতিশক্তির পরিমাণ হয় সর্বোচ্চ। এই দুটি ক্ষেত্রকে পদার্থবিদ্যার পরিভাষায় যথাক্রমে বিস্তার অনুনাদ (amplitude resonance) এবং গতিবেগ অনুনাদ (velocity resonance) বলা হয়। এখানে আমরা বিষয় দুটি নিয়ে সংক্ষেপে আলোচনা করব।

4.5.1 বিস্তার অনুনাদ

এবার দেখা যাক, প্রণোদিত দোলনের ক্ষেত্রে বিস্তারের সর্বোচ্চ মান পাওয়ার জন্য প্রয়োজনীয় শর্তটি কী?

4.14 সমীকরণে আমরা বিস্তার $B(\omega)$ এর যে রাশিমালাটি পেয়েছি সেটি হল,

$$B(\omega) =$$

এর মান ω এর উপর নির্ভরশীল এবং রাশির মান যখন সর্বনিম্ন, $B(\omega)$ এর মান তখন সর্বোচ্চ হবে। এর জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত

$$\text{বা, } -4\omega\,(\omega_0^{\,2} - \omega^2) + 8b^2\omega = 0$$

অর্থাৎ, $\omega =$ অথবা 0

এর মধ্যে $\omega = 0$ সমাধানটি কোনও বন্ধন নির্দেশ করে না। তাই আমরা সেটি বাদ দেব। এছাড়া, যেহেতু ω সর্বদাই ধনাত্মক, $B(\omega)$ এর মান সর্বোচ্চ হওয়ার শর্ত : $\omega = \omega_r = \left(\omega_0^{\,2} - 2b^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ... 4.18a

ω_r এখানে অনুনাদী কৌণিক কম্পাঙ্ক বোঝাচ্ছে। আপনি হয়ত লক্ষ্য করেছেন যে, তৃতীয় এককে আমরা যে অবমন্দিত কৌণিক কম্পাঙ্ক $\sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ পেয়েছি, ω_r এর মান তার চেয়ে কম। প্রসঙ্গত বলা যায় যে,

$B(\omega = \omega_r)$ যে B এর সর্বোচ্চ মান, সর্বনিম্ন নয়, তা আপনি এর মান নির্ণয় করে এবং সেটির ঋণাত্মক মান লক্ষ্য করে প্রতিপন্ন করতে পারেন।

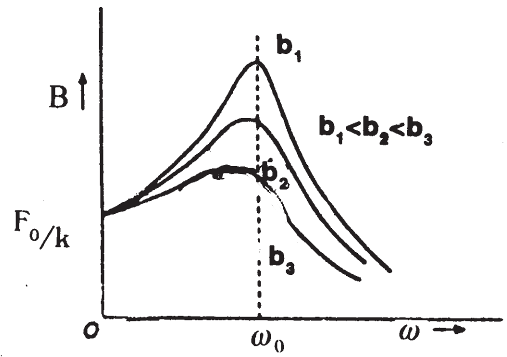
এখন ω এর লব্ধমান ব্যবহার করে আমরা বিস্তার B-এর সর্বোচ্চ মান পেতে পারি :

$$B_{max} = \frac{F_0}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2b^2\right)^2 + 4b^2\left(\omega_0^2 - 2b^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}} = \qquad \text{... 4.18b}$$

তাহলে দেখা যাচ্ছে, $\omega = \omega_0$ হলে B-এর মান সর্বোচ্চ হয় না। B -এর মান সর্বোচ্চ হয়, যখন $\omega =$

$\omega_r =$ । বিস্তার B-এর মান সর্বোচ্চ হওয়ার এই ঘটনাটিকে বলা হয় বিস্তার অনুনাদ (amplitude resonance)। আর ω_r কে বলা হয় বিস্তার অনুনাদের জন্য অনুনাদী কৌণিক কম্পাঙ্ক (resonant angular frequency)।

4.4 চিত্রে ω এর সঙ্গে প্রণোদিত কম্পনের বিস্তার B এর পরিবর্তনের লেখচিত্র দেখানো হয়েছে। লক্ষ্য করবেন অবমন্দন ধ্রুবক b-এর বৃদ্ধির সঙ্গে কেবল ω_r -ই 4.18a সমীকরণ অনুযায়ী পরিবর্তিত হয় না, কম্পনের বিস্তার B-এর মানও হ্রাস পায়। যদি আমরা কোনও আদর্শ তন্ত্রের কথা কল্পনা করি, যেখানে অবমন্দন উপস্থিত নেই, অর্থাৎ $b = 0$, তাহলে একদিকে যেমন $\omega_r = \omega_0$ হয়ে যাবে বা অনুনাদী কম্পাঙ্ক তন্ত্রের স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সমান হয়ে যাবে, তেমনই অন্যদিকে সর্বোচ্চ বিস্তারের মান হয়ে যাবে অসীম (সমীকরণ 4.17 দেখুন)। বলা বাহুল্য, আমরা বাস্তব ক্ষেত্রে এরকম অবস্থা পাই না।



চিত্র 4.4 কম্পাঙ্ক (ω) এর সঙ্গে স্থায়ী অবস্থার বিস্তারের লেখচিত্র তিনটি ভিন্ন অবমন্দন গুণাঙ্কের (b) জন্য দেখানো হয়েছে। লক্ষ্য করুন, অনুনাদী কম্পাঙ্ক $\omega_r \neq \omega_0$ কিন্তু যখন $b \to 0$, তখন $\omega_r \to \omega_0$ ।

বিস্তার অনুনাদের আর একটি গুরুত্বপূর্ণ দিক রয়েছে। আপনি জানেন যে, কম্পনশীল বস্তুর ক্ষেত্রে তার স্থিতিশক্তি :

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \text{...4.19}$$

এখানে, $k = \omega_0^2 m$ = প্রত্যানয়ন গুণাঙ্ক (spring constant)। যেহেতু একটি তন্ত্রে k র মান একটি ধ্রুবক, তাই স্থিতিশক্তির মান সর্বোচ্চ হয় যখন x এর মান সর্বোচ্চ, অর্থাৎ, যখন $x = B_{max}$।

সুতরাং, $V_{max} =$

যেহেতু বিস্তার অনুনাদের সময় B-এর মান সর্বোচ্চ হয়, তাই বিস্তার অনুনাদের সময়ই তন্ত্রের সর্বোচ্চ স্থিতিশক্তির মান সর্বোচ্চ হয়। এটি বিস্তার অনুনাদের একটি বিকল্প সংজ্ঞা।

বিস্তার অনুনাদের সময়, অর্থাৎ যখন $\omega = \omega_r =$

সুতরাং, সর্বোচ্চ স্থিতিশক্তি $V_m = \frac{1}{2}k\left(\frac{F_0}{2mb\sqrt{\omega_0^{\,2}-b^2}}\right)^2 =$ ...4.20

4.5.2 গতিবেগ অনুনাদ

প্রণোদিত কম্পনের ক্ষেত্রে স্থায়ী অবস্থার সময় - সরণ সমীকরণের (সমীকরণ 4.15) সঙ্গে আপনি আগেই পরিচিত হয়েছেন। এটি হল :

$$x = x_2 = \frac{F_0\cos(\omega t-\theta)}{m\left[\left(\omega_0^{\,2}-\omega^2\right)^2+4b^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

এটি থেকে আমরা কম্পনশীল ভরের গতিবেগ পেতে পারি :

$$v = \frac{dx}{dt} =$$

ঋণাত্মক চিহ্ন সরণের সাপেক্ষে গতিবেগের অভিমুখ সূচিত করছে। এই গতিবেগের সর্বোচ্চ মান বা গতিবেগ বিস্তার (velocity amplitude) v_0 হলে লেখা যায়।

$$v_0 = \frac{F_0\omega}{m\left[\left(\omega_0^{\,2}-\omega^2\right)^2+4b^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad ...4.21$$

দেখা যাচ্ছে, যে v_0 -র মান F_0, m, b এবং ω_0 ছাড়াও ω -এর ওপর নির্ভরশীল। এখন আপনি সহজেই - ω এর কোন মানের জন্য v_0 সর্বাধিক হবে, তা নির্ণয় করতে পারেন। 4.21 সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$$\frac{dv_0}{d\omega} = \qquad -\frac{\omega}{2}\{(\omega_0^{\,2}-\omega^2)+4b^2\omega^2\}^{-\frac{1}{2}}(4\omega^3-4\omega\omega_0^{\,2}+8\omega b^2)]$$

$$= \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^{\,4}-\omega^4}{\left[\left(\omega_0^{\,2}-\omega^2\right)^2+4b^2\omega^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

ω এর যে গ্রহণযোগ্য মানের জন্য $\frac{dv_0}{d\omega} = 0$, সেটি হল $\omega = \omega_0$। দেখানো যায় যে, যখন $\omega = \omega_0$ তখন এর মান ঋণাত্মক। এর অর্থ, v_0 -এর সর্বোচ্চ মানের জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত,

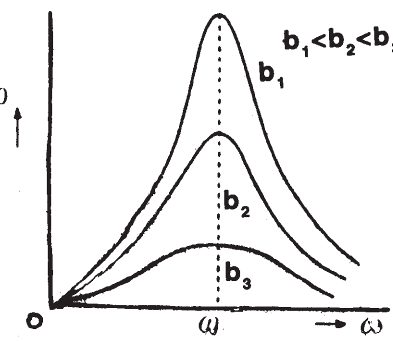
$$\omega = \omega_0 \qquad ...4.22$$

এই অবস্থাটিকে বলা হয় *গতিবেগ অনুনাদ* (velocity resonance)। 4.21 সমীকরণে $\omega = \omega_0$ বসিয়ে v_0 -এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায় :

$$v_{0m} = \quad\quad = \quad\quad \text{...4.23a}$$

লক্ষ্য করুন, v_{0m} এর রাশিমালার হলে b উপস্থিত রয়েছে অর্থাৎ, অবমন্দন যত বৃদ্ধি পাবে গতিবেগ অনুনাদের সময় প্রাপ্ত v_0 এর সর্বোচ্চ মান তত ছোট হবে।

4.5 চিত্রে ω এর সঙ্গে v_0 এর পরিবর্তন দেখানো হয়েছে। সবকটি ক্ষেত্রেই যখন $\omega = \omega_0$, কেবল তখনই v_0 এর মান সর্বোচ্চ হতে দেখা যাচ্ছে। তবে এই লেখচিত্র থেকে এটি পরিষ্কার যে, v_{0m} এর মান নির্ভর করছে b এর ওপর। আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে, গতিবেগ অনুনাদের ক্ষেত্রে কম্পনশীল ভরের গতিবেগ সর্বোচ্চ হওয়ায় তার গতিশক্তিও (kinetic energy) ঐ অনুনাদের সময় সর্বোচ্চ হবে। গতিবেগ অনুনাদের একটি বিকল্প সংজ্ঞা হিসাবে বলা যায়, যে অবস্থায় কম্পনশীল বস্তুর গতিশক্তির সর্বোচ্চ মান T_0 সর্বধিক হয়, তাকে বলা হয় গতিবেগ অনুনাদ। এই আলোচনা থেকে আমরা গতিবেগ অনুনাদের সময় সর্বোচ্চ গতিশক্তির T_{0m} -এর রাশিমালা সহজেই পেতে পারি :



চিত্র 4.5 বিভিন্ন অবমন্দন গুণাঙ্কের জন্য কম্পাঙ্কের (w) সঙ্গে গতিবেগ বিস্তারের (v_0) পরিবর্তন। এখানে $\omega = \omega_0$ -তে অনুনাদ হচ্ছে। কিন্তু v এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে $(v_0)_{\max}$ এর মানের হ্রাস হচ্ছে।

$$\therefore \text{ সর্বোচ্চ গতিশক্তি } T_{0m} = \quad\quad =$$

$$= \quad\quad \text{...4.23b}$$

অতএব দেখা যাচ্ছে যে, বিস্তার অনুনাদ ও গতিবেগ অনুনাদ যথাক্রমে সর্বোচ্চ স্থিতিশক্তি ও সর্বোচ্চ গতিশক্তির সর্বাধিক মান সূচিত করে। অবশ্য বহু তন্ত্রেই b অর্থাৎ অবমন্দনের মান খুব কম থাকে। তখন আমরা লিখতে পারি :

$2b^2 << \omega_0^2$ এবং $\omega_r \cong \omega_0$ অর্থাৎ বিস্তার অনুনাদ ও গতিবেগ অনুনাদ তখন প্রায় একই কম্পাঙ্কে ঘটে। পরের অনুচ্ছেদে আমরা $\omega = \omega_0$ শর্তটির গুরুত্ব আরও বুঝতে পারব যখন প্রণোদিত কম্পনের সময় তন্ত্রের শক্তি গ্রহণের হারের বিষয়টি আলোচিত হবে।

এতক্ষণ পর্যন্ত যে সব আলোচনা হল তার ওপর দু'একটি অনুশীলনীর চর্চা করলে কেমন হয়?

অনুশীলনী -3 : $200Nm^{-1}$ স্প্রিং ধ্রুবকের স্প্রিং-এ 200g ভরযুক্ত করে ঝোলানো হল। স্প্রিংটিতে উপস্থিত অবমন্দন বল = $-vNms^{-1}$। এই স্প্রিংটিকে 5N বিস্তার ও 30 $rads^{-1}$ কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট বল প্রযুক্ত হল। বিস্তার, অনুনাদের কম্পাঙ্ক, সর্বোচ্চ গতিশক্তি এবং স্থায়ী অবস্থার বিস্তারের মান এই তন্ত্রের ক্ষেত্রে কত হবে?

অনুশীলনী -4 : সরলরেখায় কম্পনশীল 70g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণার ওপর $14Nm^{-1}$ প্রত্যানয়ক বল ক্রিয়া করে। যদি এই তন্ত্রে উপস্থিত অবমন্দন বলের পরিমাণ একক গতিবেগ $0.7Nsm^{-1}$ হয়, তাহলে কোন কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট সমঞ্জস বল বাইরে থেকে প্রয়োগ করে অনুনাদ সৃষ্টি করা যাবে? যদি এই প্রযুক্ত বলের বিস্তার $8N$ হয়, তবে তন্ত্রের সর্বোচ্চ গতিশক্তি কত?

4.6 প্রণোদিত কম্পনশীল তন্ত্রের শক্তি গ্রহণের হার

প্রণোদিত কম্পনে প্রত্যানয়ক বল, চালক বল ও অবমন্দন বল একসঙ্গে কম্পনশীল বস্তুর উপর কার্য করে। একটি সম্পূর্ণ পর্যায়ে প্রত্যানয়ক বল মোটের উপর কোন কার্যই করে না। চালক ও অবমন্দন বলের ক্ষেত্রে একই কথা বলা যায় না। কম্পনশীল বস্তুটি অবমন্দন বলের বিরুদ্ধে কার্য করার ফলে তার শক্তির ক্ষয় হয়। প্রণোদিত কম্পনের ক্ষেত্রে চালক বল বাইরে থেকে সমহারে শক্তি সরবরাহ করে স্থায়ী কম্পন বজায় রাখে। আমরা এখন এই শক্তি সরবরাহের হার নির্ণয় করব। এজন্য আমরা প্রথমে শক্তি সরবরাহের তাৎক্ষণিক মান এবং তারপর তার সমাকলন করে একটি পূর্ণ পর্যায়ে এই শক্তি সরবরাহের হার নির্ধারণ করব।

সংজ্ঞানুসারে আমরা জানি যে, শক্তি সরবরাহের হার বলতে একক সময়ে শক্তির যোগান বা ক্ষমতা (power) বোঝায়। ক্ষমতার তাৎক্ষণিক মান $P(t)$ হলে, লেখা যায় যে,

$P(t) =$ বল × গতিবেগ ...4.24(a)

4.6.2 অনুচ্ছেদ থেকে পাওয়া v এর ব্যবহার করে লেখা যায়,

$$v =$$

$$= v_0 \cos\left(\omega t - \theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= v_0 \cos(\omega t - \psi) \qquad \text{...4.24(b)}$$

এখানে, $v_0 = \dfrac{F_0\omega}{m\left[\left(\omega^2 - \omega_0^{\,2}\right)^2 + 4b^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}}$ = বেগের বিস্তার এবং, $\psi = \left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$ = বেগ ও চালক বলের দশা পার্থক্য v_0 এবং $F(t)$ এর মান (4.24a) সমীকরণে ব্যবহার করে $P(t)$ র যে মান পাওয়া যায় তা হল,

$$P(t) = F_0 \cos \omega t . v_0 \cos (\omega t - \psi)$$

$$= F_0 v_0 [\cos^2 \omega t \cos \psi + \cos \omega t \sin \omega t \sin \psi]$$

$$= F_0 v_0 \cos \psi \cos^2 \omega t + \quad F_0 v_0 \sin \psi \sin 2\omega t \qquad ...4.25$$

একটি পূর্ণ পর্যায়ে হস্তান্তরিত শক্তির গড় হার বা গড় ক্ষমতা পাওয়ার জন্য (4.25) সমীকরণের উভয় পক্ষকে 0 থেকে T সময়ের মধ্যে সমাকলন করে এবং T দিয়ে ভাগ করে পাই, (T = = দোলনকাল)

$$= \frac{1}{2} F_0 v_0 \cos\psi + 0$$

$$\text{বা, } \langle P \rangle = \frac{1}{2} F_0 v_0 \sin\theta \qquad ...4.26$$

যেহেতু $\cos \psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$

এখন tan θ -এর মান (4.13a সূত্র) থেকে sin θ র মান নির্ণয় করে (সংশ্লিষ্ট পৃষ্ঠার মার্জিন দেখুন) এবং 4.21b সমীকরণ থেকে v_0 র মান 4.26 - এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2 \omega t \, dt = \frac{1}{T}\frac{1}{2}\int_0^T (\cos 2\omega t + 1)\, dt = \frac{1}{2T}.T =$$

$$\text{এবং} \qquad = \frac{1}{T}\left[-\frac{\cos 2\omega t}{2\omega}\right]_0^T = \frac{1}{T}\times 0 = 0 \text{ কারণ, } T =$$

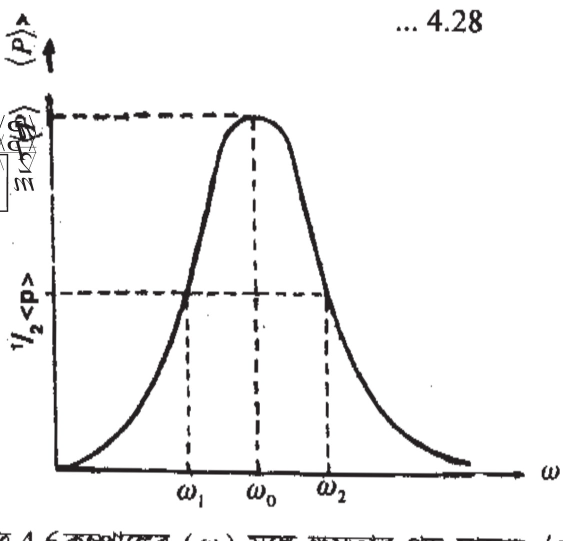
$=$ ...4.27

আবার এই 4.27 সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে যে, এর মান ω র ওপর নির্ভরশীল। এর হরে যেহেতু কেবলমাত্র বর্গসংখ্যা উপস্থিত রয়েছে, তাই হরের সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাবে, যখন $\omega = \omega_0$। এই সময় প্রাপ্ত এর মান সর্বোচ্চ এবং সেই মানকে নিয়ে সূচিত করলে দেখা যায় যে,

(যখন $\omega = \omega_0$)

$$= \frac{F_0^2}{4bm} \qquad ...4.28$$

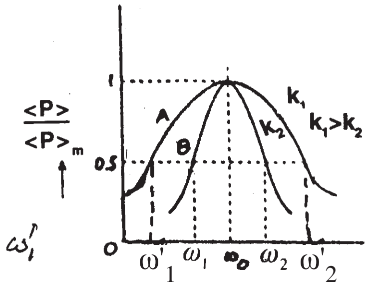
লক্ষ্য করুন, এর মান অর্থাৎ, একক সময়ে চালক থেকে চালিত ব্যবস্থাটিতে সর্বোচ্চ হস্তান্তরিত শক্তি অবমন্দন (b) বা ভর (m) বৃদ্ধি পেলে কমে যায়। তবে প্রযুক্ত বলের বিস্তার F_0 এর বৃদ্ধিতে এর মান বৃদ্ধি পায়। 4.6 চিত্রে গড় হস্তান্তরিত ক্ষমতা । এর সঙ্গে কীভাবে পরিবর্তিত হয়, তা লেখচিত্রের সাহায্যে দেখানো হয়েছে। দেখুন $\omega = \omega_0$ হলে গতিবেগ অনুনাদ পাওয়া যায় এবং ঐ একই শর্ত পূরণ হলে শক্তি হস্তান্তরের গড় হারও সর্বোচ্চ হয়। এটা সম্ভব হয়, কারণ ঐ শর্ত ($\omega = \omega_0$) পূরণ হলে কম্পনশীল তন্ত্রের গতিবেগ এবং প্রযুক্ত বলের মধ্যে দশা পার্থক্য শূন্য হয়। ঐ সময় উভয়েরই তন্ত্রের সরণের থেকে দশা কোণে এগিয়ে থাকে। এই কারণে বিস্তার অনুনাদ অপেক্ষা গতিবেগ অনুনাদ বেশি গুরুত্বপূর্ণ হয়।



চিত্র 4.6 কম্পাঙ্কের (ω) সঙ্গে ক্ষমতার গড় মানের $\langle P \rangle$ পরিবর্তন। লক্ষ করুন, ω_1 এবং ω_2 কম্পাঙ্কের জন্য $\langle P \rangle$ এর মান সর্বোচ্চ মানের অর্ধেক।

4.7 অনুনাদের তীক্ষ্ণতা এবং Q গুণাঙ্ক (Sharpness of resonance & Q factor)

4.6 এবং 4.7 অনুচ্ছেদের আলোচনা থেকে আমরা দেখেছি যে, $\omega = \omega_0$ হলে যেমন গতিবেগ অনুনাদ ঘটে, তেমনই এর মানও সর্বোচ্চ হয়। কিন্তু কেবল অনুনাদী কৌণিক কম্পাঙ্ক ω_0-ই তন্ত্রের একমাত্র বৈশিষ্ট নয়, আরেকটি বিষয়ও অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। অনেক সময়ে দেখা যায়, কোনও তন্ত্রে চালক বলের কৌণিক কম্পাঙ্ক ω যদি ω_0 থেকে সামান্য বিচ্যুত হয়, তবে এর মান থেকে খুব দ্রুত কমে যায়। আবার কোনও কোনও ক্ষেত্রে এই হ্রাস ততটা দ্রুত ঘটে না। 4.7 চিত্রে বিষয়টি দেখানো হয়েছে। এই লেখচিত্রটি কতকটা 4.6 চিত্রের অনুরূপ। তবে এখানে ω এর সঙ্গে এই অনুপাতটির পরিবর্তন তুলে ধরা হয়েছে। দেখা যাচ্ছে যে, দুটি ক্ষেত্রে অনুনাদী কম্পাঙ্ক সমান (ω_0) হলেও, একটি ক্ষেত্রের (A) তুলনায় অপরটিতে (B) ঐ অনুপাতের মান ω এর হ্রাসবৃদ্ধির সঙ্গে অনেক দ্রুত 0.5 বা সর্বোচ্চ মানের অর্ধেকে নেমে এসেছে। ফলত, B লেখচিত্রটি তুলনায় তীক্ষ্ণ অর্থাৎ অনুনাদী কম্পাঙ্ক থেকে সামান্য বিচ্যুতি এক্ষেত্রে শক্তি হস্তান্তরের হারকে অনেক বেশি প্রশমিত করে। পরিভাষায় একে বলা হয়, অনুনাদের তীক্ষ্ণতা (Sharpness of resonance)।



চিত্র 4.7 কম্পাঙ্কের (ω) সঙ্গে $\dfrac{\langle P\rangle}{\langle P\rangle_m}$ - এর পরিবর্তনের ভিন্ন হার ভিন্ন মানের অনুনাদের তীক্ষ্ণতা এবং Q গুণাঙ্ক সূচিত করছে।

কোনও কম্পনশীল তন্ত্রে চালক থেকে চালিতের দিকে শক্তি সরবরাহের হার ω এর হ্রাস বৃদ্ধির সঙ্গে কত দ্রুত তার সর্বোচ্চ মান থেকে অর্ধেক মানে নেমে আসছে, তার সাহায্যে অনুনাদের তীক্ষ্ণতার একটা পরিমাণগত হিসাব করা যায়। যেমন 4.7 চিত্রে দেখুন যখন, $\omega = \omega_0$ তখন এর মান A ও B দুই ক্ষেত্রেই 1.0, কারণ তখন আমরা $\langle P\rangle$ -র সর্বোচ্চ মান প্রত্যক্ষ করব।

এবার দেখুন, B লেখচিত্রে ω এর মান কমে ω_1 বা বৃদ্ধি পেয়ে ω_2 এর সমান হলে এর মান দাঁড়ায় 0.5 অর্থাৎ, শক্তি সরবরাহের গড় হার এখন সর্বোচ্চ মানের অর্ধেক। অপেক্ষাকৃত স্থূল A লেখের ক্ষেত্রে একই ঘটনা ঘটে যখন, $\omega = \omega'_1$ বা ω'_2। লেখচিত্রটি লক্ষ্য করলে দেখা যাবে, তীক্ষ্ণতার লেখ B এর ক্ষেত্রে ω_1 ও ω_2 পার্থক্য, অর্থাৎ $(\omega_2 - \omega_1)$ এর মান $(\omega'_2 - \omega'_1)$ এর চেয়ে কম।

কৌণিক কম্পাঙ্কের যে পাল্লার মধ্যে হস্তান্তরিত ক্ষমতা সর্বোচ্চ মানের অর্ধেক বা তদুর্দ্ধ থাকে, অর্থাৎ

$(\omega'_2 - \omega'_1)$ বা $(\omega_2 - \omega_1)$ কে বলা হয় অর্ধক্ষমতার ব্যান্ডের পূর্ণ প্রসার (half power band width)। এটিকে অর্ধক্ষমতায় ব্যাণ্ডের পূর্ণ প্রসার (Full width at half power) অথবা কেবল ব্যাণ্ডের প্রসারও (band width) বলা হয়।

আগের এককে 3.5.3 অংশে আপনি একটি তন্ত্রের Q গুণাঙ্কের সঙ্গে পরিচিত হয়েছেন। প্রণোদিত কম্পনের ক্ষেত্রে অনুনাদের তীক্ষ্ণতা পরিমাণগত ভাবে নির্দেশ করার জন্য আমরা Q গুণাঙ্কের আরও একটি সংজ্ঞা ব্যবহার করি।

এটি হল : $Q =$ $=$ ...4.29

এর মান কৌণিক কম্পাঙ্কের যত বেশি পাল্লার মধ্যে 0.5 বা তদূর্দ্ধ হয়, অনুনাদের তীক্ষ্ণতাও তত কম হয়। সুতরাং, $(\omega_2 - \omega_1)$ বেশি হলে, তীক্ষ্ণতা কম হবে। আবার 4.29 সূত্র অনুযায়ী Q এর মানও কম হবে। অতএব, Q-এর উচ্চতর মান তীক্ষ্ণতর অনুনাদ সূচিত করে। 4.29 সূত্রে Q গুণাঙ্কের যে রাশিমালা দেওয়া হয়েছে আমরা এবার তার একটি বিকল্প রাশিমালা নির্ণয়ের চেষ্টা করব। 4.27 এবং 4.28 সমীকরণ দুইটি থেকে আমরা পাই,

$=$

[illegible]

যখন বাঁদিকের অনুপাতটি 0.5 এর সমান, তখন দেখা যায়,

$0.5 =$

বা, $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = 4b^2\omega^2$

$\therefore \quad \omega_0^2 - \omega^2 = \pm\, 2b\omega$ ...4.30

ডানদিকের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক চিহ্নের জন্য আমরা 4.30 থেকে দুটি দ্বিঘাত সমীকরণ (quadratic equation) পাই :

$\omega^2 - 2b\omega - \omega_0^2 = 0$ ...4.31

এবং $\omega^2 + 2b\omega - \omega_0^2 = 0$ ...4.32

4.31 সমীকরণ থেকে আমরা পাই, $\omega = b \pm \sqrt{b^2 + \omega_0^2}$ । এর মধ্যে পদার্থবিদ্যায় তাৎপর্যহীন ঋণাত্মক মানটি বাদ দিলে আপনি পাবেন,

$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + b^2} + b$

যেটি অবশ্যই ω_0 অপেক্ষা বৃহত্তর।

আবার 4.3 সমীকরণ থেকে পাওয়া যায় $\omega =$, যার মধ্যে ঋণাত্মক মানটি হল :

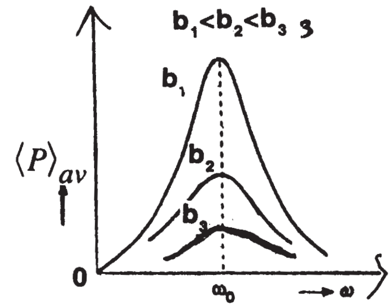
$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^{\,2}+b^2}-b$ । এটি ω_0 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। আপনি বুঝতেই পারছেন যে, এখানে আমরা ω এর ω_0 অপেক্ষা বৃহত্তর ও ক্ষুদ্রতর মান দুটিকেই যথাক্রমে ω_2 ও ω_1 হিসাবে শনাক্ত করলাম। এই দুই কৌণিক কম্পাঙ্কের ব্যবধান,

$$\omega_2 - \omega_1 = 2b \qquad ...4.33$$

এখন 4.33 সমীকরণের সাহায্যে আমরা লিখতে পারি,

$$Q = \qquad = \qquad = \qquad ...4.34$$

4.34 সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে যে, ω_0 বৃদ্ধি পেলে Q বৃদ্ধি পায় কিন্তু নির্দিষ্ট স্বাভাবিক কম্পাঙ্কে অবমন্দন গুণাঙ্ক b বৃদ্ধি পেলে Q এর মান কমে যায়। অর্থাৎ, অনুনাদের তীক্ষ্ণতা হ্রাস পায়। 4.8 চিত্রে এই বিষয়টি একটি তন্ত্রের ω এবং [illegible] লেখচিত্রের মাধ্যমে দেখ[illegible] করুন, প্রতি ক্ষেত্রেই অনুনাদী কৌণিক কম্পাঙ্ক ω_0 কিন্তু b এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে কেবল -এর মানই কমেনি, লেখচিত্রগুলি অধিকতর স্থূল হয়েছে, অর্থাৎ অনুনাদের তীক্ষ্ণতা হ্রাস পেয়েছে এবং Q এর মান কমে গেছে।



চিত্র 4.8 বিভিন্ন অবমন্দনের জন্য ω -র সঙ্গে $\langle P \rangle_v$ - এর পরিবর্তনের লেখচিত্র।

Q গুণাঙ্কের আরও একটি সংজ্ঞা আপনার কাজে লাগতে পারে। আমরা আগেই দেখেছি, একটি কম্পনশীল তন্ত্র, প্রতিটি পর্যায়ে (cycle) অবমন্দন বলের বিরুদ্ধে কার্য করে এবং তার ফলে তন্ত্রটি শক্তি হারায়। অন্যদিকে, চালক বল দ্বারা কৃত কার্যের ফলে কম্পনশীল তন্ত্রে শক্তি সঞ্চিত হয়। কোনও একটি তন্ত্র তার সঞ্চিত শক্তির যত ক্ষুদ্র ভগ্নাংশ একটি পর্যায়ে অবমন্দন বলের বিরুদ্ধে ব্যয় করে, তার Q গুণাঙ্ক ততই অধিক হয়। এই দৃষ্টিভঙ্গি থেকে Q এর যে সংজ্ঞা পাওয়া সেটি হল :

$$Q = 2\pi \qquad ...4.35$$

আমরা পরে দেখব যে, বৈদ্যুতিক বর্তনীতে প্রবাহমাত্রার অনুনাদের বিষয়টি ভাল করে বুঝবার জন্য Q গুণাঙ্ক একটি অতি প্রয়োজনীয় ধারণা।

অনুশীলনী -5 : $10Nm^{-1}$ স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট একটি অনুভূমিক স্প্রিং-এর একদিক আবদ্ধ ও অন্যদিকে স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্য বরাবর চলনশীল 100g ভরের একটি বস্তু আটকানো আছে। ভরটির ওপর একক বেগ পিছু 0.1N অবমন্দন বল ক্রিয়া করে। বস্তুটির ওপর তার সরণের দিক বরাবর $\cos \omega t$ নিউটন চালক বল প্রয়োগ করা হল। বস্তুটির স্থায়ী অবস্থার কম্পনের বিস্তার নির্ণয় করুন, যখন (i) $\omega = 1\ rad\ s^{-1}$ ও (ii) $\omega = 50\ rad\ s^{-1}$। তন্ত্রটির Q গুণাঙ্ক নির্ণয় করুন।

অনুশীলনী -6 : প্রমাণ করুন যে, কোনও প্রণোদিত কম্পনের ক্ষেত্রে প্রতি চক্রে যে গড় শক্তি চালিত তন্ত্র লাভ করে তা হল,

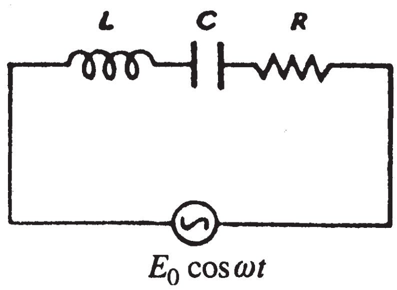
$$< E > =$$

যেখানে চিহ্নগুলি প্রচলিত অর্থবহ। দেখান যে এক্ষেত্রে

$$Q = \frac{\omega^2 + \omega_0{}^2}{4b\omega}$$

4.8 প্রত্যাবর্তী তড়িচ্চালক বল সহ শ্রেণী সমবায়ে যুক্ত আবেশ (L), ধারক (C) এবং রোধ (R) সম্বলিত বর্তনীতে প্রণোদিত কম্পন ও অনুনাদ।

আমরা এই এককে এ পর্যন্ত যান্ত্রিক তন্ত্রে প্রণোদিত কম্পন ও অনুনাদ বিষয়ে আলোচনা করেছি। কিন্তু এই ঘটনাগুলি কেবল যান্ত্রিক তন্ত্রেই সীমাবদ্ধ নয়। শ্রেণী সমবায়ে যুক্ত আবেশ (L), ধারক (C) এবং রোধ (R) সম্বলিত বর্তনী, অর্থাৎ *L–CR* শ্রেণী সমবায় বর্তনীতে (*L–CR* series circuit) যদি একটি প্রত্যাবর্তী তড়িচ্চালক বল (alternating emf) প্রয়োগ করে তার কম্পাঙ্ক পরিবর্তন করা যায়, তাহলে সেখানেও প্রণোদিত বৈদ্যুতিক কম্পন ও অনুনাদ পর্যবেক্ষণ করা সম্ভব। 4.9 চিত্রে এই *LCR* বর্তনীটি দেখানো হয়েছে।



চিত্র 4.9 শ্রেণী সমবায়ে যুক্ত আবেশ (L), ধারক(C) এবং রোধক (R) এর সঙ্গে প্রত্যাবর্তী তড়িচ্চালক বল $E_0 \cos \omega t$ সহ বর্তনী।

তৃতীয় এককে আপনি একই ধরনের বর্তনীতে আহিত ধারকের আধান সময়ের সঙ্গে কীভাবে হ্রাস পায়

তা দেখেছেন। এখানে প্রত্যাবর্তী তড়িচ্চালক বলের উপস্থিতিতে আমরা কিছুটা ভিন্ন অবস্থা লক্ষ্য করব। প্রত্যাবর্তী তড়িচ্চালক বল প্রকৃতপক্ষে চালক বলের ভূমিকা পালন করে।

আমরা জানি যে, একটি নির্দিষ্ট সময় t তে যদি বর্তনীর প্রবাহমাত্রা I হয় তাহলে, L, R এবং C-তে বিভব পতনের সমষ্টিকে নিম্নলিখিত সমীকরণের সাহায্যে যুক্ত করা যায়।

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = E_0 \cos \omega t \qquad ...4.36$$

এই সমীকরণে বাঁ-দিকের তিনটি পদ যথাক্রমে L, R এবং C-এর দুই প্রান্তের মধ্যে বিভবপতন সূচিত করছে। এখানে E_0 হচ্ছে প্রত্যাবর্তী তড়িচ্চালক বলের সর্বোচ্চ মান বা বিস্তার, ω তার কৌণিক কম্পাঙ্ক। 'q' সূচিত করছে 't' সময়ে ধার C -এর কোনও এক পাতে আধানের পরিমাণ।

এখন $I =$ লিখলে 4.36 সমীকরণ পরিবর্তিত হয়ে দাঁড়ায়,

$$= E_0 \cos \omega t \qquad ...4.37$$

সমীকরণের উভয়পক্ষকে L দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{E_0}{L}\cos \omega t \qquad ...4.38a$$

এখন, $= 2b$ এবং $= \omega_0^2$ বসিয়ে লেখা যায়,

$$= \frac{E_0}{L}\cos \omega t \qquad ...4.38b$$

এই সমীকরণটি নিশ্চয়ই আপনার খুব পরিচিত মনে হচ্ছে। এটি এই এককের 4.3 সমীকরণের অনুরূপ। ঐ সমীকরণে যেমন অবমন্দন সহ প্রণোদিত যান্ত্রিক দোলনের একটি গতিশীল অবস্থা বর্ণিত হয়েছিল, ঠিক একইভাবে 4.38b সমীকরণটিও LCR বর্তনীতে বৈদ্যুতিক আধানের প্রণোদিত দোলন বোঝাচ্ছে। লক্ষ্য করুন, q এখানে 4.3 সমীকরণের x এর জায়গা নিয়েছে এবং $E_0 \cos \omega t$এখানে চালক বল '$F_0 \cos \omega t$' -এর ভূমিকা পালন করছে। তাই 4.15 সমীকরণ অনুসরণ করে স্থায়ী অবস্থার সমাধান হিসাবে এখানে লেখা যায়,

$$q(t) = \qquad ...4.39$$

লক্ষ্য করুন, 4.38b এবং 4.39 সমীকরণ দুটি থেকে সহজেই বোঝা যাচ্ছে যে, এই বর্তনীতে L যান্ত্রিক তন্ত্রের ভর বা m এর সমতুল ভূমিকা পালন করছে এবং R পালন করছে γ বা একক গতিবেগে অবমন্দন

বলের ভূমিকা। তন্ত্রটির স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক $\omega_0\left(=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}\right)$ পাওয়া যাচ্ছে, L এবং C থেকে এবং এখানে পালন করছে যান্ত্রিক তন্ত্রের 'K'-এর অর্থাৎ, প্রত্যানয়ন গুণাঙ্কের ভূমিকা।

(4.39) সমীকরণের উভয় পক্ষকে t র সাপেক্ষে অবকলন (differentiate) করে প্রবাহমাত্রা I পাওয়া যায়।

$$I = \qquad =$$

$$= \frac{E_0\cos(\omega t-\psi)}{\dfrac{L}{\omega}\left[\left(\dfrac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\dfrac{R^2\omega^2}{L^2}\right]^{\frac{1}{2}}}\ ,$$ যেখানে $\psi = \theta-\dfrac{\pi}{2}$

$$= \frac{E_0\cos(\omega t-\psi)}{\left[\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2+R^2\right]^{\frac{1}{2}}} = I_0\cos(\omega t-\psi) \qquad \text{...4.40}$$

এখানে, $I_0 =$ ...4.41a

এবং, $\tan\psi = -\cot\theta = \qquad = \dfrac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R}$ ...4.41b

ψ কোণটি প্রযুক্ত তড়িচ্চালক বল ($E = E_0\cos\omega t$) এবং তড়িৎ প্রবাহের (I) মধ্যে দশা পার্থক্য। এই দশা পার্থক্য কেবল L, C এবং R -ই নয়, ω এর ওপরও নির্ভরশীল।

4.40 সমীকরণে I_0 প্রবাহের বিস্তার সূচিত করছে। এই বিস্তার ω -এর সঙ্গে পরিবর্তনশীল। ω-এর পরিবর্তনের ফলে I_0 এর মান যখন সর্বোচ্চ হয়, তখন বর্তনীতে অনুনাদ পাওয়া যায়।

I_0 এর রাশিমালাটি লক্ষ্য করলে দেখা যাবে তার হর

$$\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}$$

যার মধ্যে $\left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2$ একটি বর্গসংখ্যা। এর সর্বনিম্ন মান শূন্য। অপর অংশ R, ω -এর ওপর নির্ভর করে না। তাই হরের সর্বনিম্ন বা I_0 এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায় যখন,

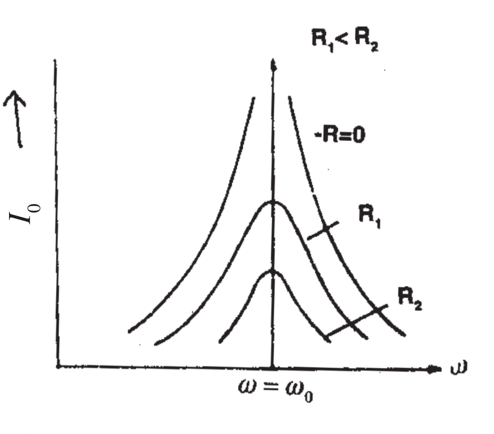
$$= 0 \text{ বা, } \omega^2 = \frac{1}{LC} \qquad ...4.42$$

কিন্তু আমরা জানি যে, $= \omega_0^2$ । অতএব বলা যায় যে, যখন আরোপিত প্রত্যাবর্তী তড়িচ্চালক বলের কম্পাঙ্ক ω_1 বর্তনীর স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক ω_0 এর সমান হবে, তখনই অনুনাদ পাওয়া যাবে। অনুনাদের সময় I_0-র সর্বোচ্চ মান হয়

$$I_{0m} = \qquad ...4.43$$

অর্থাৎ, অনুনাদের সময় বর্তনী কেবলমাত্র রোধযুক্ত বর্তনীর মত আচরণ করে।

এক্ষেত্রে দশা পার্থক্য $\psi =$ $= 0$। ভেবে দেখুন, এটা কিন্তু প্রত্যাশিতই ছিল। কারণ বিশুদ্ধ রোধযুক্ত বর্তনীতে প্রত্যাবর্তী তড়িচ্চালক বলের প্রবাহমাত্রার দশার পার্থক্য শূন্য হয়। আরও লক্ষ্য করুন, I_0 র সর্বোচ্চ মান R এর ওপর নির্ভর করে। R কমে গেলে I_{0m} এর মানও বাড়ে। কারণ আগেই দেখেছেন, R এই বর্তনীতে অবমন্দনের ভূমিকা পালন করে। তবে খেয়াল রাখা দরকার যে, R -এর মান শূন্য হলে বা বর্তনীতে আলাদা করে কোনও রোধ যুক্ত না করলেও I_{0m} এর মান অসীমের দিকে চলে যাবে না। কারণ বাস্তব বর্তনীতে আবেশ L এর সঙ্গে কিছু রোধ সর্বদাই থেকে যায় এবং সেই রোধই I_{0m} এর মান নিয়ন্ত্রণ করে। 4.10 চিত্রে বিভিন্ন R এর জন্য ω -র সঙ্গে I_0 -র পরিবর্তনের লেখচিত্রটি দেখানো হয়েছে।



চিত্র 4.10 কম্পাঙ্কের (ω) সঙ্গে প্রবাহমাত্রার বিস্তারের (I_0) পরিবর্তন R - এর মান হ্রাসের সঙ্গে সঙ্গে $(I_0)_{max}$ এর মান বৃদ্ধি পায় এবং $\omega = \omega_0$ কম্পাঙ্কে এই মান প্রত্যক্ষ করা যায়।

আমরা আমাদের পরিচিত সংজ্ঞা অনুযায়ী এই বর্তনীর ক্ষেত্রেও Q গুণাঙ্ক তথা অনুনাদের তীক্ষ্ণতা নির্ণয় করতে পারি। 4.34 সূত্র অনুসরণ করে এই বর্তনীর Q গুণাঙ্কটি লেখা যায় :

$$Q = \frac{\omega_0}{2b} = \qquad = \qquad ...4.44$$

অতএব দেখা যাচ্ছে যে, বর্তনীর Q গুণাঙ্ক অনুনাদী কম্পাঙ্ক ω_0, আবেশ L এবং রোধ R-এর মানের ওপর নির্ভর করে। R হ্রাসের সঙ্গে সঙ্গে কেবল I_0 নয়, Q এর মানও বৃদ্ধি পায়। 4.42 সমীকরণ অনুযায়ী

$\omega_0 =$ লিখলে Q গুণাঙ্কের আরেকটি বিকল্প রাশিমালা পাওয়া যায় :

$$Q = \qquad = \qquad = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad ...4.45$$

সুতরাং, বর্তনীর Q গুণাঙ্কের মান আবেশ L, ধারকত্ব C ও রোধ R, এই তিনটি ওপরই নির্ভরশীল।

শ্রেণী সমবায়ে যুক্ত LCR বর্তনীতে আমরা যে অনুনাদের ঘটনা লক্ষ্য করলাম, তার জন্য এই বর্তনীকে শ্রেণী সজ্জা অনুনাদী বর্তনী (Series resonant circuit) বলা হয়। এই বর্তনীর Q গুণাঙ্কের আরেকটি তাৎপর্য্য এই প্রসঙ্গে উল্লেখযোগ্য। Q গুণাঙ্কের মান অধিক হওয়ার ফলে, LCR বর্তনীতে কম্পাঙ্কের একটি অপরিসর ব্যান্ডে অনুনাদ ঘটে। এর ফলে বহু বিভিন্ন কম্পাঙ্কের মিশ্র তরঙ্গ থেকে এই বর্তনী একটি বিশেষ কম্পাঙ্ক নির্বাচন করতে সক্ষম হয়। তাই বেতার গ্রাহক বা রেডিও যন্ত্রে এর বিশেষ ভূমিকা রয়েছে। রেডিওর অ্যান্টেনায় গৃহীত তরঙ্গে নানা কম্পাঙ্কের তরঙ্গ উপস্থিত থাকলেও, LCR বর্তনীর সাহায্যে বিশেষ কম্পাঙ্ক বেছে নেওয়া যায়। বস্তুত C এবং L কে পরিবর্তিত করে আমরা বর্তনীর অনুনাদী কম্পাঙ্ক নিয়ন্ত্রণ করি এবং তার দ্বারা বিভিন্ন বেতার কেন্দ্রের সম্প্রচার শুনতে পারি। Q এর মান যত বেশি হয়, একটি বিশেষ বেতার কেন্দ্রের সম্প্রচার তত সুস্পষ্ট ভাবে ধরা সম্ভব।

আসুন এককের আলোচনা শেষ করার আগে এই অনুশীলনীটি চেষ্টা করে দেখুন।

অনুশীলনী - 7 : একটি শ্রেণীসজ্জা - অনুনাদী বর্তনীতে $L = 0.5mH$, $R = 30\ \Omega$। এই বর্তনীতে 1.2v বিস্তার ও $10^5 Hz$ কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট একটি প্রত্যাবর্তী তড়িচ্চালক বল যুক্ত করা হল। C এর মান কত হলে অনুনাদ পাওয়া যাবে? তখন প্রবাহমাত্রার সর্বোচ্চ মান কত হবে? ঐ বর্তনীর Q-এর মান নির্ণয় করুন।

4.9 সারাংশ

1. কম্পনশীল তন্ত্রের কম্পন অবমন্দনের ফলে ধীরে ধীরে লয়প্রাপ্ত হয়। বাইরে থেকে প্রয়োগ করা পর্যাবৃত্ত বলের সাহায্যে অবমন্দনের উপস্থিতিতেও কম্পন বজায় রাখা সম্ভব হয়।

2. চালক বলের প্রভাবে প্রণোদিত কম্পনের সৃষ্টি হয়। এই কম্পনের সময় দূরত্ব সমীকরণ নিচের অবকল সমীকরণের সমাধানের মাধ্যমে পাওয়া যায় :

$$= f_0 \cos \omega t$$

এখানে, ভর $2b = \frac{\gamma}{m}$ $(m =) \omega_0^2 =$, $f_0 =$ এবং $\omega =$ চালক বলের কৌণিক কম্পাঙ্ক।

3. প্রণোদিত দোলনের সময় দূরত্ব সমীকরণের দুটি অংশ। এর প্রথমটি (μ) স্বল্পস্থায়ী সমাধান এর অল্পক্ষণ পরে বিলুপ্ত হয়ে যায়। দ্বিতীয়টি (x_2) স্থায়ী অবস্থার সমাধান, যা চালক বল যতক্ষণ উপস্থিত থাকে, ততক্ষণই লক্ষ্য করা যায়। সমীকরণটির সম্পূর্ণ সমাধান,

$$x = x_1 + x_2 = A_0 e^{-bt} \cos(\omega' t + Q) \_ B \cos(\omega t - \theta)$$

যেখানে, $B =$

4. অবমন্দনের জন্য চালক বল এবং সরণের মধ্যে একটি দশা পার্থক্য দেখা যায়। এই দশা পার্থক্য 'b', ω এবং ω_0 -র ওপর নির্ভরশীল।

5. চালক বলের কম্পাঙ্ক পরিবর্তন করে তার বিশেষ মানের জন্য অনুনাদ পাওয়া যায়। যেমন $\omega_\gamma =$ হলে, স্থায়ী অবস্থায় সর্বোচ্চ বিস্তার লক্ষ্য করা যায় এবং বিস্তার অনুনাদ পাওয়া যায়। $\omega = \omega_0$ হলে গতিবেগ অনুনাদ পাওয়া যায়। এই সময় কম্পনশীল বস্তুকণার গতিবেগ সর্বোচ্চ। বিস্তার ও বেগের সর্বোচ্চ মানগুলি অবমন্দন গুণাঙ্ক b দ্বারা নিয়ন্ত্রিত হয়।

6. চালক বল চালিত তন্ত্রকে শক্তি সরবরাহ করে কম্পন বজায় রাখে। শক্তি সরবরাহের গড় হার সর্বোচ্চ হওয়ার জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত $\omega = \omega_0$

7. তীক্ষ্ণতা অনুনাদের একটি গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য। Q গুণাঙ্ক নির্ণয়ের সাহায্যে এই তীক্ষ্ণতার পরিমাপ করা যায়। যদি ω_2 ও ω_1 কৌণিক কম্পাঙ্কে গড় হস্তান্তরিত ক্ষমতা সর্বোচ্চ মানের অর্ধেক হয় তবে,

$$Q \text{ গুণাঙ্ক} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} =$$

8. তড়িৎ বর্তনীতে প্রণোতি কম্পন লক্ষ্য করা যায়। একটি LCR শ্রেণীসজ্জা - বর্তনীতে পরিবর্তনশীল কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট প্রত্যাবর্তী তড়িচ্চালক বল প্রয়োগ করে প্রবাহমাত্রার অনুনাদ পাওয়া সম্ভব। এই বর্তনীর অনুনাদী কম্পাঙ্ক ω_0 হলে, $\omega_0 =$,

সর্বোচ্চ প্রবাহ, $I_{0m} =$ এবং

ω বর্তনীর Q গুণাঙ্ক = =

4.10 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. প্রমাণ করুন যে, অবমন্দিত প্রণোদিত কম্পনের ক্ষেত্রে কম্পনশীল তন্ত্রের মোট শক্তি ধ্রুবক নয়। এই সঙ্গে দেখান যে, তন্ত্রটির

পূর্ণ পর্যায়ে =

2. দেখান যে, কোনও লঘু অবমন্দন সহ প্রণোদিত কম্পনের ক্ষেত্রে তন্ত্রের বিস্তার ও দশা, Q =

ব্যবহার করে নিম্নলিখিত ভাবে প্রকাশ করা যায়,

$$B(\omega) =$$

এবং $\tan\theta$ = । এখানে B_0 =

3. একটি শ্রেণী সমবায়ের LCR বর্তনীতে $C = 50\mu F$, $R = 10\Omega$, ঐ বর্তনীতে যুক্ত প্রত্যাবর্তী তড়িচ্চালক বলের বিস্তার 20v এবং কম্পাঙ্ক 60 Hz। L-এর কোন মানের জন্য বর্তনীতে তড়িৎ প্রবাহের মান সর্বোচ্চ হবে? ঐ সর্বোচ্চ তড়িৎ প্রবাহের মান কত?

4.11 উত্তরমালা

অনুশীলনী - 1 : দেওয়া আছে $m = 0.2$kg, $k = 200Nm^{-1}$, $F_0 = 12N$, $\omega = 50\ rad\ s^{-1}$

অবমন্দন গুণাঙ্ক $\gamma = 2Nsm^{-1}$

$$\omega_0^2 = \quad = \quad = 1000\ rad^2\ s^{-2}$$

$$f_0 = \quad = \quad = 60\ N\ kg^{-1}$$

$2b = \quad = \quad = 10s^{-1} \qquad \therefore\ b = 5s^{-1}$

$\therefore$ স্থায়ী অবস্থার বিস্তার $B = \qquad =$

$= \qquad = .038\ m = 3.8\ cm$

সরণ ও প্রযুক্ত বলের মধ্যে দশা কোণ θ হলে

$$\tan\theta = \frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2.5.50}{1000 - 2500} = -\,0.33$$

$\therefore\ \theta = 180^\circ - 18.4^\circ = 161.6^\circ$ অর্থাৎ, সরণ বলের তুলনায় 161.6° দশাকোণে এগিয়ে থাকবে।

অনুশীলনী -2 : ধরা যাক স্প্রিং-এর প্রসারণ যখন শূন্য, তখন ভরটি $z = 0$ অবস্থানে আছে। z দূরত্ব ঐ বিন্দু থেকে নিচের দিকে মাপা হলে, অবমন্দিত দোলনের অবকল সমীকরণ

$$= mg$$

এখানে, $m = 0.1\,kg$; $\gamma = 5\,Nsm^{-1}$, $k = 150\,Nm^{-1}$

অবকল সমীকরণটির প্রতিটি পদ m দিয়ে ভাগ করে 4.5 এর মত লেখা যায়,

$$= g$$

বা, $\dfrac{d^2z'}{dt^2} + 2b\dfrac{dz'}{dt} + \omega_0^2 z' = 0$ যেখানে, $z' = z - \dfrac{mg}{k}$

$2b = \dfrac{\gamma}{m} = \quad = 50s^{-1},\ b = 25s^{-1},\ \omega_0^2 = \quad = \quad = 1500s^{-2}$

$\therefore$ অবমন্দিত দোলনের কম্পাঙ্ক $=$

$=$

আরোপিত বল $F = 3\cos 20t\ N$

$\therefore\ \mathrm{F}_0 = 3N, f_0 = \frac{F_0}{m} = \quad = 30ms^{-2},\ \omega = 20\ s^{-1}$

স্থায়ী অবস্থায় প্রণোদিত কম্পনের বিস্তার (4.14 সমীকরণ দেখুন)

$B =$

$= \quad = .02m$ বা, $2cm$

দশার পার্থক্য θ (4.13b সমীকরণ অনুযায়ী) =

$$= \tan^{-1}\frac{2.25.20}{1500-400} = \tan^{-1} 0.91 = 42^{o}$$

অনুশীলনী -3 : এখানে $k = 200\ Nm^{-1}$, $m = 200g = 0.2\ kg$

$\omega_0^{2} = \quad = 1000 s^{-2}$

অবমন্দন বল $-\ yv = -v \qquad \therefore\ \gamma = 1\ Nsm^{-1}$

$2b = \quad = \quad = 5s^{-1} \qquad \therefore\ b = \quad = 2.5$

$F_0 = 5N,\ \ \omega = 30s^{-1}$

বিস্তার অনুনাদের কম্পাঙ্ক ω_r হলে, (4.18) সমীকরণ অনুযায়ী,

$$\omega_r = \quad = \sqrt{1000-\frac{25}{2}} = 44.6\ rad\ s^{-1}$$

সর্বোচ্চ গতিশক্তি $(KE)_{\max}$ (4.23) সমীকরণ অনুযায়ী পাওয়া যায়,

$$(KE)_{\max} = \frac{F_0^{\,2}}{8b^2m} = 2.5J.$$

স্থায়ী অবস্থার প্রণোদিত কম্পনের বিস্তার B,

$B =$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $= 13.8 \times 10^{-2}\ m$

$= 13.8\ cm$

অনুশীলনী - 4 : এখানে $m = 70g = 0.07kg$, $k = 14Nm^{-1}$, $\gamma = 0.7\ Nsm^{-1}$

$\therefore\ b = \dfrac{\gamma}{2m} =$ $\qquad$ $= 5s^{-1}$ $\quad \omega_0^2 =$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $= 200s^{-2}$

বিস্তার অনুনাদের জন্য প্রযুক্ত বলের প্রয়োজনীয় কম্পাঙ্ক

$\omega_r =$ $\qquad$ $= \sqrt{200 - 2.5^2} = 12.2s^{-1}$

গতিবেগ অনুনাদের জন্য প্রযুক্ত বলের প্রয়োজনীয় কম্পাঙ্ক $\omega = \omega_0$

$\therefore\ \omega = \omega_0 = \sqrt{200}\, s^{-1} \qquad \therefore\ \omega = 14.1\ s^{-1}$

আপনি নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছেন যে, এই উদাহরণে ω_r ও ω_0 -এর মধ্যে বেশ কিছুটা পার্থক্য আছে। এর কারণ, এখানে ω_0 ও b রাশি দুইটি তুলনীয় মানের। অর্থাৎ, এখানে অবমন্দন মোটেই নগণ্য নয়।

প্রযুক্ত বলের বিস্তার $F_0 = 8N$

4.20 সমীকরণ থেকে সর্বোচ্চ গতিশক্তি আমরা লিখতে পারি

$V_m =$ $\qquad$ $= \dfrac{8^2 \times 200}{8 \times .07 \times 5^2 (200 - 5^2)}$

$= 5.2\ J$

অনুশীলনী -5 : $m = 100g = 0.1kg$, $k = 10\ Nm^{-1}$, $\gamma = 0.1\ Nsm^{-1}$, $F_0 = 1N$

$2b = \dfrac{\gamma}{m} =$ $\qquad$ $= 1\ s^{-1}$ $\qquad \omega_0^2 =$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $= 100\ s^{-2}$

$f_0 =$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ $= 10\ ms^{-2}$ এবং $4b^2 = 1\ s^{-2}$

(i) যখন $\omega = 1\ rad\ s^{-1}$, স্থায়ী অবস্থায় পাই,

বিস্তার $B =$ =

= = $\frac{10}{99.01} = 0.1\ m = 10\ cm$

(ii) যখন $\omega = 50\ rad\ s^{-1}$

$B =$ $= 0.004\ m = 4\ mm$

উভয় ক্ষেত্রেই Q গুণাঙ্ক $= \frac{\omega_0}{2b} =$ $= 10$

অনুশীলনী - 6 : প্রণোদিত কম্পনের ক্ষেত্রে কোনও সময় তন্ত্রের স্থিতিশক্তি :

$V =$ [illegible]

ধরা যাক, পর্যায়কাল $= T_0$

পূর্ণ পর্যয়ে গড় স্থিতিশক্তি ধরা যাক

$$= \frac{1}{2T_0}.m\omega_0^2 B^2 \int_0^{T_0} \frac{1}{2}[\cos^2(\omega t - \theta) + 1]\,dt$$

$$= \frac{1}{2T_0}.m\omega_0^2 B^2.\left(\frac{T_0}{2}\right) =$$

আবার গতিশক্তি T $= \frac{1}{2}mx^2 =$

একইভাবে পূর্ণ পর্যায়ে গড় গতিশক্তি হলে

$=$

$$= \frac{1}{4} m\omega^2 B^2$$

প্রতি চক্রে মোট গড় শক্তি $\langle E \rangle$ হলে

$$= \quad + \quad = \quad + \frac{1}{4} m\omega^2 B^2$$

$$= \frac{1}{4} m(\omega^2 + \omega_0^2) B^2$$

প্রতি পর্যায়ে অবমন্দনের বিরুদ্ধে কার্য করার ফলে শক্তির হ্রাস হয়। একক গতিবেগে অবমন্দন বল γ হলে, ক্ষমতা হ্রাসের মান = (বল × দূরত্ব) ÷ সময় = বল γv × বেগ $v = \gamma v^2$

সুতরাং অবমন্দন বলের বিরুদ্ধে ব্যয়িত ক্ষমতা

$$\langle \gamma v^2 \rangle = bm\omega^2 B^2$$

কেননা $\gamma = 2bm$, $v^2 = B^2\omega^2 \sin^2 (\omega t - \theta)$ এবং

এখন আমরা দেখেছি যে, Q গুণাঙ্ককে লেখা যায় (4.35 থেকে)

$$Q = 2\pi \frac{\text{তন্ত্রে সঞ্চিত শক্তি}}{\text{পূর্ণ পর্যায়ে ব্যয়িত শক্তি (= দোলনকাল × ব্যয়িত ক্ষমতা)}}$$

$$= \qquad =$$

অনুশীলনী -7 : এখানে কম্পাঙ্ক $f = 10^5\ Hz$, $\omega_0 = 2f\pi s^{-1}$, $E_0 = 1.2\text{V}$

যেহেতু, $\omega_0 =$ $\quad \therefore C =$

এক্ষেত্রে $L = 0.5\ mH$, $\omega_0 = 2\pi \times 10^5\ s^{-1}$, $R = 30\Omega$

$$= \frac{1}{40 \times 10^{10} (0.5) \times 10^{-3}} F \cong 5.1 \times 10^{-9} F = 5.1 nF$$