$$(I_0)_{\max} = \frac{E_0}{R} = \qquad = .04\ A = 40\ mA$$

$$Q = \qquad = \qquad = 10.5$$

সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. প্রণোদিত কম্পনের ক্ষেত্রে স্থায়ী অবস্থায় কম্পনশীল ভরের স্থিতিশক্তি $V = \frac{1}{2}kx^2$

$$= \frac{1}{2}m\omega_0^2 B^2 \cos^2(\omega t - \theta)$$

গতিশক্তি

$\therefore$ মোট শক্তি

দেখা যাচ্ছে, মোট শক্তি E সময় 't' এর ওপর নির্ভরশীল এবং ধ্রুবক নয়। এখন একটি পূর্ণ চক্রে স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তির গড় মান নির্ণয় করা যাক।

পূর্ণ চক্রে গড় স্থিতিশক্তি =

=

পূর্ণচক্রের গড় গতিশক্তি $= \langle KE \rangle_{av.} = \frac{1}{T}\int_0^1 \frac{1}{2} m\omega^2 B^2 \sin^2(\omega t - \theta)_{dt}$

$$\therefore \frac{\text{একটি পূর্ণ চক্রে গড় স্থিতিশক্তি}}{\text{একটি পূর্ণ চক্রে গড় গতিশক্তি}} =$$

2. লঘু অবমন্দন সহ প্রণোদিত কম্পনের ক্ষেত্রে আমরা জানি যে স্থায়ী অবস্থার বিস্তার

$$B(\omega) = \frac{F_0}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega\omega_0\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{4b^2}{\omega_0^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

এখন, $Q = \frac{\omega_0}{2b}$ এবং ব্যবহার করে পাওয়া যায়,

$$B(\omega) = B_0 \frac{\frac{\omega_0}{\omega}}{\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + Q^{\frac{1}{2}}\right]}$$

আবার, $\tan\theta = \frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2b\omega}{\omega\omega_0\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)}$

যেহেতু, $Q = \frac{\omega_0}{2b}$ $\therefore$

$\therefore$

$= \frac{1}{(120\pi)^2 \times 50\times 10^{-6}} = 0.14H$

3. আমরা জানি,

এর সর্ব্বোচ্চ মান পাওয়া যায় যখন,

$\omega L = \frac{1}{\omega C}$ বা, $\omega^2 = \frac{1}{LC}$

এখানে $C = 50\mu F, \omega = 2\pi 60 s^{-1} = 120\pi s^{-1}$

$\therefore$

$I_0 -$ র সর্ব্বোচ্চ মান হলে,

একক 5 যুগ্মিত দোলন (Coupled oscillation)

গঠন

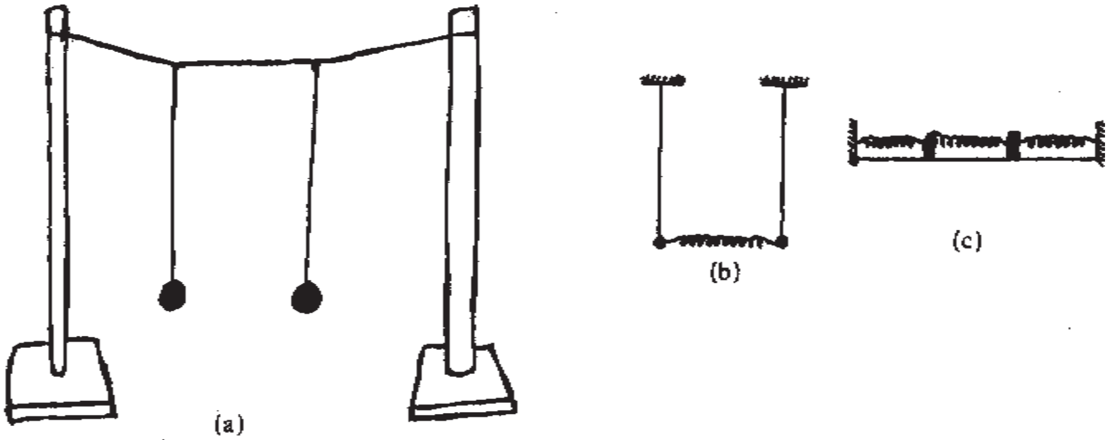
5.1 প্রস্তাবনা

এই পর্যায়ে আমরা এ পর্যন্ত একক দোলকের দোলন সম্বন্ধে আলোচনা করেছি। এর মধ্যে পূর্ববর্তী এককে প্রণোদিত দোলনের আলোচনায় আমার দেখেছি, চালক বল কীভাবে বাইরে থেকে শক্তি সরবরাহের মাধ্যমে চালিত তন্ত্রে কম্পন বজায় রাখে। এক্ষেত্রে শক্তির হস্তান্তর কেবলমাত্র একদিকে অর্থাৎ চালক থেকে চালিতের দিকে ঘটে থাকে—চালকের দিকে শক্তি ফেরত আসে না এবং এর ফলে চালকের অবস্থার কোনও পরিবর্তন ঘটে না। তখনই আমরা উল্লেখ করেছিলাম যে, যদি শক্তির হস্তান্তর উভয়মুখী হওয়া সম্ভবপর হয়, তাহলে চালক ও চালিতকে আলাদাভাবে চিহ্নিত করা যাবে না। তখন যে কম্পন দেখা যাবে, তার বিভিন্ন পর্যায়ে শক্তি হস্তান্তরের অভিমুখ পরিবর্তিত হবে এবং একটি তন্ত্রকে একবার চালিতের ভূমিকায় দেখলে কিছু পরেই সেটি চালকের আসন গ্রহণ করবে। এই পরিবর্তন চলতেই থাকবে যতক্ষণ না কম্পন সম্পূর্ণ বন্ধ হচ্ছে। এই ধরনের কম্পন আমাদের পূর্ব পরিচিত কম্পন থেকে ভিন্ন এবং পদার্থবিদ্যার পরিভাষায় একে বলা হয় যুগ্মিত দোলন (coupled oscillation)।

এই এককে আমরা প্রধানত দুটি যুগ্মিত দোলকের কম্পন সম্বন্ধে আলোচনা করব। তবে এই আলোচনায় আপনি যে গাণিতিক পদ্ধতির সঙ্গে পরিচিত হবেন, সেটি যে কোনও সংখ্যক যুগ্মিত দোলকের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যায়।

প্রকৃতিতে যুগ্মিত দোলনের অনেক উদাহরণ দেখতে পাওয়া যায়। জলের অণুতে অক্সিজেন পরমাণু দুটি হাইড্রোজেন পরমাণুর প্রতিটির সঙ্গে মিলিত হয়ে এক একটি দোলক রচনা করে। অক্সিজেন পরমাণুর মাধ্যমে এই দুটি দোলক যুগ্মিত থাকে। দুটি সরল দোলক যদি একই টান করে রাখা রজ্জু থেকে ঝোলানো থাকে,

তাহলে ঐ রজ্জুর স্থানচ্যুতির মাধ্যমে দোলক দুটি যুগ্মিত হয় (চিত্র 5.1)। স্থিতিস্থাপক মাধ্যমে সন্নিহিত বস্তুকণাগুলি পরস্পর যুগ্মিত থাকে বলেই এই জাতীয় মাধ্যমে স্থিতিস্থাপক তরঙ্গের উৎপত্তি হয়। এ থেকে বোঝা যায় যে, যুগ্মিত দোলন পদার্থবিদ্যার দৃষ্টিকোণ থেকে দেখলে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ।



চিত্র 5.1 একটি যুগ্মিত তন্ত্র

উদ্দেশ্য

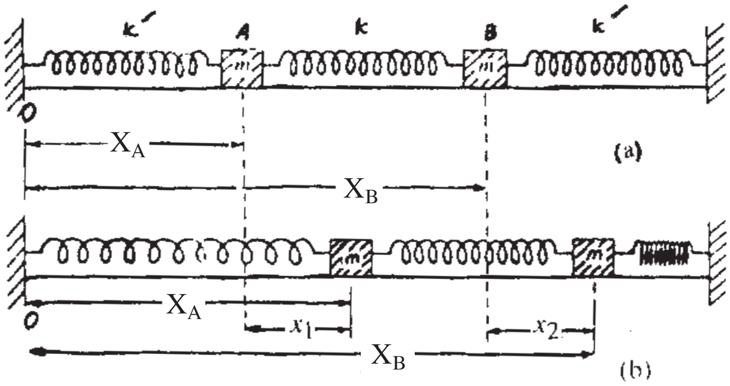
যুগ্মিত দোলন বিষয়ক এই এককটি পড়লে আপনি যে কাজগুলি করার দক্ষতা অর্জন করবেন সেগুলি হল —

- যুগ্মনের ফলে একাধিক বিচ্ছিন্ন দোলকের বৈশিষ্ট্যে কী ধরনের পরিবর্তন ঘটে তার পর্যালোচনা করতে পারবেন।
- অনুদৈর্ঘ্যভাবে কম্পিত যুগ্মিত দোলক তন্ত্রের গতীয় সমীকরণের (equation of motion) প্রতিষ্ঠা করতে পারবেন।
- যুগ্মিত দোলনের সমঞ্জস নির্দেশাঙ্ক (normal coordinates of coupled oscillation) ও স্বভাব কম্পনের ধরন (normal modes of vibration) এবং কম্পাঙ্ক গণনা ও সেগুলি নির্ণয়ের সাধারণ পদ্ধতির পর্যালোচনা।
- তুলনামূলক আলোচনার মাধ্যমে কিছু পরিচিত বাস্তব তন্ত্রের স্বভাব কম্পনের ধরন গণনা।

5.2 হালকা স্প্রিং দ্বারা যুক্ত দুটি সমান ভরের যুগ্মিত কম্পন।

যুগ্মিত কম্পনের বিস্তৃত আলোচনার এই অনুচ্ছেদে আমরা একটি বিশেষ স্প্রিং-ভর তন্ত্রকে বেছে নিচ্ছি। 5.2 চিত্রে এই তন্ত্রটি দেখানো হয়েছে। এখানে দুটি সমান ভর m, k' স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট দুইটি স্প্রিং এর প্রান্তের সঙ্গে যুক্ত। এই স্প্রিং দুটির অন্য প্রান্তগুলি দৃঢ় অবলম্বনের সঙ্গে আবদ্ধ। দুটি ভর m কে যুক্ত করেছে তৃতীয়

একটি স্প্রিং যার স্প্রিং ধ্রুবক k। এই স্প্রিং দুটি ভরের মধ্যে যুগ্মনের (coupling) কাজ করছে। k এর মানের ওপর যুগ্মনের মাত্রা নির্ভর করবে। সাম্য অবস্থানে সব কটি স্প্রিং নিজ নিজ স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য বজায় রাখে এবং ভরগুলি স্থির অবস্থায় থাকে।



চিত্র 5.2 (a) সাম্যাবস্থায় স্প্রিং যুক্ত ভর (b) সাম্যাবস্থায় থেকে একই দিকে বিচ্যুত দুটি ভর (বিচ্যুতির পরিমাণ ভিন্ন)।

আপনি ভেবে দেখাতে পারেন, এধরনের একটি তন্ত্রে কী ধরনের কম্পন ঘটতে পারে। ভর দুটির যে কোনও একটি, অথবা দুটিকেই সাম্যাবস্থা থেকে বিচ্যুত করে ছেড়ে দিলে, সেগুলি কম্পিত হতে থাকবে এবং স্প্রিংগুলিও ভরগুলির সরণ অনুযায়ী সঙ্কুচিত ও প্রসারিত হতে থাকবে। ভর দুটির প্রাথমিক বিচ্যুতি যদি স্প্রিংগুলির দৈর্ঘ্য বরাবর অর্থাৎ ডানদিকে বা বাঁদিকে হয়, তবে সেগুলির কম্পনও স্প্রিং এর দৈর্ঘ্য বরাবর হবে। এই ধরনের কম্পনকে আমরা অনুদৈর্ঘ্য কম্পন বলি। ভর দুটির একটি বা উভয়কে যদি স্প্রিং এর দৈর্ঘ্যের লম্ব বরাবর বিচ্যুত করার পর ছেড়ে দেওয়া হয়, তবে ভরগুলিও ঐ লম্ব বরাবর, অর্থাৎ অনুপ্রস্থভাবে কম্পিত হবে। তবে এখানে আমরা কেবলমাত্র অনুদৈর্ঘ্য কম্পনেই আলোচনা সীমাবদ্ধ রাখব।

অবশ্য এটা আমাদের মনে রাখতেই হবে যে, ভরগুলির কম্পনের বিস্তার, পারস্পরিক দশার প্রভেদ প্রভৃতি বৈশিষ্ট্য কম্পনের প্রাথমিক শর্তগুলির ওপর নির্ভর করে। সুতরাং, আমরা কম্পনশীল বস্তুতন্ত্রের গতি সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করতে পারলেও, তার সমাধানের জন্যে আমাদের প্রাথমিক শর্তগুলি জানা প্রয়োজন হবে

5.2 অবকল সমীকরণের প্রতিষ্ঠা

5.2 চিত্রে দেখানো স্প্রিং -ভর তন্ত্রের সঙ্গে আপনি আগেই পরিচিত হয়েছেন। এখানে আমরা O বিন্দুকে মূলবিন্দু এবং স্প্রিং এর দৈর্ঘ্য বরাবর 'x' অক্ষ ধরে নেব। ধরা যাক, X_A এবং X_B যথাক্রমে দুটি ভর A এবং B এর ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্দেশ করছে। এখন A ও B ভর দুটিকে ডানদিকে যথাক্রমে x_1 ও x_2 দূরত্ব টেনে সরিয়ে ধরে রাখা হল। এর ফলে ডানদিকের স্প্রিংটি সঙ্কুচিত হবে। বামদিকের স্প্রিং ও মাঝের স্প্রিং, যাকে পরিভাষায় বলা হয় যুগ্মন স্প্রিং (coupling spring), এর ফলে প্রসারিত হবে। এখন A ও B কে ছেড়ে দিলে সমগ্র ব্যবস্থাটির অনুদৈর্ঘ্য কম্পন ঘটতে থাকবে।

যদি t সময়ে মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A এবং B ভরের অবস্থান যথাক্রমে X_A এবং X_B হয়, সাম্যাবস্থা থেকে

তাদের দূরত্ব হবে যথাক্রমে $x_1 = x_A - X_A$ এবং $x_2 = x_B - X_B$। আমরা আগেই উল্লেখ করেছি যে, দু'প্রান্তের দুটি স্প্রিং এর স্প্রিং ধ্রুবক k' এবং মাঝের যুগ্মন স্প্রিং এর ক্ষেত্রে ঐ মান k। সুতরাং, A ও B এর ওপর ক্রিয়াশীল বলগুলি কত হবে তা নিচের সারণিতে দেখানো হল :

বলের পরিচয়	**A এর ওপর ক্রিয়াশীল বল**	**B এর ওপর ক্রিয়াশীল বল**
(i) প্রত্যানয়ক বল	$-k'(x_A - X_A) = -k'x_1$	$-k'(x_B - X_B) = -k'x_2$
(ii) যুগ্মন বল	$K\left[\left(x_B - x_A\right) - \left(X_B - X_A\right)\right]$	
(coupling force)	$= k(x_2 - x_1)$	$= -k(x_2 - x_1)$

আমরা ধরে নিয়েছি, উভয় ভরই সমান অর্থাৎ, $m_A = m_B = m$ এবং উভয়েই ঘর্ষণহীন তলে চলাফেরা করছে। অতএব, নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী দেখা যায় যে, ভর A -এর ক্ষেত্রে

.... 5.1

যেহেতু X_A একটি স্থির অবস্থান বোঝাচ্ছে, সময়ের সঙ্গে তা পরিবর্তিত হবে না। অর্থাৎ, $\frac{d^2X_A}{dt^2} = 0$

$\therefore$ [illegible]

সমীকরণ 5.1 পরিবর্তিত হয়ে দাঁড়ায়

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k'x_1 + k\left(x_2 - x_1\right)$$

উভয়পক্ষকে m দিয়ে ভাগ করে এবং পদগুলিকে সাজিয়ে নিয়ে পাই

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 - \omega_c^2\left(x_2 - x_1\right) = 0 \qquad \text{........ 5.2}$$

এখানে এবং $\omega_c^2 = \frac{k}{m}$

ঠিক একইভাবে B ভরটির জন্য আমরা লিখতে পারি

$$m\frac{d^2x_B}{dt^2} = -k'x_2 + k\left(x_1 - x_2\right) \qquad \text{........ 5.3a}$$

m দিয়ে ভাগ করে, $\frac{d^2X_B}{dt^2} = 0$ বসিয়ে ও সাজিয়ে নিয়ে পাই

.... 5.3b

এখানেও ω_0^2 ও একই অর্থ বহন করছে।

5.2 এবং 5.3b সমীকরণ দুটি ভালো করে লক্ষ্য করুন। বোঝা যাচ্ছে যে, দুটির কোনটাই সরল দোলগতির অবকল সমীকরণ নয়। অতএব, A ও B ভর দুটির গতিকে সরল দোলগতি বলা যায় না। এই অবস্থার জন্য দায়ী দুই সমীকরণেরই তৃতীয় পদ, যেগুলি আমরা পেয়েছি যুগ্মনের জন্য। তাছাড়া x_1 এবং x_2 উভয়েই দুটি সমীকরণে উপস্থিত থাকায় সমীকরণ দুটির সমাধানে কিছুটা অসুবিধা দেখা দিচ্ছে। তাহলে এই অবস্থায় কীভাবে আমরা সমীকরণ দুটির সমাধান করব? যে বিষয়টি মনে রেখে আমাদের চলতে হবে তা হল, আমরা x_1 ও x_2 -র বদলে কোনো সুবিধাজনক রাশি নিয়ে কাজ করতে পারি কিনা। এজন্য প্রথমে আমরা 5.2 এবং 5.3b কে যোগ করে এবং তারপর প্রথমটি থেকে দ্বিতীয়টিকে বিয়োগ করে পাই

.... 5.4a

এবং $\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) + (\omega_0^2 + 2\omega_c^2)(x_1 - x_2) = 0$ 5.4b

এই সমীকরণ দুটি বোধ হয় আপনার পরিচিত মনে হচ্ছে। দেখুন এবার আমরা আরেকটি উপায়ে এদের আরও পরিচিত করে তুলতে পারি। আমরা পারি,

$x_1 + x_2 = \xi_1$ 5.5a

$x^1 - x^2 =$ 5.5b

এই দুটি রশি এবং কে যদি (5.4a) এবং (5.4b) সমীকরণে যথাক্রমে (x_1+x_2) এবং $(x_1 - x_2)$র জায়গায় বসানো যায়, তাহলে আমরা পাই,

.... 5.6

এবং, $\frac{d^2\xi_2}{dt^2} + \omega_2^2\xi_2 = 0$ 5.7

এখানে, $\omega_1^2 = \omega_0^2 = \frac{k'}{m}$ 5.8

এবং, $\omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\omega_c^2 = \dfrac{k' + 2k}{m}$ 5.9

লক্ষ্য করুন, x_1 ও x_2 -এর বদলে এবং রাশি দুটি ব্যবহার করে (5,6) ঢেবং (5,7) সমীকরণ দুটি গঠন করার ফলে সমগ্র তন্ত্রের গতিটি আমাদের সুপরিচিত সরল দোলগতির দুটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা যাচ্ছে। এখানে সময়ের (t) সঙ্গে পরিবর্তনশীল ও রাশি দুটি তৈরি হয়েছে x_1 এবং x_2 এর সমন্বয়ে। 5.6 ও 5.7 সমীকরণ যে সরল দোলগতিগুলি সূচিত করছে, তাদের কৌণিক কম্পাঙ্ক যথাক্রমে ও ।

আপনি নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছেন যে, এই দুটি কৌণিক কম্পাঙ্কের মধ্যে । পরবর্তী অনুচ্ছেদে আমরা 5.6 ও 5.7 সমীকরণ দুটির সমাধান করব এবং , এবং দুটি কৌণিক কম্পাঙ্ক ও -এর তাৎপর্য বিশ্লেষণ করব।

5.2.2 যুগ্মিত কম্পনের স্বাভাবিক নির্দেশাঙ্ক ও স্বাভাবিক কম্পনশৈলী

আগের অনুচ্ছেদে আমরা x_1 ও x_2 এর সংযোগে গঠিত দুটি চলরাশি ও পেয়েছি। এই এবং রাশিদুটিকে বলা হয় স্বাভাবিক নির্দেশাঙ্ক (normal coordinates)। x_1 এবং x_2 -পরিবর্তে এই দুটি চল রাশি ব্যবহার করায় 5.6 এবং 5.7 সমীকরণ দুটি গাণিতিকভাবে সরলতর হয়ে গেছে।

যুগ্মিত কম্পনের ক্ষেত্রে স্বাভাবিক নির্দেশাঙ্ক বলতে এমন কয়েকটি নির্বাচিত চলরাশিকে বোঝায়, যেগুলির সাহায্যে কম্পনশীল ব্যবস্থাটির গতি সমীকরণগুলিকে সমসংখ্যক রৈখিক অবকল সমীকরণ হিসাবে লেখা যায়। কেবল তাই নয়, এই সমীকরণগুলিতে প্রতিটি পদের সহগ হিসাবে ধ্রুবক রাশি পাওয়া যায় এবং চলরাশিগুলিও কেবলমাত্র সময়ের ওপর নির্ভরশীল হয়। এর ফলে তন্ত্রের সামগ্রিক গতিটি গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করা সহজ হয়ে যায়। 5.6 ও 5.7 সমীকরণে যে দুটি স্বাভাবিক নির্দেশাঙ্ক ও রয়েছে, সেগুলি আর একটি যুগ্মিত কম্পনের স্বাভাবিক কম্পনশৈলী (normal mode of vibration) বোঝায়। এই নির্দেশাঙ্কগুলি যথাক্রমে ও কৌণিক কম্পাঙ্কে কম্পিত হয়। এবং রাশি দুটিকে আমরা **স্বাভাবিক কম্পনশৈলীর কম্পাঙ্ক** (normal mode frequency) বলি।

যুগ্মিত তন্ত্রের কম্পনে একসঙ্গে এক বা একাধিক স্বাভাবিক কম্পনশৈলী বর্তমান থাকতে পারে। যদি একটিমাত্র কম্পনশৈলী উপস্থিত থাকে, তবে যুগ্মিত প্রতিটি তন্ত্রের কম্পন একই কম্পাঙ্কের সরল দোলগতিতে হয়। তবে এমন ঘটনা বিশেষ অবস্থাতেই ঘটতে পারে। সাধারণভাবে যুগ্মিত তন্ত্রটি একাধিক কম্পনশৈলীতে কম্পিত হয়, ফলে প্রতি তন্ত্রে একাধিক কম্পাঙ্কের সরল দোলগতির উপরিপাতন ঘটে। এবার আমরা প্রথম এককে যেভাবে সরল দোলগতির অবকল সমীকরণ থেকে তার সময় —দূরত্ব সমীকরণ নির্ণয় করেছি, সেভাবে 5.6 ও 5.7 অবকল সমীকরণগুলির সমাধান লিখতে পারি। ঐ দুটি সমাধান যথাক্রমে :

.... 5.10

.... 5.11

এখানে A_1 এবং A_2 দুটি আন্দোলনের বিস্তার এবং ϕ_1 ও দুটি ক্ষেত্রে প্রাথমিক দশা সূচিত করছে। 5.10 এবং 5.11 সমীকরণ দ্বারা প্রকাশিত এবং $\xi_2(t)$ এর মান ব্যবহার করে আমরা প্রাথমিক নির্দেশাঙ্ক $x_1(t)$ এবং সহজেই পেতে পারি :

$$= \frac{1}{2}\left[A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)\right] \qquad \text{........ 5.12}$$

এবং,

$$= \frac{1}{2}\left[A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)\right] \qquad \text{........ 5.12}$$

5.12 এবং 5.13 তে প্রকাশিত সম্পর্ক দুটি থেকে $x_1(t)$ এবং $x_2(t)$ নির্ণয় করতে গেলে আমাদের চারটি ধ্রবক রাশি A_1, A_2, এবং এর মান জানা দরকার। এজন্য আমরা ভরগুলির সরণ ও বেগের প্রাথমিক মানগুলি ব্যবহার করে থাকি। এগুলিকে প্রাথমিক শর্ত (initial condition) বলা হয়। চারটি অজ্ঞাত ধ্রবক রাশির মান নির্ণয়ের জন্য চারটি প্রাথমিক শর্তের প্রয়োজন হয়। একটি উদাহরণ থেকে বিষয়টি স্পষ্ট হবে।

ধরা যাক $t = 0$ সময়ে । অর্থাৎ, প্রাথমিক অবস্থায় A ও B ভর দুটি সাম্যাবস্থা থেকে যথাক্রমে ডানদিকে ও বাঁদিকে দূরত্বে সরে স্থির অবস্থায় রয়েছে (চিত্র 5.3)। 5.12 ও 5.13 সমীকরণে এই শর্তগুলি বসিয়ে আমরা পাই :

.... 5.14a

$$2x_2(0) = A_1 \cos\phi_1 - A_2 \cos\phi_2 = -2a \qquad \text{........ 5.14b}$$

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{1}{2}\left(A_1\omega_1 \sin\phi_1 + A_2\omega_2 \sin\phi_2\right) = 0 \qquad \text{........ 5.14c}$$

$$\left(\frac{dx_2}{dt}\right)_{t=0} = \frac{1}{2}\left(-A_1\omega_1 \sin\phi_1 + A_2\omega_2 \sin\phi_2\right) = 0 \qquad \text{........ 5.14d}$$

উপরের সমীকরণগুলি সমাধান করলে পাওয়া যায় :

$$A_1 \cos\phi_1 = 0, A_1\omega_1 \sin\phi_1 = 0,$$

অর্থাৎ,

এই মানগুলি ব্যবহার করে লেখা যায়

.... 5.15a

$$x_2(t) = -a\cos\omega_2 t \qquad \text{........ 5.15b}$$

সহজেই বোঝা যায়, এক্ষেত্রে $\xi_1(t) = 0, \xi_2(t) = 2a\cos\omega_2 t$ ।

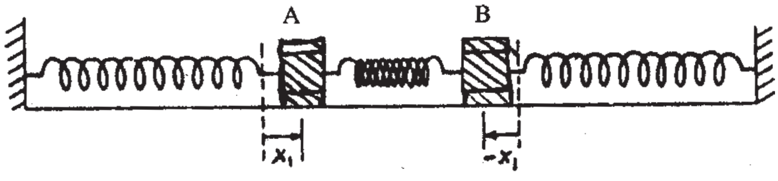
এখানে স্প্রিং ভর তন্ত্রের কম্পনে একটিমাত্র স্বাভাবিক কম্পনশৈলীর উপস্থিত রয়েছে। এবং সেটি হল $\xi_2(t)$ । এর ফলে তন্ত্রের $x_1(t)$ ও স্থানাঙ্কগুলি একই কম্পাঙ্কে আন্দোলিত হচ্ছে। এই কম্পাঙ্কটি হল , যা এর স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক।

এবার এই ধরনের একটি অনুশীলনী আপনি নিজেই করতে চেষ্টা করুন।

অনুশীলনী -1 : নিচে দেওয়া প্রাথমিক শর্তগুলি স্প্রিং ভর তন্ত্রের 5.12 ও 5.13 গতি সমীকরণের ধ্রুবকগুলি নির্ণয় করুন :

(i) $x_1(0) = A$, (ii) (iii) এবং (iv) $\left(\dfrac{dx_2}{dt}\right)_{t=0} = 0$

এই অনুশীলনীতে যে প্রাথমিক শর্ত অর্থাৎ $t = 0$ সময়ে সরণ ও গতিবেগের যে মান দেওয়া হয়েছে, তা একটি বিশেষ উপায়ে সৃষ্ট যুগ্মিত কম্পন সূচিত করছে। 5.3 চিত্রে পরিস্থিতিটি দেখানো হয়েছে। এখানে উভয় ভরকেই তার সাম্যাবস্থানের সাপেক্ষে ডান দিকে সমপরিমাণ (=A) বিচ্যুত করা হয়েছে। দুধারের স্প্রিং দুটির



চিত্র 5.3 পরস্পর বিপরীতমুখ থেকে সমপরিমাণ বিচ্যুত দুটি যুগ্মিত ভর ।

ধ্রুবক এক এবং সঙ্কোচন বা প্রসারণের মান এক হওয়ায় তারা যুগ্মিত ভর দুটির ওপর একই দিকে সমান বল প্রয়োগ করে। এর ফলে যুক্তকারী মাঝের স্প্রিংটির কোনো সঙ্কোচন বা প্রসারণ হয় না এবং যেহেতু স্প্রিংগুলিকে হালকা অর্থাৎ ভরহীন ধরে নেওয়া হয়েছে, তাই ভাবা যায় যে, এইভাবে কম্পন সম্পাদিত হওয়ার সময় দুটি ভরের মাঝের স্প্রিংটির যেন অস্তিত্বই নেই। ফলে যুগ্মনের কোনো প্রভাবই এই কম্পনে নেই। আপনি বুঝতেই পারছেন, এটি স্প্রিং-ভর তন্ত্রটির স্বাভাবিক কম্পনশৈলী। এক্ষেত্রে স্বাভাবিক কম্পনের যে কম্পাঙ্ক পাওয়া যায়, তা প্রতিটি ভরের নিজস্ব স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সমান।

5.3 যুগ্মিত কম্পনে বিস্তারের মডিউলেশন

আপনি হয়ত লক্ষ্য করেছেন যে, 5.2 অনুচ্ছেদের আলোচনায় ও অনুশীলনীতে আমরা স্প্রিং-ভর তন্ত্রের গতির যে দুটি উদাহরণ পেয়েছি, তাতে বিশেষ দু'ধরনের প্রাথমিক শর্ত আরোপ করা হয়েছে। দুটি প্রাথমিক শর্তে ভর দুটির অযুগ্মিত দোলগতির এক একটি অবস্থা কল্পনা করা হয়েছে। তবে একটিতে, অর্থাৎ যখন $x_1(0)=x_2(0)$, তখন দশা পার্থক্যশূন্য আর অন্যটিতে, যখন $x_1(0)=-x_2(0)$, তখন দশা পার্থক্য π ধরা হয়েছে। এই বিশেষ প্রাথমিক শর্ত নির্বাচনের ফলে আমরা স্প্রিং -ভর তন্ত্রটিকে এক একটি বিশুদ্ধ কম্পনশৈলীতে কম্পিত হতে দেখেছি। এতে অবশ্য আমাদের আলোচনা কিছুটা সরল হয়েছে।

কিন্তু আপনি নিশ্চয়ই প্রশ্ন তুলতে পারেন যে, স্প্রিং -ভর তন্ত্রটি কি একই সঙ্গে দুই কম্পনশৈলীতে কম্পিত হতে পারে না? গণিতের ভাষায় বলা যায়, এবং উভয়ই কি অ-শূন্য (non zero) হতে পারে না? এক কথায় এর উত্তর হ্যাঁ, নিশ্চয়ই তা হতে পারে। তবে আপনি হয়ত একটি সম্পূর্ণ উদাহরণের সাহায্যে এই অবস্থাটি বুঝতে চাইছেন। তাই এখানে আমরা একটি পৃথক প্রাথমিক শর্ত ধরে নিয়ে 5.12 ও 5.13 সমীকরণের ধ্রুবকগুলি নির্ণয় করব।

এই প্রাথমিক শর্তগুলি হল, t = 0 সময়ে

$$x_1(0)=2a,\quad x_2(0)=0,\quad \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{t=0}=0 \quad \text{এবং} \quad \left(\frac{dx_2}{dt}\right)_{t=0}=0$$

অর্থাৎ, প্রথম ভরটি ডান দিকে 2a দূরত্বে এবং দ্বিতীয় ভরটি সাম্যাবস্থানে স্থির অবস্থায় আছে (চিত্র 5.4)

এখন আমরা 5.14 (a –d) সমীকরণগুলির অনুরূপ চারটি সমীকরণ লিখতে পারি :

$$x_1(0)=\frac{1}{2}(A_1\cos\phi_1+A_2\cos\phi_2)=2a$$

$$x_2(0)=\frac{1}{2}(A_1\cos\phi_1-A_2\cos\phi_2)=0$$

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{t=0}=-\frac{1}{2}(A_1\omega_1\sin\phi_1+A_2\omega_2\sin\phi_2)=0$$

$$\left(\frac{dx_2}{dt}\right)_{t=0}=\frac{1}{2}(-A_1\omega_1\sin\phi_1+A_2\omega_2\sin\phi_2)=0$$

উপরের সমীকরণগুলি সাহায্যে এখন আপনি নিজেই দেখাতে পারবেন যে,

$$x_1(t)=a(\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t) \qquad \text{........ 5.16a}$$

.... 5.16b

ত্রিকোণমিতির সূত্র প্রয়োগ করে x_1 ও x_2 -এর রাশিমালাকে লেখা যায়

.... 5.17a

ও t 5.17b

আপনার হয়ত মনে আছে যে, এবং । এখানে $\omega_2 > \omega_1$ অর্থাৎ, রাশিটি ধনাত্মক। আমরা , অর্থাৎ দুই কৌণিক কম্পাঙ্কের গড়কে এবং অর্থাৎ, দুই কৌণিক কম্পাঙ্কের পার্থক্যকে হিসাবে লিখব। ভর দুইটির মধ্যে যুগ্মন যদি আলগা হয়, তবে এবং রাশির মান এর তুলনায় ছোট হবে। এই অবস্থায় t এর সাইন বা কোসাইন এর সাইন বা কোসাইনের তুলনায় ধীর গতিতে আন্দোলিত হবে। আমরা ধরে নিতে পারব যে, ও এর বিস্তার হবে যথাক্রমে এবং $B_m = 2a\sin\frac{\Delta\omega}{2}t$ । আমরা এবার $x_1(t)$ ও কে লিখতে পারি

.... 5.18a

ও 5.18b

5.18a ও b সূত্রে আমরা ও এর যে রাশিমালা দুটি পেলাম, তার থেকে স্প্রিং -ভর তন্ত্রের আন্দোলনের চরিত্রটি বোঝা যেতে পারে। 5.5 a ও b চিত্রে সময়ের সঙ্গে ও x_2 এর পরিবর্তন লেখচিত্রের সাহায্যে দেখানো হয়েছে।

সময়ে সুতরাং

সুতরাং, এই সময়ে রাশিটি 2a বিস্তারে ও কৌণিক কম্পাঙ্কে কম্পিত হতে থাকবে। x_2 রাশির বিস্তার এই শূন্য। সুতরাং, A ভরটি 2a বিস্তারে ও কৌণিক কম্পাঙ্কে কম্পিত হলেও, B ভরটি এই মুহূর্তে স্থির থাকবে।

কিন্তু সময়ের সঙ্গে বিস্তারটি কমতে থাকবে এবং যখন অর্থাৎ, তখন