প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমতো কোন বিষয়ে সাম্মানিক (Honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এ-ক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে— যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয় সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধীতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন ; যখনই কোন শিক্ষার্থীও এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণ-ক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশকিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার

উপাচার্য

নবম পুনর্মুদ্রণ ঃ জুলাই, 2018

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।

Printed in accordance with the regulations of the Distance Education Bureau of the University Grants Commission.

পরিচিতি

বিষয় : গণিতবিদ্যা **সাম্মানিক স্তর**

পাঠক্রম : পর্যায় : EMT : 14 : 01

	রচনা	**সম্পাদনা**
একক 1-9	অধ্যাপক রবীন্দ্রনাথ সেন	অধ্যাপিকা (ড.) কাজল দে

প্রজ্ঞাপন

এই পাঠ-সংকলনের সমুদয় স্বত্ব নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের দ্বারা সংরক্ষিত। বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃপক্ষের লিখিত অনুমতি ছাড়া এর কোনও অংশের পুনর্মুদ্রণ বা কোনওভাবে উদ্ধৃতি সম্পূর্ণ নিষিদ্ধ।

মোহন কুমার চট্টোপাধ্যায়
নিবন্ধক

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

EMT – 14

রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা

(স্নাতক পাঠক্রম)

পর্যায়

1

একক 1 ❑ রৈখিক প্রোগ্রামিং : ঐতিহাসিক পটভূমিকা ও প্রয়োগ 7

একক 2 ❑ রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা : পুনরালোচনা 24

একক 3 ❑ দ্বিচল বিশিষ্ট রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার লেখচিত্রে সমাধান ও সেটের ধারণা 36

একক 4 ❑ রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেলের বীজগাণিতিক রূপ। ভেক্টর দেশ, উত্তল সেট এবং সংশ্লিষ্ট ধর্মাবলি 52

একক 5 ❑ কার্যকর সমাধান ও তার বিভিন্ন ধর্মাবলি 73

একক 6 ❑ রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সমাধান নির্ণয়ের সংশ্লিষ্ট উপপাদ্যসমূহ 96

একক 7 ❑ রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সমাধানে সিম্প্লেক্স পদ্ধতি 109

একক 8 ❑ সিম্প্লেক্স কলনবিধির (algorithm) বিভিন্ন ধাপ 130

একক 9 ❑ সিম্প্লেক্স পদ্ধতি প্রয়োগের বিশেষ বিশেষ দিক 159

একক 1 ❑ রৈখিক প্রোগ্রামিং ঃ ঐতিহাসিক পটভূমিকা ও প্রয়োগ

গঠন

1.1 উদ্দেশ্য

1.2 প্রস্তাবনা ঃ ঐতিহাসিক পটভূমিকা

1.3 রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেল

1.4 রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেল গঠন এবং এর সাহায্যে বিভিন্ন সমস্যার রূপদান

1.5 সারাংশ

1.6 অনুশীলনী

1.7 উত্তরমালা

1.1 উদ্দেশ্য (Objectives)

এই এককের উদ্দেশ্য হল ঃ

- রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর অবতারণার ঐতিহাসিক পটভূমিকা ব্যাখ্যা করা,
- রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেল কাকে বলে? তা বুঝিয়ে বলা,
- এই এককে বিজ্ঞান, শিল্প, অর্থনীতি ইত্যাদি থেকে বিভিন্ন সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেলে রূপান্তরিত করা হয়েছে।

1.2 প্রস্তাবনা (Introduction) : ঐতিহাসিক পটভূমিকা

সভ্যতার অগ্রগতির সঙ্গে সঙ্গে মানুষের মধ্যে সবার সেরা হওয়ার একটা দুর্বার আকাঙ্ক্ষা থাকে। সেইজন্য রাজারা বিশ্বপরিক্রমণে বেরোতেন এবং সবাইকে পদানত করতে চাইতেন। পর্বত অভিযাত্রীরা উচ্চতম শিখরে আরোহণ করার চেষ্টা করেন বা ডুবুরীরা সমুদ্রের অতল গভীর অঞ্চলে পৌঁছানোর প্রয়াস

চালিয়ে যান। বিত্তবানরা সবচেয়ে ধনী হওয়ার স্বপ্ন দেখেন। ব্যবসায় লাভ যাতে সর্বোচ্চ হয় বা ক্ষতি সর্বনিম্ন হয় সেজন্য ব্যবসায়ীদের অবিরত প্রয়াস থাকে। এর ছাপ বিজ্ঞান সাধনায় পড়ে। গ্রীক দার্শনিক আর্কিমিডিস অনুমান করেন যে একটা নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের দড়িকে অর্ধবৃত্তাকারে রাখলে তার অন্তর্গত জায়গার ক্ষেত্রফল সবচেয়ে বড়ো হয়। পরে এই অনুমান সত্য বলে প্রমাণিত হয়। খৃষ্টপূর্ব 100 বছর আগে আলেক্সান্ড্রিয়ার হেরণ প্রথম অনুমান করেন যে আলো দুই বিন্দুর মধ্যে হ্রস্বতম পথে যাতায়াত করে। পরে ফারমাট আবিষ্কৃত সাধারণতত্ত্ব বলে আলো দুই বিন্দুর মধ্যে সবচেয়ে কম সময়ে যাতায়াত করে। তার থেকে স্নেলের প্রতিফলন সূত্র আসে। ভেদ কলনবিদ্যার (Calculus of variation) সাহায্যে বিজ্ঞানী বারনুইলি (Bernouilli) নির্ণয় করেন ন্যূনতম সময়ে কোনো পথে একটি মসৃণ বস্তু মাধ্যাকর্ষণের প্রভাবে নির্দিষ্ট উচ্চতা থেকে ঘষে ঘষে (Slide down) নেমে আসবে। তাহলে চরম বা অবমের অস্তিত্ব এবং তা নির্ণয়ের পদ্ধতি (Optimisation theory) আবিষ্কার করা—, এই বিদ্যা বিজ্ঞানীরা নিছক কৌতুহলের বশেই চর্চা করেন। 1945 সাল থেকে চরম বা অবম তত্ত্ব গণিতের এক বিশেষ শাখা হিসাবে আত্মপ্রকাশ করে। দ্বিতীয় বিশ্বযুদ্ধের সময় ইংল্যান্ডকে ঘন ঘন আকাশপথে জার্মানীর বোমারু বিমানের আক্রমণের মুখোমুখী হতে হত। তখন এ্যান্টিএয়ারক্র্যাফ্‌ট বন্দুক (antiaircraft gun) আবিষ্কৃত হয়েছে। তা দিয়ে শত্রুর বিমানকে অনেকটা প্রতিহত করা যায়। কিন্তু ইংল্যান্ডের উপকূলের তুলনায় এই ধরণের বন্দুকের সংখ্যা ছিল অপ্রতুল। তখন একদল বৈজ্ঞানিক একসঙ্গে বসে গাণিতিক পদ্ধতিতে ঠিক করেন কোন কোন জায়গায় ঐ বন্দুকগুলি রাখলে সবচেয়ে বেশি জায়গার আক্রমণ প্রতিহত করা যায়। এই সময় সিদ্ধান্তগ্রহণকারী সমস্যা বা decision making problems সমাধানের একটি বৈজ্ঞানিক প্রচেষ্টা শুরু হয়। কম্‌পুটারের প্রবর্ত্তন, ডানজিগ (Danzig) আবিষ্কৃত সিমপ্লেক্স পদ্ধতি ঐ অনুসন্ধানের বিশেষ অগ্রগতি ঘটায়। গাণিতিক প্রোগ্রামিং বা Mathematical Programming বিষয়টিও আবিষ্কৃত হয়। গাণিতিক প্রোগ্রামিং সমস্যার দুটো ডাপ ঃ (i) বিষয়াত্মক অপেক্ষক (Objective function), (ii) বাধাগোষ্ঠী (Constraints)। অর্থাৎ উদ্দেশ্য হ'ল ঐ বিষয়াত্মক অপেক্ষক যার মান হ'ল একটি স্কেলার, তার সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করা। কিন্তু সেই মান যথেষ্ট বড়ো বা ছোটো হতে পারে না। কেননা এমন সব চলের মান গ্রহণযোগ্য যেগুলি ঐ বাধাগোষ্ঠীকে সিদ্ধ করে। উদাহরণস্বরূপ ব্যবসাতে মাল বিক্রী করে যথেচ্ছ লাভ করতে পারা যায় কিন্তু বাধ সাধে গুদামে মজুত করা মালের পরিমাণ। সুতরাং কোনো সিদ্ধন্ত গ্রহণকারী সমস্যার সমাধান করতে গেলে আগে দেখতে হবে বাধাগোষ্ঠী যেন কোনো অবস্থাতেই লঙ্ঘিত না হয়। রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা (Linear Programming Problem) বলতে আমরা এরূপ সমস্যা বোঝাব যার (i) বিষয়াত্মক অপেক্ষক রৈখিক এবং (ii) বাধাগোষ্ঠী রৈখিক অপেক্ষক। লক্ষণীয় যে একটি অপেক্ষককে রৈখিক বলা হবে যখন সেটা যোজ্য (additive) এবং সমঘাত (homogeneous) হয়।

তাহলে $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ যদি n সংখ্যক চল হয়। f বিষয়াত্মক অপেক্ষক হয় এবং শর্তাবলী রৈখিক অপেক্ষক থাকে। তাহলে একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাকে আমরা অঙ্কের ভাষায় লিখতে পারি ঃ

$$\text{চরম (অবম)} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{1.1}$$

$$\text{শর্তসাপেক্ষে} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq (\geqq)\, b_i, i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2}$$

1.3 রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেল

মডেল বলতে আমরা প্রতিরূপ বোঝাই। কোনো বাস্তব সমস্যাকে বিশ্লেষণ করতে তার গাণিতিকরূপ দেওয়া হয়। অনেক সময়েই বাস্তব সমস্যাকে অবিকৃতভাবে গাণিতিক রূপদান এত জটিল হয়ে যায় সেটা সমাধানে করা অসম্ভব হয়ে পড়ে। তাই সমস্যাটির মূল অংশটি অপরিবর্তিত রেখে অপ্রয়োজনীয় অংশগুলো বাদ দিয়ে একটি গাণিতিক মডেল করা হয়। এর প্রভূত উদাহরণ আছে। বিভিন্ন গ্রহ উপগ্রহের গতিপ্রকৃতি অনুসন্ধান করতে গিয়ে বিজ্ঞানীরা ওদেরকে এক একটি বিন্দুতে নিবদ্ধ ভর হিসাবে ধরে নিয়েছেন। এই ধারণার ওপর ভিত্তি করে উদ্ভূত তত্ত্ব থেকে আমরা অনেক কিছু জানতে পারি। তেমন অনেক সময় সিদ্ধান্ত নিতে হবে। এমন সমস্যাকে আমরা নানা ধরণের রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেলে উপস্থাপন করে থাকি। তার ফলে অনেক ধরণের সমস্যার সমাধান এক একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেলের সমাধানের আওতায় পড়ে। নীচে পরবর্ত্তী আলোচনায় আমরা এই ধরণের কিছু কিছু মডেল নিয়ে বিশদ বর্ণনা করবো।

1.4 রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেল গঠন এবং এর সাহায্যে বিভিন্ন সমস্যার রূপদান

(1.1) ও (1.2) একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সাধারণ রূপ। আমরা নীচে ব্যাখ্যা করব কি করে এই দুই রাশিমালা পাওয়া গেল।

উদাহরণ 1.1 : ধরা যাক একজন দ্রব্য প্রস্তুতকারক কোম্পানী তিন ধরণের জিনিস যথাক্রমে A, B ও C তৈরি করে। প্রতিদিন A ধরণের 50 একক; B ধরনের 25 একক ও C ধরণের 30 একক জিনিসের যন্ত্রাংশ কারখানায় উৎপাদন করা যায়। এখন এই যন্ত্রাংশগুলি জুড়ে সম্পূর্ণ জিনিসটি প্রস্তুত করার জন্য দৈনিক 100 ঘণ্টার শ্রম কোম্পানীর মালিকের হাতে আছে। আরও কিছু তথ্য আছে ঃ

সম্পূর্ণ জিনিসের ধরণ	প্রতি এককে বিক্রী করে লাভ (টা.)	প্রতি একক সম্পূর্ণ জিনিসের জন্য যন্ত্রাংশগুলি জোড়বার সময় (ঘ.)
A	12	0·8
B	20	1·7
C	45	2·5

কোম্পানীকে প্রতিদিন 20 একক A জিনিস এবং যথাক্রমে B ও C জিনিসের 15 একক সরবরাহ করতে হবে। সর্বোচ্চ লাভ হয় এই উদ্দেশ্যে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা উপস্থাপিত করতে হবে।

ধরা যাক A জিনিসের x_1 একক, B জিনিসের x_2 একক এবং C জিনিসের x_3 একক তৈরি করা হল।

তাহলে A জিনিসের x_1 একক বিক্রি করে লাভের পরিমাণ $12x_1$ টাকা

,, B ,, x_2 ,, ,, ,, ,, ,, $20x_2$ টাকা

,, C ,, x_3 ,, ,, ,, ,, ,, $45x_3$ টাকা

তাহলে বিষয়াত্মক অপেক্ষকটি হল

চরম $Z = 12x_1 + 20x_2 + 45x_3$ (1.3)

এবার আমরা বাধাগোষ্ঠীগুলো নির্ণয় করবো।

যেহেতু সর্বোচ্চ A জিনিসের 50 একক, B জিনিসের 25 একক ও C জিনিসের 30 একক উৎপাদন করা যায়।

$$x_1 \leq 50 \quad (1.4)$$
$$x_2 \leq 25 \quad (1.5)$$
$$x_3 \leq 30 \quad (1.6)$$

যেহেতু 100 ঘণ্টার বেশি শ্রম পাওয়া যাবে না, আমাদের x_1, x_2 এবং x_3 এমনভাবে নির্বাচন করতে হবে যে,

$$0{\cdot}8x_1 + 1{\cdot}7x_2 + 2{\cdot}5x_3 \leq 100 \quad (1.7)$$

যেহেতু অর্ডার সরবরাহের প্রতিশ্রুতি করা হয়েছে,

$$x_1 \geq 20 \quad (1.8)$$
$$x_2 \geq 15 \quad (1.9)$$
$$x_3 \geq 15 \quad (1.10)$$

লক্ষণীয় x_1, x_2, x_3 কখনই ঋণাত্মক হতে পারে না।

সুতরাং সমস্যাটি নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হিসাবে উপস্থাপনা করা যাবে ঃ

চরম $Z = 12x_1 + 20x_2 + 45x_3$

যেখানে প্রদত্ত শর্তগুলো সিদ্ধ হয় ঃ

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\le 50 \\ x_2 &\le 25 \\ x_3 &\le 30 \\ 0{\cdot}8x_1 + 1{\cdot}7x_2 + 2{\cdot}5x_3 &\le 100 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\ge 20 \\ x_2 &\ge 15 \\ x_3 &\ge 15 \end{aligned}\right\}$$

উপরের উদাহরণটি ম্যানুফ্যাকচারিং শিল্পের সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হিসাবে দেখা ও সমাধান করার একটি নিদর্শন।

উদাহরণ 1.2 : সুষম খাদ্যতালিকা সমস্যা (The diet problem) :

একদল বিজ্ঞানী সস্তায় পুষ্টিকর খাদ্য উৎপাদন করার একটা পরিকল্পনা করেন। A, B, C তিন ধরণের কাঁচা আনাজ থেকে ঐ সুষম খাদ্য উৎপন্ন হয়। প্রতি কিলোগ্রাম মিশ্রিত খাদ্যে অন্তত 2000 ক্যালোরি শক্তি ও 1000 এককের ভিটামিন থাকা বাঞ্ছনীয়। প্রতি কেজি কাঁচা আনাজে ক্যালোরি (শক্তি) ও ভিটামিনের পরিমাণ নীচের টেবিলে দেওয়া হল। প্রতি কেজি A, B ও C-এর মূল্য যথাক্রমে 10 টাকা, 15 টাকা ও 20 টাকা। উদ্দেশ্য কি পরিমাণে A, B ও C মিশ্রিত করলে মিশ্র খাদ্যে প্রয়োজনীয় ভিটামিন ও ক্যালোরী থাকবে এবং দামও সবচেয়ে কম হবে।

A, B ও C-তে কিলো প্রতি ক্যালোরী ও ভিটামিনের হার

কাঁচা আনাজ	ক্যালোরী/কেজি	ভিটামিন/কেজি
A	3200	800
B	1600	1000
C	2400	1200

ধরা যাক 1 কেজি মিশ্র পদার্থে x_1 কেজি A, x_2 কেজি B ও x_3 কেজি C আছে।

তাহলে 1 কেজি মিশ্র পদার্থের মূল্য হল $10x_1 + 15x_2 + 20x_3$

অতএব বিষয়াত্মক অপেক্ষক হ'ল $Z = 10x_1 + 15x_2 + 20x_3$

বাধাগোষ্ঠী হল ঃ

শক্তি ঃ $3200x_1 + 1600x_2 + 2400x_3 \ge 2000$

ভিটামিন ঃ $800x_1 + 1000x_2 + 1200x_3 \geq 1000$

তাহলে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটি হল ঃ

অবম $Z = 10x_1 + 15x_2 + 20x_3$

নিম্নলিখিত শর্তানুসারে ঃ $3200x_1 + 1600x_2 + 2400x_3 \geq 2000,$

$800x_1 + 1000x_2 + 1200x_3 \geq 1000,$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1{,}00$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

উদাহরণ 1.3 : মিশ্রণ সমস্যা (Blending Problem) :

কৌটো ভর্তি এক কেজি ওজনের মেওয়াফল বিক্রেতাকে ঠিক করতে হবে কি পরিমাণে দুইটি মিশ্রণ A ও B-কে মেশাতে হবে যাতে করে লাভ সর্বোচ্চ হয়। ঐ মিশ্রণগুলোতে কাজুবাদাম, আখরোট ও পেস্তার অনুপাত এবং ঐ ফলগুলির জোগানর পরিমাণ নীচে দেওয়া হল। এক কেজি কাজুবাদাম, আখরোট ও পেস্তার দাম যথাক্রমে 300 টাকা, 350 টাকা, 150 টাকা।

মিশ্রণ A বিক্রি করা হয় প্রতি কেজি 400 টাকায় এবং

মিশ্রণ B বিক্রি করা হয় প্রতি কেজি 470 টাকায়।

মিশ্রণ A ও B-তে কাজুবাদাম, আখরোট ও পেস্তার অনুপাত (%)

মিশ্রণ	কাজুবাদাম	আখরোট	পেস্তা
A	0·25	0·50	0·25
B	0·25	0·75	
মজুত (কেজি)	375	375	250

ধরা যাক মিশ্রণ A-এর x_1 সংখ্যক কৌটো ও মিশ্রণ B-এর x_2 সংখ্যক কৌটো তৈরি করা হল।

যদি একটি কৌটো A মিশ্রণ বিক্রী করে লাভ হয় p_1 টাকা এবং একটি কৌটো B মিশ্রণ বিক্রী করে লাভ হয় p_2 টাকা তাহলে বিষয়াত্মক অপেক্ষক হ'ল, $f(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2$

বাধাগোষ্ঠী হল ঃ $0{\cdot}25x_1 + 0{\cdot}25x_2 \leq 375$

$0{\cdot}50x_1 + 0{\cdot}75x_2 \leq 375$

$0{\cdot}25x_1 \leq 250$

$x_1, x_2 \geq 0$

যেখানে $p_1 = 400 - [0{\cdot}25 \times (300) + 0{\cdot}50 \times (350) + 0{\cdot}25 \times (150) = 112{\cdot}5$

$p_2 = 470 - [0{\cdot}25 \times (300) + 0{\cdot}75 \times (350)] = 132{\cdot}5$

উদাহরণ 1.4 : পরিবহন সমস্যা (Transportation Problem) :

তিনটে গুদাম থেকে ট্রাকে করে মোটর গাড়ী ডীলারদের কাছে পাঠানো হয়। শুরু থেকে গন্তব্যস্থলের দূরত্বের ওপর মাশুল নির্ভর করে। ট্রাকটি আংশিক বা পুরো ভর্তি কিনা তার উপরে মাশুল কম বেশি হয় না। বিভিন্ন গুদাম থেকে গন্তব্যস্থলের দূরত্ব, মাসিক চাহিদা ও সরবরাহের (গাড়ীর সংখ্যা) তালিকা নীচে দেওয়া হল। প্রতি ট্রাকে সর্বোচ্চ 18টি গাড়ী ধরে। যদি মাইল প্রতি ট্রাকের পরিবহন খরচা 10 টাকা হয় তাহলে সবচেয়ে কম খরচে কি করে গাড়ীগুলি নির্দিষ্ট গন্তব্যস্থলে যেতে পারে তা নির্ণয় করার জন্য একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা গঠন করতে হবে।

		ডীলার সমূহ					
		1	2	3	4	5	সরবরাহ
	1	100	150	200	140	35	400
গুদাম	2	50	70	60	65	80	200
	3	40	90	100	150	130	150
		100	200	150	160	140	

ধরা যাক x_{ij} = iতম গুদাম থেকে jতম ডীলারের কাছে পাঠানো গাড়ীর সংখ্যা।

তাহলে অতিক্রান্ত দূরত্বের বিষয়াত্মক অপেক্ষক হ'ল $= f(x_{11}, \ldots\ldots, x_{35})$

$$= 100x_{11} + 150x_{12} + 200x_{13} + 140x_{14} + 15x_{15} + 50x_{21} + 70x_{22}$$
$$+ 60x_{23} + 65x_{24} + 80x_{25} + 40x_{31} + 90x_{32} + 100x_{33}$$
$$+ 150x_{34} + 130x_{35} \qquad (1.11)$$

বাধাগোষ্ঠী ঃ $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100$

(চাহিদা সংক্রান্ত) ঃ $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 200$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 150$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 160$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 140$$

সরবরাহ সংক্রান্ত ঃ $\sum_{j=1}^{5} x_{1j} = 400$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{2j} = 200$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{3j} = 150$$

যেহেতু গাড়ীগুলো ট্রাকে করে পাঠানো হচ্ছে এবং প্রতি ট্রাকে সর্বোচ্চ 18টি গাড়ী ধরে

100টা গাড়ী পাঠাতে ট্রাক লাগবে 6টি

200 ,, ,, ,, ,, ,, 12টি

150 ,, ,, ,, ,, ,, 9টি

160 ,, ,, ,, ,, ,, 9টি

140 ,, ,, ,, ,, ,, 8টি

আমরা যদি দূরত্বের বদলে ট্রাকের খরচা এবং 1000 টাকাতে 1 একক ধরি তাহলে পাই,

	1	2	3	4	5	
1	1	1·5	2	1·4	·35	23
2	·5	·7	·6	·65	·8	12
3	·4	·9	1	1·5	1·3	9
	6	12	9	9	8	

তাহলে সবচেয়ে কম পরিবহন খরচা নির্ণয়ের বিক্রয়াত্মক অপেক্ষক $\tilde{f}(\tilde{\bar{x}}_n, \ldots, \tilde{x}_{35})$ ওপরের টেবিল থেকে নির্ণয় করা যায়। এখানে $\tilde{x}_{ij}$ = i-তম গুদাম থেকে j-তম গন্তব্য স্থানে যেকটি ট্রাক যাচ্ছে।

বাধাগোষ্ঠী হল ঃ $\sum_{j=1}^{5} \tilde{x}_{1j} = 23,\ \sum_{j=1}^{5} \tilde{x}_{2j} = 12,\ \sum_{j=1}^{5} \tilde{x}_{3j} = 9,$

$$\sum_{i=1}^{3} \tilde{x}_{i1} = 6,\ \sum_{i=1}^{3} \tilde{x}_{i2} = 12,\ \sum_{i=1}^{3} \tilde{x}_{i3} = 9,$$

$$\sum_{i=1}^{3} \tilde{x}_{i4} = 9,\ \sum_{i=1}^{3} \tilde{x}_{i5} = 8.$$

উদাহরণ 1.5 : বরাদ্দ সমস্যা (Allocation problem) :

একটি বিজ্ঞাপন সংস্থা তার এক খদ্দেরের সঙ্গে চুক্তিবদ্ধ হয় যে ঐ প্রস্তুতকারক তার তৈরি একটি জিনিযের প্রচারের জন্যে মুম্বাই শহরে 1 কোটি টাকা খরচা করবেন। সংস্থাটি প্রতিবার রেডিয়োতে প্রচারের

জন্য 20,000 টাকা, টিভিতে প্রচারের জন্য 100,000 টাকা এবং কাগজে ছাপাবার জন্য 40,000 টাকা খরচ করতে পারে। জিনিস প্রস্তুতকারক চাইছেন যে অন্ততঃ 1500,000 টাকা খরচা করা হোক টিভিতে প্রচারের জন্য। সংস্থাটির অভিজ্ঞতার উপর নির্ভর করে প্রস্তুতকারক রাজী হয় সম্পূর্ণ বাজেটের 25%-এর বেশি কাগজে প্রচারের জন্য খরচা করা হবে এবং কাগজের জন্য বরাদ্দ টিভির জন্য বরাদ্দের 50%-এর বেশি হবে না। আগের অভিজ্ঞতার উপর নির্ভর করে রেডিও একবার সম্প্রচারের জন্য 40 দর্শক পয়েন্ট টিভির একবার সম্প্রচারের জন্য 160 দর্শক পয়েন্ট এবং খবরের কাগজে একবার বিজ্ঞাপনের জন্য 300 পয়েন্ট পাওয়া যায়। সংস্থাটির উদ্দেশ্য হল কোন প্রচার মাধ্যমে কতকটা খরচা করা হবে যাতে করে সবশুদ্ধ দর্শক পয়েন্ট সর্বোচ্চ হয়।

ধরা যাক যথাক্রমে x_1, x_2 এবং x_3 লক্ষ টাকা খরচ করা হচ্ছে রেডিও, টিভিতে সম্প্রচারের জন্য এবং কাগজে বিজ্ঞাপনের জন্য। রেডিওতে একবার সম্প্রচারের জন্য যদি 40 দর্শক পয়েন্ট পাওয়া যায় এবং তার জন্য খরচা হয় 20,000 টাকা তাহলে x_1 লক্ষ টাকার দর্শক পয়েন্ট পাওয়া যাচ্ছে

$$\frac{40}{20{,}000} \times x_1 \times 1{,}00{,}000 = 200x_1$$

অনুরূপে x_2 লক্ষ টাকা দর্শক পয়েন্ট পাওয়া যাচ্ছে $160 \times \frac{x_2 \times 1{,}00{,}000}{1{,}00{,}000} = 160x_2$

কাগজে x_3 লক্ষ টাকা দর্শক পয়েন্ট পাওয়া যাচ্ছে $300 \times \frac{x_3 \times 1{,}00{,}000}{40{,}000} = 750x_3$

সুতরাং বিষয়াত্মক অপেক্ষক হ'ল

$$f(x_1, x_2, x_3) = 200x_1 + 160x_2 + 750x_3$$

বাধাগোষ্ঠী :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 100 \\ x_2 &\ge 15 \\ x_1 &\le 25 \\ x_1 - 0{\cdot}5x_2 &\le 0 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

উদাহরণ 1.6 : একটি ইলেকট্রনিক কোম্পানী দুধরণের রেডিও মডেল তৈরি করে। দুটো আলাদা উৎপাদন লাইনে আলাদা আলাদা মডেল তৈরি হয়। প্রথম লাইনটার সর্বোচ্চ উৎপাদন হয় 60টি রেডিও। এবং দ্বিতীয় লাইনটার সর্বোচ্চ উৎপাদন ক্ষমতা 75টি রেডিও। প্রথম মডেলের প্রতিটি একক তৈরি করতে 10 খণ্ড ইলেকট্রনিক যন্ত্রাংশ লাগে এবং দ্বিতীয় মডেলের প্রতি এককে তৈরি করতে একই যন্ত্রাংশের 8টি খণ্ড লাগে। ঐ বিশেষ যন্ত্রাংশের মজুত আছে সর্বোচ্চ 800 খণ্ডের। 1 ও 2 নম্বর মডেলের প্রতি একককে

লাভ হয় যথাক্রমে 300 টাকা ও 200 টাকা। প্রতি মডেলের দৈনিক সর্বোচ্চ উৎপাদন নির্ণয় করার সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হিসাবে প্রকাশ করা হবে।

ধরা যাক 1নং মডেল x_1 খানা ও 2 নং মডেল x_2 খানা তৈয়ারি করা হয়।

তাহলে, বিষয়াত্মক অপেক্ষক $= f(x_1, x_2)$

$$= 300x_1 + 200x_2$$

বাধাগোষ্ঠী ঃ

$$x_1 \le 65$$

$$x_2 \le 75$$

$$10x_1 + 8x_2 \le 800$$

উদাহরণ 1.7 : বিনিয়োগ সমস্যা (Finance) :

একটি ইঞ্জিনিয়ারিং সংস্থা 1998-99 সালে তাদের কাজকর্ম নানাদিকে প্রসারিত করার পরিকল্পনা নেয়। কোম্পানী 1998 সালে 5·15 কোটি টাকা মুলধন বিনিয়োগ করেছে এবং 1999 সালে মুলধন বিনিয়োগ খাতে বরাদ্দ ছিল 6·50 কোটি টাকা। কোম্পানী পাঁচ জায়গায় বিনিয়োগের পরিকল্পনা করেছে। টাকার বর্তমান মূল্যের নিরিখে আনুমানিক নিট লাভ ও আনুমানিক খরচপ্রতি প্রজেক্ট এই দুই বছরে যথাক্রমে ঃ

প্রজেক্ট	আনুমানিক নীটলাভ ('000 টাকা)	ক্যাশ খরচা '000 টাকা	
মিশ্রণ	কাজুবাদাম	**1998**	**1999**
A	250	125	325
B	400	550	600
C	100	115	200
D	150	250	325
F	175	325	475

ধরা যাক যেকোনো প্রজেক্টে লাভের পরিমাণ বিনিয়োগের সরল অনুপাতী। উদাহরণস্বরূপ প্রজেক্ট A-তে (1998-তে 125 টা এবং 1999-তে 325 টাকা) এর 20% যদি বিনিয়োগ করা হয় তাহলে নীট লাভ হবে 250 টাকার 20%। এই ধারণার ফলে প্রজেক্টগুলির স্বাতন্ত্র বজায় থাকছে না। নীট লাভ সর্বোচ্চ কারর সমস্যাটিকে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হিসাবে উপস্থাপিত করতে হবে।

ধরা যাক A, B, C, D, E এই প্রজেক্টগুলিতে যথাক্রমে বিনিয়োগের অনুপাত হল, x_1, x_2, x_3, x_4 এবং x_5। বিষয়াত্মক অপেক্ষক (নীট লাভ) $= 250x_1 + 400x_2 + 100x_3 + 150x_4 + 175x_5$

(i) মূলধন বিনিয়োগ বাজেট শর্তাবলী

$$125x_1 + 550x_2 + 115x_3 + 250x_4 + 325x_5 \le 515 \text{ (1998 সালের জন্য)}$$

$$325x_1 + 600x_2 + 200x_3 + 325x_4 + 475x_5 \le 650 \text{ (1999 সালের জন্য)}$$

(ii) x_1, x_2, x_3, x_4 ধনাত্মক অনুপাত হওয়ায়,

$$x_1 \leq 1,\ x_2 \leq 1,\ x_3 \leq 1,\ x_4 \leq 1$$

উদাহরণ 1.8. একজন বিনিয়োগকারী আগামী পাঁচ বছরে তিনভাবে বিনিয়োগ করতে পারেন। প্রথম বছরের গোড়ায় তাঁর কাছে সর্বসাকুল্যে 5 লক্ষ টাকা আছে। বিনিয়োগের তিনধরণের বিকল্পের অর্থনৈতিক বৈশিষ্ট্যগুলি নীচে দেওয়া হল।

বিনিয়োগের বিকল্প	প্রারম্ভিক বিনিয়োগের অনুমিত বিনিয়োগ (টাকা)	লাভ (%)	লাভ প্রাপ্তির সময়	তাৎক্ষণিক পুনর্বিনিয়োগ সম্ভব
1	1,00,000	13	1 বছর বাদে	হ্যাঁ
2	সীমাহীন	20	2 বছর বাদে	হ্যাঁ
3	50,000	25	3 বছর বাদে	হ্যাঁ

বিনিয়োগকারী এমন একটি বিনিয়োগ পরিকল্পনা করতে চান যেটার ফলে 6 বছরের গোড়ায় সঞ্চিত অর্থ সবচেয়ে বেশি হবে। ঐ সমস্যাটিকে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হিসাবে উপস্থাপিত করা হবে। ধরা যাক x_{ij} = i-তম (i = 1, 2, 3) বিকল্প বিনিয়োগ প্রকল্পে j-তম (j = 1, 2, ..., 5) বছরের গোড়ায় বিনিয়োগের পরিমাণ। y_j = j-তম বছরে যে টাকাটা কোনো বিনিয়োগ প্রকল্পেই জমা দেওয়া হয়নি।

বিষয়াত্মক অপেক্ষক (সর্বসাকুল্যে লাভ) $= 1{\cdot}13x_{15} + 1{\cdot}2x_{24} + 1{\cdot}25x_{33}$

যেহেতু টাকাটা বিনিয়োগের পরে প্রথম পরিকল্পনায় 1 বছর পরে, দ্বিতীয় পরিকল্পনায় 2 বছর এবং তৃতীয় পরিকল্পনায় 3 বছর পরে পাওয়া যায় সুতরাং আমরা তিনটি মূলধনই বিবেচনা করতে পারি, x_{15}, x_{24} এবং x_{33} বাধাগোষ্ঠীগুলি এইভাবে নির্ণয় করা যায়।

(i) প্রথম বছর পরিকল্পনা 1-এ বিনিয়োগ হল x_{11}

,, ,, ,, 2-এ ,, ,, x_{21}

,, ,, ,, 3-এ ,, ,, x_{31}

প্রথম বছর বিনিয়োগ হয়নি এমন অঙ্ক $= y_1$

অতএব, $x_{11} + x_{21} + x_{31} + y_1 = 500{,}000$ (1 বছর) (1.12)

1 বছর পরে ফেরৎ টাকা $= 1.13x_1 + y_1$

অতএব $x_{12} + x_{22} + x_{32}$ 1+ $y_2 = y_1 + 1{\cdot}13x_{11}$ (2 বছর) (1.13)

2 বছর পরে ফেরৎ টাকা $= 1{\cdot}2x_{21} + 1{\cdot}31x_{12} + y_2$

অতএব $x_{13} + x_{23} + x_{33} + y_3 = y_2 + 1{\cdot}2x_{21} + 1{\cdot}13x_{12}$ (3 বছর) (1.14)

3 বছর পরে ফেরৎ টাকা $= 1{\cdot}25x_{31} + 1{\cdot}20x_{22} + 1{\cdot}13x_{13} + y_4$

অতএব $x_{14} + x_{24} + x_{34} + y_4 = y_3 + 1{\cdot}25x_{31} + 1{\cdot}20x_{22} + 1{\cdot}13x_{13}$ (4 বছর) (1.15)

4 বছর পরে ফেরৎ টাকা $= y_4 + 1{\cdot}25x_{32} + 1{\cdot}20x_{23} + 1{\cdot}13y_{14}$

অতএব $x_{15} + x_{25} + x_{35} + y_5 = y_4 + 1{\cdot}25x_{32} + 1{\cdot}20x_{23} + 1{\cdot}13x_{14}$ (5 বছর) (1.16)

(ii) বিনিয়োগের পরিমাণ সংক্রান্ত শর্ত ঃ

$x_{11} \le 100{,}000,$ $\quad x_{31} \le 50{,}000$

$x_{12} \le 100{,}000,$ $\quad x_{32} \le 50{,}000$

$x_{13} \le 100{,}000,$ $\quad x_{33} \le 50{,}000$

$x_{14} \le 100{,}000,$ $\quad x_{34} \le 50{,}000$

$x_{15} \le 100{,}000,$ $\quad x_{35} \le 50{,}000$

এবং $x_{ij}, y_j \ge 0$ সব i এবং j-র জন্য।

1.5 সারাংশ

এই এককে আমরা রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার আবিষ্কারের ঐতিহাসিক পটভূমিকা প্রথমে বর্ণনা করেছি। তার পরে decision making problems বা সিদ্ধান্ত গ্রহণকারী সমস্যা কাকে বলে তা ব্যাখ্যা করেছি। কি করে সিদ্ধান্তগ্রহণকারী সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যারূপে প্রকাশ করা যায় তার ইঙ্গিত দিয়েছি। মডেল কাকে বলে সেটা ব্যাখ্যা করেছি। রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সাহায্যে কি করে বিভিন্ন ধরনের সমস্যা উপস্থাপন করা যায় তার নানা ধরণের উদাহরণ দেওয়া হয়েছে। যেমন, সুষম খাদ্যাতালিকা সমস্যা (the diet problem), মিশ্রণ সমস্যা (the blending problem), পরিবহন সমস্যা (the transportation problem), বরাদ্দ সমস্যা (the allocation problem), বিনিয়োগ সমস্যা (the investment problem) ইত্যাদি। এর ফলে বিজ্ঞান প্রযুক্তিবিদ্যা, অর্থনীতি, ম্যানেজমেন্ট প্রভৃতি বিভিন্ন দিকে যেখানেই সিদ্ধান্তগ্রহণকারী সমস্যার সৃষ্টি হয় সেখানেই রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হিসাবে রূপায়ন সমস্যার সমাধানে সাহায্য করে।

1.6 অনুশীলনী

নিচের প্রত্যেকটি (1-16) : সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হিসেবে প্রকাশ করুন ঃ

1.1. টেবিল, চেয়ার প্রস্তুত করলে লাগে কাঠ আর শ্রম।

প্রতি টেবিল তৈরি করতে লাগে 3 একক কাঠ আর প্রতি চেয়ার তৈরি করতে লাগে 2 একক কাঠ। প্রতি টেবিলে 1 একক শ্রম ও প্রতি চেয়ারে 2 একক শ্রম লাগে।

প্রতি টেবিল থেকে লাভ হয় 5 টাকা এবং প্রতি চেয়ার বেচে লাভ হয় 4 টাকা। যদি 130 একক কাঠ এবং 70 একক শ্রম মজুত থাকে। কি উৎপাদন প্রকল্প নিলে লাভ সর্বোচ্চ হয় এটাই প্রস্তুতকারক নির্ণয় করতে চায়।

1.2. একজন স্টেনলেসস্টিলের বাসন প্রস্তুতকারক তিন ধরণের বাসন তৈরি করে। কাঁচা মালের জোগান কত, কত লাভ ও কি কি বাধা আছে তা একটি টেবিলে লিপিবদ্ধ হল ঃ

বাসনের ধরণ	I	II	III
প্রতি এককে কাঁচামাল দরকার (কেজি)	3	4	1
ওয়েলডিং এবং ফিনিশ করার সময় (প্রতি এককে ঘণ্টা)	1	3	2
প্রতি এককে লাভ (টাকা)	30	60	20

যদি স্টেনলেস স্টিলের মজুত থাকে 200 কেজি এবং ওয়েলডিং ও ফিনিশিং করার সময় প্রতি দিনে 1000 ঘণ্টা হয়, সর্বোচ্চ লাভের জন্য উৎপাদন প্রকল্প নির্ণয় করা দরকার।

1.3. একজন ক্যাটারার জানেন যে কোনদিন তাঁর 50টা তোয়ালে দরকার হ'লে তার পরের দিন 100টা তোয়ালে দরকার হবে। তোয়ালেগুলো এক একটা 12 টাকা করে কেনা যায় এবং সেগুলো নোংরা হলে 2 টাকায় প্রতিটি কাচিয়ে নেওয়া যায়। তার সমস্যা হ'ল দৈনিক কতগুলো করে তোয়ালে কিনলে এবং কতকগুলো ধুতে পাঠালে তার খরচা সবচেয়ে কম হবে।

1.4 ABC খাদ্য প্রস্তুতকারক কোম্পানী স্বল্প ক্যালোরী কিন্তু উচ্চ-প্রোটিনযুক্ত সুষম খাদ্যগ্রহণের জন্য হাই-প্রো নামে একটা খাদ্য তৈরি করছে। একদল ডাক্তাররা মিলে এই হাই-প্রো-র উপাদাসমূহ ঠিক করেছেন। মূল খাদ্যাসামগ্রীর মধ্যে কি পরিমাণ ক্যালোরী, প্রোটিন ও ভিটামিন আছে তা নিচের টেবিলে দেওয়া হ'ল।

পুষ্টিকর উপাদান	**পুষ্টিকর উপাদানের একক মূল খাবারের 100 গ্রামের মধ্যে আছে**			**মূল খাবার হাই-প্রোর মধ্যে আছে**
	1	2	3	
ক্যালোরী	350	250	200	300
প্রোটিন	250	300	150	200
ভিটামিন A	100	150	75	100
ভিটামিন C	75	125	150	100
পরিষেবার খরচা (টা.)	1·50	2·00	1·20	

পরিষেবার কত কম খরচে মূল খাদ্য 1, 2, 3-এর সাহায্যে হাই-প্রো উৎপাদন করা যায়—সেইটাই রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হিসাবে উপস্থাপনা করতে হবে।

1.5. একটা ওষুধ কোম্পানী ধূমপায়ীদের জন্য একটা নতুন বড়ি বার করেছে যেটা খেলে ধূমপান করার সময়ে বমি পাবে। চার রকম যে উপাদানগুলো দিয়ে এই নতুন বড়ি তৈরি করতে হয় সেগুলি দামী এবং তার যোগানও সীমিত।

যে পরিমাণ উপাদানগুলোর যোগান আছে আছে এবং সেগুলোর যা দাম তা নীচে দেওয়া হল ঃ

উপাদান	যোগান (কেজি)	দাম (টাকা) প্রতি কেজি
1	22	28
2	18	25
3	20	52
4	24	26

নতুন বড়িতে মিশ্রণের হার নিচে দেওয়া হল ঃ

(i) 1-নং উপাদান সমগ্রের অন্ততঃ 45% হওয়া চাই কিন্তু শতকরা 60 ভাগের বেশি হবে না।

(ii) 2 ও 3-নং উপকরণ মিশ্রিত ওষুধে অন্ততঃ শতকরা 10 ভাগ হবে কিন্তু তাদের মিলিত ভাগ মিশ্রণের শতকরা 25 ভাগের বেশি হবে না।

(iii) 4-নং উপকরণ সমস্তটার অন্ততঃ শতকরা 50 ভাগ হবে। অন্ততঃ 25 কেজি বড়ি তৈরি করতে হবে।

সবচেয়ে কম খরচে উপকরণগুলি মিশ্রিত করলে শর্তাবলী সিদ্ধ হয় সেই সমস্যা উপস্থাপন করতে হবে।

1.6 একটা কারখানায় চারধরণের জিনিষ উৎপন্ন হয়। কারখানার উৎপাদনের জন্যে মেশিন-সময়, গুদামের জায়গা ও শ্রম অবারিত নয়। 180 ঘণ্টার মেশিন-সময় পাওয়া যায়। তারমধ্যে 1নং মাল তৈরি করতে 2 ঘণ্টা সময় লাগে। 1, 2, 3, 4 নং মাল তৈরি করার অনুরূপ সময় হল যথাক্রমে 6·3 ঘণ্টা, 1·8 ঘণ্টা এবং 6 ঘণ্টা। চার রকমের মালের এক এককের জন্য গুদামের জায়গা লাগে যথাক্রমে 1·5, 2, 4 এবং 5 বর্গফুট। গুদামের জন্য জায়গা পাওয়া যায় 148 বর্গফুট। 40 শ্রম-ঘণ্টা যা পাওয়া যায় তার জন্য 1, 2, 3 ও 4 নং জিনিস তৈরি করার জন্য প্রতি এককে সময় লাগে যথাক্রমে 0·8, 0·6, 0·9 এবং 0·4 শ্রমিক ঘণ্টা 1 উৎপন্ন জিনিশ 1, 2, 3 ও 4-এর যথাক্রমে বিক্রয়মুল্য হল 30 টাকা। 50 টাকা, 40 টাকা ও 45 টাকা। সমস্যা হল কি পরিমাণ কোনটা উৎপাদন করলে সেগুলো বিক্রী করার পর লাভ সবচেয়ে বেশি হবে।

1.7 উত্তরমালা

1.1. ধরা যাক x_1 = উৎপন্ন চেয়ারের সংখ্যা x_2 = উৎপন্ন টেবিলের সংখ্যা পরের লাইন চরম

$$Z = 4x_1 + 5x_2$$

শর্তসাপেক্ষে $2x_1 + 3x_2 \leq 130,$

$2x_1 + 1x_2 \leq 70,$

$x_1, x_2 \geq 0.$

1.2. ধরা যাক, x_1 = I-নং বাসনের কেজি

x_2 = II-নং বাসনের কেজি

x_3 = III-নং বাসনের কেজি

নির্ণেয় রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা ঃ

চরম $Z = 30x_1 + 60x_2 + 20x_3,$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 200$

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1000,$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

1.3. x_1 = প্রথমে যেকটা তোয়ালে কেনা হয়েছে

x_2 = ,, ,, ,, ধুতে দেওয়া হয়েছে।

নির্ণেয় রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা

অবম $12x_1 + 2x_2$

শর্তসাপেক্ষে, $x_1 \geq 50$

$x_1 + x_2 \geq 150, x_1, x_2 \geq 0.$

1.4 x_1, x_2, x_3 = যথাক্রমে 1, 2 এবং 3 নং খাবারের পরিমাণ মিশ্রণে ব্যবহৃত।

অবম $Z = 1{\cdot}5x_1 + 2x_2 + 1{\cdot}2x_3$

শর্তসাপেক্ষে, $350x_1 + 250x_2 + 200x_3 \geq 300$

$250x_1 + 300x_2 + 150x_3 \geq 200$

$100x_1 + 150x_2 + 75x_3 \geq 100$

$75x_1 + 125x_2 + 150x_3 \geq 100$

$x_1, x, x_3 \geq 0.$

1.5 x_j = মিশ্রণে ব্যবহৃত j (= 1, 2, 3, 4)-তম উপাদান।

অবম $Z = 28x_1 + 25x_2 + 52x_3 + 26x_4$,

শর্তসাপেক্ষে, $\left.\begin{array}{l} x_1 \le 22, x_2 \le 18 \\ x_3 \le 20, x_4 \le 24 \end{array}\right\}$

$$0{\cdot}55x_1 - 0{\cdot}45x_2 - 0{\cdot}45x_3 - 0{\cdot}45x_4 \ge 0$$

$$0{\cdot}40x_1 - 0{\cdot}60x_2 - 0{\cdot}60x_3 - 0{\cdot}60x_4 \ge 0$$

$$-0{\cdot}10x_1 + 0{\cdot}90x_2 + 0{\cdot}90x_3 - 0{\cdot}10x_4 \ge 0$$

$$-0{\cdot}25x_1 + 0{\cdot}75x_2 + 0{\cdot}75x_3 - 0{\cdot}25x_4 \ge 0$$

$$-0{\cdot}50x_1 - 0{\cdot}50x_2 - 0{\cdot}50x_3 + 0{\cdot}50x_4 \ge 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ge 25$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

1.6 ধরা যাক x_j = jতম উৎপন্ন দ্রব্যের পরিমাণ (j = 1, 2, 3, 4)

নির্ণেয় রৈ প্রো. স. ঃ

চরম $Z = 30x_1 + 50x_2 + 40x_3 + 45x_4$

শর্তসাপেক্ষে $2{\cdot}0x_1 + 6{\cdot}3x_2 + 1{\cdot}8x_3 + 6{\cdot}0x_4 \le 180$,

$1{\cdot}5x_1 + 2{\cdot}0x_2 + 4{\cdot}0x_3 + 5{\cdot}0x_4 \le 148$,

$0{\cdot}8x_1 + 0{\cdot}6x_2 + 0{\cdot}9x_3 + 0{\cdot}4x_4 \le 40$,

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

তথ্যসূত্র

1. G. HADLEY [1974] : LINEAR PROGRAMMING, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMP.
2. S. I. GASS [1958] : LINEAR PROGRAMMING, N. Y., MC-GRAW HILL
3. H. A. TAHA, [1982] : OPERATIONS RESEARCH, MACMILLAN PUBLISHING CO. N.Y.
4. J. C. CHAKARVORTY & P. R. GHOSH [2001] : LINEAR PROGRAMMING & GAME THEORY, MOULIK LIBRARY

5. J. K. SHARMA [2003] : OPERATIONS RESEARCH, MACHILLAN INDIA LTD.

6. T. MOULIK [*] : LINEAR PROGRAMMING U. N. DHUR & SONS PRIVATE LTD.

7. P. M. KARAK [1988] : LINEAR PROGRAMMING & THEORY OF GAMES, PUB. R. KARAK, 1

8. N. S. KAMBO [1984] : MATHEMATICAL PROGRAMMING, TECHNIQUES, AFFILIATED EAST-NEST. PRESS PVT. LTD. N. DELHI.

9. M. S. BAZARAH ET AL [1979]: NONLINEAR PROGRAMMING, JOHN WILEY & SONS N. Y.

* NOT KNOWN

একক 2 ❑ রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা ঃ পুনরালোচনা

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা

2.2 উদ্দেশ্য

2.3 R_n দেশে সাধারণ রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার রূপ

2.4 রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেলের স্বীকার (assumption)

2.5 রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেল ব্যবহারের সুবিধা

2.6 রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সীমাবদ্ধতা

2.7 রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর প্রয়োগের ক্ষেত্র

2.8 উদাহরণ

2.9 সারাংশ

2.10 অনুশীলনী

2.11 উত্তরমালা

2.1 প্রস্তাবনা (Introduction) :

আগের এককে আমরা বর্ণনা করেছি কি করে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা প্রবর্তিত হ'ল, মডেল বলতে কি বোঝায় এবং রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেলের আকরার কি রকমের।

এই এককে আমরা সাধারণ রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা কি ধরণের তা বিশদ ব্যাখ্যা করব। কিন্তু এই রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা গঠনেস্বীকার কি কি, এর সুবিধা ও সীমাবদ্ধতার কথা আলোচনা করা এই এককের উদ্দেশ্য। রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার প্রয়োগের দিক আগের এককে আলোচন করা হয়েছে। এই এককে প্রয়োগের ক্ষেত্র উদাহরণ সহকারে পুনরালোচিত হবে।

2.2 উদ্দেশ্য (Objectives)

সাধারণ রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার বিশদ আলোচনা, ঐ সমস্যার স্বীকার, সুবিধার দিক ও সীমাবদ্ধতা এই এককের মূল আলোচ্য বিষয়।

2.3 R_n দেশে সাধারণ রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার রূপ

সাধারণ রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার গাণিতিকরূপ নিম্নে লিপিবদ্ধ হল ঃ

চরম (অবম) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ (2.1)

শর্তসাপেক্ষে $\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n (\leq = \geq) b_1 \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n (\leq = \geq) b_m \end{array}\right\}$ (2.2)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ কেবল হয় n সিদ্ধান্তগ্রহণকারী চল।

আর $c_1, c_2, \ldots, c_n$-কে বলা হয় n মূল্য সূচক চল।

Z কে বলা হয় বিষয়াত্মক অপেক্ষক।

(2.2)-কে বলা হয় বাধাগোষ্ঠী। অর্থাৎ $x_1, \ldots, x_4$-এই চালগুলির মানগুলি (2.2) এই অসমীকরণতন্ত্র বা সমীকরণতন্ত্র বা ওদের মিশ্রণকে সিদ্ধ করে। সহগ a_{ij} $(i = 1, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots n)$ সমূহকে বলা হয় ক্রিয়াসূচক প্রচল এবং b_j $(j = 1, 2, 3, \ldots m)$-কে বলা হয় প্রয়োজনসূচক প্রচল। বাস্তবক্ষেত্রে সিদ্ধান্তগ্রহণকারী চল x_j ধনাত্মক হয় অর্থাৎ $x_j \geq 0$। যদিও যুক্তির খাতিরে বলা যায় x_j ঋণাত্মকও হতে পারে।

(2.1) এবং (2.2)-কে আরও সংক্ষিপ্ত ও সুন্দরভাবে উপস্থাপন করা যায় নিম্নরূপে,

চরম (অবম) $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_i$ (2.3)

শর্তসাপেক্ষে $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i (\leq = \geq) b_{ij}\ i = 1, \ldots m$ (2.4)

এবং $x_j \geq 0$ $\quad j = 1, \ldots n$ (2.5)

সংজ্ঞা 2.3.1 কার্যকর সমাধান ঃ

$x_1, \ldots, x_n$ এই n-সংখ্যক সিদ্ধান্তগ্রহণকারী চলেরা যখন (2.4) এবং (2.5) এই শর্তগুলিকে সিদ্ধ করে তখন তাদের সমস্যাটির কার্যকর সমাধান বলা হয়। এই কার্যকর সমাধান সমূহের মধ্যে যেটি বা যারা বিষয়াত্মক অপেক্ষকের চরম বা অবম মান দেয়, সেটিকে বা তাদের চরম বা অবম সমাধান বলা হয়। মন্তব্য 2.3.1 b_j গুলিকে সাধারণতঃ ধনাত্মক নেওয়া হয়। যদি কোনো b_j ধনাত্মক না হয় অসমীকরণটিকে '–' চিহ্ন দিয়ে গুণ করে প্রয়োজনসূচক প্রচল b'_j-কে ধনাত্মক করা হয়।

2.4 রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেলের স্বীকার (Assumption)

যে-কোনো রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেলে নিম্নলিখিত স্বীকারগুলি প্রয়োজনীয়।

স্বীকার 1. নিশ্চয়তা (Certainty) : মডেলের প্রচলগুলি যেমন কাঁচামালের যোগান। এক একক সিদ্ধান্তগ্রহণকারী চলের জন্য যে লাভ (মূল্য), প্রতি একক সিদ্ধান্তগ্রহণকারী চলের জন্য যে পরিমাণ

কাঁচামাল ব্যবহৃত হয়—এদের প্রত্যেকটিই আগে থেকে জানা আছে ; সুতরাং এরা প্রত্যেকটিই এক একটি ধ্রুবক। সুতরাং এই প্রচলগুলির মান কোনো অবস্থাতেই **সম্ভাবনাশ্রয়ী (random) বা অনিশ্চিত (Uncertain)** নয়।

স্বীকার 2. সান্তত্য (Continuity) : সিদ্ধান্তগ্রহণকারী চলগুলি সবসময় সন্তত বলে ধরে নেওয়া হয়েছে। উদাহরণস্বরূপ যদি $2 \le x_1 \le 5$ এই ধরণের শর্ত থাকে তাহলে x_1, 2 ও 5-এর মধ্যে যেকোনো মান গ্রহণ করতে পারে। যদি x_1 চলের মান 1, 2, 3, 4 ইত্যাদি পূর্ণসংখ্যা হয়, তখন x_1 একটি পূর্ণসাংখ্যিক চল হয়। এক্ষেত্রে প্রোগ্রামিং সমস্যাটি রৈখিক নয় কিন্তু পূর্ণসাংখ্যিক (integer programming) হয়। সমস্যাটির সান্তত্য বা (continuity) থাকে না।

স্বীকার 3. যোজ্যতা (additivity) : এক্ষেত্রে বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান, প্রতিটি সিদ্ধান্তকারী চলের জন্য যে পরিমাণ লাভ (মূল্য) সৃষ্ট হয়, তাদের যোগফলের সমান হবে। উদাহরণস্বরূপ দুটো তৈরি মাল A ও B বিক্রী করে যা লাভ পাওয়া যায় সেটা A ও B আলাদা আলাদা বিক্রী করে যা লাভ হয় তাদের যোগফলের সমান।

স্বীকার 4. আনুপাতিকতা (homogeneity) : বিষয়াত্মক অপেক্ষককে যে পরিমাণ পৃথক পৃথক কাঁচামাল ব্যবহার (বা সরবরাহ) করা হয়েছে এবং তার জন্য যে লাভ হয়েছে সেটা যথাক্রমে অনুরূপ সিদ্ধান্তকারী চলের মানের সমানুপাতী হবে। উদাহরণস্বরূপ এক একক তৈরী মাল প্রস্তুত করতে যদি কোনো যন্ত্র 5 ঘণ্টা ব্যবহার করা হয়, তাহলে 3 একক ঐ একই মাল তৈরি করতে একই যন্ত্র $3 \times 5 = 15$ ঘণ্টা ব্যবহার করতে হবে।

ঐ স্বীকারগুলি সিদ্ধ হওয়ার ফলশ্রুতিস্বরূপ বিষয়াত্মক অপেক্ষককে রৈখিক (অর্থাৎ যোজ্য ও সমঘাত বা additive and homogeneous) হতে হবে এবং শর্তাবলীও রৈখিক অসমীকরণতন্ত্র (সমীকরণতন্ত্র)-এর হতে হবে। তাছাড়া আমরা যে সব সমস্যা আলোচনা করব সেগুলি সর্বৈব deterministic থাকবে। অনিশ্চয়তা (uncertainty)-র কোনো অবকাশ নেই।

2.5 রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেল ব্যবহারের সুবিধা

রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেল-এর সুবিধাগুলো নিচে বিবৃত হল ঃ

(1) যে কাঁচামালগুলো থেকে আসল জিনিষ উৎপন্ন হয়। সেই কাঁচামালের সবচেয়ে বেশি ব্যবহার রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর সাহায্যে করা যায়। রৈখিক প্রোগ্রামিং সাহায্য করে সিদ্ধান্তগ্রহণকারীকে, কি করে উৎপাদন করার কারণগুলো ঠিকমত ব্যবহার করতে পারে যাতে করে কাঁচামালগুলো ঠিকমতো নির্বাচিত হয় ও উৎপাদনের কাজে লাগানো যায়।

(2) রৈখক প্রোগ্রামিং-এর সাহায্যে সিদ্ধান্তের গুণগত মান বৃদ্ধি হয়। সিদ্ধান্ত নেওয়ার পদ্ধতিটাও অনেকটাই নৈর্ব্যক্তিক হয়।

(3) রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা সমাধানের সহজ পদ্ধতি হচ্ছে সিম্‌প্লেক্স পদ্ধতি। কম্প্যুটারের সাহায্যে সিম্‌প্লেক্স পদ্ধতি অবলম্বন করে বড়ো বড়ো রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা সমাধান করা যায়।

(4) রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর সাহায্যে উৎপাদন প্রক্রিয়ার মধ্যে কোনো প্রতিবন্ধকতার সৃষ্টি হলে তা সহজেই ধরা পড়ে। উৎপাদন প্রক্রিয়ার প্রতিবন্ধকতার একটা উদাহরণ হল কতকগুলি মেসিন তাদের লক্ষ্যমাত্রা বজায় রাখতে পারছে না আবার অন্য মেসিনগুলো কাজের অভাবে বন্ধ হয়ে আছে।

2.6 রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সীমাবদ্ধতা

রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার অনেক সুবিধা ও প্রয়োগের ক্ষেত্র বিস্তারিত হওয়া সত্ত্বেও এর সীমাবদ্ধতাও কিছু আছে। সেগুলি নিচে লিপিবদ্ধ হল ঃ

(1) রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর একটা বড়ো অসুবিধা হল সিদ্ধান্তগ্রহণকারী চলের মধ্যে সম্পর্ক রৈখিক বলে ধরে নেওয়া হয়েছে। এতে সমস্যার রূপায়ণ অনেক সহজ ও সমাধানযোগ্য হল। কিন্তু বাস্তব জীবনের সমস্যাগুলো অনেক বেশী জটিল। ফলে বিষয়াত্মক অপেক্ষক ও শর্তাবলী সাধারণত রৈখিক হয় না। আমরা শুধু তাদের আসন্ন রৈখিক অপেক্ষক ধরে কাজ করি।

(2) রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার যদি সমাধান পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে আমরা সমস্যা সমাধান করে পূর্ণসংখ্যা পাব এমন কোনো নিশ্চয়তা নেই। ধরা যাক আমরা কতজন লোক বা কতগুলি মেশিন দিয়ে একটা কাজ হবে তা বার করতে চাইছি। সেক্ষেত্রে পূর্ণসংখ্যা নয় এমন সমাধান অর্থহীন। অথচ ঐ ধরণের সমাধানের আসন্ন পূর্ণসংখ্যা নিলে সেগুলো শর্তাবলী সিদ্ধ করবে এমন কোনো নিশ্চয়তা নেই। এক্ষেত্রে অন্য পদ্ধতি অবলম্বন করতে হবে।

(3) রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর সময় নির্ভর পরিবর্তন আলোচনার মধ্যে আনা হচ্ছে না। যদি প্রচলগুলি ধ্রুবক না হয়ে সম্ভাবনাশ্রয়ী (random) হয় বা অনিশ্চিত (uncertain) হয় তাহলে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা সমাধানের পদ্ধতি অচল হয়ে যাবে।

(4) একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যায় একটিমাত্র বিষয়াত্মক অপেক্ষক থাকে কিন্তু বাস্তব সমস্যা সমাধান করতে গেলে একটার বেশি অপেক্ষক ব্যবহার করার প্রয়োজন হয়।

2.7 রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর প্রয়োগের ক্ষেত্র

একক 1-তে আমরা রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা বলতে কি বোঝায় তা ব্যাখ্যা করেছি। রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেল কি করে গঠন করতে হয় তাও দেখিয়েছি এবং বিভিন্ন ধরণের সমস্যা গঠন করে দেখিয়েছি। এখানে আমরা ঐ সমস্যার প্রয়োগের ক্ষেত্র আরও বিস্তারিতভাবে আলোচনা করব। এইগুলি নিচে লিপিবদ্ধ হল ঃ

(1) কৃষিতে প্রয়োগ ঃ এই প্রয়োগগুলি দুধরণের হয় যথা খামার অর্থনীতি (farm economics) এবং

খামার পরিচালনা (farm management)। খামার অর্থনীতির কাজ হ'ল বিভিন্ন অঞ্চলের মধ্যে প্রতিযোগিতা সৃষ্টি করা ও উৎপন্ন সামগ্রীর সর্বোচ্চ বণ্টন। অঞ্চলের যে পরিমাণ জমি ও জাতীয় চাহিদা এই দু ধরণের শর্ত সাপেক্ষে কি করে উৎপাদন সবচেয়ে বেশি করা যায় সেইটাই উদ্দেশ্য। এখানে রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেল সাফল্যের সঙ্গে ব্যবহার করা হয়।

(2) প্রতিরক্ষার প্রয়োগ ঃ উদাহরণস্বরূপ এমন সব অস্ত্র তৈরি করা যাতে করে শত্রুপক্ষকে এক জায়গায় আটকে রাখা যায় কিন্তু সেইসঙ্গে উড়োজাহাজের জন্য ব্যবহৃত গ্যাসোলিন ব্যবহার সবচেয়ে কম হয়, পরিবহন পরিকল্পনা কী করলে নির্দিষ্ট কয়েকটি টার্গেটে সবচেয়ে বেশি সংখ্যক বোমা ফেলা যায়, প্রাকৃতিক দুর্যোগে ক্ষতিগ্রস্ত এলাকায় কত তাড়াতাড়ি ত্রাণসামগ্রী পাঠানো যায়, এই ধরণের বহুবিধ প্রতিরক্ষার সমস্যায় রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেলের বিবিধ প্রয়োগ আছে।

(3) উৎপাদন ব্যবস্থাপনা ঃ

(i) মিশ্র উৎপাদন (product mix) ঃ একটি কোম্পানী অনেকগুলি আলাদা আলাদা জিনিষ তৈরি করতে পারে। প্রত্যেকটার জন্যই সীমিত রসদ দরকার। সমস্যা হচ্ছে প্রতি উৎপন্ন জিনিষের থেকেই কিছু প্রতিদান পাওয়া যায়, তখন সীমিত কাঁচামাল ব্যবহার করে কোনো জিনিষ কতটা তৈরি করলে সামগ্রিকভাবে লাভ সর্বোচ্চ হবে।

(ii) উৎপাদন পরিকল্পনা ঃ পরিকল্পনা সময়কালে চাহিদা পরিবর্তনশীল, উৎপাদনক্ষমতা সীমিত, শ্রমিকের সংখ্যাও সীমিত, প্রথমে কত একক কাঁচামাল মজুত আছে এইসব নানাবিধ শর্তের মধ্যে এমনভাবে উৎপাদনের পরিকল্পনা করতে হবে যে ঐ নির্দিষ্ট সময়কালে উৎপাদন খরচা সবচেয়ে কম হবে।

(iii) নির্দিষ্ট ধারার যন্ত্রাংশ জোড়ার কাজ (Assembly-line balancing) ঃ বিভিন্ন যন্ত্রাংশ জুড়ে অনেক সময় একটা জিনিষ তৈরি হয়। সমস্যা হচ্ছে কি করে যন্ত্রাংশগুলি নির্দিষ্ট ধারায় যোগ করা যায়, যাতে করে সম্মীলিত জিনিষটা তৈরি করতে সবচেয়ে কম সময় লাগে।

(iv) মিশ্রণের সমস্যা (Blending Problem) ঃ কতকগুলি কাঁচামাল নির্দিষ্ট অনুপাতে মিশিয়ে একটা জিনিষ তৈরি হয়। এখন এই বিভিন্ন কাঁচামালের দাম আলাদা আলাদা মজুতও সীমিত। সমস্যা হচ্ছে কিভাবে বিভিন্ন কাঁচামাল মেশালে প্রয়োজনীয় শর্তসাপেক্ষে মিশ্রিত দ্রব্যের দাম সবচেয়ে কম হবে।

(v) কাট-ছাঁটজনিত ক্ষতি (Trim loss) ঃ অনেক সময় একটা পাত থেকে (উদাহরণস্বরূপ কাঁচের চাদর, কাগজের পাতা) বিভিন্ন আকৃতির ছোটো খাটো অনেকগুলো জিনিষ তৈরি করতে হবে। সমস্যা হল কি করে কতগুলো আকৃতি কেটে বার করলে বাতিল অংশ সবচেয়ে কম হবে।

অর্থসম্পদ পরিচালনা (Financial Management)

(i) পোর্টফোলিও নির্বাচন (Portfolio selection) ঃ কিভাবে পুঁজি বিভিন্ন সংস্থায় বিনিয়োগ করলে সর্বসাকুল্যে ফেরৎ পাওয়া টাকার পরিমাণ সবচেয়ে বেশি হয় সেটা ঠিক করাই লক্ষ্য।

(ii) লাভ পরিকল্পনা (Profits Planning) ঃ কারখানা, যন্ত্রপাতি, গুদামে মজুত, হাতে টাকা রাখা এই সব করে কিভাবে বিনিয়োগ করলে লাভ সর্বোচ্চ হয় সেটা নির্ণয় করাই উদ্দেশ্য।

বাজার-পরিচালনা (Marketing Management), কর্মীপরিচালনা (Personnel management) প্রভৃতি বহু জায়গায় রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর প্রয়োগ আছে।

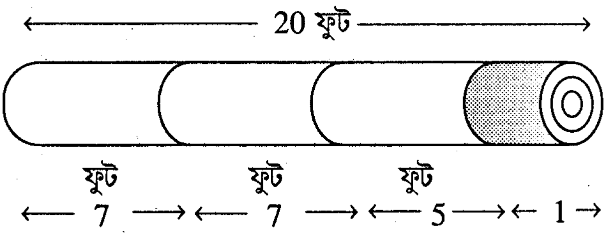
2.8 উদাহরণ

এর আগের এককে আমরা রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর অনেক উদাহরণ দিয়েছি। এখানে অন্য ধরণের উদাহরণ দেওয়া হল যাতে অন্য সমস্যায় রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর প্রয়োগ ব্যাখ্যা করা যায়।

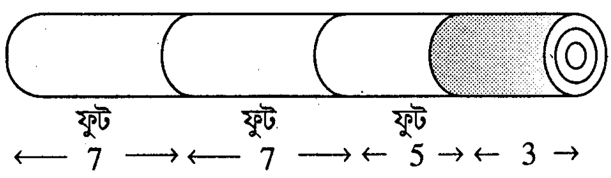
উদাহরণ 2.1 : একটা কাগজের কোম্পানী 20 ফুট চওড়া কাগজের রোল উৎপাদন করে। ক্রেতাদের ফরমাশ মাফিক প্রমাণ সাইজ থেকে কাট-ছাঁট করে বিভিন্নরকম মাপের রোল তৈরি করে। যে দুটো মাপের অর্ডার নেওয়া হয়েছে, সেগুলো যথাক্রমে

অর্ডার নং	যতখানি চওড়া প্রয়োজন (ফুট)	ফরমাশ করা রোলের সংখ্যা
1	·5	250
2	7	150

বাস্তবে অর্ডার মাফিক রোলকে নির্দিষ্ট মাপে ছুরি দিয়ে কেটে কেটে নেওয়া হয়। এখানে যে দু রকমভাবে কাগজের রোলকে কাটা হবে তা ছবির মাধ্যমে নীচে দেওয়া হল ঃ



চিত্র ঃ সেটিং A



চিত্র ঃ সেটিং B

প্রশ্ন হচ্ছে সেটিং A আর সেটিং B-এর মধ্যে কোনটা বেশি ভাল? আমরা হিসাব করব কোন ধরনের সেটিং-এ কতটা কাগজ নষ্ট হয়।

ধরা যাক, কাগজের রোলের দৈর্ঘ্য L ফুট।

(i) A setting ব্যবহার করে 300 প্রমাণ মাপের রোল ও B setting ব্যবহার করে 100 প্রমাণ মাপের রোল কাটা হল।

(ii) A সেটিং ব্যবহার করে 200 প্রমাণ মাপের রোল ও B সেটিং ব্যবহার করে 200 প্রমাণ মাপের রোল কাটা হল।

প্রশ্ন হচ্ছে এই দুটো বিকল্পের মধ্যে কোনটিতে কাগজের অপচয় কম।

(i)-নং ব্যবস্থা অনুযায়ী যে পরিমাণ কাগজ অপচয় হয় ঃ

$$300\ (1 \times L) + 100\ (3 \times L) = 600L \text{ বর্গফুট।}$$

(ii)-নং ব্যবস্থা অনুযায়ী যে পরিমাণ কাগজ অপচয় হয় ঃ

$$200\ (1 \times L) + 200\ (3 \times L) = 800L \text{ বর্গফুট।}$$

সুতরাং (i)নং ব্যবস্থায় অপচয় কম।

কাগজের অপচয় সবচেয়ে কম করার জন্য কী ধরণের সেটিং-এ কতকগুলি রোল কাটা যায় তা নির্ণয় করার জন্য সব ধরণের কাগজ কাটার বিকল্পগুলো নির্ণয় করতে হবে এবং সবরকম কার্যকর সমাবেশ গঠন করতে হবে। যদিও কি কি সেটিং হতে পারে সেটা ঠিক করা শক্ত নয়, কিন্তু সবরকম কার্যকর সেটিং-এর সমাবেশ বার করা প্রায় অসম্ভব ব্যাপার। এইজন্য রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর মডেলের সাহায্য নিতে হয়। তাহলে সমস্যাটা হল এইরূপ ঃ কোন ধরণের সেটিং কতকগুলি করে ব্যবহার করলে নির্দিষ্ট অর্ডার অনুযায়ী মাল সরবরাহ করা যায় এবং কাগজের অপচয় সবচেয়ে কম হয়।

প্রয়োজনীয় বিস্তার (ফুট)	ছুরির সেটিং				
	1	2	3	4	5
5	0	1	2	3	4
7	2	2	1	0	0
প্রতি ফুট দৈর্ঘ্যে ছাঁটের পরিমাণ	6*	1	3	5*	0

* লক্ষ্যণীয় 6ফুট ও 5 ফুট ছাঁট থেকে আবার 5 ফুট চওড়া কাগজ কাটা যায়।

ধরা যাক x_j = সেটিং j অনুযায়ী যে সংখ্যক প্রমাণ মাপের কাগজের রোল কাটা হয়, $j = 1, 2, 3, 4, 5$

লক্ষ্যণীয় $j = 1$ এবং $j = 4$ অগ্রাহ্য করতে হবে যেহেতু ছাঁটের বিস্তার যথাক্রমে 6 ও 5 ফুট।

5 ফুট বিস্তার আছে এমন উৎপন্ন রোলের সংখ্যা

$$= x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5$$

7 ফুট বিস্তার আছে এমন উৎপন্ন রোলের সংখ্যা $= 2x_1 + 2x_2 + x_3$

ধরা যাক y_1, y_2 যথাক্রমে 5 ফুট ও 7 ফুট বিস্তারের উদ্বৃত্ত রোলের সংখ্যা তাহলে

$$y_1 = -(x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5) + 250$$
$$y_2 = -(2x_1 + 2x_2 + x_3) + 150$$

তাহলে যে পরিমাণ কাগজ অপচয় হয় তার ক্ষেত্রফল হল ঃ

$$= L\,(x_1 + x_2 + 3x_3 + 5y_1 + 7y_2) \text{ বর্গফুট}$$

যেহেতু L একটা ধ্রুবক আমরা বিষয়াত্মক অপেক্ষক লিখতে পারি

অবম $z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 5y_1 + 7y_2$

নিম্নলিখিত শর্তসাপেক্ষে ঃ

$$-(x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5) + y_1 = 250 \text{ (5 ফুট রোল)}$$
$$-(2x_1 + 2x_2 + x_3) + y_2 = 150 \text{ (7 ফুট রোল)}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 2, 3, 5$$
$$y_i \geq 0,\ i = 1, 2$$

উদাহরণ 22. নির্দিষ্ট ধারার যন্ত্রাংশ জোড়ার সমস্যা (Assembly line Balanceing) ঃ একটি যন্ত্র তৈরি করার কোম্পানী এমন একটি যন্ত্র তৈরি করে যে তিনদিক থেকে প্রস্তুত যন্ত্রাংশ জুড়ে উৎপন্ন হয়। ঐ যন্ত্রাংশগুলো কারখানাটির দুটি বিভাগ থেকে তৈরি হয়ে আসে। যন্ত্রগুলি বিশেষ ধাঁচের হওয়ার জন্য প্রতি বিভাগ থেকে তিনটি যন্ত্রাংশ বিভিন্ন রেটে তৈরি হয়। নিচের টেবিলে কি হারে উৎপাদন হচ্ছে এবং বিভাগদুটি সর্বোচ্চ কত ঘণ্টা সপ্তাহে এই তিনটি যন্ত্রাংশ তৈরি করাতে ব্যয় করতে পারে।

বিভাগ	সর্বোচ্চ নিযুক্ত সাপ্তাহিক ঘণ্টা	উৎপাদনের হার (একক/ঘণ্টা)		
		অংশ 1	অংশ 2	অংশ 3
1	100	8	5	10
2	80	4	12	4

মডেলটা হল এইরকম—উদ্দেশ্য হল যন্ত্রাংশগুলি জুড়ে উৎপন্ন দ্রব্যের সংখ্যা কত বেশি হতে পারে যেখানে প্রদত্ত শর্তাবলী সিদ্ধ হয়।

ধরা যাক, x_{ij} = সপ্তাহে ঘণ্টা j যন্ত্রাংশ তৈরি করতে i বিভাগ নিয়োগ করে।

তাহলে তিনটে যন্ত্রাংশের যতগুলি একক উৎপন্ন হয়

যন্ত্রাংশ 1 : $8x_{11} + 6x_{21}$

যন্ত্রাংশ 2 : $5x_{12} + 12x_{22}$

যন্ত্রাংশ 3 : $10x_{13} + 4x_{23}$

যেহেতু প্রতিটি যন্ত্র তৈরি করতে প্রতিটি যন্ত্রাংশের একটি করে একক লাগে। সুতরাং যন্ত্রাংশ 1, যন্ত্রাংশ 2 এবং যন্ত্রাংশ 3টির মধ্যে যেটি সর্বনিম্ন সেটিই ঠিক করবে কতকগুলি মূল যন্ত্র তৈরী হবে।

সুতরাং মূল উৎপন্ন যন্ত্রের সংখ্যা = অবম $\left\{\underbrace{8x_{11}+6x_{21}}_{\text{যন্ত্রাংশ 1}}, \underbrace{5x_{12}+12x_{22}}_{\text{যন্ত্রাংশ 2}}, \underbrace{10x_{13}+4x_{23}}_{\text{যন্ত্রাংশ 3}}\right\}$

তাহলে বিষয়াত্মক অপেক্ষক হল

$$Z = \text{অবম } \{8x_{11} + 6x_{21}, 5x_{12} + 12x_{22}, 10x_{13} + 4x_{23}\}$$

শর্তগুলি হল $\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+x_{13} \le 100 \text{ (বিভাগ 1)} \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} \le 80 \text{ (বিভাগ 2)} \end{array}\right\}$ (2.6)

$x_{ij} \ge 0,\ i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3$

সুতরাং প্রোগ্রামিং সমস্যাটি হল ঃ

চরম $Z =$ অবম $\{8x_{11} + 6x_{21}, 5x_{12} + 12x_{22}, 10x_{13} + 4x_{23}\}$

শর্তসাপেক্ষে অসমীকরণগোষ্ঠী (2.6)

উপরিউক্ত সমস্যাটি রৈখিক নয়। কিন্তু এটা সহজেই রৈখিক সমস্যায় রূপান্তরিত করা যায়।

ধরা যাক $y =$ অবম $\{8x_{11} + 6x_{21}, 5x_{12} + 12x_{22}, 10x_{13} + 4x_{23}\}$

তাহলে সমস্যাটি প্রদত্ত রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যায় রূপান্তরিত হল ঃ

শর্তসাপেক্ষে চরম y

$$\left.\begin{array}{l} 8x_{11}+6x_{21} \ge y, \\ 5x_{12}+12x_{22} \ge y, \\ 10x_{13}+4x_{23} \ge y, \end{array}\right\}$$

এবং
$$\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 100 \\ x_{21} + x_{12} + x_{23} \le 80, \\ x_{ij} \ge 0,\ \forall \cdot i, j \\ y \ge 0. \end{array}$$

উদাহরণ 2.3. কর্মচারী পরিচালনা (Personal Management) ঃ সন্ধ্যার শিফ্টের আবাসিক ডাক্তররা কোনো সরকারি হাসপাতালে সপ্তাহে পর পর পাঁচদিন কাজ করেন এবং পরপর দুদিন ছুটি থাকে। সপ্তাহের যে-কোনোদিনই ডাক্তারদের পাঁচদিনের কাজ শুরু হতে পারে এবং এই শিফ্টগুলো চক্রাকারে পরিবর্তিত হয়। হাসপাতালে নিম্নলিখিত সর্বনিম্ন সংখ্যার ডাক্তার লাগে।

রবিবার	সোমবার	মঙ্গলবার	বুধবার	বৃহস্পতিবার	শুক্রবার	শনিবার
35	55	60	50	60	50	45

40 জনের বেশি ডাক্তার একই দিনে পাঁচ কাজের দিন শুরু করতে পারেন না। সর্বনিম্ন কতজন ডাক্তার হাসপাতাল নিয়োগ করতে পারে সেই সমস্যা রৈখিক প্রোগ্রামিং হিসাবে উপস্থাপিত করতে হবে।

ধরা যাক, x_j = সপ্তাহের j-তম ($j = 1, 2, \ldots, 7$) দিনে যে সংখ্যক ডাক্তার তাঁদের ক্লাস শুরু করেন। নির্ণেয় রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হল ঃ

অবম Z (ডাক্তারদের সংখ্যা) $x_1 + x_2 + \ldots + x_7$

শর্তসাপেক্ষে,

$$\begin{aligned}
& x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 35, \\
& x_2 + x_5 + x_6 + x_7 + x_1 \geq 55, \\
& x_3 + x_6 + x_7 + x_8 + x_2 \geq 60, \\
& x_4 + x_7 + x_1 + x_2 + x_3 \geq 50, \\
& x_5 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 60, \\
& x_6 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 50, \\
& x_7 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 45, \\
& x_j \leq 40 \\
& x_j \geq 0 \ \forall j
\end{aligned}$$

2.9 সারাংশ

এই এককে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সাধারণ রূপ বর্ণনা করা হয়েছে। রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেলে কী কী স্বীকার আছে। এর সুবিধা ও অসুবিধা এইগুলি সব এই এককে আলোচিত হয়েছে। রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর প্রয়োগের ক্ষেত্র বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। তাছাড়া রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর কিছু কিছু প্রয়োগের ক্ষেত্র উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

2.10 অনুশীলনী

2.1 একটা ইলেকট্রনিক্স কোম্পানী দুধরণের রেডিও মডেল তৈরি করে, দুটো আলাদা উৎপাদন লাইনে। প্রথম লাইনে উৎপাদন ক্ষমতা দৈনিক 60টি রেডিও এবং দ্বিতীয় লাইনে উৎপাদন ক্ষমতা হচ্ছে দৈনিক 75টি রেডিও। প্রথম মডেলের প্রতি এককে কোনো ইলেক্ট্রনিক যন্ত্রাংশের 10 পিস্ লাগে। দ্বিতীয় মডেলের প্রতি এককের জন্য লাগে একই যন্ত্রাংশের 8 পিস্। ঐ বিশেষ যন্ত্রাংশের সর্বোচ্চ জোগান 800 পিস্ 1 মডেল 1 এবং 2-এর প্রতি একক বিক্রী করে লাভ হয় যথাক্রমে 300 টাকা ও 200 টাকা।

প্রতি মডেল কি পরিমাণ তৈরি করলে লাভ সর্বোচ্চ হবে তা নির্ণয় করার জন্য রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হিসাবে উপস্থাপন কর।

2.2. একটি কোম্পানী তার উৎপন্ন দ্রব্যের প্রচারের জন্য স্থানীয় রেডিও ও টিভি ষ্টেশন ব্যবহার করে। বিজ্ঞাপন খাতে বরাদ্দ মাসে 100,000 টাকা। প্রতি মিনিট রেডিওতে বিজ্ঞাপনের জন্য খরচা 250 টাকা এবং প্রতি মিনিটে টিভিতে সম্প্রচারের জন্য লাগে 5000 টাকা। কোম্পানী চায় টিভিতে যত সময় বিজ্ঞাপন

দেওয়া হয় তার অন্তত দু গুণ সময় রেডিওতে সম্প্রচারিত হোক। আগের অভিজ্ঞতা থেকে বলা যায় যে এক মিনিট টিভিতে সম্প্রচারের জন্য যত বিক্রী হয় সেটা রেডিও এক মিনিট সম্প্রচারের জন্য যত বিক্রী হয় তার প্রায় 25 গুণ। মাসিক বরাদ্দ রেডিও ও টিভি সম্প্রচারে কিভাবে ব্যয় করলে বিক্রী সবচেয়ে বেশি সেই সমস্যা রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হিসাবে উপস্থাপন কর।

2.3. একটা কারখানায় তিন ধরণের জিনিষ A, B ও C উৎপন্ন হয়। ঐ উৎপন্ন দ্রব্যগুলোর প্রতি এককে লাভ যথাক্রমে 3টা, 2টা ও 4টা। কারখানায় দুটো মেশিন আছে এবং প্রতি ধরণের জিনিষের জন্য এক একক উৎপাদনে যথাক্রমে মেশিনে যত মিনিট কাজ হয় তা নিম্নরূপ ঃ

X ও Y মেশিনদ্বয়কে যথাক্রমে সর্বোচ্চ ব্যবহার করা যেতে পারে ঃ

		উৎপন্ন দ্রব্য		
		A	**B**	**C**
মেশিন	X	4	3	5
	Y	2	2	4

কারখানায় সর্বেচ্চ 100টি A, 200টি B 350 টি C উৎপন্ন করা যায়।

X মেশিন ও Y মেশিন যথাক্রমে ব্যবহার করা যায় 2000 মি. ও 2500 মি.। কিভাবে উৎপাদন করলে লাভ সর্বোচ্চ হয় সেই সমস্যাটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা হিসাবে লেখ।

2.11 উত্তরমালা

2.1 x_1 = প্রথম লাইন উৎপন্ন রেডিওর সংখ্যা

x_2 = দ্বিতীয় „ „ „ „

তাহলে রৈ. প্রো. স. হ'ল ঃ

চরম $Z = 300x_1 + 200x_2$

শর্তসাপেক্ষে, $x_1 \leq 60$

$x_2 \leq 75$

$10x_1 + 8x_2 \leq 800$

$x_1, x_2, \geq 0.$

2.2 x_1 = রেডিওতে সম্প্রচার যত মিনিট

x_2 = টিভিতে সম্প্রচার যত মিনিট

ধরা যাক, 1 মিনিট রেডিও সম্প্রচারে বিক্রি হয় y একক।

তাহলে রৈ. প্রো. স. হল ঃ

চরম $(x_1 + 25x_2)\, y$, y-ধ্রুবক

অথবা, চরম $x_1 + 25x_2$

$x_1 \geq 2x_2$

$250x_1 + 5000x_2 \leq 100{,}000$

$x_1, x_2 \geq 0$

2.3 ধরা যাক কারখানায় A, B ও C এই তিনটি উৎপন্ন দ্রব্যের x_1, x_2 ও x_3 একক উৎপাদন করা হল। তাহলে রৈ. প্রো. স. হল

চরম $Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$

শর্তাধীন $4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 2000$, (X মেশিনের জন্য)

$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 2500$ (মেসিন Y)

$100 \leq x_1 \leq 150$

$0 \leq x_2 \leq 200$

$0 \leq x_3 \leq 50$

তথ্যসূত্র

1. G. HADLEY [1974]	:	LINEAR PROGRAMMING, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMP.
2. S. I. GASS [1958]	:	LINEAR PROGRAMMING, N. Y., MC-GRAW HILL
3. H. A. TAHA, [1982]	:	OPERATIONS RESEARCH, MACMILLAN PUBLISHING CO. N.Y.
4. J. C. CHAKARVORTY & P. R. GHOSH [2001]	:	LINEAR PROGRAMMING & GAME THEORY, MOULIK LIBRARY
5. J. K. SHARMA [2003]	:	OPERATIONS RESEARCH, MACHILLAN INDIA LTD.
6. T. MOULIK [*]	:	LINEAR PROGRAMMING U. N. DHUR & SONS PRIVATE LTD.
7. P. M. KARAK [1988]	:	LINEAR PROGRAMMING & THEORY OF GAMES, PUB. R. KARAK, 1
8. N. S. KAMBO [1984]	:	MATHEMATICAL PROGRAMMING, TECHNIQUES, AFFILIATED EAST-NEST. PRESS PVT. LTD. N. DELHI.
9. M. S. BAZARAH ET AL [1979]	:	NONLINEAR PROGRAMMING, JOHN WILEY & SONS N. Y.

* NOT KNOWN

একক 3 ❑ দ্বিচল বিশিষ্ট রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার লেখচিত্রে সমাধান ও সেটের ধারণা

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা
3.2 উদ্দেশ্য
3.3 অসমীকরণের লেখচিত্র ও জ্যামিতিক ব্যাখ্যা
3.4 সমীকরণতন্ত্রের লেখচিত্র
3.5 সেটের সংজ্ঞা ও গোড়ার দু'-এক কথা
3.6 বিশেষ ধরণের রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা
3.7 সারাংশ
3.8 অনুশীলনী
3.9 উত্তরমালা

3.1 প্রস্তাবনা (Introduction) :

এই এককে দ্বিচলবিশিষ্ট রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সমাধান লেখচিত্রের সাহায্যে কি করে করা যায় তা আলোচনা করব। তার জন্য অসমীকরণতন্ত্রের দ্বারা সংক্রান্ত দেশ কি করে নির্ণয় করা যায় তাও বর্ণনা করা হবে। ঐ দেশের প্রান্তিক বিন্দুগুলো (Extreme points) নির্ণয় করার পদ্ধতি এবং তার থেকে চরম বা অবম মান নির্ণয় করা এ সবই আলোচিত হবে।

এ ছাড়াও সেটতত্ত্বের মূলবিষয়বস্তু সংক্ষেপে এখানে উপস্থাপিত হবে।

3.2 উদ্দেশ্য (Objectives)

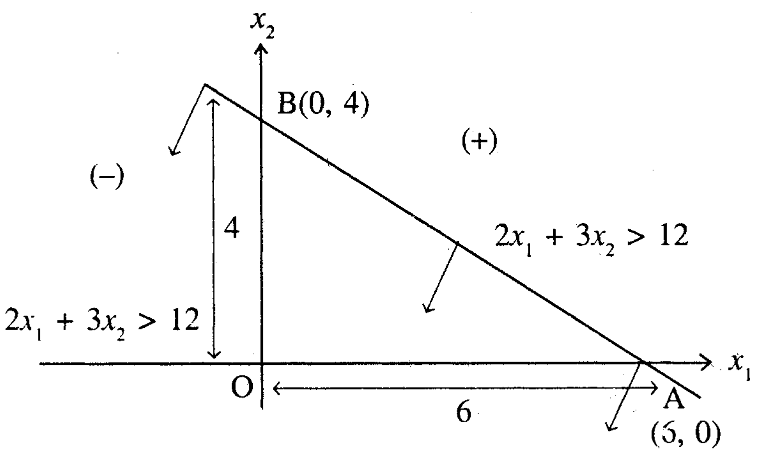
এই এককের উদ্দেশ্য হল লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিচলবিশিষ্ট রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সমাধান। এই প্রসঙ্গে কার্যকর দেশের ধারণাও বর্ণিত হবে।

এছাড়া সেটতত্ত্বের মূলবিষয়বস্তু সংক্ষেপে এখানে উপস্থাপিত হবে।

3.3 অসমীকরণের লেখচিত্র ও জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

উদাহরণ 3.1. x_1x_2-তলে $2x_1 + 3x_2 \le 12$, এই অসমীকরণের আবদ্ধ দেশ লেখচিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করতে হবে।

$2x_1 + 3x_2 = 12$ অথবা, $\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{4} = 1$, এই সমীকরণটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে। ঐ সরলরেখার x_1-অক্ষে ও x_2-অক্ষে খণ্ডিতাংশের পরিমাণ হল যথাক্রমে 6 একক ও 4 একক। AB সরলরেখাটি, $2x_1 + 3x_2 = 12$-এর লেখ চিত্র।



চিত্র : 3.1

AB সরলরেখার ওপর যেকোনো বিন্দুই $2x_1 + 3x_2 = 12$-সিদ্ধ করে।

সুতরাং ঐ সমীকরণটির অসীম সংখ্যক সমাধান, ক্রমিক (α, β) আছে, যাতে করে $2\alpha + 2\beta = 12$ (3.1)

পক্ষান্তরে ধরা যাক (α, β) একটি ক্রমিক সংখ্যা যুগল যাতে করে

$$2\alpha + 3\beta \le 12 \tag{3.2}$$

$$\text{অর্থাৎ, হয়}\quad \beta \le \frac{1}{3}(12 - 2\alpha) \tag{3.3}$$

$$\text{অথবা,}\quad \alpha \le \frac{1}{2}(12 - 3\beta) \tag{3.4}$$

তার মানে α-র কোন মান যদি আমরা গ্রহণ করি তখন β-এর মানের ওপর একটা বাধা সৃষ্টি হয়। অনুরূপে β-র কোনো মান যদি আমরা গ্রহণ করি তখন α-এর মানের ওপর একটা বাধা সৃষ্টি হয়। সুতরাং α-র প্রদত্ত মান α^*-এর জন্য β-র সর্বোচ্চ মান হতে পারে $\beta^* = \frac{1}{3}(12 - 2\alpha^*)$.

এটা সহজেই বোঝা যায় যে $2x_1 + 3x_2 = 12$, x_1, x_2 তলকে দু-ভাগে ভাগ করে। তখন $2.0 + 3.0 \leq 12$. সুতরাং মূলবিন্দু, $2x_1 + 3x_2 \leq 12$ যে অর্ধতলকে চিহ্নিত করে, সেই অর্ধতলেই অবস্থিত। ঐ অর্ধতল $2x_1 + 3x_2 = 12$ এই সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ।

$2x_1 + 3x_2 \leq 12$ যে অর্ধতলকে চিহ্নিত করে, তার মধ্যে যে কোনো বিন্দুই ঐ অসমীকরণকে সিদ্ধ করে।

মন্তব্য 3.1 : $2x_1 + 3x_2 \geq 12$ অনুরূপে যে অর্ধতলে বিন্দু অবস্থিত নয়, সেই অর্ধতলই চিহ্নিত করে।

মন্তব্য 3.2 : অসমীকরণের লেখচিত্র নির্মাণের পদ্ধতি ঃ

অসমীকরণের ডানপক্ষকে সবসময় ধনাত্মক করে নিতে হবে।

ধরা যাক অসমীকরণটি হল $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$, এই সমীকরণটির লেখচিত্র আঁকতে হবে।

ঐ সমীকরণ xy-তলকে যে দুই অর্ধতলে ভাগ করে, তার কোনটিতে মূলবিন্দু অবস্থিত তা দেখে নিতে হবে।

ঐ অর্ধতলই $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1$, এই অসমীকরণের সমাধান অঞ্চল ইঙ্গিত করে।

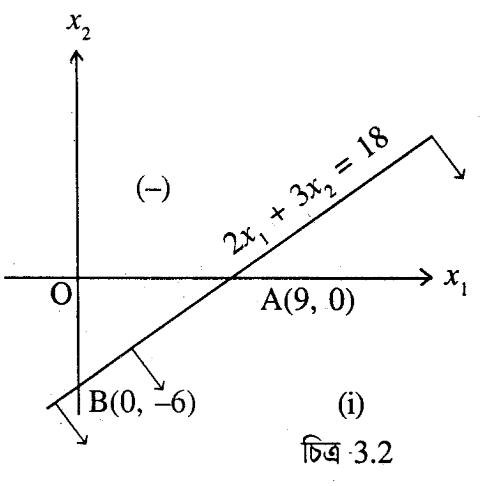
উদাহরণ 3.2 : নিম্নলিখিত অসমীকরণগুলির দ্বারা সংক্রান্ত সমাধান অঞ্চল লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় করতে হবে।

(i) $-2x_1 + 3x_2 \leq -18$ **(ii)** $-2x_1 + 3x_2 \leq 18$

(iii) $2x_1 + 3x_2 \geq -18$ **(iv)** $-2x_1 - 3x_2 \geq -18$

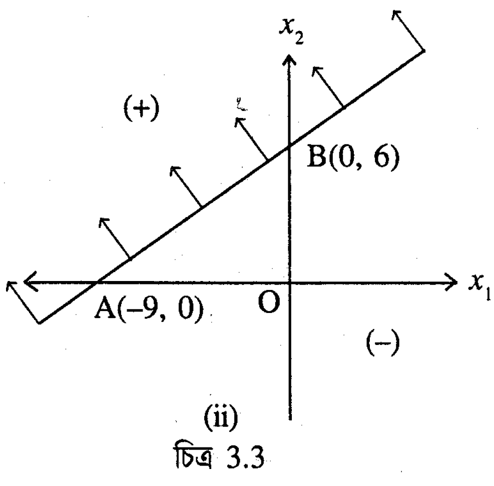
(i) (a) ডানপক্ষ ধনাত্মক করে পাই, $2x_1 - 3x_2 \geq 18$ (3.5)

(b) $2x_1 - 3x_2 = 18$ অর্থাৎ $\frac{x_1}{9} + \frac{x_2}{6} = 1$.



(i)

চিত্র 3.2



(ii)

চিত্র 3.3

(ii) যেহেতু $2 \times 0 - 3 \times 0 = 0 \not> 18$

তাহলে দেখা যাচ্ছে মূলবিন্দু অসমীকরণ (3.5)-কে সিদ্ধ করে না। সুতরাং সমাধান অঞ্চলটি, যে অর্ধতলে মূলবিন্দু থাকে না, সেটিকে ইঙ্গিত করে।

(ii) (a) যেহেতু ডানদিক ধনাত্মক আছে আমরা সরাসরি পরের ধাপে যেতে পারি।

(b) $-2x_1 + 3x_2 = 18$ অথবা, $\frac{x_1}{-9} + \frac{x_2}{6} = 1$ (চিত্র 3.3)

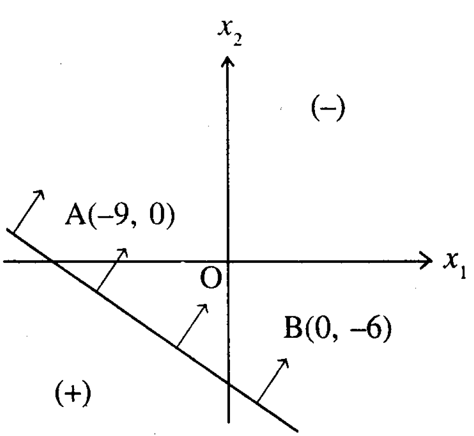
(c) $-2x_0 + 3x_0 = 0 \not> 18$ অর্থাৎ মূলবিন্দু যে অর্ধতলে আছে সেখানে সব বিন্দুতেই অসমীকরণের মান ঋণাত্মক হবে। অথবা, সেই অর্ধতলটাই সরলরেখাটির বা ঋণাত্মক দিক হবে। অর্থাৎ নির্দিষ্ট সমাধান অঞ্চল সরলরেখাটির (+) দিক বা ধনাত্মক দিক হবে।

(iii) $2x_1 + 3x_2 \geq -18$ অর্থাৎ $\frac{x_1}{9} + \frac{x_2}{6} \geq -1$

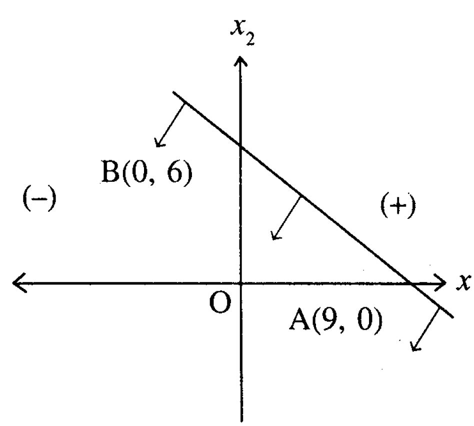
(a) ডানপক্ষ ঋণাত্মক হওয়ায় আমরা অসমীকরণকে লিখলাম

$$-\frac{x_1}{9} - \frac{x}{6} \leq 1 \text{ হিসাবে।}$$

(b) $-\frac{x_1}{9} - \frac{x_2}{6} = 1$ সমীকরণের লেখচিত্র (চিত্র 3.4)



চিত্র 3.4



চিত্র 3.5

(c) $-\frac{1}{9}.0 - \frac{1}{6}.0 < 1$ অতএব মূলবিন্দু সরলরেখাটির (–) দিকে থাকবে। সমাধান অঞ্চলও লেখাটির (–) দিকে থাকবে।

(iv) $-2x_1 - 3x_2 \geq -18.$

(a) ডানপক্ষ ঋণাত্মক হওয়ায় আমরা অসমীকরণটিকে '≥' ধরণের থেকে '≤' ধরণে রূপান্তরিত করলাম অর্থাৎ $2x_1 + 3x_2 \le 18$.

(b) সমীকরণ $2x_1 + 3x_2 = 18$-এর লেখচিত্র (চিত্র 3.5)

(c) মূলবিন্দু, সরলরেখার (–) দিকে অবস্থিত।

সমীকরণের (–) দিক নির্ণেয় সমাধান অঞ্চল।

3.4 সমীকরণতন্ত্রের লেখচিত্র

দ্বিচলবিশিষ্ট রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার লেখচিত্র সাহায্যে সমাধান করা যায়। আগের অংশ 3.3-তে আমরা অসমীকরণের নির্ধারিত সমাধান অঞ্চল অঙ্কন করতে পারি। প্রদত্ত রৈ. প্রো. স. (রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা)-এর বাধা গোষ্ঠীতে যদি একাধিক অসমীকরণ বা সমীকরণ থাকে, তাহলে তাদের দ্বারা সংজ্ঞাত সমাধান অঞ্চলের ছেদই (intersection) হল বাধাগোষ্ঠীর সমাধান অঞ্চল। যদি চলগুলি ধনাত্মক হয়। সেক্ষেত্রে সমাধান অঞ্চলকে কার্যকর অঞ্চল (feasible region) বলা হয়। যেহেতু অসমীকরণগুলির অপেক্ষক প্রত্যেকটাই রৈখিক অপেক্ষক, সমাধান অঞ্চলগুলির সীমারেখা প্রত্যেকটাই সরলরেখা হবে। সুতরাং সমাধান অঞ্চলটি একটি বহুভুজ হবে। এই বহুভুজের শীর্ষবিন্দুগুলিতে বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান বার করা হবে। এটা প্রমাণ করা হবে পরে যে শীর্ষবিন্দুগুলির একটি বা একাধিকে বিষয়াত্মক অপেক্ষক চরম বা অবম মান লাভ করে। যদি বিষয়াত্মক অপেক্ষক যে সরলরেখাকে চিহ্নিত করে, সেই সরলরেখা সমান্তরাল পথে সমাধান অঞ্চলের দিকে নিয়ে যাওয়া হয়, তাহলে যে বিন্দু বা সরলরেখাকে ঐ সরলরেখাটি (বিষয়াত্মক অপেক্ষক) সমাধান অঞ্চলকে স্পর্শ করে। সেই বিন্দু বা সেই রেখার বিন্দুসমূহই রৈ. প্রো. স.-এর চরম বা অবম সমাধান হবে। উদাহরণের সাহায্যে এটা ব্যাখ্যা করা হবে।

উদাহরণ 3.3. চরম $Z = 6x_1 + 5x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + 2x_2 \le 4$

$3x_1 + 2x_2 \le 6$

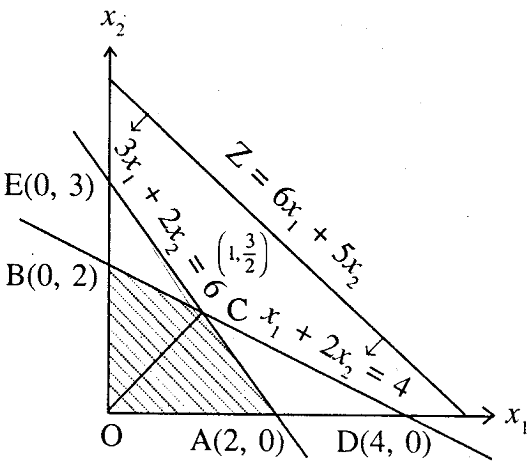
$x_1, x_2 \ge 0$

যেহেতু, $x_1, x_2 \ge 0$

$x_1 + 2x_2 \le 4$-এর সমাধান অঞ্চল ΔOBD

$3x_1 + 2x_2 \le 6$-এর সমাধান অঞ্চল ΔOAE

অতএব বাধাগোষ্ঠী দিয়ে নির্ধারিত সমাধান অঞ্চল হল OACB (চিত্র 3.6)



চিত্র 3.6

ঐ সমাধান অঞ্চলের শীর্ষবিন্দুগুলো হল, O, A, C ও B.

O-তে $Z = 6x_1 + 5x_2$-এর মান $= 6 \times 0 + 5 \times 0 = 0$

A-তে Z-এর মান $= 6 \times 2 + 5 \times 0 = 12$

B-তে Z-এর মান $= 6 \times 0 + 5 \times 2 = 10$

C-তে Z-এর মান $= 6 \times 1 + 5 \times \frac{3}{2} = 13\frac{1}{2}$

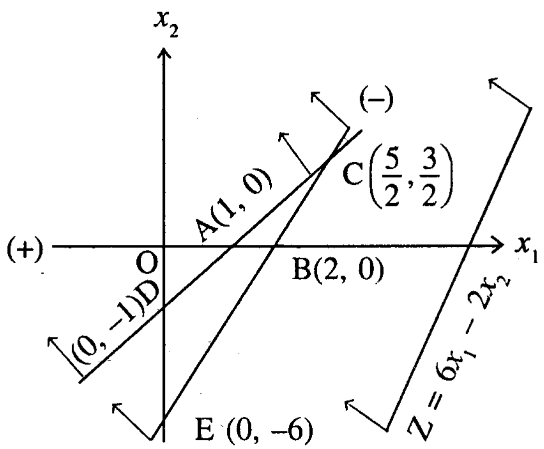
যেহেতু বিষয়াত্মক অপেক্ষক একটি সরলরেখা যেটা লাভের পরিমাণ নির্ণয় করে সুতরাং মূলবিন্দু থেকে ঐ সরলরেখার ওপর লম্বের মানের ওপর Z-এর মান নির্ভর করে। সুতরাং সমাধান অঞ্চলের কোনো বিন্দু বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান সর্বোচ্চ করে তাই চরম সমাধান হবে চরম-মান নির্ণয়কারী সমস্যায় এবং অবম সমাধান হবে অবম-মান নির্ণয়কারী সমস্যায়।

তাহলে চরম $Z = 13\frac{1}{2}$ এবং চরম সমাধান হল ঃ $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ লক্ষণীয় বিষয়াত্মক অপেক্ষক সমাধান অঞ্চলকে $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

উদাহরণ 3.4 : চরম $Z = 6x_1 - 2x_2$,

শর্তসাপেক্ষে

$$x_1 - x_2 \le 1$$
$$3x_1 - x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



চিত্র 3.7

বাধাগোষ্ঠীর সমাধান অঞ্চল ΔABC (চিত্র 3.7)

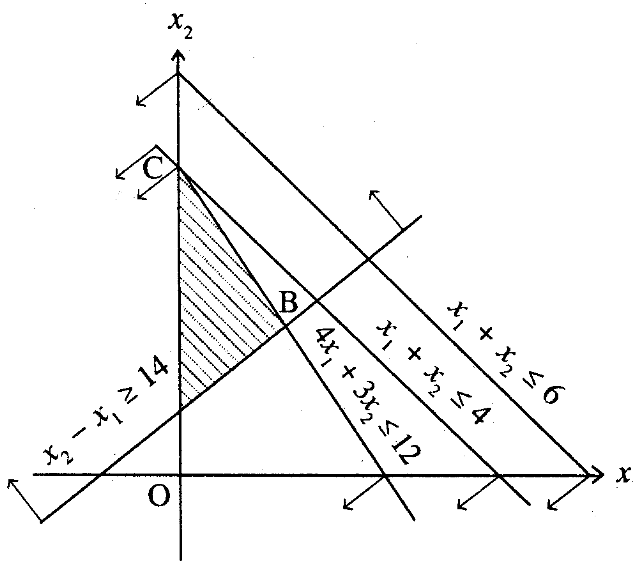
লক্ষ্যণীয় $3x_1 - x_2 = 6$ এবং $Z = 6x_1 - 2x_2$ (বিষয়াত্মক অপেক্ষক), এই দুই সরলরেখা পরপর সমান্তরাল। সুতরাং বিষয়াত্মক অপেক্ষক ABC-কে BC বাহুতে স্পর্শ করে। সুতরাং চরম সমাধান BC-এর ওপর অবস্থিত যে-কোনো বিন্দু এবং চরম মান হল $= 2 \times 6 - 0 \times 2 = 12$

$$= \frac{5}{2} \times 6 - \frac{3}{2} \times 2 = 12$$

উদাহরণ 3.5 : লেখচিত্রের সাহায্যে অসমীকরণতন্ত্রের সমাধান অঞ্চল নির্ণয় করো ঃ

$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$-x_1 + x_2 \ge 1$$
$$x_1 + x_2 \le p$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

কোন বাধাগোষ্ঠী অতিরিক্ত (redundant) ? একটু সমাধান অঞ্চল চিহ্নিত করতে ন্যূনতম বাধাগোষ্ঠী নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র 3.8

অতএব বাধাগোষ্ঠীর দ্বারা নির্ধারিত সমাধান অঞ্চল হল ΔABC (চিত্র 3.8)।

অতিরিক্ত বাধাগোষ্ঠী হল ঃ $\quad x_1 + x_2 \le 4$
$\quad\quad x_1 + x_2 \le 6$

3.5 সেটের সংজ্ঞা ও গোড়ার দু-এক কথা

3.5.1. সেট ঃ সেট হল সু-সংজ্ঞাত পরস্পর আলাদা কতকগুলি জিনিষের সমষ্টি। সু-সংজ্ঞাত বলতে বোঝায় কোনো একটি জিনিষ ঐ সমাবেশের একজন কি না তা সহজেই বোঝায় যায়। যে জিনিষগুলো নিয়ে ঐ সেট গঠিত হয়, তাদেরকে ঐ সেটের উপাদান বলা হয়।

কোনো সেট A-এর যদি x একটি উপাদান হয় তাহলে আমরা লিখি $x \in A$। যার মানে হল x, A-এর অন্তর্গত।

উদাহরণ 3.6 : ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার একটি সেট।

উদাহরণ 3.7 : বাস্তব রেখার উপর মূলদ সংখ্যার (rational number) একটি সেট। আমরা অনেক সময় একটা সেটকে বর্ণনা করি, এক জোড়া ধনুর্বন্ধনীর মধ্যে উপাদানগুলোকে আবদ্ধ রেখে। যেমন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট A-কে প্রকাশ করা হয় এইভাবে $A = \{1, 2, 3, 4, ... \}$ অপর একভাবে আমরা A সেটকে প্রকাশ করতে পারি। যেমন, $A = \{x : x$ একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $\}$

3.5.2. দুটি সেটের সমতা ঃ দুটো সেট A ও B-কে পরস্পর সমান বলা হয় যদি A-এর প্রতি উপাদানই B-এর একটি উপাদান এবং B-এর প্রতিটি উপাদানই A-এর একটি উপাদান হয়। এইটাকে এভাবে লেখা যায় ঃ $A = B$।

3.5.3. উপসেট ঃ একটি সেট A-কে B সেটের উপসেট বলা হয় যদি A-এর প্রতিটি উপাদানই B-এর একটি উপাদান হয়।

A, B-এর উপসেট হলে তাকে লেখা হয় $A \subseteq B$ হিসাবে।

মন্তব্য 3.1 : ওপরের সংজ্ঞা অনুযায়ী প্রতি সেটই তার নিজের উপসেট।

3.5.4. প্রকৃত উপসেট ঃ A-কে B-এর প্রকৃত উপসেট বলা হয় যদি A, B-এর উপসেট হয় এবং B-এর অন্তত একটি উপাদান থাকবে যেটা A-এর উপাদান নয়। A, B-এর প্রকৃত উপসেট সেট লেখা হয় এইভাবে $A \subset B$।

3.5.5. সংযোগ ঃ দুটি সেট A ও B-এর সংযোগকে প্রকাশ করা হয় $A \cup B$ হিসাবে এবং এই সযোগ ওএমন একটি সেট যার প্রত্যেকটি উপাদানই হয় A-এর উপাদান না হয় B-এর উপাদান হয়। অর্থাৎ $x \in A \cup B \Rightarrow$ হয় $x \in A$. অথবা $x \in B$ অথবা $x \in A$ এবং $x \in B$.

3.5.6. ছেদ ঃ দুটি সেট A ও B-এর ছেদ বলতে এমন একটি সেট বোঝায় যার প্রত্যেকটি উপাদানই A ও B উভয়েরই উপাদান। অর্থাৎ $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$.

3.5.7. শূণ্য সেট ঃ শূণ্য সেট বলতে এমন একটি সেট বোঝায় যার কোনো উপাদানই নেই। শূণ্য সেটকে ϕ দিয়ে চিহ্নিত করা হয়।

3.5.2. মন্তব্য ঃ একটি শূণ্য সেট যেকোনো সেটেরই উপসেট।

3.5.8. একক বৃত্তাকার চাক্তি (মূলবিন্দু কেন্দ্র করে)

x_1x_2-তলে মূলবিন্দুকে কেন্দ্র করে ও এক একক ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তাকার চাক্তির ভেতরের বিন্দুগুলোকে নিয়ে গঠিত সেটই উদ্দিষ্ট সেট।

ঐ সেটকে X লেখা যায় ঃ $X_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

3.5.9 মূলবিন্দুকে কেন্দ্র করে একক বৃত্ত ঃ

x_1x_2 তলে মূলবিন্দুকে কেন্দ্র করে ও একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তকে এমন একটি সেট X_2 বোঝায়, যাতে করে $X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

3.5.10. n-মাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশ E_n ঃ

আমরা জানি, x_1x_2-এই দ্বিমাত্রিক তলের যে-কোনো বিন্দুকে অর্থাৎ ক্রমিত x_1, x_2 স্থানাঙ্কবিশিষ্ট বিন্দু হিসাবে প্রকাশ করতে পারি। যেমন, $x = (x_1, x_2)$।

এই ধারণাকে আমার n-মাত্রা পর্যন্ত বিস্তৃত করতে পারি।

ঐ সেটের যেকোনো ন্দিুকে ক্রমিত n-সংখ্যক বাস্তব সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করতে পারি অর্থাৎ $x = (x_1, ..., x_n)$।

এই সেটকে n-মাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশ বলা হবে যদি নিম্নলিখিত শর্তগুলি পূর্ণ হয় ঃ

(a) ঐ সেট দুই উপাদানের যোগফল ও যেকোনো উপাদানকে স্কেলার দিয়ে গুণন এই দুই প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে বন্ধ (closed) হবে।

(b) $x^1 = (x_1^1, ..., x_n^1)$ এবং $x^2 = (x_1^2, ..., x_n^2)$ এই দুই বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব $d(x^1, x^2)$-কে নিম্নরূপে ব্যক্ত করা যায়,

$$d(x^1, x^2) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i^1 - x_i^2)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

তখন ঐ সেটকে n মাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশ বলা হয় এবং E_n দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

3.5.11. পরাগোলক ঃ E_n-এ একটি পরাগোলক $B_1(\hat{x}_0, \varepsilon)$ বলতে এমন একটি গোলক বোঝায় যার কেন্দ্র হল $\hat{x}_0$ এবং ব্যাসার্ধ ε অর্থাৎ $B_1(\hat{x}_0, \in) = \left\{\hat{x} \in E_n \,|\, d(\hat{x}, \hat{x}_0) \leq \in\right\}$

$B_1(\hat{x}, \in)$-কে বন্ধ গোলক (closed ball)

$B_2(\hat{x}_0, \in)$-কে মুক্ত গোলক (open ball) বলা হয় যদি

$B_2(\hat{x}_0, \in) = \left\{\hat{x} \in E_n \,|\, d(\hat{x}, \hat{x}_0) \leq \in\right\}$

3.5.12 পরাবৃত্ত ঃ E_n-এ একটি পরাবৃত্ত $B_3(x, \in)$

বলতে বোঝায় এমন একটি সেট যেটি নিম্নরূপ ঃ

$$B_3(\hat{x}_0, \in) = \left\{\hat{x} \in E_n \,|\, d(\hat{x}, \hat{x}_0) = \in\right\}$$

3.5.13. $\in$-সামীপ্য ($\in$-neighbourhord) : E_n-এ $\hat{a}$ বিন্দুর $\in$-সামীপ্য বলতে আমরা এমন মুক্ত গোলক $B_2(\hat{a}, \in)$ বোঝাই যার কেন্দ্র হল $\hat{a}$ এবং ব্যাসার্ধ $\in > 0$,

অর্থাৎ $\in$-সামীপ্য $= \left\{\hat{x} \in E_n \,|\, d(a, \hat{x}) < \in\right\}$

3.5.14. অন্তঃস্থ বিন্দু : E_n-এ একটি বিন্দু $\hat{a}$-কে A সেটের অন্তঃস্থ বিন্দু বলা হয় যদি $\hat{a}$-এর চারদিকে একটি $\in$-সামীপ্য পাওয়া যায় যার সমস্ত কিছুই A-এর এবং একমাত্র A-এর বিন্দুসমূহ।

3.5.15. বহিঃস্থ বিন্দু : E_n-এ একটি বিন্দু $\hat{a}$-কে A সেটের বহিঃস্থ বিন্দু বলা হবে যদি $\hat{a}$-এর একটি $\in$-সামীপ্য পাব যার মধ্যে A-এর কোনো বিন্দুও থাকে না।

3.5.16. পরিধিস্থ বিন্দু : E_n-এ একটি বিন্দু $\hat{a}$-কে A সেটের পরিধিস্থ বিন্দু বলা হবে যদি $\hat{a}$-এর $\in$-সামীপ্যে A সেটের অন্তঃস্থ বিন্দু ও বহিঃস্থ বিন্দু উভয় ধরণের বিন্দুই অবস্থিত থাকে।

মন্তব্য 3.3. লক্ষ্যণীয় A-এর পরিধিস্থ বিন্দু A-এর উপাদান নাও হতে পারে।

3.5.17. মুক্ত সেট (Open set) : A সেটকে মুক্ত সেট বলা হবে যদি A-এর অন্তর্গত প্রতিটি বিন্দুই অন্তঃস্থ বিন্দু।

3.5.18. সীমাবিন্দু (Limiting point) : E*n*-এ $\hat{a}$-কে A সেটের সীমাবিন্দু বলা হবে। যদি $\hat{a}$-এর $\in$-সামীপ্য A সেটের অসীম সংখ্যক উপাদান থাকে।

3.5.19. বন্ধ সেট (Closed set) : একটা সেট A-কে বন্ধ সেট বলা হবে। যদি A-এর মধ্যেই A-এর সব সীমাবিন্দুই অবস্থিত থাকে।

উদাহরণ 3.6. : প্রদত্ত সেট $X = \left\{(x_1, x_2) \,|\, x_1^2 + x_2^2 \le 1\right\}$ বন্ধ।

উদাহরণ 3.7. : প্রদত্ত সেট $X = \left\{(x_1, x_2) \,|\, x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$ মুক্ত।

3.5.20. সেট (Complement of a set) :

E*n*-$\hat{A}$ সেটকে A সেটের পূরক বলা হয় যদি $\hat{A}$-এর মধ্যে A-এর কোন বিন্দু না থাকে।

অর্থাৎ $A \cup \hat{A} = E_n$

$A \cap \hat{A} = \phi$

মন্তব্য 3.4. A যদি মুক্ত সেট হয় $\hat{A}$ বন্ধ সেট হবে।

মন্তব্য 3.5 A যদি বন্ধ সেট হয় $\hat{A}$ মুক্ত সেট হবে।

মন্তব্য 3.6 শূণ্য সেট, ϕ এবং E_n একই সঙ্গে মুক্ত সেট ও বন্ধ সেট।

3.5.21. সীমাবদ্ধ সেট (Broundad set) :

E*n*-এ একটা সেট A-কে সীমাবদ্ধ বলা হয় যদি একটি ধ্রুবক k পাওয়া যায় যাতে $d(0, x) \le R$ & $x \in A$.

যদি $x = (x_1, ..., x_n)$, $d(0, x) = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

3.6 বিশেষ ধরণের রৈ. প্রো. স.

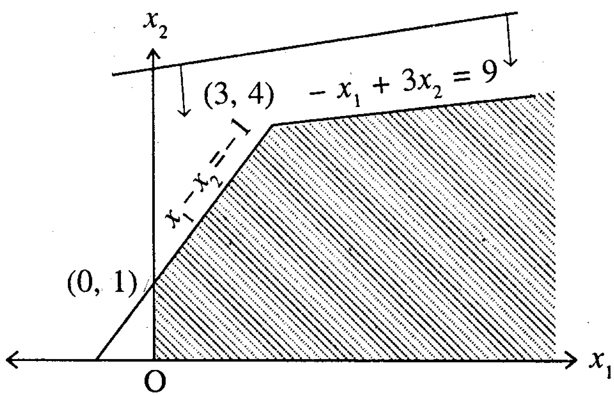
3.6.1. অসীম সমাধান অঞ্চল ঃ

উদাহরণ 3.1. ঃ চরম $Z = -x_1 + 3x_2$

শর্তসাপেক্ষে, $x_1 - x_2 \geq -1,$ (3.6)

$-x_1 + 3x_2 \leq 9$ (3.7)

$x_1, x_2 \geq 0$



চিত্র 3.9

বাধাগোষ্ঠীর সমাধান অঞ্চল (চিত্র 3.9) অসীম (unbounded)। বিষয়াত্মক অপেক্ষক $Z = -x_1 + 3x_2$, $-x_1 + 3x_2 = 9$ এই সমীকরণের সমান্তরাল। সুতরাং বিষয়াত্মক অপেক্ষক সমাধান অঞ্চলকে $x_1 + 3x_2 = 9$, এই সরলরেখা বরাবর স্পর্শ করে।

চরম মান, বিষয়াত্মক অপেক্ষকে $-x_1 + 3x_2 = 9$, এই সরলরেখার ওপর অবস্থিত যে-কোনো বিন্দুর স্থানাংকদ্বয় বসিয়ে পাওয়া যায়।

অতএব চরম মান হ'ল $= -x_1 + 3x_2\Big|_{\substack{x_1=3 \\ x_2=4}} = 9.$

লক্ষণীয় যদিও সমাধান অঞ্চল অসীম চরম মান হল সসীম।

3.6.2. অসীম সমাধান ঃ

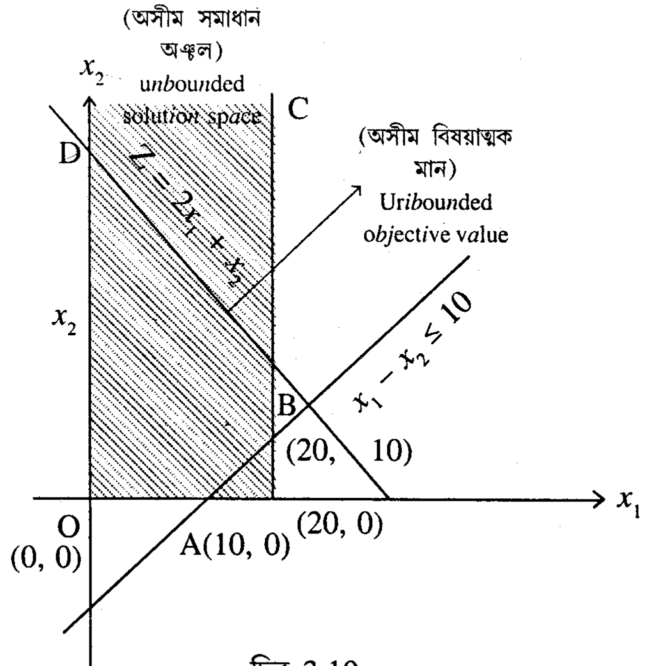
উদাহরণ 3.6. : চরম $Z = 2x_1 + x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 - x_2 \leq 10$ (3.8)

$2x_1 \leq 40$ (3.9)

$x_1, x_2 \geq 0$

সমাধান অঞ্চল একটি চতুর্ভুজ যার দুই বাহু OD এবং BC সমান্তরাল। ফলে চতুর্ভুজটি অসীম। এর শীর্ষবিন্দুগুলি হল, O(0, 0), A(10, 0), B(20, 10)।



চিত্র 3.10

$x_1 = 20$, $x_2 = k > 0$ (3.8) এবং (3.9) শর্তগুলি $0 < k$-এর যে-কোনো মানের জন্যই সিদ্ধ হয়।

$$Z\big|_{x_1=20, x_2=k} = 2 \times 20 + k$$

$$= 40 + k \longrightarrow +\infty$$

যখন $k \longrightarrow \infty$

3.6.3. কার্যকারিতাহীন সমাধান (Infeasible solution) ঃ

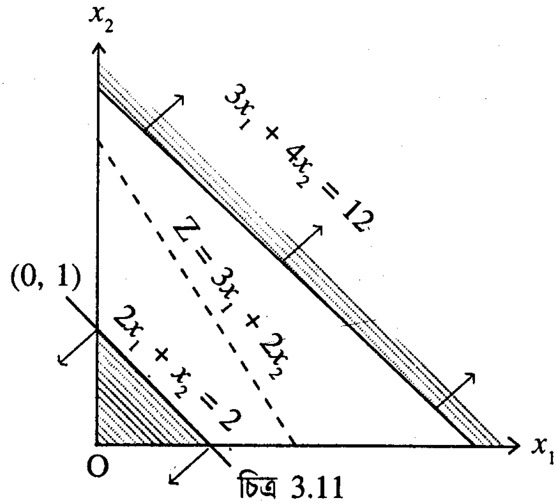
উদাহরণ 3.7. চরম $Z = 3x_1 + 2x_2$

শর্তসাপেক্ষে $\quad 2x_1 + x_2 \leq 2 \qquad (3.10)$

$3x_1 + 4x_2 \leq 12 \qquad (3.11)$

$x_1, x_2 \geq 0$

(3.10) এবং (3.11) অসমীকরণদ্বয়ের সমাধান অঞ্চল পরস্পর শূণ্যছেদী (disijoint)। সুতরাং রৈ. প্রো. স.-এর কোন কার্যকরী সমাধান অঞ্চল নেই।

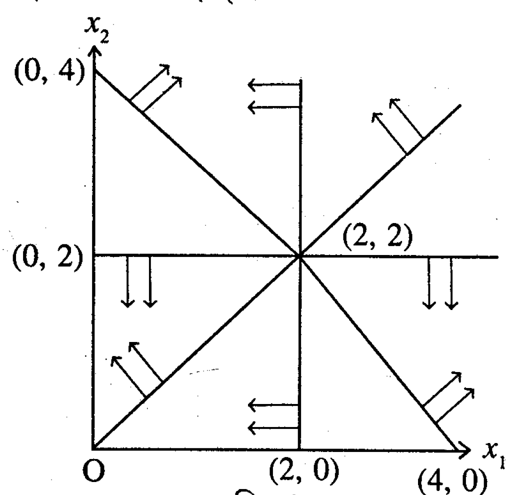


চিত্র 3.11

উদাহরণ 3.8. প্রদত্ত রৈ. প্রো. স.-এর কার্যকর অঞ্চল আছে কিনা তা লেখচিত্রের সাহায্যে দেখতে হবে ঃ

$$x_1 \leq 2 \tag{3.12}$$
$$x_2 \leq 2 \tag{3.13}$$
$$x_1 + x_2 \geq 4 \tag{3.14}$$
$$x_1 \leq x_2 \tag{3.15}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

কার্যকর অঞ্চলের একটাই উপাদান আছে। (2.2)



চিত্র 3.12

3.7 সারাংশ

এই এককে আমরা লেখচিত্রের সাহায্যে কিভাবে চরম (অবম) সমাধান বার করতে হয় তা উদাহরণের সাহয্যে দেখিয়েছি। যান্ত্রিকভাবে পদ্ধতিটা বর্ণনা করা হয়েছে। কিন্তু তত্ত্বের সাহায্যে ঐ পদ্ধতিগুলো আমরা একক 6-তে ব্যাখ্যা করব।

এরপর সেটতত্ত্বের মূল সংজ্ঞাগুলো আলোচনা করেছি। রৈ. প্রো. স.-র আলোচনায় সেটতত্ত্বের যে সব তথ্য কাজে লাগে তাও আলোচনা করা হয়েছে। রৈ. প্রো. স. র. কোথায় কার্যকারী সমাধান থাকবে না। কোথায় অসীম সংখ্যক সমাধান থাকবে বা কোথায় চরম (অবম) মান সীমাহীন হবে বা কোথায় সমাধান অঞ্চল সীমাহীন হলেও চরম (অবম) মান সসীম হবে ইত্যাদি আলোচনা করা হয়েছে। এর উদ্দেশ্য পরের বিমূর্ত্ত আলোচনা সহজবোধ্য ও মনোগ্রাহী করা।

3.8 অনুশীলনী

লেখচিত্রের সাহায্যে নীচের অনুশীলনী সমাধান করুন বা সমাধানযোগ্য না হলে তাও ইঙ্গিত করুন ঃ

1. একজন কৃষক কতকগুলি ভেড়া ও ছাগল কিনতে চায়। প্রতি ভেড়ার দাম 5000 টাকা ও প্রতি ছাগলের দাম 1000 টাকা। কৃষকটির খোঁয়াড়ে 80টির বেশি পশু রাখার জায়গা নেই এবং 2 লাখ টাকার বেশি খরচা করার সংস্থান নেই। প্রতি ভেড়ায় 700 টাকা ও প্রতি ছাগলে 200 টাকা লাভ করতে চায় কৃষকটি। কতকগুলি ভেড়া ও কতকগুলি ছাগল কিনলে তাও লাভ সর্বোচ্চ হবে তা নির্ণয় করতে হবে। তার সর্বোচ্চ লাভই কত?

2. অবম $Z = 3x_1 + x_2$

শর্তসাপেক্ষে $2x_1 + 3x_2 \leq 6$

$x_1 - x_2 \geq 1$

$x_1, x_2, \geqq 0$

3. অবম $Z = 3x_1 + 2x_2$

শর্তসাপেক্ষে $5x_1 + x_2 \geq 10$

$x_1 + x_2 \geq 6$

$x_1 + 4x_2 \geq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

4. চরম $Z = 7x_1 + 3x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + 2x_2 \geq 3$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$0 \leq x_1 \leq \frac{5}{2}$

$0 \leq x_2 \leq \frac{7}{2}$

$x_1, x_2 \geq 0$

5. অবম $Z = 5x_1 + 8x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 \leq 4$

$x_2 \geq 2$

$x_1 + x_2 = 5$

$x_1, x_2 \geq 0$

6. একজন দ্রব্যনির্মাতা একই দ্রব্যের দুটো মডেল X ও Y তৈরি করেন। X মডেল থেকে তাঁর লাভ প্রতি এককে 50 টাকা এবং Y মডেল থেকে তাঁর লাভ প্রতি এককে 30 টাকা। কাঁচামাল r_1 এবং r_2 উৎপাদনের জন্যে লাগে। দৈনিক অন্ততঃ 18 কেজি r_1 এবং 12 কেজি r_2 ব্যবহার করতেই হবে। তাছাড়া সর্বোচ্চ 48 ঘণ্টা শ্রম পাওয়া যেতে পারে। x ও y-এর প্রতি এককের জন্য r_1-এর যথাক্রমে 2 কেজি ও 1 কেজি লাগে। X ও Y-এর প্রতি এককে r_2-র যক্রমে ও 2 কেজি লাগে। X-এর একটি মডেল তৈরি করতে 3 ঘণ্টা লাগে ও Y-এর একটা মডেল তৈরি করতে 2 ঘণ্টা লাগে। কোন মডেলের কত একক তৈরি করলে লাভ সর্বোচ্চ হবে তা নির্ণয় করতে হবে।

7. অবম $Z = x_1 - 2x_2$

শর্তসাপেক্ষে $-2x_1 + x_2 \leq 8$

$-x_1 + 2x_2 \geq -24$

$x_1, x_2 \geq 0$

8. চরম $Z = x_1 + x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 \leq 1$

$-3x_1 + x_2 \geq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

9. অবম $Z = 4x_1 - 2x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 \leq 14$

$3x_1 + 2x_2 \geq 36$

$2x_1 + x_2 \leq 24$

$x_1, x_2 \geq 0$

10. চরম $Z = x_1 + x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 - x_2 \le 0$

$3x_1 - x_2 \ge -3$

$x_1, x_2 \ge 0$

3.9 উত্তরমালা

1. ভেড়ার সংখ্যা = 30, ছাগলের সংখ্যা = 50, সর্বোচ্চ লাভ = 31,000 টাকা, 2. $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, অবম Z = 3, 3. $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, অবম Z = 13, 4. $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = \frac{3}{2}$, চরম Z = 22. 5. $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, Z = 31, 6. x_1 = X মডেলের যত একক উৎপন্ন, x_2 = Y মডেলের কত একক উৎপন্ন। $x_1 = 10$, $x_2 = 2$, একক সর্বোচ্চ লাভ = 560 টাকা। 7. অসীম সমাধান, 8. কার্যকর সমাধান নেই, 9. $x_1 = 8$, $x_2 = 6$, অবম Z = 20, 10. $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, চরম Z = 3.

তথ্যসূত্র

1. G. HADLEY [1974] : LINEAR PROGRAMMING, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMP.
2. S. I. GASS [1958] : LINEAR PROGRAMMING, N. Y., MC-GRAW HILL
3. H. A. TAHA, [1982] : OPERATIONS RESEARCH, MACMILLAN PUBLISHING CO. N.Y.
4. J. C. CHAKARVORTY & P. R. GHOSH [2001] : LINEAR PROGRAMMING & GAME THEORY, MOULIK LIBRARY
5. J. K. SHARMA [2003] : OPERATIONS RESEARCH, MACHILLAN INDIA LTD.
6. T. MOULIK [*] : LINEAR PROGRAMMING U. N. DHUR & SONS PRIVATE LTD.
7. P. M. KARAK [1988] : LINEAR PROGRAMMING & THEORY OF GAMES, PUB. R. KARAK, 1
8. N. S. KAMBO [1984] : MATHEMATICAL PROGRAMMING, TECHNIQUES, AFFILIATED EAST-NEST. PRESS PVT. LTD. N. DELHI.
9. M. S. BAZARAH ET AL [1979]: NONLINEAR PROGRAMMING, JOHN WILEY & SONS N. Y.

* NOT KNOWN

একক 4 ❑ রৈখিক প্রোগ্রামিং মডেলের বীজগাণিতিক রূপ। ভেক্টর দেশ, উত্তল সেট এবং সংশ্লিষ্ট ধর্মাবলী

গঠন

4.1 উদ্দেশ্য
4.2 প্রস্তাবনা
4.3 রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর বীজগাণিতিক রূপ
4.4 ভেক্টর দেশ
4.5 উত্তল সেট
4.6 সারাংশ
4.7 অনুশীলনী
4.8 উত্তরমালা

4.1 উদ্দেশ্য (Objectives)

এই এককে বীজগণিতের আকারে কিভাবে একটি রৈ. প্রো. স. প্রকাশ করা যায় তা আলোচনা করা হয়েছে এবং ত্রি বা ততোধিক মাত্রার রৈ. প্রো. স. সম্পর্কেও আলোচনা করা হয়েছে। এই প্রসঙ্গে ভেক্টর দেশ এবং উত্তল সেট-এর একটি অতি প্রয়োজনীয় ধারণা দেওয়া হয়েছে।

4.2 প্রস্তাবনা (Introduction) :

আগের এককে আমরা দেখেছি কিভাবে লেখচিত্রের সাহায্যে রৈ. প্রো. স. সমাধান করা যায়। কিন্তু সেখানে দ্বিমাত্রিক তলেই আমরা সীমাবদ্ধ ছিলাম। ত্রি বা ততোধিক মাত্রার রৈ. প্রো. স. সমাধান করতে গেলে আমাদের বীজগণিতের সাহায্য নিতে হবে। কেননা বীজগণিতের ভাষায় আমরা ক্রমিক n-সংখ্যক স্থানাঙ্কের সাহায্যে 2 বা 3 মাত্রা থেকে n-মাত্রায় আলোচনা প্রসারিত করতে পারি। সেইজন্য এই এককে আমরা প্রথমে রৈ. প্রো. সকে বীজগণিতের আকারে প্রকাশ করা। জ্যামিতি ও বীজগণিতের মেলবন্ধন ঘটান হবে ভেক্টর দেশের ধারণার মাধ্যমে। রৈ. প্রো. স.-এর তত্ত্বের বিকাশে উত্তল সেটের একটি বিশেষ ভূমিকা আছে। সুতরাং উত্তল সেটের সংজ্ঞা ও ধর্মাবলীর আলোচনা এই এককে স্থান পাবে।

4.3 রৈ. প্রো. স.-র বীজগাণিতিক রূপ

আমরা জানি যে একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাকে লেখা যায় ঃ

চরম (অবম) $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (4.1)

শর্তসাপেক্ষে $\sum_{j=1} a_{ij} x_j (\leqq = \geqq) b_i, i = 1,2, \ldots m$ (4.2)

এবং $x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots n$ (4.3)

দ্বিমাত্রিকতলে যে-কোনো বিন্দুকে ক্রমিক স্থানাংকযুগল দিয়ে লেখা যায় যেমন $x_1 x_2$-তলে যে-কোনো বিন্দুকে উপস্থাপনা করা যায় $x = (x_1, x_2)$ হিসাবে। এই ধারণাকে বীজগণিতের ঢঙে n-মাত্রায় প্রসারিত করে লেখা যায়, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ হিসাবে।

আমরা n-মাত্রিক ভেক্টর c-কে লিখি $c = (c_1, \ldots c_n)$-একসারি ভেক্টর হিসাবে অনুরূপে $x = (x_1, \ldots, x_n)$ n-মাত্রিক তলে একবিন্দুকে নির্দেশ করে। সুতরাং $cx^T = (c.x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, (.), স্কেলার গুণফল হিসাবে।

আমরা যদি x-কে $(x_1, \ldots x_n)^T$ বা $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ একটি স্তম্ভভেক্টর হিসাবে প্রকাশ করি তাহলে

$$c_x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{4.4}$$

A যদি $m \times n$ ম্যাট্রিক্স হিসাবে প্রকাশ করি যেমন,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

অর্থাৎ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

অসমীকরণতন্ত্র (4.2) দেখা যায়,

$$Ax\ (\leq = \geq)\ b \tag{4.6}$$

b একটি স্তম্ভভেক্টর এবং $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ (4.7)

তাহলে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার বীজগাণিতিক রূপ হল,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{চরম (অবম)} & Z = Cx \\ \text{শর্তসাপেক্ষে} & Ax\,(\leq = \geq)\,b \\ & x \geq 0 \end{array}\right\} \tag{4.8}$$

a_j যদি A-এর j তম স্তম্ভভেক্টর হয় অর্থাৎ

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

তাহলে অসমীকরণতন্ত্র (4 – 6)-কে লেখা যায়।

$$[a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (\leqq = \geqq)\, b$$

অথবা, $x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots. + x_nd_n\ (\leqq = \geqq)\, b$ (4.9)

4.4 ভেক্টর দেশ

4.4.1. R^n দেশ : R^n দেশে যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কক্রমিক n-সংখ্যক বাস্তব সংখ্যা। $x \in R^n$ বললে বোঝায় $x = (x_1, \ldots., x_n)$ বা x, n-তম পদবিশিষ্ট। x_i-কে x ভেক্টরের i-তম উপাংশ বলা যেতে পারে।

4.4.2. C^n দেশ : C^n দেশে যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক ক্রমিক n-সংখ্যক সংখ্যা। যেগুলি বাস্তব বা জটিল। অর্থাৎ x ভেক্টরের i-তম উপাংশ বাস্তব বা জটিল।

4.4.3. ভেক্টর যোগফল ও স্কেলার দিয়ে গুণন ঃ ধরা যাক, 'u' ও 'v' R^n দেশে দুটি ভেক্টর। ভেক্টরদ্বয় যথাক্রমে $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ এবং $v = (v_1, v_2, ... v_n)$ দ্বিমাত্রিক দেশে 'a' ও 'b' যদি দুটি ভেক্টর যথাক্রমে $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ হয়। তাহলে তাদের যোগফল আমরা পেতে পারি ভেক্টর যোগফল নির্ণয়ের সামন্তরিক সূত্র প্রয়োগ করে। ঐ যোগফলকে '$a + b$' দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

'$a + b$'-এর ক্রমিক স্থানাঙ্কদ্বয় হল $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

সুতরাং '$a + b$' $= (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

যোগফল নির্ণয়ের এই প্রক্রিয়া আমরা n-মাত্রায় বিস্তৃত করব। সুতরাং 'u' ও 'v' ভেক্টরদ্বয়ের যোগফলকে আমরা চিহ্নিত করব '$u + v$' দ্বারা এবং '$u + v$'-এর মান হবে ঃ

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)$$

'k' যদি একটি স্কেলার হয় তাহলে দ্বিমাত্রিক দেশে স্কেলার দ্বারা গুণনকে অনুসরণ করে আমরা n-মাত্রায় স্কেলার k দ্বারা ভেক্টরকে গুণনের সংজ্ঞা দিতে পারি নিম্নভাবে ঃ

$$\begin{aligned} ku &= k\,(u_1, u_2, ... u_n) \\ &= (ku_1, ku_2, ... ku_n) \end{aligned}$$

'ku', 'u'-কে স্কেলার k দ্বারা গুণন চিহ্নিত করে।

মন্তব্য 4.4.1. u ও v এই ভেক্টরদ্বয়কে পরস্পর সমান বলা হয় যদি তারা একই মাত্রার দেশে থাকে এবং তাদের যথাযথ উপাংশগুলি পরস্পর সমান হয়। 'u', 'v'-এর সঙ্গে সমান হলে তা '$u = v$' এই চিহ্ন দিয়ে ইঙ্গিত করা হয়।

মন্তব্য 4.4.2. 'u' ও 'v'-এর উপাংশগুলির সংখ্যা যদি সমান না হয়, তাহলে 'u' ও 'v'-যোগফলের সংজ্ঞা দেওয়া যায় না।

মন্তব্য 4.4.3. R^n দেশে শূণ্য ভেক্টর বলতে এমন একটি ভেক্টর বোঝায় যার প্রতিটি উপাংশই 0। R^n দেশে শূণ্য ভেক্টরকে '0' দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

উদাহরণ 4.4.1. : ধরা যাক $u = (-1, 3, 2, 4)$, $v = (2, -1, 1, -5)$ এখানে 'u' ও 'v' উভয়েই R^4 দেশে থাকে।

u ও v-এর যোগফল $= u + v = (1, 2, 3, -1)$.

মন্তব্য 4.4.4. '$-u$' বলতে '-1' এবং 'u'-এর গুণফল বোঝায়।

$u - v$ বলতে আমরা বোঝাব $u + (-\upsilon)$.

উদাহরণ 4.4.2. : $u = (1, -3, 2, 4)$, $v = (3, -5, 1, 2)$

$u - 3\upsilon = (1, -3, 2, 4) - 3(3, -5, 1, 2)$

$= (1, -3, 2, 4) - (9, -15, 3, 6)$
$= (-8, 12, -1, -2)$

উদাহরণ 4.4.3. : $u = (1, 3 - 2i, 2i, 4 - 5i)$

$3iu = 3i\,(1, 3 - 2i, 2i, 4 - 5i)$
$= (3i, 6 + 9i, -6, 15 + 12i)$

লক্ষ্যণীয় $u \in C^4$

R^n-দেশে ভেক্টর যোগফল ও স্কেলার দিয়ে গুণনের সাপেক্ষে ভেক্টরদের মূল ধর্মগুলি নিম্নলিখিত উপপাদ্যে লিপিবদ্ধ করা যায় ঃ

উপপাদ্য 4.4.1 : R^n-দেশে যে-কোনো তিনটি ভেক্টর u, v ও w-এর জন্য এবং স্কেলার k, k', k, $k' \in R$-এর জন্য

(i) $(u + v) + w = u + (v + w)$

(ii) $u + 0 = u$

(iii) $u + (-u) = 0$

(iv) $u + v = v + u$

(v) $k(u + v) = ku + kv$

(vi) $(k + k')\,u = ku + k'u$

(vii) $(kk')u = k(k'u)$

(viii) $1u = u$

অনুশীলনী 4.4.1. প্রদত্ত $u = (3 - 7i, 2i, -1 + i)$ এবং $v = (4 - i, 11 + 2i, 8 - 3i)$, নির্ণয় করুন (i) $u - v$ (ii) $(3 + i)\,v$

উত্তর। (i) $(-1 - 6i, -11, -9 + 4i)$ (ii) $(13 + i, 31 + 17i, 27 - i)$

4.4.4. ভেক্টর দেশ ঃ উপপাদ্য 4.4.2—এ লিপিবদ্ধ $R^n(C^n)$-এর গঠনাবলী থেকে আমরা বিমূর্তভাবেভেক্টর দেশের সংজ্ঞায় উপনীত হতে পারি। K প্রদত্ত ক্ষেত্র। V শূণ্য নয় এমনএকটি সেট যেখানে দুটি ভেক্টরের যোগফল ও ভেক্টরের স্কেলার দিয়ে গুণন সংজ্ঞাত হয়। ধরা যাক V সেটের নিম্নলিখিত ধর্ম আছে।

(i) V-এর যেকোনো তিনটি উপাদান u, v, w-এর জন্য $(u + v) + w = u + (v + w)$

(ii) V-তে এমন একটি উপাদান আছে যাকে '0' দিয়ে চিহ্নিত করা হয় এবং বলা হয় শূণ্য উপাদান, যাতে করে $u + 0 = u$, u, V-এর যেকোনো একটি উপাদান।

(iii) যেকোনো দুটি উপাদান u, v-এর জন্য, $(u + v) = (v + u)$.

(iv) প্রতি উপাদান u-এর জন্য v-এর একটি উপাদান u আছে, যাতে করে $u + (-u) = 0$।

(v) যেকোনো স্কেলার k-এর জন্য ও উপাদানদ্বয় u, v-এর জন্য $k(u + v) = ku + kv$

(vi) যেকোনো স্কেলারদ্বয় a ও b-এর জন্য এবং উপাদান u-এর জন্য $(a + b)\,u = au + bu$

(vii) প্রদত্ত স্কেলারদ্বয় a, b-এর জন্য $(ab)u = a(bu)$, u, V-এর একটি উপাদান।

(viii) K-এর স্কেলার এককের জন্য $1u = u$, u, V-এর একটি উপাদান।

উপরিউক্ত সেট V-কে ভেক্টর দেশ বা রৈখিক দেশ বলা হয়। ঐ ভেক্টর দেশের উপাদানগুলিকে ভেক্টর বলা হয়।

(i)—(iv) এই ধর্মগুলি ভেক্টরদেশে যে যোগপ্রক্রিয়া সম্ভব তা ইঙ্গিত করে। আমরা সংক্ষেপে বলতে পারি যে V যোগ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে একটি বিনিময়যোগ্য গ্রুপ (Commutative group)।

মন্তব্য 4.4.5 : ভেক্টরদেশে কয়েকটি উপাদানের যোগফল নির্ণয়ে কি ক্রমে উপাদানগুলো যোগ কার হল তার ওপর যোগফল নির্ভর করে না।

(i) '0' ভেক্টর অনন্য

(ii) যেকোনো উপাদান 'u'-এর জন্য '$-u$' উপাদানটিও অনন্যভাবে সংজ্ঞাত হয়।

(iii) যদি $u + w = v + w$ হয়, $u, v, w \in$ V

উভয়পক্ষে— w যোগ করে আমরা পাই $u = v$। সুতরাং ভেক্টরদেশে অপসারণ সূত্রটি (Concellation law) সত্য।

(iv) যেহেতু যেকোনো উপাদান 'v'-এর জন্য '$-v$', ভেক্টরদেশেই আছে। বিয়োগপ্রক্রিয়াও ভেক্টর দেশে সংজ্ঞাত হয়, যেমন $u - v = u + (-v)$.

মন্তব্য 4.4.6. ভেক্টর দেশে (v)—(vii) ধর্মগুলি ভেক্টর দেশের ওপর স্কেলার ক্ষেত্র K-এর প্রভাব সূচিত করে। নিম্নলিখিত উপপাদ্য 4.4.7.-এ তা লিপিবদ্ধ হল।

উপপাদ্য 4.4.3. : প্রদত্ত K ক্ষেত্র ও V, K-এর ওপর সংজ্ঞাত ভেক্টর দেশ। আমরা সহজেই পাই ঃ

(i) যেকোনো স্কেলার $k \in$ K এবং $0 \in$ V, K 0 = 0

(ii) স্কেলার $0 \in$ K এবং যেকোনো ভেক্টর $u \in$ V-এর জন্য $0u = 0$.

(iii) যদি $ku = 0$ হয়, যেখানে $k \in$ K এবং $u \in$ V। তাহলে হয় $k = 0$ অথবা $u = 0$।

(iv) যেকোনো স্কেলার $k \in$ K এবং ভেক্টর $u \in$ V, $(-k)\, u = k(-u) = -\, ku$.

ভেক্টর দেশের উদাহরণসমূহ ঃ

উদাহরণ 4.4.2 : K যেকোনো একটি ক্ষেত্র, K-এর উপাদানসমূহের ক্রমিক n-গোষ্ঠীর সেট নেওয়া হল। ঐ সেটগুলির ওপর ভেক্টর যোগফল ও স্কেলার দিয়ে গুণনপ্রক্রিয়ায় প্রয়োগ করলে আমরা পাই ঃ

$$(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n) + (b_2, b_2, \ldots\ldots, b_n)$$
$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots\ldots, a_n + b_n)$$
এবং $k(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n) = (ka_1, ka_2, \ldots\ldots, ka_n)$,

প্রদত্ত $a_i, b_i \in$ K, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ তাহলে ঐ ক্রমিক n-গোষ্ঠীর সেট একটি ভেক্টর দেশ উৎপন্ন করে, থাকে। K^n ভেক্টর দেশ বলা হয়। K^n দেশে '0' ভেক্টর বলতে বোঝায় $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots\ldots, 0) \in K^n$.

সহজেই প্রমাণ করা যায় যে, ভেক্টর দেশের প্রদত্ত ধর্মগুলি K^n সিদ্ধ করে)।

উদাহরণ 4.4.3. : ধরা যাক V, $n \times n$ ম্যাট্রিক্স সমূহের একটি সেট। ঐ ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলির ক্ষেত্র

K হ'তে সংগৃহীত। আমরা যদি দুই বা ততোধিক ম্যাট্রিক্সসমূহের যোগফলবিধি ও ম্যাট্রিক্সকে স্কেলার দিয়ে গুণনের প্রক্রিয়া অনুসরণ করি, তাহলে সহজেই পেতে পারি যে V একটি ভেক্টর দেশ। উহা K-এর ওপর সংজ্ঞাত।

মন্তব্য 4.4.7. ভেক্টর দেশকে রৈখিক দেশ বলা হয়।

কেননা রৈখিক দেশে যে কোনো এই উপাদানের যোগফলও ভেক্টরকে স্কেলার দিয়ে গুণ করলে ঐ গুণফলও প্রদত্ত দেশেরই উপাদান।

অনুশীলনী 4.4.2. প্রদত্ত C^n ক্রমিক n সংখ্যক জটিল সংখ্যাসমূহের সেট। যদি ভেক্টরদের যোগফল বলতে ক্রমিক উপাংশগুলির যোগফল বোঝায় এবং স্কেলার দিয়ে ভেক্টরগুণন বলতে ক্রমিত উপাংশগুলিকে স্কেলার দিয়ে গুণন বোঝায় তাহলে দেখাও C^n একটি ভেক্টর (রৈখিক) দেশ।

4.4.5. ভেক্টর উপদেশ ঃ প্রদত্ত স্কেলার ক্ষেত্র K-এর ওপর সংক্রান্ত V একটি ভেক্টর দেশ। U, V-এর একটি উপসেট। U-কে V-ভেক্টর দেশের উপদেশ বলা হবে যদি V-তে সংজ্ঞাত ভেক্টর যোগ ও স্কেলার দিয়ে গুণন প্রক্রিয়ার সাপেক্ষ U একটি দেশ হয়।

মন্তব্য 4.4.8. U, V ভেক্টর দেশের একটি উপদেশ হয় যদি এবং কেবলমাত্র যদি

(i) U সেটটি শূণ্য না হয়।

(ii) U সেটটি ভেক্টর যোগফলের সাপেক্ষে বন্ধ হয় অর্থাৎ যদি $v, w \in U$ তাহলে $v + w \in U$.

(iii) U সেটটি স্কেলার গুণনের সাপেক্ষে বন্ধ অর্থাৎ প্রতি $k \in K$, স্কেলার ক্ষেত্রের জন্যই এবং $u \in U$, $ku \in U$.

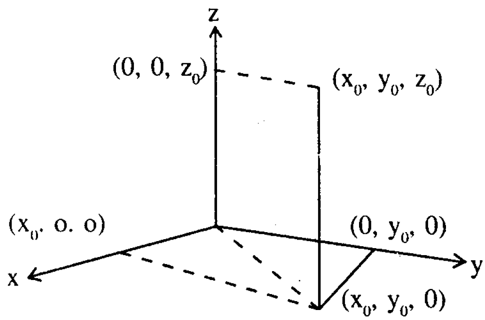
মন্তব্য 4.4.9 : U, V-এর উপদেশ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি—

(i) $0 \in U$ (অথবা $U \neq \phi$ (শূণ্য সেট) এবং (ii).

$u, v \in U$ নির্দেশ করে $au + bv \in U$, যেকোনো স্কেলার a, b-এর জন্য, $a, b \in K$.

উদাহরণ 4.4.3 : প্রদত্ত V একটি ভেক্টর দেশ। তাহলে {0} সেটটি, যার একমাত্র উপাদান হল '0' ভেক্টর এবং সমগ্র দেশ V ই যথাক্রমে V-এর উপদেশসমূহ।

উদাহরণ 4.4.4. : ভেক্টর দেশ R^3-কে আমরা জ্যামিতির সাহায্যে নিম্নরূপে আঁকতে পারি। চিত্র নং,



চিত্র 4.1

x-অক্ষ ও y-অক্ষ দিয়ে নির্দিষ্ট দেশকে আমরা R^2 বলতে পারি। R^3 দেশে কোনো বিন্দু, (x, y, z) ক্রমিক স্থানাঙ্কবিশিষ্ট। ঐ বিন্দুর R^2 দেশে অভিক্ষেপের স্থানাঙ্ক হবে, $(x, y, 0)$। R^3 দেশে সংজ্ঞাত ভেক্টর যোগফল ও স্কেলার গুণন যদি R^2 দেশে প্রয়োগ করা যায় তাহলে দেখা যাবে R^2 দেশে যেকোনো দুই বিন্দুর ভেক্টর যোগফল R^2 দেশেই থাকবে। R^2 দেশে যেকোনো বিন্দুকে স্কেলার দিয়ে গুণ করলে আমরা R^2 দেশেরই ন্দিু পাব। অর্থাৎ R^2 দেশই R^3 দেশের উপদেশ। অনুরূপভাবে R^2 দেশ, যেটাকে একটি সরলরেখায় উপস্থাপন করা যায়, R^3-র একটি উপদেশমাত্র।

উদাহরণ 4.4.5 : প্রদত্ত V, $n \times n$ বর্গম্যাট্রিক্সের দেশ।

$A = (a_{ij})$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, 2, ... n$ ম্যাট্রিক্সকে প্রতিসম (Symmetric) বলা হয় যদি $a_{ij} = a_{ji}$ হয়। W যদি V-এর প্রতিসম $n \times n$ ম্যাট্রিক্সের সেট হয় তাহলে W, V-এর একটি উপদেশ।

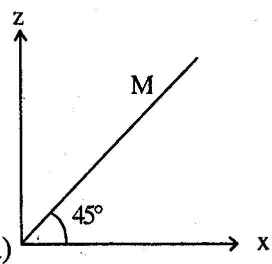
অনুশীলনী 4.4.3. দেখাও যে নিম্নলিখিত উপসেটগুলি (M) নীচে সংজ্ঞাত ভেক্টর দেশের (V) যথাক্রমে উপদেশ গঠন করে।

(i) $V = R^2$, M এমন সব ক্রমিক সংখ্যাযুগল (x, y)-এর সমষ্টি যার জন্য $x = y$ হয়। R^2 তে M-এর লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

(ii) $V = R^2$, M এমন সব ক্রমিক সংখ্যাযুগলের (x, y) সমষ্টি, যার জন্য $x + y = 0$। M-এর লেখচিত্রটি কী হবে?

উত্তরমালা

4.4.3 (i) M মূলবিন্দুগামী একটি সরলরেখা যেটি x-অক্ষের সঙ্গে ধনাত্মক দিকে 45° কোণ করে।

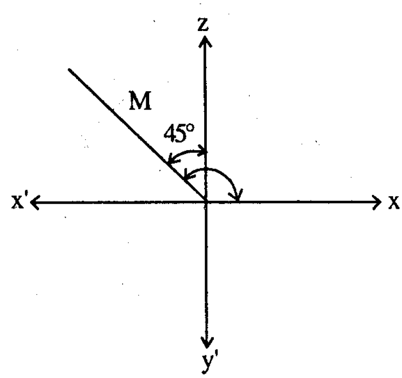


চিত্র 4.2(a)

4.4.3 (ii) M উপদেশটি দ্বিতীয় চতুর্থাংশের একটি সরলরেখা যেটি x-অক্ষের সঙ্গে ধনাত্মক দিকে 135° কোণ করে।

$$x + y = 0$$

$$\text{অর্থাৎ } y = -x$$



চিত্র 4.2(b)

4.4.6. ইউক্লিডীয় দেশ E^n

স্কেলার ক্ষেত্র, K-তে সংজ্ঞাত ক্রমিক n-সংখ্যক সংখ্যার, $x = (x_1, \ldots, x_n)$-র সেট V_n-কে ইউক্লিডীয়দেশ বলা হয় যদি নিম্ন শর্তগুলি সিদ্ধ হয় ঃ

(i) V_n, ভেক্টর যোগ ও স্কেলার নিয়ে গুণন—এই দুই প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে বদ্ধ (closed)।

(ii) প্রতি ভেক্টরদ্বয় $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ এবং $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{V}_n$-এর জন্য এক অনন্য ধনাত্মক সংখ্যা $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ থাকে যাতে করে,

$$d(x, y) = = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$-কে $\boldsymbol{x}$ ও $\boldsymbol{y}$-এর দূরত্ব বলা হয়।

ঐ দেশকে n-মাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশ বলা হয় এবং E^n দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

উদাহরণ 4.4.6. দ্বিমাত্রিক xy তলে দুটি বিন্দু $x^1 = \left(x_1^1, x_2^1\right)$ এবং $x^2 = \left(x_1^2, x_2^2\right)$ মধ্যে **দূরত্ব,** $d(x^1, x^2)$ হবে।

$$d(x^1, x^2) = \sqrt{\left(x_1^1 - x_1^2\right) + \left(x_2^1 - x_2^2\right)^2}$$

এই দেশকে E^2 বলা হয়।

মন্তব্য 4.4.10. E^n দেশে দুটি ভেক্টর x ও y-এর স্কেলার বা ডট্ গুণফল হচ্ছে একটি স্কেলার যাকে চিহ্নিত করা হয় $x.\,y$ হিসাবে এবং এর মান হল,

$$x.\,y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

প্রদত্ত $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ এবং

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

যদি $x = y$ হয়, তাহলে

$$x.\,y = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ বলা হয় x-এর নর্ম এবং চিহ্নিত করা হয় $\|x\|$ হিসাবে।

মন্তব্য 4.4.11 ঃ স্কেলার গুণফলকে (,) হিসাবেও চিহ্নিত করা হয়।

4.4.7. একক ভেক্টর ঃ

E^n-দেশে $e_1 = (1, 0, ... 0)$, $e_2 = (0, 1, ... 0)$,

$e_n = (0, 0, ... 1)$-কে একক ভেক্টর বলা হয়।

কারণ $\|e_i\| = 1$. অর্থাৎ n-মাত্রিক গোলক (sphere)-এর পরিধির ওপর e_i ভেক্টরের অন্তিম বিন্দু অবস্থিত।

4.4.8. রৈখিক সমবায় ঃ n-মাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশ, E^n-এ অবস্থিত a ভেক্টরকে $a^1, a^2, ..., a^n \in E^n$-এর রৈখিক সমাবেশ বলাহয়। যদি স্কেলার সমূহ $\lambda_1, ..., \lambda_n$ পাওয়া যায়, যাতে করে $a = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_n a^n$, $\lambda_i \in R$, $i = 1, 2, ... n$.

4.4.9. রৈখিকভাবে পরাধীন বা নির্ভরশীল ভেক্টর সমূহ ঃ

E^n-এ অবস্থিত $a^1, ..., a^n$ ভেক্টরসমূহকে রৈখিকভাবে পরাধীন বা নির্ভরশীল বলা হবে যদি স্কেলারসমূহ $\lambda_1, ..., \lambda_n$ পাওয়া যাবে (যারা সবাই একসঙ্গে শূণ্য নয়) যাতে করে

$$\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_n a^n = 0.$$

4.4.10. রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেক্টরসমূহ ঃ E^n-এ অবস্থিত $a^1, ... a^n$ ভেক্টরসমূহকে রৈখিকভাবে স্বাধীন বলা হবে যদি স্কেলারসমূহ $\lambda_1, ... \lambda_n$-এর জন্য

$$\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_n a^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

অর্থাৎ $\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_n a^n = 0$

একমাত্র যদি $\lambda_1 = \lambda_2 ..... = \lambda_n$ (সবাই) $= 0$ হয়।

উদাহরণ 4.4.7 : (4, 5)-কে $a = (1, 3)$ এবং $b = (2, 2)$-র রৈখিক সমবায় হিসাবে প্রকাশ করতে হবে।

ধরা যাক $(4, 5) = \alpha (1, 3) + \beta (2, 2)$

বামপক্ষের উপাংশগুলিকে যথাক্রমে ডানপক্ষের উপাংশগুলির যোগফল হিসাবে প্রকাশ করিয়া,

$$4 = \alpha + 2\beta,\ 5 = 3\alpha + 2\beta$$

অতএব, $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{7}{4}$

তাহলে $(4, 5) = \frac{1}{2}(1, 3) + \frac{7}{4}(2, 2)$

উদাহরণ 4.4.8. দেখাতে হবে $u = (1, -1, 0)$, $v = (1, 3, -1)$ এবং $w = (5, 3, -2)$ রৈখিকভাবে পরাধীন।

ধরা যাক, আমরা পাই, α, β, γ (সব একসঙ্গে শূণ্য নহে) যাতে করে,

$\alpha\ (1, -1, 0) + \beta(1, 3, -1) + (5, 3, -2) = 0$

তাহলে, $\alpha + \beta + 5\gamma = 0$

$$-\alpha + 3\beta + 3\gamma = 0$$

$$-\beta - 2\gamma = 0$$

অতএব, $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{-1}$

যেহেতু, α, β, γ-এর কোনওটাই শূণ্য নয়, u, v এবং w রৈখিকভাবে পরাধীন।

উদাহরণ 4.4.9. দেখাতে হবে যে, $u = (16, 2, 3, 41)$, $v = (0, 5, -3, 1)$ এবং $w = (0, 0, 7, -2)$, এই ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন। ধরা যাক আমরা পাই, α, β, r, δ (সব শূণ্য নহে) যাতে করে,

$\alpha(6, 2, 3, 4) + \beta(0, 5, -3, 1) + \gamma(0, 0, 7, -2) = 0$

তাহলে উপাংশগুলির সহগের সমষ্টি বামপক্ষে ও ডানপক্ষে সমান করিয়া,

$6\alpha + 0.\beta + \gamma.0 = 0$ অর্থাৎ $\alpha = 0$

$2\alpha + 5\beta = 0$, অর্থাৎ $\alpha = \beta, \beta = 0$

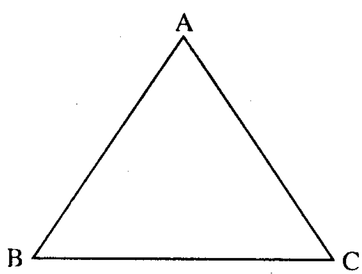
$3\alpha - 3\beta + 7\gamma = 0$ অর্থাৎ $\gamma = 0$

অতএব ভেক্টরগুলি রৈখিকভাবে স্বাধীন।

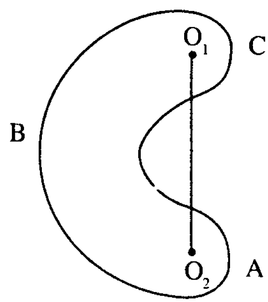
4.5 উত্তল সেট

4.5.1. উত্তল সেট ঃ একটি সেট X-কে **উত্তল সেট বলা** হবে, যদি X-এর যেকোনো দুটো বিন্দু x_1, x_2-সংযোজক সরলরেখার অংশটিও X সেটে থাকবে। অর্থাৎ অঙ্কের ভাষায় যদি $x_1, x_2 \in X$ হয় তাহলে $Z = \lambda x_1 + (1 - \lambda)\ x_2,\ 0 \le \lambda \le 1$, X সেটেই থাকবে।

উদাহরণ 4.5.1. একটি ত্রিভুজ ও তার অন্তঃস্থল একটি উত্তল সেট গঠন করে। (চিত্র 4.3)



চিত্র 4.3



চিত্র নং 4.4

মন্তব্য 4.51. অঙ্কিত ছবিটি (চিত্র নং 4.4) উত্তল নয়। কেননা 0_1, 0_2 সংযোজক সরলরেখা সম্পূর্ণভাবে ঐ বক্ররেখা ABC দ্বারা বন্ধ ছবির অংশ নয়।

4.5.2. উত্তল সমবায় ঃ X সেটে অবস্থিত $x_1, \ldots\ldots x_m$ বিন্দুর উত্তল সমবায় বলতে বোঝান হবে এমন বিন্দু Z যেখানে $Z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots\ldots + \lambda_m x_m$,

$$0 \le \lambda_j \le 1,\ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$$

4.5.3. প্রান্তিক বিন্দু ঃ $x \in$ X-কে উত্তল সেট X-এর প্রান্তিক বিন্দু বলা হবে যদিও একমাত্র যদি X-এর মধ্যে কোনো দুটো বিন্দু x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$) থাকে না, যাতে করে x-কে এইভাবে প্রকাশ করা সম্ভব হয়।

$x = (1 - \lambda)\, x_1 + \lambda x_2,\ 0 < \lambda < 1.$

ফলে কোনো প্রান্তিক বিন্দু x_1, x_2 সংযোজক সরলরেখাংশে থাকতে পারে না ($0 < \lambda < 1$), x_1, x_2, X-এর যেকোনো দুটো প্রদত্ত বিন্দু।

মন্তব্য 4.5.2. তাহলে কোনো সেটের প্রান্তিক বিন্দু, ঐ সেটের পরিধিস্থ বিন্দু হবে।

ধরা যাক x_0 কোনো সেট $X_1 \subseteq X$-এর অন্তঃস্থ বিন্দু। তাহলে একটা $\in > 0$ পাওয়া যাবে যাতে করে x_0-এর $\in$-সামীপ্যের প্রতিটি বিন্দুই X_1-এ থাকে। ধরা যাক $x_1 \neq x_0$ এই সামীপ্যের একটি বিন্দু। x_2 বিন্দুকে নেওয়া হল যাতে করে।

$$x_2 = - x_1 + 2x_0$$

অর্থাৎ $\| x_2 - x_0 \| = \| x_1 - x_0 \| < \in$

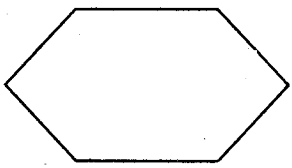
তাহলে $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$

অতএব x_0, X_1 সেটের অন্তঃস্থ বিন্দু। এটা আমাদের প্রকল্প বিরোধী।

মন্তব্য 4.5.3. উত্তল সেটের প্রতিটি পরিধিস্থ বিন্দুই প্রান্তিক বিন্দু।

কোনো কোনো পরিধিস্থ বিন্দু কিন্তু অন্য দুটো পরিধিস্থ বিন্দুর সংযোজক রেখাংশে থাকতে পারে। নীচের চিত্রগুলি (চিত্র নং 4.5, 4.6) দেখুন।

চিত্র 4.5



চিত্র 4.6

4.5.4 উত্তল আধার (Convex hull) ঃ ধরা যাক S, E^n-এ অবস্থিত একটি সেট। S-এর উত্তল আধারকে চিহ্নিত করা হয় H(S) দিয়ে, এবং সজ্ঞাত হয় S-এর বিন্দুদের উত্তল (Convex combination) সমাবেশ হিসাবে অর্থাৎ $x \in$ H(S) যদি এবং একমাত্র যদি x-কে প্রকাশ করা যায়

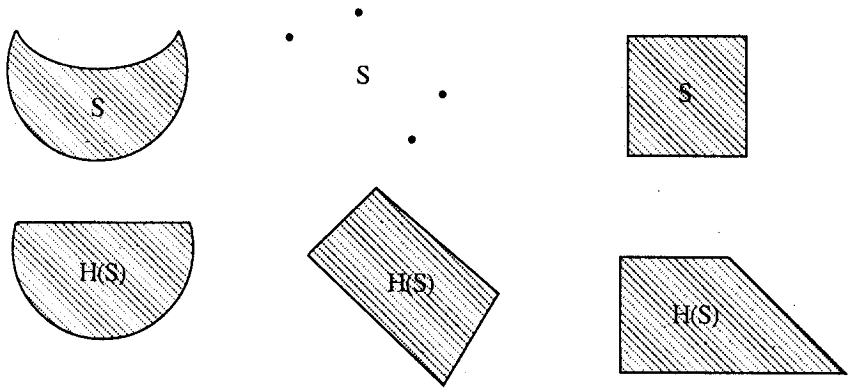
$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$$

$$\lambda_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., k,$$

k একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, এবং $x_1, x_2, ... x_k \in$ S.

চিত্র 4.6-তে উত্তল আধারের কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হল।



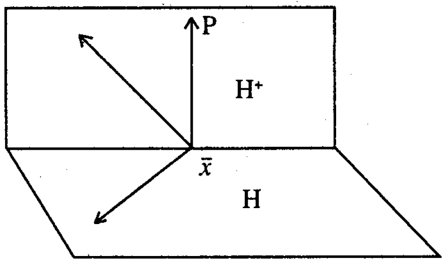
চিত্র 4.7

4.5.5. পরাসমতল, অর্ধদেশ ঃ

E^n-দেশে H-কে পরাসমতল বলা হয় যদি H এমন সব বিন্দুর সমাবেশ যাদের প্রকাশ করা যায় $\{x : p^T x = \alpha)$ এইভাবে। p হচ্ছে একটি শূণ্য নয় এমন একটি ভেক্টর এবং α একটি স্কেলার। p-কে বলা হয় পরাসমতলের অভিলম্ব ভেক্টর। একটি পরাসমতল দুটি সেট H^+ এবং H^- চিহ্নিত করে। $H^+ = \{x : p^T x \geq \alpha\}$-কে একটি বদ্ধ অর্ধদেশ বলা হয়। অনুরূপে $H- = \{x : p^T x \leq \alpha\}$-কেও বলা হয় একটি বদ্ধ অর্ধদেশ।

অনুরূপে H, দুটি মুক্ত অর্ধদেশ $\{x : p^T x > \alpha\}$ এবং $\{x : p^T x < \alpha\}$ চিহ্নিত করে।

তাহলে E^n-এ যেকোনো বিন্দু হয় H^+ অথবা H^- অথবা উভয়েই থাকে। যদি $\bar{x}$, H-এ থাকে তাহলে $p^T \bar{x} = \alpha$ আবার H-এর যেকোনো বিন্দু x-এর জন্য $p^T x = \alpha$ সুতরাং $H^+ = \{x : p^T (x - \bar{x}) \geq 0\}$, $H^- = \{x : p^T (x - \bar{x}) \leq 0\}$



চিত্র 4.8. পরাসমতল H ও অর্ধদেশ H^+

উদাহরণ 4.5.1. $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 10\}$

অভিলম্ব ভেক্টর = p = (1, 1, –1, 2) | (1, 6, –1, 1) এই সমতলের ওপর একটি বিন্দু। সুতরাং বিকল্পভাবে লেখা যায়।

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_y) : (x_1 - 1) + (x_2 - 6) - (x_3 - 1) + 2(x_y - 1) = 0$$

উপপাদ্য 4.5.1. E^n দেখো পরাসমতল $H = \{x : p^T x = \alpha\}$ একটি উত্তল সেট।

ধরা যাক x^1 এবং x^2 ঐ পরাসমতলের ওপর দুই বিন্দু।

তাহলে $p^T x^1 = \alpha$. $p^T x^2 = \alpha$.

$$p^T (\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2) = \lambda p^T x^1 + (1 - \lambda) p^T x^2, = \alpha \quad 0 \le \lambda \le 1$$

উপপাদ্য 4.5.2. একটি বন্ধ অর্ধদেশ $H^+ = \{x : p^T x \ge \alpha\}$ একটি উত্তল সেট।

ধরা যাক $x^1, x^2 \in H^+$ অর্থাৎ $p^T x^1 \ge \alpha$, $p^T x^2 \ge \alpha$.

$$p^T(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2), 0 \le \lambda \le 1.$$

$$= \lambda p^T x^1 + (1 - \lambda) p^T x^2 \ge 0$$

অতএব $\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2 \in H^+$ অর্থাৎ H^+ উত্তল সেট গঠন করে।

উপপাদ্য 4.5.3. দুটি উত্তল সেটের ছেদ ও একটি উত্তল সেট।

ধরা যাক, X_1 এবং X_2 দুটি উত্তল সেট তারপর $X = X_1 \cap X_2$ ধরা যাক X^1 এবং $x^2 \in X$ অর্থাৎ x_1 এবং $x_2 \in X_1$.

X_1 উত্তল বলিয়া $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in X_1$

আবার, $x^1, x^2 \in X$ বলিয়া $x^1, x^2 \in X_2$

X_2 উত্তল বলিয়া $\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2 \in X_2$

অতএব $\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2 \in X_1 \cap X_2 = X$

সুতরাং, X, X_1 ও X_2 এর ছেদ ও একটি উত্তল সেট।

উপপাদ্য 4.5.4. E^n দেশে সীমিত সংখ্যক বিন্দুর উত্তল সমবায়ের সেট একটি উত্তল সেট।

ধরা যাক E^n-দেশে $x^1, x^2, \ldots, x^p$ সীমিত সংখ্যক বিন্দুসমূহ। এই বিন্দুসমূহের উত্তল সমাবেশের একটি সেট হল X অর্থাৎ, $X = \left\{x | x = \sum_{i=1}^{p} \mu_i x^i\right.$, সব μ_i এর জন্য, $0 \le \mu_i \le 1$

ধরা যাক, $u, v \in X$.

সুতরাং, আমরা μ_i'', $\iota = 1, \ldots \mu_i''$, $0 \le \mu_i'' \le 1$ পাই যাতে করে $u = \sum_{i=1}^{p} \mu_i^1 x^i \in X, \sum_i \mu_i' = 1$

তেমনি আমরা $\mu_i'', i = 1, \ldots p, 0 \le \mu_i'' \le 1$ পেতে পারি যাতে করে $v = \sum_{i=1}^{p} \mu_i'' x^i, \ \in X, \sum_i \mu_i'' = 1$

সুতরাং λ যদি এমন একটি সংখ্যা হয় যে $0 \le \lambda \le 1$. তাহলে $\lambda u + (1-\lambda)\, v = \sum_{i=1}^{p} \left[\lambda \mu_i' x^i + (1-\lambda)\mu_i'' x^i\right]$

$$\sum_{i=1}^{p} \{\lambda\mu_i' + (1-\lambda)\mu_i''\} x^i$$

এখন, $0 \le \lambda\mu_i' + (1-\lambda)\mu_i'' \le (\lambda + (1-\lambda)].\, \tilde{\mu}_i \le 1$

যেখানে $\tilde{\mu}_i = \mu_i'$ যদি $\mu_i' \ge \mu_i''$

$= \mu_i''$ যদি $\mu_i'' \ge \mu_i'$

তারপর $\sum_i [\lambda\mu_i' + (1-\lambda)\mu_i''] = \lambda\sum_i \mu_i' + (1-\lambda) \sum_i \mu_i''$

$$= \lambda + (1 - \lambda) = 1$$

অতএব $u, v \in X \Rightarrow \lambda u + (1 - \lambda)v \in X, 0 \le \lambda \le 1$.

সুতরাং, X একটি উত্তল সেট।

4.5.5. বদ্ধতা বিন্দু (Point of closure) :

E^n-দেশ x বিন্দুকে X সেটের বদ্ধতা বিন্দু বলা হয় যদি $X \cap B\ (x, \in) \ne \phi$.

মন্তব্য 4.5.4. 4.5.4 বদ্ধতা বিন্দুর সংজ্ঞার সূত্র ধরে আমরা E^n দেশে একটা সেট X-কে বদ্ধ বলতে পারি যদি X-এর প্রতিটি বদ্ধতা বিন্দুই X-এ থাকে।

মন্তব্য 4.5.5. আমরা 3.5.18 ও 3.5.19-এ সীমাবিন্দু ও বদ্ধসেটের সংজ্ঞা দিয়েছি।

লক্ষ্যণীয় যে E-তে কোনো অনুক্রমের (Sequence) সীমাবিন্দু (এবং অবশ্যই সীমা) যে সেট X-এ ঐ অনুক্রম অবস্থিত, সেই সেটের একটি বদ্ধতা বিন্দু। অনুরূপে E^n-এ $\bar{x}$ যদি X সেটের বদ্ধতা বিন্দু হয়, তাহলে X-এর মধ্যে একটি অনুক্রম $\{x^n\}$ থাকবে যার সীমাবিন্দু $\bar{x}$.

মন্তব্য 4.5.6. : E^n দেশে একটি সেট X-কে বদ্ধ বলা যায় যদি X-এর মধ্যে তার সব পরিধিস্থ বিন্দুই থাকে।

উপপাদ্য 4.5.5. E^n দেশে পরাসমতল একটি বদ্ধসেট কেননা পরাসমতলের প্রতিটি পরিধিস্থ বিন্দুই ঐ সেটের মধ্যেই থাকে।

ধরা যাক x বিন্দুটি পরাসমতল $cx = z$-এর ওপরের একটি বিন্দু। আমরা x-এর $\in$-সামীপ্য গঠন করলাম

এবং ঐ সামীপ্যে একটি বিন্দু $x^1 = x_0 + \frac{\in}{2}\left(\frac{e'}{||e||}\right)$ নিলাম $\|\cdot\|$ নর্ম বোঝায়। $\| x^1 - x_0 \| =$

$\| \frac{\in}{2}\left(\frac{e'}{||e||}\right)\| = \frac{\in}{2} < \in.$ $cx^1 = c\left(x_0 + \frac{\in}{2}\left(\frac{c'}{||c||}\right)\right)|| = cx_0 + \frac{\in}{2}||c|| > z,$ কারণ $cx_0 = z.$

অতএব, x^1 বিন্দু পরাসমতলের ওপর অবস্থিত নয়। অর্থাৎ পরাসমতলের প্রতিটি বিন্দুই পরিধিস্থ বিন্দু। পরাসমতলের ওপর কোনো বিন্দুই অন্তঃস্থ বিন্দু নয়। তাছাড়া পরাসমতলের এমন কোনো পরিধিস্থ বিন্দু নেই যেটা পরাসমতলে নেই।

ধরা যাক $cx_0 = z_1 < z$ অর্থাৎ x_0 পরাসমতলে নেই, নেওয়া হল $\in = {z - z_1}/{2||c||}.$ x^1-এর এই $\in$-সামীপ্যে যেকোনো বিন্দু x-এর জন্য

$$\begin{aligned} cx_1 = cx_1 + c(x - x_1) &\le z_1 + \| c \| \ \| x - x_1 \| \\ &\le z_1 + \| c \| \in \\ &= z_1 + \frac{(z - z_1)}{2||c||}||c|| \\ &= \frac{z + z_1}{2} < z \end{aligned}$$

অতএব x^1-এর এই সামীপ্যের প্রতিটি বিন্দুই $cx < z$ এই অর্ধদেশে থাকে। অতএব x^1 ঐ পরাসমতলের পরিধিস্থ বিন্দু হতে পারে না।

মন্তব্য 4.5.7. অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে বন্ধ অর্ধদেশ একটি বন্ধ সেট।

মন্তব্য 4.5.8. মুক্ত অর্ধদেশ একটি মুক্ত সেট।

4.5.6. বহুতলক (Polyhedron) ঃ

E^n-দেশে একটি সেট X-কে বহুতলক বলে যদি X-কে সসীম সংখ্যক বন্ধ অর্ধদেশের ছেদ হিসাবে প্রকাশ করা যায় অর্থাৎ $X = \bigcap_{i=1}^{m} X_i = \{x \mid p_i^T x \le \alpha_i, i = 1, 2, \ldots m\}$, p_i শূণ্য নয় এমন একটি ভেক্টর, d_i ধ্রুবক, $i = 1, 2, \ldots, m.$

মন্তব্য 4.5.8. একটি বহুতলক বন্ধ এবং উত্তল সেট।

উদাহরণ 4.5.3. দেখাও যে, $X = \{x \mid x \in R, \mid x \mid \le 3\}$
একটি উত্তল সেট।

ধরা যাক $x^1, x^2 \in X$ অর্থাৎ $\mid x^1 \mid \le 3, \mid x^2 \mid \le 3.$

এখন, $\mid \lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2 \mid, 0 \le \lambda \le 1$

$$\le \lambda \mid x^1 \mid + (1 - \lambda) \mid x^2 \mid \le 3\lambda + 3(1 - \lambda) = 3.$$

অথবা, $\lambda x^1 + (1 - X)x^2 \in X$ যেখানে $0 \le \lambda \le 1$

অতএব X একটি উত্তল সেট।

উদাহরণ 4.5.4. দেখাও যে, X সেটটী $\{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ উত্তল নয়।

ধরা যাক $x^1 = (x_1^1, x_2^1) \in X$ এবং $x^2 = (x_1^2, x_2^2) \in X$.

তাহলে, $\left(x_1^1\right)^2 + \left(x_2^1\right)^2 = 1$, $\left(x_1^2\right)^2 + \left(x_2^2\right)^2 = 1$

এখন $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 = \{(\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_1^2) + (\lambda x_1^2) + (1-\lambda)x_2^2\}$

তাহলে $\{\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_1^2\}^2 + \{\lambda x_2^1 + (1-\lambda)x_2^2\}^2$

$$= |\lambda^2 \left\{(x_1^1)^2 + (x_2^1)^2\right\} + (1-\lambda)^2\left\{(x_1^2)^2 + (x_2^2)^2\right\} + 2\lambda(1-\lambda)x_1^1x_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_2^1x_2^2$$

$$= 1 - 2\lambda(1 - \lambda) + 2\lambda(1 - \lambda)\left[x_1^1x_1^2 + x_2^1x_2^2\right] \quad (4.5.1)$$

যেহেতু সমান্তরীয় মধ্যক ≥ গুণোত্তরীয় মধ্যক

$$x_1^1x_1^2 \le \frac{(x_1^1 + x_1^2)^2}{4}.$$

$$x_2^1x_2^2 \le \frac{(x_2^1 + x_2^2)^2}{4}$$

অতএব $x_1^1x_1^2 + x_2^1x_2^2 \le \dfrac{1 + 1 + 2x_1^1x_1^2 + 2x_2^1x_2^2}{4}$

অথবা, $\dfrac{1}{2}(x_1^1x_1^2 + x_2^1x_2^2) \le \dfrac{1}{2}$

অথবা, $x_1^1x_1^2 + x_2^1x_2^2 \le 1$ (4.5.2)

অসমীকরণ (4.5.2) ব্যবহার করে অসমীকরণ (4.5.1) থেকে পাই,

$\{\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_2^1\}^2 + \{\lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2\}^2$

$\le 1 - 2\lambda(1 - \lambda) + 2\lambda(1 - \lambda)$

≤ 1

তাহলে x^1 ও x^2-এর উত্তল সমাবেশ X-এ নাও থাকতে পারে।

মন্তব্য 4.5.8. x^1 এবং x^2 বিন্দুদ্বয় একক বৃত্ত, X-এর পরিধিস্থ দুটি বিন্দু। x^1 এবং x^2 সংযোজক সরলরেখার অংশটি ঐ সেটের মধ্যে থাকে না। সুতরাং X সেটটি উৎস নয়।

উদাহরণ 4.5.5. $x = (-1, 2, 4)$-কে α $(-1, 2, 0)$, $\beta = (0, -1, 2)$ এবং $\gamma = (3, -4, 2)$-এর রৈখিক সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করো।

ধরা যাক, $x = \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta + \lambda_3\gamma$

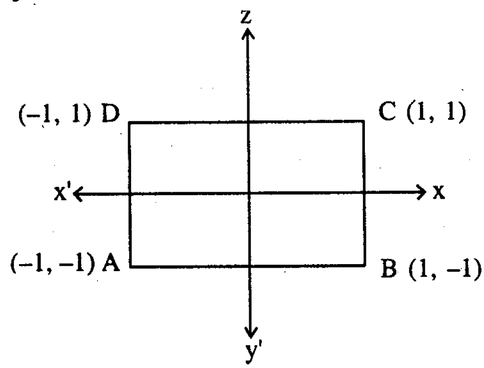
তাহলে
$$-1 = -\lambda_1 + 3\lambda_3$$
$$2 = 2\lambda - \lambda_2 - 4\lambda_3$$
$$4 = \lambda_1.0 + \lambda_2 + 2\lambda_3$$

$$\lambda_1 = 3\lambda_3 + 1, \quad \lambda_2 = 4 - 2\lambda_3$$
$$2(3\lambda_3 + 1) - (4 - 2\lambda_3) - 4\lambda_3 = 2$$
$$4\lambda = 4, \quad \lambda_3 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_1 = 4$$

উদাহরণ 4.5.6 : প্রান্তিকবিন্দু, যদি থাকে, তাহলে নির্ণয় করুন ঃ

নীচের সেট X-এর $X = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

X-এর লেখচিত্র নিম্নরূপ ঃ



চিত্র 4.8.

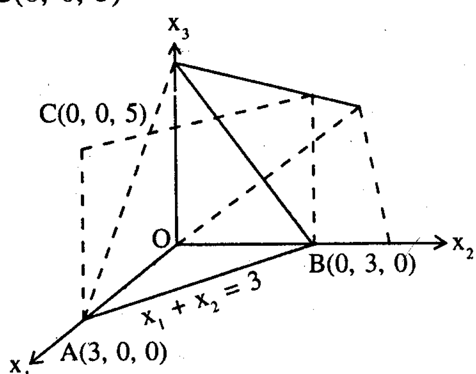
X-এবপ্রান্তিক বিন্দুগুলি হল ঃ (– 1, 1), (1, –1), (–1, –1) (1, 1).

উদাহরণ 4.5.2. নিম্নলিখিত সেট X-এর প্রান্তিকবিন্দুসমূহ, উত্তল আধার ও অন্তঃস্থবিন্দুসমূহ নির্ণয় করুন ঃ

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 \leq 3, -x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$

প্রান্তিবিন্দুসমূহ ঃ

O(0, 0, 0), A(3, 0, 0),
B(0, 3, 0), C(0, 0, 5)

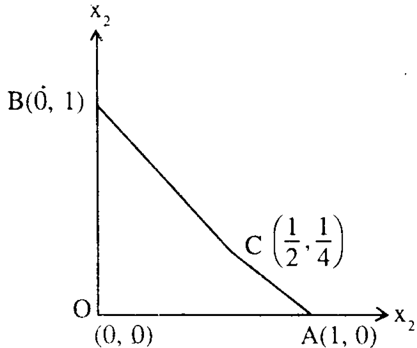


চিত্র 4.9.

উত্তল আধার হ'ল ঃ চতুর্তলক OABC

OA, AB, BC, CO ও OB এই ধারগুলি চতুর্তলক (tetrahedron) OABC-এর বিন্দুসমূহ নির্ণেয় অন্তঃস্থবিন্দুসমূহ।

উদাহরণ 4.5.3. : (0, 0), (0, 1), (1, 0) এবং $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$-এই বিন্দুগুলি দিয়ে গঠিত উত্তল বহুভুজ অঙ্কন করুন এবং প্রান্তিক বিন্দুগুলি নির্ণয় করুন। বাকী বিন্দুগুলিকেপ্রান্তবিন্দুসমূহের উত্তল সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করুন।



চিত্র 4.10.

OACB ই উদ্দিষ্ট বহুভুজ। প্রান্তিকবিন্দুসমূহ হ'ল ঃ O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1).

$$C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(0,0) + \frac{1}{2}(1,0) + \frac{1}{4}(0,1)$$

4.6 সারাংশ

এই এককে আমরা রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার বীজগাণিতিক রূপ উপস্থাপনা করেছি। তার কারণ রৈ. প্রো. স. ধর্মাবলী বিশ্লেষণ করতে বীজগাণিতিক যুক্তি বহুজায়গায় কাজে লাগে। ভেক্টর দেশের সংজ্ঞা ও তার ধর্মাবলীও এই আলোচনায় স্থান পেয়েছে। তাছাড়া, উত্তল সেটের সংজ্ঞা ও বিশেষ গুণাবলী যা পরের এককগুলিতে বিশেষ ব্যবহৃত হবে তাও এই এককে আলোচিত হবে।

4.7 অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত রৈ. প্রো. স. কে বীজগাণিতিকরূপে প্রকাশ করুন চরম $Z = 15x_1 + 18x_2 + 28x_3 + 26x_4$

শর্তসাপেক্ষে,
$$3x_1 + x_2 \le 16$$
$$2x_3 + 15x_4 \le 16$$
$$x_1 + x_2 \ge 10$$
$$x_3 + x_4 \ge 8$$
এবং $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

2. (1, −2, 5)-কে $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 3)$ এবং $e_3 = (2, -1, 1)$-এর রৈখক সমবায় হিসাবে প্রকাশ করুন।

3. k-এর কোনো মানের জন্য E^2-দেশে $u = (1, -2, k)$-কে $v = (-3, 0, 2)$ এবং $w = (2, -1, -5)$-এর রৈখিক সমবায় হিসাবে কি প্রকাশ করা যায়?

4. নির্ণয় করুন W, E^3-র উপদেশ কিনা যদি W এমন সব ভেক্টর (x, y, z) E^3-এর সমষ্টি যাতে করে (i) $x = 2y$ (ii) $x \le y \le z$ (iii) $xy = 0$, (iv) $k_1x + k_2y + k_3z = 0$, যেখানে $k_i \in R$.

5. E^3-নিম্নলিখিত ভেক্টরগুলি রৈখিকভাবে স্বাধীন কিনা তা নির্ধারণ করুন ঃ

(i) (1, −2, 1), (2, 1, −1), (7, −4, 1), (ii) (1, 2, −3) (1, −3, 2), (2, −1, 5).

(iii) (1, −3, 7), (2, 0, 6), (3, −1, 1), (2, 4, − 5)

6. দেখাও যে, E^3 দেশে সেট $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - x_2 + x_3 \le 4\}$ একটি উত্তল সেট।

7. E_4 দেশে $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 7$ এই পরাসমতল দ্বারা চিহ্নিত কোন অর্ধদেশে (−6, 1, 7, 2) অবস্থিত?

8. দেখাও যে E^2 দেশে সেট $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \le 50, x_1 + 2x_2 \le 80, 2x_1 + x_2 \ge 20, x_1, x_2 \ge 0\}$ একটি উত্তল সেট।

9. দ্বিমাত্রিকতলে একটি আয়তক্ষেত্র নেওয়া হল যার শীর্ষবিন্দুগুলো হল (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)। (0.4, 0.6) বিন্দুকে ঐ চার প্রান্তিক বিন্দুর উত্তল সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করুন।

10. নিম্নলিখিত অর্ধদেশসমূহ

$x_2 \ge 3, -x_1 + x_2 \le 1, -x_1 + 2x_2 < 5$, দ্বারা গঠিত বহুতলক k অঙ্কন করুন। k-এর প্রান্তিক বিন্দুগুলি নির্ণয় করুন।

4.8 উত্তরমালা

1. চরম $Z = (15, 18, 28, 26)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

শর্তসাপেক্ষে $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 15 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix}$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$

2. $(1, -2, 5) = -6, e_1 + 3e_2 + 2e_3$.

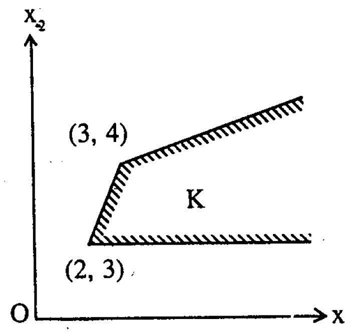
3. $k = -8$. 4. (i) হ্যাঁ (ii) না, উদাহরণস্বরূপ $(1, 2, 3) \in W$ কিন্তু $-2(1, 2, 3) \notin W$. (iii) না, উদাহরণস্বরূপ $(1, 0, 0), (0, 1, 0) \in W$, কিন্তু তাদের যোগফল $\notin W$ (iv) হ্যাঁ

5. (i) না (ii) হ্যাঁ (iii) না

7. মূলবিন্দু নেই, এমন মুক্ত অর্ধদেশে $(cx > z)$ বিন্দুটি অবস্থিত।

9. $\lambda_0(0, 0) + (4 - \lambda_0)(1, 0) + (6 - \lambda_0)(0, 1) + \lambda_0(1, 1), 0 \le \lambda_0 \le 0{:}4$.

10. বহুতলক k চিত্র নং 5.11-তে অঙ্কিত। প্রান্তিক বিন্দুদ্বয় (2, 3), (3, 4).



চিত্র 4.11

তথ্যসূত্র

1. G. HADLEY [1974]	:	LINEAR PROGRAMMING, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMP.
2. S. I. GASS [1958]	:	LINEAR PROGRAMMING, N. Y., MC-GRAW HILL
3. H. A. TAHA, [1982]	:	OPERATIONS RESEARCH, MACMILLAN PUBLISHING CO. N.Y.
4. J. C. CHAKARVORTY & P. R. GHOSH [2001]	:	LINEAR PROGRAMMING & GAME THEORY, MOULIK LIBRARY
5. J. K. SHARMA [2003]	:	OPERATIONS RESEARCH, MACHILLAN INDIA LTD.
6. T. MOULIK [*]	:	LINEAR PROGRAMMING U. N. DHUR & SONS PRIVATE LTD.
7. P. M. KARAK [1988]	:	LINEAR PROGRAMMING & THEORY OF GAMES, PUB. R. KARAK, 1
8. N. S. KAMBO [1984]	:	MATHEMATICAL PROGRAMMING, TECHNIQUES, AFFILIATED EAST-NEST. PRESS PVT. LTD. N. DELHI.
9. M. S. BAZARAH ET AL [1979]	:	NONLINEAR PROGRAMMING, JOHN WILEY & SONS N. Y.

* NOT KNOWN

একক 5 ❑ কার্যকর সমাধান এবং তার বিভিন্ন ধর্মাবলী

গঠন

5.1 উদ্দেশ্য
5.2 প্রস্তাবনা
5.3 ব্যাপ্তি সেট (spanning set), ভিত্তি (basis)
5.4 E^n-দেশে ভিত্তির কোনো ভেক্টরের অপসারণ
5.5 E^n-দেশে রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেক্টরসমূহ দিয়ে ভিত্তির গটন ও লম্ব ভেক্টরসমূহ দিয়ে ভিত্তির গঠন
5.6 অসমীকরণকে সমীকরমে প্রকাশ, অতিরিক্ত চল (slack variable), উদ্বৃত্ত চল (*surplus* variable).
5.7 রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সমাধানযোগ্যতা
5.8 কার্যকর সমাধান ও তার গুণাবলী
5.9 E^n দেশে মৌল কার্যকর সমাধানের সঙ্গে প্রান্তিক বিন্দুর সম্পর্ক
5.10 সারাংশ
5.11 অনুশীলনী
5.12 উত্তরমালা

5.1 উদ্দেশ্য (Objectives)

এই একক রচনার মুল উদ্দেশ্য হল ঃ

রৈখিক প্রোগ্রাাং সমস্যার কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেটের প্রান্তিক বিন্দুর সঙ্গে মৌল কার্যকর সমাধানের এক অনন্য সম্বন্ধ স্থাপন।

এই আলোচনার জন্য আনুষঙ্গিক ধারণার যেমন ব্যাপ্তি সেট, ভিত্তি সেট, ভিত্তি ভেক্টর, ভিত্তি ম্যাট্রিক্স ইত্যাদির জ্যামিতিক অবতারণা করা হয়েছে।

গভীরতর উদ্দেশ্য হল জ্যামিতিক সমাধানের বদলে বীজগাণিতিক সমাধান করা।

5.2 প্রস্তাবনা (Introduction) :

এই এককে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার কার্যকর সমাধানের বিভিন্ন ধর্মাবলী আলোচিত হবে। তার জন্য ভেক্টর দেশের কিছু গুণাবলী, রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সমাধান যোগ্যতা, সমাধান থাকলে তা এক বা একাধিক

কিনা সেই সব আলোচনা মূল বিষয়বস্তুর আলোচনার প্রাক্‌কথন হিসাবে এই এককে স্থান পাবে। কার্যকর সমাধান থেকে মৌল কার্যকর সমাধান কি করে পাওয়া যায় এবং মৌল কার্যকর সমাধানের সঙ্গে কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেটের শীর্ষবিন্দুর কি সম্পর্ক এবং আরও বীজগাণিতিক ও জ্যামিতিক ধর্মাবলী যা আমাদের আলোচনাকে আরও গভীর ও সমাধান নির্ণয়ের দিশা নির্ধারণ করে, সেটাও এই এককের বিষয়বস্তুর উদ্দেশ্য।

5.3 ব্যাপ্তি সেট, ভিত্তি

5.3.1. ব্যাপ্তি সেট E^n-দেশে $a^1, a^2, ..., a^r$-কে E^n দেশে ব্যাপ্ত অথবা E^n দেশকে গঠন করে বলা হয়, যদি E^n দেশের যেকোনো ভেক্টর a-কে $a^1, a^2, ... a^r$-এর রৈখিক সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

5.3.2. ভিত্তি E^n দেশের ভিত্তি বলতে E^n-এ অবস্থিত রৈখিকভাবে স্বাধীন এমন সব ভেক্টর গোষ্ঠী বোঝায় যারা সন্তত E^n-এ ব্যাপ্ত। n একক ভেক্টরগোষ্ঠী $e^1, e^2, ... e^n \in E^n$, ঐ দেশের একটি ভিত্তি গঠন করে। ঐ n-একক ভেক্টরগোষ্ঠী পরস্পর রৈখিকভাবে স্বাধীন।

মন্তব্য 5.1. E^n-এ ভিত্তি অনন্য নয়।

মন্তব্য 5.2. E^n-এ যেকোনো ভেক্টরকে যেকোনো ভিত্তির উপাদানসমূহের সমষ্টি হিসাবে অনন্যভাবে প্রকাশ করা যায়।

ধরা যাক $a^1, ..., a^r$, E^n দেশে ভিত্তি গঠন করে। তাহলে যেকোনো ভেক্টর $b \in E^n$-এর জন্য আমরা স্কেলারসমূহ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ পাই যাতে করে (সব শূণ্য নয়)

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_r a^r \tag{5.1}$$

যদি b-কে অন্যভাবে $a^1, a^2, ... a^r$-এর সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করা যায় তাহলে আমরা λ_1^1, λ_2^1 ..... λ_r^1 (সব শূণ্য নয়) যাতে করে

$$b = \lambda_1^1 a^1 + \lambda_2^1 a^2 + \ldots + \lambda_r^1 a^r \tag{5.2}$$

(5.1) ও (5.2) থেকে পাই,

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_1^1) a^1 + (\lambda_2 - \lambda_2^1) a^2 + \; ..... \; + (\lambda_r - \lambda_r^1) a^r \tag{5.3}$$

যেহেতু $a^1, ..., a^r$ রৈখিকভাবে স্বাধীন (5.3) থেকে পাই, $0 = \lambda_1 - \lambda_1^1 = \lambda_2 - \lambda_2^1 = ... = \lambda_r - \lambda_r^1$.

অর্থাৎ (5.1) এ প্রাপ্ত b ভেক্টরের প্রকাশ $a^1, ... a^r$-এর সাপেক্ষে অনন্য।

5.4. E^n দেশে ভিত্তির কোন ভেক্টর অপসারণ

ধরা যাক E^n-দেশে a^1, a^2 ....a^r একটি ভিত্তি গঠন করে। E^n-এ b $(b \neq 0)$ এমন একটি ভেক্টর যেটাকে প্রকাশ করা যায় $b = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a^i$ (5.4)

উপপাদ্য 5.1. যদি $\lambda_i \neq 0$ এবং ভিত্তিতে a^i-এর বদলে b-কে অন্তর্ভুক্ত করা হয় তাহলে $a^1, a^2, \ldots a^{i-1}, b, a^{i+1}, \ldots a^r$-এর সেটও E^n-এ একটি ভিত্তি গঠন করে।

যেহেতু $a^1, a^2, \ldots a^r$ একটি ভিত্তি গঠন করে, তারা রৈখিকভাবে স্বাধীন এবং $\sum_{i=1}^{r} \mu_i \; a^i = 0 \Rightarrow \mu_i = 0, i = 1, 2, \ldots r$। সত্যের সর্বজনগ্রাহ্যতা ব্যাহত না করে আমরা ধরতে পারি $\lambda_r \neq 0$. এবং $a^1, a^2, \ldots, a^r$ এই সেটে a^r-এর বদলে b-কে নিতে পারি। যদি $a^1, a^2, \ldots, a^{r-1}, b$ রৈখিকভাবে স্বাধীন হয়, তাহলে $\sum_{i=1}^{r-1} v_i a^i + vb = 0$—এই সমীকরণ ইঙ্গিত করে (5.5)

$v_i = 0, i = 1, 2, \ldots r-1$

$v = 0$

$a^1, a^2, \ldots a^{r-1}, b$ যদি রৈখিকভাবে স্বাধীন না হয়, তাহলে v শূণ্য হতে পারে না। কেননা যদি $v = 0$ হয় তাহলে v_i-দের কোনো কোনটা শূণ্য হতে পারবে না। ফলে $a^1, a^2, \ldots a^{r-1}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন হবে না যেটা আমাদের প্রকল্প বিরোধী।

(15.4. ও 5.5) থেকে পাই,

$$\sum_{i=1}^{r-1} (v_i + v\lambda_i) a^i + v\lambda_r a^r = 0 \tag{5.6}$$

যেহেতু, $v\lambda r \neq 0, a^1, a^2 \ldots a^r$ রৈখিকভাবে নির্ভরশীল যেটা আমাদের প্রকল্পবিরোধী। যেহেতু $v = 0$ এবং $(5-5)$ এ $v_i = 0$, যার থেকে আমরা পাই, $a^1, a^2, \ldots a^r$ রৈখিকভাবে স্বাধীন।

$a^1, a^2 \ldots a^{r-1}$, যে ভিত্তি গঠন করে সেটা প্রমাণ করতে গেলে আমাদের দেখাতে হবে যে, যে কোনো $x \in E^n$-কে ঐ ভেক্টর গোষ্ঠীর রৈখিক সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করতে হবে।

এখন আমরা স্কেলার v_i সমূহ পাব যাতে করে

$x = \sum_{i=1}^{r} v_i a^i$ লিখতে পারি। (5.6)

যেহেতু $\lambda_r \neq 0$, (5.4)-কে ব্যবহার করে পাই,

$$a^r = \frac{b}{\lambda r} - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_r} a^i \qquad (5.7)$$

(5.6) ও (5.7) থেকে আমরা পাই,

$$x = \sum_{i=1}^{r-1} \left(v_i - \frac{v_r \lambda_i}{\lambda_r} \right) a^i + \frac{v_r}{\lambda_r} b \qquad (5.8)$$

উপরের রাশিমালা ইঙ্গিত করে x-কে a^1, a^2, ... a^{r-1}, b-এর রৈখিক সমাবেশ হিসবে প্রকাশ করা যায়।

এটার থেকে বোঝা যায় যে a^1, a^2, ... a^{r-1}, b, E^n কোনো একটি ভিত্তি গঠন করে।

মন্তব্য 5.3. যদি b-কে এমন একটি a^i-এর বদলে লেখা হয়, যার জন্য $\lambda_1 = 0$, তাহলে নতুন ভেক্টর সেট রৈখিকভাবে পরাধীন হবে। এটা দেখাবার জন্য। আমরা ধরলাম $\lambda_r = 0$ তাহলে (5.4) থেকে পাই,

$$b = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i a^i$$

তাহলে a^1, a^2, ..,.. a^{r-1}, $\tilde{b}$ রৈখিকভাবে নির্ভরশীল বা পরাধীন হয়।

5.5 রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেক্টরগোষ্ঠী দিয়ে ভেক্টর গঠন ও পরস্পর লম্ব ভেক্টরসমূহদিয়ে ভিত্তি গঠন ঃ

উপপাদ্য 5.2 : E^n দেশে যে কোনো n সংখ্যক ভেক্টর গোষ্ঠী ভিত্তি গঠন করে।

ধরা যাক a^1, a^2, ... a^n E^n-দেশে রৈখিকভাবে স্বাধীন n ভেক্টরসমূহ।

আমরা e^1, e^2, ... e^n দ্বারা গঠিত E^n-র একটি ভিত্তি গঠন করি।

5.4-এ বর্ণিত পদ্ধতি অনুসরণ করে e^i ভেক্টরের বদলে a^j ভেক্টর নিলাম এবং নতুন একটি ভিত্তি গঠন করলাম। এইভাবে n বার পাল্টাবার পরে আমরা যে ভিত্তি পেলাম তার উপাদানগুলি হল a^1, a^2, ... a^n।

এখন আমরা দেখাব E^n-দেশে যেকোনো (n + 1) ভেক্টর পরস্পর স্বাধীন হবে না।

এখন a^1, a^2, ... a^n রৈখিকভাবে স্বাধীন হওয়ায়

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i = 0, \Rightarrow \lambda_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots n$$

এখন a^{n+1} কে আমরা a^1, a^2, ... a^n-এর রৈখিক সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করতে পারি।

অর্থাৎ β_i, পাব যাতে করে, $a^{m+1} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i a^i$ লিখতে পারি। (5.9)

$a^{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \beta_i a^i = 0$ কিন্তু, $a^1, a^2, \ldots a^{n+1}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন। সুতরাং (5.9) সত্য নয়।

অতএব E_n-এ n সংখ্যক রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেক্টর গোষ্ঠী একটি ভিত্তি গঠন করে।

লম্ব ভেক্টর গোষ্ঠী ঃ

উপপাদ্য 5.3. E^n-দেশে n পরস্পর লম্ব শূন্য নহে এমন ভেক্টর সমূহ ভিত্তি গঠন করে।

ধরা যাক, E^n-দেশে $v^1, \ldots v^n$ পরস্পর লম্ব ভেক্টরসমূহ। আমরা দেখাব যে ঐ ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন।

যদি ঐ ভেক্টরগোষ্ঠী স্বাধীন না হয় তাহলে এমন স্কেলারসমূহ পাব সব শূণ্য নয় যাতে করে,

$$\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \ldots + \lambda_n v^n = 0 \qquad (5.10)$$

যেহেতু ভেক্টর গোষ্ঠী পরস্পর লম্ব

$(v^i)' v^j = 0, i \neq j$ যেখানে v^i একটি স্তম্ভ ভেক্টর।

(5.10)-এর উভয়দিকে $(v^i)'$ হিয়ে পূর্ব গুণন (premultiply) করলে পাওয়া যায়।

$$\lambda_1 (v^i)' v^1 + \ldots \lambda_i (v_i)' v_i + \lambda_n (v^i)' v_n = 0$$

অর্থাৎ $\lambda_i = 0$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, $\lambda_1 = \lambda_2 \ldots \lambda_n = 0$

অর্থাৎ (5.10) সত্য হলে λ_i রা সবাই শূন্য হয়।

অর্থাৎ v^i, $i = 1, 2, \ldots n$ রৈখিকভাবে স্বাধীন। সুতরাং উপপাদ্য 5.1 অনুসারে $v^1, \ldots v^n$ একটি ভিত্তিগঠন করে।

উদাহরণ 5.1. দেখাও যে, E^3-তে (1, 1, 0) (1, – 1, 0), (0, 1, 1) এবং (0, 1, – 1) একটি ব্যাপ্তি সেট গঠন করে।

যদি ব্যাপ্তি সেট হয়, তাহলে যে-কোনো ভেক্টর (a, b, c) εE^3-কে লেখা যায়,

$$(a, b, c) = \alpha (1, 1, 0) + \beta (1, -1, 0) + \gamma (0, 1, 1) + \delta (0, 1, -1)$$

তাহলে $a = \alpha + \beta$ (5.11)

$$b = \alpha - \beta + \gamma + \delta \qquad (5.12)$$

$$c = \gamma - \delta$$

যেহেতু চারটি অজানা চল এবং তিনটি সমীকরণ আছে। আমরা $\delta = k$ (ধ্রুবক) ধরলাম।

$$\begin{aligned} \alpha + \beta \quad &= a \\ \alpha - \beta + \gamma \quad &= b - k \\ \gamma \quad &= c + k \end{aligned}$$

অথবা, $\alpha + \beta = a$

$$\alpha - \beta = b - c - 2k$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}(a - b + c - 2k) \\ \beta &= \frac{1}{2}(a - b + c - 2k) \\ \gamma &= c + k \end{aligned}\right\}$$

k-এর যে-কোনো মানের জন্যই α, β, γ-কে a, b, c-এর রৈখিক সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করা যাবে।

উদাহরণ 5.2. R^3 দেশে উভয় ভেক্টর $v = (3, 1, -4)$-কে ভিত্তি f_1 (1, 1, 1), $f_2 = (0, 1, 1)$ এবং $f_3 = (0, 0, 1)$-এর সাপেক্ষে প্রকাশ করো।

ধরা যাক, $v = xf_1 + yf_2 + zf_3$, x; y, z অজানা।

$$(3, 1, -4) = x\,(1, 1, 1) + y\,(0, 1, 1) + z\,(0, 0, 1)$$
$$= (x, x, x) + (0, y, y) + (0, 0, z)$$

অতএব $x = 3$

$$x + y = 1$$
$$x + y + z = -4$$

অতএব $x = 3,\ y = -2,\ z = -5$

তাহলে, $[v]_f = (3, -2, -5)$.

উদাহরণ 5.3. নির্ণয় করুন নিম্নলিখিত সেট E^3-তে একটি ভিত্তি গঠন করে কিনা ঃ

(i) (1, 1, 1) এবং (1, – 1, 5) (ii) (1, 2, 3), (1, 0, – 1), (3, 1, 0) এবং (2, 1, – 2) (iii) (1, 1, 1), (1, 2, 3) এবং (2, – 1, 1)

(i) এবং (ii) না, কারণ E^3-তে তিনটি এবং কেবলমাত্র তিনটিই রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেক্টর থাকবে।

(iii) ভেক্টরটি ভিত্তি গঠন করে কেবলমাত্র যদি তারা রৈখিকভাবে স্বাধীন হয়।

ধরা যাক, $\alpha\,(1, 1, 1) + \beta\,(1, 2, 3) + \gamma\,(2, -1, 1) = 0$

$$\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \qquad (5.14)$$

$$\alpha + 2\beta - \gamma = 0 \qquad (5.15)$$

$$\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \qquad (5.16)$$

(5.15) ও (5.16) থেকে পাই $2\alpha + 5\beta = 0$

(5.14) ও (5.15) থেকে পাই $3\alpha + 5\beta = 0$

(5.14) থেকে পাই $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$

প্রদত্ত ভেক্টর-এর একটি ভিত্তি গঠন করে।

উদাহরণ 5.4 দেখান যে, E^3-তে (2, – 1, 0), (3, 5, 1), (1, 1, 2) এই ভেক্টরগোষ্ঠী একটি ভিত্তি গঠন করে।

যদি ভিত্তি হয় তাহলে $x, y, z \in R$ পাব যাতে করে $(a, b, c) \in E^3$-কে লেখা যায়,

$$(a, b, c) = x(2, -1, 0) + y(3, 5, 1) + z(1, 1, 2)$$

$$a = 2x + 3y + z$$

$$b = -x + 5y + z$$

$$c \qquad y + 2z$$

প্রথম দুটো সমীকরণ থেকে পাই,

$$a - b = 3x - 2y$$

শেষের দুটোর থেকে পাই,

$$c - 2b = 2x - 9y$$

$$2(a - b) - 3(c - 2b) = 27y - 4y = 23y$$

অথবা $2a + 4b - 3c = 23y$

$$3 \times 23x - 2 \times 23y = 23(a - b)$$

$$46y = 4a + 8b - bc$$

যোগ করে, অতএব $69x = 27a - 15b - bc$

$$x = \frac{1}{69}[27a - 15.b - bc]$$

$$y = \frac{1}{23}[2a + 4b - 3c]$$

$$z = \frac{1}{46}[26c - 2a + 4b]$$

5.6 অসমীকরণকে সমীকরণে প্রকাশ, অতিরিক্ত চল (Slack variable) উদ্ধৃত্ত চল (Surplus variable)

রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার মার্তগোষ্ঠীকে লেখা যায়,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \,(\leq = \geq)\, b_i\,, i = 1, 2 \ldots . m$$

'≤' ধরনের i-তম অসমীকরণ হবে,

$$a_{i1}\ x_1\ +\ a_{i2}\ x_2\ +\ a_{in}\ x_n\ \leq\ b_i \qquad (5.14)$$

যেহেতু বামপক্ষ ডানপক্ষ থেকে ছোটো আমরা বামপক্ষে একটি ধনাত্মক চল x_{n+1} যোগ করতে পারি যাতে দুপক্ষই সমান হয়।

$$a_{i1}\ x_1 + a_{i2}\ x_2 + \ldots\ldots + a_{ix}\ x_n + x_{n+1} = b_i \qquad (5.15)$$

এই ধরনের চলকে 'অতিরিক্ত চল' (Slack variable) বলা হয়।

যদি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার শর্তগোষ্ঠীর γ টা '≤' ধরনের অসমীকরণ থাকে সেগলিকে অতিরিক্ত চল x_{n+i} বামপক্ষে যোগ করি অসমীকরণতন্ত্রকে নীচের সমীকরণতন্ত্রে রূপান্তরিত করতে পারি ঃ

$$\sum a_{ij}\, x_j + x_{n+i} = b_i\,, i = 1, 2, \ldots . r \qquad (5.16)$$

অনুরূপে যদি কোনো শর্ত "≥" ধরনের হয়, তখন বামপক্ষ থেকে ধনাত্মক চল বিয়োগ করে, অসমীকরণতন্ত্রকে সমীকরণতন্ত্রে রূপান্তরিত করতে পারি।

যেমন ধরুন $a_{i1}\ x_1\ +\ a_{in}\ x_n\ \geq\ b_i$-কে সমীকরণে রূপান্তরিত করতে পারি নিম্নভাবে ঃ

$$a_{i1}\ x_1\ +\ \ldots\ldots\ +\ a_{in}\ x_n\ -\ x_{n+1}\ =\ b_i$$

এই 'x_{n+1}'-কে উদ্ধৃত্ত চল (Surplus variable) বলা হয়। যদি s-সংখ্যক অসমীকরণ "≥" ধরনের হয়, তাহলে উদ্ধৃত্ত চল প্রবর্তন করে আমরা লিখতে পারি,

$$a_{i1}\ x_1\ +\ \ldots\ldots\ a_{in}\ x_n\ -\ x_{n+i}\ =\ b_i,$$

বাকি m – (r + s) শর্তগুলি সমীকরণতন্ত্র i = r + 1, ... r + s হিসাবে প্রকাশিত হয়েছে।

তাহলে আমরা রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাকে বিস্তারিতভাবে লিখতে পারি ঃ

$$\text{চরম } z = c_1\ x_1\ +\ c_2\ x_2\ +\ \ldots\ldots\ c_n\ x_n \qquad (5.17)$$

শর্তসাপেক্ষে

$$\left.\begin{array}{ll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\
\vdots & \\
a_{r1}x_1 + a_{r_2}x_2 \ldots\ldots\ldots + a_{rn}x_n + x_{n+r} & = b_r \\
a_{r+1,1}x_1 + \ldots\ldots\ldots a_{r+1,n}x_n - x_n + r + 1 & = b_{r+1} \\
\vdots & \\
a_{r+s,1}x_1 + a_{r+1.n}x_n - x_n + r + 1 & = b_{r+s} \\
a_{r+s+1,1}x_1 + \ldots\ldots + a_{r+s+1,n}x_n & = b_{r+s+1} \\
a_{m1}x_1 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n & = b_m
\end{array}\right\} \quad (5.18)$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\ \ldots\ldots\ x_n \geq 0\ x_{n+i} \geq 0\ i = 1 \ldots r + s$

বীজগণিতের ভাষায় লিখলে (5.18)-কে লেখা যায়,

চরম $Z = cx$

শর্তসাপেক্ষে $Ax = b$,

$x \geq 0$

5.7 রৈখিক সমীকরণতন্ত্রকে সমাধানযোগ্যতা

ধরা যাক, A একটি $m \times n$ ম্যাট্রিক্স।

5.7.1. ম্যাট্রিক্সকে স্তম্ভ ভেক্টর হিসাবে প্রকাশ

প্রদত্ত $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$

ধরা যাক, $a^i = (a_{i1}, a_{i2} \ldots\ldots a_{mn})$ একটি সারি ভেক্টর।

তাহলে, $A = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix}$ হিসাবে প্রকাশ করা যায় অর্থাৎ A-কে একটি স্তম্ভ ভেক্টর যার প্রতিটি উপাদান একটি সারি ভেক্টর। a^i-কে বলা হবে i-তম সারি ভেক্টর।

5.7.2 ম্যাট্রিক্সকে সারি ভেক্টর হিসাবে প্রকাশ ঃ

ধরা যাক, $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

a_j হল j-তম স্তম্ভ ভেক্টর।

আমরা লিখতে পারি, $A = (a_1, a_2, \ldots. a_n)$,

তাহলে A-কে প্রকাশ করা যায় একটি সারি ভেক্টর হিসেবে যার প্রতিটি উপাদান হল একটি স্তম্ভ ভেক্টর।

5.7.3 ম্যাট্রিক্সের সারি মাত্রা (Row rank) :

একটি ম্যাট্রিক্সের সারি মাত্রা বলতে ম্যাট্রিক্সের রৈখিকভাবে স্বাধীন সারির সংখ্যা বোঝায়।

5.7.4 ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভ মাত্রা (Column rank) :

একটি ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভ ভেক্টর বলতে ম্যাট্রিক্সের রৈখিকভাবে স্বাধীন স্তম্ভের সংখ্যা বোঝায়।

মন্তব্য 5.1. একটি ম্যাট্রিক্সের সারি মাত্রা = স্তম্ভ মাত্রা।

তাহলে A ম্যাট্রিক্সের সারি মাত্রা = স্তম্ভ মাত্রা r (A) দিয়ে চিহ্নিত করা হবে।

5.7.5 বর্ধিত ম্যাট্রিক্স (A_b) :

আমরা সমীকরণতন্ত্র $A_x = b$ নিয়ে আলোচনা করছি।

আমরা A_b বলতে বোঝাই $\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots\ldots & a_{mn} & bm \end{pmatrix}$ এই ম্যাট্রিক্সকে A যদি $m \times n$ ম্যাট্রিক্স হয়,

তাহলে A_b একটি $m \times (n + 1)$ ম্যাট্রিক্স।

এখন $r(A_b) \geq r(A)$ কারণ A_b-এর রৈখিকভাবে স্বাধীন সারির সংখ্যা, A-এর রৈখিকভাবে স্বাধীন সারির সংখ্যার চেয়ে কম হতে পারে না।

উপপাদ্য 5.4 যদি $r(A_b) > r(A)$ তাহলে $Ax = b$ এই সমীকরণতন্ত্রের কোনো সমাধান থাকবে না।

ধরা যাক, $r(A_b) = k > r(A)$ তাহলে A_b-এর k রৈখিকভাবে স্বাধীন স্তম্ভ ভেক্টর আছে। তাদের মধ্যে b একটি ভেক্টর হতেই হবে। তা না-হলে A-এর k টা স্বাধীন স্তম্ভ ভেক্টর থাকবে। যেক্ষেত্রে $r(A_b)$, r (A)-এর সমান হবে। তাহলে b ভেক্টরকে A-এর স্বাধীন লম্ব ভেক্টরদের রৈখিক সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ

করা যাবে না। অর্থাৎ স্কেলার সমূহ x_j পাওয়া যাবে না যাতে করে $\sum_j x_j a_j = b$. অতএব ওই সমীকরণতন্ত্রের কোনো সমাধান নেই অথবা ওই সমীকরণতন্ত্রকে অসঙ্গত (inconsistent) বলা যায়।

উপপাদ্য 5.5 যদি r (A) = r (A_b), তাহলে $Ax = b$, এই সমীকরণতন্ত্রের একটি সমাধান থাকবে।

যদি r (A) = r (A_b) = k তাহলে A_b-এর প্রতিটি স্তম্ভই A-এর স্বাধীন k স্তম্ভের রৈখিক সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করা যাবে। আমরা কোনো সত্য ব্যাহত না-করেই ধরতে পারি যে A-এর প্রথম k স্তম্ভই রৈখিভাবে স্বাধীন। যেহেতু b, Ab-এর একটি স্তম্ভ আমরা এমন স্কেলারসমূহ x_j পেতে পারি যাতে করে,

$$\sum_{j=1}^{k} x_j a_j = b$$

অর্থাৎ $Ax = b$-এই সমীকরণতন্ত্রের একটি সমাধান অন্তত পাওয়া যাবে। এক্ষেত্রে সমীকরণসমূহকে সঙ্গাত বলা হবে।

উদাহরণ 5.5 $\mathbf{3x_1 + 5x_2 = 8}$

$\mathbf{x_1 + 8x_2 = 9}$

এই সমীকরণদ্বয়ের সমাধান আছে কি?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \text{ r (A) = 2. নির্ণায়ক } A = 19 \neq 0$$

$$A_b = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \text{ r } (A_b) = 2$$

অতএব সমাধান আছে এবং সেটা অনন্য।

উদাহরণ 5.6 $\mathbf{3x_1 + 4x_2 = 7}$

$\mathbf{2.25\ x_1 + 3x_2 = 5.25}$

সমাধান আছে কিনা দেখতে হবে?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2.25 & 3 \end{bmatrix} \text{ r (A) = 1}$$

$$A_b = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2.25 & 3 & 5.25 \end{bmatrix} \text{ r } (A_b) = 1$$

তাহলে ওই সমীকরণতন্ত্রের একটি সমাধান আছে। যেহেতু r (A) = 1 < 2, ওই সমীকরণতন্ত্রের একটার বেশি সমাধান আছে।

মন্তব্য 5.4 ওই সমীকরণ যুগলের অসীম সংখ্যক সমাধান আছে। জ্যামিতিক কোণ থেকে দেখলে ওই দুটো সমীকরণ একটি সরলরেখাকেই চিহ্নিত করে।

উদাহরণ 5.7 $3x_1 + 4x_2 = 7$

$$2{\cdot}25x_1 + 3x_2 = 1$$

$r(A) = 1.\ \ r(A_b) = 2.\ \ r(A) = 1 < r(b) = 2.$

অতএব ওই সমীকরণযুগলের কোনো সমাধান নেই।

জ্যামিতিক কোণ থেকে দেখলে ওই সমীকরণযুগল দুটো সমান্তরাল সরলরেখাকে প্রকাশ করে। সুতরাং তারা ছেদ করে না।

অর্থাৎ সমীকরণযুগলের কোনো সমাধান নেই।

উপপাদ্য 5.6 যদি কোনো সমীকরণতন্ত্রে $Ax = b$-এর জন্য

$$r(A) = r(A_b) = k < m \text{ (সমীকরণের সংখ্যা)}$$

তাহলে $(m - k)$ সমীকরণতন্ত্র অতিরিক্ত হবে। যুক্তির সর্বজনগ্রাহ্যতা ব্যাহত না-করে আমরা ধরতে পারি যে প্রথম k-সংখ্যক সমীকরণগুলি রৈখিকভাবে স্বাধীন। A_b-এর সারিদের আমরা চিহ্নিত করি (a^i, b_i) হিসাবে।

তাহলে $(a^r, b_r) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ir}(a^i, b_i)\ \ r = k + 1, \ldots\ldots m$

অথবা, $a^r = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ir}\, a^i$

$$b_r = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ir}\, b_i,\ r = k + 1, \ldots\ldots m$$

ধরা যাক, x ভেক্টর (5.18)-এর প্রথম k সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

তাহলে, $a^i x = b_i, i = 1, 2, \ldots\ldots k$

অতএব, $a^r x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ir}\, a^i x$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ir}\, b_i, r = k + 1, \ldots\ldots m$$

$$= b_r$$

তাহলে যদি কোনো x প্রথম k সমীকরণসমূহ $a^i x = b_i$, i = 1, ... k-কে সিদ্ধ করে, তাহলে ওই x ভেক্টর বাকি (m – k) সমীকরণগুলিকে সিদ্ধ করে। অন্যভাবে বলা যায় যে প্রথম k সমীকরণসমূহ ছাড়া বাকি সমীকরণতন্ত্রকে আমরা বলি অতিরিক্ত।

উপপাদ্য 5.7 যদি n > k হয়, তাহলে (5.18) সমীকরণতন্ত্রের অসংখ্য বিভিন্ন সমাধান থাকবে।

আমরা জানি, $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

প্রথম k সারি ও k স্তম্ভ দ্বারা গঠিত উপম্যাট্রিক্সকে B বলা হল। প্রথম k সারি ও বাকি (n – k) স্তম্ভ দ্বারা গঠিত উপম্যাট্রিক্সকে R বলা হয়। তাহলে প্রথম k সমীকরণ সমূহকে আমরা প্রকাশ করতে পারি,

$$B\, x_B + R\, x_R = b^* \quad (5.20)$$

ওপরের x_B ও x_R যথাক্রমে

$$x_B = \left(x_1, x_2, \ldots\ldots x_k\right)^T, x_R = \left(x_{k+1}, \ldots\ldots x_n\right)^T$$

$$b^* = (b_1, b_2 \ldots\ldots b_k)^T$$

আমরা ধরলাম B ম্যাট্রিক্সটি অবিশিষ্ট। তাহলে (5.20)-কে আমরা নীচের আকারে প্রকাশ করতে পারি ঃ

$$x_B = -B^{-1} R\, x_R + B^{-1} b^*$$

তাহলে প্রদত্ত যে-কোনো x_R-এর জন্যই আমরা x_B-কে x_R-এর সাপেক্ষে প্রকাশ করতে পারি।

উদাহরণ 5.8 $$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\quad + 7x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

এখানে $r(A) = r(A_b) = 2 < 3$

প্রথম সমীকরণে $x_3 = k$ বসিয়ে, x_1 ও x_2-এর মান বার করা যায়।

$$x_1 = \frac{1}{2}(4 - 7k), x_2 = \frac{3}{2}k - 1, x_3 = k$$

5.8 কার্যকর সমাধান ও তার গুণাবলি

নীচের আলোচনায় আমরা প্রমাণ আকারের রে. প্রো. স. ব্যবহার করব ঃ

$$\begin{aligned} \text{চরম} \quad & z = cx \\ \text{শর্তসাপেক্ষে} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{5.21}$$

$x \in E^n$, A – $m \times n$ ম্যাট্রিক্স এবং $b \in E^n$.

5.8.1 কার্যকর সমাধান ঃ চরম $z = cx$ শর্তসাপেক্ষে $A\,x = b$-এই রৈ. প্রো. স.-র সমাধান x যদি ≥ 0 অর্থাৎ x-এর উপাংশগুলি x_j, যদি ধনাত্মক হয়, তখন ওই সমাধানকে কার্যকর সমাধান বলা হয়।

লক্ষ্যণীয় (5.21)-এর সমাধানগুলো সবই কার্যকর।

উপপাদ্য 5.8 প্রমাণ আকারের রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার (5.21) সমাধানসমূহ গঠিত সেটটি উত্তল।

প্রদত্ত রৈ. প্রো. স.-র শর্তগোষ্ঠী হল $Ax = b,\ x \geq 0$ (5.22)

ধরা যাক, x^1 এবং x^2 (5.22)-এর যে-কোনো দুটো সমাধান।

তাহলে $Ax^1 = b,\quad x^1 \geq 0$

$Ax^2 = b,\quad x^2 \geq 0$

অতএব $A\left(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2\right),\ 0 \leq \lambda \leq 1$

$= \lambda\, Ax^1 + (1-\lambda)Ax^2$

$= \lambda\, b + (1-\lambda)b = b$

আবার $\lambda\, x^1 + (1-\lambda)x^2 \geq 0$

অতএব $X = \{x \mid x \in E^n,\ Ax = b, x \geq 0\}$ সেটটি উত্তল।

মন্তব্য 5.5 যদি কোনো প্রমাণ আকারের রৈ. প্রা. স.-র দুটো কার্যকর সমাধান থাকে তাহলে কার্যকর সমাধানের সংখ্যা অসংখ্য।

আমরা আগের উপপাদ্যে দেখেছি প্রমাণ আকারের রৈ. প্রো. স.-র সমাধানের সেট হল উত্তল। যেহেতু x^1, x^2 দুটো কার্যকর সমাধান এবং X সেটটি উত্তল হওয়ায় x^1, x^2 সংযোজিত রেখাংশ X-তেই বিদ্যমান। সুতরাং কার্যকর সমাধানের সংখ্যা অসংখ্য।

5.8.2 মৌল সমাধান ঃ

আমরা সমীকরণগোষ্ঠী $Ax = b$ নিচ্ছি।

$x \in E^n$ এবং A – $m \times n$ ম্যাট্রিক্স, $b \in E^n$.

ধরা যাক, r (A) = m. A-এর থেকে একটি m × m অবশিষ্ট উপম্যাট্রিক্স নেওয়া হ'ল এবং A-এর সঙ্গো জড়িত নয় এমন (n – m) চলগুলিকে শূন্য নেওয়া হ'ল।

তাহলে $Ax = b$-এর থেকে সমীকরণগুলো অবশিষ্ট রইল তার সমাধানসমূহকে **মৌল সমাধান** বলা হয়।

যে m-সংখ্যক চল (ওই (n – m) চলকে বাদ দিয়ে) আছে, তাদের বলা হয় **মৌল চল**।

মৌল সমাধানতন্ত্রের সর্বোচ্চ সংখ্যা ^nC_m, কেননা আমরা n জিনিস থেকে m জিনিস বেছে নিতে পারি ^nC_m উপায়ে।

5.8.3 অপজাত সমাধান (Degenarate solution)

একটি মৌল সমাধানকে অপজাত সমাধান বলা হয় যদি ওই মৌল সমাধানের এক বা একাধিক চলের মান শূন্য হয়।

উদাহরণ 5.9 নীচের সমীকরণতন্ত্রের সমাধানক থাকলে সেগুলি নির্ণয় করুন ঃ

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 16$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 9$$

যেহেতু দুটো সমীকরণ আর চারটে চল আছে, তাহলে 4_{c_2} অর্থাৎ 6টি আলাদা আলাদা সমীকরণ যুগল পাওয়া যাবে যার মধ্যে দুটো চল আছে। নীচে যে যে সমীকরণযুগল সম্ভব সেগলি লিপিবদ্ধ করা হল এবং সম্ভাব্য মৌল নির্ণয় করব ঃ

(i) $2x_1 + 3x_2 = 16$ $\quad x_1 = 5,\ x_2 = 2\ (x_3 = 0,\ x_4 = 0)$
$x_1 + 2x_2 = 9,$

(ii) $2x_2 + 5x_3 = 16,$ $\quad x_1 = 13,\ x_3 = -2\ (x_2 = 0,\ x_4 = 0)$
$x_1 + 2x_3 = 9$

(iii) $2x_1 + 6x4 = 16$
$x_1 + 3x_4 = 9$ কোনো সমাধান নেই কেননা সমীকরণ দুটি সমান্তরাল রেখাকে উপস্থাপন করে। ফলে তাদের কোনো ছেদবিন্দু নেই।

(iv) $3x_2 + 5x_3 = 16$ $\quad x_2 = \frac{13}{4}, x_3 = \frac{5}{4}, (x_1 = 0, x_4 = 0)$

$2x_2 + 2x_3 = 9,$

(v) $3x_2 + 6x_4 = 16,$ $\quad x_2 = 2, x_4 = \frac{5}{3}(x_1 = 0, x_3 = 0)$

$2x_2 + 3x_4 = 9,$

(vi) $5x_3 + 6x_4 = 16,$ $\qquad x_3 = -2, x_4 = \frac{13}{3}(x_1 = 0, x_2 = 0)$

$2x_3 + 3x_4 = 9,$

তাহলে ওপরের সমীকরণযুগলের 5টি মৌল সমাধান আছে।

(iii) সমীকরণযুগলকে আমাদের আলোচনাই করা উচিত ছিল না কেননা ওর সংশ্লিষ্ট ম্যাট্রিক্সটি বিশিষ্ট।

উদাহরণ 5.10 দেখাতে হবে যে নীচের সমীকরণযুগল-এর

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12$$
$$5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20$$

মৌল সমাধানদের দুটি অপজাত।

এখানে 3_{c_2} অথবা 3টি সমীকরণযুগল আলোচনা করতে হবে।

(i) $3x_1 + 4x_2 = 12$

$5x_1 + 4x_2 = 20$ $\qquad$ অর্থাৎ $x_1 = 4, x_2 = 0,$

(ii)` $3x_1 + x_3 = 12$

$5x_1 + 2x_3 = 20$ $\qquad$ অর্থাৎ $x_1 = 4, x_3 = 0$

(iii) $4x_2 + x_3 = 12$

$4x_2 + 2x_3 = 20$ $\qquad$ অর্থাৎ $x_2 = 1, x_3 = 8$

এখানে (iii)-নং সমীকরণযুগলের অপজাত নয় এমন মৌল সমাধানযুগল আছে।

মন্তব্য 5.5 লক্ষ্যণীয় (i)-এর সমাধান $x_1 = 4, x_2 = 0$ এবং (ii)-এর সমাধান $x_1 = 4, x_3 = 0$ দুটোই x_1-অক্ষের বিন্দু অর্থাৎ E^1 দেশের বিন্দু। একমাত্র (1, 8)ই E^2 দেশের অর্থাৎ E^3 দেশের বিন্দু। এইজন্য (i) ও (ii)-এর সমাধানদের অপজাত বলা হয়।

5.9 E^n দেশের মৌল কার্যকর সমাধানের সঙ্গে প্রান্তিক বিন্দুর সম্পর্ক

উপপাদ্য 5.9 $Ax = b$ এই সমীকরণতন্ত্রের প্রতিটি মৌল কার্যকর সমাধানই কার্যকর সমাধানের উত্তল সেটের কোনো প্রান্তিক বিন্দু হবে।

$x \in E^n$-এর প্রথম m-সংখ্যক চল হ'ল মৌল এবং বাকি (n – m) চল হল শূন্য। ধরা যাক, x_B এই মৌল কার্যকর সমাধানগুলো দ্বারা গঠিত ভেক্টর অর্থাৎ $x_B \in E^m$.

তাহলে $x = [x_B, 0]$ এবং $x_B = B^{-1} b.$ $\qquad$ (5.23)

B একটি $m \times m$ অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স।

x-কে কার্যকর সমাধানগুলো দ্বারা গঠিত উত্তল সেটের প্রান্তিক বিন্দু দেখাতে হবে। তার জন্য আমরা কোনোভাবেই কার্যকর সমাধান যুগল x^1 এবং x^2 পাব না যাতে করে x_B-কে $\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2$ হিসাবে প্রকাশ করা যাবে $(0 < \lambda < 1)$। তর্কের খাতিরে আমরা ধরি x_B-কে x_1, x_2-এর উত্তল সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করা যায়। তাহলে লেখা যায়,

$$x^1 = [u_1, v_1] \quad (5.24)$$

$$x^2 = [u_2, v_2] \quad (5.25)$$

u^1, u^2 m-উপাংশ বিশিষ্ট ভেক্টরযুগল

v^1, v^2 (n – m)-উপাংশ বিশিষ্ট ভেক্টরযুগল।

তাহলে (5.23), (5.24), (5.25) ব্যবহার করে এবং x_B যে x^1, x^2-এর উত্তল সমাবেশ, সেগুলি খেয়াল রেখে আমরা লিখতে পারি, $0 = \lambda v^1 + (1-\lambda) v^2$ (5.26)

কিন্তু $\lambda, (1-\lambda) > 0$, এবং $v^1 \geq 0, v^2 \geq 0$

অতএব, (5.26) সত্য হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি,

$$v^1 = v^2 = 0 \quad (5.27)$$

তাহলে, $Ax^1 = Bu^1 = b$ (5,28)

$$Ax^2 = Bu^2 = b \quad (5.29)$$

কিন্তু মৌল সমাধানের সাপেক্ষে b-এর প্রকাশ অনন্য,

অতএব $x_B = u^1 = u^2$ (5.30)

$$x = x^1 = x^2 \quad (5.31)$$

এটা তাহলে প্রমাণিত হয় যে আমরা x থেকে ভিন্ন দুটো কার্যকর সমাধান x^1 এবং x^2 পাব না যাতে করে x-কে x^1 ও x^2-এর উত্তল সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করা যাবে।

অর্থাৎ x কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেটের একটি প্রান্তিক বিন্দু।

তাহলে $Ax = b$-এর যে-কোনো মৌল কার্যকর সমাধান কার্যকর সমাধানসমূহের উত্তল সেটের কোণ প্রান্তিক বিন্দু হবে।

উপপাদ্য 5.10

***Ax = b*-এর কার্যকর সমাধানসমূহের উত্তল সেটের প্রতিটি প্রান্তিক বিন্দুই একটি মৌল কার্যকর সমাধান হবে।**

ধরা যাক $x^* = [x_1, x_2, \ldots\ldots x_n]$ $Ax = b$-এর কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেটের একটি প্রান্তিক বিন্দু।

আমরা ধরলাম x^*-এর প্রথম k-উপাংশগুলি শূন্য নয়।

তাহলে $\sum_{i=1}^{k} x_i a_i = b_i\ x_i > 0.$ (5.32)

$i = 1,2..............k$

a_i — i-তম স্তম্ভ ভেক্টর।

যদি x*-এর শূন্য নয় এমন সব উপাংশের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট স্তম্ভ ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন না হয়, তাহলে স্কেলার সমূহ (সব শূন্য নয়) λ_i পাওয়া যাবে, যাতে করে,

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = 0 \tag{5.33}$$

ধরা যাক, $\eta =$ অবম $\frac{x_i}{|x_i|}\ x_i \neq 0, i = h....k$ (5.34)

x_i, x ভেক্টরের i-তম উপাংশ।

(5.34) থেকে পাই, $\frac{x_i}{|\lambda_i|} \geq \eta > 0,\ x$ কার্যকর

যদি $0 < \in < \eta\ \frac{x_i}{|\lambda_i|} \geq \eta > \in,\ x_i > 0$

অর্থাৎ $x_i - \in |\lambda_i| > 0$

অর্থাৎ $x_i - \in \lambda_i > 0,\ x_i + \in \lambda_i > 0$ (5.35)

ধরা যাক, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_k, 0 ...... 0)$

আমরা লিখি, $x^1 = x^* + \in \lambda;\ x^2 = x^* - \in \lambda$ (5.36)

(5.35)-এর জন্য $x^1 \geq 0,\ x^2 \geq 0$

(5.32)-এর জন্য $A\lambda = 0$

অতএব $Ax^1 = Ax^* + \in A\lambda = b$

একইভাবে $Ax^2 = b$

এখন x^* থেকে আলাদা x^1 এবং x^2 দুটি কার্যকর সমাধান। (5.36) থেকে আমরা পাই,

$$x^* = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2 \tag{5.38}$$

(5.38), x^* যে একটি প্রান্তিক বিন্দু সেই সত্যতাকে বিরোধিতা করে। অর্থাৎ কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেটের প্রান্তিক বিন্দুর সংশ্লিষ্ট স্তম্ভ ভেক্টরসমূহ পরাধীন বা নির্ভরশীল হতে পারে না অর্থাৎ রৈখিকভাবে

স্বাধীন হবে। আবার m-এর চেয়ে বেশি সংখ্যক রৈখিকভাবে স্বাধীন স্তম্ভ A-এর থাকতে পারে না। অর্থাৎ একটি প্রান্তিক বিন্দুর m-এর চেয়ে বেশি সংখ্যক ধনাত্মক উপাংশ থাকতে পারে না। অর্থাৎ প্রতিদিন প্রান্তিক বিন্দুই একটি মৌল কার্যকর সমাধান হবে। সমাধানটি অপজাত হতেও পারে বা নাও পারে।

উপপাদ্য 5.11 Ax = b-এর মৌল কার্যকর সমাধান যদি অপজাত (degenerate) না হয় তাহলে কার্যকর সমাধানসমূহ গঠিত উত্তল সেটের প্রান্তিক বিন্দুর সঙ্গে শেষ মৌল কার্যকর সমাধানের একৈক সম্বন্ধ আছে।

ধরা যাক, x_B একটি মৌল কার্যকর সমাধান। আরও ধরা যাক x_B অপজাত নয়। অর্থাৎ x_B-এর কোনো উপাংশই শূন্য নয়। এখন $x_B = B^{-1} b$.

উপপাদ্য 5.9 অনুসারে x_B একটি প্রান্তিক বিন্দু হবে। আবার, ধরা যাক $x^* \in E^n$ কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেটের একটি প্রান্তিক বিন্দু। ধরা যাক, x^*-এর উপাংশসমূহের মধ্যে m-সংখ্যক ধনাত্মক এবং আলোচনার সর্বজনগ্রাহ্যতা ব্যাহত না করে ধরতে পারি যে প্রথম m-সংখ্যক চলের মান ধনাত্মক। যদি এই m-সংখ্যক চলের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট স্তম্ভ ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন না হয় তাহলে m-সংখ্যক স্কেলার λ_i পাব সব একসঙ্গে শূন্য নয় যাতে করে

$$\sum \lambda_i a_i = 0 \tag{5.39}$$

আবার যেহেতু x^*, $Ax = b$-এর সমাধান এবং প্রথম m-সংখ্যক চল বাদ দিয়ে বাকি চলগুলির মান শূন্য হয়।

$$\sum_{i=1}^{m} x'_i a_i = b \tag{5.40}$$

উপপাদ্য 5.9 অনুসরণ করে দেখাতে পারি যে যদি (5 . 40) সত্য হয় তাহলে x^* প্রান্তিক বিন্দু হবে না।

অর্থাৎ a_i , i = 1, 2, ... m রৈখিকভাবে স্বাধীন হবে।

ধরা যাক, x_B-এর প্রথম m উপাংশগুলির মান হল $x_1, x_2, \ldots\ldots x_m$ তাদের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট স্তম্ভ ভেক্টরগুলি হল $a_1, \ldots\ldots a_m$

তাহলে $$\sum_{i=1}^{m} x_i a_i = b \tag{5.41}$$

আবার, x^*-এর m স্তম্ভ $a_1, \ldots\ldots a_m$-এর সঙ্গে সংশ্লিষ্ট চলগুলির মান যদি $x'_i, x'_2 \ldots\ldots\ldots x_m$ হয়

তাহলে $$\sum_{i=1}^{m} x'_i a_i = b \tag{5.42}$$

(5.41) ও (5.42)-এর থেকে পাই

$$\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - x_i^1\right)a_i = 0$$

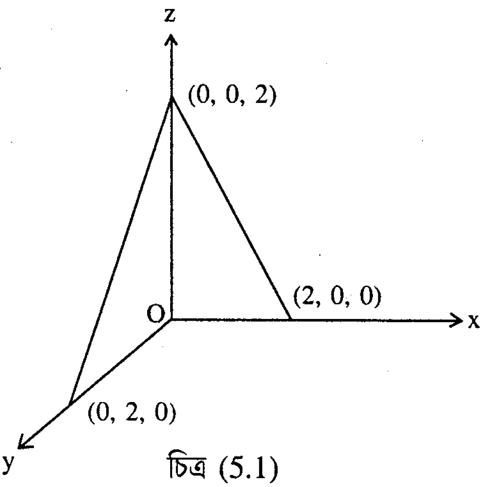
যেহেতু $a_1, \ldots a_m$ রৈখিকভাবে স্বাধীন,

ওপরের সম্পর্ক থেকে পাই, $x_i = x_i^1, i = 1, 2, \ldots m$

অতএব সমাধান অপজাত না হলে মৌল কার্যকর সমাধানের সঙ্গে ও কার্যকর সমাধানসমূহ গঠিত উত্তল সেটের কোনো না কোনো প্রান্তিক বিন্দুর সঙ্গে একৈক সম্পর্ক থাকবে।

মন্তব্য 5.6 সমাধান যখন অপজাত হয়, তখন কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেটের কোনো প্রান্তিক বিন্দুর অনুরূপ একাধিক মৌল কার্যকর সমাধান থাকতে পারে।

উদাহরণ 5.11 $\left.\begin{array}{r} x + z = 2 \\ y + z = 2 \\ x, y, z \geq 0 \end{array}\right\}$



চিত্র (5.1)

প্রান্তিক বিন্দুর অনুরূপ মৌল কার্যকর সমাধান যুগল পাওয়া যাবে নীচের আলাদা দুইটি সমীকরণ থেকে ঃ

$$2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$$

অথবা $2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

উদাহরণ 5.12 দেখাতে হবে নীচের সমীকরণযুগলের দুটো মৌল অপজাত সমাধান আছে ঃ

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \end{aligned}\right\} \qquad (5.43)$$

এখানে $r(A) = r(A_b) = 2$

আমরা ${}^3C_2$ (অর্থাৎ 3) সমীকরণতন্ত্র আছে

(i) $3x_1 + 4x_2 = 12$

$5x_1 + 4x_2 = 20$ অর্থাৎ $x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ (5.44)

(ii) $3x_1 + x_3 = 12$

$5x_1 + 2x_3 = 20$ অর্থাৎ $x_t = 4,\ x_3 = 0,\ x_2 = 0$ (5.45)

(iii) $4x_2 + x_3 = 12$

$4x_2 + 2x_3 = 20$ অর্থাৎ $x_2 = 1,\ x_3 = 8,\ x_2 = 0$ (5.46)

অপজাত সমাধানদ্বয় হল (iv) $x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$, x_1-অক্ষের ওপর একটি বিন্দু

(v) $x_1 = 4,\ x_3 = 0,\ x_2 = 0$, x_1-অক্ষের ওপর একটি বিন্দু।

5.10 সারাংশ

এই এককে দেখানো হয়েছে যে প্রমাণ আকারের রৈ. প্রো. স.-র কার্যকর সমাধানসমূহ একটি উত্তল সেট গঠন করে। আলোচনার মূল বিষয়বস্তু হল বাধাগোষ্ঠীর প্রান্তিক বিন্দুর সঙ্গে মৌল কার্যকর সমাধানের একটি সম্পর্ক আছে। সেই সম্পর্ক একৈক হবে যদি সমাধান অপজাত না হয়। আলোচনার অবতারণা করার জন্য ব্যাপ্তি সেট, ভিত্তি ও মৌল সমাধানের ধারণা আগে দেওয়া হয়েছে।

5.11 অনুশীলনী

5.1 দেখান যে (1, 1, 0), (1, – 1, 0), (0, 1, 1) এবং (0, 1, – 1) একটি ব্যাপ্তি সেট গঠন করে।

5.2 দেখান যে E^3 দেশে (2, 1, 4), (1, – 1, 2), (3, 1, – 2) একটি ভিত্তি গঠন করে।

5.3 E^3 দেশে একটি ভিত্তি নির্ণয় করুন যার মধ্যে $a_1 = (1, 2, 3)$ এবং $a_2 = (2, 5, 1)$ এই ভেক্টরদ্বয় অন্তর্ভুক্ত।

5.4 নিম্নলিখিত অসমীকরণযুগল ও সমীকরণকে সমীকরণতন্ত্রে পরিবর্তিত করুন ঃ

$$2x_1 + 3x_2 \le 0$$

$x_1 + 7x_2 \geq 4$

$x_1 + x_2 = 3$

5.5. নিম্নলিখিত সমীকরণযুগলের মৌল কার্যকর সমাধান র্নিয় করুন ঃ

$$2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 3$$
$$6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2$$
$$x_1, x_0, x_3, x_4 \geq 0$$

দেখান যে মৌল সমাধানগুলি অপজাত।

5.6 নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রাংমিং সমস্যাদের মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করে চরম মান বার করুন ঃ

(i) চরম $Z = x_2$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$2x_1 + 3x_2 \leq 13$

$x_1, x_2 \geq 0$

(ii) চরম $Z = 7x_1 + 11x_2$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + x_2 \leq 11$

$x_1 + 2x_2 \leq 7$

$x_1 - x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

5.7 নিম্নলিখিত রৈ. প্রো. স.-র কার্যকর সমাধানসমূহের উত্তল সেটের প্রান্তিক বিন্দুগুলি নির্ণয় করে সমস্যাটির বিষয়াত্মক অপেক্ষকের চরম মান বার করুন ঃ

$Z = 4x_1 + 7x_2$

শর্তসাপেক্ষে $2x_1 + 5x_2 \leq 40,$

$x_1 + x_2 \leq 11,$

$x_1, x_2 \geq 0$

5.8 প্রদত্ত সেট S-এর প্রান্তিক বিন্দুসমুহ নির্ণয় করুন ঃ

$$S = \{(x_1, x_2) | x_1 + 2x_2 \geq 2_1 - x_1 + x_2 = 4, x_1 x \geq 0\}$$

5.12 উত্তরমালা

5.3 ভিত্তি ঃ (a_1, a_2, e_3)

5.4 $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$

$x_1 + 7x_2 - x_4 = 0$

$x_1 + x_2 = 0$

অথবা $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$

5.5 মৌল কার্যকর সমাধান $\left(0, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$

5.6 (i) চরম $Z = 6$; $x_1 = 0$, $x_2 = 6$; (4, 0), (2, 3),

(ii) চরম $Z = \frac{77}{2}, x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{2}, \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right), (3, 2), \left(0, \frac{7}{2}\right)$

5.7 প্রান্তিক বিন্দুগুলি হল ঃ (0, 0), (11, 0), (0, 8), (5, 6)

চরম মান = 62

5.8 প্রান্তিক বিন্দুগুলি হল ঃ (2, 0), (0, 1), (0, 4).

তথ্যসূত্র

1. G. HADLEY [1974] : LINEAR PROGRAMMING, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMP.
2. S. I. GASS [1958] : LINEAR PROGRAMMING, N. Y., MC-GRAW HILL
3. H. A. TAHA, [1982] : OPERATIONS RESEARCH, MACMILLAN PUBLISHING CO. N.Y.
4. J. C. CHAKARVORTY & P. R. GHOSH [2001] : LINEAR PROGRAMMING & GAME THEORY, MOULIK LIBRARY
5. J. K. SHARMA [2003] : OPERATIONS RESEARCH, MACHILLAN INDIA LTD.
6. T. MOULIK [*] : LINEAR PROGRAMMING U. N. DHUR & SONS PRIVATE LTD.
7. P. M. KARAK [1988] : LINEAR PROGRAMMING & THEORY OF GAMES, PUB. R. KARAK, 1
8. N. S. KAMBO [1984] : MATHEMATICAL PROGRAMMING, TECHNIQUES, AFFILIATED EAST-NEST. PRESS PVT. LTD. N. DELHI.
9. M. S. BAZARAH ET AL [1979]: NONLINEAR PROGRAMMING, JOHN WILEY & SONS N. Y.

* NOT KNOWN

একক 6 ❑ রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সমাধান নির্ণয়ের সংশ্লিষ্ট উপপাদ্যসমূহ

গঠন

6.1 উদ্দেশ্য
6.2 প্রস্তাবনা
6.3 যখন কার্যকর সমাধানসমূহের উত্তল সেট বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ
6.4 সেটের বিচ্ছিন্নতা ও অবলম্বন (Separation and support of sets)
6.4.1 দুটি সেটের বিচ্ছিন্নতা
6.4.2 অবলম্বনকারী পরাসমতল
6.5 চরম সমাধানের সঙ্গে মৌল কার্যকর সমাধানের সম্পর্ক
6.6 কার্যকর সমাধান থেকে মৌল কার্যকর সমাধান গঠন
6.7 সারাংশ
6.8 অনুশীলনী
6.9 উত্তরমালা

6.1 উদ্দেশ্য (Objectives)

কোনো রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাকে বিশ্লেষণ করতে হলে, আমাদের দুটি বিকল্পের সম্মুখীন হতে হয়। প্রথমতঃ রৈ. প্রো. স.-এর কোনো সমাধান আছে কিনা। আর সমাধান থাকলে তাকে নির্ণয় করা। এই একক রচনার মূল উদ্দেশ্য হ'ল জ্যামিতিক ও উত্তল সেটের ধর্মাবলির সাহায্যে

- রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার কখন চরম (বা অবম) মান নির্ণয় করা যায়।
- প্রমাণ করা যায় যে কোনো রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার চরম সমাধান থাকলে তাহলে সেটা কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেটের প্রান্তিক বিন্দুতেই অবস্থান করবে।

6.2 প্রস্তাবনা

এই এককে মূলতঃ জ্যামিতিক পদ্ধতি অবলম্বন করে রৈ. প্রো. স.-র কখন চরম (অবম) মান প্রাপ্ত হবে সেই বিষয়ে আলোকপাত করা হবে। এটা খেয়াল রাখতে হবে যে গাণিতিক দিক থেকে বললে কোনো রৈ. প্রো. স.-র চরম (অবম) সমাধানের অস্তিত্ব সবসময় নিশ্চিত নয়। সুতরাং আগে দেখতে হবে প্রদত্ত

সমস্যাটির চরম (অবম) মান আছে কিনা এবং সেটা থাকলে সেটাকে কীভাবে নির্ণয় করা যাবে। উত্তল সেটের ধর্মাবলি এই ধরনের বিশ্লেষণে বিশেষ কাজে লাগে।

দুটো সেটকে কখন বিচ্ছিন্ন বলা হবে, কখন E^n দেশে এক পরাসমতলকে একটি সেটের অবলম্বন পরাসমতল বলা হবে সেটা আমাদের আলোচনায় আসবে। উদ্দেশ্য হচ্ছে কখন রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার চরম মানের অস্তিত্ব জানা যাবে।

বীজগণিতের সাহায্যে কী করে কোনো রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সমাধান আছে কিনা বা থাকলে কী করে নির্ণয় করা যায় সেগুলো পরের এককগুলিতে আলোচিত হবে।

6.3 যখন কার্যকর সমাধান সমূহের উত্তল সেট বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ হয়

উপপাদ্য 6.1 ধরা যাক E^n দেশে রৈ. প্রো. স.-র কার্যকর সমাধানসমূহ গঠিত উত্তল সেট শূন্য নয় এবং একইসঙ্গে বদ্ধ (closed) ও সীমাবদ্ধ (bounded). তাহলে ওই সমস্যার চরম বা অবম মান ওই উত্তল সেটের কোনো প্রান্তিক বিন্দুতে গৃহীত হবে।

প্রদত্ত রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটি হল ঃ

চরম (অবম) $Z = cx$

শর্তসাপেক্ষে $Ax = b \quad x \geq 0$

$c \in E^n$ একটি সারি ভেক্টর। $x \in E^n$ একটি স্তম্ভ ভেক্টর।

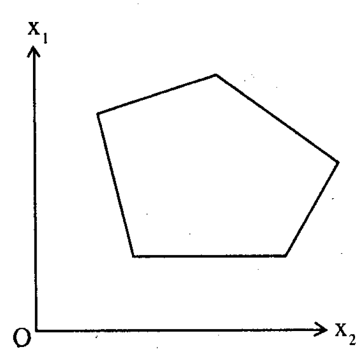
$A \longrightarrow$ একটি $m \times n$ ম্যাট্রিক্স ও $b \in E^n$ একটি স্তম্ভ ভেক্টর।

ধরা যাক, বাধাগোষ্ঠী দ্বারা গঠিত সেট শূন্য নয়।

যেহেতু বহুতলকটি শূন্য নয়, বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অতএব প্রান্তিক বিন্দুর সেটটিও শূন্য নয় এবং সেটটির সসীম সংখ্যক প্রান্তিক বিন্দু আছে। ধরা যাক, সেগুলো হল $x^1, x^2, \ldots\ldots x^k$। তাহলে কার্যকর দেশের যে-কোনো বিন্দু x-কে আমরা এইভাবে লিখতে পারি

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \tag{6.1}$$

$$\sum_{i=}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \left(i = 1, 2, \ldots\ldots k\right)$$



চিত্র 6.1

এখন $cx = c\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i\right)$

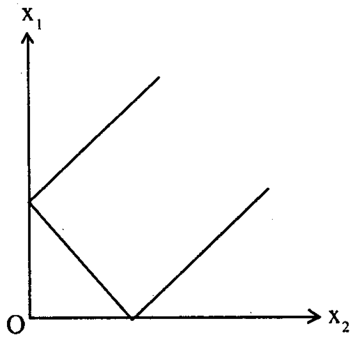
$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c x^i$$

যেহেতু সসীম রাশি যোগ করা হয়েছে, অতএব একটি x^p থাকবে যাতে করে চরম $c\,x$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, c\, x^i \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, c\, x^p$$

$$= c\, x^p$$

এখন cx একটি রৈখিক অপেক্ষক অতএব সন্তত (দ্বিমাত্রিক চিত্র 6.1) এবং এই অপেক্ষকটি E^n দেশে একটি বন্ধ ও সীমাবদ্ধ সেটের ওপর সংজ্ঞাত। অতএব অপেক্ষকটি তার চরম মান লাভ করে। যেহেতু $x^p \geq 0$ এবং একটি প্রান্তিক বিন্দু আমরা পাই, চরম $cx = cx^p$.



চিত্র 6.2

মন্তব্য 6.1. : (i) বহুতলকটি যদি সীমাবদ্ধ না হয় তখন ঐ উপপাদ্যটি প্রয়োগ করা যায় না। দ্রষ্টব্য চিত্র 6.2। এখানে প্রান্তিক বিন্দুর সংখ্যা সীমিত হলেও x-কে (6.1)-এর আকারে প্রকাশ করা যায় না।

(ii) যদি কার্যকরদেশ সীমাবদ্ধ না হয় তখন আমাদের বিচ্ছিন্ন (separated set) সেটের ধারণা আনতে হয়।

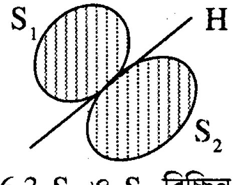
6.4 সেটের বিচ্ছিন্নতা ও অবলম্বন (Separation and support of Sets)

কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেট যদি বন্ধ ও সীমাবদ্ধ হয় তাহলে রৈ. প্রো. স.-র সমাধান থাকে এবং উত্তল সেটের কোনেপ্রান্তিক বিন্দুতেই সমাধান অবস্থিত। কিন্তু উত্তলসেট যদি সীমাবদ্ধ না হয় তখন সমাধানের অস্তিত্ব যাচাই করার জন্য আমাদের কয়েকটি ধারণার অবতারণা করার দরকার। এগুলি নীচে লিপিবদ্ধ হল।

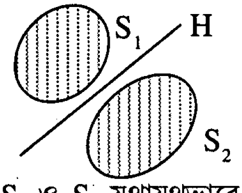
6.4.1. দুটি সেটের বিচ্ছিন্নতা (Separation of two sets) :

ধরা যাক E^n-দেশে শূণ্য নয় এমন দুটি সেট আছে S_1 এবং S_2। একটি পরাসমতলকে $H = \{x : p^T . x = \alpha\}$, দুটি সেট S_1 এবং S_2-কে বিচ্ছিন্ন করে বলা হয় যদি $p^Tx \geq \alpha$ হয় যেকোনো $x \in S_1$-এর জন্য এবং $p^Tx \leq \alpha$ হয় যেকোনো $x \in S_2$-এর জন্য।

পরাসমতল H, S_1 এবং S_2 সেটদ্বয়কে **যথাযথভাবে বিচ্ছিন্ন (strictly separate)** করে বলা হয় যদি যেকোনো $x \in S_1$, $p^Tx > \alpha$ হয় এবং যেকোনো $x \in S_2$, $p^Tx < \alpha$ হয়। নীচের চিত্রগুলি দেখুন।



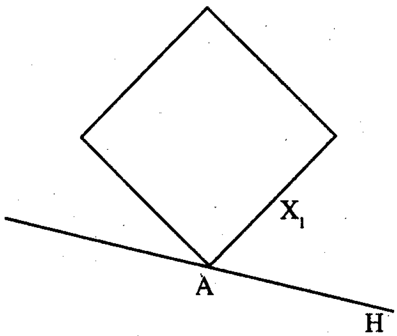
চিত্র 6.3 S_1 ও S_2 বিচ্ছিন্ন



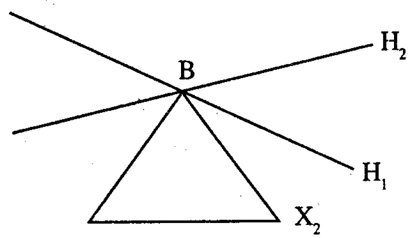
চিত্র 6.3 S_1 ও S_2 যথাযথভাবে বিচ্ছিন্ন

6.4.2 অবলম্বনকারী পরাসমতল

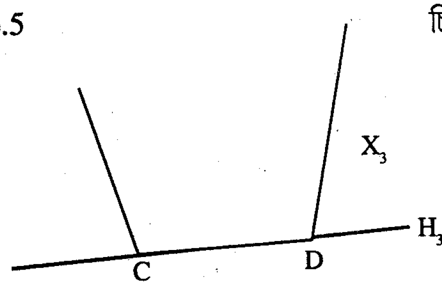
6.4.2. অবলম্বনকারী পরাসমতল ঃ প্রদত্ত w, উত্তল সেট $X \subseteq E_n$-এর একটি পরিধিস্থ বিন্দু। তাহলে $Z = cx$-কে w বিন্দুতে একটি অবলম্বনকারী পরাসমতল বলা হবে যদি $cw = Z$ হয় এবং যদি X-এর সমস্ত বিন্দুই ওই পরাসমতল দ্বারা গঠিত একটি বদ্ধ অর্ধ-দেশে থাকে অর্থাৎ X-এর যেকোনো বিন্দু u-র জন্যই $cu \geq Z$. অথবা $cu \leq Z$. নীচের চিত্রগুলিতে অবলম্বনকারী পরাসমতল অঙ্কিত হয়েছে।



চিত্র 6.5



চিত্র 6.6



চিত্র 6.7

চিত্র 6.5-এ H পরাসমতল A বিন্দুতে X_1-কে অবলম্বন করে।

চিত্র 6.6-এ H_1, H_2 পরাসমতলদ্বয় B বিন্দুতে X_2-কে অবলম্বন করে।

চিত্র 6.7-এ H_3, CD বাহু বরাবর X_3-কে অবলম্বন করে।

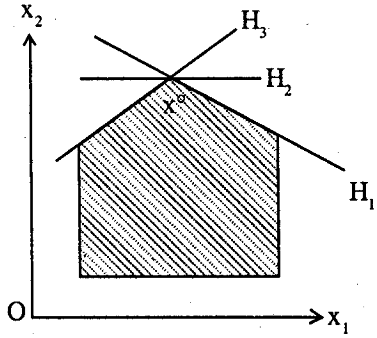
উপপাদ্য 6.2. যদি কোনো রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার চরম সমাধান x° থাকে, তাহলে কার্যকর সমাধানসমূহ গঠিত উত্তল সেটের একটি অবলম্বনকারী পরাসমতল x° বিন্দুগামী।

ধরা যাক $cx = Z$ একটি পরাসমতল যেটি চরম সমাধান x° বিন্দুগামী। ধরা যাক, x° কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেটের একটি অন্তঃস্থ বিন্দু। x^1, x°-এর $\in$ সামীপ্যে অবস্থিত একটি বিন্দু। আমরা নিলাম

$x^1 = x^\circ + \frac{\in}{2}\left(\frac{c^T}{||c||}\right)$. তাহলে x^1, কার্যকর সমাধান গঠিত ঐ উত্তল সেটের একটি বিন্দু।

$$cx^1 = cx^\circ + \frac{\in c.c^T}{2\,||c\,||} = Z + \frac{c}{2}||c|| > Z.$$ কিন্তু ওপরের অসমীকরণটি x° কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেটের পরিধিস্থ বিন্দু। তাহলে $cx^\circ = Z$। যেহেতু $x^\circ_.$ $cx = Z$ এই পরাসমতলে থাকে। আবার x° কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেটের একটি পরিধিস্থ বিন্দু। অতএব $cu \le Z$, u, ওই উত্তল সেটের যেকোনো একটি বিন্দু।

তাহলে $cx = Z$, যে পরাসমতলে x° অবস্থিত, সেই কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেটের একটি অবলম্বনকারী পয়াসমতল হবে। নীচের চিত্রটি দেখুন।



চিত্র 6.8.

6.5 চরম সমাধানের সঙ্গে মৌল কার্যকর সমাধানের সম্পর্ক

আমরা যে রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা পর্যালোচনা করব তা নিম্নরূপ ঃ

চরম $Z = cx$ (6.1)

শর্তসাপেক্ষে $Ax = b$ (6.2)

$x \ge 0$ (6.3)

$c, x, b \in E^n \rightarrow$ স্তম্ভ ভেক্টরসমূহ।

A-একটি $m \times n$ ম্যাট্রিক্স।

অর্থাৎ $A = [a_1, ..., a_n]$, $a_i \in E^n$, i-তম স্তম্ভভেক্টর।

উপপাদ্য 6.3. যদি রৈ. প্রো. স. (6.1)—(6.3)-র একটি চরম সমাধান থাকে, তাহলে সমাধান অপজ্ঞাত না হলে, অন্তত একটি মৌল কার্যকর সমাধান চরম সমাধান হবে।

ধরা যাক $x^\circ = \left[x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0\right]$ প্রদত্ত রৈ. প্রো. স.-র একটি চরম সমাধান এবং $Z_{\text{চরম}}$ বিষয়াত্মক অপেক্ষকের চরম মান। x°-র উপাংশগুলির মধ্যে কয়েকটি শূণ্য হতে পারে। প্রাপ্ত সমস্যাটির মূল চরিত্র ব্যাহত না করে আমরা ধরতে পারি যে প্রথম kটি উপাংশ শূণ্য নয়। তাহলে,

$$x^0 = [x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0 \ldots 0]$$

যেহেতু $x°$, (6.2)-এর সমাধান $Ax° = b$ (6.4)

অতএব $\sum a_j x_j = b$ (6.5)

এবং $Z_m = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j$ (6.6)

এখন দুটো সম্ভাবনা আছে।

(i) $a_1, a_2, \ldots a_k$ রৈখিকভাবে স্বাধীন। তাহলে $x°$ একটি মৌল কার্যকর সমাধান। অতএব উপপাদ্য প্রমাণিত।

(ii) $a_1, a_2, \ldots a_n$ রৈখিকভাবে **স্বাধীন নয়**। আমরা আর একটি চরম সমাধান নির্ণয় করি যেখানে শূণ্য নয় এমন চলের সংখ্যা আগেরটার চেয়ে কম।

$a_1, a_2, \ldots, a_k$ রৈখিকভাবে পরাধীন হলে, আমরা স্কেলারসমূহ λ_j (j = 1, 2 .... k) পাব (যার মধ্যে অন্তত 0 একটি $\lambda_j \neq 0$) যাতে করে $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j = 0,$

যদি তা না হয়, আমরা (6.7)-কে (–1) দিয়ে গুণ করে, একটা λ'_j পাব, যেটা ধনাত্মক। (6.7)

ধঝরা যাক v = চরম $\left(\frac{\lambda_j}{x_j}\right)$. (6.8)

যেহেতু, $x_j > 0$ এবং $\lambda_j > 0$, অতএব $v > 0$.

(6.7)-কে $\frac{1}{v}$ দিয়ে গুণ করে (6.5) থেকে বিয়োগ করে পাই,

$$\sum_{j=1}^{k} \left(x_j - \frac{\lambda_j}{v}\right) a_j = b \tag{6.9}$$

$x_j - \frac{\lambda_j}{v}$-কে x'_j দিয়ে চিহ্নিত করলাম। তাহলে (6.9) থেকে পাই,

$$\sum_{j=1}^{k} x'_j a_j = b \tag{6.10}$$

অর্থাৎ $Ax' = b$ (6.11)

$x' = [x'_1, x'_2, \ldots x'_k, 0 \ldots 0]$, $Ax = b$ এই সমীকরণ তন্ত্রের সমাধান।

তাহলে $x' = \left[x_1 - \frac{\lambda_1}{v}, x_2 - \frac{\lambda_2}{v}, \ldots, x_k - \frac{\lambda_k}{v}, 0, \ldots 0\right]$ (6.12)

যেহেতু v = চরম $\left(\frac{\lambda_i}{x_j}\right) . v \geq \frac{\lambda_j}{x_j}$ অথবা $x_j \geq \frac{\lambda_j}{v}$.

অর্থাৎ $x_j - \frac{\lambda_j}{v} \geq 0$ অর্থাৎ x' একটি কার্যকর সমাধান। (6.8) থেকে বলতে পারি যে, j-এর কোনো না কোনো মানের জন্য $v = \frac{\lambda_i}{x_j}$, অর্থাৎ $x_j^i = x_j - \frac{x_j}{v} = 0$ সুতরাং j-এর যে যে মানের জন্য $v = \frac{\lambda_j}{x_j}$, সেই সেই ক্ষেত্রে $x_j' = 0$.

তাহলে x'-এর প্রথম k সংখ্যক মানের সন্তত একটি চলের মান শূণ্য হবে। সুতরাং x'-এর সর্বাধিক প্রথম $(k-1)$ চাল শূণ্য হবে না। প্রদত্ত চরম কার্যকর সমাধান থেকে আমরা এমন একটা কার্যকর সমাধান পাই যার মধ্যে x-এর থেকে কম সংখ্যক শূণ্য নয় এমন চল আছে।

আমরা দেখাব যে x' ও একটি চরম সমাধান হবে। যদি x'-এর জন্য বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান Z' হয়, তাহলে

$$Z' = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j' = \sum_{j=1}^{k} c_j\left(x_j - \frac{\lambda_j}{v}\right) = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j - \frac{1}{v}\sum_{j=1}^{k} c_j \lambda_j$$

$$= Z_{\text{চরম}} - \frac{1}{v}\sum_{j=1}^{k} c_j \lambda_j \qquad (6.13)$$

Z', $Z_{\text{চরম}}$ -এর সঙ্গে সমান হয় যদি $\sum_{j=1}^{k} c_j \lambda_j = 0$ হয়।

যদি $\sum_{j=1}^{k} c_j \lambda_j \neq 0$ তাহলে একটা স্কেলার $\theta \neq 0$ পাওয়া সব সময় যায় যাতে করে

$$\theta\left(\sum_{j=1}^{k} c_j \lambda_j\right) > 0 \text{ হয়।} \qquad (6.14)$$

(6.13) থেকে পাই, $Z' + \theta \sum_{j=1}^{k} c_j \lambda_j > Z_{\text{চরম}}$ (6.15)

কিন্তু ওপরের অসমীকরণটি অসম্ভব। আমরা এমন কোনো কার্যকর সমাধান পাব না যার জন্য Z-এর মান $Z_{\text{চরম}}$ চেয়ে বড়ো হয়। অর্থাৎ আমাদের স্বীকার যে $\sum_{j=1}^{k} c_j \lambda_j \neq 0$, সেটা ভ্রান্ত। অর্থাৎ $\sum_{j=1}^{k} c_j \lambda_j = 0$.

সুতরাং $Z' = Z_{\text{চরম}}$।

তাহলে চরম সমাধান x°-এর যদি (a) k সংখ্যক শূণ্য নয় এমন চল থাকে এবং যদি (b) ঐ k সংখ্যক চলের সংশ্লিষ্ট স্তম্ভ ভেক্টর সমূহ যদি স্বাধীন না হয় তাহলে

আমরা এমন একটি কার্যকর সমাধান x' বার করতে পারি (c) যার প্রথম সর্বোচ্চ $(k-1)$ সংখ্যক চলের মান শূণ্য নয় (b) x'-এ Z'-এর মান $Z_{চরম}$।

এখন তর্কের খাতিরে ধরা যাক, x'-এর শূণ্য নয় এমন চলসমূহের সংশ্লিষ্ট ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন নয়।

পূর্বের পদ্ধতি অনুসরণ করে আমরা এমন একটি কার্যকর চরম সমাধান x'' নির্ণয় করতে পারি যার সর্বোচ্চ প্রথম $(k-2)$-চলের মান শূণ্য নয়।

যেহেতু একটি চরম সমাধান অপজাত নয়, অর্থাৎ রৈখিকভাবে স্বাধীন এমন m সংখ্যক ভেক্টরসমূহের সংশ্লিষ্ট চলসমূহ শূণ্য নয়। আমরা শেষপর্যন্ত একটি মৌল কার্যকর সমাধান পাব।

উপপাদ্য 6.4. প্রদত্ত (i) m সংখ্যক যুগপৎ রৈখিক সমীকরণতন্ত্র $Ax = b$ এবং চলের সংখ্যা n.

(ii) $r(A) = m$, r মাত্রা (rank) বোঝায়।

যদি ওই সমীকরণতন্ত্রের একটি কার্যকর সমাধান $x \geq 0$ থাকে, তাহলে একটি মৌল কার্যকর সমাধানও থাকবে।

ধরা যাক x' ওই সমীকরণতন্ত্রের একটি কার্যকর সমাধান। আরও ধরা যাক x'-এর প্রথম k সংখ্যক উপাংশ ধনাত্মক অর্থাৎ, $x' = [x'_1, x'_2, \ldots, x'_k, 0 \ldots 0]$ যেহেতু x', $Ax = b$, এই সমীকরণতন্ত্রের সমাধান

$$\sum x'_j a_j = b \tag{6.15}$$

প্রদত্ত $A = [a_1, a_2, \ldots a_n]$

অর্থাৎ $x_j > 0$ যখন $j = 1, 2, \ldots.. k$

এবং $x_j = 0$ যখন $j = (k+1) \ldots. n$

এখন তিন ধরণের সম্ভাবনা হতে পারে ঃ

(i) a_j $(j = 1, 2, \ldots. k)$ ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন এবং $k = m$

(ii) a_j $(j = 1, 2, \ldots. k)$ ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন এবং $k < m$

(iii) a_j $(j = 1, 2 \ldots. k)$ ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে নির্ভরশীল বা পরাধীন।

(i) যদি $k = m$, তাহলে x' অপজাত নয় এমন একটি মৌল কার্যকর সমাধান।

(ii) যদি $k < m$ হয়, তাহলে ঐ ধনাত্মক চলের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট স্তম্ভ ভেক্টর গোষ্ঠীর সঙ্গে রৈখিকভাবে স্বাধীন আরও $(m-k)$ স্তম্ভ ভেক্টর নিতে হবে যাতে আমরা প্রদত্ত সমাধানের সংশ্লিষ্ট m সংখ্যক রৈখিকভাবে স্বাধীন স্তম্ভ ভেক্টর পাই। অতিরিক্ত $(m-k)$ স্তম্ভ ভেক্টরসমূহের সংশ্লিষ্ট চলগুলির মান শূণ্য নেওয়া হল। সুতরাং প্রদত্ত সমাধানটি যদিও একটি মৌল কার্যকর সমাধান হয়। ইহা অপজাত।

(iii) a_j $(j = 1.2 \ldots. k)$ ভেক্টরগুলি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল। তাহলে স্কেলারসমূহ λ_j পাওয়া যাবে (যার মধ্যে সবগুলো শূণ্য নয়)। যাতে করে $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j = 0$ (6.16)

ধরা যাক $\lambda r \neq 0$, তাহলে (6.16) থেকে পাই,

$$a_r = -\frac{1}{\lambda_r}\sum_{\substack{j\neq r\\ j\neq r}}^{k}\lambda_j a_j \tag{6.17}$$

(6.15)-কে লেখা যায় $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{k} x_j a_j - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{k} x_j \frac{\lambda_j}{\lambda_r} a_j = b$ (6.18)

অথবা, $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{k}\left(x_j - x_r\frac{\lambda_j}{\lambda_r}\right)a_j = b$ (6.19)

তাহলে, $x_j'' = \left[x_1 - x_r\frac{\lambda_1}{\lambda_r}, x_2 - x_r\frac{\lambda_2}{\lambda_r}, \ldots . x_{r-1} - x_r\frac{\lambda - r}{\lambda - r},\right.$

$$\left.0, x_{r+1} - x_r\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_r}, \ldots x_k - x_r\frac{\lambda_k}{\lambda_r}, 0 \ldots 0\right].$$

$Ax = b$-এর একটি সমাধান।

x''-এর সর্বোচ্চ $(k - 1)$ চল শূণ্য নয়।

আমাদের দেখাতে হবে $x'' \geq 0$

x''-কে কার্যকর সমাধান করার জন্য আমাদের এমন একটা a_r-কে নির্বাচন করতে হবে যাতে করে

$$x_j - x_r\frac{\lambda_j}{\lambda_r} \geq 0 \tag{6.20}$$

$(j = 1, 2, \ldots . k, j \neq r)$.

যদি $\lambda_j = 0$ তাহলে (6.20) আপনা থেকেই সিদ্ধ হয়।

যদি $\lambda_j \neq 0$, λ_j দিয়ে ভাগ করে আমরা (6.20) থেকে পাই,

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{x_j}{\lambda_j} - \frac{x_r}{\lambda_r} \geq 0 & \text{যদি } \lambda_j > 0\\ \frac{x_j}{\lambda_j} - \frac{x_r}{\lambda_r} \geq 0 & \text{যদি } \lambda_j < 0\end{array}\right\} \tag{6.21}$$

যদি $\lambda_j > 0$, আমরা a_r-কে নির্বাচন করি যখন $\frac{x_r}{\lambda_r} =$ অবম $\left\{\frac{x_j}{\lambda_j}\right\}$

যদি $\lambda_j < 0$, a_r-কে নির্বাচন করা হয় যাতে $\frac{x_r}{\lambda_r} =$ চরম $\left\{\frac{x_j}{\lambda_j}\right\}$.

উদ্দেশ্য $\frac{x_i}{x_j} - \frac{x_r}{\lambda_r}$-কে সবসময় ধনাত্মক রাখা।

তাহলে কার্যকর সমাধান x' থেকে আর একটি কার্যকর সমাধান x'' গড়া হল যার মধ্যে সর্বোচ্চ $(k - 1)$ ধনাত্মক চল যাকে।

যদি এই ধনাত্মক চলগুলির সংশ্লিষ্ট ভেক্টরগোষ্ঠী রৈখিকভাবে স্বাধীন হয় তাহলে x'' একটি মৌল কার্যকর সমাধান হয়। অপরপক্ষে যদি ধনাত্মক চলগুলির সংশ্লিষ্ট ভেক্টরগোষ্ঠী রৈখিকভাবে নির্ভরশীল হয়, তাহলে আগের প্রক্রিয়ার পুনরাবৃত্তি করি। তাহলে আর একটি কার্যকর সমাধান x''' পাওয়া যাবে যার মধ্যে সর্বোচ্চ ধনাত্মক চলের সংখ্যা হল $(k - 2)$। এখন এই চলগুলির সংশ্লিষ্ট স্তম্ভভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন হলে উপপাদ্য প্রমাণিত হয়। যদি ঐ ভেক্টরসমূহ রৈখিকভাবে নির্ভরশীল হয়, তাহলে আগের প্রক্রিয়ার পুনরাবৃত্তি করা হল। তাতে এমন একটি কার্যকর সমাধান পাওয়া গেল যার সর্বোচ্চ ধনাত্মক চলের সংখ্যা $(k - 3)$।

যেহেতু A-এর মাত্রা হল m। সসীম সংখ্যক ধাপের পর আমরা এমন একটি কার্যকর সমাধান পাব যার সংশ্লিষ্ট রৈখিকভাবে স্বাধীন স্তম্ভভেক্টরের সংখ্যা m হবে।

উদাহরণ 6.1. আলোচনার বিষয় হল নীচের সমীকরণযুগল

$$x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = b$$

$$a_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \; a_2 = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \; a_3 = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$$

এবং $b = \begin{bmatrix}11\\14\end{bmatrix}$.

এখন $a_1 + 2a_2 = a_3$

অর্থাৎ a_1, a_2 ও a_3 রৈখিকভাবে নির্ভরশীল।

তখন $2a_1 + 3a_2 + a_3 = b$

অতএব $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ একটি কার্যকর সমাধান।

$A = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$-এর ত্রা হল 2, অর্থাৎ একটি মৌল কার্যকর সমাধান আছে যার সর্বোচ্চ দুটি চলের মান শূণ্য নয়।

যেহেতু $a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$

আমরা নিলাম, $\frac{x_r}{\lambda_r} = \left\{\frac{x_j}{\lambda_j}, \lambda_j > 0\right\}$

$$= \text{অবম} \left\{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}\right\}$$

$$= \frac{3}{2}$$

তাহলে a_1-কে অপনয়ন করতে পারি যেহেতু $\frac{x_2}{\lambda_2} = \left\{\frac{x_j}{\lambda_j}, \lambda_j > 0\right\}$ আমরা লিখতে পারি

$$\hat{x}_1 = x_1 - \frac{x_2}{\lambda_2}\lambda_1 = 2 - \frac{3}{2}.1 = \frac{1}{2}$$

$$\hat{x}_2 = x_2 - \frac{x_2}{\lambda_2}\lambda_2 = 3 - \frac{3}{2}.2 = 0$$

$$\hat{x}_2 = x_3 - \frac{x_2}{\lambda_2}\lambda_3 = 1 - \frac{3}{2}.(-1) = \frac{5}{2}$$

একমাত্র দুটো চলই শূণ্য নয় আর তার সংশ্লিষ্ট ভেক্টরদ্বয় a_1 ও a_3 রৈখিকভাবে স্বাধীন।

$$\hat{x}_1 a_1 + \hat{x}_3 a_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \end{pmatrix}$$

মন্তব্য 6.2. যদি a_2 ভেক্টরের বদলে a_1-কে অপনয়ন করা হয়, তাহলে $x_1 = 0$.

$\frac{x_1}{\lambda_1} = 2$, শূণ্য নয় এমন চলগুলি হ'ল $\hat{x}_2$ এবং $\hat{x}_3$.

$x_2 = 3 - 2(2) = -1, x_3 = 1 - 2(-1) = 3$

তাহলে (0, –1, 3) এই সমাধানটি মৌল কিন্তু কার্যকর নয়।

6.7 সারাংশ

এই এককে যে মূল বিষয়গুলি আলোচিত হয়েছে সেগুলি এইরূপ ঃ

রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার কার্যকর সমাদান গঠিত উত্তল সেট যদি বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ হয় তাহলে চরম সমাধান প্রদত্ত উত্তল সেটের কোনো প্রান্তিক বিন্দুতেই থাকবে।

যদি প্রদত্ত রৈ. প্রো. স.-র কার্যকর সমাধান সেট বদ্ধ কিন্তু সীমাবদ্ধ না হয় তাহলে চরম মানের অস্তিত্বের কথা বলা যায় না। যদি চরম সমাধান x° থাকে, তাহলে কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেটের একটি অবলম্বনকারী পরাসমতল x° বিন্দুগামী।

যদি রৈ. প্রো. স. র একটি চরম সমাধান যাকে, তাহলে সমাধান অপজাত না হলে, অন্তত একটি মৌল কার্যকর সমাধান চরম সমাধান হবে।

6.8 অনুশীলনী

1. প্রদত্ত $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1$

$$2x_1 = x_2 + 4x_3 = 11$$
$$3x_1 + x_2 + 5x_3 = 14,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

এই সমীকরণযুগলের একটি কার্যকর সমাধান। ঐ সমাধান থেকে একটি মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন।

2. দেখান যে, $x_2 = 5, x_2 = 0, x_3 = -1$ নীচের সমীকরণযুগলের

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5$$

এর একটি মৌল সমাধান। যদি ওই সমীকরণগযুগলের অন্য মৌল সমাধান আরও থাকে, তাহলে তা নির্ণয় করুন।

3. নীচের সমীকরণযুগলের সমস্ত মৌল সমাধান নির্ণয় করলাম ঃ

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

4. যদি $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$ নীচের সমীকরণযুগলের একটি কার্যকর সমাধান হয়,

$$4x_1 + 2x - 3x_3 = 1$$
$$-6x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 1$$

তাহলে ঐ কার্যকর সমাধান থেকে একটি মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন।

5. দেখান যে, $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 0$ নীচের সমীকরণ যুগলের $3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 21,$
$6x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 42$
একটি কার্যকর সমাধান হলেও মৌল কার্যকর সমাধান নয়। একটি বা একাধিক মৌল কার্যকর সমাধান প্রদত্ত সমাধান থেকে নির্ণয় করুন। সমাধান অপজাত কিনা সেই বিষয়ে মন্তব্য করুন।

6.9 উত্তরমালা

1. $\left.\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_5 = 5 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\}$ 2. (i) $\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_5 = \frac{5}{3} \\ x_3 = \frac{2}{3} \end{array}\right\}$ (ii) $\left.\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\}$ 3. (i) $\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{14}{3} \\ x_3 = \frac{16}{3} \end{array}\right\}$ (ii) $\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{14}{3} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{2}{3} \end{array}\right\}$ (iii) $\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{16}{3} \\ x_2 = -\frac{2}{3} \\ x_3 = 0 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{array}\right\}$ 5. $\left.\begin{array}{l} x_1 = 7 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\}$ (মৌল কিন্তু অপজাত) $\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 4\frac{1}{5} \\ x_3 = 0 \end{array}\right\}$ (মৌল কিন্তু অপজাত)।

তথ্যসূত্র

1. G. HADLEY [1974] : LINEAR PROGRAMMING, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMP.
2. S. I. GASS [1958] : LINEAR PROGRAMMING, N. Y., MC-GRAW HILL
3. H. A. TAHA, [1982] : OPERATIONS RESEARCH, MACMILLAN PUBLISHING CO. N.Y.
4. J. C. CHAKARVORTY & P. R. GHOSH [2001] : LINEAR PROGRAMMING & GAME THEORY, MOULIK LIBRARY
5. J. K. SHARMA [2003] : OPERATIONS RESEARCH, MACHILLAN INDIA LTD.
6. T. MOULIK [*] : LINEAR PROGRAMMING U. N. DHUR & SONS PRIVATE LTD.
7. P. M. KARAK [1988] : LINEAR PROGRAMMING & THEORY OF GAMES, PUB. R. KARAK, 1
8. N. S. KAMBO [1984] : MATHEMATICAL PROGRAMMING, TECHNIQUES, AFFILIATED EAST-NEST. PRESS PVT. LTD. N. DELHI.
9. M. S. BAZARAH ET AL [1979]: NONLINEAR PROGRAMMING, JOHN WILEY & SONS N. Y.

* NOT KNOWN

একক 7 ❑ রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সমাধানে সিম্প্লেক্স পদ্ধতি

গঠন

7.1 উদ্দেশ্য
7.2 প্রস্তাবনা
7.3 প্রয়োজনীয় কিছু সংজ্ঞা ও চিহ্নসমূহ
7.4 উন্নততর মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয়ের উপায়
7.5 চরম বা অবম মানের অস্তিত্বের শর্ত
7.6 সারাংশ
7.7 অনুশীলনী
7.8 উত্তরমালা

7.1 উদ্দেশ্য (Objectives)

এই এককের উদ্দেশ্য হল ঃ

- রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সমাধানে সিম্প্লেক্স পদ্ধতির অবতারণা করা ও
- সংশ্লিষ্ট প্রয়োজনীয় উপপাদ্যসমূহ প্রমাণ করা।

7.2 প্রস্তাবনা

এই এককে আমরা কী করেরৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা সমাধান করা যায়, সেই প্রসঙ্গেরই অবতারণা করব। আমরা আগের এককগুলিতে দেখেছি যে, যদি কোনো রৈ. প্রো. স.-র চরম সমাধান থাকে তাহলে সেটি বা সেগুলি কার্যকর সমাধান গঠিত উত্তল সেটের প্রান্তিক বিন্দু বা বিন্দুসমূহে অবস্থিত এখন আমরা জানি, সমাধান অপজাত না হলে উক্ত সেটের প্রান্তিক বিন্দু মাত্রই শর্তগোষ্ঠীর সমীকরণতন্ত্রের একটি মৌল কার্যকর সমাধান হবে। যদি সমীকরণতন্ত্র $Ax = b$ হয়, $A - m \times n$ ম্যাট্রিক্স হয় ও A-এর মাত্রা m হয় $(r(A) = m)$ তাহলে মৌল কার্যকর সমাধানের সংখ্যা সর্বোচ্চ হবে ${}^nC_m$। যদি চারটে সমীকরণ আর আটটা চল থাকে তাহলে ${}^nC_m = {}^8C_4$ অর্থাৎ $\frac{8!}{4!4!} = 70$টা সর্বোচ্চ মৌল কার্যকর সমাধান থাকে। এই 70টি সমাধানের মধ্যে যেটি বিষয়াত্মক অপেক্ষকের চরম মান দেবে সেটা নির্ণয় করা যথেষ্ট জটিল ও সময়সাপেক্ষ।

সেইজন্য এমন একটি পদ্ধতি অবলম্বন করা দরকার যাতে বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান প্রতি ধাপে বেড়ে যায় বা কমে যায়। এমন একটি পদ্ধতি হল সিম্‌প্লেক্স পদ্ধতি। এই এককে আলোচ্য বিষয় হ'ল সেই সিম্‌প্লেক্স পদ্ধতি বিশ্লেষণ করা ও সংশ্লিষ্ট উপপাদ্যসমূহ প্রমাণ করা।

7.3 প্রয়োজনীয় কিছু সংজ্ঞা ও চিহ্নসমূহ

সিম্‌প্লেক্স পদ্ধতি ব্যাখ্যা করার আগে আমরা কিছু সংজ্ঞা ও কিছু চিহ্ন ব্যাখ্যা করব। এইসব চিহ্নের সঙ্গে পরিচিত ঠিক মতো থাকলে সিম্‌প্লেক্স টেবিল সহজেই গঠন করা যাবে। স্মরণে থাকতে পারে যে প্রমাণ আকারের যে রৈ. প্রো. স. আমরা আলোচনা করেছি তা নিম্নরূপ ঃ

চরম $\quad Z = c\,x$ $\qquad$ (7.1)

শর্তসাপেক্ষে $\quad Ax = b$ $\qquad$ (7.2)

$x \geq 0$ $\qquad$ (7.3)

$c, x, b \in E^n$, A একটি $m \times n$ ম্যাট্রিক্স। A-এর মাত্রা m অর্থাৎ $r(A) = m$.

$A = [a_1, a_2, \ldots\ldots a_n]$. a_j হচ্ছে A-এর j-তম স্তম্ভ ভেক্টর।

ভিত্তি ম্যাট্রিক্স ঃ A-এর যে m-সংখ্যক রৈখিকভাবে স্বাধীন ভেক্টর আছে সেগুলিকে নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সকে আমরা ভিত্তি ম্যাট্রিক্স বলি এবং ম্যাট্রিক্স B দিয়ে চিহ্নিত করি।

B-এর স্তম্ভ ভেক্টরগুলি যথাক্রমে $b_1, \ldots\ldots b_m$. b_i, A ম্যাট্রিক্সের কোনো না কোনো স্তম্ভ ভেক্টর a_j-এর নতুন নামকরণ।

তাহলে $B = [b_1, b_2, \ldots\ldots b_m]$ $\qquad$ (7.4)

A-এর যে-কোনো ভেক্টর a_j-কে B-এর স্তম্ভ ভেক্টরসমূহের রৈখিক সমষ্টি হিসাবে লেখা যায়।

তাহলে আমরা লিখতেপারি,

$$a_j = y_{1j}\,b_1 + y_{2j}\,b_2 + \ldots\ldots + y_{mj}\,b_m \qquad (7.5)$$

$y_{1j}, y_{2j}, \ldots\ldots y_{mj}$ এরা প্রত্যেকেই স্কেলার।

যদি $y_j = \begin{bmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix}$ হয়, অর্থাৎ $y_j \in E^m$.

(7.5) থেকে পাই, $a_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} b_i = B y_j$ (7.6)

তাহলে $y_j = B^{-1} a_j$

যেহেতু B একটি m × m ম্যাট্রিক্স এবং যেহেতু B-এর স্তম্ভসমূহ রৈখিকভাবে স্বাধীন, B একটি অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স। অর্থাৎ B^{-1}-এর অস্তিত্ব আছে।

তাহলে যে-কোনো ভিত্তি ম্যাট্রিক্স $Ax = b$-এর একটি মৌল সমাধান নির্ণয় করে।

মৌল সমাধান $x_B = B^{-1} b$ (7.8)

$$x_B = [x_{B1}, \ldots\ldots x_{Bm}] \tag{7.9}$$

যেহেতু x_B-তে চলের সংখ্যা m, B-এর স্তম্ভ নয় এমন A-এর স্তম্ভসমূহের সংশ্লিষ্ট (n – m) চলগুলির মান শূন্যহবে। এখানে $x_{B1}, \ldots\ldots x_{Bm}$ হ'ল m-সংখ্যক মৌল চল। বাকী (n – m) চলসমূহ হ'ল অমৌল অর্থাৎ মৌল নয়।

যদি x_{Bi}, i = 1, ... m সবাই > 0 হয়, মৌল চলগুলি অনপজাত (non-degemenate) বলা হবে।

যদি x_{Bi}-এর মধ্যে এক বা একাধিক শূন্য হয় তখন মৌল সমাধানকে অপজাত বলা হবে।

এখন x_{Bi} সংশ্লিষ্ট মুল্যগুলোকে C_{Bi} বলে চিহ্নিত করা হবে। তাহলে মৌল ভেক্টর C_B হল

$$C_B = [C_{B1}, \ldots\ldots\ldots C_{Bm}] \tag{7.10}$$

তাহলে কোনো মৌল কার্যকর সমাধান x_B-এর জন্য, বিষয়াত্মক অপেক্ষক হ'ল

$$Z = C_B\, x_B \tag{7.11}$$

বাকী চলগুলির মান শূন্য বলে, অন্য কোনো মুল্যের কোনো অবদান থাকবে না।

নতুন চল z_j-এর সংজ্ঞা নীচে দেওয়া হ'ল,

$$z_j = y_{1j} C_{B1} + y_{2j} C_{B2} + \ldots + y_{mj} C_{Bm}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_{ij} C_{Bi} = C_B y_j \tag{7.12}$$

প্রতিটি a_j-এর জন্য একটি z_j পাওয়া যাবে।

উদাহরণ 7.1 ধরা যাক রৈ. প্রো. স.টি এইরূপ ঃ

$$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\sum x_j a_j = b, x_j \geq 0 \tag{7.13}$$

$a_1 = [4,1]^T, a_2\ [2,2]^T, a_3 = [1,4]^T, a_4 = [1,0]^T,$

$a_5 = [-1, 0]^T, b = [4, 2]^T$

বিষয়াত্মক অপেক্ষক = $x_1 + 2x_2 + 3x_3$

x_1 ও x_5 চলকে যথাক্রমে অতিরিক্ত ও উদ্ধৃত্ত চল বলা যেতে পারে। এই চলগুলির সংশ্লিষ্ট মূল্যগুলির মান শূন্য।

a_1 ও a_3 ভেক্টরদ্বয় রৈখিকভাবে স্বাধীন ও E^2 দেশে একটি ভিত্তি গঠন করে। এই ভেক্টরদ্বয় ব্যবহার করে মৌল সমাধান পাওয়া যায়। ভিত্তি ম্যাট্রিক্স B গঠন করা হয় a_3-কে B-এর প্রথম স্তম্ভ ও a_1-কে B-এর দ্বিতীয় স্তম্ভ হিসাবে গ্রহণ করে।

$$B = [b_1, b_2] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1} b = -\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 4 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \end{bmatrix},$$

আর $x_2 = x_4 = x_5 = 0$ মৌল চলগুলি হল $x_{B1} = x_3$, $x_{B2} = x_1$ এদের অনুষঙ্গী মূল্যগুলি হ'ল $c_{B1} = c_3 = 3$, $c_{B2} = c_1 = 1$. তা হল $c_B = (3, 1)^T$.

যে-কোনো ভেক্টরকে ওই মৌল ভেক্টরদের রৈখিক সমাবেশ হিসাবে প্রকাশ করা যায়। তার জন্য y_j নির্ণয়ের প্রয়োজন।

ধরা যাক, আমরা a_2 নিলাম।

$$y_2 = B^{-1} a_2 = -\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_2 = y_{12} b_1 + y_{22} b_2 = y_{12} a_3 + y_{22} a_1$$

a_2-এর অনুষঙ্গী z_2-এর মান হ'ল,

$$z_2 = c_B\, y_2 = 3\left(\frac{2}{5}\right) + 1\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{5}$$

মৌল কার্যকর সমাধানে বিষয়াত্মক অপেক্ষক Z-এর মান হ'ল,

$$Z = C_B\, x_B = 3\left(\frac{4}{15}\right) + 1\left(\frac{14}{15}\right) = \frac{26}{15}$$

7.4 উন্নততর মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয়ের উপায়

রৈ. প্রো. স.-এর যদি Z-এর চরম মান নির্ণয় করতে দেওয়া হয়, তাহলে আমাদের উদ্দেশ্য হল কীভাবে মৌল কার্যকর সমাধান পরিবর্তন করলে Z-এর মান ক্রমাগত বৃদ্ধি পাবে। নীচের উপপাদ্য সেই বিষয়ে আলোকপাত করবে।

উপপাদ্য 7.1

প্রদত্ত, রৈ. প্রো. স.-র

(i) মৌল কার্যকর সমাধান $x_B = B^{-1}\, b.$

(ii) অনুষঙ্গী বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান $Z = C_B\, x_B.$

(iii) $y_j = B^{-1}\, a_j,$

(iv) $z_j = c_B\, y_j$

যদি A-এর কোনো স্তম্ভ a_j যেটা B-এর স্তম্ভ নয়, এর ক্ষেত্রে $c_j - z_j > 0$ হয় এবং যদি অন্ততঃ $y_{ij} > 0$, i = 1, 2, ... m, তাহলে একটি নতুন মৌল কার্যকর সমাধান পাওয়া সম্ভব যদি B-এর একটি স্তম্ভের বদলে a_j-কে স্তম্ভ হিসাবে নেওয়া হয় সেক্ষেত্রে $\hat{Z} \geq Z$, $\hat{Z}$, Z-এর নতুন মান।

নতুন মৌল সমাধান যদি অনপজাত (non-degement) হয়, তাহলে $\hat{Z} > Z$.

আমরা জানি, যদি $a_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\, b_i$ হয়, (7.14)

তাহলে a_j-কে যে-কোনো ভেক্টর b_r-এর বদলে লেখা যায় যদি $y_{rj} \neq 0$ এবং এই নতুন ভেক্টর সেট ও একটি ভিত্তি গঠন করে।

B-এর স্তম্ভ নয় এমন একটি a_j নিলাম যার জন্য অন্তত একটা $y_{rj} \neq 0$ এবং ভিত্তি ম্যাট্রিক্স B-এর মধ্যে a_j-কে উপস্থাপনা করলাম।

এখন, $$b_r = \frac{a_j}{y_{rj}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \frac{y_{ij}}{y_{rj}}\, b_i \qquad (7.15)$$

প্রথম মৌল কার্যকর সমাধানের জন্য

$$\sum_{i=1}^{m} x_{Bi} b_i = b \qquad (7.16)$$

(7.15) ও (7.16) থেকে পাই,

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq r}}^{m} x_{Bi} b_i - \sum_{\substack{i=1\\i\neq r}}^{m} \frac{x_{Br}\, y_{ij}}{y_{rj}} b_i + \frac{x_{Br}\, a_j}{y_{rj}} = b \qquad (7.17)$$

অথবা, $$\sum_{\substack{i=1\\i\neq r}}^{m} \left(x_{Bi} - \frac{x_{Br} y_{ij}}{y_{rj}} \right) b_i + \frac{x_{Br}\, a_j}{y_{rj}} = b \qquad (7.18)$$

নতুন সমাধানটা কার্যকর হবে যদি,

$$\left. \begin{array}{l} x_{Bi} - \dfrac{x_{Br}\, y_{ij}}{y_{rj}} \geq 0, i \neq r, \\ \dfrac{x_{Br}}{y_{rj}} \neq 0 \end{array} \right\} \qquad (7.19)$$

যেহেতু ভিত্তির সেটে a_j-কে b_r-এর বদলে নেওয়া হয়েছে, $y_{rj} \geq 0$

যেহেতু x_B কার্যকর সমাধান $x_{Bi} \geq 0$. যদি $y_{ij} \leq 0$ $(i \neq r)$ এবং $y_{rj} > 0$. (7.19)-এর প্রথম অসমীকরণ এমনিতেই সিদ্ধ হয়। (7.19)-এর দ্বিতীয় অসমীকরণ সিদ্ধ হতে হলে $y_{rj} > 0$ হতেই হবে।

এখন $y_{ij} > 0$ $(i \neq r)$ হয় তাহলে (7.19)-এর প্রথম অসমীকরণ সিদ্ধ হবে যদি

$$\frac{x_{Bi}}{y_{ij}} - \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \geq 0 \quad i \neq r \qquad (7.20)$$

অথবা যদি $\dfrac{x_{Br}}{y_{rj}}$ = অবম $\left\{ \dfrac{x_{Bi}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0 \right\}$ সিদ্ধ হয়। (7.21)

তাহলে (7.21) সত্য হলে, নতুন মৌল সমাধান কার্যকর হবে।

ধরা যাক, (7.21) সত্য ও নতুন ভিত্তি ম্যাট্রিক্স $\hat{B}$ নিম্নরূপ।

$$\hat{B} = \left[\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots\ldots \hat{b}_m \right]$$

$\hat{B}$-এর স্তম্ভগুলি এইরূপ ঃ

$$\left.\begin{aligned} \hat{b}_i &= b_i, i \neq r \\ \hat{b}r &= a_j \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} (7.22) \\ (7.23) \end{aligned}$$

যদি নতুন সমাধানকে $\hat{x}_B = \hat{B}^{-1} b$

আবার, (7.18) থেকে পাই,

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}_{Bi} &= x_{Bi} - \frac{x_{Br}\, y_{ij}}{y_{rj}} \\ \hat{x}_{Br} &= \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} (7.24) \\ (7.25) \end{aligned}$$

বিষয়াত্মক অপেক্ষকের নতুন মান $\hat{Z}$ হল,

$$Z = c_{\hat{B}}\, x_B = \sum_i c_{\hat{B}i}\, \hat{x}_{Bi}$$

এখন $c_{\hat{B}i} = c_{Bi}\,(i \neq r), c_{\hat{B}r} = c_j$, কেননা y_r-এর বদলে a_j এসেছে তার মূল্য হল C_j।

$$\text{এখন } Z = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} c_{Bi} \left(x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \right) + \frac{x_{Br}}{y_{rj}} c_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} \left(x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \right) + \frac{x_{Br}}{y_{rj}} c_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}\, x_{Bi} - \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}\, y_{ij} + \frac{x_{Br}}{y_{rj}} c_j$$

$$= Z + \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \left(c_j - \sum_{j=1}^{m} c_{Bi}\, y_{ij} \right)$$

(7.12) থেকে পাই,

$$\hat{Z} = Z + \theta\left(c_j - z_j\right) \qquad (7.26)$$

যেখানে $\theta = \frac{x_{Br}}{y_{rj}}$

যদি $\theta\ (c_j - z_j) > 0$, তাহলে $\hat{Z} > Z$

যেহেতু $\theta = \frac{x_{Br}}{y_{rj}} > 0$, তাহলে যদি $c_j - z_j > 0$ $\hat{Z} > Z$.

মন্তব্য 7.1 আমরা জানি $\theta = \frac{x_{Br}}{y_{rj}}$

যদি $\theta = 0$ হয়, $x_{Br} = 0$ হয়।

আমরা যদি অপজাত এমন একটি মৌল সমাধান নিয়ে শুরু করি তাহলে আমরা পাব,

$$\hat{x}_{Bi} = x_{Bi}\ (i \neq r)$$

$$\hat{x}_{Br} = 0$$

তাহলে নতুন মৌল কার্যকর সমাধানও অপজাত হবে।

মন্তব্য 7.2 প্রথম মৌল সমাধানে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $y_{ij} < 0$ অনুষঙ্গী প্রতি $x_{Bi} = 0$-এর জন্যই তাহলে সেই চলগুলি θ-এর মান বার করা যাবে না। তাহলে θ-এর মান ধনাত্মকই হবে এবং নতুন সমাধান অনপজাত হবে।

উপপাদ্য 7.2 প্রদত্ত, রৈ. প্রো. স.-র

(i) মৌল কার্যকর সমাধান $x_B = B^{-1}\ b$

(ii) অনুষঙ্গী বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান $Z = c_B\ x_B$

(iii) $y_j = B^{-1}\ a_j$,

(iv) $z_j = c_B\ y_j$

যদি A-এর কোনো স্তম্ভ a_j যেটা B-এর স্তম্ভ নয়—এর ক্ষেত্রে $z_j - c_j > 0$ এবং অন্ততঃ একটা $y_{ij} > 0$, $i = 1, 2, \ldots\ldots m$, তাহলে একটি নতুন মৌল কার্যকর সমাধান পাওয়া যাবে যদি B-এর একটি স্তম্ভের বদলে a_j-কে স্তম্ভ হিসাবে নেওয়া হয় এবং $\hat{Z} \le Z$, $\hat{Z}$, Z-এর পরিবর্তিত মান।

উদাহরণ 7.2 একটি রৈ. প্রো. স.-র

শর্তগোষ্ঠী হল $\quad x_1\ a_1 + x_2\ a_2 + x_3\ a_3 = b$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

বিষয়াত্মক অপেক্ষক $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$-এর চরম মান নির্ণয় করতে হবে।

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},\ a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = 4,\quad c_2 = 2,\quad c_3 = 2.$$

B ম্যাট্রিক্সটি এমনভাবে গঠন করা হল যার প্রথম স্তম্ভ হল a_3 এবং দ্বিতীয় স্তম্ভ হল a_2

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1} b = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = B^{-1} a_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.\quad C_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}^T$$

$$z_1 = c_B\, y_1 = \frac{1}{4}[2,2]\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = 3$$

$$z_1 - c_1 = 3 - 4 = -1$$

$$Z = c_B\ x_B = \frac{1}{4}[2,2]\begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix} = 9$$

যেহেতু, $z_1 - c_1 < 0,\ \ y_{ij} > 0$ আমরা B-এর কোনো একটি স্তম্ভের পরিবর্তে a_1-কে স্তম্ভ হিসাবে নিতে পারি।

এখন $\dfrac{x_{Br}}{y_{rj}}$ = অবম $\left(\dfrac{x_{Bi}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0\right)$ = অবম $\left(\dfrac{x_{Bi}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0\right)$

= অবম $\left(\dfrac{1}{4}\dfrac{13}{\frac{1}{4}(1)}, \dfrac{1}{4}\dfrac{5}{\frac{1}{4}(5)}\right)$

$$= \text{অবম } (13, 1) = 1 = \frac{x_{B2}}{y_{21}}$$

অতএব B-এর দ্বিতীয় স্তম্ভের বদলে a_1 নিতে হবে,

$$\hat{Z} = Z + \frac{x_{Br}}{y_{rj}}\left(c_i - z_j\right) = 9 + 1 = 10 > 9$$

আমরা $\hat{x}_B, c_B$ প্রত্যক্ষভাবে নির্ণয় করে ওপরের একই উপসংহারের পৌঁছতে পারি।

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \; \hat{B}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}^{-1}b = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Z = c_B \, \hat{x}_B = [2, 4]\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 10.$$

7.5 চরম মান বা অবম মানের অস্তিত্বের শর্ত

আগের অংশে আমরা আলোচনা করেছি একটি রৈ. প্রো. স.-র একটি মৌল কার্যকর সমস্যা থাকলে তার থেকে কি করে একটি উন্নততর মৌল কার্যকর সমস্যা বার করা যায়। এর পরেই যেটা আলোচনার মধ্যে আসে সেটা হল কখন সমস্যাটির চরম বা অবম সমাধান পাওয়া যাবে। নীচের উপপাদ্যটি এই আলোচনা প্রসঙ্গেই।

উপপাদ্য 7.3 প্রসঙ্গ রৈ. প্রো. স. ঃ চরম $Z = c\,x$ শর্তসাপেক্ষে $A\,x = b,\; x \geq 0$.

প্রদত্ত (i) মৌল কার্যকর সমাধান $x_B = B^{-1}\,b$, এবং $Z_0 = c_B\,x_B$.

(ii) A-এর প্রতিটি স্তম্ভ a_j-এর জন্য $z_j - c_j \geq 0$

Z_0 প্রদত্ত শর্তাধীনে Z-এর চরম মান এবং x_B-ই চরম মৌল কার্যকর সমাধান।

ভিত্তি ম্যাট্রিক্স B-এর স্তম্ভ নয় এমন A-এর স্তম্ভ ভেক্টর a_j-এর জন্য আমরা ধরলাম $z_j - c_j \geq 0$.

ধরা যাক, x, Ax = b একটি কার্যকর সমাধান

অর্থাৎ $x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_n a_n = b$ (7.27)

অনুষঙ্গী Z-এর মান Z* এইরূপ ঃ

$$Z^* = c_1 x_2 + c_2 x_2 + ... c_n x_n \tag{7.28}$$

A-এর স্তম্ভ ভেক্টর a_j-কে এইভাবে ব্যক্ত করা যায়

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} b_i \tag{7.29}$$

(7.23) ও (7.25) থেকে পাই,

$$x_1 \sum_{i=1}^{m} y_{i1} b_i + ... + x_n \sum_{i=1}^{m} y_{in} b_i = b$$

অথবা, $\left[\sum_{j=1}^{n} x_j y_{1j}\right] b_1 + ... + \left[\sum_{j=1}^{m} x_j y_{mj}\right] b_m = b$ (7.30).

যেহেতু কোনো ভেক্টরকে দেশের ভিত্তি ভেক্টরসমূহের রৈখিক সমাবেশ হিসাবে একভাবে এবং মাত্র একভাবেই প্রকাশ করা যায়, (7.30) থেকে বলতে পারি যে,

$$x_{Bi} = \sum_{j=1}^{n} x_j y_{ij}, i = 1, 2, ... m \tag{7.31}$$

আমরা ধরেছি A-এর যে সব স্তম্ভ ভেক্টর a_j B-এর স্তম্ভ নয়, সেইগুলির জন্য $z_j - c_j \geq 0$,

A-এর সব স্তম্ভ ভেক্টর B-এর ও স্তম্ভ ভেক্টর, তাদের জন্য

$$y_j = B^{-1} a_j = B^{-1} b_i = e_i \tag{7.32}$$

যদি a_j ভেক্টর B-এর i-তম স্তম্ভ ভেক্টর হয়।

অতএব $Z_j = c_B y_j = c_B e_i = c_{Bi} = c_j$

তাহলে A-এর যে সব স্তম্ভ ভেক্টর a_j B-এরও স্তম্ভ ভেক্টর হয়, তাদের জন্য $z_j - c_j = 0$.

তাহলে a_j যদি B-এর স্তম্ভ ভেক্টর না হয়, তাহলে যেহেতু $z_j \geq c_j$, (7.28) থেকে পাই,

$$z_1 x_1 + z_2 x_2 + ... + z_n x_n \geq Z^* \tag{7.33}$$

যেহেতু $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}\, y_{ij}$, (7.33) থেকে পাই,

$$\left[\sum_{j=1}^{n} x_1\, y_{1j}\right] c_{B1} + \ldots\ldots + \left[\sum_{j=1}^{n} x_j\, y_{mj}\right] c_{Bm} \geq Z^*$$

(7.31) ব্যবহার করে পাওয়া যায়, $Z_0 = x_{B1}\, c_{B1} + \ldots\ldots + x_{Bm}\, c_{Bm} \geq Z^*$

অতএব প্রমাণিত হল যে Z_0 বিষয়াত্মক অপেক্ষকের চরম মান।

উদাহরণ 7.3 চরম $Z = 60x_1 + 50x_2$

শর্তসাপেক্ষে $\quad x_1 + 2x_2 \leq 40 \quad x_i \geq 0$

$\qquad\qquad 3x_1 + 2x_2 \leq 60$

অতিরিক্ত চল x_3, x_4 প্রবর্তন করে পাই,

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 40 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 60 \end{aligned}\right\}$$

$$x_1\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}40\\60\end{bmatrix}$$

ভিত্তি ম্যাট্রিক্স B হল $= \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

তাহলে $x_3 = 40$

$x_4 = 60$

$$y_1 = B^{-1} a_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

$$y_2 = B^{-1} a_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

$z_1 - c_1 = c_{B1}\, y_{11} + c_{B2}\, y_{12} - c_1$

$= 0 \times 1 + 0 \times 3 - 60 = - 60$

$z_2 - c_2 = 0 \times 2 + 0 \times 2 - 50 = - 50$

যেহেতু $z_1 - c_1 < z_2 - c_2$

আমরা a_1 ভেক্টরকে নির্বাচন করলাম।

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \text{অবম} \left\{ \frac{x_{B1}}{y_{11}}, \frac{x_{B2}}{y_{21}}, y_{ij} > 0 \right\}$$

$$\frac{x_{B1}}{y_{11}} = \frac{40}{1} = 40, \frac{x_{B2}}{y_{21}} = \frac{60}{3} = 20$$

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = 20$$

অতএব b_2-কে B-এর থেকে অপসরণ করতে হবে।

$$\hat{x}_{B1} = x_{B1} - \frac{x_{Br}}{y_{r1}} y_{11}$$

$$= 40 - 20.1 = 20$$

$$\hat{C}_{B1} = 0$$

$$\hat{C}_{B2} = C_{r2} = 60$$

তাহলে দ্বিতীয় মৌল সমাধানকে লেখা যাবে।

$$20 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 20 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix}$$

নতুন মৌল সমাধান $x_{B1} = x_3 = 20$

$x_{B2} = x_1' = 20$

$$y_2 = B^{-1} a_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$z_2 - c_2 = c_B\, y_2 - c_2 = 0 \times \frac{4}{3} + 60 \times \frac{2}{3} - 50 = -10$$

এখন $\dfrac{x_{B1}}{y_{12}} = \dfrac{20}{\frac{4}{3}} = 15 > 0,\ \dfrac{x_{B2}}{y_{22}} = \dfrac{20}{\frac{2}{3}} = 30 > 0$

$$\hat{x}_{B1} = \frac{x_{Br}}{y_{rj}} = 15$$

$$\hat{x}_{B2} = x_{B2} - \frac{x_{Br}}{y_{rj}} y_{22} = 20 - 15 \cdot \frac{2}{3} = 10$$

তাহলে $15 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + 20 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix}$

$$\hat{\hat{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$y_4 = \hat{\hat{B}}^{-1} a_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$z_4 - c_4 = 50 \times \frac{1}{2} - 0 = 25 > 0$$

$$z_3 - c_3 = c_B\, \hat{\hat{B}}^{-1} a_3 - c_3 = [50, 0] \times -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0$$

$$= [50,0]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} - 0 = 0$$

$$z_2 - c_2 = c_B\,\hat{\hat{B}}^{-1}\,a_2 - c_2 = [50,0]\times -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -1\\-2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} - 50$$

$$= 0$$

$$z_1 - c_1 = c_B\,\hat{\hat{B}}^{-1}\,a_1 - c_1 = -[50,0]\times \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -1\\-2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} - 60$$

$$= -\frac{1}{2}[50,0]\begin{bmatrix}-3\\+4\end{bmatrix} - 60$$

$$= 75 - 60 = 15 > 0$$

তাহলে $z_j - c_j \geq 0, \;\; j = 1, 2, 3, 4$

অর্থাৎ চরম সমাধান = $\begin{bmatrix}x_1 = 10\\x_2 = 15\end{bmatrix}$

চরম $Z = 60 \times 10 + 50 \times 15 = 1350$

উদাহরণ 7.5 সিম্প্লেক্স পদ্ধতি অবলম্বন করে নীচের রৈ. প্রো. স.-র সমাধান করুন ঃ

অবম $Z = 3x_1 + x_2$

শর্তসাপেক্ষে $2x_2 + 3x_2 \leq 6$

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1, x_2 \geq 0.$

অতিরিক্ত ও উদ্ধৃত্ত চল ব্যবহার করে ওপরের সমস্যাটিকে উপস্থাপনা করা যায় ঃ

অবম $Z = 3x_1 + x_2$

শর্তসাপেক্ষে $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$

$x_1 + x_2 - x_4 = 1$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

অবম মান নির্ণয় করার সমস্যাকে চরম মান নির্ণয় করার সমস্যায় রূপান্তরিত করা হল। তার জন্য মূল্যগুলির ঋণাত্মক চিহ্ন নিলাম। এখানে $c_1 = -3,\ c_2 = -1,\ c_3 = 0,\ c_4 = 0$

$$A[a_1, a_2, a_3, a_4] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A-এর ঘাত 2।

ভিত্তি ম্যাট্রিক্স $B = [a_3, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$B^{-1} = -1\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

x_B = মৌল সমাধান = $B^{-1}\, b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} x_3 = 6 \\ x_4 = -1 \end{array}\right\}$ সমাধান মৌল হলেও কার্যকর নয়।

ভিত্তি ম্যাট্রিক্স B_1 নেওয়া হল $[a_1, a_2] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$x_{B1} = B_1^{-1} = -1\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = 4 \end{array}\right\}$ সমাধান মৌল হলেও কার্যকর নয়।

ভিত্তি ম্যাট্রিক্স B_2 নেওয়া হল = $[a_1, a_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$x_{B2} = B_2^{-1} b = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

অতএব $x_1 a_1 + x_3 a_3 = b$

অথবা $1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$z = c_B\, x_{B2} = 1x - 3 + 4x0 = -3$$

মৌল নয় এমন ভেক্টরগুলি হল a_2 ও a_4

$$y_2 = B_2^{-1} a_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0 \end{bmatrix}$$

$$z_2 - c_2 = c_B . y_2 - c_2 = [-3, 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1$$

$$= -3 + 1 = -2, < 0$$

$$z_4 - c_4 = c_B\, y_4 - c_4 = [-3, 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 0$$

$$= [-3, 0] \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 > 0$$

$$z_1 - c_1 = c_B\, B_2^{-1}\, a_1 - c_1$$

$$= [-3, 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3$$

$$= [-3, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 3 = 0$$

অনুরূপভাবে, $z_3 - c_3 = 0$

যেহেতু $z_2 - c_2 < 0$, a_2 নতুন ভিত্তি ম্যাট্রিক্সের একটি স্তম্ভ হবে।

$\theta = \frac{x_{Br}}{y_{rj}}$ = অবম $\left\{ \frac{x_{B1}}{y_2}, y_{12} > 0 \right\}$ $y_{22} < 0$ বলে অগ্রাহ্য হল।

$$= \frac{1}{2}$$

$$\hat{x}_{B1} = x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_4 = \hat{x}_{B2} = x_{B2} - \frac{x_{Br}}{y_{rj}} y_{22} = 4 + \frac{1}{2} \times 1 = 4\frac{1}{2}$$

$$z = z + \theta(c_2 - z_2) = -3 + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$x_1^1 = 0, x_2^1 = \frac{1}{2}, x_3^1 = x_4^1 = 0$$

মৌল নয় এমন স্তম্ভ ভেক্টরের জন্য।

$$z_1 - c_1 = c_B B^{-1} a_1 - c_1$$

$$= [-3, 0] \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3$$

$$= \frac{1}{2}[-2, 0] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3$$

$$= -[-2, 0] \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + 3$$

$= 1 > 0$

$$z_4 - c_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4$$

$$= [-2,0]\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 0$$

$$= -[-2,0]\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} - 0$$

$$= 2 > 0$$

অতএব, অবম সমাধান হল, $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = x_4 = 0$

অবম $Z = 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

7.6 সারাংশ

এই এককে আমরা দেখিয়েছি কি করে

- একটি মৌল কার্যকর সমাধান পেলে তার থেকে কী করে আর-একটি মৌল কার্যকর সমাধান পাওয়া যায়, যাতে করে Z-এর মান ক্রমশঃ উন্নত হতে পারে অর্থাৎ চরম মান নির্ণয়কারী সমস্যায় Z-এর মান ক্রমাগত বেড়ে যায় অথবা অবম মান নির্ণয়কারী সমস্যায় Z-এর মান ক্রমাগত কমতে থাকে।
- কী শর্ত পূরণ হলে চরম বা অবম মান নির্ণয় করা সম্ভব এবং তা কীভাবে নির্ণয় করা যায়।

7.7 অনুশীলনী

সমাধান করুন ঃ (সিম্‌প্লেক্স পদ্ধতি অবলম্বন করে) ঃ

1. চরম $Z = 5x_1 + 3x_2$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + x_2 \leq 11$

$x_1 + 2x_2 \leq 7$

$x_1, x_2 \geq 0$

2. চরম $Z = x_1 + 7x_2$

শর্তসাপেক্ষে $-x_1 + 2x, 2 \leq 8$

$x_1 - x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

3. চরম $Z = x_2$

শর্তসাপেক্ষে $-3x_1 + 2x_2 \leq 6$

$2x_1 + x_2 \leq 14$

$x_1 - x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

4. চরম $Z = x_1 + 2x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 \leq 10$

$2x_1 - x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

5. অবম $Z = 3x_1 + 5x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + 2x_2 \leq 8$

$3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$5x_1 + 6x_2 \leq 60, x_{2,} x_{2,} \geq 0$

7.8 উত্তরমালা

1. $x_1 = 3, x_2 = 2$; চরম $Z = 21$

2. $x = 16, x_2 = 12$; চরম $Z = 100$

3. $x_1 = \frac{22}{7}, x_2 = \frac{54}{7}$, চরম $Z = \frac{54}{7}$

4. $x_1 = 0, x_2 = 10$, চরম $Z = 20$

5. $x_1 = 2, x_2 = 3$, অবম $Z = 21$

তথ্যসূত্র

1. G. HADLEY [1974] : LINEAR PROGRAMMING, ADDISION WESLEY PUBLISHING COMP.

2. S. I. GASS [1958] : LINEAR PROGRAMMING, N. Y. MC-GRAW HILL

3. H. A. TAHA, [1982] : OPERATIONS RESEARCH, MACMILLAN PUBLISHING CO. N. Y.

3. J. C. CHAKRAVORTY & P. R. GHOSH [2002] LINEAR PROGRAMMING & GAME THEOR, MOULIK LIBRARY.

4. J. K. SHARMA [2003] OPERATIONS RESEARCH, MACMILLAN INDIA LTD.

5. T. MOULIK LINEAR PROGRAMMING U. N. DHUR & SONS PROVATE LTD.

6. P. M. KARMAKAR [1988] LINEAR PROGRAMMING & THEORY OR GRAMES, PUB. R. KARAK,

7. N. S. KAMBO [1984] MATHEMATICAL PROGRAMMING, TECHNNIQUES, AFFILIATED EAST-WEST PRESS PVT. LTD. NEW DELHI

8. M. S. BAZARAA et al [1979] NON-LINEAR PROGRAMMING JOHN WILEY & SONS N.Y.

একক 8 ❑ সিম্প্লেক্স কলনবিধি (algorithm)-র বিভিন্ন ধাপ

গঠন

8.1 উদ্দেশ্য
8.2 প্রস্তাবনা
8.3 ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সকে দুটি ম্যাট্রিক্সের গুণফল হিসাবে প্রকাশ
8.4 সিম্প্লেক্স কলনবিধি (algorithm) : অসমীকরণ '≤' ধরনের
8.5 সিম্প্লেক্স কলনবিধি ঃ '≥' ধরনের অসমীকরণ বা '=' ধরনের শর্তগোষ্ঠী
8.5.1 কৃত্রিম চলের সাহায্যে মৌল কার্যকর সমাধান
8.5.2 চারণস্-এর বৃহৎ M পদ্ধতি (Charnes' Big M method)
8.5.3 দ্বিপর্যায় পদ্ধতি (Two-Phase method)
8.6 সারাংশ
8.7 অনুশীলনী
8.8 উত্তরমালা

8.1 উদ্দেশ্য (Objectives)

এই এককের উদ্দেশ্য হল ঃ

সিম্প্লেক্স কলনবিধি উপস্থাপনা করা অর্থাৎ পরম্পরায় কোন্ ধাপের পর কোন্ ধাপ নির্ণয় করলে আমরা চরম বা অবম মান বার করতে পারি। এই পরম্পরায় সুবিধা হল কম্পিউটারের সাহায্যে জটিল রৈ. প্রো. স.-র সমাধান করা যায়।

8.2 প্রস্তাবনা

আগের এককে আমরা সিম্প্লেক্স পদ্ধতির মধ্যে লিখিত তত্ত্বের আলোচনা করেছি। কিন্তু সেই তত্ত্ব সরাসরি রৈ. প্রো. স.-র সমাধানে লাগাতে গেলে তাতে অনেক জটিলতা আসে। সেইজন্য কলনবিধি (algorithm) প্রয়োজন। যেটা অনুসরণ করে কম্পিউটারের সাহায্যে অনেক বড়ো বড়ো মাত্রার রৈ. প্রো. স.-র সমাধান করা যায়। এই এককে আমাদের উদ্দেশ্য সেই সিম্প্লেক্স কলনবিধিকে উপস্থাপনা করা। তার জন্য আনুষঙ্গিক ম্যাট্রিক্সের কৃত্রিম চল, বড়ো M-পদ্ধতি, দ্বিস্তর পদ্ধতি ইত্যাদি প্রয়োজনী বিষয়সমূহ এই আলোচনায় স্থান পেয়েছে।

8.3 ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সকে দুইটি ম্যাট্রিক্সের গুণফল হিসাবে প্রকাশ

প্রদত্ত রৈ. প্রো. স.-র শর্তগোষ্ঠী হল,

$Ax = b,$

$x, b \in E^n$, $A \longrightarrow m \times n$ ম্যাট্রিক্স।

B, A-এর ভিত্তি ম্যাট্রিক্স।

$B = [b_1, b_2, \ldots\ldots b_m]$

এখন B-এর b_r ভেক্টরের বদলে ভিত্তি নয় এমন A-এর একটি ভেক্টর a_j নেওয়া হল। পরিবর্তিত ম্যাট্রিক্স

$$\hat{B} = \left[b_1, b_2, \ldots\ldots b_{r-1}, a_j, b_{r+1} \ldots\ldots b_m\right]$$

আমরা জানি, মৌল সমাধান $x_B = B^{-1} b$

$y_j = B^{-1} a_j$ অথবা $a_j = B\, y_j$

$$= \left[b_1, \ldots\ldots b_m\right] \begin{bmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\, b_i$$

আমরা জানি, $y_{rj} \neq 0$, $\hat{B}$ একটি অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স।

এখন $b_r = -\dfrac{y_{1j}}{y_{rj}} b_1 \ldots\ldots + \dfrac{1}{y_{rj}} a_j \ldots - \dfrac{y_{mj}}{y_{rj}} \ldots - b_r$

$$\text{অথবা, } b_r = \left[b_1 \ldots\ldots b_{r-1}, a_j, b_{r+1}, \ldots b_m\right] \begin{bmatrix} -\dfrac{y_{1j}}{y_{rj}} \\ -\dfrac{y_{r-1j}}{y_{rj}} \\ \dfrac{1}{y_{rj}} \\ -\dfrac{y_{mj}}{y_{rj}} \end{bmatrix}$$

অথবা, $b_r = \hat{B}_\eta$

$$\eta = \left[-\frac{y_{1j}}{y_{rj}}, \ldots\ldots -\frac{y_{r-1j}}{y_{rj}}, \frac{1}{y_{rj}}, \ldots\ldots \frac{y_{my}}{y_{rj}} \right]^T$$

যদি b_r-এর বদলে a_k নেওয়া হয়, তাহলে আমরা লিখতে পারি,

$$B = [b_1, b_{r-1}, b_r, b_{r+1}, \ldots\ldots b_m]$$

$$= [b_1, b_2, a_k, b_m] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{y_{1k}}{y_{rk}} \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{y_{rk}} \\ \vdots & \vdots & 0 & \frac{y_{mk}}{y_{rk}} \end{bmatrix}$$

$$= \hat{B}E$$

যেখানে $E = [e_1, \ldots. e_{r-1}, \eta, e_{r+1}, \ldots. e_m]$

$$\eta = \left[-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}, \ldots. \frac{1}{y_{rk}}, \ldots\ldots -\frac{y_{mk}}{y_{rk}} \right]^T$$

যেহেতু, $y_{rj} \neq 0, E$ একটি অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স। তাহলে B^{-1} যদি জানা থাকে,

$$\hat{B}^{-1} = [E^{-1}]^1 B^{-1} = EB^{-1}$$

অতএব $\hat{x}_B = \hat{B}^{-1} b = EB^{-1} b = E x_B$

$$\hat{y}_j = \hat{B}^{-1} a_j = EB^{-1} a_j = E y_j$$

$$\hat{y}_{ij} = y_{ij} - y_{rj} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \quad i \neq r$$

$$\hat{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}$$

8.4 সিম্প্লেক্স কলনবিধি (চরম মান নির্ণয় সমস্যা)

যদি কোনো রৈ. প্রো. স.-র চরম মানের অস্তিত্ব থাকে তাহলে তা নির্ণয় করার জন্য বিভিন্ন ধাপগুলি যে পরম্পরায় পার হতে হবে তা আনুপূর্বিক বিবৃত হল :

ধাপ 1.

(i) রৈ. প্রো. স.-টিকে গঠন করা হল।

(ii) যদি অবম মান নির্ণয়কারী রৈ. প্রো. স. হয় তবে তাকে চরম মান নির্ণয়কারী সমস্যায় রূপান্তরিত করা যায় নিম্নভাবে

অবম $Z \Rightarrow$ চরম $(-Z)$

উদাহরণ 8.1 চরম $y = 2x + 3, x \geq 0$

$x \leq 1$

চরম মান প্রাপ্ত হয় $x = 1$-তে।

আবার অবম $(-y) = -2x - 3$

$x \geq 0$

$x \leq 1$

$(-y)$-এর অবম মান প্রাপ্ত হয় $x = 1$-তে।

(iii) পরীক্ষা করে দেখতে হবে সমস্ত b_i $(i = 1,2 .... m)$ ধনাত্মক কিনা। যদি তা না হয়, যে যে অসমীকরণ (সমীকরণ)-এ $b_i < 0$ তাদের উভয়পক্ষকে -1 দিয়ে গুণ করতে হবে যাতে করে $b_i > 0$ হয়।

(iv) যদি অসমীকরণতন্ত্র "≤" ধরনের হয় তাহলে বামপক্ষে অতিরিক্ত চল যোগ করে সেগুলিকে সমীকরণতন্ত্রে রূপান্তরিত করতে হবে।

যদি অসমীকরণতন্ত্র '≥' ধরনের হয়, সেগুলিকে সমীকরণতন্ত্রে কী করে পরিবর্তিত করা যায় তা পরে আলোচনা করা হবে।

(v) যদি শর্তগোষ্ঠীর কোনো চলের চিহ্ন অবাধ হয়, তখন ওই চলকে দুটি ধনাত্মক চলের অন্তর হিসাবে প্রকাশ করা হয়।

ধাপ 2. প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধান

রৈ. প্রো. স.-র চলগুলির সহগসমূহকে লেখা হল নীচের টেবিলে। উদ্দেশ্য প্রারম্ভিক কার্যকর সমাধান নির্ণয়।

T1

Coeff. Basic Variables (C_B)	Variables basis in B	Values of Basic variables	c_1	c_2	c_j		c_n	0	0	0
		b	a_1	a_2	a_j		a_n	a_{n+1}	a_{n+2}	
C_{B1} C_{B2} C_{Bm}	s_1 s_2 s_m	x_{B1} x_{B2} x_{Bm}	y_{11} y_{21} y_{m1}	y_{12} y_{22} y_{m2}	y_{ij} y_{2j} y_{mj}		y_{1n} y_{2n} y_{mn}	y_{1n+1} y_{2n+1} $y_{m,n+1}$	y_{1n+2} $y_{2,n+2}$ $y_{m,n+2}$	
			$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$z_j - c_j$		$z_n - c_n$	...	...	...

যেহেতু $s_1, \ldots\ s_m$ ভিত্তি ভেক্টরদের সংশ্লিষ্ট চল এবং যেহেতু ভিত্তি ভেক্টরগুলি যথাক্রমে $e_1, \ldots\ e_m$ ভিত্তি ম্যাট্রিক্স

$B = [e_1, e_2, \ldots\ e_m]$ অতএব $m \times m$ ম্যাট্রিক্স। অতএব $x_B = B^{-1} b = b$ অর্থাৎ $x_{B1} = b_1, \ldots\ x_{Bm} = b_m$ বাকি $(n - m)$ চলের মান শূন্য হবে। এর পরে $z_1 - c_1 = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}\, y_{i1} - c_1$ -এর মান করা হল।

অনুরূপে $z_2 - c_1, \ldots\ z_n - c_n$-এর মান বার করা হল।

ধাপ 3. চরম মান প্রাপ্ত হল কিনা তার পরীক্ষা

তিনটি সম্ভাবনা আছে ঃ

(i) মৌল ভিত্তি নয় এমন ভেক্টরের সংশ্লিষ্ট চলের জন্য $z_j - c_j \geq 0$। সেক্ষেত্রে চরম সমাধান হল ওই মৌল কার্যকর সমাধান।

(ii) যদি অন্তত ঃ একটা $z_j - c_j > 0$ হয় এবং অন্ততঃ একটা $y_{ij} > 0$ হয় তাহলে Z-এর উন্নতমান পাওয়া সম্ভব।

ধাপ 4. ভিত্তি ম্যাট্রিক্সে নতুন যে ভেক্টর ঢুকবে তার নির্বাচন

j-এর কিছু মানের জন্য যদি $z_j - c_j < 0$ তাহলে যে j মানের জন্য $z_j - c_j$ সবচেয়ে ছোটো সেই j-এর মান, ধরা যাক, j-কে বেছে নেওয়া হল। এই j স্তম্ভকে **মূল স্তম্ভ** (key column) বলা হয়। এরপরে

অবম $\left\{\dfrac{x_{Bi}}{y'_{ij}}, y'_{ij} > 0\right\}$ বার করা হল।

অর্থাৎ $\left\{\dfrac{x_{B1}}{y'_{1j}}\left(y'_{ij} > 0\right)\ldots\ldots\dfrac{x_{Bm}}{y'_{mj}}\left(y'_{ij}\right)\right\}$ এর মধ্যে যেটি সবচেয়ে ছোটো সেটাকে বাছা হল, ধরা যাক, $i = r$-এর জন্য অবম মান পাওয়া গেল। অর্থাৎ (8.1)

$$\frac{x_B}{y_{rj'}} = \text{অবম} \left\{\frac{x_{Bi}}{y_{ij'}}, y'_{ij} > 0\right\}$$

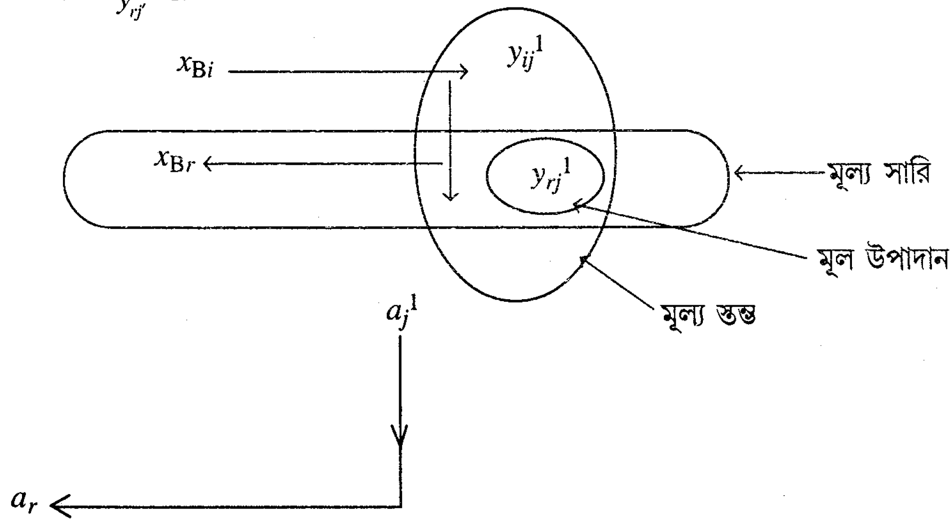
তাহলে r সারিটি **মূল সারি** (key row) হবে।

r সারি ও j′ স্তম্ভের সাধারণ পদটি অর্থাৎ $y_{rj'}$-কে **মূল উপাদান** (key element) বলা হয়।

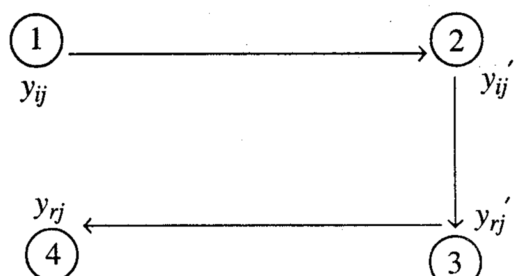
ধাপ 5. নতুন সমাধান নির্ণয় ঃ

$$\hat{x}_{Bi} = \frac{x_{Br}}{y_{rj'}}$$

$$\hat{x}_{Bi} = x_{Bi} - \frac{y_{ij'}}{y_{rj'}} x_{Br} \quad i \neq r$$



$a_{j'}$ ভিত্তির নতুন স্তম্ভ ভেক্টর।
a_r ভিত্তির থেকে বেরিয়ে যাবে।



$$\hat{y}_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ij'}}{y_{rj'}} y_{rj} \quad i \neq r$$

$$\hat{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rj'}}$$

$\hat{x}_{Bi}$-এর অনুষঙ্গী $\hat{c}_{Bi}$, c_{Bi}-এর বদলে বসবে।

ধাপ 6. প্রক্রিয়ার পুনরাবৃত্তি

T_2 (নতুন টেবিল)

				c_1	c_2		c_n	0	0 0
C_B	ভিত্তির ভেক্টরসমূহ	$\hat{b}$	a_1	a_2	a_j		a_x	a_{x+1}	a_{x+s}
c_{B1} c_{B2} $c_{j'}$ c_{n+m}	a_{n+1} a_{n+2} $a_{j'}$ a_{n+m}	$\hat{x}_{B1}$ $\hat{x}_{B2}$ $\hat{x}_{Br}$ $\hat{x}_{Bm}$	$\hat{y}_{11}$ $\hat{y}_{21}$ $\hat{y}_{r1}$	$\hat{y}_{12}$ $\hat{y}_{22}$ $\hat{y}_{r2}$	$\hat{y}_{1j}$ $\hat{y}_{2j}$ $\hat{y}_{rj}$		$\hat{y}_{1n}$ $\hat{y}_{2n}$ $\hat{y}_{rj2}$	$\hat{y}_{1n+1}$ $\hat{y}_{2n+1}$ $\hat{y}_{r,n+1}$	$\hat{y}_{1n+s}$ $\hat{y}_{2n+s}$ $\hat{y}_{r,n+s}$
			$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	…	…	…	…	

আগের প্রক্রিয়াটি নতুন টেবিলে ব্যবহার করতে হবে। যতক্ষণ না সমস্ত মৌল চল নয়এমন চলেদের ক্ষেত্রে $z_j - c_j \geq 0$ হয় ততক্ষণ ওই কলনবিধি ব্যবহার করতে হবে।

x_{Bi}-এর যে যে মানের জন্য $z_j - c_j \geq 0$ সেই মানগুলোই হল চরম সমাধান।

মন্তব্য ঃ 8.1 বিশেষ ধরনের সমস্যা যেমন

(i) শর্তগোষ্ঠীতে '≥' অসমীকরণ থাকলে বা '=' থাকলে

(ii) যেখানে $l_j - l_j$ সবচেয়ে কম (≤ 0) এবং $y_{ij} < 0$

(iii) রৈ. প্রো. স.-টির কোনো কার্যকর সমাধান না থাকে সেইগুলি পরে আলোচিত হবে।

উদাহরণ 8.2 চরম $Z = 4x_1 + 3x_2$

শর্তসাপেক্ষে
$$3x_1 + x_2 \leq 15$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 24$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

অতিরিক্ত চল x_3, x_4 যোগ করে আমরা পাই,

$$\text{চরম } Z = 4x_1 + 3x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$$

শর্তসাপেক্ষে
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 15$$
$$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 24$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

এখানে $a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

যেহেতু A-এর মাত্রা = 2. ভিত্তি ম্যাট্রিক্স = B = $[a_3, a_4]$ তাহলে আগের নির্দেশ অনুযায়ী আমরা লিখতে পারি ঃ

T_1 :

			4	3	0	0	
c_B	B	b	a_1	a_2	a_3	a_4	
0	a_3	15	3	1	1	0	← মূল সারি
0	a_4	24	3	4	0	1	
$Z_j - C_j \rightarrow$			– 4*	– 3	0	0	

অবম (– 4, – 3) = – 4

মূল স্তম্ভ

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \text{অবম} \left\{\frac{x_{B1}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0, \frac{x_{B2}}{y_{2j}}, y_{2j} > 0\right\}$$

$$= \text{অবম} \left\{\frac{15}{3}, \frac{24}{3}\right\} = 5$$

T_2 :

			4	3	0	0
C_B	B	b	a_1	a_2	a_3	a_4
4	a_1	5	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
0	a_4	9	0	3	-1	1
$Z_j - C_j \rightarrow$			0	$-\frac{5}{3}$*	$\frac{4}{3}$	0

একমাত্র ঋণাত্মক $z_j - c_j$ হচ্ছে $z_2 - c_2 = -\frac{5}{3}$

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \text{অবম} \left\{\frac{x_{B1}}{y_{12}}, \frac{x_{B2}}{y_{22}}\right\} = \text{অবম} \left\{\frac{5}{\frac{1}{3}}, \frac{9}{3}\right\} = 3$$

T_3 :

			4	3	0	0
c_B	B	b	a_1	a_2	a_3	a_4
4	a_1	4	1	0	$\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{9}$
3	a_2	3	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	$\frac{7}{9}$	$\frac{5}{9}$

যেহেতু $z_j - c_j \geq 0$

চরম সমাধান $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

চরম $Z = 4 \times 4 + 3 \times 3 = 25$

উদাহরণ **8.3** চরম $Z = 16x_1 + 17x_2 + 10x_3$

শর্তসাপেক্ষে
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 2000,$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 3600,$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 2400$$
$$x_1 \le 30$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

রৈ. প্রো. স.-কে প্রমাণ আকারে রূপান্তরিত করা হল।

অতিরিক্ত চল x_4, x_5, x_6, x_7 প্রবর্তন করে শর্তগোষ্ঠীকে সমীকরণতন্ত্রে রূপান্তরিত করা হল।

চরম $Z = 16x_1 + 17x_2 + 10x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 + 0.x_6 + 0.x_7$

T_1 : (মূল সারি: a_4 সারি; মূল স্তম্ভ: a_2)

			16	**17**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
c_B	B	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
0	a_4	2000	1	(2)	4	1	0	0	0
0	a_5	3600	2	1	1	0	1	0	0
0	a_6	2400	1	2	2	0	0	1	0
0	a_7	30	1	0	0	0	0	0	1
$z_j - c_j \to$			-16	-17	-10	0	0	0	0

মূল সারি

মূল স্তম্ভ

অবম মান $\{-16, -17, -10\} = -17$

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \text{অবম} \left\{\frac{2000}{2}, \frac{3600}{1}, \frac{2400}{2}\right\}$$
$$= 100$$

T_2 : (মূল স্তম্ভ: a_1; মূল সারি: a_7 সারি)

			16	**17**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
C_B	B	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
17	a_2	1000	$\frac{1}{2}$	1	2	$\frac{1}{2}$	0	0	0
0	a_5	2600	$\frac{3}{2}$	0	-1	$-\frac{1}{2}$	1	0	0
0	a_6	400	0	0	-2	-1	0	1	0
0	a_7	30	1	0	0	0	0	0	1
$Z_j - C_j \to$			$-7\frac{1}{2}$	0	34	$8\frac{1}{2}$	0	0	0

মূল স্তম্ভ মূল সারি

একমাত্র ঋণাত্মক $z_j - c_j = -7\frac{1}{2}$

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \text{অবম} \left\{ \frac{1000}{\frac{1}{2}}, \frac{2600}{\frac{3}{2}}, \frac{30}{1} \right\}$$

$$= 30$$

T_3 :

			16	17	0	0	0	0	0
c_B	B	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
17	a_2	985	0	1	2	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$
0	a_5	2555	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{3}{2}$
0	a_6	400	0	0	-2	-1	0	1	0
16	a_1	30	1	0	0	0	0	0	1
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	34	$\frac{17}{2}$	0	0	$\frac{15}{2}$

যেহেতু $z_j - c_j \geq 0$, চরম সমাধান পাওয়া গেছে।

চরম সমাধান $x_1 = 30$

$x_2 = 985$

চরম $Z = 16 \times 30 + 17 \times 985 = 17225$

অনুশীলনী 8.4.1 সমাধান করুন ঃ

চরম $Z = 60x_1 + 50x_2$,

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + 2x_2 \leq 40$,

$3x_1 + 2x_2 \leq 60$,

$x_1, x_2 \geq 0$

[উঃ $x_1 = 10$, $x_2 = 15$, চরম $Z = 1350$]

8.5 সিম্‌প্লেক্স কলনবিধি ঃ '≥' ধরনের অসমীকরণ বা '=' ধরনের শর্তগোষ্ঠী

8.5.1 কৃত্রিম চলের সাহায্যে মৌল কার্যকর সমাধান

আমরা জানি যদি অসমীকরণ '≤' হয় তাহলে অতিরিক্ত চল যোগ করে অসমীকরণগুলো সমীকরণে রূপান্তরিত করা হয়। আর ওই অতিরিক্ত চল সংশ্লিষ্ট ভেক্টরগুলিকে ভিত্তি ভেক্টর হিসাবে নিলে আমরা ভিত্তি ম্যাট্রিক্স একটি একসম ম্যাট্রিক্স হিসাবে পাই। ফলে b যদি ধনাত্মক থাকে তাহলে প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধান পাওয়া যায়।

কিন্তু যদি অসমীকরণ '≥' হয় তখন উদ্বৃত্ত চল বিয়োগ করে অসমীকরণতন্ত্রকে সমীকরণগোষ্ঠীতে রূপান্তরিত করা হয়। উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক $2x_1 + 3x_2 \geq 4$ একটি অসমীকরণ আছে। উদ্বৃত্ত চল ব্যবহার করে আমরা পাই $2x_1 + 3x_2 - x_4 = 4,\ x_4 \geq 0$.

x_4-এর সংশ্লিষ্ট ভেক্টরে একটি উপাংশ '– 1' হবে, বাকীরা '0' হবে। সুতরাং ভেক্টরটি একক হলেও সেটি ধনাত্মক নয়।

এইজন্য আর একটি ধনাত্মক চল, ওই সমীকরণে প্রবর্তন করা হয়, যাতে করে ভিত্তি ম্যাট্রিক্সটা একসম হয়। এই চলকে কৃত্রিম চল বলা হয়।

যদি শর্তগোষ্ঠী '=' ধরনের হয় তখন উদ্বৃত্ত চল প্রবর্তন করার প্রয়োজন নেই কিন্তু কৃত্রিম চল অতি অবশ্যই ব্যবহার করতে হয়, প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধান পাবার জন্য।

ধরা যাক, প্রমাণ আকারের শর্তগোষ্ঠী নেওয়া হল ঃ

$$Ax = b \qquad (8.2)$$

$$x \geq 0$$

$$x, b \in E^n$$

$$A \longrightarrow m \times n \text{ ম্যাট্রিক্স।}$$

এখন (8.2) এর পরিবর্তে আমরা আর একটি সমীকরণতন্ত্র নিলাম ঃ

$$Ax + Ix_\alpha = [A, I]\begin{bmatrix} x \\ x_\alpha \end{bmatrix} = b \qquad (8.3)$$

আমরা (8.2)-এর সমীকরণতন্ত্রে m-টি বাড়তি চল x_{α_i} যোগ করলাম। x_{α_i}-এর সংশ্লিষ্ট ভেক্টরটি হল e_i এই নতুন চলগুলিকে **কৃত্রিম চল** বলা হয়।

কৃত্রিম চলগুলি যে ভেক্টরের উপাংশ সেইগুলিকে কৃত্রিম ভেক্টর বলা হয়।

আমরা তাহলে (8.3)-এর একটি মৌল কার্যকর সমাধান পাই। যেমন $x = 0,\ x_\alpha = b$. কিন্তু এই সমাধান সেট মূল সমীকরণতন্ত্র (8.2)-এর মৌল সমাধান নয়। কেননা (8.3)-এর সমাধান (8.2)-এর তখনই সমাধান হতে পারে যখন $x_\alpha = 0$ অর্থাৎ সমস্ত কৃত্রিম চলগুলিই শূন্য হয়। কিন্তু আমরা শুরু করার সময় $x = 0,\ x_\alpha = b$ নিয়ে প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধান পেতে পারি। এরপরে ওই কৃত্রিম চলগুলির সংশ্লিষ্ট মূল্যগুলি

এমনভাবে নির্বাচন করব যে সেগুলি আস্তে আস্তে অপসারিত হয়। তখন আমরা একটা মৌল কার্যকর সমাধান পেয়ে যাই (কৃত্রিম চলমুক্ত)। তারপরে সিম্‌প্লেক্স কলনবিধি অবলম্বন করে সমস্যাটিকে সমাধান করতে পারি।

এই কৃত্রিম চল অপসারণ করার জন্য দুটো পদ্ধতি অবলম্বন করা হয় ঃ

(i) চারণস্‌-এর বৃহৎ M-পদ্ধতি

(ii) দ্বিস্তর পদ্ধতি।

8.5.2 চারণস্‌-এর বৃহৎ M-পদ্ধতি

(8.2) শর্তগোষ্ঠীর বিষয়াত্মক অপেক্ষক $Z = cx$ (8.4)

ধরা হল কৃত্রিম চল যোগ করার পর ওই শর্তগোষ্ঠী হল $Ax + I\, x_\alpha = b$, $[x, x_\alpha] \geq 0$

চরম মান নির্ণয়কারী সমস্যার জন্য আমরা মূল্য চল নিলাম x_{α_i}-এর জন্য $c_{\alpha_i} = -M$, $M > 0$ খুব বড়ো সংখ্যা। অবম মান নির্ণয়কারী সমস্যার ক্ষেত্রে আমরা লিখলাম

$c_{\alpha i} = M$, $M > 0$ খুব বড়ো সংখ্যা। তাহলে চারণস্‌-এর বৃহৎ পদ্ধতি অবলম্বন করার জন্য আমরা (8.2) ও (8.4)-এর পরিবর্তে রৈ. প্রো. স.-কে লিখব ঃ

চরম $Z = cx - M.1x_\alpha$ (8.5)

শর্তসাপেক্ষে $1 = [1, 1, \ldots.. 1]$

$Ax - I\, x_\alpha = b$

এখানে মৌল কার্যকর সমাধান হল $x_B = x_\alpha$

উদাহরণ 8.3. চারণস্‌-এর M পদ্ধতি অবলম্বন করে নীচের রৈ. প্রো. স. সমাধান করুন।

চরম $Z = x_1 + 5x_2$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + 4x_2 \leq 6$

$x_1 + 3x_2 \geq 2$

$x_1, x_2 \geq 0.$

অতিরিক্ত ও উদ্ধৃত্ত চল ব্যবহার করে আমরা সমস্যাটিকে এইভাবে লিখতে পারি ঃ

চরম $Z = x_1 + 5x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + 4x_2 + x_s = 6$

$x_1 + 3x_2 - x_4 \geq 2$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

ভিত্তি সমুদয় হল $a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

ফলে ভিত্তি ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের জন্য কোনো 2×2 একসম ম্যাট্রিক্স নেই। কৃত্রিম চল x_5 ও x_6 যোগ করে আমরা পাই,

চরম $Z' = x_1 + 5x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - M x_5 - M x_6$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 6$

$x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 = 2$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

T_1 :

			1	5	0	0	– M	–M
c_B	ভিত্তির ভেক্টরসমূহ	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
– M	a_5	6	3	4	1	0	1	0
– M	a_6	2	1	3	0	– 1	0	1
$z_j - c_j \rightarrow$			– 4M – 1	– 7M – 5	– M	M	0	0

মূল স্তম্ভ　　মূল সারি

অবম $\{4M - 1, -7M - 5\} = -7M - 5$

$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} =$ অবম $\left\{\frac{6}{4}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$

T_2 :

			1	5	0	0	– M	–M
c_B	ভিত্তির ভেক্টরসমূহ	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
– M	a_8	$\frac{10}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$
5	a_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
$z_j - c_j \rightarrow$			$-\frac{5M}{3} - 1$	0	– M	$-\frac{4M}{3} - \frac{5}{3}$	0	$-\frac{7M}{3} + \frac{5}{3}$

মূল স্তম্ভ　　মূল সারি

অবম $\left\{-\frac{5M}{3} - 1, -\frac{4M}{3} - \frac{5}{3}, -\frac{M}{3} + \frac{5}{3}\right\} \doteq -\frac{5M}{3} 1$

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \text{অবম} \left\{ \frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{3}}, \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} \right\} = 2$$

$\frac{x_{B1}}{y_{11}}$ আর $\frac{x_{B2}}{y_{21}}$ দুটোর মানই সমান। সুতরাং যে-কোনো একটাকেই নেওয়া যেতে পারে। কিন্তু প্রথম সারিটি নেওয়া হল a_5 অপসারণ করার জন্য।

T_3 :

			1	5	0	0	– M	– M
c_B	ভিত্তির ভেক্টরসমূহ	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	a_1	2	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$
5	a_2	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{11}{5}$	$M-\frac{2}{5}$	$M+\frac{11}{5}$

মূল স্তম্ভ

ঋণাত্মক $z_j - c_j$ হল

$$z_4 - c_4 = -\frac{11}{5} < z_3 - c_3 = -\frac{2}{5}$$

যেহেতু ধনাত্মক y_{i4} হল $y_{14} = \frac{4}{5}$

T_4 :

			1	5	0	0	– M	– M
c_B	ভিত্তির ভেক্টরসমূহ	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
0	a_4	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	– 1
5	a_2	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{6}{5}$
$z_j - c_j \rightarrow$			$\frac{11}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$M+\frac{5}{4}$	$M+\frac{6}{5}$

$$z_j - c_j \geq 0 \quad \forall j$$

অতএব চরম সমাধান ঃ $x_1 = 0$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

চরম $Z = \frac{15}{2}$

উদাহরণ 8.4 চারণস্-এর বৃহৎ M পদ্ধতি ব্যবহার করে নির্ণেয় রৈ. প্রো. স.-কে সমাধান করো ঃ

$$\begin{aligned} \text{অবম } Z = \; & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 \\ \text{শর্তসাপেক্ষে} \quad & \left.\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &\geq 2 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 &\geq 6 \\ 6x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 &\geq 5 \end{aligned}\right\} \end{aligned} \tag{8.7}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$

এখন অবম $Z \Rightarrow$ চরম $(-Z)$

$Z' = Z$ লিখে আমরা পাই

চরম $Z' = -3x_1 - 4x_2 - x_3 - 6x_4$

শর্তসাপেক্ষে (8.7)

উদ্বৃত্ত চল x_5, x_6, x_7 যোগ করে অসমীকরণগুলোকে সমীকরণসমূহে রূপান্তরিত করা হল।

$$5x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 2$$
$$-x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 - x_6 = 6$$
$$6x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 - x_7 = 5$$
$$xj \geq 0$$

প্রতিসম ভিত্তি ম্যাট্রিক্স পাওয়ার জন্য কৃত্রিম চল x_8, x_9, x_{10} যোগ করা হল।

নতুন শর্তাগোষ্ঠী হল,

$$5x_4 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 + x_8 = 2$$
$$-x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 - x_6 + x_9 = 6$$
$$6x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 - x_7 + x_{10} = 5$$

বিষয়াত্মক অপেক্ষক $Z' = -3x_1 - 4x_2 - x_3 - 6x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 - Mx_8 - Mx_9 - Mx_{10}$

T_1

c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1 (−3)	a_2 (−4)	a_3 (−1)	a_4 (−6)	a_5 (0)	a_6 (0)	a_7 (0)	a_8 (−M)	a_9 (−M)	a_{10} (−M)
− M	a_8	2	5	− 2	1	− 3	− 1	0	0	1	0	0
− M	a_9	6	−1	4	3	7	0	− 1	0	0	1	0
− M	a_{10}	5	6	1	− 5	− 3	0	0	− 1	0	0	0
$Z_j–C_j$ →			− 10M + 3	−3M + 4	M+1	−M−6	M	M	0	0	0	0

অবম $(z_j - c_j) = - 10M + 3$

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \text{অবম} \left\{\frac{x_{Bi}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0\right\} = \frac{2}{5}$$

T_2

c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1 (−3)	a_2 (−4)	a_3 (−1)	a_4 (−6)	a_5 (0)	a_6 (0)	a_7 (0)	a_8 (−M)	a_9 (−M)	a_{10} (−M)
− 3	a_1	$\frac{2}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	0
− M	a_9	$\frac{32}{5}$	0	$\frac{18}{5}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{32}{5}$	$-\frac{1}{5}$	− 1	0	$\frac{1}{5}$	1	0
− M	a_{10}	$\frac{13}{5}$	0	$\frac{17}{5}$	$-\frac{31}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$	0	− 1	$-\frac{6}{5}$	0	1
$z_j–c_j$ →			0	$-7M + \frac{26}{5}$	$3M + \frac{2}{5}$	$-7M + \frac{39}{5}$	$M+\frac{3}{5}$	M	M	$2M - \frac{3}{5}$	0	0

$$\text{অবম} \left\{-7M+\frac{26}{5}, -7M+\frac{39}{5}\right\}$$

$$= -7M+\frac{26}{5}$$

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \text{অবম} \left\{\frac{16}{9}, \frac{13}{17}\right\} = \frac{13}{17}$$

T_3

c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1 (−3)	a_2 (−4)	a_3 (−1)	a_4 (−6)	a_5 (0)	a_6 (0)	a_7 (0)	a_8 (−M)	a_9 (−M)	a_{10} (−M)
−3	a_1	$\frac{12}{17}$	1	0	$-\frac{9}{17}$	$-\frac{9}{17}$	$-\frac{1}{17}$	0	$-\frac{2}{17}$		0	
−M	a_9	$\frac{62}{17}$	0	0	$\frac{166}{17}$	$\frac{98}{17}$	$-\frac{25}{17}$	−1	$\frac{18}{17}$		1	
−4	a_2	$\frac{13}{17}$	0	1	$-\frac{31}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{6}{17}$	0	$-\frac{5}{17}$		0	
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	$-\frac{166}{17}M + \frac{97}{17}$	$-\frac{98}{17}M + \frac{15}{17}$	$\frac{25}{17}M - \frac{21}{17}$	M	$-\frac{18}{17}M + \frac{30}{17}$			

$$\text{অবম} \left\{z_j - c_j\right\} = -\frac{166}{17}M + \frac{97}{17}$$

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \text{অবম} \left\{\frac{x_{Bi}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0\right\} = \frac{31}{83}$$

T_4 :

C_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1 (−3)	a_2 (−4)	a_3 (−1)	a_4 (−6)	a_5 (0)	a_6 (0)	a_7 (0)
−3	a_1	$\frac{717}{1411}$	1	0	0	$\frac{306}{1411}$	$-\frac{391}{2822}$	$-\frac{9}{166}$	$-\frac{90}{2822}$
−1	a_3	$\frac{31}{83}$	0	0	1	$\frac{49}{83}$	$-\frac{25}{166}$	$-\frac{17}{166}$	$\frac{9}{83}$
−4	a_2	$\frac{2040}{1411}$	0	1	0	$\frac{1522}{1411}$	$\frac{221}{2822}$	$-\frac{31}{166}$	$-\frac{1199}{2822}$
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	0	$6-\frac{7839}{1411}$	$\frac{714}{2822}$	$\frac{168}{166}$	$\frac{2220}{1411}$

$z_j - c_j \geq 0 \quad \forall j$

অবম সমাধান $x_1 = \frac{717}{1411}, x_2 = \frac{2040}{1411}, x_3 \frac{31}{83}, x_4 = 0$

অবম $Z = \frac{3 \times 717}{1411} + \frac{4 \times 2040}{1411} + \frac{31}{83} = \frac{10838}{1411}$

8.5.3 দ্বিপর্যায় পদ্ধতি (Two-phase Method)

8.5.1-এ আমরা দেখেছি অসমীকরণে (≥) থাকলে বা শর্ত যদি সমীকরণ আকারে থাকে তাহলে কৃত্রিম চল যোগ করার মৌল কার্যকর সমাধান গঠন করা হয়। 8.5.2-তে দেখেছি কি করে চারণস্-এর বৃহৎ M পদ্ধতি অবলম্বন করে কৃত্রিম চলকে অপসারণ করা যায়।

দ্বিপর্যায় পদ্ধতি অবলম্বন করেও কৃত্রিম চল অপসারণ করা যায়।

পর্যায় I-তে আমরা সমস্যাটিকে এইভাবে নিই ঃ

চরম $Z' = O.x - 1x_\alpha$

যেখানে $O = \left[\underbrace{0, 0}_{n \text{ পদ}}\right] 1 = \left[\underbrace{1, \ldots\ldots 1}_{s \text{ পদ}}\right]$

$x_\alpha \in E^s$ হয়।

শর্তসাপেক্ষে $Ax + Ix_\alpha = b \; [x, x_a] \geq 0.$

প্রথম পর্যায়ের শেষে কৃত্রিম চল অপসারিত হয় এবং মূল সমীকরণতন্ত্রের একটি প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধান পাওয়া যায়।

পর্যায় II. দ্বিতীয় পর্যায়ে মূল রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটিকে সিম্প্লেক্স পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করতে হবে।

উদাহরণ 8.5 দ্বি-পর্যায় পদ্ধতি অবলম্বন করে সমাধান করুন ঃ

অবম $Z = 4x_1 + x_2$

শর্তসাপেক্ষে
$$3x_1 + x_2 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

এখন অবম $Z \Rightarrow$ চরম Z', যেখানে $Z' = -Z$

প্রদত্ত সমস্যাটিকে অতিরিক্ত চল উদ্বৃত্ত চল ও কৃত্রিম চল যথাযথ জায়গায় বসিয়ে শর্তগোষ্ঠী প্রমাণ আকারে রূপান্তরিত করা হল ঃ

চরম $Z' = -4x_1 - x_2$

শর্তসাপেক্ষে
$$3x_1 + x_2 + x_5 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_6 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 3$$
$$x_j \geq 0, \forall j$$

$x_3 \longrightarrow$ অতিরিক্ত চল, $x_4 \longrightarrow$ উদ্‌বৃত্ত চল

$x_5, x_6 \longrightarrow$ কৃত্রিম চল।

পর্য্যায় I. চরম $Z' = -x_5 - x_6$

শর্তসাপেক্ষে
$$3x_1 + x_2 + x_5 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_6 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 3$$
$$x_j \geq 0 \quad \forall j$$

T_1 :

			0	**0**	**0**	**0**	**− 1**	**− 1**
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
−1	a_5	3	3	1	0	0	1	0
− 1	a_6	6	4	3	− 1	0	0	1
0	a_4	3	1	2	0	1	0	0
$z_j - c_j \rightarrow$			− 7	− 4	1	0	0	0

অবম $(z_j - c_j) = -7$

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \text{অবম} \left\{\frac{x_{Bi}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0\right\} = \text{অবম} \left\{\frac{3}{3}, \frac{6}{4}, \frac{3}{1}\right\} = 1$$

T_2 :

c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	0 a_1	0 a_2	0 a_3	0 a_4	– 1 a_5	– 1 a_6
0	a_1	1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0
– 1	a_6	2	0	$\frac{5}{3}$	– 1	0	$-\frac{4}{3}$	1
0	a_4	2	0	$\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0
z_j-c_j →			0	$-\frac{5}{3}$	1	0	$1+\frac{4}{3}$	0
T_3 :								
0	a_1	$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
0	a_2	$\frac{6}{5}$	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
0	a_4	0	0	0	1	1	1	– 1
z_j-c_j →			0	0	0	0	1	1

যেহেতু $z_j - c_j \geq 0$ সব j-এর জন্য, চরম মান প্রাপ্ত হল। চরম সমাধান I-পর্যায়ে $x_2 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{6}{5}$. কৃত্রিম চল $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, অতএব কৃত্রিম চল অপসারিত।

চরম $Z^{**} = -4x_1 - x_2$

পর্যায় II.

C_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	– 4 a_1	– 1 a_2	0 a_3	0 a_4
– 4	a_1	$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0
–1	a_2	$\frac{6}{5}$	0	1	$-\frac{3}{5}$	0
0	a_4	0	0	0	0	1
zj–cj →			0	0	$-\frac{4}{5}$	0

একমাত্র ঋণাত্মক $z_j - c_j = -\frac{4}{5}$ j = 3-এর জন্য।

$$\frac{x'_{Br}}{y_{rj}} = \left\{\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}}\right\} = 3$$ যেহেতু $y_{23} < 0,\ y_{33} = 0$

			– 4	**– 1**	**0**	**0**
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4
0	a_3	3	5	0	1	0
–1	a_2	3	3	1	0	0
0	a_4	0	0	0	0	1
$z_j - c_j \rightarrow$			1	0	0	0

$z_j - c_j \geq 0$

অতএব চরম মান প্রাপ্ত হল।

অবম সমাধান = $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

অবম $Z = 3$

মন্তব্য 8.1 T_2-তে $\frac{x_{B2}}{y_{22}} = \frac{6}{5}$, $\frac{x_{B3}}{y_{32}} = \frac{6}{5}$

সুতরাং y_{22} অথবা y_{32} এদের যে-কোনো একটাকে মূল উপাদান ধরা যেতে পারে।

উদাহরণ 8.6 দ্বি-পর্যায় পদ্ধতি অবলম্বন করে সমাধান করুন ঃ

চরম $Z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 + x_3 = 7$

$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

উদ্‌বৃত্ত চল ও কৃত্রিম চল যোগ করলে শর্তগোষ্ঠী নিম্নরূপ হয় ঃ

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$

$2x_1 - 5x_2 + x_3 \quad - x_5 + x_6 = 10$

x_5 উদ্‌বৃত্ত চল, x_4, x_6 কৃত্রিম চল।

পর্যায় **I.** চরম $Z^* = 0.x - x_4 - x_6$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

T_1 :

			0	0	0	–1	0	– 1
C_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
–1	a_4	7	1	1	1	1	0	0
– 1	a_6	10	2	– 5	1	0	– 1	1
$z_j - c_j$ →			– 3	4	– 2	0	1	0

অবম {– 3, – 2} = – 3

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \left\{\frac{7}{1}, \frac{10}{2}\right\} = 5$$

T_2 :

			0	0	0	–1	0	– 1
C_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
–1	a_4	2	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
0	a_1	5	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$z_j - c_j$				$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

অবম $(Z_j - C_j)$ = অবম $\left\{-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right\} = -\frac{7}{2}$

যেহেতু y_{12} একমাত্র ধনাত্মক, প্রথম সারিটি মূল সারি।

T_3 :

			0	0	0	–1	0	– 1
C_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
0	a_2	$\frac{4}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$
0	a_1	$\frac{45}{7}$	1	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	0	1	0	1

$$z_j - c_j \geq 0$$

সুতরাং পর্যায় I সমাপ্ত।

পর্যায় II চরম $Z^{**} = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$

শর্তসাপেক্ষে $\quad x_1 + x_2 + x_3 = 7$

$2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_5 = 10$

T_4 :

			2	3	5	0
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_5
3	a_2	$\frac{4}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
2	a_1	$\frac{45}{7}$	1	0	$\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	$5+\frac{15}{7}$	$\frac{1}{7}$

$$z_j - c_j \geq 0, \ \forall j.$$

চরম সমাধান $x_2 = \frac{4}{7}, \ x_1 = \frac{45}{7}, x_3 = 0$

চরম $Z = 2 \times \frac{45}{7} - 5 \times 0 = \frac{102}{7}$

উদাহরণ 8.7 সিম্প্লেক্স পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করুন ঃ

চরম $Z = 2x_1 - x_2$

শর্তসাপেক্ষে $2x_1 + x_2 \leq 0$

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_2 > 0$, x_1-এর চিহ্ন অবাধ।

আমরা x_1-কে $x_1' - x_1''$ হিসাবে লিখলাম। $x_1'.x_2''$ ধনাত্মক চল।

প্রদত্ত সমস্যাটিকে লেখা যায়,

চরম $Z = 2x_1' - 2x_1'' - 2x_2'' - x_2$

শর্তসাপেক্ষে $2x'' - 2x_4'' + x_2 \leq 0$

$x_1'' - x_2'' + x_2 \geq 1.$

অতিরিক্ত চল, উদ্‌বৃত্ত চল ও কৃত্রিম চল যোগ করে পাই,

চরম $z = 2x_1'' - 2x_2'' - x_2 + 0.x_3 - xy - Mx_5$, **M > 0 বৃহৎ**

T_1 :

			2	– 2	– 1	0	0	– M
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_1''	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_3	0	2	– 2	1	1	0	0
– M	a_5	1	1	– 1	1	0	– 1	1
$z_j–c_j \rightarrow$			– M – 2	M 2	– M + 1	0	– M	0

অবম {– M – 2, – M + 2, – M + 1} = – M – 2

অবম $\left\{\frac{x_{Bi}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0\right\}$ = অবম $\left\{\frac{0}{2}, \frac{1}{1}\right\} = 0$

T_2 :

			2	– 2	– 1	0	0	– M
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1'	a_1''	a_2	a_3	a_4	a_5
2	a_1	0	1	– 1	$\frac{1}{2}$	1	0	0
– M	a_5	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	– 1	1
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	$2-\frac{M}{2}$	0	$\frac{M}{2}+1$	0

ঋণাত্মক $\left(z_j - c_j\right) = -\frac{M}{2} + 2$

অবম $\left\{\frac{x_{Bi}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0\right\} = 0$

T_3 :

			2	– 2	– 1	0	0	– M
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1'	a_1''	a_2	a_3	a_4	a_5
– 1	a_2	0	2	– 2	1	1	0	0
– M	a_5	1	– 1	1	0	– 1	– 1	1
$z_j - c_j \rightarrow$			M – 4	– M + 4	2	M – 1	M	0

একমাত্র ঋণাত্মক $(z_j - c_j) = z_1'' - c_1''$

$\frac{x_{B2}}{y_{2''}} = \frac{1}{1} = 1$

T_4 :

			2	−2	−1	0	0	−M
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1'	a_1''	a_2	a_3	a_4	a_5
−1	a_2	2	0	0	1	−1	−2	2
−2	a_1''	1	−1	1	0	−1	−1	1
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	0	3	4	M + 4

$$z_j - c_j \geq 0$$

অতএব চরম সমাধান $\begin{cases} x_1'' = 1 & x_1 = 0 \\ x_2 = 2 & \text{অতএব } x_1 = x_1' - x_1'' \\ x_1' = 0 & \quad = -1 \end{cases}$

চরম $Z = 2.0 - 2 \times 1 - 2$
$= -4$

8.6 সারাংশ

● এই এককের মূল বিষয়বস্তু হল সিম্প্লেক্স কলনবিশিষ্ট ব্যাখ্যা করা। এইজন্য কোনো ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সকে কীভাবে দুটি ম্যাট্রিক্সের গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা যায় সেটা আলোচিত হয়।

● যদি অসমীকরণ ($\leq$) ধরনের হয় তখন সিম্প্লেক্স কলনবিধি কেমন হয় তা আলোচিত হয়েছে।

● যদি অসমীকরণ ($\geq$) ধরনের হয় বা শর্তগোষ্ঠীতে সমীকরণ থাকে তখন কৃত্রিম চল কী কারণে প্রবর্তন করতে হয় তা ব্যাখ্যা করা হয়েছে। আবার সেই কৃত্রিম চলকে অপসারণ করার জন্য

(i) বৃহৎ M পদ্ধতি বা (ii) দ্বিপর্যায় পদ্ধতি আলোচিত হয়েছে।

8.7 অনুশীলনী

সমাধান করুন সিম্প্লেক্স পদ্ধতি অনুসরণ করে ঃ

1. চরম $Z = 5x_1 + 3x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 \leq 2$

$$5x_1 + 2x_2 \le 10$$
$$3x_1 + 8x_2 \le 12$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

2. চরম $Z = x_1 + x_2 + x_3$

শর্তসাপেক্ষে $3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

3. চরম $Z = 10x_1 + x_2 + 2x_3$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 - 2x_3 \le 10$

$$4x_1 + x_2 + x_3 \le 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

4. চরম $Z = 2x_1 + 3x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 \le 8$

$$x_1 + 2x_2 = 5$$
$$2x + x_2 \le 8, x_1, x_2, \ge 0$$

5. চারণস্-এর বৃহৎ M পদ্ধতি অবলম্বন করতে হবে ঃ

অবম $Z = 2x_1 + 9x_2 + x_3$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 5$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

6. অবম $Z = 4x_1 + 8x_2 + 3x_3,$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 \ge 3$

$$2x_1 + x_2 \ge 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

7. দ্বি-পর্যায় পদ্ধতি অবলম্বন করে ঃ

চরম $Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

8. দ্বি-পর্য্যায় পদ্ধতি অবলম্বন করে ঃ

চরম $Z = 6x_1 + 4x_2$

শর্তসাপেক্ষে $2x_1 + 3x_2 \leq 30$

$3x_1 + 2x_2 \leq 24$

$x_1 + x_2 \geq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

9. অবম $Z = x_1 + 4x_2$

শর্তসাপেক্ষে $2{\cdot}25x_1 + 0{\cdot}75x_2 \geq 6000$

$0{\cdot}05x_1 + 0{\cdot}10x_2 \geq 175$

$x_1 + x_2 \geq 2000$

$x_1, x_2 \geq 0$

10. অবম $Z = 3x_1 + 2x_2$

শর্তসাপেক্ষে $5x_1 + x_2 \geq 10,\ 2x_1 + 2x_2 \geq 12,\ x_1 + 4x_2 \geq 12,\ x_1, x_2 \geq 0$

8.8 উত্তরমালা

1. $x_1 = 2, x_2 = 0$, চরম $Z = 10$
2. $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$, চরম $Z = 1$
3. $x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = 0$, চরম $Z = 50$
4. $x_1 = \frac{11}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$ চরম $Z = \frac{28}{3}$
5. $x_1 = x_2 = 0, x_3 = \frac{5}{2}$, চরম $Z = \frac{5}{2}$
6. $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0$, অবম $Z = 16$
7. $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$, চরম $Z = 8$
8. $\left.\begin{array}{l} x_1 = 8 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\}$ অথবা $\begin{array}{l} x_1 = \frac{12}{5} \\ x_2 = \frac{42}{5} \end{array}$ চরম $Z = 48$

9. $x_1 = 2500$, $x_2 = 500$, অবম $Z = 4500$

10. $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, অবম $Z = 13$.

তথ্যসূত্র

1. G. HADLEY [1974] : LINEAR PROGRAMMING, ADDISION WESLEY PUBLISHING COMP.

2. S. I. GASS [1958] : LINEAR PROGRAMMING, N. Y. MC-GRAW HILL

3. H. A. TAHA, [1982] : OPERATIONS RESEARCH, MACMILLAN PUBLISHING CO. N. Y.

3. J. C. CHAKRAVORTY & P. R. GHOSH [2002] LINEAR PROGRAMMING & GAME THEORY, MOULIK LIBRARY

4. J. K. SHARMA [2003] OPERATIONS RESEARCH, MACMILLAN INDIA LTD.

5. T. MOULIK LINEAR PROGRAMMING U. N. DHUR & SONS PROVATE LTD.

6. P. M. KARMAKAR [1988] LINEAR PROGRAMMING & THEORY OR GRAMES, PUB. R. KARAK,

7. N. S. KAMBO [1984] MATHEMATICAL PROGRAMMING, TECHNNIQUES, AFFILIATED EAST-WEST PRESS PVT. LTD. NEW DELHI

8. M. S. BAZARAA et al [1979]NON-LINEAR PROGRAMMING JOHN WILEY & SONS N.Y.

একক 9 □ সিমপ্লেক্স পদ্ধতির প্রয়োগের বিশেষ বিশেষ দিক

গঠন

9.1 উদ্দেশ্য

9.2 প্রস্তাবনা

9.3 কার্যকর সমাধান সেট সীমাবদ্ধ কী সীমাহীন

9.4 অপজাত সমাধান

9.5 বিকল্প চরম বা অবম

9.6 সমাধান কার্যকর কিনা

9.7 সারাংশ

9.8 অনুশীলনী

9.9 উত্তরমালা

9.1 উদ্দেশ্য (Objectives)

এই এককের উদ্দেশ্য বৈ. প্রো. স.-র সমাধানযোগ্য কিনা বা সমস্যার সমাধান থাকলে তা কি কি ধরণের হতে পারে তা ইঙ্গিত করা যেমন ঃ

- সমস্যাটির কার্যকর সমাধান আছে কিনা।
- সমস্যাটি সীমাবদ্ধ কিনা।
- সমস্যাটির অপজাত সমাধান আছে কিনা।
- চরম সমাধানের বিকল্প সমাধান আছে কিনা।

9.2 প্রস্তাবনা

আগের এককের 8.1 মন্তব্যে আমরা ইঙ্গিত দিয়েছি যে যদি সিম্প্লেক্স টেবিলে ন্যূনতম $(z_j - c_j)$ ঋণাত্মক হয় এবং j-তম স্তম্ভে $y_{rj} < 0$, তখন আমরা কি সিদ্ধান্তে আসব তা পরে আলোচিত হবে। এইরকম আরও অনেকগুলি প্রশ্নের উত্তর ঠিক মত ব্যাখ্যা না করলে সিম্প্লেক্স কলনবিধির প্রয়োগের সম্পূর্ণতাপ্রমাণ করা যায় না। আমরা এই এককে এই ধরণের প্রশ্ন উত্থাপন করব এবং তার যথাযথ উত্তর দেব এবং উদাহরণ দিয়ে বোঝাব।

9.3 কার্যকর সমাধান সেট সীমাবদ্ধ কী সীমাহীন?

আমরা আগে দেখেছি জ্যামিতিক যুক্তি দিয়ে যে কার্যকর সমাধান যদি সীমাবদ্ধ হয় তাহলে কার্যকর সমাধান গঠিত যে উত্তল সেট হয় তার প্রান্তিক বিন্দুতে চরম (অবম) সমাধান থাকবে। অধিকন্তু সমাধান অপজাত না হলে। ঐ প্রান্তিক বিন্দুতেই একটি মৌল কার্যকর সমাধান থাকবে। সেটা সিম্প্লেক্স কলনবিধির সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

কিন্তু কার্যকর সমাধান সেট যদি সীমাবদ্ধ না হয়, তখন চরম (অবম) সমস্যার সমাধানের অস্তিত্ব নির্ণয়ের শর্ত এই পাঠ্যক্রমের এক্তিয়ারের বাহিরে।

আমরা স্মরণে আনতে পারি যে,

রৈ. প্রো. স.-র প্রমাণ আকারের সমীকরণতন্ত্র হল,

$Ax = b,\ x \geq 0,\ x,\ b \in E^n$

$A \rightarrow m \times n$ ম্যাট্রিক্স।

A-এর মাত্রা হল m অর্থাৎ $r(A) = m$

$A = [a_1, \ldots\ldots a_n],\ B = [b_1, b_2, \ldots\ldots b_m].$

B-ভিত্তি ম্যাট্রিক্স b_j, $j = 1\ldots\ldots m$, ভিত্তি ভেক্টর।

$y_j = B^{-1} a_j,\ z_j = c_B\, y_j$

7.4-এ আমরা দেখেছি যদি $y_{rj} > 0$ হয়, 0 এবং m-এর অন্তর্বর্তী কোনো r-এর জন্য তাহলে b_r-এর বদলে ভিত্তিতে a_j-কে নেওয়া যায় এবং $b_1, \ldots\ldots\ b_{r-1}, a_j, b_{r+1}, \ldots\ldots\ b_m$ নতুন ভিত্তি গঠন করে।

এখন যদি এমন পরিস্থিতি হয় যে b_r-এর স্থানে a_j নেওয়া হল এবং এরকম a_j-এর জন্য $y_{ij} \leq 0$.

a_j, b_r-এর স্থান নিয়েছে।

এখানে আমরা লিখতে পারি $a_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\, b_i$

$$\text{অথবা, } b_r = \frac{a_j}{y_{rj}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} y_{ij} b_i$$

$$= -\frac{a_j}{|y_{rj}|} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} y_{ij}\, b_i$$

নতুন মৌল সমাধান হল,

$$\left.\begin{array}{l} x_{Bi} + \dfrac{x_{Br}y_{rj}}{|y_{rj}|}, i \neq r \\ \quad -\dfrac{x_{Br}}{|y_{rj}|} \end{array}\right\} \quad (9.1)$$

নতুন মৌল সমাধান কার্যকর হতে গেলে $x_{Br} = 0$ হতেই হবে। অর্থাৎ a_j-এর সংশ্লিষ্ট চলের মান শূণ্য হতে হবে।

আমাদের মৌল সমাধান হল

$$\sum x_{Bi}b_i = b \quad (9.2)$$

যেখানে $Z = c_B x_B$ (9.3)

$-\theta a_j$-কে একবার যোগ ও বিয়োগ করে পাই (9.1) থেকে

$$\sum_{i=1}^{m} x_{Bi}\, b_i - \theta a_j + \theta a_j = b \quad (9.4)$$

আমরা $-\theta a_j = -\theta \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\, b_i$, (9.5)

(9.4) ও (9.5) থেকে পাই,

$$\sum \left(x_{Bi} - \theta y_{ij}\right) b_i + \theta a_j = b \quad (9.6)$$

যদি $\theta > 0$ হয়, যেহেতু $y_{ij} \leq 0$.

$$x_{Bi} - \theta y_{ij} \geq 0$$

অতএব (9.6) একটি কার্যকর সমাধান দেয় যেখানে $(m + 1)$ চল শূণ্য নাও হতে পারে।

কিন্তু সর্বক্ষেত্রেই সমাধানটি মৌল নাও হতে পারে।

তখন $\hat{Z} = \sum_{i=1}^{m} c_i \hat{x}_i = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}\left(x_{Bi} - \theta y_{ij}\right) + c_j \theta$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} x_{Bi} + \theta\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} y_{ij}\right)$$

$$= Z + \theta\,(c_j - z_j)$$

তাহলে ধনাত্মক θ-কে খুব বড়ো সংখ্যা নিলে যদি $c_j - z_j > 0$ হয়, $\hat{Z}$-এর মান যথেচ্ছ বড়ো করা যাবে। এক্ষেত্রে চরম মান নির্ণয়কারী রৈ. প্রো. স. থাকলে সমস্যাটির সমাধান সীমাবদ্ধ নয়। আমরা নীচের এই উপপাদ্যে উপনীত হই।

উপপাদ্য 9.1. প্রদত্ত কোনো মৌল কার্যকর সমাধানের জন্য

(*i*) যদি ভিত্তির মধ্যে নেই এমন স্তম্ভ a_j-এর জন্য

$$z_j - c_j < 0,\ y_{ij} \le 0$$

তাহলে এমন কার্যকর সমাধান পাওয়া যাবে যার মধ্যে $(m + 1)$ চল শূণ্য নাও হতে পারে এবং বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান সীমাবদ্ধ হবে না।

উদাহরণ 9.1 (চরম মান সীমাহীন)

চরম $Z = 2x_1 + x_2$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 - x_2 \le 10$

$2x_1 \le 40$

$x_1, x_2 \ge 0$

অতিরিক্ত চল x_3, x_4 যোগ করে সমস্যাটিকে লেখা যায়, চরম $Z = 2x_1 + x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$

শর্তসাপেক্ষে $x_1 - x_2 + x_3 = 10$

$2x_1 \quad + x_4 = 40$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

			2	1	0	0	
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	
0	a_3	10	1	–1	1	0	অবম $\left\{\frac{10}{1}, \frac{40}{2}\right\} = 10$
0	a_4	40	2	0	0	1	
$z_j - c_j \rightarrow$			–2	–1	0	0	
2	a_1	10	1	–1	1	0	
0	a_4	20	0	2	–2	1	
$z_j - c_j \rightarrow$			0	–3	2	0	
2	a_1	20	1	0↑	0	$\frac{1}{2}$	
1	a_2	10	0	1	–1	$\frac{1}{2}$	
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	–1	$\frac{3}{2}$	
					↑		

$$z_j - c_j < 0 \qquad j = 3\text{-এর জন্য}$$

$$y_{13} = 0$$

$$y_{23} < 0$$

সুতরাং **উপপাদ্য 9.1** অনুসারে চরম মান সীমাহীন হবে।

মন্তব্য 9.2. সমাধান অঞ্চল সীমাবদ্ধ না হলেও চমর মান সসীম হতে পারে।

উদাহরণ 9.2. চরম $Z = 6x_1 - 2x_2$,

শর্তসাপেক্ষে $\quad 2x_1 - x_2 \le 2$

$$x_1 \le 4$$

$$x_1 , x_2 \ge 0$$

অতিরিক্ত চল x_3, x_4 যোগ করে সমস্যাটিকে লেখা যায়

চরম $Z = 6x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$x_4 + x_4 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

			2	**1**	**0**	**0**
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4
0	a_3	2	2	–1	1	0
0	a_4	4	1	0	0	1
$z_j - c_j \rightarrow$			–6	2	0	0
6	a_1	1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	a_4	3	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$z_j - c_j \rightarrow$			0	–1	3	0
6	a_1	4	1	0↑	0	1
–2	a_2	6	0	1	–1	2
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	2	2

অবম $\left\{\frac{2}{2}, \frac{4}{1}\right\} = 1$

$$z_j - c_j \ge 0$$

চরম সমাধান $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

চরম Z = 12.

9.4 অপজাত সমাধান

আমরা মনে করতে পারি যে, মৌল সমাধনের ভিত্তি ভেক্টরের সংশ্লিষ্ট চলগুলি সবই যদি > 0 তাহলে সেই সমাধানকে অপজাত নয় বলে বলা হয়।

কিন্তু ওই m সংখ্যক মৌল চলগুলির মধ্যে যদি এক বা একাধিক শূণ্য থাকে তখন ঐ সমাধানকে অপজাত বলা হয়।

সমাধান অপজাত হতে পারে দুধরণের জায়গায় ঃ

(i) প্রারম্ভিক মৌল কার্যকর সমাধানে এক বা একাধিক চলের মান শূণ্য হতে পারে। এক্ষেত্রে সমাধান অপজাত হয়।

(ii) (7.41) সমীকরণে দেখেছি

$$\theta = \frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \text{অবম} \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0 \right\}. \tag{9.7}$$

এখন যদি $\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \frac{x_{Bi}}{y_{ij}}.\, i \neq r$, সত্য হয় i-এর একাধিক মানের জন্য, তাহলে $\hat{x}_{Bi} = 0$ হয় সেইসব স্তম্ভের জন্য যাদের জন্য θ-র মান অপসারিত স্তম্ভের θ-র মানের সমান হয়। অর্থাৎ (9.7)-এ অবম মান যদি একাধিক i-র জন্য প্রাপ্ত হয়, তাহলে নতুন মৌল কার্যকর সমাধান অপজাত হবে। নতুন ভিত্তি ভেক্টরের সংশ্লিষ্ট মৌল চলগুলির মান শূণ্য হবে, সেইসব স্তম্ভের জন্য যাদের জন্য θ-র মান একই হবে। উদাহরণের সাহায্যে এটা ব্যাখ্যা করা হবে ঃ

উদাহরণ 9.3. চরম $22x + 30y + 25y$

শর্তসাপেক্ষে $2x + 2y \leq 100$

$2x + y + z \leq 100$

$x + 2y + 2z \leq 100$

$x, y, z \geq 0$

অতিরিক্ত চল u, v, w-কে যোগ করে প্রদত্ত সমস্যাটিকে লেখা যায় চরম

$$Z = 22x + 30y + 25z + 0u + 0v + 0w$$

শর্তসাপেক্ষে, $2x + 2y + 2y + u = 100$

$2x + y + z + v = 100$

$x + 2y + 2z + w = 100$

T_1

			22	30	25	0	0	0
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_u	a_v	a_w
0	a_u	100	2	2	0	1	0	0
0	a_v	100	2	1	1	0	1	0
0	a_w	100	1	2	2	0	0	1
$z_j - c_j \rightarrow$			–22	–30	–25	0	0	0

অবম $\left\{\frac{100}{2}, \frac{100}{1}, \frac{100}{2}\right\} = 50$

$\uparrow$

$\frac{x_{B1}}{y_{12}} = \frac{x_{B2}}{y_{22}} = 50$

T_2

			22	30	25	0	0	0
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_u	a_v	a_w
30	a_2	50	1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0
0	a_v	50	1	0	1	$-\frac{1}{2}$	1	0
0	a_w	0	–1	0	2	–1	0	1
$z_j - c_j \rightarrow$			8	0	–25	15	0	0

অবম $\left\{\frac{50}{1}, \frac{0}{2}\right\} = 0$

$\uparrow$

T_3

			22	30	25	0	0	0
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_u	a_v	a_w
30	a_2	50	1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0
0	a_v	50	$\frac{3}{2}$	0	0	1	1	$\frac{1}{2}$
25	a_3	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$z_j - c_j \rightarrow$			$-4\frac{1}{2}$	0	0	$2\frac{1}{2}$	0	$12\frac{1}{2}$

			22	30	25	0	0	0
T_4 c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_u	a_v	a_w
30	a_2	$\frac{50}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
22	a_1	$\frac{100}{3}$	1	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
25	a_3	$\frac{50}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	0	$\frac{5}{2}$	3	1

$$z_j - c_j \geq 0$$

অপরদিকে যদি a_w কে প্রথম অপসারণ করা হয়। তাহলে

			22	30	25	0	0	0
$\tilde{T}_2$ c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_u	a_v	a_w
0	a_u	100	2	2	0	1	0	0
0	a_v	100	2	1	1	0	1	0
0	a_w	100	1	2	2	0	0	1
$z_j - c_j \rightarrow$			–22	↑–30	–25	0	0	0
$\tilde{T}_3$ 0	a_u	0	1	0	–2	1	0	–1
0	a_v	50	$\frac{3}{2}$	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$
30	a_2	50	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$
$z_j - c_j \rightarrow$			↑–7	0	5	0	0	15
$\tilde{T}_4$ 22	a_1	0	1	0	–2	1	0	–1
0	a_v	50	0	0	3	$-\frac{3}{2}$	1	1
30	a_2	50	0	1	2	$-\frac{1}{2}$	0	1
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	–9 ↑	7	0	8

অবম $\left\{\frac{0}{1}, \frac{50}{3/2}, \frac{50}{1/2}\right\} = 0$

$$\frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$$

$$\frac{50}{2} = 25$$

			22	30	25	0	0	0
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\tilde{T}_5$ 22	a_1	$\frac{100}{3}$	1	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
25	a_3	$\frac{50}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
30	a_2	$\frac{50}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	0	$\frac{5}{2}$	3	11

$z_j - c_j \geq 0$

অতএব চরম সমাধান প্রাপ্ত হল।

লক্ষণীয় যদিও প্রথমদিকে সমাধান অপজাত ছিল, শেষপর্যন্ত আমরা চরম সমাধান পেয়েছি প্রথমে a_u-কে অপসারণ করে এবং পরে a_w কে অপসারণ করে।

এক্ষেত্রে বলা যায় যে অপজাত সমাধান উদ্ভূত সমস্যা সমাধান করা গেছে।

মন্তব্য 9.3. অনেক সময় অবম $\left\{\frac{x_{Bi}}{y_{ij}} \cdot y_{ij} > 0\right\}$ প্রাপ্ত হয় i-এর একাধিক মানের জন্য 1 সেখানে যে কোনো i কে নিয়ে অর্থাৎ a_i কে অপসারণ করলে আমরা শেষপর্যন্ত প্রথম টেবিলে এসে পৌঁছই। এইরকম পরিস্থিতিকে 'cycling' বা আবর্তের মধ্যে পড়া বলা হয়।

মন্তব্য 9.4. গণিতবিদ্ বিল একটা উদাহরণের L (ঘোষ এবং চক্রবর্তীর, 2001) সাহায্যে এই 'cycling' ঘটনা দেখিয়েছেন। এই 'cycling' কে কাটিয়ে ওঠার জন্য চারনেস একটা পদ্ধতি উদ্ভাবন করেছেন। সে পদ্ধতিটা গণনার গতিটা বিশেষভাবে কমিয়ে দেয়। যাইহোক এই বিষয় পাঠক্রমের এক্তিয়ারের বাহিরে। সেইজন্য আমরা এগুলির বিশদ আলোচনা করব না।

উদাহরণ 9.4. চরম $Z = 3x_1 - 9x_2$ [TAHA (1982)]

শর্তসাপেক্ষে
$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

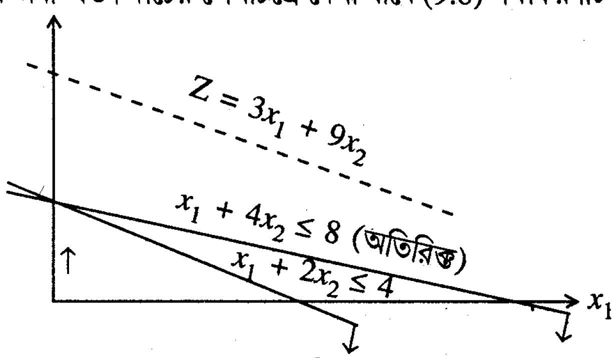
অতিরিক্ত চল x_3, x_4 যোগ করে সমস্যাটিকে লেখা যায়

$$\text{চরম } Z = 3x_1 + 9x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \quad (9.8)$$
$$x_1 + 2x_2 + x_1 = 4 \quad (9.9)$$
$$x_1.x_2.x_3.x_4 \geq 0$$

c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1 (3)	a_2 (9)	a_3 (0)	a_4 (0)	
0	a_3	8	1	4	1	0	$\frac{x_{Br}}{y_{rj}}$ = অবম $\left\{\frac{x_{B1}}{y_{12}}\right.$
0	a_4	4	1	2	0	1	$\left.\frac{x_{B2}}{y_{22}}\right\} = 2$
$z_j - c_j \rightarrow$			-3	$\uparrow -9$	0	0	
9	a_2	2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	অবম $\left\{\frac{2}{\frac{1}{4}}, \frac{0}{\frac{1}{2}}\right\} = 0$
0	a_4	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	
$z_j - c_j \rightarrow$			$-\frac{3}{4}\uparrow$	0	$\frac{9}{4}$	0	
9	a_2	2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
0	a_1	0	1	0	-1	2	
$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	

অপজাত সমাধানের ব্যবহারিক ইঙ্গিত ঃ

চরম সমাধান $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0$ ($x_1 = 0, x_2 = 2$) এই বিন্দুটি (9.8) ও (9.9) দুটি সরলরেখার উপর অবস্থিত। নীচের লেখচিত্রে দেখা যাবে (9.8) সমীকরণটি অতিরিক্ত (redundant)।



চিত্র 9.1

9.5 বিকল্প চরম বা অবম

আমাদের খেয়াল রাখতে হবে যে, একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার

(i) একাধিক চরম (অবম) সমাধান থাকতে পারে।

কিন্তু (ii) বিষয়াত্মক অপেক্ষকের চরম (অবম) মান অনন্য।

9.1. সংজ্ঞা ঃ বন্ধনকারী শর্ত (Binding constraint) :

একটি শর্তকে বন্ধনকারী শর্ত বলা হয় যদি একটি **চরম (অবম) বিন্দুগামী বিকল্প চরম (অবম)।**

যখন বিষয়াত্মক অপেক্ষক বন্ধনকারী শর্ত-এর সমান্তরাল হয়, তখন ওই বিষয়াত্মক অপেক্ষক একাধিক সমাধান বিন্দতে একই চরম মান প্রাপ্ত হয়। এই সমাধান বিন্দুসমূহকে বিকল্প চরম (অবম) সমাধান বলা হয়। নীচের উদাহরণ লক্ষ্যণীয়।

উদাহরণ 9.5. চরম $Z = 2x_1 + 4x_2$

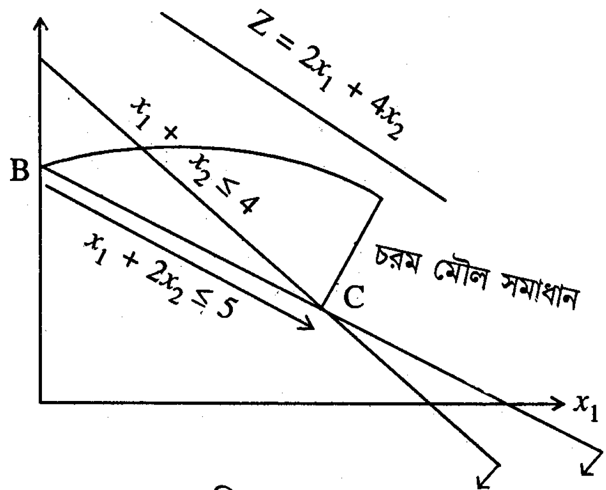
শর্তসাপেক্ষে $x_1 + 2x_2 \leq 5$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

অতিরিক্ত চলযোগ করে সমস্যাটিকে লেখা যায়,

$$\text{চরম } Z = 2x_1 + 4x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 4$$
$$x_1, x_2, x_4 \geq 0$$



চিত্র 9.2

			3	9	0	0	
c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	
0	a_3	5	1	2	1	0	অবম $\left\{\frac{5}{2}, \frac{4}{1}\right\}$
0	a_4	4	1	1	)	1	$= \frac{5}{2}$
$z_j - c_j \rightarrow$			–3	–9	0	0	
9	a_2	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1 ↑	$\frac{1}{2}$	0	অবম $\left\{\frac{2}{\frac{1}{4}}, \frac{0}{\frac{1}{2}}\right\} = 0$
0	a_4	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$z_j - c_j \geq 0$
$z_j - c_j \rightarrow$			$\frac{3}{2}$	0	$\frac{9}{2}$	0	

অতএব চরম সমাধান $\left\{\begin{array}{l} x_4 = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{array}\right.$ বিন্দু B

চরম Z = 10

আবার সমাধান বিন্দু $C \left\{\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{array}\right.$ $Z = 10$

তাহলে B বিন্দুতে Z-এর মান 10

C বিন্দুতে Z-এর মান 10

BC রেখাংশের উপর যে-কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\tilde{x}_1 = \alpha.0 + (1-\alpha).3 = 3(1-\alpha)$$

$$\tilde{x}_2 = \alpha.\frac{5}{2} + (1-\alpha)1 = \frac{5}{2}\alpha + (1-\alpha) = 1 + \frac{3}{2}\alpha$$

$$\tilde{x}_3 = \alpha.0 + (1-\alpha)0 = 0$$

$$\tilde{x}_4 = \alpha.0 + (1-\alpha).0 = 0$$

$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4)$-এর Z-এর মান = 10

অতএব BC রেখাংশের যেকোনো বিন্দুতে Z-এর মান = 10.

উপপাদ্য 9.2. যদি $x^1, x^2, \ldots\ldots, x^k$ একই রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার বিভিন্ন মৌল কার্যকর সমাধান হয়, তাহলে ঐ ভেক্টরসমূহের উত্তল সমাবেশও একটি চরম সমাধান।

ধরা যাক $x = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x^i,\ \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1$

যেহেতু প্রতি $x^i \geq 0,\ x \geq 0$

যেহেতু x^i সমীকরণতন্ত্রকে সিদ্ধ করে,

$$Ax^i = b$$

অতএব $AX = A\left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i x^i\right) = b$

অথবা $\sum_{i=1}^{k} \mu_i Ax^i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i b = b$

অতএব $Ax = b$

সুতরাং x একটি মৌল কার্যকর সমাধান।

ধরা যাক, $Z^0 = cx^i$ তাহলে

$$cx = \sum_{i=1}^{k} \mu_i cx^i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i Z^0 = Z^0$$

সুতরাং x একটি মৌল কার্যকর সমাধান।

9.6 সমাধান কার্যকর কি না?

প্রসঙ্গ ঃ একটি রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার কার্যকর সমাধান না থাকলে সেটা সিম্প্লেক্স কলনবিধির সাহায্যে কি করে নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণের সাহায্যে আমরা সেটা ব্যাখ্যা করব।

উদাহরণ 9.5. চরম $Z = 3x_1 + 2x_2$

শর্তসাপেক্ষে, $2x_1 + x_2 \leq 2$

$3x_1 + 4x_2 \geq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

অতিরিক্ত চল, উদ্বৃত্ত চল ও কৃত্রিম চল যোগ করে সমস্যাটিকে লেখা যায়।

চরম $Z = 3x_1 + 2x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 - Mx_5$. $M > 0$ বৃহৎ সংখ্যা

শর্তসাপেক্ষে, $2x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$3x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 12$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

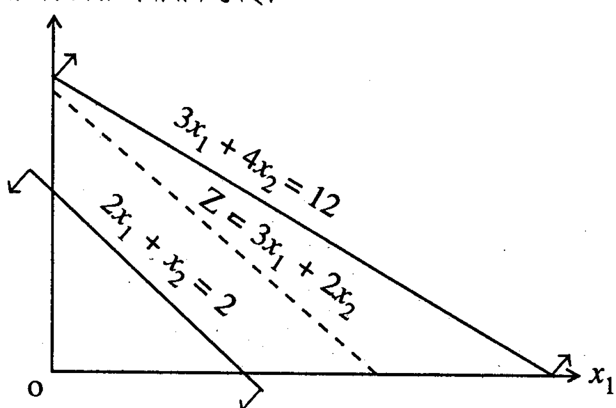
			3	2	0	0	–M	
T_1	c_B	ভিত্তি ভেক্টর	a_1	a_2	a_3	a_4	a_4	b
	0 –M	a_3 a_5	2 3	1 4	1 0	0 –1	0 1	2 12
	$z_j - c_j \rightarrow$		–3M –3	–4M ↑–2	0	M	0	
T_2	2 –M	a_2 a_5	2 –5	1 0	1 –4	0 –1	0 1	2 4
	$z_j - c_j \rightarrow$		5M –3	–2 ↑	4M	M	0	
	2 –M	a_2 a_5	2 –5	1 0	1 –4	0 –1	0 1	2 4
	$z_j - c_j \rightarrow$		5M +1	0 ↑	4M +2	M	0	

অবম $\left\{\frac{2}{1}, \frac{12}{4}\right\} = 2$

যদিও সব j-এর মানের জন্যই $z_j - e_j > 0$

কৃত্রিম চল অপসারিত হয়নি। (লেখচিত্র দেখুন)

অতএব সমস্যাটির কোনো কার্যকর সমাধান নেই।



চিত্র 9.3

উদাহরণ 9.6 : চরম $Z = 4x_1 + 3x_1$

শর্তসাপেক্ষে,
$$x_1 + x_2 \le 50$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 80$$
$$3x_1 + 2x_2 \ge 140$$
$$x_j \ge 0 \; j = 1, 2$$

অতিরিক্ত চল x_3, উদ্বৃত্ত চল x_4, x_5 কৃত্রিম চল x_6, x_7 যোগ করলে সমস্যাটি যে চেহারা নেয় সেটি এইরূপ ঃ চরম $Z = 4x_1 + 3x_2 + 0.x_3 + 0.4x + 0.x_5 - Mx_6 - Mx_7$, $M > 0$, বৃহৎসংখ্যা

শর্তসাপেক্ষে,
$$x_1 + x_2 + x_3 = 50$$
$$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_6 = 80$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_5 \mp x_7 = 140$$
$$x_j \ge 0, j = 1, 2, \ldots. 7.$$

				4	**3**	**0**	**0**	**0**	**–M**	**–M**
T_1	22	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
	0	a_3	50	1	1	1	0	0	0	0
	–M	a_6	80	1	2	0	–1	0	1	0
	–M	a_7	140	3	2	0	0	–1	0	1
	$z_j - c_j \rightarrow$	ভিত্তি ভেক্টর		–4M ↑–4	–4M –3	0	M	M	0	0
T_2	0	a_3	$\frac{10}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
	–M	a_6	$\frac{100}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
	4	a_1	$\frac{140}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
	$z_j - c_j \rightarrow$			0	$-\frac{4M}{3}$ $-\frac{1}{3}$ ↑	0	$\frac{M}{3}$	$-\frac{M}{3}$ $-\frac{4}{3}$	0	$2\frac{M}{3}$ $+\frac{4}{3}$

T_1: অবম $\left\{\frac{50}{1}, \frac{80}{1}, \frac{140}{3}\right\} = \frac{140}{3}$

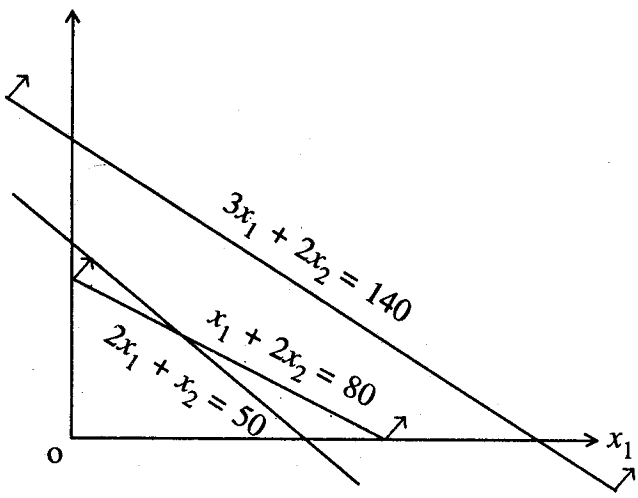
T_2: অবম $\left\{\frac{\frac{10}{3}}{\frac{1}{3}}, \frac{\frac{100}{3}}{\frac{4}{3}}, \frac{\frac{140}{3}}{\frac{2}{3}}\right\} = 10$

				4	3	0	0	0	$-M$	$-M$
T_3	c_B	ভিত্তি ভেক্টর	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
	3	a_2	10	0	1	$\frac{1}{3}$	0	1	0	-1
	$-M$	a_6	20	0	0	-4	$-\frac{1}{3}$	-1	1	1
	4	a_1	40	1	0	-2	0	-1	0	$\frac{5}{3}$
	$z_j - c_j \rightarrow$			0	0	$4M$ -8	$\frac{M}{3}$		$\frac{M}{3}$ -4	0

$$z_j - c_j \geq 0$$

সমাধান চরম হওয়ার শর্ত পূর্ণ হয়েছে। ভিত্তি ভেক্টরে একটি কৃত্রিম ভেক্টর a_6 আছে। (অর্থাৎ কৃত্রিম চলের সংশ্লিষ্ট ভেক্টর) এবং x_6-এর মান ধনাত্মক।

অর্থাৎ প্রদত্ত সংস্যার কোনো কার্যকর সমাধান নেই। (চিত্র দেখুন)



চিত্র 9.4

তাহলে দেখা গেল

যদি ভিত্তি চলের মধ্যে **কৃত্রিম চল** বিদ্যমান থাকে এবং তার মান যদি **ধনাত্মক** হয়, সেক্ষেত্রে সমস্যাটির কোনো **কার্যকর** সমাধান থাকবে না।

9.7 সারাংশ

এই এককের মূল উদ্দেশ্য হল রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সমাধানে সিম্‌প্লেক্স কলনবিধির সফলতা তুলে ধরা। যেমন—সিম্‌প্লেক্স কলনবিধির সাহায্যে নির্ণয় করা যায়—

(i) সমস্যার সমাধান সীমাবদ্ধ কি না।

(ii) সমস্যার সমাধান অপজাত কিনা।

(iii) সমস্যার বিকল্প সমাধান আছে কিনা।

(iv) সমস্যাটির কোনো কার্যকর সমাধান আদৌ আছে কিনা।

এইগুলো দেখানোর পর বলা যায় রৈ. প্রো. স. র. সমাধানে সিম্‌প্লেক্স কলনবিধি সম্পূর্ণ সফল।

9.8 অনুশীলনী

1. সিম্‌প্লেক্ পদ্ধতি অবলম্বন করে দেখান যে নীচের সমস্যার একটি সমাধান আছে যেটি সীমাবদ্ধ নয় ঃ

চরম $Z = 3x_1 + 4x_2$

শর্তসাপেক্ষে, $x_1 - x_2 \geq 0$

$-x_1 + 3x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

2. সিম্‌প্লেক্স পদ্ধতি অবলম্বন করে দেখান যে নীচের সমস্যার একটিসমাধান আছে যেটি সীমাবদ্ধ নয় ঃ

চরম $Z = 2x_2 + x_3$

শর্তসাপেক্ষে, $x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 7$

$-3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

3. নীচের সমস্যাটির চারটির বিকল্প মৌল সমাধান নির্ণয় করল ঃ

চরম $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

শর্তসাপেক্ষে, $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10$

$x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1 \qquad \leq 1$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

4. সিম্প্লেক্স পদ্ধতির সাহায্যে দেখান যে নীচের সমস্যাটির একটি বিকল্প সমাধান আছে ঃ

চরম সমাধান $Z = 4x_1 + 14x_2$

শর্তসাপেক্ষে, $2x_1 + 7x_2 \leq 21$

$7x_1 + 2x_2 \leq 21$

$x_1, x_2 \geq 0$

5. দেখান যে নীচের সমস্যার একটি অপজাত সমাধান আছে এবং সমস্যাটি সমাধান করুন ঃ

চরম $Z = 22x_1 + 30x_2 + 25x_3$

শর্তসাপেক্ষে, $2x_1 + 2x_2 \leq 100$

$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 100$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 100$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

6. সমাধান করুন ঃ

(*i*) চরম $Z = 2x_1 + x_2$

শর্তসাপেক্ষে, $4x_1 + 3x_2 \leq 12$

$4x_1 + x_2 \leq 18$

$4x_1 + x_2 \leq 8$

$x_1, x_2 \geq 0$

(*ii*) চরম $Z = 2x_1 + x_2 + 10x_3$

শর্তসাপেক্ষে, $x_1 - 2x_3 = 0$

$x_2 + x_3 = 1$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

7. নীচের সমস্যার একটি কার্যকর চরম সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

চরম $Z = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3$

শর্তসাপেক্ষে, $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$

$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

8. দেখানে যে নীচের সমস্যাটির কোনো কার্যকর সমাধান নেই ঃ

অবম $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

শর্তসাপেক্ষে, $-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

9. সমাধান করুন ঃ

চরম $Z = 3x_1 + 2x_2$

শর্তসাপেক্ষে, $2x_1 + x_2 \leq 2$

$3x_1 + 4x_2 \geq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

10. দ্বি-পর্যায় পদ্ধতি দিয়ে সমাধান করুন ঃ

চরম $Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$

শর্তসাপেক্ষে, $-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$

$-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

9.8 অনুশীলনী

3. চারটি বিকল্প মৌল সমাধান ঃ $\left(0, 0, \frac{10}{3}, 0{\cdot}5, 1\right), (0{\cdot}5, 0{\cdot}0, 0{\cdot}1)\,;\left(1, 4\frac{1}{3}, 0{\cdot}0, 0\right) : (10, 3, 0, 4, 0)$

4. $\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{21}{9} \\ x_2 = \frac{21}{9} \end{array}\right\}$ বা, $\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{array}\right\}$, চরম $Z = 42$

5. $x_1 = \frac{100}{3}, x_2 = \frac{50}{3}, x_3 = \frac{50}{3}$, চরম $Z = 1650$

6. (*i*) $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 2$, চরম $Z = 5$ (*ii*) $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1$, চরম $Z = 14$.

7. $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0$, চরম $Z = 4$

8. কোনো কার্যকর সমাধান নেই।

9. কোনো কার্যকর সমাধানে নেই।

10. কোনো কার্যকর সমাধানে নেই।

তথ্যসূত্র ঃ

1. G. HADLEY [1974] : LINEAR PROGRAMMING, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMP.

2. S. I. GASS [1988] : LINEAR PROGRAMMING, N. Y., MC-GRAW HILL

3. H. A. TAHA, [1982] : OPERATIONS RESEARCH, MACMILLAN PUBLISHING CO. N.Y.

3. J. C. CHAKARVORTY, P. R. GHOSH [2001] : LINEAR PROGRAMMING & GAME THEORY, MOULIK LIBRARY.

4. J. K. SHARMA [2003] : OPERATIONS RESEARCH, MACHILLAN INDIA LTD.

5. T. MOULIK [1980] : LINEAR PROGRAMMING U. N. DHUR & SONS PRIVATE LTD.

6. P. M. KARAK [1988] : LINEAR PROGRAMMING & THEORY OF GAMES, PUB. R. KARAK, 1

7. N. S. KAMBO [1984] : MATHEMATICAL PROGRAM MING, TECHNIQUES, AFFILATED EAST-NEST. PRESS PVT. LTD.

8. M. S. BAZARAA ET. ALL [1979] : NONLINEAR PROGRAMMING JOHN WILEY & SONS N.Y.

পরিভাষা [BENGALI VERSION]

1. Additive — যোজ্য
2. Algorithm — কলনবিধি
3. Allocation Problem — বরাদ্দ সমস্যা
4. Artificial Variable — কৃত্রিম চল
5. Assembly Line Balancing — নির্দিষ্ট ধারায় যন্ত্রাংশ জোড়ার সমস্যা
6. Assumption — স্বীকার
7. Augmented Matrix — বর্ধিত ম্যাট্রিক্স
8. Basic Solution — মৌল সমাধান
9. Basis — ভিত্তি
10. Basis Matrix — বেসিস ম্যাট্রিক্স
11. Binding Constraints — বন্ধনকারী শর্ত
12. Blending Problem — মিশ্রণ সমস্যা
13. Boundary Point — পরিধিস্থ বিন্দু
14. Boundest Set — সীমাবদ্ধ সেট্
15. Calculus of Variation — ভেদ কলনবিদ্যা
16. Certainty — নিশ্চয়তা
17. Closed Ball — বদ্ধ নিরেট গোলক
18. Closed Set — বদ্ধ সেট
19. Column Vector — স্তম্ভ ভেক্টর
20. Commutative — বিনিময়যোগ্য
21. Complement of a Set — পূরক সেট্
22. Component — উপাংশ
23. Consistent — সঙ্গাত
24. Convex hull — উত্তল আধার
25. Constraints — বাধাগোষ্ঠী

25.a. Continuity — সান্তত্য

26. Convex Combination — উত্তল সমবায়
27. Cycling — আবর্ত
28. Decision-making problem — সিদ্ধান্ত গ্রহণকারী সমস্যা
29. Deterministic — নিরূপণধর্মী
30. Diet Problem — সুষম খাদ্যতালিকা সমস্যা
31. Degenerate — অপজাত
32. Equality — সমতা
33. Element, Key — মূল উপাদান
34. Exterior Point — বহিঃস্থ বিন্দু
35. Extreme Point — প্রান্তিক বিন্দু
36. Farm Economics — খামার অর্থনীতি
37. Farm Management — খামার পরিচালনা
38. Feasible Solution — কার্যকর সমাধান
39. Feasible region — কার্যকর অঞ্চল
40. Financial Management — অর্থসম্পদ পরিচালনা
41. Half Space — অর্ধদেশ
42. Homogeneous — সমঘাত, অন্তর্সম
43. Hull, Convex — উত্তল আধার
44. Hyperplane — পরাসমতল
45. Hypersphere — পরাগোলক
46. Inequality — অসমীকরণ
47. Interior Point — অন্তঃস্থ বিন্দু
48. Intersection — ছেদ
49. Inconsistent — অসঙ্গত
50. Infeasible Solution — অকার্যকর সমাধান, কার্যকারিতাহীন সমাধান
51. Investment Problem — বিনিয়োগ সমস্যা
52. Key element — মূল উপাদান
53. Limiting Point — সীমাবিন্দু

54.	Linear Programming Problem	—	রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা
55.	Linearly Dependent	—	রৈখিকভাবে পরাধীন বা নির্ভরশীল
56.	Marketing Management	—	বাজার পরিচালনা
56.a.	Mathematicsl Programming	—	গাণিতিক প্রোগ্রামিং
56.b.	Matrix, inverse	—	বিপরীত ম্যাট্রিক্স
57.	Maximum	—	চরম
58.	Minimum	—	অবম্য
59.	Negative	—	ঋণাত্মক
60.	$\in$-neighbourhood	—	$\in$-সামীপ্য
61.	n-dimensional Eeceiduean space	—	n-মাত্রিক ইউক্লিডীয় দেশ
62.	Non Degenerate	—	অনপজাত
63.	Non Singular	—	অবিশিষ্ট
64.	Objective Function	—	বিষয়াত্মক অপেক্ষক
65.	Open ball	—	মুক্ত নিরেট গোলক
66.	Optimum alternate	—	বিকল্প চরম (অবম)
67.	Parameter	—	প্রচল
68.	Personal Management	—	কর্মী পরিচালনা
69.	Portfolio Selection	—	পোর্টফোলিও নির্বাচন
69.a.	Points of Closure	—	বদ্ধতা বিন্দু
69.b.	Polyhedron	—	বহুতলক
70.	Positive	—	ধনাত্মক
71.	Product Mix	—	মিশ্র উপাদান
72.	Profit Planning	—	লাভ পরিকল্পনা
73.	Premultiply	—	পূর্বগুণন
74.	Proper Subset	—	প্রকৃত উপসেট
75.	Proper Subspace	—	প্রকৃত উপদেশ
76.	Random	—	সম্ভাবনাশ্রয়ী
77.	Rational number	—	মূলদ সংখ্যা

78. Redundant — অতিরিক্ত
79. Separated Set — বিচ্ছিন্ন সেট্
80. Singular — বিশিষ্ট
81. Strictly Separate — যথাযথভাবে বিচ্ছিন্ন
82. Supporting hyperplane — অবলম্বন পরাসমতল
83. Slack Variable — ঘাটতি চল
84. Space — দেশ
85. Slide Down — নীচের দিকে বিসর্পণক্রিয়া
86. Subspace — উপদেশ
87. Sphere — গোলক
88. Surplus Variable — উদ্‌বৃত্ত চল
89. Symmetric — প্রতিসম
90. Tetrahedron — চতুর্তলক
91. Trim Loss — কাটছাঁট জনিত ক্ষতি
92. Transportation Problem — পরিবহন সমস্যা
93. Unbounded Set — অনাবদ্ধ সেট্
94. Unit Circular disc — একক বৃত্তাকার চাক্তি
95. Uncertain — অনিশ্চিত
96. Union — সংযোগ

NOTES

NOTES