মানুষের জ্ঞান ও ভাবকে বইয়ের মধ্যে সঞ্চিত করিবার যে একটা প্রচুর সুবিধা আছে, সে কথা কেহই অস্বীকার করিতে পারে না। কিন্তু সেই সুবিধার দ্বারা মনের স্বাভাবিক শক্তিকে একেবারে আচ্ছন্ন করিয়া ফেলিলে বুদ্ধিকে বাবু করিয়া তোলা হয়।

— রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর

ভারতের একটা mission আছে, একটা গৌরবময় ভবিষ্যৎ আছে ; সেই ভবিষ্যৎ ভারতের উত্তরাধিকারী আমরাই। নূতন ভারতের মুক্তির ইতিহাস আমরাই রচনা করছি এবং করব। এই বিশ্বাস আছে বলেই আমরা সব দুঃখ কষ্ট সহ্য করতে পারি, অন্ধকারময় বর্তমানকে অগ্রাহ্য করতে পারি, বাস্তবের নিষ্ঠুর সত্যগুলি আদর্শের কঠিন আঘাতে ধূলিসাৎ করতে পারি।

— সুভাষচন্দ্র বসু

Any system of education which ignores Indian conditions, requirements, history and sociology is too unscientific to commend itself to any rational support.

— Subhas Chandra Bose

Price : Rs. 225.00

Published by : Netaji Subhas Open University, 1 Woodburn Park, Kolkata–700 020 and
Printed at : Calcutta Repro Graphics, 36/8B Sahitya Parishad Street, Kolkata-700 006

NETAJI SUBHAS OPEN UNIVERSITY

STUDY MATERIAL

ELECTIVE MATHEMATICS HONOURS

EMT 02

Integral Calculus & Differential Equations

• Differential Equations •

Block 2

প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমতো কোনও বিষয়ে সাম্মানিক (honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়ণের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে — যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয়সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেই সঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এই সব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন ; যখনই কোনো শিক্ষার্থী এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণ-ক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশ কিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

Ì ÓÖìøô ‘õ¿’ ™Û ÐWë ¼ëôìë

উপাচার্য

দ্বিতীয় পুনর্মুদ্রণ : ফেব্রুয়ারি, 2013

ভারত সরকারের দূরশিক্ষা পর্ষদের বিধি অনুযায়ী এবং অর্থানুকূল্যে মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations and financial assistance of the Distance Education Council, Government of India.

পরিচিতি

বিষয় : গণিতবিদ্যা **সাম্মানিক স্তর**

পাঠক্রম : পর্যায় ঃ EMT 02 : 02

	রচনা	সম্পাদনা
একক 7	ড. সর্বাণী চক্রবর্তী	ড. অস্থির দাশগুপ্ত
একক 8	ড. শক্তিকান্ত চক্রবর্তী	ঐ
একক 9	ড. যুধিষ্ঠির দে	ঐ
একক 10	ঐ	ঐ
একক 11	ড. সব্যসাচী চক্রবর্তী	ঐ
একক 12	ঐ	ঐ

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

EMT 02

ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাস (সমাকল গণিত)

ও

ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ (অন্তরকল সমীকরণ)

পর্যায়

2

ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ

একক 7 ❑ ডিফারেনশিয়াল সমীকরণের উৎপত্তি, ক্রম ও ঘাত

(Differential Equations–Genesis, Order and Degree)

গঠন

7.1 প্রস্তাবনা

আমাদের পারিপার্শ্বিকে অনেক কিছুই আমরা দেখি যা নিয়ত পরিবর্তিত হয়,— যেমন আকাশে তারার অবস্থান, বা, প্রতিদিনের তাপমাত্রা, বা এমনকি স্টক এক্স্চেন্জের সূচক। এইগুলি পরিবর্তিত হয় সময়ের সঙ্গে। আবার, ইলাসটিক দড়ি কতটা লম্বা হবে, তা নির্ভর করবে কতখানি টান তার প্রান্তে দেওয়া হচ্ছে তার ওপর। কতখানি জোরের সঙ্গে আঘাত করা হচ্ছে, তার ওপর নির্ভর করে একটি ক্রিকেট বল কতখানি উঁচুতে উঠবে।

গণিতের ভাষায় বলা যায় যে, যে সব রাশির মান পরিবর্তিত হয়, তা হল চলরাশি। এর মধ্যে কোনোটি স্বাধীনভাবে পরিবর্তিত হতে পারে, যেমন সময়; আবার তারাদের অবস্থান ইত্যাদি চলরাশি নির্ভর করে সময়ের ওপর। এরা হল নির্ভরশীল বা অধীন চলরাশি (independent and dependent variables)। এদের সম্বন্ধে আপনারা এর পূর্বেই পড়েছেন। এই প্রসঙ্গে ফাংশান (function) বা অপেক্ষকের কথাও মনে করা যায়।

বিশেষভাবে চিন্তা করা যাক, একটিমাত্র স্বাধীন চলরাশি x এর অপেক্ষক y এর কথা (y is a function of single variable x)। অবকলজ বা ডেরিভেটিভের (derivative) সংজ্ঞা থেকে জানি যে, $\frac{dy}{dx}$ হল x এর সঙ্গে y-এর পরিবর্তনের হার। আবার দ্বিমাত্রিক তলে $y = f(x)$ এই বক্ররেখাটির (x,y) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x

অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে যে কোণে নত, তার ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্টই হল $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$। এই সকল ব্যাখ্যা আপনারা আগেই দেখেছেন। তাই পূর্ব প্রসঙ্গের ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ অবতারনা করে দু একটি উদাহরণের মাধ্যমে বর্তমানের বিষয়টি আলোচনা করা যাক।

যেমন, $y = 2x+1$ একটি সরলরেখা, এবং এক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx} = 2$। অর্থাৎ, রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে যে কোণে নত, তার tangent হল 2। সরলরেখাটিকে $\frac{dy}{dx} = 2$ এই রূপেও লেখা যায়। এমনকি এই সরলরেখার সমান্তরাল যত সরলরেখা, যেমন $y = 2x + c$, (c একটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক (arbitrary constant) বা প্রচল (parameter), যা যে কোনো সসীম বাস্তব মান নিতে পারে), এই রূপের সকল সরলরেখা গুচ্ছের (family of straight lines) জন্যে $\frac{dy}{dx} = 2$ সম্পর্কটি সত্য।

এটিকে উপরিউক্ত সরলরেখাগুচ্ছের ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ বা অন্তরকল সমীকরণ বলা হয়।

গতিবিদ্যা থেকেও উদাহরণ সংগ্রহ করা যায়— যেমন, ধরা যাক একটি বস্তুকণা (particle) সরলরেখায় চলছে। ওই সরলরেখার ওপর একটি স্থিরবিন্দু o থেকে t সময়ে (at time t) কণাটির সরণ (displacement) হল x। x অবশ্যই সময় (t)-এর অপেক্ষক। কণাটির t সময়কালীন গতিবেগ v হল ঠিক ওই সময়ে x এর পরিবর্তনের হার, অর্থাৎ, $v = \frac{dx}{dt}$। আবার v, t এর অপেক্ষক, এবং ত্বরণ (acceleration) এর সংজ্ঞা অনুযায়ী,

t সময়ে কণাটির ত্বরণ $f = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$।

x ও t এর মধ্যে সম্পর্কটি যদি আমাদের সুস্পষ্টভাবে জানা থাকে, যেমন, $x = 3t^2 + 2t$, বা, $x = te^t$, বা $x = 2\cos 3t$, তবে যে কোনো সময়ে কণাটির গতিবেগ ও ত্বরণ বের করা যায়। শেষের উদাহরণে,

$$v = -2.3 \sin 3t,$$

$$f = -2.3.3\cos 3t = -9x,$$

অর্থাৎ, $\frac{d^2x}{dt^2} = -9x$, এটিই সেই বস্তুকণার গতিপথের সমীকরণ, যার সরণ t সময়ে $2\cos 3t$। এই সমীকরণটিও ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ। এক্ষেত্রেও, যদি $x = a\cos 3t$ হয়, যেখানে a যে কোনো ধ্রুবসংখ্যা, তাহলেও গতিপথের ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ একই থাকে।

বাস্তবে অনেক ক্ষেত্রেই আমাদের ডিফারেনশিয়াল সমীকরণের সাহায্য নিতে হয়। গতিবিদ্যাতে এর ব্যবহার অনেকদিনের, যা শুরু করেন নিউটন (1676) ও লাইবনিৎস (1684)। তেজস্ক্রিয় পদার্থের ক্ষয়ের পরিমাণ দেখে কোনো বস্তুর বয়স বের করতে হলে যে ডিফারেনশিয়াল সমীকরণের সমাধান করতে হয় তা আমরা পদার্থবিদ্যায় দেখেছি।

পূর্বের উদাহরণগুলিতে আমরা দেখেছি, কীভাবে একগুচ্ছ রেখাকে, একটিমাত্র ডিফারেনশিয়াল সমীকরণের দ্বারা প্রকাশ করা গেছে।

উদাহরণগুলিতে আমরা আরও দেখলাম, কীভাবে ডিফারেনশিয়াল সমীকরণের সৃষ্টি হতে পারে। এখন বাস্তব ক্ষেত্রে আমরা সাধারণত সমীকরণটি পাই এবং সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করার প্রয়োজন হয়। যেমন একটি গতিশীল কণার গতিপথের ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ দেওয়া আছে $\frac{d^2x}{dt^2} = \cos t$। এর থেকে t সময়ে কণাটির সরণ ইত্যাদি বের করতে হলে সমীকরণটিকে সমাধান করতে হয়। বিজ্ঞানের বহু শাখায় ডিফারেনশিয়াল সমীকরণের প্রয়োগ আছে।

7.2 উদ্দেশ্য

এই এককটিতে আমাদের উদ্দেশ্য হল —

- ডিফারেনশিয়াল সমীকরণের সংজ্ঞা দেওয়া ও এর সঙ্গে জড়িত অন্যান্য সংজ্ঞাগুলির সঙ্গে পরিচিত হওয়া।
- বিভিন্ন ধরনের ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ সম্পর্কে সংক্ষিপ্ত পরিচিতি দেওয়া।
- কীভাবে এই সমীকরণের সৃষ্টি হতে পারে, তা নিয়ে আলোচনা করা।

7.3 ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ (Differential Equation) বা অন্তরকল সমীকরণ

সংজ্ঞা ঃ যে সমীকরণে অন্তত একটি পদে কোন অধীন চলের অবকল সহগ, বা ডিফারেনশিয়াল বা অন্তরকলজ উপস্থিত থাকে, সেই সমীকরণকে ডিফারেনশিয়াল বা অন্তরকল সমীকরণ বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ —

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} = -m^2y$, m একটি ধ্রুবক

(ii) $2\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 100y = x^2e^{-5x}$

(iii) $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{5/3} = \frac{d^2y}{dx^2}$

(iv) $\frac{dy}{dx} + xy = 0$

(v) $x^2ydx + dy = 0$

(vi) $xy'' + y' + xy = 0$ যেখানে, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

(vii) $\frac{d^2I}{dt^2} + 5\frac{dI}{dt} + 8I = 100\sin 2t$

(viii) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$

(ix) $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$

(x) $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

উপরের উদাহরণগুলি থেকে বোঝা যাচ্ছে যে, ডিফারেনশিয়াল সমীকরণে উপস্থিত অবকল সহগগুলি সাধারণ অবকল সহগ হতে পারে, আবার আংশিক অবকল সহগও হতে পারে।

7.3.1 সাধারণ ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ ঃ (Ordinary Differential Equation)

যে ডিফারেনশিয়াল সমীকরণে কেবলমাত্র একটি স্বাধীন চলরাশির ওপর নির্ভরশীল অপেক্ষকের বিভিন্ন ক্রমের অন্তরকল বা অবকল সহগ উপস্থিত থাকে (এক্ষেত্রে অবকল সহগগুলিও সাধারণ), তাকে সাধারণ অন্তরকল সমীকরণ বা ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ বলা হয়। সংক্ষেপে একে ও ডি ই (O. D. E.) লেখা যায়। 7.3 এর উদাহরণগুলির মধ্যে (i) , (ii) , (iii) , (iv) , (v) , (vi) , (vii) হল সাধারণ ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ। এর মধ্যে গতিতত্ত্বে (mechanics) সমীকরণ (i) এর ব্যবহার বহুল। এটি Simple Harmonic সমীকরণ নামে প্রসিদ্ধ। সমীকরণ (vii) তড়িৎতত্ত্বে (Current electricity) ব্যবহৃত হয়, এটি এসি বিদ্যুতের সমীকরণ।

7.3.2 আংশিক ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ (Partial Differential Equation) বা আংশিক অন্তরকলন সমীকরণ।

যে ডিফারেনশিয়াল সমীকরণে একাধিক চলের অপেক্ষকের (Function of several variables) বিভিন্ন আংশিক অন্তরকলনগুলি (different partial derivatives) উপস্থিত থাকে, তাকেই আংশিক বা পারশিয়াল অন্তরকল সমীকরণ বলা হয়। 7.3 এর উদাহরণ (viii), (ix), (x) এই শ্রেণীভুক্ত। এর মধ্যে উদাহরণ (ix) হল বিখ্যাত ল্যাপলাসের (Laplace) সমীকরণ, বিভবতত্ত্বে (Potential Theory) যার প্রয়োগ আছে। সমীকরণ (x) একটি দড়ি বা মেমব্রেনের কম্পনের সমীকরণ।

7.3.3 সাধারণ অন্তরকল সহ-সমীকরণ (Simultaneous Ordinary Differential Equations)

ধরি, স্বাধীন চলরাশি x এর দুটি অপেক্ষক y ও z আছে। y, z ও এদের অন্তরকলনগুলি নিয়ে রচিত যদি একাধিক সমীকরণ একত্রে সত্য হয়, তবে এদের অন্তরকল সহ-সমীকরণ বলা হবে।

যেমন ঃ $$x\frac{dy}{dx}+y\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=u\,।$$
$$xy\frac{dy}{dx}+2\frac{d^2y}{dx^2}=v\,(x)$$

যেখানে u (x), v (x) দুটি প্রদত্ত অপেক্ষক। এই দুটি সমীকরণ থেকে y ও z এর জন্যে সমাধান করার চেষ্টা করা যায়।

7.3.4 রৈখিক ও অরৈখিক সাধারণ অন্তরকল সমীকরণ (Linear and Nonlinear Ordinary Differential Equations)

যে অন্তরকল/ডিফারেনশিয়াল সমীকরণে অধীন চল এবং তার ডেরিভেটিভ (অবকল) গুলি কেবল প্রথম ঘাতে (in first degree) উপস্থিত থাকে, এবং অধীন চল ও তার অন্তরকলজের কোনো গুণফল (product) উপস্থিত থাকে না, তাকে রৈখিক (linear) অন্তরকল/ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ বলা হয়। অন্যথায় সমীকরণ অরৈখিক।

7.3-এর উদাহরণ (i) ও (ii) রৈখিক।

$\frac{dy}{dx} = 1 + x^2y^2$ অরৈখিক, যেহেতু y^2 উপস্থিত।

$y\frac{dy}{dx} + x = 0$ অরৈখিক, যেহেতু $y\frac{dy}{dx}$ উপস্থিত।

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = \frac{d^2y}{dx^2}$ অরৈখিক, যেহেতু $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ উপস্থিত।

$\frac{d^3y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + 2xy = 0$ অরৈখিক, যেহেতু $\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}$ উপস্থিত।

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/2} - x = 0$, এটি কিন্তু রৈখিক সমীকরণ কারণ, অন্তরকলজটির ঘাত পূর্ণ সংখ্যায় নিলে আমরা পাই $\frac{dy}{dx} = x^2$, যেটি অবশ্যই রৈখিক।

7.4 সাধারণ অন্তরকল/ডিফারেনশিয়াল সমীকরণের ক্রম ও ঘাত (Order and Degree of O D E s)

একটি ODE-তে উপস্থিত সর্বোচ্চ ক্রমের (order) অবকলজ বা ডেরিভেটিভের ক্রমই হল ঐ সমীকরণের ক্রম।

যেমন,

$\frac{d^3y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 3y^2 = 0$ ক্রম 3

$\frac{dy}{dx} + xy^2 = 0$ ক্রম 1

$\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\frac{dy}{dx} + xy^2 = \cos x$ ক্রম 2

একটি ও ডি ই -তে উপস্থিত সর্বোচ্চ ক্রমের ডেরিভেটিভের যে ঘাত (degree বা index), তাকেই এই **সমীকরণের ঘাত বলা হয়।** কিন্তু মনে রাখা দরকার যে, ঘাত নির্ণয় করতে হলে প্রথমেই সমীকরণে উপস্থিত **ডেরিভেটিভগুলির সবকটিকেই** পূর্ণ সংখ্যার ঘাতে নিয়ে যেতে হবে। যেমন,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{d^2y}{dx^2}+5y=0$$

ঘাত 1 কারণ, যদিও $\frac{dy}{dx}$ এর ঘাত দুই, সর্বোচ্চ ক্রমের অবকলজ $\frac{d^2y}{dx^2}$ -র ঘাত মাত্র এক।

$$2y\frac{dy}{dx}+x=0$$

ঘাত 1, ক্রমও 1।

$$\left(\frac{d^3y}{dx^2}\right)^4+2\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}=e^x$$

ঘাত 4।

$$\sqrt[3]{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

এই সমীকরণকে লেখা হবে

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3$$

এবং, অতঃপর এর ঘাত 3 ।

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-w^2y$$

এর ক্রম দুই ও ঘাত এক।

একটি n -ক্রমের সাধারণ অবকল সমীকরণকে যদি $F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\ldots\ldots\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$ আকারে লেখা হয়, **তবে F অপেক্ষকে** $\frac{d^ny}{dx^n}$ এর ঘাতই হবে সমীকরণটির ঘাত।

7·5 ডিফারেনশিয়াল সমীকরণের সৃষ্টি (Formation of differential equations)

আমরা পূর্বেই আলোচনা করেছি কীভাবে $y = 2x+c$, (c একটি যে কোনো ধ্রুবক,) এই সব সরলরেখাকে, $\frac{dy}{dx}=2$ এই অন্তরকল সমীকরণরূপে প্রকাশ করা যায়। এরূপ আরও উদাহরণ হতে পারে,---- যেমন আদি বিন্দুতে কেন্দ্র, এরূপ বৃত্তদের সমীকরণ হল $x^2+y^2=r^2$, যেখানে r একটি যে কোনো সসীম সংখ্যা। x এর সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y},$$

অর্থাৎ, বৃত্তের (x,y) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x এর ধনাত্মক দিকের সঙ্গে যে কোণ করে, তার ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্ট হল $-\frac{x}{y}$ । $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ হল এই সমস্ত বৃত্তের অবকল সমীকরণ।

একটি অবকল সমীকরণের সাহায্যে তবে একগুচ্ছ বক্রকে, বা একগুচ্ছ ফাংশানকে প্রকাশ করা যায়। এখানে উপরের দুটি ক্ষেত্রেই আমরা যদৃচ্ছ ধ্রুবক (arbitrary constant), c ও r কে অপসারণ করেছি (elimination)।

আরও দু একটি উদাহরণ আলোচনা করা যাক।

সাধারণ উদাহরণ

1 $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$ এই বক্রগুলির জন্য ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ নির্ণয়।

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} \qquad \text{(i)}$$

একবার অবকলন করে পাই

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(c_1e^{2x} - c_2e^{-2x}\right)$$

আবার অবকলনের পরে,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2.2\left(c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}\right) = 4y$$ (i) এর সাহায্যে।

অতঃপব, c_1, c_2 অপসারিত হয়ে অবকল সমীকরণটি হল $\frac{d^2y}{dx^2} = 4y$ (উঃ)

2. $v = \frac{A}{r} + B$ এই সম্পর্কটি থেকে যদৃচ্ছ ধ্রুবক A, B অপসারণ করে অবকল সমীকরণ নির্ণয় করুন।

$$v = \frac{A}{r} + B \qquad \text{(i)}$$

একে r -এর সাপেক্ষে অবকলন করে,

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{A}{r^2} \qquad \text{(ii)}$$ এবং, পুনরায় অবকলন করে,

$$\frac{d^2v}{dr^2} = \frac{2A}{r^3} \qquad \text{(iii)}$$

(ii) ও (iii) এর থেকে পাই,

$$-r^2\frac{dv}{dr} = A = \frac{r^3}{2}\frac{d^2v}{dr^2}$$

অর্থাৎ, অবকল সমীকরণটি হল, (এখানে A ও B অপসারিত হয়ে)

$$-r^2\frac{dv}{dr} = \frac{r^3}{2}\frac{d^2v}{dr^2}$$

বা, $$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} = 0$$ (উঃ)

জ্যামিতি থেকে সংগৃহীত উদাহরণ।

3. যে সমস্ত অধিবৃত্তের অক্ষ হল x - অক্ষ, তাদের অবকল সমীকরণ নির্ণয়।

এই অধিবৃত্তগুলির সমীকরণ $y^2 = 4ax$ ... (i)

a যে কোনো সসীম সংখ্যা। বিভিন্ন a-র জন্য বিভিন্ন অধিবৃত্ত পাওয়া যায়।

অতএব, x এর সাপেক্ষে অন্তরকলনের পরে,

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a,$$

বা, $$y\frac{dy}{dx} = 2a \qquad \text{(ii)}$$

অতঃপর (i) ও (ii) এর মধ্যে a -কে অপসরণ করে,

$$y^2 = 2y\frac{dy}{dx}.x,$$

বা, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x}$ হল প্রার্থিত সমীকরণ।

4. x- অক্ষ যেসব বৃত্তকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে তাদের অন্তরকল সমীকরণ নির্ণয়।

— মূলবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ হল ঃ $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y = 0$। x-অক্ষ যদি মূলবিন্দুতে স্পর্শক হয় তবে, $\alpha = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 2\,\beta y = 0$.........(i) হল এই সব বৃত্তের সমীকরণ। β যেকোনো সসীম সংখ্যা। x -এর সাপেক্ষে অবকলনের পরে,

$$x + y\frac{dy}{dx} + \beta\frac{dy}{dx} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

(i) ও (ii) এর মধ্যে β অপসারণ করলে,

$$x^2 + y^2 + 2y\left(\frac{x + y\dfrac{dy}{dx}}{-\dfrac{dy}{dx}}\right) = 0$$

বা, $$\left(x^2 + y^2\right)\frac{dy}{dx} = 2\left(xy + y^2\frac{dy}{dx}\right),$$

বা, $\frac{dy}{dx}\left(x^2-y^2\right)=2xy$,

বা, $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2}$

হল এই সব বৃত্ত গোষ্ঠীর অন্তরকল সমীকরণ।

5. r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট সমস্ত বৃত্তের অন্তরকল সমীকরণ নির্ণয়। এই সব বৃত্তের সমীকরণ হল,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \qquad \text{(i)}$$

যেখানে (α, β) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, এবং এক্ষেত্রে (α, β)-কে যদৃচ্ছ ধ্রুবক হিসেবে নেওয়া হল। r নির্দিষ্ট সংখ্যা।

অতএব, x -এর সাপেক্ষে অবকলন করে,

$$(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0 \qquad \text{(ii)}$$

আবার অবকলনের পরে,

$$1+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0 \qquad \text{(iii)}$$

(iii) থেকে পাই,

$$y-\beta=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad \text{(iv)}$$

(ii) থেকে পাই

$$x-\alpha=\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad \text{(v)}$$

(iv) ও (v) -কে (i) -এ ব্যবহার করে,

$$\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}+\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=r^2$$

বা, $$\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3=r^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

হল প্রার্থিত অন্তরকল সমীকরণ।

6. একগুচ্ছ সমফোকাস উপবৃত্তের (Confocal ellipse) সমীকরণ হল ঃ

$$\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}=1,$$

k যদৃচ্ছ ধ্রুবক। এদের সম্পর্কিত (corresponding) অবকল সমীকরণ নির্ণয়।

$$\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}=1 \qquad \text{(i)}$$

x এর সাপেক্ষে অবকলন করে,

$$\frac{2x}{a^2+k}+\frac{2y}{b^2+k}\frac{dy}{dx}=0$$

$\frac{dy}{dx}$ -কে p লিখলে,

$$\frac{x}{a^2+k}+\frac{y}{b^2+k}p=0.$$

$$\therefore \frac{a^2+k}{x}=-\frac{b^2+k}{py}=\lambda \qquad \text{(ধরা যাক)}$$

তাহলে (i) থেকে,

$$\frac{x^2}{\lambda x}-\frac{y^2}{\lambda yp}=1$$

$$\therefore \lambda=\frac{xp-y}{p}$$

$$\therefore a^2+k=\lambda x=\frac{xp-y}{p}\cdot x$$

$$b^2+k=-\lambda yp=\frac{xp-y}{p}(-py)=-y(xp-y)$$

অতঃপর, k অপসারিত করে,

$$a^2 - b^2 = \frac{x(px-y)}{p} + (xp-y)\,y,$$

বা, $$(a^2 - b^2)p = (xp-y)(x+yp)$$

বা, $$a^2 - b^2 = \left(x^2 - y^2\right) + xy\left(p - \frac{1}{p}\right)$$

হল প্রার্থিত সমীকরণ।

গতিবিদ্যা থেকে সংগৃহীত উদাহরণ

7. একটি বস্তুকণা সরলরেখায় সরল দোলগতি (Simple harmonic motion) -তে চলছে, t সময়ে কণাটির সরণ x হল $x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$, যেখানে $w/2\pi$ কণাটির frequency. a, b যদৃচ্ছ ধ্রুবক ধরে নিয়ে কণাটির পথের অবকল সমীকরণ বের করুন।

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\sin\omega t$$

$$= -\omega^2 x$$

∴ প্রার্থিত সমীকরণটি হল $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

বিভিন্ন a ও b -এর জন্য কেন্দ্রের দু'দিকে বিভিন্ন amplitude বিশিষ্ট দোলগতি দেখা যায়।

7.6 মূল (Primitive)

7.5 -এ আলোচিত উদাহরণগুলিতে আমরা দেখলাম যে, স্বাধীন চল x ও অধীন অপেক্ষক y -এর মধ্যে সম্পর্কটিতে যদি n সংখ্যক যদৃচ্ছ ধ্রুবক থাকে, অর্থাৎ সাধারণ ভাবে y যদি $y = f(x; c_1, c_2 \ldots\ldots c_n)$ এই রূপের হয়, যেখানে $c_1, c_2; c_n$ হল প্রচল (parameter) বা যদৃচ্ছ ধ্রুবক, যারা যে কোনো বাস্তব সসীম মান গ্রহণ করতে পারে, তবে এই সবকটি ধ্রুবক $c_1, c_2, \ldots\ldots c_n$ অপসারণ করে আমরা একটি n ক্রমের ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ পাব। কারণ, এই $y = f(x\,;\,c_1, c_2, \ldots\ldots c_n)$ সম্পর্কটিকে আমরা n বার অবকলন করতে পারি। তাহলে সর্বসমেত আমরা $(n+1)$-টি সমীকরণ পাব। এদের মধ্যে n সংখ্যক ধ্রুবক $c_1, \ldots\ldots c_n$ অপসারণ করলে, একটি ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ পাব যাতে $\frac{d^ny}{dx^n}$ উপস্থিত।

$y = f(x; c_1, \ldots\ldots c_n)$ এই রূপটিকে এই n ক্রমের ডিফারেনশিয়াল সমীকরণের মূল বলা হয়। অর্থাৎ, যে সম্পর্ক থেকে যদৃচ্ছ ধ্রুবকগুলিকে অপসারিত করে একটি অন্তরকল সমীকরণ রচিত হয়, তাকে বলা হয় ঐ অন্তরকল সমীকরণটির মূল (primitive)।

7.7 সারাংশ

এই অধ্যায়ে আমরা সাধারণ ও আংশিক ডিফারেনশিয়াল বা অন্তরকল সমীকরণের সংজ্ঞা পেলাম। সাধারণ ডিফারেনশিয়াল সমীকরণের ক্রম ও ঘাত সম্পর্কে জানলাম। এবং সাধারণ ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ কীভাবে যদৃচ্ছ ধ্রুবকদের অপসারণ দ্বারা গঠন করা যায় তাও দেখলাম।

7.8 প্রশ্নাবলী

1. নিচের ডিফারেনশিয়াল সমীকরণগুলির ক্রম ও ঘাত নির্ণয় করুন, ও কোনটি রৈখিক তা সনাক্ত করুন।

   i) $x^2 \dfrac{d^3y}{dx^3} - 15x \dfrac{dy}{dx} = e^x$

   ii) $3t^2 \dfrac{d^3y}{dt^3} - \sin t \dfrac{dy}{dt} = (\cos t)\, y$

   iii) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x^2 \dfrac{dy}{dx} + x \sin y = 0$

   iv) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 0$

   v) $\sqrt{1+\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3} = \dfrac{d^3y}{dx^2}$

2. নিচের মূল (প্রিমিটিভ) গুলি থেকে অবকল সমীকরণটি গঠন করুন। A, B, C যদৃচ্ছ ধ্রুবক।

   i) $y = Ax^2 + Bx$

   ii) $y = (A+Bx)e^{kx}$ — k নির্দিষ্ট

   iii) $y = Cx + \sqrt{a^2c^2 + b^2}$ — a, b নির্দিষ্ট সংখ্যা

   iv) $x = e^{-\frac{kt}{2}}$ (Acosnt + Bsin nt) — k, n নির্দিষ্ট

3. $y = a + be^{5x} + ce^{-7x}$, a, b, c, প্রমাত্রা। এই মূল বিশিষ্ট অবকল সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

4. দেখান যে, $c^2 + 2cy - x^2 + 1 = 0$ (যেখানে c প্রমাত্রা) — এই সমীকরণ বিশিষ্ট বক্রগুচ্ছ যে অবকল সমীকরণ সিদ্ধ করে তা হল

$$\left(1-x^2\right)p^2 + 2xyp + x^2 = 0, \quad \text{যেখানে } p = \frac{dy}{dx}$$

5. দেখান যে, $y = c\cosh\frac{x}{c}$, ক্যাটেনারীগুলি $y\sinh^{-1}(y) = x\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ এই সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

6. $y = c\,(x - c)^2$ এই বক্রগুচ্ছ (c যদৃচ্ছ) যে অবকল সমীকরণ সিদ্ধ করে, দেখান যে তা হল $8y^2 = 4xy\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

7. নিম্নের বক্রগুচ্ছগুলির অবকল সমীকরণ নির্ণয় করুন

   i) যে সব বৃত্তের কেন্দ্র x অক্ষের উপর অবস্থিত ও ব্যাসার্ধ a।

   ii) x-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষ ও 4a নাভিলম্ব বিশিষ্ট অধিবৃত্ত।

   iii) y-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষ সমন্বিত অধিবৃত্তের

   iv) মূলবিন্দু দিয়ে যে সমস্ত পরাবৃত্ত যায় এবং যাদের অসীমপথ স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল।

7.9 উত্তরমালা

1. i) তিন, এক, রৈখিক।

   ii) তিন, এক, রৈখিক।

   iii) দুই, দুই, অরৈখিক।

   iv) দুই, এক, অরৈখিক।

   v) তিন, দুই, অরৈখিক।

§ 7·2·4 ও § 7·3 থেকে সহজে দেখান যায়।

2. (i) $y = Ax^2 + Bx$ ......(1), একবার অবকলন করে পাই $y' = 2Ax + B$...... (2)

   আবার অবকল করলে $y'' = 2A$ ......(3)

   1, 2, 3 থেকে A, B অপসারণ করে $y'' - (2/x)y' + (2/x^2)\,y = 0$

(ii) $y=(A+Bx)\,e^{kx}$ $\qquad \therefore y'=[k(A+Bx)+B]\,e^{kx}$

$$= ky + Be^{kx} \text{........}(1)$$

$y''=ky'+kBe^{kx}$ ....(2)

(1) ও (2) থেকে B অপসারণ করে পাই $y'=ky+\left(\dfrac{y''-ky'}{x}\right)$

$y''-2ky'+x^2y=0$

(iii) একবার অবকলন করে ও C অপসারণ করলে পাই

$y=xy'+\sqrt{a^2y'^2+b^2}$

(iv) $x=e^{\frac{-k}{2}t}\,(A\cos nt+B\sin nt)$

অবকল করলে পাই

$$\frac{dx}{dt}\equiv \dot{x}=-\frac{k}{2}x+ne^{\frac{-k}{2}t}\,(-A\sin nt+B\cos nt)$$

$$\therefore \dot{x}+\frac{k}{2}x=ne^{\frac{-k}{2}t}\,(-A\sin nt+B\cos nt)$$

আবার অবকলন করে পাই

$$\ddot{x}+\frac{k}{2}\dot{x}=-\frac{k}{2}ne^{\frac{-k}{2}t}\quad(-A\sin nt+B\cos nt)$$

$$-n^2e^{\frac{-n}{2}t}\,(-A\sin nt+B\cos nt)$$

$$=\frac{-k}{2}\left(\dot{x}+\frac{k}{2}x\right)-n^2x$$

$$\therefore \ddot{x}+k\dot{x}+\left(n^2+\frac{k^2}{4}\right)x=0$$

(2) এ আমরা $y'=\dfrac{dy}{dx}, y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}, \dot{x}=\dfrac{dx}{dt}, \ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ বসিয়েছি যদি

3. তিনবার অবকলন করে মোট চারটি সমীকরণ থেকে a, b, c অপসারণ করলে পাব

$$35\frac{dy}{dx}-2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^3y}{dx^3}$$

4. একবার অবকলন করলে পাই $c=\frac{x}{p}$, এবার c কে অপনয়ন করুন

5. $y=c\cosh\frac{x}{c}$ কে অবকলন করলে হয়

$$y'=\sin h^{\frac{x}{c}},\ 1+(y')^2=1+\sin h^{2\frac{x}{c}}=\cos^{2\frac{x}{c}}=\frac{y^2}{c^2}$$

$$x\sqrt{1+y^2}=\frac{x}{c}y=y\sinh^{-1}(y')$$

(6) অবকলন করে, c অপনয়ন

(7) (i) বৃত্তের সমীকরণ $(x-\alpha)^2+y^2=a^2$, কেন্দ্র $(\alpha, 0)$। অবকলন করে পাই $x-\alpha=-yy'$ বৃত্তের সমীকরণে বসিয়ে

উঃ $y^2y'^2+y^2=a^2$

(ii) অধিবৃত্তের সমীকরণ $(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$

অবকলন করে পাই, $(y-\beta)y'=2a \quad y-\beta=\frac{2a}{y'}$

আবার, $(y-\beta)y''+(y')^2=0$ বা $2ay''+(y')^3=0$ উত্তর

(iii) এক্ষেত্রে অধিবৃত্ত $(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$

তিনবার অবকলন করলে পাই $y'''=0$ উত্তর।

(iv) উঃ $xyy''-2xy'^2+2yy'=0$

একক 8 ☐ ডিফারেনশিয়াল (অবকল) সমীকরণ

গঠন

8.1 প্রস্তাবনা

আমরা সপ্তম এককে দেখেছি, একটি অবকল সমীকরণ কি করে গঠিত হয়। সেখানে আমরা দেখেছি যে, একটি প্যারামিটার (parameter) -যুক্ত এক পরিবারের বিভিন্ন সমতলীয় বক্ররেখাগুলি একটি প্রথম ক্রমের সাধারণ অবকল সমীকরণ-কে সিদ্ধ করে। একাধিক প্যারামিটার যুক্ত বক্ররেখা মণ্ডলীর অবকল সমীকরণও (উচ্চতর ক্রমের) পাওয়া যায়। এখন আমাদের উদ্দেশ্য হবে, একটি অবকল সমীকরণের সমাধান বলতে আমরা কি বুঝব এবং সমাধান কি ধরনের হতে পারে, তা জানা। একাধিক সমাধান থাকলে, তাদের মধ্যে কোনও সম্পর্ক

আছে কিনা এটাও আমাদের বিবেচ্য বিষয়। অবশ্য যে কোন অবকল সমীকরণের সমাধান থাকবেই এমন কথা বলা যায় না। যেমন,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

এই সমীকরনের কোনও বাস্তব সমাধান থাকা সম্ভব নয় যেহেতু, এখানে $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ এর মান ঋণাত্মক।

8·2 উদ্দেশ্য

এই এককের উদ্দেশ্য হল— অবকল সমীকরণের সমাধান, সমাধানের অস্তিত্বের শর্ত, লিনিয়ার অবকল সমীকরণের সমাধান, রৈখিক অনধীন সমাধান সমূহ, রৈখিক অনধীনতার যথেষ্ট ও প্রয়োজনীয় শর্ত, বিশেষ সমাধান ও বিশিষ্ট সমাধান ইত্যাদি আলোচনা করা।

8·3 একটি সাধারণ সমীকরণের সমাধান
Integral of an Ordinary Differential Equation

ধরা যাক, $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \ldots\ldots(1)$ একটি n– ক্রমের সাধারণ অবকল সমীকরণ।

এখন যদি $y = \phi(x)$ একটি ফাংশন এমন হয় যে, x এর একটি অন্তরালে $\frac{dy}{dx}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}$ এগুলির অস্তিত্ব থাকে এবং ঐ অন্তরালের বিভিন্ন বিন্দুতে $F\left(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots\ldots \phi^{(n)}(x)\right) = 0 \ldots(2)$

সত্য হয় তা হলে, $y = \phi(x)$ কে (1) এর একটি সমাধান (Solution বা Integral) বা সমাকল বলা হয়। উদাহরণ স্বরূপ ঃ

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

এই সমীকরণটির একটি সমাধান

$y = \cos x$

এবং আর একটি সমাধান $y = \sin x$.

(2) $x^4 \frac{d^4y}{dx^4} + x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = 2x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$

এই চতুর্থ ক্রমের অবঃ সমীকরণের একটি সমাধান হল $y = 2x$, আর একটি সমাধান লিখতে পারি $y = x^2 + 2x$

এই সমীকরণের আরও সমাধান আছে।

আবার (3) নং সমীকরণের একটি সমাধান দেখা যায় $y = A\cos x + B\sin x$ .... (5) যেখানে, A ও B যে কোনও দুটি ধ্রুবক। এখানে আমরা দেখছি যে, (3) একটি দ্বিতীয় ক্রমের সাধারণ অবকল সমীকরণ যার (5) হল একটি এমন সমাধান যাতে A ও B যে কোন দুইটি ধ্রুবক হলেও সমাধান হবে।

n- ক্রমের অবকল সমীকরণের (nth order ordinary differential equation) সাধারণ সমাধান (General Solution)

এখন আমরা n– ক্রমের সাধারণ অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান সম্বন্ধে আলোচনা করব।

$y = \phi(x;\, c_1, c_2 \ldots\ldots c_n)$ .... (6) কে (1) এর সাধারণ সমাধান বলব যদি, $\phi'(x), \cdots\cdots \phi^{(n)}(x)$ এগুলি x এর একটি অন্তরালে অস্তিত্বশীল হয় এবং ঐ মানগুলি (1) নং সমীকরণে বসালে সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। এখানে $c_1, c_2, \ldots\ldots c_n$ এগুলি n- সংখ্যক ধ্রুবক এবং এই ধ্রুবকগুলির বিভিন্ন মানের জন্য সমীকরণটি সিদ্ধ।

উদাহরণস্বরূপ, (5) হচ্ছে (3) নং অবঃসমীকরণের সাধারণ সমাধান, যেহেতু (5) -এ দুটি ধ্রুবক আছে এবং (3) নং অবঃসমীকরণটির ক্রম দুই। এভাবে আমারা বলতে পারি

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

এই সমীকরণের সাধারণ সমাধান হল

$$2y^{\frac{1}{2}} = x + c \cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

যেখানে c একটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক। (কেননা এখানে (7) একটি প্রথম ক্রমের সমীকরণ এবং সমাধান (8) এর মধ্যে একটি ধ্রুবক আছে)।

উদাহরণ 1 ঃ $\frac{d^3y}{dx^3} - y = 0$, এই সমীকরণের $y = C_1e^x + C_2e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ সমাধানে C_1, C_2, C_3 তিনটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক আছে। অতএব, এটি সাধারণ সমাধান।

উদাহরণ 2 ঃ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} = 0$ সমীকরণে, $y = \frac{a}{x} + b$ সমাধান কিনা পরীক্ষা করুন, যদি সমাধান হয় তবে কি $y = \frac{a}{x} + b$ সাধারণ সমাধান?

উঃ হ্যাঁ।

8·4 সাধারণ সমীকরণের সমাধানের অস্তিত্বের যথেষ্ট শর্তাবলী (Sufficient condition for solution of an ordinary differential equation)

একটি প্রথম ক্রমের সাধারণ সমীকরণ হল $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ .... (1) যেখানে, $f(x, y)$, x ও y এর ফাংশন।

আমরা (1) এর এমন একটি সমাধান $y = \phi(x)$ পেতে চাই, যা $x = x_0$ বিন্দুতে $y = y_0$ এই মান দেবে। অতএব, (x, y) -তলে আমাদের (x_0, y_0) বিন্দুর সামীপ্যে (1) সমীকরণকে পরীক্ষা করতে হবে। এ বিষয়ে আমরা একটি যথেষ্ট শর্ত বিবৃত করব। তার পূর্বে একটি নূতন গাণিতিক ধারণা ব্যাখ্যা করে নেব।

লিপশিট্‌স শর্ত (Lipschitz's condition)

D অঞ্চলে সংজ্ঞিত ফাংশন $f(x,y)$ এর ক্ষেত্রে যদি $(x,y_1) \in D$, $(x, y_2) \in D$ এই রূপ যে কোন দুটি বিন্দুর জন্য $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < K|y_1 - y_2|$ সত্য হয়, যেখানে K একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক সংখ্যা, তবে $f(x,y)$ লিপশিট্‌স শর্ত পালন করে বলা হয়। এবারে আমরা (1) নং সমীকরণের সমাধান সম্বন্ধে যথেষ্ট শর্তটি বিবৃত করব।

পিকার্ডের উপপাদ্য

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \ldots\ldots (1)$$

সমীকরণে যদি দেওয়া থাকে যে, $x = x_0$ বিন্দুতে $y = y_0$ তবে (1) সমীকরণের (x_0, y_0) বিন্দুগামী অনন্য সন্তত সমাধান $y = \phi(x)$ থাকবার যথেষ্ট শর্ত হল $(x_0\, y_0)$ বিন্দুর সামীপ্যে (অর্থাৎ $x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1, y_0 - \delta_2 < y < y_0 + \delta_2$ এই আয়ত ক্ষেত্রাকার অঞ্চলে)

(i) $f(x, y)$ সন্তত

(ii) এমন একটি $K > 0$ সংখ্যা আছে যে ঐ অঞ্চলে (x, y_1), (x, y_2) এই দুটি বিন্দুর জন্য $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < K|y_1 - y_2|$ হয়। (লিপশিট্‌স শর্ত)

(এই উপপাদ্যের প্রমাণ এই এককে দেওয়া হল না)।

জিজ্ঞাসু শিক্ষার্থী উচ্চতর অবকল সমীকরণের পুস্তক দেখতে পারেন।

8·4·1 কতিপয় অবকল সহ-সমীকরণের সমাধান

এখানে আমরা সাধারণভাবে কয়েকটি প্রথম ক্রমের সহ সমীকরণ নিলাম।

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y, z)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dt} = f_3(t, x, y, z)$$

এক্ষেত্রে যদি দেওয়া থাকে যে,

$t = t_0$ বিন্দুতে $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ তবে উপরের সমীকরণ সমূহের সমাধান সম্বন্ধে আমরা কী বলতে পারি? এই প্রসঙ্গে সমাধানের অস্তিত্বের জন্য আমরা একটি যথেষ্ট শর্ত উল্লেখ করছি—

যদি (x,y,z,t) এই চতুর্মাত্রিক দেশে (x_0, y_0, z_0, t_0) বিন্দুর কোন সামীপ্যে (অর্থাৎ যেখানে $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+(t-t_0)^2<\delta$, যখন δ একটি ধনাত্মক রাশি) f_1, f_2, f_3 এই ফাংশন সমূহ x, y, z এর সাপেক্ষে লিপশিট্স্ শর্ত পালন করে এবং যদি f_1, f_2, f_3 সন্তত হয়, তাহলে উপরের সহ সমীকরণ সমূহের একটি অনন্য সমাধান অর্থাৎ, $x = \phi_1(t)$, $y = \phi_2(t)$, $z = \phi_3(t)$ আছে যেখানে, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ফাংশনগুলি একটি অন্তরাল $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$ এ সন্তত।

উদাহরণ ঃ $\dfrac{dx}{dt} = x + y$

$$\frac{dy}{dt} = t\,x$$

যেখানে, $x = x_0$, $y = y_0$ যখন, $t = t_0$। এখানে আমরা দেখছি যে, $f_1(t,x,y) = x + y$ ও f_2=tx সন্তত

এবং $|f_1(t, x_1, y_1) - f_1(t, x_2, y_2)|$

$= |x_1 + y_1 - (x_2 + y_2)|$

$\le |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ .... (i)

আবার, $|f_2(t, x_1, y_1) - f_2(t, x_2, y_2)|$

$= |tx_1 - tx_2| = |t||x_1 - x_2|$ ....(ii)

$|t - t_0| < \delta$ হলে (যেখানে δ একটি ধনাত্মক সংখ্যা এবং যা আমাদের প্রয়োজন মত নেওয়া যায়) আমরা

পাই, $|t| = |t - t_0 + t_0| \le |t_0| + |t - t_0| < |t_0| + \delta = K$ (বলা যাক)

অতএব, আমরা দেখি যে f_1 ও f_2 লিপশিট্স শর্ত-পালন করে। অতএব এই অবকল সমীকরণের অনন্য সমাধান আছে।

উদাহরণ ঃ $\frac{dy}{dx}+f(x)y=0$ সমাধান নির্ণয় করতে হবে, যেখানে দেওয়া আছে **$x=0$ হলে $y=0$**

সমাধান ঃ সমীকরণে $x=0,\ y=0$ বসালে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=0$। সমীকরণটির x সাপেক্ষে অবকল নিলে $\frac{d^2y}{dx^2}+f'(x)\,y+f(x)\frac{dy}{dx}=0$ এখানে, $x=y=\frac{dy}{dx}=0$ বসালে পাই $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}=0$। সুতরাং, আমরা এইভাবে পাই $x=0$ বিন্দুতে $y=\frac{dy}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=\ldots\ldots\frac{d^ny}{dx^n}=\ldots\ldots=0$ অতএব, $x=0$ সাপেক্ষে টেলর বিস্তৃতি সাহায্যে বলতে পারা যায় যে, $y=0$ সমস্ত বিন্দুতে (কারণ পিকার্ডের উপঃ অনুসারে সমাধানটি অনন্য)

8·4.2 n- ক্রমের লিনিয়ার সমীকরণের সমাধানের শর্তাবলী

নিম্নে একটি লিনিয়ার n ক্রমের অবকল সমীকরণ ঃ—

$$p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots+p_n(x)\,y=0 \qquad \textbf{(2)}$$

এই সমীকরণটিকে n -সংখ্যক প্রথম ক্রমের সহ-সমীকরণ হিসাবে লেখা যায়।

$$\frac{dy}{dx}=y_1 \qquad (3.1)$$

$$\frac{dy_1}{dx}=y_2 \qquad (3.2)$$

$$\frac{dy_2}{dx}=y_3 \qquad (3.3)$$

....

....

$$\frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1}$$

অতএব (2) থেকে,

$$p_0\frac{dy_{n-1}}{dx}+p_1(x)\,y_{n-1}+p_2(x)\,y_{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}(x)\,y_1+p_n(x)y=0\ \ldots\ldots\ \textbf{(3.n)}$$

অর্থাৎ,

$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=-\frac{1}{p_0}\left[p_1(x)y_{n-1}+p_2(x)y_{n-2}+\cdots+p_n(x)y\right]$$

$$=f\left(x,y,y_1,y_2,\ldots\ldots y_{n-1}\right)\ \text{বলা যাক}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.n')$$

উপরের (3.1) থেকে (3.n) পর্যন্ত n -সংখ্যক প্রথম ক্রমের অবকল সমীকরণের ক্ষেত্রেও পিকার্ডের উপপাদ্য প্রযোজ্য যেখানে, $f(x, y, y_1, y_2 \ldots y_{n-1})$ এই ফাংশনটি সন্তত এবং লিপশিট্‌স এর শর্ত $y, y_1, y_2 \ldots y_{n-1}$ এদের সাপেক্ষে সত্য। অর্থাৎ, শর্তটি হল

$$\left|f\left(x, y^{(1)} y_1^{(1)}, y_2^{(1)} \ldots\ldots y_{n-1}^{(1)}\right) - f\left(x, y^{(2)}, y_1^{(2)} \ldots y_{n-1}^{(2)}\right)\right|$$

$$< k(|y^{(1)} - y^{(2)}| + |y_1{}^{(1)} - y_2{}^{(2)}| + \ldots\ldots + |y^1_{(n-1)} - y^{(2)}_{n-1}|)$$

যেখানে k একটি ধ্রুবক।

উপপাদ্য ঃ

3.1 থেকে 3.n এই সমীকরণ তন্ত্র

এবং $x = x_0$ বিন্দুতে $y = y_0$, $y = y_{1\,0}, y_2 = y_{2\,0}, \ldots.\ y_{n-1} = y_{(n-1)_0}$ এই মানগুলি নির্দিষ্ট থাকলে ঐ সমীকরণ তন্ত্রের একমাত্র সমাধান $y = \phi(x), y_1 = \phi'(x), y_2 = \phi''(x), \ldots.\ y_{n-1} = \phi^{(n-1)}(x)$ আছে যা $x = x_0$ বিন্দুতে $y, y_1, \ldots.y_{n-1}$ এর নির্দিষ্ট মান গ্রহণ করবে যদি $f(x, y, y_1, \ldots.y_{n-1})$, $(x_0, y_0, y_{10}, \ldots.. y_{(n-1)_0})$ বিন্দুর কোন সামীপ্যে লিপ্‌শিট্‌স শর্ত পালিত হয়।

প্রমাণ এখানে দেওয়া হল না। Ince : Treatise on Differential Equation দ্রষ্টব্য।

উদাহরণ ঃ $\dfrac{dy}{dx} = xy^2$ এবং $y = 1$ যখন, $x = 0$,

এখানে $f(x, y) = xy^2$

অতএব, $|f(x, y_1) - f(x, y_2)|$

$= |x||y_1 - y_2||y_1 + y_2|$

আমরা $-a < x < a,\ -b < y - 1 < b$ এই আয়তক্ষেত্রটি নিলাম। তাহলে $|x| < a, |y_1 + y_2| \le |y_1 - 1| + |y_2 - 1| + 2 \le 2b + 2$ এবং, $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < k\,|y_1 - y_2|$ ... (4)

যেখানে $k = a\,(2b+2)$

(4) থেকে বোঝা যাচ্ছে যে, যখন (x, y_1) (x, y_2) বিন্দু দুটি উপরের আয়তক্ষেত্রের অভ্যন্তরে থাকে, তখন $f(x, y)$ লিপশিট্‌স শর্ত পালন করে। অতএব, ঐ আয়তক্ষেত্রে সমীকরণটির (তার প্রাথমিক মান (initial value) $x = 0, y = 1$ সহ) সমাধান আছে। প্রকৃত পক্ষে সমাধানটি হল $\dfrac{1}{y} = 1 - \dfrac{x^2}{2}$ ।

উদাহরণ ঃ $\dfrac{dy}{dx} = x^2y^2$ এবং $x = 0$ হলে $y = 1$. সমীকরণটির অনন্য সমাধান আছে কিনা পরীক্ষা করুন।

উদাহরণ ঃ $a_0 \dfrac{d^2y}{dx^2} + a_1 \dfrac{dy}{dx} + a_2 y = 0$ (যেখানে a_0, a_1, a_2 ধ্রুবক) এবং $a_0 \neq 0$

যেখানে, $x = x_0$ হলে $y = y_0$, $\frac{dy}{dx} = y_{10}$

উপরের সমীকরণের অনন্য সমাধান আছে কিনা পরীক্ষা করুন।

উত্তর ঃ সমীকরণটিকে আমরা একটি সহ-সমীকরণ তন্ত্রে লিখব ঃ—

$$\frac{dy}{dx} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-(a_1 z + a_2 y)}{a_0} = f\,(y, z)$$

$$\left|f\,(y_1, z_1) - f\,(y_2, z_2)\right| = \frac{\left|a_1(z_1 - z_2) + a_2\,(y_1 - y_2)\right|}{|a_0|}$$

$$\leq \frac{|a_1|}{|a_0|}|z_1 - z_2| + \frac{|a_2|}{|a_0|}|y_2 - y_1|$$

$$< k\,(|z_1 - z_2| + |y_1 - y_2|)\ ,\ \text{যেখানে}\ \frac{|a_1| + |a_2|}{|a_0|} < k$$

অতএব দেখা যাচ্ছে যে, সমীকরণটির অনন্য সমাধান আছে এবং সমাধান ক্ষেত্রটি $x = x_0$, $y = y_0$, $\frac{dy}{dx} = y_{1_0}$ এই বিন্দুর যে কোনও সামীপ্যে। অতএব দেখা গেল, ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট দ্বিতীয় ক্রমের লিনিয়ার অবকল সমীকরণের সমাধানের অস্তিত্ব আছে।

মন্তব্য 1 ঃ সহজেই বুঝতে পারা যাচ্ছে যে, ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট n-ক্রমের লিনিয়ার অবকল সমীকরণেরও সমাধান সর্বদা আছে।

মন্তব্য 2 ঃ $p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + p_n(x)y = 0$

এই সমীকরণের সমতুল্য রূপ হল

$$\frac{dy}{dx} = z_1, \frac{dz_1}{dx} = z_2, \ldots\ldots\ldots \frac{dz_{n-2}}{dx} = z_{n-1}$$

এবং, $p_0(x)\frac{dz_{n-1}}{dx} + p_1(x)\,z_{n-2} + p_2(x)\,z_{n-3} + \ldots\ldots + p_{n-1}z_1 + p_n y = 0$

অতএব, $\frac{dz_{n-1}}{dx} = -\frac{1}{p_0(x)}(p_1 z_{n-2} + p_2 z_{n-3} + \ldots\ldots + p_{n-1}z_1 + p_n y)$

এখন যদি x_0 বিন্দুর কোনও সামীপ্যে $\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0} \ldots\ldots \frac{p_n}{p_0}$ ফাংশনগুলো সন্তত হয়, তাহলে এমন একটি

ধনাত্মক সংখ্যা k থাকবে যার জন্য $\left|\frac{p_1}{p_0}\right| < k$, $\left|\frac{p_2}{p_0}\right| < k$...... $\left|\frac{p_n}{p_0}\right| < k$ এবং যার জন্য

$f(x, y, z_1 \ldots\ldots z_{n-2}) = -\frac{(p_1 z_{n-2} + \ldots\ldots + p_n y)}{p_0}$, এই ফাংশনটি x_0 বিন্দুর ঐ সামীপ্যে লিপশিট্‌স শর্ত পালন করবে। অতএব, যদি $x = x_0$ বিন্দুতে $y, z_1, z_2 \ldots.. z_{n-2}, z_{n-1}$ এর মান নির্দিষ্ট থাকে এবং যথাক্রমে $y^0, z_1^0, \ldots\ldots\ldots z_{n-1}^0$ হয়, তবে $(x_0, y_0, z_1^0, \ldots\ldots z_{n-1}^0)$ এর সামীপ্যে এই সমীকরণের সমাধান থাকবে। অতএব দেখা গেল যে, যদি কোনও লিনিয়ার অবকল সমীকরণের

$$\frac{d^n y}{dx^n} = -\left(\frac{p_1}{p_0}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{p_n}{p_0} y\right)$$

$x = x_0$ এর সামীপ্যে $\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}, \ldots\ldots \frac{p_n}{p_0}$ গুলি সন্তত থাকে, তাহলে $y, y^1, \ldots\ldots y^{(n-1)}$ এদের মান $x = x_0$ বিন্দুতে দেওয়া থাকলে প্রদত্ত সমীকরণের অনন্য সন্তত সমাধান $y = \phi(x)$ থাকবে।

8·5 লিনিয়ার (রৈখিক) সাধারণ অবকল সমীকরণ ও তার সমাধান। (Ordinary linear differential equation)

আমরা পূর্বে পেয়েছি যে, একটি n -ক্রমের লিনিয়ার সাধারণ অবকল সমীকরণের রূপ হল

$$p_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)y = f(x) \quad \ldots\ldots (1)$$

যেখানে, $p_0(x), p_1(x), \ldots\ldots p_n(x)$ কতগুলি x এর ফাংশন এবং $f(x)$ একটি x -এর ফাংশন।

যদি কোনও বিশেষ ক্ষেত্রে $f(x) = 0$ হয়, তখন (1) কে সুষম অবকল সমীকরণ বলা হয়। (homogeneous differential equation)। আর $p_0(x), \ldots.. p_n(x)$ এগুলি যদি ধ্রুবক হয়, তবে সমীকরণটিকে বলা হয় ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট রৈখিক অবকল সমীকরণ (Linear differential equation with constant coefficients)।

উদাহরণ স্বরূপ § 8.3 তে (3) নং সমীকরণটি একটি ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট সমীকরণ।

8·5·1 রৈখিক সুষম অবকল সমীকরণের সমাধান সমূহের ধর্ম (A property of solutions of a linear homogeneous differential equation)

ধরা যাক ,

$$L(y) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

একটি সুষম রৈখিক সাধারণ অবকল সমীকরণ, যেখানে

$$L \equiv p_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + p_1\frac{d}{dx} + p_0(x), \ldots\ldots(3)$$

এবার ধরা যাক, $y = y_1(x), y = y_2(x)$, যেখানে, $y_1(x), y_2(x)$ দুটি ফাংশন যাদের n-তম ডেরিভেটিভ আছে এবং যারা প্রত্যেকে (2) এ বসালে

$$L\left(y_1(x)\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

এবং $L\left(y_2(x)\right) = 0$ হয় .... (5)

অর্থাৎ, $y = y_1(x), y = y_2(x)$ (2) নং অবঃসমীকরণের দুটি সমাধান।

এবার আমরা $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ ....(6)

(যেখানে c_1 c_2 দুইটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক)

এই ফাংশনটি (2) এর সাপেক্ষে পরীক্ষা করব। (এই ফাংশনটিকে y_1 ও y_2 এর রৈখিক সংযোগ বলা হয়)

(6) থেকে আমরা পাই

$$\left.\begin{array}{l} y'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)}(x) = c_1 y_1^{(n)}(x) + c_2 y_2^{(n)}(x) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

(6 কে n বার অবকলন করে মোট n সংখ্যক সমীকরণ পেলাম)

(6) ও (7) কে (2) এ বসালে আমরা পাই

$$L(y(x)) = c_1 p_n(x) y_1^{(n)}(x) + c_2 p_n(x) y_2^{(n)}(x)$$

$$+ \cdots + c_1 p_1(x) y_1'(x) + c_2 p_1(x) y_2'(x) + c_1 p_0(x) y_1(x) + c_2 p_0(x) y_2(x)$$

$$= c_1 L(y_1(x)) + c_2 L(y_2(x)) = 0 \ldots\ldots \text{[(4) ও (5) থেকে]} \ldots\ldots(8)]$$

অতএব, (8) থেকে আমরা পাচ্ছি যে, [(6) এর] $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$। এটিও (2) নং সমীকরণের একটি সমাধান।

অতএব আমরা পাচ্ছি যে, (উপপাদ্য) ঃ

$y = y_1(x), y = y_2(x)$ যদি একটি রৈখিক সাধারণ সুষম সমীকরণের সমাধান হয়, তবে $y_1(x)$ এবং $y_2(x)$ এর যে কোনও রৈখিক সংযোগ (linear combination) অর্থাৎ, $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ (যেখানে c_1, c_2 দুটি ধ্রুবক) ঐ সমীকরণের একটি সমাধান।

উদাহরণ ঃ লক্ষ্য করুন § 8.3 তে (3) নং সমীকরণের সমাধানদ্বয় $y = \cos x$ ও $y = \sin x$ এদের রৈখিক সংযোগ $y = A\cos x + B\sin x$ (3) নং সমীকরণের সমাধান।

উপরের আলোচনা থেকে আমরা বলতে পারি, যদি 2 নং অবকল সমীকরণের $y = y_1(x), y = y_2(x), y = y_3(x)$ এইরূপ তিনটি সমাধান থাকে, তবে

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x) \text{.............(9)} \quad (\text{যেখানে } c_1, c_2, c_3 \text{ যদৃচ্ছ ধ্রুবক})$$

এই ফাংশনটিও (2) নং অবঃসমীকরণের সমাধান। কারণ, যদি $z(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ লিখি, তবে $z(x)$ হবে (2) এর সমাধান

আবার (9) থেকে, পাই $y = z(x) + c_3y_3(x)$

$$\begin{aligned}\therefore L(y) &= L(z(x) + c_3y_3(x)) \\ &= L(z(x)) + c_3L(y_3(x)) \quad (8 \text{ নং থেকে}) \\ &= 0 + c_30 \quad (\because z(x) \text{ এবং } y_3(x)\ (3) \text{ এর সমাধান}) \\ &= 0\end{aligned}$$

অতএব দেখা গেল, $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x)$ হল (2) এর সমাধান। এভাবে সাধারণভাবে আরোহ প্রণালী থেকে বলতে পারি, যদি $y = y_1(x), y = y_2(x), \ldots\ldots. y = y_K(x)$ প্রত্যেকে একটি সুষম রৈখিক অবকল সমীকরণের K সংখ্যক সমাধান হয় তবে

$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots.. + c_Ky_K(x)$ এই রৈখিক সংযোগটি ঐ সুষম রৈখিক অবকল সমীকরণের সমাধান।

মন্তব্য ঃ উপরে (3) এ L (y) এর সংজ্ঞা ও (8) নং থেকে $L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2)$

L এর **এই ধর্মকে লিনিয়ার ধর্ম** বলা হয়।

8·5·2 রৈখিক সাধারণ অবকল সমীকরণের রৈখিক অনধীন সমাধান (linearly independent solutions of a linear ordinary differential equation)

আমরা

$$L(y) \equiv p_n \frac{d^ny}{dx^n} + p_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots.. + p_1\frac{dy}{dx} + p_0(x)\,y = 0$$

এই রৈখিক সাধারণ সুষম সমীকরণের সমাধানগুলির রৈখিক অনধীনতা (linear independence) পরীক্ষা করব।

প্রথমে কয়েকটি অপেক্ষক দেওয়া থাকলে তাদের রৈখিক অধীনতা এবং অনধীনতা বলতে কি বোঝায় তা আলোচনা করা হচ্ছে।

রৈখিক অধীনতার সংজ্ঞা (linear dependence)

দুটি ফাংশন $\phi(x)$, $\psi(x)$ কে রৈখিক অধীন বলা হবে যদি, এমন দুটি ধ্রুবক c_1, c_2 (যাদের অন্তত একটি শূন্য নয়) পাওয়া যায় যার জন্য $c_1\phi(x)+c_2\psi(x)\equiv 0$ হয়। (অর্থাৎ, অসংখ্য বিভিন্ন x এর জন্য)

উদাহরণ ঃ যদি, $\phi(x)=\sin x-\cos x$

$$\psi(x)=2\cos x-2\sin x$$

হয় তবে, $2\phi(x)+1\psi(x)=0$

অতএব $\sin x-\cos x$ ও $2\cos x-2\sin x$ পরস্পর রৈখিক ভাবে অধীন।

দুই এর অধিক ফাংশনের রৈখিক অধীনতার সংজ্ঞা ঃ—

যদি $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\ldots \phi_m(x)$; m সংখ্যক ফাংশন থাকে এবং অন্তত একটি শূন্য নয় এমন m- সংখ্যক ধ্রুবক $c_1, c_2, \ldots\ldots c_m$ থাকে যে,

$$c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x)+\ldots\ldots+c_m\phi_m(x)\equiv 0$$

(বিভিন্ন x এর জন্য)

তাহলে, $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\ldots \phi_m(x)$ কে রৈখিক অধীন (linearly dependent) বলা হয়।

উদাহরণ ঃ দেখান যে, $\sin x, \cos x, \sin x+\cos x$ তিনটি ফাংশন রৈখিকভাবে অধীন ঃ—

$[1.\sin x+1.\cos x-1(\sin x+\cos x)]=0$

অর্থাৎ এখানে, $c_1=1, c_2=1, c_3=-1$

উদাহরণ ঃ দেখান যে e^x, e^{-x} এই দুটি ফাংশন রৈখিক ভাবে অধীন নয়।

যদি সম্ভব হয় মনে করি, $c_1e^x+c_2e^{-x}\equiv 0$, বিভিন্ন x এর জন্য। $c_1e^x+c_2e^{-x}=0$,

এই অভেদে $x=0, x=1$,

বসালে $\quad c_1+c_2=0$

$$c_1e+\frac{c_2}{e}=0$$

কিন্তু এ দুটি সত্য হতে গেলে, $c_1=c_2=0$ হতে হয়। অতএব দেখা গেল, $c_1e^x+c_2e^{-x}=0$ হতে হলে $c_1=c_2=0$ । অতএব e^x ও e^{-x} ফাংশন দুটি রৈখিকভাবে অধীন নয়।

এবার আমরা **রৈখিক অনধীনতার সংজ্ঞা** দেব।

$\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\ldots\phi_m(x)$ এই -m ফাংশনগুলি রৈখিকভাবে অনধীন (linearly independent) হবে যদি ঐ ফাংশনগুলি রৈখিকভাবে অধীন না হয়। যেমন, শেষের উদাহরণটিতে আমরা দেখেছি যে, e^x, e^{-x} ফাংশন দুটি রৈখিক অনধীন।

উদাহরণ ঃ দেখান যে, sin x ও cos x ফাংশন দুটি রৈখিকভাবে অনধীন।

প্রমাণ ঃ আমরা c_1, c_2 দুইটি ধ্রুবক নির্ণয় করার চেষ্টা করব যার জন্য

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x \equiv 0 \text{ হয়}$$

যদি এটি সত্য হয়, তবে $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ বসিয়ে পাই, $c_2 = 0$, $c_1 = 0$। অতএব দেখা গেল, অন্তত একটি অশূন্য c_1, c_2 পাওয়া সম্ভব নয় যার জন্য $c_1 \sin x + c_2 \cos x = 0$ । অতএব, sin x ও cos x রৈখিকভাবে অনধীন।

উদাহরণ ঃ দেখান যে, e^{ax} ও e^{bx} $(a \neq b)$ ফাংশন দুটো রৈখিকভাবে অনধীন।

যদি, $c_1e^{ax} + c_2e^{bx} = 0$ হয়

তবে, $c_1 + c_2 = 0$ ($x = 0$ বসালে)

$c_1e^a + c_2e^b = 0$ ($x = 1$ বসিয়ে)

সমাধান করে $c_1 = c_2 = 0$। অতএব, $e^{ax}, e^{bx} (a \neq b)$ রৈখিক ভাবে অনধীন।

উদাহরণ ঃ দেখান যে e^x, e^{2x}, cos x এই তিনটি ফাংশন রৈখিকভাবে অনধীন।

ধরা যাক, $c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3 \cos x = 0$

$x = 0, x = 1, x = 2$ মান বসিয়ে

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1e + c_2e^2 + c_3 \cos 1 &= 0 \\ c_1e^2 + c_2e^4 + c_3 \cos 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

এই তিনটি homogeneous সমীকরণ এর সহগ সমূহের নির্ণায়ক (determinant)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e & e^2 & \cos 1 \\ e^2 & e^4 & \cos 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

অতএব, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ছাড়া আর কোনও মান নেই।

অতএব, e^x, e^{2x}, cos x ফাংশন তিনটি রৈখিক ভাবে অনধীন।

৪·৫৩ রৈখিকঅনধীনতার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত

এবার আমরা কয়েকটি ফাংশনের অনধীনতার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত উল্লেখ করছি (প্রমাণ দেওয়া হল না)

$\phi_1(x), \phi_2(x) \ldots \phi_k(x)$ এই k -সংখ্যক ফাংশন রৈখিকভাবে অনধীন হবে, যদি এবং কেবলমাত্র যদি

$$\Delta(\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_k) \equiv \begin{vmatrix} \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\ldots\ldots\ldots \phi_k(x) \\ \phi_1'(x), \phi_2'(x), \ldots\ldots\ldots\ldots \phi_k'(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \phi_1^{(k-1)}(x)\, \phi_2^{(k-1)}(x) \ldots \phi_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \ldots\ldots (I)$$

$\Delta(\phi_1 \ldots \phi_k)$ -কে ঐ ফাংশন গুলির রন্স্কিয়ান (Wronskian) বলা হয়।

উদাহরণ ঃ দেখান যে, $\phi_1(x), \ldots\ldots \phi_k(x)$ এর মধ্যে যদি কোনও একটি ফাংশন শূন্য হয়, তবে $\phi_1, \phi_2 \ldots\ldots \phi_k(x)$ রৈখিক অধীন হবেই।

[যদি $\phi_r(x) = 0$ (সকল x- এর জন্য) হয়, তবে $C_r = 1$ এবং $C_1 = C_2 \cdots = C_{r-1} = C_{r+1} = \cdots\cdots = C_k = 0$ ধরলে রৈখিক অধীনতার শর্ত পালিত হয়]

মন্তব্য ঃ $\phi_1, \phi_2 \ldots\ldots \phi_k$ এই ফাংশন সমূহ রৈখিক অধীন হওয়ার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল অন্তত একটি বিন্দুতে রনস্কিয়ান = 0 (প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত)

উদাহরণ ঃ sin x, cos x এই ফাংশন দুটি যে রৈখিক অনধীন, তা উপরের শর্ত (I) সাহায্যে প্রমাণ করুন।

৪·৬ একটি লিনিয়ার দ্বি-ক্রমের সাধারণ সমীকরণের রৈখিক অনধীন সমাধান (linearly independent solutions of a linear second order differential equation)

আমরা এবার একটি দ্বি-ক্রমের লিনিয়ার সাধারণ সমীকরণ

$$p_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)\,y = 0 \ldots\ldots (1)$$

$$(p_2 \neq 0)$$

এর সমাধান সমূহ সম্বন্ধে আলোচনা করব।

ধরা যাক, $y = y_1(x)$ এবং $y = y_2(x)$ উপরের (1) সমীকরণের দুটি সমাধান এবং ধরা যাক, $y_1(x), y_2(x)$ পরস্পর রৈখিক অনধীন। অতএব, $y_1(x) \neq k y_2(x)$ যে কোনও অশূন্য ধ্রুবক k এর জন্য।

(1) এ $y = y_1$ এবং $y = y_2$ বসিয়ে আমরা পাই

$$p_2y_1'' + p_1y_1' + p_0y_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$p_2y_2'' + p_1y_2' + p_0y_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

এবার আমরা দেখাব যে,

উপপাদ্য ঃ যদি $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ এবং $y = y_3(x)$ (1) এর তিনটি সমাধান হয় এবং যদি $y_1(x)$, $y_2(x)$ রৈখিক অনধীন হয়, তবে $y_3(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ হবে যেখানে, c_1, c_2 দুটি ধ্রুবক।

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে যে, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ উপরের (1) নং সমীকরণের সমাধান, অতএব

$$p_2y_1'' + p_1y_1' + p_0y_1 = 0 \ \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$p_2y_2'' + p_1y_2' + p_0y_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$p_0y_3'' + p_1y_3' + p_0y_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

এবার আমরা 8.5.3 এর (I) এ বর্ণিত রন্স্কিয়ান $\Delta(y_1, y_2, y_3)$ এর মান নির্ণয় করব।

$$\Delta(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ \left(-\dfrac{p_1}{p_2}y_1' - \dfrac{p_0}{p_2}y_1\right) & \left(-\dfrac{p_1}{p_2}y_2' - \dfrac{p_0}{p_2}y_2\right) & \left(-\dfrac{p_1}{p_2}y_3' - \dfrac{p_0}{p_2}y_3\right) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ -\dfrac{p_1}{p_2}y_1' & -\dfrac{p_1}{p_2}y_2' & -\dfrac{p_1}{p_2}y_3' \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ -\dfrac{p_0}{p_2}y_1 & -\dfrac{p_0}{p_2}y_2 & -\dfrac{p_0}{p_2}y_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{p_1}{p_2}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \end{vmatrix} - \frac{p_0}{p_2}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$= 0$, যেহেতু উপরের নির্ণায়ক (detrminant) দুটিতেই দুটি একই সারি (row) আছে।

সুতরাং, আমরা দেখলাম যে, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ এই ফাংশন তিনটি রৈখিক অনধীন হবার শর্ত পালন করে না। অতএব, y_1, y_2, y_3 রৈখিক অধীন। আবার যেহেতু, y_1, y_2, y_3 অধীন অতএব, এমন তিনটি ধ্রুবক a_1, a_2, a_3 পাওয়া যায় যেগুলির মধ্যে অন্তত একটি শূন্য নয় এবং $a_1 y_1(x) + a_2y_2(x) + a_3y_3(x) = 0$......(5) হয়।

এখন a_3 শূন্য হতে পারে না, কেননা তা হলে (5) অনুসারে $a_1y_1(x) + a_2y_2(x) = 0$...(6) যেখানে a_1, a_2 এর অন্তত একটি অশূন্য। কিন্তু (6) হতে পারে না কেননা দেওয়া আছে যে, y_1, y_2 রৈখিক অনধীন। অতএব, $a_3 \neq 0$ । এবার (5) কে a_3 দিয়ে ভাগ করলে আমরা পাই

$$y_3(x) = -\frac{a_1}{a_3}y_1(x) - \frac{a_2}{a_3}y_2(x)$$

$$= C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

অতএব, উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ উপরের উপপাদ্য থেকে আমরা দেখলাম যে, একটি দ্বিক্রমের লিনিয়ার অবকল সমীকরণের দুটির অধিক রৈখিক অনধীন সমাধান থাকতে পারে না। দুইটি রৈখিক অনধীন সমাধান জানা থাকলে অন্যান্য সমস্ত সমাধান ঐ দুটির কোনও (linear combination) রৈখিক সংযোগ দ্বারা পাওয়া যাবে। অর্থাৎ , $y_1(x)$, $y_2(x)$ যদি একটি দ্বিক্রমের লিনিয়ার অবকল সমীকরণের দুটি রৈখিক অনধীন সমাধান হয় তবে, $y(x) = C_1y_2(x) + C_2y_2(x)$ সমস্ত সমাধান দেবে C_1, C_2 -এর উপযুক্ত মানের জন্য।

অতএব, সমীকরণটির সাধারণ সমাধান

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

মন্তব্য ঃ উপরের সমস্ত আলোচনা সাধারণভাবে n-তম ক্রমের অবকল সমীকরণের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য হবে। অর্থাৎ, n -তম ক্রমের লিনিয়ার অবকল সমীকরণের (§ 8 5.1 এর (2) নং সমীকরণ) যদি n সংখ্যক রৈখিক অনধীন সমাধানঃ $y = y_1(x), y = y_2(x)$........., $y = y_n(x)$ থাকে, তবে ঐ সমীকরণের সাধারণ সমাধান হল

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x)$$

উদাহরণ ঃ দেখান যে,

$$x^2y'' + xy' = 4y$$

এই সমীকরণের সকল সমাধান নিম্নের রূপে পাওয়া যাবে $y = c_1x^2 + c_2 \frac{1}{x^2}$

যেখানে c_1, c_2 যে কোনও দুইটি ধ্রুবক।

[উঃ প্রথমে দেখান যে, $y = x^2$ এবং $y = \frac{1}{x^2}$ দুইটি সমাধান। তার পর দেখানে যে x^2 ও $\frac{1}{x^2}$ রৈখিক অনধীন; অতঃপর উপঃ প্রয়োগ করুন]

উদাহরণ ঃ $y'' - xy' + y = 0$ এই সমীকরণের একটি সমাধান $y = x$ দেওয়া আছে। অপর সমাধানের জন্য $y = v(x)\,x$ বসিয়ে v এর অবকল সমীকরণ নির্ণয় করে তার সমাধান নির্ণয় করুন। দেখান যে, x, $xv(x)$ রৈখিক অনধীন।

উদাহরণ ঃ দেখান যে $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ এই সমীকরণের দুটি সমাধান $y = e^x$, $y = xe^x$, এবার দেখান যে সমাধানগুলি রৈখিক অনধীন।

উদাহরণ ঃ দেখান যে, $\sin x + \cos x$, $\sin x - \cos x$, $2\sin x + 3\cos x$ রৈখিক অধীন।

উঃ $\left[C_1(\sin x + \cos x) + C_2(\sin x - \cos x) + C_3(2\sin x + 3\cos x) = 0\right.$

ধরে x এর বিভিন্ন মান বসিয়ে C_1, C_2, C_3 এর তিনটি সমীকরণ পাবেন যাদের একমাত্র সমাধান $C_1 = C_2 = C_3 = 0$। অথবা, রন্‌স্কিয়ান নির্ণয় করে দেখান যে রন্‌স্কিয়ান শূন্যের সমান]

উদাহরণ ঃ $\frac{d^2y}{dx^2} = 4y$ সমীকরণের দুটি সমাধান হল e^{2x}, e^{-2x}

(i) $(e^{2x} + 2e^{-2x})$ কি অবকল-সমীকরণটির সাধারণ সমাধান?

(ii) অবকল-সমীকরণটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় করুন।

[উ: না, $Ae^{2x} + Be^{-2x}$]

8·7 একটি লিনিয়ার অবকল সমীকরণের বিশেষ সমাধান (Particular Integral)

$$p_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + p_n(x)y = f(x) \ldots\ldots (1)$$

এটি একটি লিনিয়ার n- ক্রমের সমীকরণ, যেখানে ডান পক্ষে $f(x)$ একটি পদ আছে যা শুধু x এর ফাংশন। অতএব, (1) এর সমাধান এমন করে নির্ণয় করতে হবে যে, y এর মান (1) এর বামপক্ষে বসালে বামপক্ষ = $f(x)$ হয়। আমরা দেখেছি যে, একটি n- ক্রমের অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধানে n সংখ্যক ধ্রুবক থাকে। তবে

যদি (1) এর এমন একটি সমাধান পাওয়া যায় যাতে ধ্রুবক নেই, তবে এই জাতীয় সমাধানকে বিশেষ সমাধান (Particular integral) বলা হয়।

ধরা যাক, (1) এর একটি বিশেষ সমাধান $y = z(x)$ আছে। অতএব, $p_0(x)\frac{d^n z}{dx^n} + \ldots.. + p_n(x)z = f(x)$ এখন (1) এ আমরা একটি অধীন চল পরিবর্তন করে $y(x) = z(x) + u(x)$....(2) বসালাম।

যেহেতু (1) একটি লিনিয়ার অবকল সমীকরণ অতএব,

$$\left[p_0(x)\frac{d^n z}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \ldots.. + p_n(x)\, z\right]$$

$$+\left[p_0(x)\frac{d^n u}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + p_n(x)\, u\right] = f(x) \ldots\ldots(3)$$

যেহেতু $y = z(x)$ একটি বিশেষ সমাধান, অতএব (3) নং সমীকরণের প্রথম গুচ্ছটি $f(x)$ এর সমান। অতএব, (3) থেকে আমরা পাই

$$p_0\frac{d^n u}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots.. + p_n u = 0 \ldots\ldots\ldots.. (4)$$

অতএব, আমরা (4)-এ দেখছি u, (1) নম্বর সমীকরণের সুষম (homogeneous) রূপের সমীকরণের সমাধান। উপরের আলোচনা থেকে আমরা পাই,

উপপাদ্য একটি অসুষম (non homogeneous) লিনিয়ার অবকল সমীকরণের $L(y) = f(x)$ সমাধান হল

$$y(x) = u(x) + z(x)$$

যেখানে, $y = z(x)$ হল $L(y) = f(x)$ এর একটি বিশেষ সমাধান এবং $u(x)$ হল $L(y) = 0$ এই সুষম অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

8·8 বিশিষ্ট সমাধান (Singular Solution)

একটি অবকল সমীকরণ

$$y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

নেওয়া যাক। $\frac{dy}{dx}$ এর স্থলে p লিখলে

$$y = px + p^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(i)$$

x -এর সাপেক্ষে অবকলন করলে

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$

আমরা পাই, $\frac{dp}{dx}(x+2p)=0$

অতএব, $\frac{dp}{dx}=0$ হলে $p=$ ধ্রুবক $=c$ (ধরা যাক) এবং, $y = cx + c^2$, (i) থেকে .... (ii)

অথবা, $x + 2p = 0$ হলে, $p=-\frac{x}{2}$

অতএব, (i) থেকে $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}=-\frac{x^2}{4}$

এখন (ii)-এ c এর কোনও মান বসিয়ে $y=-\frac{x^2}{4}$ পাওয়া যায় না। অতএব দেখা যাচ্ছে, $y=-\frac{x^2}{4}$ এমন একটি সমাধান যেটা (ii) থেকে পাওয়া যায় না।

(i) সাধারণ সমাধানগুলি x-y সমতলে কতগুলি সরলরেখার গুচ্ছ। এখন ঐ সরলরেখা সমূহের envelope পাওয়া যায়।

$$y = cx + c^2$$

এবং $$\frac{\partial}{\partial c}(y-cx-c^2)=0$$

এই দুটি সমীকরণ থেকে c অপনয়ন করলে Envelope এর সমীকরণ পাই $y=-\frac{x^2}{4}$। অতএব দেখা গেল, সাধারণ সমাধান সমূহের Envelope থাকলে সেটিও একটি সমাধান হয়। এবং এই বিশিষ্ট সমাধান (singular solution) সাধারণ সমাধান থেকে পাওয়া যাবে না।

মন্তব্য ঃ বিশিষ্ট সমাধান সকল অবকল সমীকরণের থাকে না।

যেমন ঃ $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

এর সমাধান হল

$$\sqrt{y}=\sqrt{x}+c$$

কিন্তু এই সমাধানগুলির কোনও envelope নেই।

উদাহরণ ঃ $y = px + (p^2+1)$, যেখানে $p=\frac{dy}{dx}$। এর বিশিষ্ট সমাধান নির্ণয় করুন। [উঃ $y=1-\frac{x^2}{4}$]

উদাহরণ ঃ $y = px + f(p)$। এই সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করুন ও বিশিষ্ট সমাধানের রূপ নির্ণয় করুন

[উঃ $y = cx + f(c)$

এবং বিশিষ্ট সমাধান

$$x + f'(c) = 0 \text{ ও } y = cx + f(c)$$

এর মধ্যে c অপনয়ক(eliminant)]

মন্তব্য ঃ লিনিয়ার অবকল সমীকরণের বিশিষ্ট সমাধান থাকতে পারে না। এর কারণ, এ জাতীয় সমীকরণের সাধারণ সমাধানে যে ধ্রুবকগুলি থাকে, তাদের ঘাত এক (one)। অতএব, এখানে তাদের envelope সমাধান নেই।

বিশিষ্ট সমাধানের বিশদ আলোচনা দশম এককে দ্রষ্টব্য।

8·9 একটি সমাধান জানা থাকলে লিনিয়ার অবকল সমীকরণের অন্যান্য সমাধান :

উপপাদ্য ঃ একটি লিনিয়ার n-ক্রমের অবকল সমীকরণের একটি সমাধান জানা থাকিলে অন্যান্য সমাধান (n-1)-ক্রমের অবকল সমীকরণের সমাধানের মাধ্যমে জানা যায়।

ধরা যাক,

$$p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + p_n(x)y = 0 \ldots (1)$$

অবকল সমীকরণের একটি সমাধান $y = u(x)$ জানা আছে।

ধরি, $y(x) = u(x)\, v(x)$ যেখানে $v(x)$ একটি অজানা ফাংশন।

$$y'(x) = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$$

$$y^{(n)}(x) = u^{(n)}(x)\; v(x) + {}^n c_1 u^{(n-1)}(x)\, v'(x) + \cdots + {}^n c_r u^{(n-r)}(x)\, v^{(r)}(x) + \cdots +$$

$$u(x)\, v^{(n)}(x)$$

(1) -এ উপরের মানগুলি বসিয়ে পাই

$$v(x)\left[p_0 u^{(n)}(x) + p_1 u^{(n-1)}(x) + \ldots\ldots + p_n u(x)\right]$$

$$+ v'(x)\left[{}^n c_1 p_0 u^{(n-1)}(x) + {}^{n-1}c_1 p_1 u^{(n-2)}(x) + {}^{n-2}c_2 p_2 u^{(n-3)}(x) + \ldots\ldots + p_{n-1}(x)\, u(x)\right]$$

$$+ v''(x)\left[{}^n c_2 u^{(n-2)}(x)\, p_0(x) + \ldots\ldots + p_{n-2}(x)\, u(x)\right]$$

$$+ \ldots\ldots + v^{(n)}(x)\, u(x)\, p_0(x) = 0 \ldots\ldots (2)$$

যেহেতু u (x) প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান, অতএব প্রথম গুচ্ছ ([ ] এর মধ্যে) রাশিটি = 0। অতএব, (2) তে $v'(x) = w(x)$ লিখলে আমরা পাই

$$w^{(n-1)}(x)u(x)p_0(x) + w^{(n-2)}(x)[{}^n c_{n-1}\, p_0 u'(x) + p_1 u(x)] + \ldots\ldots + w(x)$$

$$[{}^n c_1 p_0 u^{(n-1)}(x) + \ldots\ldots + p_{n-1}(x)u(x)] = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

অতএব, (3)-এর সমাধান থেকে অন্যান্য সমাধান পাওয়া যাবে।

উদাহরণ ঃ $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\dfrac{dy}{dx} - y = 0$

এই সমীকরণের একটি সমাধান হল $y = e^x$। অপর রৈখিক অনধীন সমাধান নির্ণয় করুন।

উত্তর ঃ অপর সমাধান নির্ণয় করতে আমরা ধরি $y(x) = e^x\, v(x)$, যেখানে $v(x)$ নির্ণয় করতে হবে। সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$x\{e^x v'' + 2e^x v' + e^x v\} + (1-x)(e^x v' + e^x v) - e^x v = 0$$

অতএব, $xv'' + v'(2x + 1 - x) = 0$

বা, $xv'' + (x+1)v' = 0$

$v' = w$ লিখলে

$xw' + (x+1)w = 0$

অতএব, $\dfrac{dw}{w} = -\dfrac{x+1}{x}dx$

বা, $\log_e w = -x - \log x + c$

বা, $\log_e wx = c - x$

বা, $wx = e^{c-x}$

বা, $w = \dfrac{e^{c-x}}{x} = e^c\dfrac{e^{-x}}{x}$

বা, $\dfrac{dv}{dx} = e^c\dfrac{e^{-x}}{x}$

অতএব, $u = e^c\displaystyle\int\frac{e^{-x}}{x}dx = e^c\left[+e^{-x}\log x + \int e^{-x}\log x\,dx\right]$

অতএব অন্য সমাধান হল,

$$y = \left(+e^{-x}\log x + \int e^{-x}\log x\,dx\right)e^x$$

$$= +\log x + e^x\int e^{-x}\log x\,dx$$

উদাহরণ ঃ $a_0 \dfrac{d^2y}{dx^2} + a_1 \dfrac{dy}{dx} + a_2 y = 0$ (a_0, a_1, a_2 ধ্রুবক)

এই অবকল সমীকরণের $y = u\,(x)$ একটি সমাধান জানা থাকলে অপর সমাধান নির্ণয় করুন।

এখানে $a_0 u''(x) + a_1 u'(x) + a_2 u(x) = 0 \ldots\ldots(i)$

অন্য সমাধানের জন্য $y(x) = u(x)\, v(x)$ যেখানে $v(x)$ নির্ণয় করতে হবে। সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$a_0\left(u''v(x) + 2u'v' + uv''\right) + a_1\left(u'v + uv'\right) + a_2\,(uv) = 0$$

অতএব, (i) প্রয়োগ করে v-এর সহগ শূন্য। অতএব আমরা পাই,

$$a_0 uv'' + v'(2u'a_0 + a_1 u) = 0$$

অতএব, $\dfrac{v''}{v'} = -\dfrac{2u'a_0 + a_1 u}{a_0 u}$

$$= -2\frac{u'}{u} - \frac{a_1}{a_0}$$

অতএব, x-এর সাপেক্ষে সমাকল করলে পাই

$$\log v' = -2 \log u - \frac{a_1}{a_0} x + \text{ ধ্রুবক}$$

অতএব, $\log v'u^2 = -\dfrac{a_1}{a_0} x + $ ধ্রুবক

বা, $v'u^2 = Ae^{-\frac{a_1}{a_0}x}$ যেখানে, A একটি ধ্রুবক

অতএব, $v = A\displaystyle\int \frac{e^{-\frac{a_1}{a_0}x}}{u^2} dx + $ ধ্রুবক

অতএব, অন্য সমাধান হল $uv = Au\displaystyle\int \frac{e^{-\frac{a_1}{a_0}x}}{u^2}\, dx$ ।

8·10 সারাংশ

এই এককে আলোচিত হল $F\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \ldots\ldots \dfrac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান $y = \phi\,(x, c_1, c_2, \ldots. c_n)$ এ n সংখক ধ্রুবক থাকে।

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান সম্পর্কে যথেষ্ট শর্তটি পিকার্ডের উপপাদ্যের মাধ্যমে বিবৃত হয়েছে।

n ক্রমের লিনিয়ার সমীকরণ $p_n \frac{d^n y}{dx^n} + p_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^n} + \ldots\ldots + p_0 y = 0$ এর সাধারণ সমাধান সম্পর্কিত শর্ত বিবৃত হয়েছে।

কতিপয় ফাংশনের রৈখিক অধীনতা, অনধীনতা আলোচিত হয়েছে। দেখান হল $\phi_1(x), \phi_2(x) \ldots\ldots \phi_n(x)$ অপেক্ষক গুলি রৈখিক অনধীন হবার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল তাদের রংস্কিয়ান $\Delta(\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n) \neq 0$

দেখান হয়েছে $L(y) \equiv p_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + p_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + p_0(x) y = 0$ এই লিনিয়ার সুষম সাধারণ অবকল সমীকরণের যদি n সংখ্যক অনধীন সমাধান $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$ থাকে তবে $y = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots\ldots + c_n u_n$ হবে সমীকরণটির সাধারণ সমাধান।

$L(y) \equiv p_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots\ldots + p_0(x) y = f(x)$ -এই সমীকরণটির সাধারণ সমাধান হল

$y = z(x) + u(x)$ যেখানে $z(x)$ হল সমীকরণটির বিশেষ সমাধান এবং

$u(x)$ হল $L(y) = 0$ সুষম সমীকরণটির সাধারণ সমাধান। দেখান হয়েছে, কোন অবকল সমীকরণের বিশিষ্ট সমাধান হল, সাধারণ সমাধান যে রেখাগোষ্ঠী সূচিত করে তাদের envelope। এছাড়া প্রমাণ করা হয়েছে যে n ক্রমের লিনিয়ার সমীকরণের একটি সমাধান জানা থাকলে অন্যান্য সমাধান n-1 ক্রমের অবকল সমীকরণের সমাধানের মাধ্যমে জানা যায়।

8·11 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. $y\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^2 = 0$

   এই সমীকরণটি কি লিনিয়ার ?

   এই সমীকরণটি কি সুষম (homogeneous) ?

উ ঃ লিনিয়র নয়, সুষম নয়।

2. $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 6y = 0$ এই সমীকরণের দ্বিতীয় সমাধান নির্ণয় করুন, যেখানে জানা আছে যে $y = x^3$ একটি সমাধান।

উ ঃ $y = \frac{1}{x^2}$

একক 9 ❑ প্রথম ক্রমের ডিফারেনশিয়াল (অবকল সমীকরণ)

গঠন

9.1 প্রস্তাবনা

আপনারা ইতিমধ্যে অবকল সমীকরণ সম্পর্কে কিছু জেনেছেন। বিজ্ঞানের, বিশেষ করে প্রযুক্তি বিজ্ঞানের বিভিন্ন বিভাগে নানারূপ প্রশ্নের সমাধানে অবকল সমীকরণ এসে পড়ে। কীভাবে অবকল সমীকরণের উৎপত্তি হয়, অবিকল সমীকরণের জ্যামিতিক ব্যাখ্যাই বা কী, এসবও আপনারা পূর্বের এককের আলোচনায় জেনেছেন।

প্রথম ক্রমের অবকল সমীকরণ সমাধানের বিভিন্ন পদ্ধতি নিয়ে আলোচনাই আমাদের বর্তমান উদ্দেশ্য।

প্রথমে দেখা যাক, অবকল সমীকরণের সমাধান বলতে কী বোঝায়। ধরা যাক, y, x স্বাধীন চলের ওপর নির্ভরশীল একটি চল এবং $\frac{dy}{dx} = 3$ একটি অবকল সমীকরণ। স্পষ্টতই, $y = 3x + c$, যেখানে c একটি ধ্রুবক, সমীকরণটিকে সিদ্ধ করছে। অতএব, $y = 3x + c$ সমীকরণটির **সাধারণ সমাধান**। আবার, c-এর কোনো নির্দিষ্ট মান, যেমন $c = 1$ ধরলে, $y = 3x + 1$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। $y = 3x + 1$ একটি **বিশেষ সমাধান**।

সুতরাং, অবকল সমীকরণের অবকল সমন্বিত রূপ পরিহার করে নির্ভরশীল চলকে স্বাধীন চল দ্বারা প্রকাশ করার নাম সমীকরণটিকে সমাধান করা।

9.2 উদ্দেশ্য

প্রথম ক্রমের অবকল সমীকরণের সমাধান পদ্ধতি আলোচনাই বর্তমান এককের মূল উদ্দেশ্য। এই এককে প্রথমে চল পৃথকীকরণ পদ্ধতি ও সমমাত্রিক অবকল সমীকরণের সমাধান নির্ণয় পদ্ধতি আলোচিত হয়েছে।

সঠিক (বা যথার্থ) সমীকরণের বিশদ আলোচনা আছে। এছাড়া অনুচ্ছেদ 9·8 থেকে 9·10 অব্দি প্রথম ক্রমের রৈখিক সমীকরণ, একাধিক ঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ ও Clairaut's ক্লেরোর সমীকরণ সংক্রান্ত আলোচনা করা হয়েছে।

9.3 সংজ্ঞা

এবার প্রথম ক্রমের অবকল সমীকরণ সমাধানের বিভিন্ন পদ্ধতি নিয়ে আমরা আলোচনা করব।

আমরা আগে জেনেছি যে, যে অবকল সমীকরণে অবকল সহগের কেবলমাত্র প্রথম ক্রম বর্তমান থাকে, তাকে প্রথম ক্রমের অবকল সমীকরণ বলে।

যেমন, $\frac{dy}{dx} = \sin x, \frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dx} + 2y = x$

এরা প্রত্যেকেই প্রথম ক্রমের অবকল সমীকরণ।

9.4 চল পৃথকীকরণ পদ্ধতি

ধরা যাক সমীকরণটির আকার,

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$$

অর্থাৎ, dx এর সাথে কেবল মাত্র x-এর অপেক্ষক এবং dy এর সাথে কেবলমাত্র y -এর অপেক্ষক থাকবে।

এই ক্ষেত্রে, উভয় পক্ষে সমাকল প্রয়োগ করে নির্ণেয় সমাধান পাওয়া যায়। মনে রাখা দরকার '0' এর সমাকল যদৃচ্ছ ধ্রুবক c হয়, কারণ c -এর অবকলন 0। উপরের সমীকরণের সমাধান হবে,

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = c, \; c = \text{ধ্রুবক}$$

দ্রষ্টব্য ঃ $\frac{dy}{dx} = f(x).\,g(y)$ সমীকরণ দেওয়া থাকলে তাকে

$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$ অর্থাৎ, চল পৃথকীকরণ আকারে প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ ঃ সমাধান করতে হ'বে

1) $$\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

2) $x^2 \dfrac{dy}{dx} = y^2 - 5y + 6$

সমাধান ঃ 1) $\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$

উভয় পক্ষে সমাকলন করলে,

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = c$$

বা, $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{-2xdx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{-2ydy}{\sqrt{1-y^2}} = c$

বা, $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} + c = 0$, $c =$ ধ্রুবক

এটাই সাধারণ সমাধান।

2) $x^2 \dfrac{dy}{dx} = y^2 - 5y + 6$

চল পৃথকীকরণ করলে

$\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dy}{y^2 - 5y + 6}$ হয়।

উভয় পক্ষে সমাকলন দ্বারা

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{dy}{y^2 - 5y + 6} + c$$

বা, $-\dfrac{1}{x} = \displaystyle\int \frac{dy}{(y-3)(y-2)} + c$

$$= \int \left[\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y-2}\right] dy + c$$

$$= \log\left|\frac{y-3}{y-2}\right| + c$$

$$c = \log k \ (k > 0) \text{ ধরলে, } -\frac{1}{x} = \log\left(k\left|\frac{y-3}{y-2}\right|\right)$$

$$\text{বা, } e^{-\frac{1}{x}} = k\left|\frac{y-3}{y-2}\right| \quad \text{বা, } (y-2)^2 = k^2(y-3)^2 e^{2/x}, \qquad k = \text{ধ্রুবক}$$

দ্রষ্টব্য ঃ সমাধানকে অনেক প্রকারে প্রকাশ করা যায়। তবে তাকে সরলতম আকারে (Simplest form) রাখাই ভালো।

এবার আপনি সমাধান বের করুন।

অনুশীলনী ঃ 1) $\cos y\, dx + \sin x\, dy = 0$

2) $x\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$

3) $\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\, dx + \sin^{-1} y\, dy = 0$

উত্তর ঃ 1) $\sec y + \tan y = c \cot\dfrac{x}{2}$

2) $\sqrt{1-x^2} + cxe^{\cos^{-1} y} = 1$

3) $x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x + (\sin^{-1} y)^2 = c$

9·5 সমমাত্রিক (homogeneous) অবকল সমীকরণের সমাধান

প্রথমে জানা দরকার, একটি অপেক্ষক, ধরি $f(x, y)$ হোমোজিনিয়াস কিনা কী করে বোঝা যায়। যদি x-এর স্থলে xt এবং y এর স্থলে yt বসালে $f(xt, yt) = t^k f(x, y)$ হয়, তবে $f(x, y)$ হোমোজিনিয়াস হবে এবং k হোমোজিনিয়াস অপেক্ষকটির ঘাত (degree) হ'বে।

ধরি, $Mdx + Ndy = 0$ একটি প্রথম ক্রমের অবকল সমীকরণ। এখানে যদি M ও N উভয়েই x, y চলের সমঘাতযুক্ত হোমোজিনিয়াস অপেক্ষক হয়, তবে সমীকরণটিকে হোমোজিনিয়াস বলা হবে।

অন্য ভাবে বলা যায়, M ও N অপেক্ষকের প্রতি পদের ঘাত সমান হলে সমীকরণটি হোমোজিনিয়াস হ'বে।

$\phi(x, y)$, k মাত্রায় সমমাত্রিক হলে, $\phi(x, y) = x^k \phi_1\left(\dfrac{y}{x}\right)$ হয়।

সমাধান পদ্ধতি ঃ

$y = vx$ প্রতিস্থাপন করলে সকল হোমোজিনিয়াস অবকল সমীকরণকেই চল পৃথকীকরণ নিয়মে সমাধান করা যায়। কারণ, M, N সমঘাত হবার দরুন মনে করি k ঘাত যুক্ত হোমোজিনিয়াস অর্থাৎ,

$$M = x^k\phi_1\left(\frac{y}{x}\right), \quad N = x^k\phi_2\left(\frac{y}{x}\right)$$

$\therefore \frac{y}{x} = v$ বসালে, সমীকরটি হবে

$$\phi_1(v) + \phi_2(v)\left(v + x\frac{dv}{dx}\right) = 0$$

বা, $\frac{dx}{x} + \frac{\phi_2(v)\,dv}{\phi_1(v) + v\phi_2(v)} = 0$

পরিশেষে; $v = \frac{y}{x}$ স্থাপন করতে হয়। নিম্নের উদাহরণটি লক্ষ্য করুন।

উদাহরণ ঃ 1. সমাধান করুন $(4y + 3x)\frac{dy}{dx} + (y - 2x) = 0$

সমাধান ঃ সমীকরণটির অন্যরূপ $(y - 2x)\,dx + (4y + 3x)\,dy = 0$। স্পষ্টতঃই সমীকরণটি একঘাত বিশিষ্ট হোমোজিনিয়াস।

ধরি, $y = vx \quad \therefore \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের নতুন রূপ হল

$$(4vx + 3x)\left(v + x\frac{dv}{dx}\right) + (vx - 2x) = 0$$

বা, $\quad v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{v-2}{4v+3}$

বা, $\quad x\frac{dv}{dx} = -\left[v + \frac{v-2}{4v+3}\right] = -\frac{4v^2 + 4v - 2}{4v+3}$

বা, $\quad -\frac{dx}{x} = \frac{4v+3}{4v^2+4v-2}dv$ [চল পৃথক করা হল]

উভয় পক্ষের সমাকল নিলে,

$$-\int\frac{dx}{x}=\int\frac{4v+3}{2(2v^2+2v-1)}dv+c$$

বা $$-\log x=\frac{1}{2}\int\frac{(4v+2)+1}{2v^2+2v-1}dv+c$$

বা $$\log\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\int\frac{4v+2}{2v^2+2v-1}dv+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dv]+c$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(2v^2+2v-1\right)+\frac{1}{4}.\frac{1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}}\log\frac{v+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{v+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}+c$$

$$=\log\sqrt{2v^2+2v-1}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\log\frac{2v+1-\sqrt{3}}{2v+1+\sqrt{3}}+c$$

বা, $$\frac{1}{x}=\frac{k}{x}\sqrt{2y^2+2xy-x^2}\left[\frac{2y+x\left(1-\sqrt{3}\right)}{2y+x\left(1+\sqrt{3}\right)}\right]^{\frac{1}{4\sqrt{3}}}, \quad c=\log k,\frac{y}{x}=v_{K>0}$$

বা, $$\frac{2y+x\left(1+\sqrt{3}\right)}{2y+x\left(1-\sqrt{3}\right)}=k'\left(2y^2+2xy-x^2\right)^{2\sqrt{3}}, k'=k^{4\sqrt{3}}$$

এটাই সাধারণ সমাধান।

এবার নিজে সমাধান করুন।

অনুশীলনী ঃ

1. $(x+y)\dfrac{dy}{dx}=y-x$

2. $(x+y)^2 = xy\dfrac{dy}{dx}$

3. $2\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}$

4. $y^2+x^2\dfrac{dy}{dx} = xy\dfrac{dy}{dx}$

5. $(x^2-y^2+xy)\,dy+(2xy-3y^2)\,dx=0$

6. $(2x-3y)\,dx+(y-2x)\,dy=0$

7. $(x^3-3xy^2)\,dx=(y^3-3x^2y)\,dy$

8. $x^3\dfrac{dy}{dx}=y^3+y^2\sqrt{y^2-x^2}$

9. $xy\dfrac{dy}{dx}=y^2+(x+y)^2e^{-y/x}$

10. $x^2ydx-(x^3+y^3)\,dy=0$

[উত্তর : 1. $2\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)+\log(x^2+y^2)=c$

2. $x^3(2y+x) = ce^{y/2x}$

3. $xy^2=c(y-x)^2$

4. $y=ce^{y\backslash x}$

5. $y^4(y+3x)^{11}=c(y-x)^3$

6. $(y-\alpha x)^A(y-\beta x)^B=c$, যেখানে $\alpha=\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{17}}{2}$, $p=\dfrac{5}{2}-\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

$$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{17}},\ B=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{17}}$$

7. $(y^2+x^2)=c(y^2-x^2)$

8. $xy=c\left(y+\sqrt{y^2-x^2}\right)$

9. $xe^{y/x}=(x+y)\log(cx)$

10. $y=c\,e^{x^3/3y^3}$

9.5.1 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}$ আকারের সমীকরণের সমাধান।

9.5.1.1 $c=0,\ c'=0$ ধরলে, সমীকরণটি হোমোজিনিয়াস হয়। অতএব, 9·5 নিয়মে সমাধান যোগ্য।

9.5.1.2 $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{1}{k}$ হলে, সমীকরণটির আকার হয় $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(ax+by)+c}{k\,(ax+by)+c'}$

এখানে $ax+by=v$ ধরিলে চল.পৃথকীকরণ দ্বারা সমাধান যোগ্য।

এক্ষেত্রে অবকলনের সাহায্যে, $a+b\dfrac{dy}{ax}=\dfrac{dv}{dx}$ বা, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{b}\left(\dfrac{dv}{dx}-a\right)$ হবে

এবং $\dfrac{(ax+by)+c}{k\,(ax+by)+c'}=\dfrac{v+c}{kv+c'}$ হবে।

9.5.1.3 $a'+b=0$ হলে $a'=-b$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{-bx+b'y+c'}$$

বা, $(ax+c)\,dx-(b'y+c')\,dy+b(ydx+xdy)=0$

বা $\int(ax+c)\,dx-\int(b'y+c')\,dy+b\int d(xy)=c$

$[\because\ d\,(xy)=ydx+xdy]$

এবার সমাকল করলেই সমাধান পাওয়া গেল।

9.5.1.4 সাধারণ ভাবে $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}$ হলে, $x=x'+h,\ y=y'+k$ ধরে সমীকরণটি সমাধান করা যায়।

এখানে, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy'}{dx'}=\dfrac{ax'+by'+(ah+bk+c)}{a'x'+b'y'+(a'h+b'k+c')}$

এখন, (h, k) এমন মান স্থির করলাম যেন, $ah + bk + c = 0$, $a'h + b'k + c' = 0$ হয়। **এই সমীকরণ দুটি** সমাধান করে (h, k) এর মান পাওয়া যাবে, এবং তখন $\dfrac{dy'}{dx'} = \dfrac{ax' + by'}{a'x' + b'y'}$ হবে। **অর্থাৎ, সমীকরণটি** হোমোজিনিয়াস হবে। অতএব, সমাধান যোগ্য।

(h, k) এর প্রাপ্ত মান ধরে $x' = x - h, y' = y - k$, শেষ সমাধানে প্রতিস্থাপন করলে সমাধান পাওয়া যাবে।

লক্ষ্য করুন, নীচের সমীকরণগুলি কীভাবে সমাধান করা হয়েছে।

উদাহরণ ঃ **1.** $(x+y+1)\,dx = (2x+2y+1)\,dy$

বা, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x+y)+1}{2(x+y)+1}$

ধরি, $x+y=v$ $\quad \therefore 1+\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx}$, বা $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx} - 1$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ, $\dfrac{dv}{dx} - 1 = \dfrac{v+1}{2v+1}$

বা, $\dfrac{dv}{dv} = \dfrac{3v+2}{2v+1}$

বা, $\dfrac{2v+1}{3v+2}dv = dx$

সমাকল করিলে, $\displaystyle\int \frac{2v+1}{3v+2}dv = \int dx + c'$

বা, $\displaystyle\frac{2}{3}\int \frac{(3v+2)-\frac{1}{2}}{3v+2}\,dv = x + c'$

বা, $\displaystyle x + c' = \frac{2}{3}\,v - \frac{1}{3}\int \frac{dv}{3v+2}$

বা, $\displaystyle = \frac{2v}{3} - \frac{1}{9}\log(3v+2)$

$\displaystyle = \frac{2}{3}(x+y) - \frac{1}{9}\log(3x+3y+2)$

বা, $\log(3x+3y+2) + 3(x-2y) = c,\ c = -9c'$

উদাহরণ 2. সমাধান করুন, $(x+2y-3)\,dy = (2x-y+1)dx$

$$\text{এখানে, } \frac{dy}{dx} = \frac{2x-y+1}{x+2y-3} \qquad [\, a+a' = -1+1 = 0 \,]$$

$\therefore$ সমীকরণটিকে এভাবে সাজানো যায়,

$$(xdy + ydx) + (2y-3)dy = (2x+1)dx$$

বা, $d\,(xy) + (2y-3)\,dy = (2x+1)\,dx$

সমাকলন করলে,

$$xy + y^2 - 3y = x^2 + x + c$$

বা, $x^2 - y^2 - xy + x + 3y + c = 0$

নির্ণেয় সাধারণ সমাধান।

উদাহরণ 3. সমাধান করুন, $(2x - y + 1)\,dx - (6x - 5y + 4)\,dy = 0$

$$\text{এখানে, } \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}, \qquad \because \frac{2}{6} \neq \frac{-1}{-5}$$

ধরি, $x = x' + h,\ y = y' + k$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'} = \frac{2x' - y' + 2h - k + 1}{6x' - 5y' + 6h - 5k + 4}$$

$2h - k + 1 = 0$ এবং, $6h - 5k + 4 = 0$ ধরিলে, $h = -\frac{1}{4},\ k = \frac{1}{2}$ হয়।

$$\therefore \frac{dy'}{dx'} = \frac{2x' - y'}{6x' - 5y'} \qquad \text{এবং,} \quad x' = x - h = x + \frac{1}{4}$$

$$y' = y - k = y - \frac{1}{2}$$

ধরি, $y' = vx' \ \therefore\ \frac{dy'}{dx'} = v + x'\frac{dv}{dx'}$

$$\therefore v + x'\frac{dv}{dx^1} = \frac{2-v}{6-5v}$$

বা, $x'\frac{dv}{dx^1} = \frac{5v^2 - 7v + 2}{6 - 5v}$

বা, $\frac{dx'}{x'} = \frac{6-5v}{5v^2 - 7v + 2}\,dv$

$$\therefore \int \frac{dx'}{x'} = -\frac{1}{2}\int \frac{10v-7}{5v^2-7v+2}\,dv + \frac{5}{2}\int \frac{dv}{(v-1)(5v-2)} + \text{ ধ্রুবক}$$

$$\therefore \log x' = -\frac{1}{2}\log(5v-2)(v-1) + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{v-1} - \frac{5}{5v-2}\right)dv$$

$$= -\frac{1}{2}\log(5v-2)(v-1) + \frac{5}{6}\log\frac{v-1}{5v-2} + \text{ ধ্রুবক}$$

বা, $$6\log x' = -3\log\left(\frac{5y'}{x'}-2\right)\left(\frac{y'}{x'}-1\right) + 5\log\frac{v'-x'}{5y'-2x'} + \text{ ধ্রুবক}$$

$$= \log\frac{(x')^6}{(5y'-2x')^3\,(y'-x')^3} + \log\left(\frac{y'-x'}{5y'-2x'}\right)^5 + \log k^2$$

বা, $$(x')^6 = \frac{k^2(x')^6(y'-x')^5}{(5y'-2x')^8\,(y'-x')^3}$$ [ধ্রুবক $= \log k^2$]

বা, $$(5y'-2x')^8 = k^2(y'-x')^2$$ $\left[\because x' = x + \frac{1}{4},\ y' = y - \frac{1}{2}\right.$

বা, $$(5y-2x-3)^4 = c\,(4y-4x+3)$$

নিজে সমাধান করুন।

অনুশীলনী ঃ

1. $\left(\frac{4x+6y+5}{3y+2x+4}\right)\frac{dy}{dx} = 1$
2. $(2x-3y+5)\,dx + (4x-6y+7)\,dy = 0$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{5x-3y+2}{3x+5y+1}$

[উত্তর ঃ

1. $(14x+21y+22)^3 = c\,e^{7(2y-x)}$
2. $(14x-21y+29)^3 = c\,e^{-7(x+2y)}$
3. $5(x^2-y^2) + 2(2x-y) - 6xy = c$

ইংগিত; 9.3.3.3 ব্যবহার করুন।]

9.6 সঠিক বা যথার্থ (Exact) অবকল সমীকরণের সমাধান।

প্রথমে দেখা যাক যথার্থ অবকল সমীকরণ বলতে আমরা কি বুঝি।

ধরি সমীকরণটি $Mdx + Ndy = 0$ আকারে আছে এবং M ও N উভয়ই x, y চলের অপেক্ষক। যদি $Mdx + Ndy$ কে অন্য একটি অপেক্ষক $u(x,y)$ এর ডিফারেন্সিয়াল রূপে প্রকাশ করা যায়, অর্থাৎ $Mdx + Ndy = du$ হয়, তবে অবকল সমীকরণটিকে সঠিক বা যথার্থ (exact) বলা হবে। সমীকরণটির সাধারণ সমাধান হবে $u = c$ (ধ্রুবক);

যেমন, $x\,dy + y\,dx = 0$ একটি যথার্থ অবকল সমীকরণ, কারণ $x\,dy + y\,dx = d(xy)$। এখানে, $u = xy$।

কোনো কোনো ক্ষেত্রে শুধুমাত্র অনুধাবন ক্ষমতা প্রয়োগ করে অবকল যুক্ত রাশি (expression) সঠিক (যথার্থ) কিনা বলা যায়। যেমন,

(a) $x\,dy + y\,dx = d(xy)$

(b) $x\,dx \pm y\,dy = d\left[\frac{1}{2}(x^2 \pm y^2)\right]$

(c) $\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$

(d) $\frac{xdy - ydx}{y^2} = -d\left(\frac{x}{y}\right)$

(e) $\frac{x\,dy - ydx}{x^2 + y^2} = d\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

(f) $\frac{2xy\,dy - y^2dx}{x^2} = d\left(\frac{y^2}{x}\right)$ ইত্যাদি

উদাহরণ 1 ঃ সমাধান করুন $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$

সমাধান ঃ $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\,dx$

বা, $$\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} = \frac{1}{x}dx$$

সমাকলন করলে, (যেহেতু চল পৃথকীকরণ হয়েছে)

$$\log\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right) = \log x + \log k,\ n > 0$$

$$\therefore\ y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2k$$

এটাই নির্ণেয় সাধারণ সমাধান।

9.6.1 $Mdx + Ndy = 0$ অবকল সমীকরণটি সঠিক হবার শর্ত

মনে করি, M, N উভয় অপেক্ষকই আংশিক অবকলন যোগ্য। আমরা দেখাব যে, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ হ'লে, অবকল সমীকরনটি যথার্থ হবে। শর্তটি আবশ্যক (necessary) এবং যথেষ্টও (sufficient) বটে। এখানে মনে করা হচ্ছে যে, M, N এবং তাদের বিভিন্ন আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত।

ধরি, অবকল সমীকরণটি যথার্থ। অর্থাৎ, এমন একটি u আছে যাতে

$$\therefore Mdx + Ndy = du, \quad u = u(x, y)$$

আবার, $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$

$$\therefore \quad Mdx + Ndy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

বা, $M = \frac{\partial u}{\partial x}, N = \frac{\partial u}{\partial y}$

কিন্তু, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

$$\therefore \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ $\left[\because \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y};\right.$ u এবং তার অন্তরকলজগুলি সন্তত অপেক্ষক ধরে]

অতএব শর্তটি আবশ্যক।

শর্তটি যে যথেষ্ট তা প্রমাণ করার জন্য ধরা যাক, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ । আমরা দেখাব সমীকরণটি সঠিক (যথার্থ)

মনে করি, $P = \int Mdx$, (M অপেক্ষকে y ধ্রুবক ধরে)

$$\therefore \quad M = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$\therefore \quad N = \frac{\partial P}{\partial y} + f(y), \quad f(y) = y$ এর অপেক্ষক।

এখন, $Mdx + Ndy = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \left[\frac{\partial P}{\partial y} + f(y)\right] dy$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + dF(y)$$

$$= dp + dF(y),\ dF(y) = f(y)\,dy \text{ (ধরি)}$$

$$= d\left[P + F(y)\right]$$

$$= du,\ u = P + F(y) \text{ লিখে}$$

$\therefore$ অবকল সমীকরনটি যথার্থ। এবং শর্তটি যথেষ্ট।

দ্রষ্টব্য ঃ ধরি, $Mdx + Ndy = 0$ অবকল সমীকরণটি যথার্থ।

$$\therefore\ Mdx + Ndy = du,\ u = u(x, y)$$

$$= d\left[P + F(y)\right]$$

$$\therefore u = P + F(y) = P + \int f(y)\,dy,\ dF(y) = f(y)dy$$

$$= P + \int\left(N - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dy \text{ (9.6.1) থেকে}$$

$$= \int_{y=Const} Mdx + \int\left[N - \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dy \ldots\ldots (a)$$

এখন, $\frac{\partial P}{\partial y} = \int_{y=const}\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) dx = \int_{y=const} \frac{\partial N}{\partial x} dx = N$ (N এর x যুক্ত পদসমূহ)

$\therefore$ (a) থেকে পাই,

$$u = \int_{y = \text{ধ্রুবক}} Mdx + \int \text{(N এর x শূন্য পদ সমূহ)}\, dy = c$$

অতএব, যথার্থ অবকল সমীকরণ সমাধান করবার নিয়ম হলঃ y ধ্রুবক ধরে x এর সাপেক্ষে M এর সমাকলন লব্ধ ফলের সংগে N এর x- শূন্য পদগুলিকে y এর সাপেক্ষে সমাকলন লব্ধ ফল যুক্ত করে, যোগফলকে একটি ধ্রুবকের সমান লিখতে হয়।

উদাহরণ ঃ সমাধান করুন $(2ax+by+g)\,dx+(2ay+bx+e)\,dy=0$

সমাধান ঃ সমীকরণটিকে $Mdx + Ndy = 0$ ধরলে,

$$M = 2ax + by + g$$

$$N = 2ay + bx + e$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = b = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \therefore \text{ অবকল সমীকরণটি যথার্থ।}$$

সমাধান, $\displaystyle\int\limits_{y=\text{ধ্রুবক}}(2ax+by+g)dx+\int(2ay+e)\,dy=c$ [দ্বিতীয় সমাকলনে x বর্জিত N নেওয়া হল]

বা, $ax^2 + bxy + gx + ay^2 + ey = c$ (c যদৃচ্ছ ধ্রুবক), এটাই নির্ণেয় সমাধান।

অনুশীলনী ঃ সমাধান করুন

1. $(3-2xy-y^2)\,dx-(x+y)^2 dy=0$
2. $(x^3+3xy^2)\,dx+(y^3+3x^2y)\,dy=0$
3. $3x^2ydx+(x^3+y^3)\,dy=0$

উত্তর ঃ

1. $y^3-9x+3x^2y+3xy^2=c$

   ইংগিত ঃ $\displaystyle\int\limits_{y=\text{ধ্রুবক}}(3-2xy-y^2)\,dx+\int y^2dy=\text{ধ্রুবক}$

2. $x^4+6x^2y^2+y^4=c$

   ইংগিত ঃ $\dfrac{\partial M}{\partial y}=6xy=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ $\quad\therefore$ সমীকরণটি যথার্থ।

3. $4x^3y + y^4 = c$

9.7 সমাকল গুণক (Integrating factor)

$Mdx + Ndy = 0$ আকারের অবকল সমীকরণ যথার্থ না হলে কখনও কখনও কোন ফাংশন $\lambda(x,y)$ দিয়ে সমীকরণটিকে গুণ করলে তাকে যথার্থ অবকল সমীকরণে পরিণত করা যায়। λ কে বলা হয় **সমাকল-সহায়ক উৎপাদক**, বা সমাকলন গুণক। যেমন, $xdy - ydx = 0$ সমীকরণটি যথার্থ নয়।

কিন্তু, $\dfrac{1}{x^2}(xdy-ydx)=0$ একটি যথার্থ অবকল সমীকরণ। $\dfrac{1}{x^2}$ হল প্রদত্ত সমীকরণটির **সমাকল গুণক**।

9.7.1 সমাকল-সহায়ক উৎপাদকের (যা সমাকলন গুণকের) সংখ্যা অসংখ্য।

ধরি, $\lambda = \lambda(x, y)$, $Mdx + Ndy = 0$ এর একটি সমাকল গুণক।

$$\therefore \lambda[Mdx + Ndy] = du = 0, u = u(x, y)$$

এবং সমাধান $u = c$

ধরি, $f(u)$, (u) এর একটি অপেক্ষক।

এখন, $\lambda f(u)(Mdx + Ndy) = f(u)\,du = d\phi$ (ধরি) যেখানে $\phi'(u) = f(u)$

$\therefore \lambda f(u)$ ও একটি সমাকল গুণক।

অপেক্ষক $f(u)$ সুনির্দিষ্ট নয়।

$\therefore$ সমাকল-সহায়ক উৎপাদকের (সমাকল-গুণকের) সংখ্যা অসংখ্য।

9.7.2 সমাকল গুণক নির্ণয়ের কয়েকটি উপায়।

[একটি অভেদ ঃ $al + bm = \frac{1}{2}\left[(ax + by)\left(\frac{l}{x} + \frac{m}{y}\right) + (ax - by)\left(\frac{l}{x} - \frac{m}{y}\right)\right]$

মন্তব্য ঃ আমরা প্রয়োজনমত সমাকল গুণক বা Integrating factor কে IF বলব]

9.7.2.1 যদি $Mx + Ny \neq 0$ হয় এবং $Mdx + Ndy = 0$ সমমাত্রিক অবকল সমীকরণ হয়, তবে $\frac{1}{Mx + Ny}$ সমাকল গুণক হ'বে।

প্রমাণ ঃ $Mdx + Ndy = \frac{1}{2}\left[(Mx + Ny)\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right) + (Mx - Ny)\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)\right]$ [অভেদ]

$$\therefore \frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = \frac{1}{2}\left[d\log(xy) + \frac{Mx - Ny}{Mx + Ny}\,d\log\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[d\log(xy) + F_1\left(\frac{x}{y}\right)d\log\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

[$\because \frac{Mx - Ny}{Mx + Ny}$ সমমাত্রিক],

$$\frac{1}{2}\left[d\log(xy)+F_2\left\{\log\left(\frac{x}{y}\right)\right\}d\log\left(\frac{x}{y}\right)\right], \left[\frac{x}{y}=e^{\log\frac{x}{y}}\right]$$

$$= du \text{ (ধরি)}$$

$\therefore \frac{1}{Mx+Ny}$ একটি সমাকল গুণক।

9.7.2.2 যদি $Mx-Ny\neq 0$ হয় এবং যদি $Mdx + Ndy = 0$ অবকল সমীকরণটিতে $M = yf_1(xy),\ N = xf_2(xy)$ রূপের হয়, তবে $\frac{1}{Mx-Ny}$ সমীকরণটির সমাকল গুণক হবে।

প্রমাণ ঃ $Mdx+Ndy=\frac{1}{2}\left[(Mx+Ny)\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right)+(Mx-Ny)\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)\right]$ (অভেদ)

$$\therefore \frac{Mdx+Ndy}{Mx-Ny}=\frac{1}{2}\left[\frac{Mx+Ny}{Mx-Ny}d\log(xy)+d\log\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{xy\{f_1(xy)+f_2(xy)\}}{xy\{f_1(xy)-f_2(xy)\}}d\log(xy)+d\log\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[F_1(xy)\,d\log(xy)+d\log\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[F_2\{\log(xy)\}\,d\log(xy)+d\log\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

$$= du \text{ (ধরি)}$$

$\therefore \frac{1}{Mx-Ny}$ একটি সমাকল গুণক।

9.7.2.3 $Mdx + Ndy = 0$ অবকল সমীকরণে যদি $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=Nf(x)$ হয় তবে, $e^{\int f(x)dx}$ তার সমাকল গুণক হবে।

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত শর্ত $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}+Nf(x)$ ....(a)

$e^{\int f(x)dx}$ সমাকল-সহায়ক উৎপাদক হবে যদি,

$Me^{\int f(x)dx}\,dx+Nge^{\int f(x)dx}dy=0$........(b) যথার্থ হয়।

এখন, $\frac{\partial}{\partial y}\left[Me^{\int f(x)dx}\right]=\frac{\partial M}{\partial y}e^{\int f(x)dx}$ ....(c)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[Ne^{\int f(x)dx}\right]=\frac{\partial N}{\partial x}e^{\int f(x)dx}+Ne^{\int f(x)dx}.f(x)$$

$$=e^{\int f(x)dx}\left[\frac{\partial N}{\partial x}+Nf(x)\right]$$

$$=\frac{\partial M}{\partial y}e^{\int f(x)dx}\text{ ....(d)} \qquad [(a) \text{ থেকে}]$$

$\therefore$ (c) এবং (d) থেকে প্রমাণ হল (b) একটি যথার্থ অবকল সমীকরণ।

$\therefore$ $e^{\int f(x)dx}$ একটি সমাকল গুণক।

9.7.2.4 $Mdx+Ndy=0$ অবকল সমীকরণে যদি $\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=Mf(y)$ হয় তবে, $e^{\int f(y)dy}$ সমাকল গুণক হবে।

প্রমাণ ঃ [(3) এর প্রমাণের অনুরূপ]

9.7.2.5 আকার ঃ $x^{\alpha}y^{\beta}(mydx+nxdy)=0$

এই আকারের অবকল-সমীকরণের

$$x^{mk-\alpha-1}y^{nk-\beta-1}$$

k-র যে কোনও মানের জন্য, একটি সমাকল গুণক, বা I.F.

প্রমাণ ঃ উভয় পক্ষে I.F দ্বারা গুণ করে পাই,

$$\frac{m}{x}dx+\frac{n}{y}dy=0$$

বা, $$d(m\log x+n\log y)=0$$

এটি যথার্থ অবকল Perfect differential.

আকার ঃ $x^{\alpha}y^{\beta}(mydx+nxdy)+x^{\alpha'}y^{\beta'}(m'ydx+n'xdy)=0$

এখানে, প্রথমাংশের $x^{mk-\alpha-1}y^{nk-\beta-1}$ এবং দ্বিতীয় অংশের জন্য $x^{m'k'-\alpha'-1}y^{n'k'-\beta'-1}$ I.F. ধরা যায়।

সমগ্র অবকল-সমীকরণের একটি মাত্র I.F. হ'বে যদি,

$$mk-\alpha-1=m'k'-\alpha'-1$$

$$nk-\beta-1=n'k'-\beta'-1 \quad \text{হয়।}$$

সমীকরণ দুটি সমাধান করে k ও k' এর নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ অবকল-সমীকরণটির I.F. হ'বে $x^{mk-\alpha-1}y^{nk-\beta-1}$ যেখানে k-র মান জ্ঞাত নির্দিষ্ট।

উদাহরণ ঃ সমাধান করুন ঃ $(y^2+2x^2y)dx+(2x^3-xy)dy=0$

অবকল-সমীকরণটিকে $2x^2(ydx+xdy)+y(ydx-xdy)=0$ আকারে সাজানো যায়।

প্রথম অংশের I.F. $x^{mk-\alpha-1}y^{nk-\beta-1}$ এর জন্য $\alpha=2, \beta=0, m=1, n=1$

দ্বিতীয় অংশের I.F. $x^{m'k'-\alpha'-1}y^{n'k'-\beta'-1}$ এর জন্য $\alpha'=0, \beta'=1, m'=1, n'=-1$

দুটি I.F. অভেদ হ'বে

যদি, $k-2-1=k'-1,\ k-0-1=-k'-1-1$

অর্থাৎ, $k=\frac{1}{2}, k'=-\frac{3}{2}$ হয়।

$\therefore$ সমগ্র সমীকরণের I.F. হবে $x^{1/2-2-1}y^{1/2-0-1}$ বা, $x^{-5/2}y^{-1/2}$

$$\therefore\ x^{-5/2}y^{-1/2}\left[(y^2+2x^2y)dx+(2x^3-xy)dy\right]=0$$

একটি যথার্থ (Exact) অবকল সমীকরণ। নিয়মানুসারে, এই সমীকরণটির সমাধান হবে।

$$y^{3/2}\int x^{-5/2}dx+y^{1/2}\int\frac{2}{\sqrt{x}}dx+0+0=c_1$$

বা, $$-\frac{2}{3}y^{3/2}x^{-3/2}+y^{1/2}.4\sqrt{x}=c_1$$

বা, $$6\sqrt{xy}-x^{-3/2}y^{3/2}=c \quad (c = \text{যদৃচ্ছ ধ্রুবক})$$

অনুশীলনী ঃ সমাধান করুন ঃ

1. $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0$

2. $y(xy+2x^2y^2)\,dx+x\,(xy-x^2y^2)\,dy=0$

3. $(y^2+2x^2y)\,dx+(2x^3-xy)\,dy=0$

উত্তর ঃ 1. $e^x(x^2+y^2)=c$

ইংগিত ঃ নিয়ম, 9.7.2.3, I.F. = e^x

2. $\log\left(\frac{x^2}{y}\right)=c+\frac{1}{xy}$

ইংগিত ঃ নিয়ম, 9.7.2.2, I.F. = $\frac{1}{3x^3y^3}$

3. $4\sqrt{xy}-\frac{2}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{3/2}=c$

ইংগিত ঃ নিয়ম, 9.7.2.5, I.F. = $x^{-\frac{5}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$

9.8 প্রথমক্রমের রৈখিক অবকল-সমীকরণ (Linear differential Equation)

আকার ঃ $\frac{dy}{dx}+Py=Q$..........(1)

এখানে, P,O x চলের অপেক্ষক অথবা ধ্রুবক। এই আকারের অবকল সমীকরণকে প্রথম ক্রমের রৈখিক অবকল সমীকরণ বলে।

$Q=0$ ধরলে, $\frac{dy}{dx}+Py=0$

বা, $\frac{dy}{y}=-Pdx$

বা, $\log\left(\frac{y}{c}\right)=-\int Pdx$

বা, $ye^{\int Pdx}=c$

$$\therefore \quad d\left(ye^{\int Pdx}\right) = 0$$

$$\text{বা,} \quad e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx} + Py\right) = 0$$

অতএব, $I.F. = e^{\int Pdx}$ ধরলে, সমীকরণ (1) যথার্থ (exact) হ'বে, এবং যথার্থ সমীকরণ সমাধানের নিয়মে সমাধান করা যাবে।

সঠিক আকারে, সমীকরণ (1) কে প্রকাশ করলে পাই

$$e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx} + Py\right) = Qe^{\int Pdx}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right) = Qe^{\int Pdx}$$

$$\text{বা,} \quad d\left(ye^{\int Pdx}\right) = Qe^{\int Pdx}\,dx$$

$$\text{বা,} \quad ye^{\int pdx} = \left(\int Qe^{\int pdx}\,dx + c\right)$$

উভয় পক্ষের সমাকলন দ্বারা, $ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx}\,dx + c$

এটিই (1) সমীকরণের সাধারণ সমাধান। এই সমাধান সূত্র হিসাবে ব্যবহার করা যায়।

উদাহরণ ঃ সমাধান করুন ঃ $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} + y = \tan x$

সমাধান ঃ সমীকরণটিকে $\dfrac{dy}{dx} + y\sec^2 x = \tan x \sec^2 x$

অর্থাৎ, $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ আকারে রাখা যায়।

এখানে, $P = \sec^2 x,\ Q = \tan x \sec^2 x$

$\therefore\ I.F. = e^{\int \sec^2 x dx} = e^{\tan x}$

সঠিক আকারে সমীকরণটি হ'বে

$$e^{\tan x}\left(dy + y\sec^2 dx\right) = e^{\tan x}\tan x \sec^2 x\,dx$$

$$\text{বা,} \quad d\left(ye^{\tan x}\right) = e^{\tan x}\tan x \sec^2 x\,dx$$

$$\therefore\ ye^{\tan x} = \int e^{\tan x} \tan x \sec^2 x\, dx + c$$

$\tan x = z$ ধরলে $\sec^2 x\, dx = dz$

$$\therefore\ ye^{\tan x} = \int e^z z dz + c$$

$$= e^z.(z-1) + c,\ z = \tan x$$

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ সমাধান

$$y = (\tan x - 1) + ce^{-\tan x},\quad c = \text{যদৃচ্ছ ধ্রুবক}$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $I.F. = e^{\tan x}$

সূত্র সাহায্যে, সমাধান হ'বে $ye^{\tan x} = \int e^{\tan x} \tan x \sec^2 x\, dx$

সমাকলন করলে $ye^{\tan x} = (\tan x - 1) + Ce^{-\tan x}$

9.8.1 কোনো কোনো সমীকরণকে সহজেই রৈখিক আকারে প্রকাশ করা যায়

যেমন, $\dfrac{dy}{dx} + Py = Qy^n$, $n =$ ধ্রুবক, এই সমীকরণটি রৈখিক না হলেও রৈখিক আকারে প্রকাশ যোগ্য। সমীকরণটি বার্নোলির সমীকরণ (Bernoulli's equation) নামে খ্যাত। এখন দেখা যাক কীভাবে সমীকরণটি রৈখিক আকারে আনতে পারি।

উভয় পক্ষকে y^n দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + Py^{1-n} = Q$$

ধরি, $y^{1-n} = z \qquad \therefore\ (1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx}$

$\therefore$ সমীকরণটির রূপান্তরিত আকার হল,

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + Pz = Q$$

বা, $$\frac{dz}{dx} + (1-n)P.z = (1-n)Q$$

এটি রৈখিক আকারের

$$\therefore\ I.F. = e^{\int (1-n)Pdx}$$

সাধারণ সমাধান ঃ

$$ze^{(1-n)\int Pdx} = \int Qe^{(1-n)\int Pdx} dx + c$$

বা, $$y^{1-n}e^{(1-n)\int Pdx} = \int Qe^{(1-n)\int Pdx} dx + c$$

উদাহরণ ঃ 1. সমাধান করুন ঃ $x\dfrac{dy}{dx} + y = xy^2$

সমাধান ঃ $$x\frac{dy}{dx} + y = xy^2$$

বা, $$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}(y) = y^2 \qquad [\text{বার্নৌলির আকার}, n = 2]$$

বা, $$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}\right) = 1$$

ধরি, $$\frac{1}{y} = z \quad \therefore \quad -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\therefore \quad -\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = 1$$

বা, $$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}(z) = -1 \qquad [\text{এটি রৈখিক}]$$

$$\therefore \text{I.F.} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\log x} = \frac{1}{x}$$

সাধারণ সমাধান,

$$z\frac{1}{x} = \int -1.\frac{1}{x}dx + c$$

$$= -\log x + c$$

বা, $$\frac{1}{xy} + \log x = c \left[\because z = \frac{1}{y}\right]$$

বা, $$xy\log x + 1 = cxy.$$

অনুশীলনী সমাধান করুন ঃ—

1. $\frac{dy}{dx}+\frac{1-2x}{x^2}y=1$

2. $\cos^2 x\frac{dy}{dx}+y=\tan x$

3. $(x^2+1)\frac{dy}{dx}+2xy=4x^2$

উত্তর ঃ

1. $y=x^2\left(1+ce^{\frac{1}{x}}\right)$

[ইংগিত ঃ $I.F.=x^{-2}\ e^{-\frac{1}{x}}$]

2. $y+1=\tan x+ce^{-\tan x}$

[$I.F.=e^{\tan x}$]

3. $3y\left(x^2+1\right)=4x^3+c$

[$I.F.=x^2+1$]

9.8 এর প্রশ্নাবলী

সমাধান করুন ঃ

1. $x\left(e^y+4\right)dx+e^{x+y}\,dy=0$
2. $x^3\frac{dy}{dx}+3y^2=xy^2$
3. $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$
4. $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$
5. $\left(\sin x\cos y+e^{2x}\right)dx+\left(\cos x\sin y+\tan y\right)dy=0$
6. $(2xy+y-\tan y)\,dx+\left(x^2-x\tan^2 y+\sec^2 y\right)dy=0$
7. $xy^2\left(2y+x^2\right)dx+x^2y\left(x^2-y\right)dy=0$

8. $\left(3x^2y^4+2xy\right)dx+\left(2x^3y^3-x^2\right)dy=0$

9. $\left(xe^xy^2-3x+2y\right)dx+\left(x^2ye^x-2\right)dy=0$

10. $3\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2y}{x+1}=\dfrac{x^3}{y^2}$

11. $x\dfrac{dy}{dx}-2y=x^2+\sin\dfrac{1}{x^2}$

12. $xy-\dfrac{dy}{dx}=y^3\,e^{-x^2}$

13. $3e^x\tan y\,dx+\left(1-e^x\right)\sec^2 y\,dy=0$

14. $x\dfrac{dy}{dx}-y=x\sqrt{x^2+y^2}$

15. $xy\dfrac{dy}{dx}=y^2+(x+y)^2\,e^{-\frac{y}{x}}$

16. $x^2y\,dx-\left(x^3+y^3\right)dy=0$

17. $\left(x^2-y^2+xy\right)dy+\left(2xy-3y^2\right)dx=0$

18. $\left(2x^2y^2+y\right)dx-\left(x^3y-3x\right)dy=0$

19. $\left(y^3-2x^2y\right)dx+\left(2xy^2-x^3\right)dy=0$

20. $x\left(1-x^2\right)\dfrac{dy}{dx}+\left(2x^2-1\right)y=ax^3$

21. $2\cos x\dfrac{dy}{dx}+4y\sin x=\sin 2x$, ($x=\pi/3$ হলে, $y=0$ হয়)

22. $\dfrac{dy}{dx}=(4x+y+1)^2$, ($4x+y+1=v$ ধরুন)

23. $\dfrac{dy}{dx}=y\sec x$, ($x=\pi/6$ হলে, $y=1$ হয়)

24. $(x^3 - 3xy^2)\, dx = (y^3 - 3x^2y)\, dy$

25. $x^3 \dfrac{dy}{dx} = y^3 + y^2\sqrt{y^2 - x^2}$

26. $(2x - 3y)\, dx + (y - 2x)\, dy = 0$

27. $(x^2 - 2xy + 5y^2)\, dx + (2y^2 - 7xy + x^2)\, dy = 0$

28. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x}(\log y) = \dfrac{y}{x^2}(\log y)^2$

29. $x \cos x \dfrac{dy}{dx} + (x \sin x + \cos x)\, y = 1$

30. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{4x}{x^2+1}\, y = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

9.8 এর প্রশ্নাবলীর উত্তরমালা

সমাধান ইংগিত সহ ঃ

1. $\log(e^y + 4) = c + (x+1)\, e^{-x}$ [নিয়ম ঃ 9.4]

2. $2x^2 - 2xy + 3y = cx^2y$ [নিয়ম ঃ 9.4]

3. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = c$ [নিয়ম ঃ 9.4]

4. $y = ce^{y/x}$ [$y = vx$ ধরুন]

5. $\log(\sec^2 y) - 2\cos x \cos y + e^{2x} = c$ [উদাহরণ. পৃঃ 53 দেখুন]

6. $x^2y + xy - x \tan y + \tan y = c$ [সঠিক সমীকরণ]

7. $x^2 \log(xy) = y + cx^2$

   [উদাহরণ 9.7.2.5 দেখুন $k = -1, k' = c$, I.F. $= x^{-4}y^{-2}$]

8. $cy = x^3y^3 + x^2$ [নিয়ম ঃ 9.7.2.4, I.F. $= \dfrac{1}{y^2}$]

9. $e^x(x^2y^2 + c) = 4y - 6x - 6$ [নিয়ম ঃ 9.7.2.3, I.F. $= e^{-x}$]

10. $60y^3(x+1)^2 = 10x^6 + 24x^5 + 15x^4 + c$

[$y^3 = t$ হলে, $\frac{dt}{dx} + \frac{2t}{x+1} = x^3$ হ'বে। উদা. 1 পৃ. 62 দেখুন]

11. $y = x^2 \log x + \frac{1}{2}x^2 \cos\frac{1}{x^2} + cx^2$ [নিয়ম ঃ 9.8, $I.F. = \frac{1}{x^2}$]

12. $e^{x^2} = y^2(2x+c)$ [$-\frac{1}{y^2} = t$ ধরলে, $I.F. = e^{x^2}$]

13. $\tan y = c(1-e^x)^3$ [নিয়ম ঃ 9.4]

14. $x \sin h(x+c) = y$

[$dx = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}$ এভাবে সাজান। $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \sin h^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ হয়]

15. $x e^{y/x} = (x+y)\log(cx)$

[$y = vx$ ধরে 9.4 ব্যবহার করুন।

$\int e^x[f(x)+f'(x)]dx = e^x f(x)$ হয়]

16. $y = Ce^{\frac{x^3}{3y^3}}$ [$y = vx$ ধরুন]

17. $(y+3x)^{11} y^4 = c(y-x)^3$ [$y = vx$ ধরুন]

18. $4x^2y = 5 + cx^{\frac{4}{7}} y^{\frac{12}{7}}$

[উদা.ঃ 9.7.2.5 দেখুন। $k = \frac{5}{7}, k' = -\frac{4}{7}, I.F. = x^{-\frac{11}{7}} y^{-\frac{19}{7}}$]

19. $x^2y^2(x^2-y^2) = c$

$$\left[I.F. = \frac{1}{Mx+Ny} = \frac{1}{3xy(y^2-x^2)}\right]$$

20. $(y-ax)^2 = c^2x^2(x^2-1)$

[উদা. পৃ. 60 দেখুন, $I.F. = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$]

21. $y\sec^2 x + 2 = \sec x$ [$I.F. = Sec^2x$]

22. $2\tan(2x+c) = 4x+y+1$

[$4x+y+1 = v$ ধরে, নিয়ম ঃ 9.4 ব্যবহার্য]

23. $\sqrt{3}\,y = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$ [$\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$]

24. $(x^2+y^2)^2 = c(y^2-x^2)$

[$I.F. = \dfrac{1}{Mx+Ny} = \dfrac{1}{x^4-y^4}$]

25. $y^2(Cx-1)^2 = y^2-x^2$ [$y = vx$ ধরুন]

26. $C = \log(y^2-5xy+2x^2) + \dfrac{1}{\sqrt{17}}\log\left(\dfrac{2y-(5+\sqrt{17})x}{2y-(5-\sqrt{17})x}\right)$

[$y = vx$ ধরুন]

27. $C = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}\log\left|\dfrac{\sqrt{2}y-x}{\sqrt{2}y+x}\right| + \dfrac{5}{2}\log\left|x^2-2y^2\right| - \log|x-y|^4$

[$y = vx$ ধরুন]

28. $2x = (1+2cx^2)\log y$

[$\dfrac{1}{\log y} = z$ ধরুন, $I.F. = \dfrac{1}{x}$]

29. $xy = \sin x + c\cos x$

[$I.F. = e^{\int Pdx} = x\sec x$]

30. $y(x^2+1)^2 = \tan^{-1}x + c$ [$I.F. = e^{\int Pdx}$ ব্যবহার্য]

9.9 প্রথম ক্রম ও বহুঘাত বিশিষ্ট অবকল-সমীকরণ

আপনারা একক 7-এ জেনেছেন, কোনও অবকল-সমীকরণে অবকল সহগের উচ্চতম ক্রমকেই সমীকরণটির ক্রম বলে। আবার, অবকল-সহগের ব্যাপারে সমীকরণটিকে rational এবং integral আকারে সাজাবার পর তার উচ্চতম ক্রমের ঘাতকে সমীকরণটির ঘাত বলা হয়।

উদাহরণগুলি লক্ষ্য করুন।

(1) $$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y=x$$

এখানে, উচ্চতম ক্রম 2 এবং তার ঘাত 1। সমীকরণটি দ্বিতীয় ক্রমের এবং প্রথম ঘাতের।

(2) $$\frac{1}{2}=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Ratrional integral আকারে সাজালে,

$$\frac{1}{4}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$$

সুতরাং, এটি দ্বিতীয় ক্রমের এবং দ্বিতীয় ঘাতের। $\frac{dy}{dx}$ এর ঘাত বেশী হলে ও এর ক্রম 1 বলে বিবেচ্য নয়।

বর্তমানে আলোচ্য বিষয় প্রথম ক্রম ও একের বেশী ঘাত যুক্ত অবকল সমীকরণের সমাধান।

এই জাতীয় অবকল-সমীকরণে $p=\frac{dy}{dx}$ ধরা হয়। আলোচনার সুবিধার জন্য আমরা সমীকরণ গুলিকে প্রধানত তিন শ্রেণীতে ভাগ করব।

(1) p -তে সমাধান যোগ্য।

(2) y -তে সমাধান যোগ্য।

(3) x -এ সমাধান যোগ্য।

9.9.1 p-তে সমাধান যোগ্য সমীকরণ।

ধরি, অবকল সমীকণটির সাধারণ আকার

$$p^n+P_1p^{n-1}+P_2p^{n-2}+\ldots\ldots+P_{n-1}p+P_n=0 \quad \ldots\ldots(1)$$

এখানে, $p=\frac{dy}{dx}$ এবং $P_1, P_2\ldots\ldots P_n$ x ও y এর অপেক্ষক। (1) সমীকরণটি p এর n-ঘাত বিশিষ্ট polynomial সমীকরণের আকারের ঃ

সমীকরণটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে পাওয়া যায়,

$$(p-R_1)(p-R_2)\ldots\ldots(p-R_n)=0$$

$R_1, R_2, \ldots. R_n$ x ও y এর অপেক্ষক। যে কোনো একটি বা একাধিক উৎপাদক শূন্য হলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

প্রতিটি উৎপাদক শূন্য ধরে (যেমন $\frac{dy}{dx}=R_1$ ইত্যাদি...) মনে করি,

$$f_1(x,y,c_1)=0, f_2(x,y,c_2)=0\ldots\ldots f_n(x,y,c_n)=0$$

সাধারণ সমাধানগুলি পাওয়া গেল।

এদের যে কোনও একটি সমাধান সমীকরণ (1) এর সমাধান হবে। অতএব, (1) সমীকরণের সমাধানকে এভাবে লেখা যায় $f_1(x,y,c_1)\, f_2(x,y,c_2)\ldots\ldots f_n(x,y,c_n)=0\ldots\ldots(2)$

(1) সমীকরণটি প্রথম ক্রমের বলে তার সাধারণ সমাধানে একটি মাত্র parameter c থাকবে। তাই $c_1=c_2=\ldots\ldots c_n=c$ ধরে (1) সমীকরণের সাধারণ সমাধান হবে

$$f_1(x,y,c)\; f_2(x,y,c)\ldots\ldots f_n(x,y,c)=0$$

উদাহরণ ঃ 1. সমাধান করুন, $p^2-3p-10=0$

সমাধান ঃ $p^2-3p-10=0$

বা, $(p+2)(p-5)=0$

বা, $p=-2,\; p=5$

যখন, $p=-2,\; \frac{dy}{dx}=-2 \quad \therefore y+2x+c_1=0$

যখন, $p=5,\; \frac{dy}{dx}=5 \quad \therefore y-5x+c_2=0$

$c_1=c_2=c$ ধরে,

অবকল সমীকরণটির সাধারণ সমাধান $(y+2x+c)(y-5x+c)=0$

উদাহরণ ঃ 2 সমাধান করুন, $xp^2+(y-x)p-y=0$

সমাধান ঃ $xp^2+(y-x)p-y=0$

বা, $p^2x+py-px-y=0$

বা, $(p-1)(px+y)=0$

যখন, $p-1=0, \frac{dy}{dx}=1 \quad \therefore y-x+c_1=0$

যখন, $px+y=o, \ \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x} \quad \therefore \int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}+\log c_2$

$$\therefore \ \log y=-\log x+\log c_2$$

$$\therefore \ xy-c_2=0$$

$c_1=c_2=c$ ধরে,

সমীকরণটির সাধারণ সমাধান

$(y-x+c)\ (xy-c)=0$

উদাহরণ ঃ 3 সমাধান করুন, $p^3-p\left(x^2+xy+y^2\right)+xy(x+y)=0$

সমাধান, $p^3-p\left(x^2+xy+y^2\right)+xy(x+y)=0$

বা, $p^3-p^2x+p^2x-px^2-p\left(xy+y^2\right)+xy(x+y)=0$

বা, $p^2(p-x)+px(p-x)-\left(xy+y^2\right)(p-x)=0$

বা, $(p-x)\left(p^2+px-xy-y^2\right)=0$

বা, $(p-x)(p-y)(p+x+y)=0$

যখন, $p-x=o, \frac{dy}{dx}=x \quad \therefore y=\frac{1}{2}x^2+c_1$ বা, $x^2-2y+c=0$

যখন, $p-y=o, \ \frac{dy}{dx}=y \quad \log y=x+c_2$ বা, $y-ce^x=0$

যখন, $p+x+y=0, \ \frac{dy}{dx}=-(x+y)$, ধরি $x+y=v$

$$\therefore \ 1+\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \ \frac{dv}{dx}-1=-v \ \text{ বা } \ \frac{dv}{dx}=-(v-1)$$

বা, $-\log(v-1)=x+c$, বা $v-1=e^{-C_3-x}$

বা, $y+x-1=e^{-C_3}\,e^{-x}$ বা, $y+x-1-ce^{-x}=0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\left(x^2-2y+c\right)\left(y-ce^x\right)\left(y+x-1-ce^{-x}\right)=0$

অনুশীলনী ঃ সমাধান বের করুন ঃ $\left[p=\frac{dy}{dx}\right]$

1. $p^2+2p-8=0$

2. $p^2(1-x^2)=1-y^2$

3. $p^2+2p\cot 2x-1=0$

উত্তর ঃ

1. $(y+4x-c)(y-2x-c)=0$

2. $(c+\sin^{-1}y)^2=(\sin^{-1}x)^2$

3. $(y-c-\log\sec x)(y-c+\log\sin x)=0$

9.9.2 y-তে সমাধান যোগ্য সমীকরণ।

ধরা যাক, সাধারণ প্রথম ক্রমের সমীকরণটি থেকে $y=f(x,p)$ পাওয়া গেল।

উভয়পক্ষে x- এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

আরো ধরা যাক, এই সমীকরণটি p ও x চলের প্রথম ঘাত ও প্রথম ক্রমের সমীকরণ। অর্থাৎ, সমীকরণটির কোনও উৎপাদক যদি $\frac{dp}{dx}$ বর্জিত কোনও সমাধানের ইঙ্গিত দেয়, তা আপাতত বর্জন করা হ'বে। পরবর্তী এককে বিশিষ্ট সমাধান (Singular solution) বিভাগে ঐরূপ সমাধানের বিস্তৃত আলোচনা করা হবে।

$\frac{dp}{dx}$ সমন্বিত উৎপাদকের সাধারণ সমাধানটিকে মনে করা যাক $\phi(x,p,c)=0$

এখন $y=f(x,p)$ এবং $\phi(x,p,c)=0$ সমীকরণগুলি থেকে p অপনয়ন করে নির্ণেয় সাধারণ সমাধান পাওয়া গেল। যখন সরল ভাবে p অপনয়ন করা যায় না, তখন $y=f(x,p)$ ও $\phi(x,p,c)=0$ সমীকরণ দুটি থেকে p অপনয়ন করলে নির্ণেয় সমাধান পাওয়া যায়—এরূপ লিখতে হয়।

উদাহরণ ঃ 1. সমাধান করুন ঃ

$$4y = x^2 + p^2$$

x –এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$4\frac{dy}{dx} = 2x + 2p\frac{dp}{dx}$$

বা; $2p = x + p\frac{dp}{dx}$

উহা p ও x চলের সমমাত্রিক অবকল সমীকরণ।

$p = vx$ ধরে, $\frac{dp}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$\therefore -\left(v^2 - 2v + 1\right) = vx\frac{dv}{dx}$

বা, $-\frac{dx}{x} = \frac{vdv}{(v-1)^2}$

$\therefore\ -\log x = \int \frac{v-1+1}{(v-1)^2} dv + c$

$$= \log(v-1) - \frac{1}{v+1} + c$$

$\therefore\ c - \frac{x}{p-x} + \log\left|x\left(\frac{p}{x} - 1\right)\right| = 0$

বা, $\log|p-x| = \frac{x}{p-x} - c$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান হল

$$\left.\begin{aligned} &4y = x^2 + p^2 \\ &\log|p-x| = \frac{x}{p-x} - c \end{aligned}\right\} \quad p = \text{parameter (প্যারামিটার)}$$

উদাহরণ ঃ 2. সমাধান করতে হ'বে, $x^2p^4+2px-y=0$ .....(1) [প্রদত্ত সমীকরণ থেকে,

$$y=x^2p^4+2px$$

$\therefore$ x এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই।

$$p=\frac{dy}{dx}=2xp^4+4x^2p^3\frac{dp}{dx}+2p+2x\frac{dp}{dx}$$

বা, $$\left(1+2x\,p^3\right)\left(2x\frac{dp}{dx}+p\right)=0$$

$1+2xp^3=0, \frac{dp}{dx}$ বর্জিত বলে, আলোচিত হল না।

অপর উৎপাদক থেকে, $2x\frac{dp}{dx}+p=0$

বা, $$-2\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}$$

বা, $$-2\log\left(p/c\right)=\log x$$

বা, $\frac{c^2}{p^2}=x$ বা, $p^2x=K$ Say .... (2)

(1) ও (2) থেকে p অপনয়ন করলে,

$$\left(x^2p^4-y\right)^2=4p^2x^2$$

বা, $$\left(K^2-y\right)^2=4Kx,\ K=\text{parameter}.$$

(সাধারণ সমাধান।)

অনুশীলনী ঃ নিজে সমাধান করুন।

1. $y=px+p^2x$
2. $y=2px+p^2$
3. $y=x+a\tan^{-1}p.$

উত্তর ঃ

1. $x=c\,p^{-2}\,e^{\frac{1}{p}}, y=c\,p^{-1}\left(1+p\right)e^{\frac{1}{p}}$
2. $\left(c-xy\right)^2=4\left(x^2+y\right)\left(cx+y^2\right)$
3. $c+2x=a\left[\log\frac{p-1}{\sqrt{p^2+1}}-\tan^{-1}p\right], y=x+a\tan^{-1}p.$

9.9.3 x-এ সমাধান যোগ্য সমীকরণ

মনে করি, প্রথম ক্রম ও বহুঘাত বিশিষ্ট সমীকরণটিকে $x = f(p,y)$ আকারে সাজানো যায়। স্পষ্টত, y-এর সাপেক্ষে অবকলন করলে বাঁদিকে $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ হবে এবং সমগ্র সমীকরণটি থেকে সমাকল করে

$$\psi(y,p,c) = 0$$

আকারের হবে। এখন $x = f(p,y)$ ও $\psi(y,p,c) = 0$ থেকে p অপনয়ন করে নির্ণেয় সমাধান পাওয়া যাবে। p অপনয়ন জটিল হ'লে, p কে parameter ধরে সমীকরণ দুটি যৌথভাবে, $x = f(p,y)$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান প্রকাশ করবে—এরূপ লিখতে হয়

এ স্থলেও $x = f(p,y)$ কে y-এর সাপেক্ষে অবকলন করার পর যদি $\frac{dp}{dy}$ বর্জিত উৎপাদক আসে, তার থেকে পাওয়া সমাধান বিশিষ্ট সমাধান অনুমান করে বর্জন করা হ'বে।

নীচের সমাধানগুলি লক্ষ্য করুন।

উদাহরণ ঃ 1. সমাধান করুন, $x = y + \sin^{-1}p,\ p = \frac{dy}{dx}$

সমাধান ঃ $x = y + \sin^{-1}p$, ...(1)

উভয় পক্ষে y এর সাপেক্ষে অবকলন করলে

$$\frac{dx}{dy} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\frac{dp}{dy}$$

বা, $$\frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\frac{dp}{dy}$$

বা, $$dy = \frac{pdp}{(1-p)\sqrt{1-p^2}} = -\frac{1-p-1}{(1-p)\sqrt{1-p^2}}dp$$

বা, $$dy = -\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} + \frac{dp}{(1-p)\sqrt{1-p^2}}$$

$$\therefore\ y = -\int\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} + \int\frac{dp}{(1-p)\sqrt{1-p^2}} + c$$

$$= -\sin^{-1}p + \int\frac{dv}{v\sqrt{\frac{2}{v} - \frac{1}{v^2}}} + c \quad [\ 1 - p = \frac{1}{v} \text{ ধরে}\ ]$$

$$= -\sin^{-1} p + \int \frac{dv}{\sqrt{2v-1}} + c$$

$$= -\sin^{-1} p + \sqrt{2v-1} + c$$

$$= -\sin^{-1} p + \sqrt{\frac{1+p}{1-p}} + c \text{ .... (2) } \left[\ v = \frac{1}{1-p}\ \right]$$

(1) এবং (2) থেকে p অপনয়ন করে, $[p = \sin(x-y)]$

$$y = +(y-x) + \sqrt{\frac{1+\sin(x-y)}{1-\sin(x-y)}} + c$$

বা $$x = \frac{1+\sin(x-y)}{\cos(x-y)} + c$$

এটাই প্রদত্ত সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

উদাহরণ ঃ (2) সমাধান করুন ঃ $x = py - p^2$

সমাধান ঃ $x = py - p^2$

y এর সাপেক্ষে অবকল করে,

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = p + y\frac{dp}{dy} - 2p\frac{dp}{dy}$$

বা, $$\left(\frac{1}{p} - p\right) = (y - 2p)\frac{dp}{dy}$$

বা, $$\frac{dy}{dp} - \frac{p}{1-p^2}y = -\frac{2p^2}{1-p^2}$$ (রৈখিক অবকল-সমীকরণ)

$$\text{I.F.} = e^{-\int \frac{p}{1-p^2}dp} = e^{\frac{1}{2}\log(1-p^2)} = \sqrt{1-p^2}$$

$$\therefore\ y\sqrt{1-p^2} = -2\int \frac{p^2}{1-p^2}\sqrt{1-p^2}\,dp + c$$

$$= -2\int \frac{p^2}{\sqrt{1-p^2}}\,dp + c$$ $p = \sin\theta$ ধরি, $\therefore dp = \cos\theta\, d\theta$

$$= -2\int \sin^2\theta\, d\theta + c$$

$$= -\int (1-\cos 2\theta)\, d\theta + c$$

$$= -\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right] + c$$

$$= -\sin^{-1} p + p\sqrt{1-p^2} + c$$

নির্ণেয় সাধারণ সমাধান,
$$\left.\begin{array}{l} x = py - p^2 \\ y\sqrt{1-p^2} + \sin^{-1} p = p\sqrt{1-p^2} + c \end{array}\right\}$$

অনুশীলনী ঃ

নিজে সমাধান করুন

1. $xp^2 + py - y^4 = 0$
2. $y = 2px - p^3y^2$

[উত্তর ঃ

1. $xy + c = c^2y$
2. $y^2 = 2cx - c^3$]

9.9.4 প্রথম ক্রম ও বহুঘাত যুক্ত অবকল সমীকরণের আলোচনায় এবার আমরা বিশেষ ধরনের দু একটি সমীকরণের কথা আপনাদের বলব।

9.9.4.1 যে সমীকরণে সরাসরি x নেই। ধরি, সমীকরণটি $f(y, p) = 0$ যদি সমীকরণটি y-তে সমাধান যোগ্য হয়, তবে 9.9.2 পদ্ধতিতে সমাধান পাওয়া যাবে।

আবার, যদি সমীকরণটি p তে সমাধান যোগ্য হয়, তবে 9.9.1 নিয়মে সমাধান করা যাবে।

9.9.4.2 যে সমীকরণে সরাসরি y নেই। ধরি, সমীকরণটি $\psi(x, p) = 0$

যদি এটি x-এ সমাধান যোগ্য হয়, তবে 9.9.3 নিয়মে এবং যদি p তে সমাধান যোগ্য হয় তবে $\frac{dy}{dx} = p$ বলে 9.4 অনুসারে সমাধান বের করা যাবে।

9.9.4.3 যে সমীকরণ x এবং y-তে সমমাত্রিক। এক্ষেত্রে সমীকরণটি p-তে সমাধান করা গেলে, 9.5 অনুযায়ী সমাধান যোগ্য।

আবার, $\frac{y}{x}$-এ সমাধান করা গেলে,

$\frac{y}{x} = f(p)$ বা $y = xf(p)$ হবে।

সুতরাং, 9.2 নিয়মে সমীকরণটি সমাধান করা যাবে।

উদাহরণ ঃ 1. সমাধান করুন, $y^2 = a^2(1+p^2)$

সমাধান ঃ $y^2 = a^2(1+p^2)$ [সরাসরি x নেই]....(1)

$$\therefore \; y = \pm a\sqrt{1+p^2}$$

$$\therefore \; p = \frac{dy}{dx} = \pm a \frac{2p}{2\sqrt{1+p^2}} \frac{dp}{dx}$$

$p = 0$ বা, $y = c$ সমীকরণটি $y^2 = a^2(1+p^2)$ কে সিদ্ধ করে, যখন $c = a$। অতএব, $y = c$ সাধারণ সমাধান নয়।

$$\therefore \; 1 = \pm a \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \frac{dp}{dx}$$

বা, $$x = \pm a \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} + c$$

বা, $$x = \pm a \log\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) + c \;........ (2)$$

নির্ণেয় সমাধান, $$\left.\begin{aligned} y &= \pm a\sqrt{1+p^2} \\ x &= \pm a \log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) + c \end{aligned}\right\}$$

উদাহরণ 2 সমাধান করুন, $x = 4p(1+p^2)$

সমাধান ঃ $x = 4(p+p^3)$

$$\therefore \; \frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = 4\left(1+3p^2\right)\frac{dp}{dy}$$

$$\therefore \; dy = 4p\left(1+3p^2\right)dp$$

$$\therefore \; y = 2p^2 + 3p^4 + c$$

নির্ণেয় সমাধান, $$\left.\begin{aligned} x &= 4\left(p+p^3\right) \\ y &= 2p^2 + 3p^4 + c \end{aligned}\right\}$$

উদাহরণ ঃ 3. সমাধান করুন $y = yp^2 + 2px$ ....(1)

সমাধান ঃ $y = yp^2 + 2px$

বা, $\frac{y}{x} = \frac{yp^2}{x} + 2p$

$$\therefore \quad y = x\frac{2p}{1-p^2}$$

$$\therefore \; p = \frac{dy}{dx} = \frac{2p}{1-p^2} + x.\frac{(1-p^2).2 + 2p.2p}{(1-p^2)^2}\frac{dp}{dx}$$

$$p - \frac{2p}{1-p^2} = x.\frac{2+2p^2}{(1-p^2)^2}\frac{dp}{dx}$$

বা, $-p\frac{(1+p^2)}{1-p^2} = \frac{2x(1+p^2)}{(1-p^2)^2}\frac{dp}{dx}, \; 1-p^2 \neq 0, \; p^2+1 \neq 0$

বা, $-p\,(1-p^2) = 2x\frac{dp}{dx}$

$$\therefore + \frac{dx}{x} = \frac{2dp}{p(p^2-1)} = 2\left[\frac{1}{p(p+1)(p-1)}\right]dp$$

$$\therefore \; \log x/c = 2\int\left[\frac{-1}{p} + \frac{\frac{1}{2}}{p+1} + \frac{\frac{1}{2}}{p-1}\right]dp$$

$$= 2\left[\log p^{-1} + \frac{1}{2}\log(p^2-1)\right]$$

$$= \log\left(\frac{p^2-1}{p^2}\right) \; \therefore x = \frac{c(p^2-1)}{p^2} \text{ .... (2)}$$

(1) ও (2) থেকে p^2 অপনয়ন করলে

$$(y - p^2y)^2 = 4p^2x^2 \text{ , } p^2 = \frac{c}{c-x}$$

বা, $y^2 = 4c\,(c-x)$ নির্ণেয় সাধারণ সমাধান

9.9 এর প্রশ্নাবলী

1. $p^2 + 2px - 3x^2 = 0$

2. $y = px + p^3x$

3. $p^2y + 2px = y$

4. $x + p^2y = p(1 + xy)$

5. $y = 2px + 4p^2x$

6. $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$

7. $p^3 - p(x^2 + xy + y^2) + xy(x + y) = 0$

8. $y = 2px + \tan^{-1}(xp^2)$

9. $ayp^2 + (2x - b)p - y = 0,\ a > 0$

10. $y = xp^2 + p$

11. $y = 2px + y^2p^3$

12. $xp^2 - 2yp + ax = 0$

13. $3p^2y^2 - 2xyp + 4y^2 - x^2 = 0$

14. $p^2y = 2px - x^2$

15. $ayp^2 + (2x - b)p - y = 0$

9.9 এর উত্তরমালা [সমাধান ইংগিত সহ]

1. $(2y - x^2 - c)(2y + 3x^2 - c) = 0$

   [উদা. 3 পৃঃ 70 দেখুন]

2. $cxp^3 = e^{\frac{1}{2p^2}},\ y = px + p^3x$

   [y-চলে প্রকাশ যোগ্য]

3. $y^2 = c^2 + 2cx$ [x-এ প্রকাশ করুন]

4. $(2y - x^2 - c)(y^2 - 2x - c) = 0$

[উৎপাদক ঃ $(py-1)(p-x) = 0$]

5. $(y-4c)^2 = 4cx$ [উদা.1, 9.9.2 দেখুন]

6. $(x^3y - c)(y - cx^2) = 0$

[উৎপাদক ঃ $(px + 3y)(px - 2y) = 0$]

7. $(2y - x^2 - c)(y - ce^x)(x + y - 1 - ce^{-x}) = 0$

[উৎপাদক ঃ $(p-x)(p-y)(p+x+y) = 0$]

8. $y = 2\sqrt{cx} + \tan^{-1}(c)$

[উদাহরণ ঃ 1. 9.9.2 এর মত]

9. $ac^2 + c(2x - b) = y^2$

[উদাহরণ ঃ 1, 9.9.3 এর মত]

10. $x(1-p)^2 = \log p - p + c, y = xp^2 + p$

11. $y^2 = 2cx + c^3$ [উদাহরণ ঃ 1, 9.9.3 এর মত]

12. $c^2x^2 - 2cy + a = 0$

[উদাহরণ ঃ 1, 9.9.2 এর মত]

13. $3c^2 - 4cx + (x^2 + y^2) = 0$

[p এর জন্য সমাধান করলে, $3y\dfrac{dy}{dx} = x \pm 2\sqrt{x^2 - 3y^2}$ হয়। আবার,

$x^2 - 3y^2 = v^2$ ধরলে, $\dfrac{dv}{dx} = -2$ পাওয়া যায়। v অপনয়ন করতে হ'বে]

14. $9(2c + 2y - x^2)^2 = 16(1-y)^3$

[p এর জন্য সমাধান করে, $v^2 = 1 - y$ ধরলে, সমাধান পাবেন]

15. $a\lambda^2+\lambda(2x-b)-y^2=0$

[p এর সমাধান করে, $v^2=4ay^2+(2x-b)^2$ ধরুন। সমাধানে '+' চিহ্ন ধরে, $v^2=(c+2x)^2$ পাওয়া যাবে। c এর স্থলে $2a\lambda-b$ ধরলেই সাধারণ সমাধান হল। $\lambda=$ প্যারামিটার]

9.10 Clairaut-এর আকার বিশিষ্ট অবকল-সমীকরণ।

$y=px+f(p)$ আকারের সমীকরণকে Clairaut এর আকার যুক্ত সমীকরণ বলে। এই আকারের সমীকরণে x, y অবশ্যই প্রথম ঘাত যুক্ত হবে। এই সমীকরণের বহু প্রয়োগ আছে বলে, এটির সমাধানের বিশেষ আলোচনা প্রয়োজন।

9.10.1 Clairaut-আকারের সমীকরণ সমাধান

ধরি, $y=px+f(p)$ ....(1)

x এর সাপেক্ষে অবকলন করলে,

$$p=\frac{dy}{dx}=p+x\frac{dp}{dx}+f'(P)\frac{dp}{dx}$$

বা, $\left[x+f'(p)\right]\frac{dp}{dx}=0,\ f'(p)=p$ র সাপেক্ষে $f(p)$ এর অবকল

$\therefore$ হয় $\frac{dp}{dx}=0$, না হয় $x+f'(p)=0$

ধরি, $\frac{dp}{dx}=0\ \therefore p=c$ (ধ্রুবক)

$\therefore$ (1) থেকে $y=cx+f(c)$ ....(2)

এটিই Clairaut সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

আবার, ধরি, $x+f'(p)=0$ ....(3)

(1) ও (3) থেকে p অপনয়ন করে আর একটি সমাধান পাওয়া যাবে। এতে প্যারামিটার c থাকবে না, বা c এর কোন মানের জন্য (2) থেকেও পাওয়া যাবে না। এরূপ সমাধানকে সিঙ্গুলার (Singular) সমাধান বলা হয়।

সিঙ্গুলার সমাধান নিয়ে পরে বিশদভাবে আলোচনা করা হবে।

তাই Clairaut সমীকরণের (2) আকারের সাধারণ সমাধানই আমাদের লক্ষ্য।

9.10.2 লাগ্রান্জের (Lagrange) সমীকরণ

$$y = f_1(p)x + f_2(p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

আকারের সমীকরণকে লাগ্রান্জের সমীকরণ বলে। স্পষ্টতই, $f_1(p) = p$ হলে, এটি Clairaut এর আকার ধারণ করে।

x এর সাপেক্ষে অবকলন করে (1) থেকে পাই,

$$p = f_1(p) + \left[x f_1'(p) + f_2'(p)\right]\frac{dp}{dx}$$

বা, $$\frac{dx}{dp} = \frac{f_1'(p)}{p - f_1(p)}x + \frac{f_2'(p)}{p - f_1(p)}$$

এটা x,p চলের রৈখিক (Linear) অবকল সমীকরণ এবং $x = \phi(p,c)$ আকারে সমাধান যোগ্য ...(2) ।

(1) ও (2) থেকে p অপনয়ন করে Lagrange-এর সমীকরণের সমাধান পাওয়া যায়।

উদাহরণ ঃ 1 সমাধান করুন

$$y = px + p(1-p) \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

x এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + (1-2p)\frac{dp}{dx}$$

বা, $$(x + 1 - 2p)\frac{dp}{dx} = 0$$

যখন $\dfrac{dp}{dx} = 0, p = c$

$\therefore\ y = cx + c(1-c)$ সাধারণ সমাধান।

যখন $x + 1 - 2p = 0,\ p = \dfrac{1}{2}(x+1)$ ....(2)

(1) ও (2) থেকে, p অপনীত হ'লে,

$$y = \frac{1}{2}x(x+1) + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)^2$$

বা, $4y = (x+1)^2$ উহা Singular সমাধান।

উদাহরণ ঃ 2 সমাধান করুন $y = -px + p^2$

সমাধান ঃ $y = -px + p^2$

সমীকরণটি Lagrangian আকারে আছে।

x এর সাপেক্ষে অবকলন করলে,

$$p = \frac{dy}{dx} = -\left(p + x\frac{dp}{dx}\right) + 2p\frac{dp}{dx}$$

বা, $2p = \frac{dp}{dx}(2p - x)$

বা, $\frac{dx}{dp} = 1 - \frac{x}{2p}$ বা, $\frac{dx}{dp} + \frac{x}{2p} = 1$

এটা রৈখিক আকারে আছে।

$\therefore$ $I.F. = e^{\frac{1}{2}\int\frac{dp}{p}} = e^{\log\sqrt{p}} = \sqrt{p}$

$\therefore$ $x\sqrt{p} = \int\sqrt{p}\,dp + c = \frac{2}{3}p^{3/2} + c$

বা, $x = \frac{2}{3}p + \frac{c}{\sqrt{p}}$

এখন, $y = p^2 - p\left(\frac{2p}{3} + \frac{c}{\sqrt{p}}\right)$

$$= \frac{1}{3}p^2 - c\sqrt{p}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{3}p + \frac{c}{\sqrt{p}} \\ y &= \frac{1}{3}p^2 - c\sqrt{p} \end{aligned}\right\}$

9.10.3 এখানে একটি উদাহরণের সাহায্যে আমরা দেখব কীভাবে চল **পরিবর্তন** (Change of Variable) দ্বারা কিছু অবকল সমীকরণকে Clairaut এর আকারে আনা যায় এবং সমাধান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ ঃ 1. $x = u,\ y^2 = v$ চল পরিবর্তন দ্বারা $yp^2 - 2xp + y = 0$ **সমীকরণটিকে** Clairaut এর আকারে প্রকাশ করুন এবং সাধারণ সমাধান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $yp^2 - 2px + y = 0$ ....(1)

$$u = x \qquad \therefore \frac{dv}{du} = \frac{2y}{1}\frac{dy}{dx} = 2py$$

$$v = y^2 \qquad \therefore\ p = \frac{1}{2y}\left(\frac{dv}{du}\right) \text{ ....(2)}$$

(1) ও (2) থেকে,

$$y.\frac{1}{4y^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - 2x.\frac{1}{2y}\left(\frac{dv}{du}\right) + y = 0$$

বা, $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2 - x\left(\dfrac{dv}{du}\right) + y^2 = 0$

বা, $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2 - u\left(\dfrac{dv}{du}\right) + v = 0$ $\qquad [\because x = u,\ y^2 = v]$

বা, $v = u\dfrac{dv}{du} - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2$

ইহা v, u চলে Clairaut এর আকার।

উহার সমাধান $\dfrac{dv}{du} = c$

$\therefore v = cu - \dfrac{1}{4}c^2$

সমীকরণটির সাধারণ সমাধান

$$y^2 = cx - \frac{1}{4}c^2 \quad (\because u = x,\ v = y^2)$$

দ্রষ্টব্য ঃ ধরা যাক, সমীকরণটির Singular সমাধানও প্রয়োজন। ধরি, $q = \dfrac{dv}{du}$

$\therefore$ সমীকরণটির পরিবর্তিত রূপ, $v = uq - \dfrac{1}{4}q^2$

u এর সাপেক্ষে অবকলন করলে,

$$q = \frac{dv}{du} = q + u\frac{dq}{du} - \frac{1}{2}q\frac{dq}{du}$$

$$\therefore \quad \left(u - \frac{1}{2}q\right)\frac{dq}{du} = 0$$

Singular সমাধানের জন্য $u - \frac{1}{2}q = 0$ বা, $q = 2u$

$$\therefore \; v = u(2u) - \frac{1}{4}(2u)^2$$

বা, $v = u^2$

বা, $y^2 = x^2$ এটাই Singular সমাধান।

9.10 এর প্রশ্নাবলী ঃ (কেবলমাত্র সাধারণ সমাধান বের করুন)

1. $y = p(x-2) + \frac{3}{p}$
2. $y = px + p(1-p)$
3. $\sin px \cos y = \cos px \sin y + p$
4. $y = px + \sin^{-1} p$

সাধারণ সমাধান ও Singular সমাধান বের করুন ঃ

5. $y = px + \sqrt{1+p^2}$
6. $y = px + \sqrt{a^2p^2 + b^2}$
7. $px - y = e^p$
8. $y = px + \frac{m}{p}$

পাশে বর্ণিত চল পরিবর্তন দ্বারা সাধারণ সমাধান বের করুন ঃ

9. $xyp^2 - (x^2 + y^2 - 1)p + xy = 0$ $\quad [x^2 = u, y^2 = v]$

10. $yp^2 - 2xp + y = 0$ $\quad [x = u, y^2 = v]$

11. $(y + px)^2 = py^2$ $\quad [u = xy, v = y]$

12. $x^2p^2 + py(2x + y) + y^2 = 0$ $\quad [y = u, v = xy]$

13. $p^2x - 2py + x + 2y = 0$ $\quad [x^2 = u, y - x = v]$

14. $x^3p^2 + x^2py + a^3 = 0$ $\quad \left[y = u, x = \frac{1}{v}\right]$

15. $(x^2p + y^2)(px + y) = (1 + p)^2$ $\quad [u = xy, v = x + y]$

16. $y^2(y - px) = x^4p^2$ $\quad \left[u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}\right]$

9.10 এর উত্তরমালা ঃ (সমাধান সূত্র সহ)

সাধারণ সমাধান	Singular সমাধান
1. $y = c(x - 2) + \frac{3}{c}$	
2. $y = cx + c(1 - c)$	
3. $y = cx - \sin^{-1} c$	
4. $y = cx + \sin^{-1} c$	
5. $y = cx + \sqrt{1 + c^2}$	$x^2 + y^2 = 1$
6. $y = cx + \sqrt{a^2c^2 + b^2}$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
7. $y = cx - e^c$	$y = x(\log_e x - 1)$
8. $y = cx + \frac{m}{c}$	$y^2 = 4mx$
9. $y^2 = cx^2 - \frac{c}{c - 1}$	

$$\left[du = 2xdx \Rightarrow p = \frac{x}{y}\frac{dv}{du} \quad \therefore\ v = u\frac{dv}{du} - \frac{\frac{dv}{du}}{\frac{dv}{du} - 1}\right]$$ ইহা Clairaut এর আকার যুক্ত ।

10. $4y^2 = 4cx - c^2$

$$[\, p = \frac{1}{2y}q,\, q = \frac{dv}{du},\, v = uq - \frac{1}{4}q^2 \,]$$

11. $c^2 + cy + xy = 0$

$$[\, p = \frac{y}{\frac{du}{dv} - x}\,; \Rightarrow v = u\frac{dv}{du} + \frac{1}{\frac{dv}{du}} \quad \text{(Clairaut আকার)} \,]$$

12. $xy = cy + c^2$

13. $2c^2x^2 - 2c\left(y - x\right) + 1 = 0$

$$[\, p = 2x\frac{dv}{du} + 1 \Rightarrow \; u = v\frac{du}{dv} - \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 \quad \text{ইত্যাদি} \,]$$

14. $cxy - a^3c^2x = 1$

$$[\, dy = du,\, dx = -\frac{1}{v^2}\,dv$$

$$p = -v^2\,\frac{du}{dv}$$

সমীকরণ থেকে, $v = u\dfrac{dv}{du} - a^3\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2$ (Clairaut)]

15. $x + y = c\,xy + c^2$

$$[\, \frac{du}{dv} = \frac{px + y}{1 + p} \;\; \therefore \;\; p = \frac{\frac{du}{dv} - y}{x - \frac{du}{dv}}$$

সমীকরণ থেকে, $v = u\dfrac{dv}{du} + \left(\dfrac{dv}{du}\right)^2$ (Clairaut)]

16. $c^2xy + cy - x = 0$

$$[\, p = \frac{y^2}{x^2}\,\frac{dv}{du}$$

সমীকরণ থেকে, $v = u\dfrac{dv}{du} + \left(\dfrac{dv}{du}\right)^2$ (Clairaut)]

9.11 সারাংশ

$\frac{dy}{du} = f(x, y)$ সাধারণ প্রথম-ক্রমের সমীকরণটিকে $f(x)\, dx + g(y)\, dy = 0$ আকারে লিখলে চল পৃথকীকরণ হয় এবং সেক্ষেত্রে সমাকলন করলে, প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান নির্ণিত হয়।

$Mdx + Ndy = 0$ সমীকরণটিতে M ও N, সমঘাতযুক্ত x, y এর অপেক্ষক হলে, সমীকরণটিকে সমঘাত বিশিষ্ট অবঃ সমীঃ বলে। $y = vx$ বসালেই চল পৃথকীকরণ পদ্ধতি ব্যবহার করে সমাধান নির্ণয় করা সম্ভব।

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ সমীকরণটি সঠিক (যথার্থ) হবার শর্ত হল

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$Mdx + Ndy = 0$ সমীকরণের সহায়ক গুণক (Integrating factor) IF নির্ণয়ের পদ্ধতি হল ঃ

(i) $Mx + Ny \neq 0$ হলে এবং M ও N সমমাত্রিক হলে $IF = \frac{1}{Mx + Ny}$

(ii) $Mx - Ny \neq 0$ এবং $M = yf_1(xy),\ N = xf_2(x, y)$ হলে $\frac{1}{Mx - Ny}$ হল IF

(iii) যদি $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = Nf(x)$ হয়, তবে IF হল $e^{\int f(x)dx}$

(iv) $\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = Mf(y)$ হলে, IF হল $e^{\int f(y)dx}$

(v) $x^{\alpha}y^{\beta}(mydy + nxdx) = 0$ সমীকরণটির IF হল $x^{mk-\alpha-1}\ y^{nk-\beta-1}$

$\frac{dy}{dx} + py = Q(x)$ রৈখিক অসমীকরণের সাধারণ সমাধান হল

$$ye^{\int pdx} = \int Qe^{\int pdx}\, dx + e$$

বিবিধ প্রকার বহুঘাতি সমীকরণের সমাধান পদ্ধতি আলোচিত। $y = px + f(p)\left[p = \frac{dy}{dx}\right]$ হল Clariaut's সমীকরণ-এর সাধারণ সমাধান হল, $y = cx + f(c)$। এছাড়াও বিশিষ্ট সমাধান থাকা সম্ভব।

একক 10 ❑ বিশিষ্ট সমাধান (Singular Solution)

গঠন

10.1 প্রস্তাবনা

এবার আমরা অবকল সমীকরণের একটি বৈশিষ্ট্যপূর্ণ সমাধান নিয়ে আলোচনা করব। এইরূপ সমাধানকে 9.10.1-এ আমরা Singular সমাধান বলেছি এবং তার সংজ্ঞাও দিয়েছি। আরও বিশদ ভাবে এইরূপ সমাধানের আলোচনা এখন আমরা করব। Singular সমাধানের সুন্দর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা সম্ভব। প্রাথমিকভাবে আমরা রেখা সংক্রান্ত আলোচনা করে নেব। তারপর কীভাবে সমাধান নির্ণয় করা সম্ভব, তা আলোচিত হবে।

10·2 উদ্দেশ্য

এই এককে প্রথম ক্রমের অবকল-সমীকরণের বিশিষ্ট সমাধান বিষয়ে আলোচনা আছে। বিশিষ্ট সমাধান (Singular–সমাধান) বলতে আমরা কী বুঝি তা বলার পর আমরা এই সমাধান কখন নির্ণয় করা যায় এবং কীভাবে নির্ণীত হতে পারে, তা আলোচনা করেছি। নবম এককে Clairaut সমীকরণ সমাধানের ক্ষেত্রে এই Singular সমাধানের প্রসঙ্গ এসেছিল—আপনারা আগে সেটা দেখেছেন। Clairaut সমীকরণ ছাড়াও অন্যান্য সমীকরণের ক্ষেত্রেও এই Singular সমাধানের প্রসঙ্গ আলোচিত হল। এছাড়া এই বিশিষ্ট সমাধানের জ্যামিতিক ব্যাখ্যাও আলোচিত হল।

10·3 Singular সমাধান কী ?

মনে করা যাক, $f(x,y,p)=0$ একটি অবকল সমীকরণ এবং $\phi(x,y,c)=0$ তার সাধারণ সমাধান। $f(x,y,p)=0$ সমীকরণের Singular সমাধান এমন একটি সমাধান,

(1) যাতে c প্যারামিটার (Parameter) থাকবে না।

(2) যা c এর কোনও বিশেষ মানের জন্য $\phi(x,y,c)=0$ সাধারণ সমাধান থেকে পাওয়া যাবে না।

(3) যা $f(x,y,p)=0$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করবে।

10·4 এনভেলপ, নোড, কাস্প

Singular সমাধানের আলোচনায় যাবার আগে আরো দু'একটি বিষয় আমাদের জানা দরকার। যেমনঃ

(1) **রেখার পরিবার** (family of curves)

এখানে রেখা (Curve) বলতে আমরা সরলরেখা, বক্ররেখা সবই বুঝব। x,y এর যে কোন সমীকরণে কোনও Parameter থাকলে, তা x, y সমতলে রেখা-পরিবার বোঝায়।

যেমন, $\phi(x,y,c)=0$, c এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য একই ধরণের অনেক রেখা বোঝায়। এই সকল রেখাকে বলে **রেখার পরিবার** এবং এক একটি রেখা ঐ পরিবারের সভ্য (member) রেখা।

যেমন, $y^2=4ax$, 'a' এর বিভিন্ন মানের জন্য একটি অধিবৃত্তের পরিবার নির্দিষ্ট করে। এছাড়া একাধিক Parameter যুক্ত রেখা-পরিবারও হতে পারে।

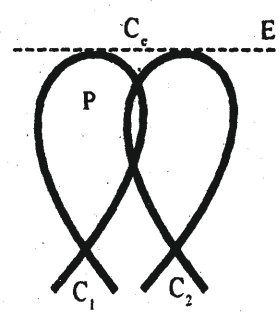
অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান $\phi(x,y,c)=0$ একটি রেখা পরিবার।

(2) **এন্‌ভেলপ** (Envelope)

কোনও রেখা পরিবারের ক্ষেত্রে, তার এন্‌ভেলাপ হল, এমন একটি রেখা, যা প্রতি বিন্দুতে ঐ রেখার পরিবারের কোনও না কোনও সভ্য রেখাকে স্পর্শ করে। অবশ্য সকল রেখা পরিবারেই যে এন্‌ভেলপ থাকবে এমন নয়।

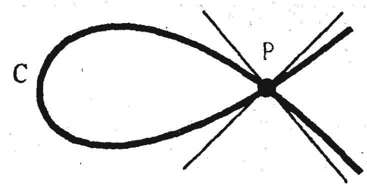
c এর দুটি পরস্পর নিকটস্থ মান c_1, c_2-এর জন্য রেখা পরিবারের দুই সভ্য খুব কাছাকাছি এলে তাদের ছেদবিন্দু P তে যে স্পর্শক হবে তা সংজ্ঞানুসারে এনভেলপের ও স্পর্শক হবে।

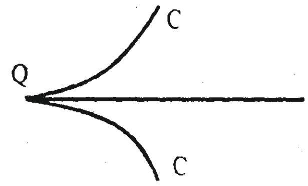
তাই এনভেলপকে রেখা পরিবারের দুই পাশাপাশি (Cosecutive) সভ্যের ছেদবিন্দুর সঞ্চার পথও বলা যায়।



(3) **দ্বৈত বিন্দু (Double Point), নোড্(Node), কাস্প (Cusp)**

একটি রেখার দুটি বা বহু শাখা একবিন্দু গামী হলে বিন্দুটিকে ঐ রেখার দ্বৈত বিন্দু বা বহু বিন্দু বলে। দ্বৈত বিন্দুতে (বহু-বিন্দুতে) রেখার শাখাগুলির স্পর্শক বাস্তব ও ভিন্ন হলে বিন্দুটিকে নোড্ বলে। C রেখার উপর P একটি নোড্। দ্বৈতবিন্দুতে রেখার দুটি শাখায় স্পর্শক দুইটি বাস্তব ও অভিন্ন হ'লে বিন্দুটি কাস্প বলে। C রেখায় Q একটি কাস্প।





10·4·1 মন্তব্য ঃ

সাধারণ সমাধান রেখা পরিবারের যদি এনভেলপ থাকে, তবে এন্‌ভেলপের সমীকরণ অবকল সমীকরণটিকে সিদ্ধ করবে এবং তা Singular সমাধান হবে। কারণ —

এনভেলপের উপর কোনও (x,y) বিন্দুতে, সাধারণ-সমাধান-রেখা পরিবারের কোনও সভ্য ঐ এনভেলপকে স্পর্শ করে। $\therefore$ এই (x,y) বিন্দুতে এনভেলপের এবং রেখা পরিবারের সভ্যের $p\left(=\dfrac{dy}{dx}\right)$ সমান। তাই এনভেলপের সমীকরণ $f(x,y,p)=0$ কে সিদ্ধ করবে এবং Singular সমাধান হবে।

10·5 c-discriminant ($\Delta_c\phi$) ও p-discriminant ($\Delta_p f$)-এর সংজ্ঞা

ধরি, $f(x,y,p)=0$ প্রদত্ত অবকল সমীকরণ এবং $\phi(x,y,c)=0$ সাধারণ সমাধান।

এখন, $f(x,y,p)=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial p}=0$

এই দুটি সমীকরণ থেকে p অপনয়ন করে p-discriminant বা $\Delta_p f=0$ পাওয়া যায়। এই অপনয়নের অর্থ, $\phi(x,y,c)=0$ রেখা পরিবারে যে সকল বিন্দুতে p সমান তাদের সঞ্চার পথ $\Delta_p f=0$

আবার, $\phi(x,y,c)=0,\ \dfrac{\partial \phi}{\partial c}=0$

এই দুটি সমীকরণ থেকে c অপনয়ন করে c-discriminant বা $\Delta_C\phi=0$ পাওয়া যায়। এই অপনয়নের অর্থ, $\phi(x,y,c)=0$ রেখা-পরিবারে যে সকল বিন্দুতে c সমান, তাদের সঞ্চার পথ $\Delta_c\phi=0$

10·6 সমাধান পদ্ধতি

গভীর বিশ্লেষণমূলক (analytical) আলোচনায় না গিয়ে সাধারণ ভাবে **Singular সমাধান কীভাবে পাওয়া** যায়, সেটাই আমাদের আলোচনার বিষয়।

দেখা গেছে, উৎপাদকে বিশ্লেষণ করলে $\Delta_c\phi$ ও $\Delta_p f$ — কে এভাবে সাজানো যায় (এখানে বিশ্লেষণ দেওয়া হল না)

$$\Delta_c\phi = EN^2C^3 \quad ....(1)$$

$$\Delta_p f = ET^2C \quad ....(2)$$

এখানে E, N, C, T প্রতীকগুলো হল

1. E এনভেলপের প্রতীক। এটি (1) এবং (2) উভয়েই বর্তমান। E = 0 Singular সমাধান হবে, এটি $f(x,y,p)=0$ কে সিদ্ধ করে।

2. N নোডের প্রতীক। **এটি কেবলমাত্র (1)-এ থাকবে, এবং 2 ঘাতযুক্ত হবে।**

   N = 0 সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। সুতরাং N = 0 বিশিষ্ট সমাধান নয়।

   N = 0 কে নোডের সঞ্চার পথ বলা হবে।

3. C কাস্পের প্রতীক। (1) এ এটির ঘাত 3 ও C = 0-কে কাস্পের সঞ্চার পথ বলে। সাধারণত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। তাই **বিশিষ্ট সমাধান (Singular solution) নয়।**

4. T হল Tac সঞ্চার পথের প্রতীক।

   এটি 2 ঘাত বিশিষ্ট হয়ে কেবল মাত্র (2)-এ থাকে। T = 0-কে Tac সঞ্চার পথ বলে।

এটিও সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। এবং সমাধান নয়, সুতরাং, $\Delta_c\phi$ ও $\Delta_p f$ এর সাধারণ একঘাত যুক্ত উৎপাদকটি হবে Singular সমাধান।

মন্তব্য :

$\phi(x,y,c)=0$ যদি Parameter c এর দ্বিঘাত সমীকরণ হয়, তবে $\phi \equiv Ac^2+Bc+C=0$

এবং $\dfrac{\partial\phi}{\partial c}=0$ থেকে c অপনয়ন করলে c- এর বীজদ্বয় সমান হবার শর্ত পাওয়া যাবে। তা হল $B^2-4AC=0$

উদাহরণ : যেমন, $\phi(x,y,c) \equiv c^2 - cxy + x + y = 0$

এবং $\dfrac{\partial\phi}{\partial c}=0$ বা, $c=\dfrac{xy}{2}$ থেকে c অপনয়নের ফলে $x^2y^2-4(x+y)=0$ হল। এই সমীকরণটি c-discriminant $\Delta_c\phi=0$

10·7 উদাহরণ ও সমাধান

কয়েকটি উদাহরণ লক্ষ্য করুন।

উদাহরণ : সাধারণ সমাধান থাকলে, Singular সমাধান বের করুন :

1. $xp^2 - 2yp + ax = 0$

2 $y = yp^2 + 2px$

3. $xp^2 + py = y^4$

4. $x^2p^2 + y(2x+y)p + y^2 = 0$ [$y = u$, $xy = v$ ধরুন]

সমাধান :

1. $xp^2 - 2yp + ax = 0$

$$\therefore\ 2y = \frac{ax}{p} + xp$$

x এর সাপেক্ষে অবকলন করে,

$$\left(p - \frac{a}{p}\right) = \left(1 - \frac{a}{p^2}\right) x \frac{dp}{dx}$$

বা, $p - x\dfrac{dp}{dx} = 0$ [$\because$ $p^2 = a$ সমীকরণ সিদ্ধ করে না]

$\therefore\ p = cx$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান $\phi(x, y, c) \equiv c^2x^2 - 2cy + a = 0$ ....(1)

প্রদত্ত সমীকরণ, $f(x, y, p) \equiv p^2x - 2py + ax = 0$ ....(2)

$\therefore\ \dfrac{\partial\phi}{\partial c} = 0$ থেকে $c = \dfrac{y}{x^2}$ ....(3)

$\dfrac{\partial f}{\partial p} = 0$ থেকে $p = \dfrac{y}{x}$ ....(4)

(1) ও (3) থেকে c অপনয়ন করলে $y^2 - ax^2 = 0$; $(\Delta_c\phi = 0)$

(2) ও (4) থেকে p অপনয়ন করলে $y^2 - ax^2 = 0$; $(\Delta_p f = 0)$

$y^2 - ax^2 = 0$; $\Delta_c\phi$ ও $\Delta_p f$ এর একমাত্র সাধারণ উৎপাদক। $\therefore$ $y^2 = ax^2$ Singular সমাধান।

$\therefore$ সাধারণ সমাধান ঃ $c^2x^2 - 2cy + a = 0$

Singular সমাধান ঃ $y^2 = ax^2$

2. $y = yp^2 + 2px$

উহার সাধারণ সমাধান (9.9.4.3 উদা.3)

$$y^2 = 4c(c - x)$$

$$\therefore \phi(x, y, c) \equiv 4c^2 - 4cx - y^2 = 0$$

$$f(x, y, p) \equiv p^2y + 2px - y = 0$$

$\Delta_c\phi = 0$ থেকে $x^2 + y^2 = 0$

$\Delta_p f = 0$ থেকে $x^2 + y^2 = 0$

এই $x^2 + y^2$, $\Delta_c\phi$ ও $\Delta_p f$ তে আছে কিন্তু, $x^2 + y^2 = 0$ কোন বাস্তব রেখা নয়।

$\therefore$ সমীকরণটির সাধারণ সমাধান $y^2 = 4c(c - x)$ কিন্তু বাস্তব Singular সমাধান নেই।

3. $xp^2 + py = y^4$

y এর সাপেক্ষে অবকলন করলে

$$\frac{y}{p}(2y^3 - p)\frac{dp}{dy} = 2(2y^3 - p)$$

$p = 2y^3$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না।

$$\therefore \frac{y}{p}\frac{dp}{dy} = 2 \text{ বা, } y^2 = cp$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান ঃ $xy + c = c^2y$

$$\therefore \phi(x, y, c) \equiv c^2y - c - xy = 0$$

$$f(x, y, p) \equiv p^2x + py - y^4 = 0$$

$\therefore$ $\Delta_c\phi = 0$ থেকে $(4xy^2 + 1) = 0$

$\Delta_p f = 0$ থেকে $y^2(4xy^2 + 1) = 0$

সাধারণ উৎপাদক $(4xy^2+1)=0$ Singular সমাধান এবং y^2 কেবলমাত্র $\Delta_p f$-এ থাকায় ও দ্বিঘাত বিশিষ্ট হওয়ায় $y=0$ Tac সঞ্চারপথ হবে।

4 $x^2p^2+y(2x+y)p+y^2=0$ ....(1)

$y=u,\ \ xy=v$

$$\therefore\ p=\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\dfrac{dv}{du}-x}$$

$\therefore$ (1) থেকে, $v=u\dfrac{dv}{du}+\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2$ ....(2)

এটি Clairaut-এর আকার যুক্ত।

$\therefore$ সাধারণ সমাধানের জন্য $\dfrac{dv}{du}=c$,

$\therefore$ সাধারণ সমাধান

$$v=cu+c^2 \quad ....(3)$$

বা, $xy=cy+c^2$

$\dfrac{dv}{du}=q$ ধরলে, (2) থেকে,

$$v=uq+q^2 \quad ....(4)$$

স্পষ্টত ঃ (3) এবং (4) থেকে,

$\Delta_C\phi=0$ and $\Delta_q f=0$ একই হবে।

[এখানে $\phi\equiv v-cu-c^2,\ f\equiv v-uq-q^2$]

$\therefore$ এদের উৎপাদক হবে, u^2+4v

$u^2+4v=0$ বা, $y(y+4x)=0$ বা, $y=0,\ y+4x=0$

$c=0,\ y=0$ সাধারণ সমাধানকে সিদ্ধ করে।

$y=0$ একটি বিশেষ (Particular) সমাধান।

$\therefore\ y+4x=0$ একমাত্র Singular সমাধান।

10·8 সারাংশ

$f(x,y,p)=0$ .....(1) সমীকরণের সাধারণ সমাধান $\phi(x,y,c)=0$ .....(2) হলে, (1) এর Singular সমাধান হবে এমন সমাধান যা, c এর কোনও মানের জন্য (2) থেকে পাওয়া যাবে না কিন্তু, (1)-এ সিদ্ধ করবে।

x, y এর সমীকরণ Parameter যুক্ত হলে তা x-y সমতলে রেখা পরিবার বোঝায়। রেখা- পরিবারের ক্ষেত্রে এনভেলপ, নোড, কাস্প কী তা বলা হয়েছে 10.9.4 অনুচ্ছেদে।

$\phi=0$ এবং $\dfrac{\partial\phi}{\partial c}=0$ থেকে c অপনয়ন করে $\Delta_c\phi=0$ পাওয়া যায়।

$f=0$ এবং $\dfrac{\partial f}{\partial p}=0$ থেকে p অপনয়ন করে $\Delta_p f=0$ পাওয়া যায়।

$\Delta_c\phi=0$ থেকে $\phi=0$ রেখা পরিবারের এনভেলপ, নোড, কাস্প, সঞ্চার পথ নির্ণয় করা যেতে পারে।

$\Delta_p f=0$ থেকে, $\phi=0$ রেখা পরিবারে এনভেলপ, Tac সঞ্চার পথ, কাস্প, নির্ণয় করা যেতে পারে।

$\Delta_c\phi$ ও $\Delta_p f$ এর একঘাতী সাধারণ উৎপাদকটি E (x,y) ও E (x,y) = 0 হল এনভেলপ এবং এটিই হল বিশিষ্ট সমাধান।

10·9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

নিম্নের অবকল সমীকরণগুলির সাধারণ সমাধান এবং Singular সমাধান যদি থাকে তাহা নির্ণয় করুন

1. $y=px+\sqrt{1+p^2}$

2. $y=px+\sqrt{a^2p^2+b^2}$

3. $y=px+p(1-p)$

4. $y=px-p^2$

5. $y=px-p\cos^{-1}p+\sqrt{1-p^2}$

6. $y=-px+x^4p^2$

7. $y^2(1+p^2)=a^2$

8. $xp^2 - 2py + 4x = 0$

9. $p^3 + px - y = 0$

10. $x^3p^2 + x^2yp + a^3 = 0$

11. $x^2(y - px) + yp^2 = 0$

12. $p^2 + 2px = 3x^2$

13. $x^2 + 2xyp + (1 - x^2)p^2 = 0$

14. $4p^2 = 9x$

10·10 উত্তরমালা

	সাধারণ সমাধান	Singular সমাধান ও অন্যান্য সঞ্চার পথ
1.	$y = cx + \sqrt{1 + c^2}$	$x^2 + y^2 = 1$
2.	$y = cx + \sqrt{a^2c^2 + b^2}$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
3.	$y = cx + c(1 - c)$,	$4y = (x + 1)^2$
4.	$y = cx - c^2$	$x^2 = 4y$
5.	$y = cx - c\cos^{-1} c + \sqrt{1 - c^2}$	$y = \sin x$
6.	$xy = c + c^2x$,	$4x^2y + 1 = 0$, $x = 0$, Tac সঞ্চার পথ
7.	$(x - c)^2 = a^2 - y^2$,	$y = \pm a$
8.	$c^2x^2 - 2cy + 4 = 0$,	$y^2 - 4x^2 = 0$
9.	$y = c^3 + cx$,	$4x^3 + 27y^2 = 0$
10.	$a^3x + cxy + c^2 = 0$,	$xy^2 - 4a^3 = 0$, $x = 0$ বিশিষ্ট সমাধান
11.	$c^2 - cx^2 + y^2 = 0$,	$x^4 - 4y^2 = 0$

12. $4c^2 - 2c(4y + 2x^2) + 4(y^2 + x^2y) - 3x^4 = 0$, Singular সমাধান নাই

[$x = 0$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না]

13. $c^2 + 2cy - x^2 + 1 = 0$ $x^2 + y^2 = 1$; $x = 0$, Tac সঞ্চার পথ।

Singular সমাধান নাই

14. $(y + c)^2 = x^3$ $x = 0$, Cusp সঞ্চার পথ

একক 11 ❑ ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ

গঠন

11·1 প্রস্তাবনা

যে সমস্ত অন্তরকল সমীকরণে অধীন চলটি এবং তার বিভিন্ন ক্রমের অন্তরকলজগুলি একমাত্র প্রথম ঘাতে থাকে এবং পরস্পর গুণিত হয় না, তাদের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ বলা হয়। প্রথম ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের আকার নিম্নরূপ।

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

এই সমীকরণে অন্তরকল প্রকারক $\frac{d}{dx}$, এর পরিবর্তে D প্রতীকটি ব্যবহার করে লিখতে পারি

$$Dy + P(x)y = Q(x)$$

বা, $(D+P)y = Q$

বা, $L(D)\,y = Q$ যেখানে, $L(D) = D + P$

হচ্ছে একটি রৈখিক প্রকারক। n- ক্রমের যে কোনও রৈখিক অন্তরকল সমীকরণকে $L(D)y = Q$ আকারে লেখা যায় (যেখানে $L(D) \equiv D^n + P_1D^{n-1} + \ldots\ldots + P_{n-1}D + P_n$ এবং $P_1, P_2 \ldots\ldots, P_n, Q$ হল x-এর অপেক্ষক)। আপনারা 8-তম এককে অন্তরকল সমীকরণের সমাধান সম্পর্কে আলোচনা দেখেছেন। সমাধানের বিভিন্ন তত্ত্বগত দিক সেখানে আলোচিত হয়েছে। অন্তরকল সমীকরণের সমাধান নির্ণয় বিশেষ প্রয়োজনীয়, তাই $L(D) = Q(x)$ এই n– ক্রমের ধ্রুবক সহগযুক্ত রৈখিক সমীকরণের সমাধান পদ্ধতি আলোচনা গুরুত্বপূর্ণ।

11·2 উদ্দেশ্য

■ ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের সমাধান পদ্ধতি আলোচনা করা এই এককের প্রধান উদ্দেশ্য।

■ বিভিন্ন প্রকার রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে এবং L (D) প্রকারকটির বৈশিষ্ট্য আলোচনা করে দেখানো হয়েছে। এটি একটি রৈখিক প্রকারক।

■ সুষম রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ $L(D)y = 0$ এর সমাধান সমূহের ধর্ম আলোচনা করা হয়েছে। $L(D)y = 0$ একটি n-তম ক্রমের সুষম রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ হলে, তার রৈখিকভাবে অনধীন সমাধান সমূহের সংখ্যা n এর চেয়ে বেশী হবে না।

■ রৈখিকভাবে অনধীন সমাধানগুলি নির্ণয়ের পদ্ধতিও বর্ণিত হয়েছে।

■ সাধারণ n- ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের সমাধানের দুটি অংশ। প্রথম অংশটি $L(D)y = 0$ সমীকরণটির পূর্ণ সমাধান। একে পূরক অপেক্ষক বলা হয়। দ্বিতীয় অংশটি $L(D)y = \phi(x)$ সমীকরণটির একটি সমাধান, একে বলা হয় বিশেষ সমাকল।

■ 11.7 পরিচ্ছেদে দ্বিতীয়ক্রমের ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের পূরক-অপেক্ষক নির্ণয়ের প্রণালী বিবৃত হল। এই প্রণালীকে যে কোনও ক্রমের ধ্রুবক-সহগ বিশিষ্ট রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের পূরক অপেক্ষক নির্ণয়ের ক্ষেত্রে সম্প্রসারিত করা যেতে পারে।

■ পরবর্তী পরিচ্ছেদে L (D) প্রকারকটির বিপরীত প্রকারক $\dfrac{1}{L(D)}$-এর সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে এবং $\dfrac{1}{L(D)}$ প্রকারকটি দ্বারা যে কোন ক্রমের ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের বিশেষ সমাকল নির্ণয়ের পদ্ধতি আলোচিত হল।

■ ধ্রুবক-সহগ বিশিষ্ট রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ $L(D)y = \phi(x)$ এর বিশেষ সমাকল কতিপয় বিশেষ $\phi(x)$ এর জন্য সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যায়। 11.9 পরিচ্ছেদে এই পদ্ধতিগুলি উদাহরণসহ আলোচিত হল।

■ 11.10 পরিচ্ছেদে ধ্রুবক-সহগ বিশিষ্ট রৈখিক সহ অন্তরকল সমীকরণ সমূহ সমাধানের পদ্ধতি উদাহরণ সহ বর্ণিত হয়েছে।

11·3 সংজ্ঞা

যে অন্তরকল সমীকরণে অধীন চল এবং তার বিভিন্ন ক্রমের অন্তরকলজগুলি একমাত্র প্রথম ঘাতে আবির্ভূত হয় এবং পরস্পর গুণিত হয় না, তাকে রৈখিক বা একঘাত অন্তরকল সমীকরণ বলে।

রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের আকার নিম্নরূপ।

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + P_{n-1}y' + P_n y = \phi(x) \;\ldots\ldots\; (1)$$

যেখানে, $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_{n-1}, P_n$ এবং ϕ, x-এর ফাংশন।

ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ ঃ

সমীকরণ (1)-এ বিভিন্ন ক্রমের অন্তরকলজগুলির সহগগুলি ধ্রুবক হলে, আমরা ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ পাই।

সুষম একঘাত বা সুষমরৈখিক অন্তরকল সমীকরণ ঃ (Homogeneous Linear Differential Equation)

সমীকরণ (1)-এ $\phi(x) = 0$ হলে সমীকরণটিকে সুষম একঘাত বা সুষম রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ বলা হয় কারণ, তখন এই সমীকরণটির প্রত্যেক পদে y এবং y-এর অন্তরকলজগুলির ঘাতের সমষ্টি এক।

উদাহরণ। নিচের সমীকরণটি পরীক্ষা করুন।

$$\frac{dy}{dx} + Py = 0$$

এখানে $n = 1$, $\phi(x) = 0$ অতএব, এটি একটি প্রথমক্রমের সুষমরৈখিক অন্তরকল সমীকরণ। সমীকরণটির উভয়পক্ষকে $e^{\int P(x)dx}$ দিয়ে গুণ করে পাই

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + P\,e^{\int P(x)dx}y = 0$$

বা, $$\frac{d}{dx}\left[ye^{\int P(x)dx}\right] = 0$$

উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই

$ye^{\int P(x)dx} = c$ যেখানে c একটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক।

অর্থাৎ, $y = ce^{-\int P(x)dx}$ হল সমীকরণটির সাধারণ সমাধান।

11·4 রৈখিক অন্তরকল প্রকারক L(D) : D প্রতীকের সাহায্যে সুষমরৈখিক অন্তরকল সমীকরণের বিকল্প আকারে প্রকাশ

D প্রতীকটির দ্বারা $\frac{d}{dx}$ প্রকারকটিকে (Operator) নির্দেশ করা হলে,

$$\frac{d^n y}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_n y=0$$

এই সুষম রৈখিক সমীকরণটিকে

$$D^n y+P_1D^{n-1}y+P_2D^{n-2}y+\ldots\ldots+P_{n-1}Dy+P_n y=0$$

বা, $$\left[D^n+P_1D^{n-1}+P_2D^{n-2}+\ldots\ldots+P_{n-1}D+P_n\right]y=0\ldots\ldots(2)$$

আকারে প্রকাশ করা যেতে পারে।

$D^n+P_1D^{n-1}+P_2D^{n-2}+\ldots\ldots+P_{n-1}D+P_n$ এই

প্রকারকটির পরিবর্তে L(D) লিখে আমরা সমীকরণ (2) কে

$$L(D)y=0\ldots\ldots \qquad (3)$$

এই সংক্ষিপ্ত আকারে লিখতে পারি।

$$L(D)\equiv D^n+P_1D^{n-1}+P_2D^{n-2}+\ldots\ldots+P_{n-1}D+P_n$$

D প্রতীকটির সাপেক্ষে n-তম ঘাতের একটি বহুপদী রাশিমালা। (আমরা ৪ ম এককে (Unit 8) এ দেখেছি যে, $y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots\ldots+c_ny_n$ হলে, যেখানে $y_1, y_2\ldots\ldots y_n$ প্রত্যেকেই x এর অপেক্ষক) $L(D)y=CL(D)\,y_1+C_2\,L(D)\,y_2+\ldots\ldots+C_nL(D)y_n$ হবে।

মন্তব্য ঃ উপরে বর্ণিত বৈশিষ্ট্য থেকে বোঝা যায় যে, L (D) একটি রৈখিক প্রকারক (Linear Operator), এজন্য L (D)-কে রৈখিক অন্তরকল প্রকারক (Linear Differential Operator) বলা হয়।

11·5 সুষম-রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের সমাধানসমূহের ধর্ম

ধরি $L(D)\equiv D^n+P_1D^{n-1}+\ldots..+P_{n-1}D+P_n$ এবং

$$L(D)\,y=0$$

একটি সুষম রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ। আমরা 11·4 পরিচ্ছেদে দেখেছি, L(D) একটি রৈখিক অন্তরকল প্রকারক। আমরা নিচের উপপাদ্যগুলি উল্লেখ করব। সিদ্ধান্তগুলি পূর্বে ৪ -ম এককে আলোচিত হয়েছে।

11·5·1 সিদ্ধান্ত

$y = y_1$, $y = y_2$ .... $y = y_n$, $L(D)y = 0$ সুষম রৈখিক সমীকরণটির n সংখ্যক সমাধান হলে এদের রৈখিক সংযোগ

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots\ldots + C_ny_n$$ (যেখানে C_1, C_2, ... C_n যদৃচ্ছ ধ্রুবক)

ঐ সমীকরণের সমাধান।

ধরি $\{y = y_1, y = y_2, \ldots y = y_n\}$ $L(D)y = 0$ সমীকরণটির একটি সমাধান সেট্। এই সেট্‌টি রৈখিকভাবে অনধীন হলে

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots\ldots + C_ny_n$$

সমাধানটিকে $L(D)y = 0$ সমীকরণটির সাধারণ সমাধান বলা হয়।

11·5·2 সিদ্ধান্ত

ধরি, $y = y_1, y = y_2, \ldots\ldots y = y_n$, $L(D)y = 0$ এই সুষম-রৈখিক অন্তরকল সমীকরণটির n সংখ্যক সমাধান। y_1, y_2, ... y_n রৈখিকভাবে অনধীন হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \ldots\ldots y_n \\ y_1' & y_2' \ldots\ldots y_n' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ হয়।}$$

W কে বলা হয় $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ ফাংশনগুলির রন্‌স্কিয়ান।

উদাহরণ ঃ

দেখান যে, $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ সমীকরণটির $y = e^{mx}$ আকারের দুটি রৈখিকভাবে অনধীন সমাধান আছে। এর থেকে সমীকরণটির পূর্ণ সমাধানটি লিখুন।

উত্তর ঃ $y = e^{mx}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = me^{mx}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$

এই মানগুলি $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$(m^2 + m - 6)e^{mx} = 0 \Rightarrow \quad m^2 + m - 6 = 0$$
$$m = 2, -3$$

তাহ'লে সমাধান দুটি হল $y = e^{2x}, y = e^{-3x}$

এদের রন্‌স্কিয়ানটি হল

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-3x} \\ 2e^{2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -5e^{-x} \neq 0$$

কাজেই সমাধান দুটি রৈখিকভাবে অনধীন। তাই সমীকরণটির পূর্ণ সমাধান হবে

$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$ যেখানে C_1, C_2 দুটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক।

উদাহরণ ঃ

দেখান যে, $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ সমীকরণটির $y = e^{mx}$ আকারের দুটি রৈখিকভাবে অনধীন জটিল সমাধান আছে। রৈখিকভাবে অনধীন বাস্তব সমাধান দুটি লিখুন।

উত্তর ঃ $y = e^{mx}$ হলে $\frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$

এই মানটি $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\left(m^2+1\right)e^{mx} = 0 \Rightarrow m^2+1=0 \Rightarrow m = i, -i$$

$\therefore$ জটিল সমাধান দুটি হল $y_1 = e^{ix}$ এবং $y_2 = e^{-ix}$। এদের রন্‌স্কিয়ান $= \begin{vmatrix} e^{ix} & e^{-ix} \\ ie^{cx} & -ie^{-cx} \end{vmatrix} = -2i \neq 0$, ফলে সমাধান দুটি রৈখিকভাবে অনধীন। আবার $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান হওয়ায় বাস্তব অংশ ও কাল্পনিক অংশ দুধারে সমান করলে $y = \cos x$ এবং $y = \sin x$ উভয়েই সমীকরণটির সমাধান। যেহেতু $\cos x$, $\sin x$ এর রন্‌স্কিয়ানটি অশূন্য, এই সমাধানদুটি রৈখিকভাবে অনধীন বাস্তব সমাধান।

11·5·3 সিদ্ধান্ত

যদি, (i) $y = y_1$, $y = y_2$, $\quad a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ .... (1)

সমীকরণটির দুটি সমাধান হয়,

(ii) a_0, a_1, a_2 কোনও বদ্ধ অন্তরাল $[a,b]$-তে সন্তত হয়, এবং

(iii) $a_0(x)$ ঐ বদ্ধ অন্তরালের সর্বত্র অশূন্য হয়, তাহলে

$$W[y_1(x), y_2(x)] = ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$$

প্রমাণ ঃ $y = y_1$, $y = y_2$ সমীকরণ (i) এর সমাধান, তাই

$$a_0(x)y_1'' + a_1(x)\,y_1' + a_2(x)\,y_1 = 0 \text{ এবং}$$

$$a_0(x)y_2'' + a_1(x)\,y_2' + a_2(x)\,y_2 = 0$$

আবার যেহেতু, $W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

অতএব, $\dfrac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)} y_1' - \dfrac{a_2(x)}{a_0(x)} y_1 & -\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)} y_2' - \dfrac{a_2(x)}{a_0(x)} y_2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} W[y_1(x), y_2(x)]$$

অর্থাৎ $\dfrac{dW}{dx} = -\dfrac{a_1}{a_0} W \Rightarrow \quad W = ce^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}$, [c যদৃচ্ছ সমাকলন ধ্রুবক]

মন্তব্য ঃ 11.5.3 পরিচ্ছেদের সিদ্ধান্তটিকে n-তম ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের ক্ষেত্রে সম্প্রসারিত করা যায়। অর্থাৎ, যদি $y = y_1, y = y_2 \ldots\ldots y = y_n$, n-তম ক্রমের সুষম রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \text{ এর।}$$

n সংখ্যক সমাধান হয় তাহলে

$$W[y_1, y_2, \ldots\ldots y_n] = ce^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}$$

11·6 সাধারণ রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ (Non-Homogeneous Linear Differential Equations)

রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + P_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + P_n(x) y = \phi(x)$$

কে রৈখিক অন্তরকল প্রকারক

$$L(D) \equiv (D^n + P_1 D^{n-1} + \ldots\ldots + P_{n-1} D + P_n)$$

এর সাহায্যে $\quad L(D)\,y = \phi(x)$ ....(1)

আকারে লিখতে পারি। এর অনুসঙ্গী সুষম অন্তরকল সমীকরণটি হল

$$L(D)\,y = 0 \text{ ....(2)}$$

৪-ম এককের সিদ্ধান্তগুলি এখানে পুনরায় বলা হচ্ছে।

11·6·1 সিদ্ধান্ত

যদি $y = y_0(x)$ সমীকরণ (1) অর্থাৎ, $L(D)y = \phi(x)$ এর কোনও সমাধান হয় এবং $u(x)$ সমীকরণ (2) এর পূর্ণ সমাধান হয় তবে, $y = y_0(x) + u(x)$ হবে

$$L(D)\,y = \phi(x)$$

এই রৈখিক অন্তরকল্প সমীকরণটির সাধারণ সমাধান।

দ্রষ্টব্য : $L(D)\,y = \phi(x)$ সমীকরণের সাধারণ সমাধানের দুটি অংশ

(i) পূরক অপেক্ষক (Complementary function $\equiv$ C.F.) যেটি হল $L(D)\,y = 0$ সমীকরণটির সাধারণ সমাধান

এবং

(ii) বিশেষ সমাকল (Particular Integral $\equiv$ P.I) যেটি হচ্ছে $L(D)\,y = \phi(x)$ সমীকরণটির কোনও সমাধান—যাতে কোনও যদৃচ্ছ ধ্রুবক নেই।

উদাহরণ ঃ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x \text{ ....(i)}$$

এই সমীকরণটির একটি সমাধান $y = x$। আবার 11.5.2 উদাহরণ 2-এ আমরা দেখেছি যে এর অনুসঙ্গী সুষম সমীকরণ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ এর দুটি রৈখিকভাবে অনধীন সমাধান $y = \cos x$ এবং $y = \sin x$ আছে। অর্থাৎ, এর সাধারণ সমাধান $y = A\cos x + B\sin x$ ফলে সমীকরণ (1)-এর সাধারণ সমাধান হল $y = A\cos x + B\sin x + x$

11·7 ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ সমাধানের পদ্ধতি

আপনারা নবম এককে প্রথম ক্রমের অবকল সমীকরণের সমাধান পদ্ধতি জেনেছেন। এখানে আমরা দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক অবকল সমীকরণের (ধ্রুবক সহগ যুক্ত) সমাধান সম্বন্ধে আলোচনা করব। পরে 11.8 অনুচ্ছেদে n-ক্রমের সমীকরণের সমাধান সম্পর্কেও আলোচনা করব।

ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের আকার নিম্নরূপ

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P_1\frac{dy}{dx}+P_2y=\phi(x)\ \ldots\ldots\ldots\ (i)$$

$\frac{d}{dx}$ প্রকারকটির জন্য D প্রতীক ব্যবহার করে পাই

$$\left(D^2+P_1D+P_2\right)y=\phi(x) \qquad [\text{ এখানে } P_1 \text{ এবং } P_2 \text{ ধ্রুবক }]$$

$$\text{বা, } L(D)\,y=\phi(x) \qquad L(D)=D^2+P_1D+P_2$$

এর সমাধানের দুটি অংশ। একটি

(i) পূরক অপেক্ষক (Complementary function = C. F.) । এটি $L(D)\,y=0$ সমীকরণটির পূর্ণ সমাধান।

এবং অন্যটি

(ii) বিশেষ সমাকল (Particular Integral = P.I.)। এটি $L(D)y=\phi(x)$ সমীকরণের যদৃচ্ছ ধ্রুবক বর্জিত কোনও সমাধান।

11.7.1 পূরক অপেক্ষক নির্ণয়ের পদ্ধতি

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P_1\frac{dy}{dx}+P_2y=\phi(x)\ \ldots\ldots\ldots(1)$$

সমীকরণের পূরক অপেক্ষক হল (1) নং সমীকরণের অনুসঙ্গী সমীকরণ (সুষম সমীকরণ)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P_1\frac{dy}{dx}+P_2y=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

এর সাধারণ সমাধান। D প্রকারকটির সাহায্যে সমীকরণ (2) কে

$$L(D)y=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

আকারে লেখা যায়, যেখানে $L(D)=D^2+P_1D+P_2$

প্রথম ক্রমের সুষম রৈখিক সমীকরণ

$$\frac{dy}{dx}+ay=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

এর সমাধান হল $y=ce^{-ax}$ যেখানে, c যদৃচ্ছ ধ্রুবক। অর্থাৎ, সমীকরণ (4) এর সমাধান $y=e^{mx}$ আকারের। এর সদৃশরূপে আমরা সমীকরণ (3) এর $y=e^{mx}$ আকারের সমাধান পেতে চেষ্টা করি। ঐ সমীকরণে $y=e^{mx}$ বসিয়ে পাই।

$$L(m)e^{mx}=0$$

যেহেতু e^{mx} এর মান সর্বদা অশূন্য, $L(m)=0$ অর্থাৎ, $m^2+P_1m+P_2$ .... (5)

সমীকরণ (5) -কে বলা হয় সমীকরণ (3) এর সহায়ক সমীকরণ। ধরি m_1, m_2 হচ্ছে সমীকরণ (5) এর দুটি বীজ। তাহলে $y=e^{m_1x}$, $y=e^{m_2x}$ সমীকরণ (3) এর দুটি সমাধান। এদের

রন্‌স্কিয়ান হল

$$W\left[e^{m_1x}, e^{m_2x}\right]=\begin{vmatrix} e^{m_1x} & e^{m_2x} \\ m_1e^{m_1x} & m_2e^{m_2x} \end{vmatrix}=(m_2-m_1)e^{(m_1+m_2)x}$$

সমীকরণ (5) এর বীজদুটির প্রকৃতি অনুযায়ী নিচের তিনটি বিবেচ্য ক্ষেত্র পাই।

প্রথম ক্ষেত্র ঃ $m_1 \neq m_2$ এক্ষেত্রে রন্‌স্কিয়ানটি অশূন্য। ফলে e^{m_1x} এবং e^{m_2x} অপেক্ষক দুটি রৈখিকভাবে অনধীন। তাই (2) নং সমীকরণের সাধারণ সমাধান বা (1) নং সমীকরণের পূরক অপেক্ষক হচ্ছে $y_c=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}$

দ্বিতীয় ক্ষেত্র ঃ $m_1=m_2$ সমীকরণ (5) থেকে পাই

$$2m_1=-P_1$$

এবং এক্ষেত্রে, $y_1=e^{m_1x}$ সমীকরণ (5) এর একটি সমাধান। ধরি $y=y_2$ সমীকরণটির দ্বিতীয় অনধীন সমাধান। 11 5 3 থেকে পাই $W\left[e^{m_1x}, y_2\right]=e^{-\int \frac{P_1}{1}dx}=e^{-P_1x}=e^{2m_1x}$

অর্থাৎ, $e^{m_1x}y_2'-m_1y_2e^{m_1x}=e^{2m_1x}$

বা, $y_2'-m_1y_2=e^{m_1x}$

উপরের প্রথমক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের একটি বিশেষ সমাধান হচ্ছে $y_2=xe^{m_1x}$ ফলে $y=xe^{m_1x}$ সমীকরণ (2) এর দ্বিতীয় সমাধান। যেহেতু e^{m_1x} এবং xe^{m_1x} অপেক্ষক দুটি রৈখিকভাবে অনধীন, এক্ষেত্রে সমীকরণ (1) এর পূরক অপেক্ষক হবে $y_c=c_1e^{m_1x}+c_2xe^{m_1x}$

$$=e^{m_1x}\left[c_1+c_2x\right]$$

তৃতীয় ক্ষেত্র সহায়ক সমীকরণ (5) এর বীজগুলি জটিল রাশি। $\alpha+i\beta$ (α,β বাস্তব) একটি বীজ হলে, অন্য বীজটি হবে $\alpha-i\beta$ যেহেতু বীজদুটি স্বতন্ত্র, $y=e^{(\alpha+i\beta)x}$ এবং $y=e^{(\alpha-i\beta)x}$ সমাধান দুটি রৈখিকভাবে অনধীন সমাধান। অতএব, সাধারণ সমাধান

$$\begin{aligned} y &= Ae^{(\alpha+i\beta)x}+Be^{(\alpha-i\beta)x} \\ &= e^{\alpha x}\left(Ae^{i\beta x}+Be^{-i\beta x}\right) \\ &= e^{\alpha x}\left[(A+B)\cos\beta x+\beta i(A-B)\sin\beta x\right] \\ &= e^{\alpha x}\left[C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right] \end{aligned}$$

যেখানে, $c_1 = A + B$

$$c_2 = i(A - B)$$

[সহজেই দেখান যায় যে $y = e^{\alpha x}\cos\beta x$ এবং $y = e^{\alpha x}\sin\beta x$ দুটি অনধীন সমাধান।]

মন্তব্য ঃ 11.7.1 পরিচ্ছেদে বর্ণিত দ্বিতীয়ক্রমের রৈখিক ধ্রুবক সহগ যুক্ত অন্তরকল সমীকরণের পূরক অপেক্ষক নির্ণয়ের পদ্ধতিটি যে কোনও ক্রমের ধ্রুবক সহগ যুক্ত রৈখিক সমীকরণের ক্ষেত্রে সম্প্রসারিত করা যেতে পারে।

11.7.2 উদাহরণ

নিচের সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় করুন।

(i) $y'' + 4y' + 4y = 0$ (ii) $y'' + 4y = 0$

(iii) $y''' - y = 0$ (iv) $y'' - 2y' - 3y = 0$

সমাধান

(i) $y'' + 4y' + 4y = 0$ বা, $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

বা, $(D^2 + 4D + 4)y = 0$ যেখানে, $D = \dfrac{d}{dx}$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণটি হল $m^2 + 4m + 4 = 0$ বা, $(m+2)^2 = 0$

$\therefore$ এর বীজগুলি $m = -2, -2$

ফলে, প্রদত্ত সমীকরণটির সাধারণ সমাধান হবে

$$y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} = e^{-2x}(c_1 + c_2x)$$

(ii) $y'' + 4y = 0$ বা, $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$

বা, $(D^2 + 4)y = 0, \quad D = \dfrac{d}{dx}$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণটি হচ্ছে $m^2 + 4 = 0$

যার বীজদ্বয় $m = 2i, -2i$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণটির সাধারণ সমাধান হবে

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

(iii) $y''' - y = 0$ বা, $\frac{d^3y}{dx^3} - y = 0$

বা, $(D^3 - 1)y = 0, \quad D = \frac{d}{dx}$

বা, $(D-1)(D^2+D+1)\,y = 0$

এর সহায়ক সমীকরণটি হবে $(m-1)(m^2+m+1) = 0$

সহায়ক সমীকরণের বীজগুলি হচ্ছে $m = 1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের সাধারণ সমাধান হবে

$$y = c_1e^x + c_2e^{\frac{-1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

(iv) $y'' - 2y' - 3y = 0$

বা, $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$

বা, $(D^2 - 2D - 3)\,y = 0, \quad D = \frac{d}{dx}$

বা, $(D-3)(D+1)\,y = 0$

সহায়ক সমীকরণটি হচ্ছে, $(m-3)(m+1) = 0$

এর বীজদুটি হল $m = -1, 3$

অতএব, প্রদত্ত সমীকণের সাধারণ সমাধান হবে

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$$

11.8 n-তম ক্রমের ধ্রুবক সহগযুক্ত রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ

$$L(D)\,y = \phi(x)$$

এর বিশেষ সমাকল (Particular Integral P.I.) নির্ণয়ের পদ্ধতি।

এখানে $L(D) = D^n + P_1D^{n-1} + \ldots\ldots + P_{n-1}D + P_n$, এবং $P_1, P_2, \ldots\ldots P_n$ এগুলি ধ্রুবক।

11.8.1 সংজ্ঞা

$$L(D) = D^n + P_1D^{n-1} + P_2D^{n-2} + \ldots\ldots + P_{n-1}D + P_n$$

($P_1, P_2, \ldots. P_n$ ধ্রুবক) হলে

$$\frac{1}{L(D)}\phi(x)$$

হবে এমন একটি ফাংশন y যার জন্য

$$L(D)y = \phi(x)$$

সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

অর্থাৎ, $\frac{1}{L(D)}\phi(x)$ যদৃচ্ছ ধ্রুবক বর্জিত এমন একটি অপেক্ষক, যার উপর L (D) প্রকারকের ক্রিয়ার ফলে $\phi(x)$ অপেক্ষকটি পাওয়া যায়। অর্থাৎ, $L(D)\left\{\frac{1}{L(D)}\phi(x)\right\} = \phi(x)$

কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে $\frac{1}{L(D)}\phi(x)$ সহজেই নির্ণয় করা যায়। যেমন,

11.8.1.1 $L(D) = D$ হলে, অর্থাৎ সমীকরণটি প্রথমক্রমের হলে [$Dy = \phi(x)$]

$Dy = \phi(x) \Rightarrow dy = \phi(x)dx \Rightarrow y = \int\phi(x)dx$ অতএব, $y = \frac{1}{D}\phi(x) = \int\phi(x)dx$ (যদৃচ্ছ ধ্রুবক বর্জন করতে হবে)। এই ফলটির সম্প্রসারণ করে পাই

$$\frac{1}{D^2}\phi(x) = \int\left(\int\phi(x)dx\right)dx$$

11.8.1.2 $L(D) = D-\alpha$ এখন, $\frac{1}{D-\alpha}\phi(x) = y$ হলে $(D-\alpha)y = \phi(x)$ এটি একটি প্রথম ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ [অর্থাৎ সমীকরণটি $\frac{dy}{dx} - \alpha y = \phi(x)$] এবং এর সমাধান হল

$$y = e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}\phi(x)dx$$

অতএব, $\frac{1}{D-\alpha}\phi(x) = e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}\phi(x)dx \equiv e^{\alpha x}\frac{1}{D}e^{-\alpha x}\phi(x)$

উদাহরণ ঃ $\frac{1}{D-\alpha}e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}\frac{1}{D}e^{-\alpha x}e^{\alpha x}\sin\beta x$

$$= e^{\alpha x}\frac{1}{D}\sin\beta x$$

$$= e^{\alpha x}\int\sin\beta x\,dx$$

$$= -e^{\alpha x}\frac{\cos\beta x}{\beta}$$

11.8.1.3 L (D) প্রকারকটির গঠন জটিলতর হলে আমরা নিম্নলিখিত দুটি উপপাদ্যের সাহায্য গ্রহণ করব। (উপপাদ্য দুটির প্রমাণ বর্জিত হল)

উপপাদ্য 1. D প্রকারকটির সকল বহুপদী রাশিমালার সেট্

অর্থাৎ, $\{f(D) \mid f(D) = D^n + P_1 D^{n-1} + P_2 D^{n-2} + \ldots\ldots + P_{n-1} D + P_n I\}$ **একটি ভেক্টর দেশ** গঠন করে। (I অভেদ প্রকারক)

উপপাদ্য 2. f (D), g (D), D প্রকারকটির সাপেক্ষে দুটি বহুপদী রাশিমালা হলে **f (D) g (D) প্রকারকটি** নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞিত হয়

$$[f(D)\, g(D)]\, y = f(D)\, [g(D)\, y]$$

এবং, $f(D), g(D)$ বহুপদী রাশিমালা দুটির সহগগুলি **ধ্রুবক হলে এই গুণ** প্রক্রিয়াটি

(i) বিনিময় নিয়ম পালন করে। অর্থাৎ, $f(D)\, g(D) = g(D)\, f(D)$

(ii) $f(D), g(D), h(D)$ তিনটি বহুপদী রাশিমালা হলে

$$f(D)\,(g(D)\, h(D)) = (f(D)\, g(D))\, h(D)$$

(iii) $f(D)\,[g(D) + h(D)] = f(D)\, g(D) + f(D)\, h(D)$ এবং

$$[f(D) + g(D)]\, h(D) = f(D) h(D) + g(D)\, h(D)$$

D প্রকারকটির সাপেক্ষে বহুপদী রাশিমালাগুলির উপরে বর্ণিত ধর্মগুলির জন্য আমরা **সাধারণ-বহুপদী** রাশিমালার মত প্রকারক, বহুপদী রাশিমালাগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারি। **লক্ষ্যণীয় যে-D-I** প্রকারকটিকে লেখার সুবিধার জন্য আমরা D-1 রূপেও লিখতে পারি।

$$L(D) = D^n + P_1 D^{n-1} + P_2 D^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + P_{n-1} D + P_n I$$

এর পরিবর্তে আমরা

$$L(D) = D^n + P_1 D^{n-1} + P_2 D^{n-2} + \ldots\ldots + P_{n-1} D + P_n$$

লিখব।

$$D^2 - (\alpha + \beta)\, D + \alpha\beta \text{ প্রকারকটিকে আমরা}$$

$(D - \alpha)(D - \beta)$ অথবা, $(D - \beta)(D - \alpha)$ রূপে লিখতে পারি। [আসল রূপটি $(D - \beta I)(D - \alpha I)$]

11.8.1.4 বিপরীত প্রকারক $\dfrac{1}{(D-\alpha)(D-\beta)}$

$$\frac{1}{(D-\alpha)(D-\beta)}\, \phi(x) = y \text{ হলে}$$

$$y = \frac{1}{(D-\alpha)(D-\beta)} \phi(x)$$

$$= \frac{1}{D-\alpha} \cdot \frac{1}{D-\beta} \phi(x)$$

[কারণ 11.8.1.2 থেকে $\frac{1}{D-\beta} \phi(x) = e^{\beta x} \frac{1}{D} e^{-\beta x} \phi(x)$]

$$= \frac{1}{D-\alpha} e^{\beta x} \frac{1}{D} e^{-\beta x} \phi(x)$$

(11.8.1.1 থেকে)

$$= \frac{1}{D-\alpha} e^{\beta x} \int e^{-\beta x} \phi(x)\, dx$$

$$= e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} \left(e^{\beta x} \int e^{-\beta x} \phi(x)\, dx \right) dx$$

$$= e^{\alpha x} \int e^{(\beta-\alpha)x} \left(\int e^{-\beta x} \phi(x)\, dx \right) dx$$

উদাহরণ ঃ

$\frac{1}{D^2-1} \cos x$ এর মান নির্ণয় করুন

সমাধান $\quad \frac{1}{D^2-1} \cos x = \frac{1}{D-1} \frac{1}{D+1} \cos x = \frac{1}{D-1} e^{-x} \int e^{x} \cos x\, dx$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{D-1} e^{-x} . e^{x} [\cos x + \sin x]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{D-1} [\cos x + \sin x]$$

$$= \frac{1}{2} e^{x} \int e^{-x} (\cos x + \sin x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} e^{x} . e^{-x} \cos x$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ আংশিক ভগ্নাংশ ব্যবহার করে $\frac{1}{D^2-1}$ প্রকারকটিকে $\frac{1}{D^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{D-1} - \frac{1}{D+1}\right]$ রূপে লেখা যায় , অতএব

$$\frac{1}{D^2-1}\cos x=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{D-1}-\frac{1}{D+1}\right]\cos x$$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{1}{D-1}\cos x-\frac{1}{D+1}\cos x$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{x}\frac{1}{D}e^{-x}\cos x-e^{-x}\frac{1}{D}e^{x}\cos x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{x}\frac{1}{-2}e^{-x}(\cos x-\sin x)-\frac{e^{-x}}{2}e^{x}(\cos x+\sin x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\times 2\cos x\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x$$

মন্তব্য ঃ 11.8.1.4 পরিচ্ছেদে $\frac{1}{(D-\alpha)(D-\beta)}\phi(x)$ নির্ণয়ের যে সূত্র দেওয়া হয়েছে, সেটি প্রয়োগ করে $(D-\alpha)(D-\beta)y=\phi(x)$ আকারের দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের বিশেষ-সমাকল যে কোনও ফাংশন $\phi(x)$ এর জন্য তত্ত্বগতভাবে নির্ণয় করা সম্ভব। কিন্তু কার্যত মাত্র কয়েকটি $\phi(x)$ [**সূচক** অপেক্ষক, সাইন ও কোসাইন অপেক্ষক, বহুপদী রাশিমালা এবং এদের গুণফল] জন্য সমাকলন **করা যায়,** সমস্ত ক্ষেত্রে সম্ভব নয়।

11.9 বিশেষ সমাকল নির্ণয়ের সংক্ষিপ্ত-পদ্ধতি

(i) $\phi(x)=e^{ax}$

(ii) $\phi(x)=e^{ax}v(x)$, যেখানে $v(x)=\cos x, \sin x$ বা বহুপদী রাশিমালা

(iii) $\phi(x)=\sin mx$ বা $\cos mx$

(iv) $\phi(x)=x^m$ (m ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা)

(v) $\phi(x)=xv$, যেখানে $v(x)=\cos mx, \sin mx$, বা e^{mx}

এই কয়েকটি ক্ষেত্রে $L(D)y=\phi(x)$ সমীকরণের বিশেষ সমাকল নির্ণয়ের পদ্ধতি এবং সূত্র দেওয়া হচ্ছে।

11.9.1 $\phi(x) = e^{ax}$

বিশেষ সমাকল $= \dfrac{1}{L(D)} e^{ax}$ ....(1)

যেহেতু, $L(D) = D^n + P_1 D^{n-1} + \ldots\ldots + P_{n-1} D + P_n$

$$= \sum_{r=0}^{n} P_r D^{n-r}, \quad P_0 = 1, \text{ এবং } D^r e^{ax} = a^r e^{ax} \qquad r = 1, 2, \ldots\ldots n$$

$$L(D) e^{ax} = \sum_{r=0}^{n} P_r \; D^{n-r} e^{ax} = \left(\sum_{r=0}^{n} P_r \, a^{n-r} \right) e^{ax}$$

$$= L(a) e^{ax}, \quad L(a) = a^n + P_1 a^{n-1} + \ldots\ldots + P_n = \text{ধ্রুবক}$$

অর্থাৎ, $e^{ax} = \dfrac{1}{L(D)} L(D) e^{ax} = L(a) \dfrac{1}{L(D)} e^{ax}$

$$\Rightarrow \frac{1}{L(D)} e^{ax} = \frac{1}{L(a)} e^{ax}, \text{ (যখন } L(a) \neq 0 \text{)......(1)}$$

যদি L (D) তে (D-a) উৎপাদক থাকে অর্থাৎ, L (D) = (D-a) f(D) এই আকারের হয়, তবে L (a) = 0 হবে এবং উপরের পদ্ধতি কার্যকরী হবে না। সেই ক্ষেত্রে —

$$\frac{1}{L(D)} e^{ax} = \frac{1}{D-a} \frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{D-a} \frac{1}{f(a)} e^{ax} \quad \text{(যেখানে } f(a) \neq 0 \text{)}$$

$$= \frac{1}{f(a)} \frac{1}{D-a} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax} \int e^{-ax} . e^{ax} \, dx \;\; \text{(11.8.1.2 অনুসারে)}$$

$$= \frac{xe^{ax}}{f(a)}$$

যদি L (D) তে $(D-a)^2$ উৎপাদকটি থাকে, অর্থাৎ যদি $L(D) = (D-a)^2 f(D)$ হয়, (যখন f(D) তে (D – a) উৎপাদক নেই)

তখন, $\dfrac{1}{L(D)} e^{ax} = \dfrac{1}{(D-a)^2} \dfrac{1}{f(D)} e^{ax} = \dfrac{1}{f(a)} \dfrac{1}{(D-a)^2} e^{ax} \qquad (f(a) \neq 0)$

$$= \frac{1}{f(a)} \frac{1}{(D-a)} \frac{1}{(D-a)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} \frac{1}{D-a} xe^{ax}$$

$$= \frac{1}{f(a)} e^{ax} \int e^{-ax} \, x \, e^{ax} dx = \frac{1}{f(a)} e^{ax} \int dx = \frac{x^2 e^{ax}}{2f(a)}$$

অনুরূপ ভাবে—

$$L(D)=(D-a)^k f(D) \text{ হলে, } (k\leq n, f(a)\neq 0)$$

$$\frac{1}{L(D)}e^{ax}=\frac{1}{f(a)}\frac{1}{(D-a)^k}e^{ax}=\frac{x^k e^{ax}}{k!\,f(a)}$$

11.9.2 $\phi(x)=e^{ax}v(x)$; বিশেষ সমাকল $\frac{1}{L(D)}e^{ax}\,v(x)$

$$De^{ax}v(x)=\frac{d}{dx}e^{ax}v(x)=ae^{ax}v(x)+e^{ax}\frac{d}{dx}v(x)$$

$$=ae^{ax}v(x)+e^{ax}Dv(x)$$

$$=e^{ax}(D+a)\,v(x)$$

অতএব, $D^2e^{ax}v(x)=D\left[e^{ax}(D+a)\,v(x)\right]$

$$=D\left[e^{ax}v_1(x)\right] \quad \text{যেখানে, } v_1(x)=(D+a)\,v(x)$$

$$=e^{ax}(D+a)\,v_1(x)$$

$$=e^{ax}(D+a)^2\,v(x)$$

অনুরূপভাবে, $D^k e^{ax}v(x)=e^{ax}(D+a)^k\,v(x)$

যেহেতু, $L(D)=P_n+P_{n-1}D+P_{n-2}D^2+\ldots\ldots+P_1D^{n-1}+D^n$

$$=\sum_{k=0}^{n}P_{n-k}D^k, \qquad P_0=1$$

অতএব, $L(D)\,e^{ax}\,v_1(x)=\sum_{k=0}^{n}P_{n-k}\,D^k e^{ax}\,v_1(x)$ $\qquad v_1(x)$ যে কোনও ফাংশন

$$=\sum_{k=0}^{n}P_{n-k}\,e^{ax}\,(D+a)^k\,v_1(x)$$

$$=e^{ax}\left(\sum_{k=0}^{n}P_{n-k}\,(D+a)^k\right)v_1(x)$$

$$=e^{ax}\,L(D+a)\,v_1(x)\ldots\ldots..(1)$$

(1) সূত্রটি থেকে $v_1(x) = \frac{1}{L(D+a)} v(x)$ বসালে পাই

$$L(D)\left[e^{ax} \frac{1}{L(D+a)} v(x)\right] = L(D)\left[e^{ax} v_1(x)\right]$$

$$= e^{ax} L(D+a) v_1(x)$$

$$= e^{ax} L(D+a) \frac{1}{L(D+a)} v(x)$$

$$= e^{ax} v(x)$$

$$\Rightarrow e^{ax} \frac{1}{L(D+a)} v(x) = \frac{1}{L(D)} e^{ax} v(x)$$

অর্থাৎ $\frac{1}{L(D)} e^{ax} v(x) = e^{ax} \frac{1}{L(D+a)} v(x)$

11.9.3 উদাহরণ

সমাধান নির্ণয় করুন

(i) $(D^2 + 6D + 25)y = 104e^{3x}$

(ii) $(D^2 - 9)y = 54e^{3x}$

সমাধান (i) $(D^2 + 6D + 25)y = 104\, e^{3x}$

বা, $\left[(D+3)^2 + 4^2\right]y = 104\, e^{3x}$

বা, $(D+3+4i)(D+3-4i)\, y = 104\, e^{3x}$

পূরক অপেক্ষকটি $(D^2 + 6D + 25)y = 0$ সমীকরণটির পূর্ন সমাধান।

$\therefore$ পূরক অপেক্ষক $y_C \equiv e^{-3x}[A \cos 4x + B \sin 4x]$

বিশেষ সমাকল $= y_p = \frac{1}{D^2 + 6D + 25} 104\, e^{3x}$

$$= 104 \frac{1}{3^2 + 6 \cdot 3 + 25} e^{3x}$$

$$= 2e^{3x}$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান $y = e^{-3x}[A \cos 4x + B \sin 4x] + 2e^{3x}$

(ii) $(D^2-9)y = 54e^{3x}$

বা, $(D-3)(D+3)y = 54e^{3x}$

অতএব, পূরক-অপেক্ষক $y_C = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$

এবং বিশেষ সমাকল $= y_p = \dfrac{1}{(D-3)} \cdot \dfrac{1}{(D+3)} 54e^{3x}$

$$= 54 \cdot \frac{1}{D-3} \cdot \frac{1}{6} e^{3x}$$

$$= 9 \frac{1}{D-3} e^{3x}.1 = 9.\, e^{3x} \frac{1}{D}.1 = 9xe^{3x}$$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণটির সাধারণ সমাধান

$$y = y_C + y_p = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} + 9xe^{3x}$$

11.9.4 $\qquad L(D) = M(D^2), \quad \phi(x) = \sin mx$

বিশেষ সমাকল $= \dfrac{1}{L(D)} \sin mx = \dfrac{1}{M(D^2)} \sin mx$

যেহেতু $D^2 (\sin mx) = -m^2 \sin mx$

$$D^4 (\sin mx) = (-m^2)^2 \sin mx$$

....

অতএব

$$M(D^2) \sin mx = \left[p_0D^{2n} + p_1D^{2n-2} + \ldots.. + p_{n-1}D^2 + P_n\right] \sin mx$$

$$= \left[p_0 (-m^2)^n + p_1(-m^2)^{n-1} + \ldots\ldots + p_{n-1}(-m^2) + p_n\right] \sin mx$$

$$= M(-m^2) \sin mx$$

$$\Rightarrow \sin mx = \frac{1}{M(D^2)} M(-m^2) \sin mx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{M(D^2)} \sin mx = \frac{1}{M(-m^2)} \sin mx \qquad [\text{ যদি } M(-m^2) \neq 0 \text{ }]$$

উদাহরণ

সমাধান নির্ণয় করুন।

(i) $(D+1)\,y = 10 \sin 2x$ $\qquad$ (ii) $(D^2 - 5D + 6)y = 100 \sin 4x$

সমাধান

(i) $(D+1)\,y = 10\sin 2x$

পূরক অপেক্ষক $y_C = c_1 e^{-x}$

বিশেষ সমাকল $= y_p = \dfrac{1}{D+1}\,10\sin 2x$

$$= \frac{1}{D^2-1}(D-1)\,10\sin 2x$$

$$= \frac{1}{-2^2-1}\,10\,(D-1)\sin 2x$$

$$= -2\left[2\cos 2x - \sin 2x\right]$$

$$= 2\sin 2x - 4\cos 2x$$

অতএব, সাধারণ সমাধান $y = y_C + y_p = c_1 e^{-x} + 2\sin 2x - 4\cos 2x$

(ii) $\left(D^2 - 5D + 6\right) y = 100\sin 4x$

বিশেষ সমাকল $y_p = \dfrac{1}{D^2-5D+6}\,100\sin 4x$

$$= 100 \times \frac{\left(D^2+6+5D\right)\sin 4x}{\left[\left(D^2+6\right)-5D\right]\left[D^2+6+5D\right]}$$

$$= 100 \times \left(D^2+6+5D\right) \times \frac{1}{\left(D^2+6\right)^2 - 25D^2}\sin 4x$$

$$= 100 \times \left(D^2+6+5D\right) \times \frac{1}{(-16+6)^2 - 25(-16)}\sin 4x$$

$$= \frac{1}{5}\left(D^2+5D+6\right)\sin 4x$$

$$= \frac{1}{5}(-10\sin 4x + 20\cos 4x)$$

$$= 4\cos 4x - 2\sin 4x$$

পূরক অপেক্ষক y_C, $(D^2-5D+6)y=0$ সমীকরণটির সমাধান। আবার, $(D^2-5D+6)y=0$ সমীকরণের সহায়ক সমীকরণ হল $m^2-5m+6=0$, এর বীজ দুটি হল $m_1=2,\ m_2=3$

$$\therefore\ y_C = c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$$

অতএব, সাধারণ সমাধান $y=y_c+y_p$

$$= c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+4\cos 4x-2\sin 4x$$

11.9.5 $\phi(x)=x\,v(x)$

অন্তরকলন করে পাই,
$$D(xv)=xDv+v$$
$$D^2(xv)=xD^2v+2Dv$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D^n(xv)=xD^nv+nD^{n-1}v$$
$$=xD^nv+\left(\frac{d}{dD}D^n\right)v$$

অতএব, $L(D)\,xv=xL(D)v+L'(D)v$.......... (1)

উপরের সূত্রে $L(D)\,v=v_1$ বসিয়ে পাই $v=\frac{1}{L(D)}v_1$

এখন সূত্র (1) এর উভয় পক্ষে v-এর এই মানটি বসিয়ে পাই

$$L(D)\,x\frac{1}{L(D)}v_1=xv_1+L'(D)\frac{1}{L(D)}v_1$$

উভয় পক্ষে $\frac{1}{L(D)}$ প্রকারকটি প্রয়োগ করে পাই

$$x\frac{1}{L(D)}v_1=\frac{1}{L(D)}(xv_1)+\frac{1}{L(D)}L'(D)\frac{1}{L(D)}v_1$$

পক্ষান্তর করে পাই

$$\frac{1}{L(D)}(xv_1)=x\frac{1}{L(D)}v_1-\frac{1}{L(D)}L'(D)\frac{1}{L(D)}v_1$$
$$=\left[x-\frac{1}{L(D)}L'(D)\right]\frac{1}{L(D)}v_1$$

উদাহরণ

(i) $(D-1)y = xe^{2x}$ এবং (ii) $(D+1)y = x^2 \cos x$

সমীকরণ দুটির বিশেষ সমাকল নির্ণয় করুন।

সমাধান

(i) বিশেষ সমাকল $= \dfrac{1}{D-1} xe^{2x}$

$$= \left[x - \frac{1}{D-1}.1\right]\frac{1}{D-1} e^{2x}$$

$$= \left[x - \frac{1}{D-1}\right]e^{2x}$$

$$= \left[xe^{2x} - \frac{1}{D-1} e^{2x}\right] = xe^{2x} - e^{2x} = (x-1)\, e^{2x}$$

(ii) বিশেষ সমাকল

$$= \frac{1}{D+1} x^2 \cos x$$

$$= \frac{1}{D+1} x\,(x \cos x) = \left[x - \frac{1}{D+1} 1\right]\frac{1}{D+1} x \cos x$$

$$= \left[x - \frac{1}{D+1}\right]\left[x - \frac{1}{D+1}\right]\frac{1}{D+1} \cos x$$

$$= \left[x - \frac{1}{D+1}\right]\left[x - \frac{1}{D+1}\right]\frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{D+1}\right]\left[x\,(\cos x + \sin x) - \frac{1}{D+1}(\cos x + \sin x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{D+1}\right]\left[x\,(\cos x + \sin x) - e^{-x} \int e^{x}\,(\cos x + \sin x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{D+1}\right]\left[x\,(\cos x + \sin x) - \sin x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2\,(\cos x + \sin x) - x \sin x + \frac{1}{D+1} \sin x - \frac{1}{D+1} x\,(\cos x + \sin x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2(\cos x + \sin x) - x \sin x\right]$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{D+1}\sin x - \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{D+1}\quad 1\right]\frac{1}{D+1}(\cos x + \sin x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2(\cos x + \sin x) - x \sin x\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{D+1}\sin x$$

$$-\frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{D+1}\right]\sin x$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2(\cos x + \sin x) - 2x \sin x\right] + \frac{1}{D+1}\sin x$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2(\cos x + \sin x) - 2x \sin x\right] - \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos x.\left(x^2 - 1\right) + \sin x.\left(x^2 - 2x + 1\right)\right]$$

11.9.6 উদাহরণ

$(D^2 - 1)\,y = x^3$ সমীকরণটির বিশেষ সমাকল নির্ণয় করুন।

উত্তর ঃ $(D^2 - 1)\,y = x^3$ সমীকরণটির বিশেষ সমাকল

$$= \frac{1}{D^2 - 1}x^3$$

$$= \frac{1}{D^2 - 1}x.\,x^2$$

$$= \left[x - \frac{1}{D^2 - 1}\cdot 2D\right]\frac{1}{D^2 - 1}x^2$$

$$= \left[x - \frac{1}{D^2 - 1}.\,2D\right]\frac{1}{D^2 - 1}x.x$$

$$= \left[x - \frac{1}{D^2 - 1}.2D\right]\left[x - \frac{1}{D^2 - 1}2D\right]\frac{1}{D^2 - 1}x\ 1$$

$$= \left[x - \frac{1}{D^2 - 1}.2D\right]\left[x - \frac{1}{D^2 - 1}2D\right]\left[x - \frac{1}{D^2 - 1}2D\right]\frac{1}{D^2 - 1}.1$$

$$= \left[x - \frac{1}{D^2 - 1}.2D\right]\left[x - \frac{1}{D^2 - 1}2D\right]\left[x - \frac{1}{D^2 - 1}2D\right]\frac{1}{D^2 - 1}e^{0.x}$$

$$= -1\left[x - \frac{1}{D^2-1}.2D\right]\left[x - \frac{1}{D^2-1}2D\right]\left[x - \frac{1}{D^2-1}2D\right].1$$

$$= -\left[x - \frac{1}{D^2-1}.2D\right]\left[x - \frac{1}{D^2-1}2D\right]\left[x - 0\right]$$

$$= -\left[x - \frac{1}{D^2-1}.2D\right]\left[x^2 - \frac{1}{D^2-1}2D\,(x)\right]$$

$$= -\left[x - \frac{1}{D^2-1}2D\right]\left[x^2 - 2.\frac{1}{D^2-1}1\right]$$

$$= -\left[x - \frac{1}{D^2-1}2D\right]\left[x^2 + 2\right]$$

$$= -\left[x\left(x^2+2\right) - \frac{1}{D^2-1}4x\right]$$

$$= -x\left(x^2+2\right) + 4\frac{1}{D^2-1}x.1$$

$$= -x\left(x^2+2\right) + 4\left[x - \frac{1}{D^2-1}2D\right]\frac{1}{D^2-1}.1$$

$$= -x\left(x^2+2\right) + 4\left[x - \frac{1}{D^2+1}.2D\right](-1)$$

$$= -x\left(x^2+2\right) - 4x + 0$$

$$= -x\left(x^2+6\right)$$

$$= -\left(x^3+6x\right)$$

মন্তব্য ঃ $\frac{1}{D^2-1}$ **বিপরীত প্রকারকটিকে দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে D এর ঘাতের উর্দ্ধক্রম অনুসারে সাজিয়ে পাই**

$$\frac{1}{D^2-1} = -\frac{1}{1-D^2} = -1\left(1-D^2\right)^{-1} = -1\left(1+D^2+D^4+\ldots\ldots\ldots\right)$$

ফলে, $$\frac{1}{D^2-1}x^3 = -\left[1+D^2+D^4+\ldots\ldots\right]x^3 = -\left[x^3+6x\right]$$

উদাহরণে প্রাপ্ত মানটি এবং এই মানটি অভিন্ন।

ফলে, $\frac{1}{L(D)}x^m$ (m ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা) আকারের বিশেষ সমাকল নির্ণয়ের পদ্ধতি পাওয়া গেল।

11.9.7 $\phi(x) = x^m$ (m ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা)

$L(D)y = x^m$ সমীকরণটির

$$\text{বিশেষ সমাকল} = \frac{1}{L(D)}x^m$$

$$= \left(a_0 + a_1 D + \ldots\ldots + a_m D^m\right) x^m$$

যেখানে, $a_0 + a_1 D + \ldots\ldots + a_m D^m$ হল $\frac{1}{L(D)}$ প্রকারকটির দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে D-এর ঘাতের উর্দ্ধক্রম অনুসারে বিস্তৃতির $(m + 1)$ সংখ্যক পদ।

11.9.7.1 উদাহরণ। $(D^2 - D - 2)y = 44 - 76x - 48x^2$ সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করুন।

উত্তর ঃ পূরক অপেক্ষক $(D^2 - D - 2)y = 0$ সমীকরণটির পূর্ণ সমাধান

সহায়ক সমীকরণ $m^2 - m - 2 = 0$

বা, $(m-2)(m+1) = 0$

অতএব, পূরক অপেক্ষক $y_C = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$

$$\text{বিশেষ সমাকল} = \frac{1}{D^2 - D - 2}\left(44 - 76x - 48x^2\right)$$

$$= \frac{1}{-2\left(1 - \frac{D^2 - D}{2}\right)}\left(44 - 76x - 48x^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[1 - \frac{D^2 - D}{2}\right]^{-1}\left(44 - 76x - 48x^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{D^2 - D}{2} + \frac{\left(D^2 - D\right)^2}{4} + \cdots\right]\left[44 - 76x - 48x^2\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[1 - \frac{D}{2} + \frac{3}{4}D^2 + \cdots\right]\left[44 - 76x - 48x^2\right]$$

$$= -\frac{1}{2}[44 - 76x - 48x^2 + 38 + 48x - 72]$$

$$= -\frac{1}{2}[10 - 28x - 48x^2]$$

$$= 24x^2 + 14x - 5$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান $= y_c + y_p = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + 24x^2 + 14x - 5$

11.10 ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট রৈখিক সহ অন্তরকল সমীকরণ সমূহ। (Simultaneous Linear Differential Equations with Constant Coefficients)

এই পরিচ্ছেদে একটি স্বাধীন চলের দুই বা ততোধিক ফাংশন এবং এদের অন্তরকলজগুলির দ্বারা প্রকাশিত রৈখিক অন্তরকল সমীকরণগুলির সমাধানের পদ্ধতি আলোচিত হবে। একটি উদাহরণের সাহায্যে পদ্ধতিটি বর্ণিত হচ্ছে।

উদাহরণ ঃ ধরি, y এবং z চল দুটি স্বাধীন চল x এর ফাংশন; এবং $D = \frac{d}{dx}$ ।

নিচের সমীকরণ দুটি পরীক্ষা করুন।

$$\frac{dy}{dx} + 2y - 3z = x$$

$$\frac{dz}{dx} + 2z - 3y = e^x$$

এখানে দুটি প্রথমক্রমের সমীকরণ আছে। সুতরাং, সাধারণ সমাধানে সর্বমোট দুটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক থাকবে।

$D = \frac{d}{dx}$ বসিয়ে সমীকরণ দুটিকে নিচের আকারে লেখা যায়

$$(D+2)y - 3z = x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$-3y + (D+2)z = e^x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

এখন (1) ও (2) থেকে z-কে অপনয়ন করা হবে

সমীকরণ (1) থেকে পাই $z = \frac{1}{3}[(D+2)y - x]$

z এর এই মান সমীকরণ (2)-এ বসিয়ে পাই

$$-3y + \frac{1}{3}(D+2)[(D+2)y - x] = e^x$$

বা, $-9y+(D+2)^2y-(D+2)x=3e^x$

বা, $(D+2)^2y-9y=3e^x+(D+2)x$

$$=3e^x+2x+1$$

বা, $[D^2+4D-5]y=3e^x+(2x+1)$ ....(3)

এখন উপরের সমীকরণ (3) একটি দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ। এর সাধারণ সমাধানের দুটি অংশ। পূরক অপেক্ষক এবং বিশেষ সমাকল। পূরক অপেক্ষকটি $(D^2+4D-5)y=0$ সমীকরণটির পূর্ণসমাধান।

যেহেতু $(D^2+4D-5)y=(D+5)(D-1)$

পূরক অপেক্ষক $y_C=c_1e^{-5x}+c_2e^x$

বিশেষ সমাকল $=\dfrac{1}{(D+1)(D+5)}\left[3e^x+(2x+1)\right]$

$$=\frac{1}{(D-1)}\cdot\frac{1}{(D+5)}3e^x+\frac{1}{D^2+4D-5}(2x+1)$$

$$=\frac{3}{D-1}\cdot\frac{1}{6}e^x+\frac{1}{-5\left[1-\frac{D^2+4D}{5}\right]}(2x+1)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{D-1}e^x1-\frac{1}{5}\left[1-\frac{D^2+4D}{5}\right](2x+1)$$

$$=\frac{1}{2}e^x.\frac{1}{D}.1-\frac{1}{5}\left[1+\frac{1}{5}(D^2+4D)\right](2x+1)$$

$$=\frac{1}{2}xe^x-\frac{1}{5}\left[1+\frac{4}{5}D\right](2x+1)$$

$$=\frac{1}{2}xe^x-\frac{1}{5}\left[2x+1+\frac{4}{5}.2\right]$$

$$=\frac{1}{2}xe^x-\frac{1}{5}\left[2x+\frac{13}{5}\right]$$

$\therefore\ y=c_1e^{-5x}+c_2e^x+\dfrac{1}{2}xe^x-\dfrac{2}{5}x-\dfrac{13}{25}$ .... (4)

আবার y এর এই মান সমীকরণ (1) এ বসিয়ে পাই

$$(D+2)\left\{c_1e^{-5x}+c_2e^x+\frac{1}{2}xe^x-\frac{2}{5}x-\frac{13}{25}\right\}-3z=x$$

বা $c_1e^{-5x}(-5+2)+c_2e^{x}(1+2)+\frac{1}{2}e^{x}(D+3)x-\frac{2}{5}(1+2x)-\frac{13}{25}(0+2)-3z=x$

বা $-3c_1e^{-5x}+3c_2e^{x}+\frac{1}{2}(1+3x)\,e^{x}-\frac{2}{5}-\frac{4}{5}x-\frac{26}{25}-3z=x$

বা $-3c_1e^{-5x}+3c_2e\ \ +\frac{1}{2}(1+3x)\,e^{x}-\frac{9}{5}x-\frac{36}{25}=3z$

বা $z=-c_1e^{-5x}+c_2e^{x}+\frac{1}{6}(1+3x)\,e^{x}-\frac{3}{5}x-\frac{12}{25}$ .... (5)

অতএব সমীকরণ (4) ও (5) হল সাধারণ সমাধান।

উদাহরণ 2 :

$$\frac{dx}{dt}=y$$

$$\frac{dy}{dt}=-x$$

সমীকরণ দ্বয়ের সমাধান নির্ণয় করুন।

উত্তর। $\frac{dx}{dt}=y$ সমীকরণের উভয়পার্শ্বে অন্তরকলন করে পাই

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}=-x$$

অতএব $\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$

অর্থাৎ $x=A\cos t+B\sin t$, ফলে

$$y=\frac{dx}{dt}=B\cos t-A\sin t$$

11.11 দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণাবলী

নিচের সমীকরণগুলি সমাধান করুন।

(i) $(D^2-9)y=e^{3x}\cos x$ (ii) $(D^2+2D+401)y=\sin 20x+40\cos 20x$

(iii) $(D^2+4)\,y=\sin 2x$ (iv) $\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y=e^{-2x}\sin 2x$

(v) $(D^2-4D+4)y=8x^2\,e^{2x}\sin 2x$ (vi) $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=e^{e^{x}}$

(vii) সহ সমীকরণগুলি সমাধান করুন $\frac{dx}{dt} = 2y$; $\frac{dy}{dt} = 2z$, $\frac{dz}{dt} = 2x$

সমাধান

(i) $(D^2 - 9)y = e^{3x} \cos x$

$\Rightarrow \quad (D-3)(D+3)\, y = e^{3x} \cos x$

$\Rightarrow$ পূরক অপেক্ষক $y_c = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$

বিশেষ সমাকল $= \; y_p = \dfrac{1}{(D-3)(D+3)} e^{3x} \cos x$

$= e^{3x} \dfrac{1}{(D+3-3)(D+3+3)} \cos x$ [11.9.2 পরিচ্ছেদ দেখুন]

$= e^{3x} \dfrac{1}{D(D+6)} \cos x$

$= e^{3x} \dfrac{1}{(D+6)} \dfrac{1}{D} \cos x$

$= e^{3x} \dfrac{1}{D+6} \sin x$

$= e^{3x} . (D-6) \dfrac{1}{D^2 - 36} \sin x$ [11.9.4 পরিচ্ছেদ দেখুন]

$= e^{3x} . (D-6) \dfrac{1}{-37} \sin x$

$= -\dfrac{e^{3x}}{37} [\cos x - 6 \sin x]$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} - \dfrac{e^{3x}}{37} \; [\cos x - 6 \sin x]$

(ii) $(D^2 + 2D + 401)y = \sin 20x + 40 \cos 20x$

পূরক অপেক্ষক y_C, $(D^2 + 2D + 401)y = 0$ সমীকরণের পূর্ণ সমাধান।

$(D^2 + 2D + 401)\,y = 0$ সমীকরণের সহায়ক সমীকরণ।

$m^2 + 2m + 401 = 0$

বা, $(m+1)^2 = 400\, i^2$

বা, $m = -1 \pm 20\, i$

$\therefore y_C = e^{-x} [A \cos 20x + B \sin 20x]$

এবার দেখান যে, বিশেষ সমাকল $y_p = \sin 20x$

(iii) $(D^2+4)y = \sin 2x$

বা, $(D+2i)(D-2i)\,y = \sin 2x$

$\therefore$ পূরক অপেক্ষক $y_C = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

বিশেষ সমাকল $= \dfrac{1}{D^2+4} \sin 2x$ [এখানে D^2 এর পরিবর্তে -2^2 বসালে হর শূন্য হয়ে যাচ্ছে]

$$= \frac{1}{D^2+4}\, \frac{1}{2i}\left[e^{2ix} - e^{-2ix}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{D^2+4} e^{2ix} - \frac{1}{D^2+4} e^{-2ix}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{D-2i}\,\frac{1}{D+2i} e^{2ix} - \frac{1}{D+2i}\,\frac{1}{D-2i} e^{-2ix}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{D-2i}\,\frac{1}{4i} e^{2ix} - \frac{1}{D+2i}\,\frac{1}{-4i} e^{-2ix}\right]$$

$$= -\frac{1}{8}\left[\frac{1}{D-2i} e^{2ix}.1 + \frac{1}{D+2i} e^{-2ix}\right]$$

$$= -\frac{1}{8}\left[e^{2ix}\,\frac{1}{D}.1 + e^{-2ix}\,\frac{1}{D}.1\right]$$

$$= -\frac{1}{8}\,x\left[e^{2ix} + e^{-2ix}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\,x \cos 2x$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \dfrac{1}{4} x \cos 2x$

(iv) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = e^{-2x} \sin 2x$

বা $(D^2+5D+6)\,y = e^{-2x} \sin 2x$

বা $(D+2)(D+3)\,y = e^{-2x} \sin 2x$

পূরক অপেক্ষক $y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$

বিশেষ সমাকল $= y_p = \dfrac{1}{(D+3)(D+2)} e^{-2x} \sin 2x$

$$= e^{-2x} \frac{1}{(D-2+3)(D-2+2)} \sin 2x$$

$$= e^{-2x} \frac{1}{D+1} \cdot \frac{1}{D} \sin 2x$$

$$= e^{-2x} \frac{1}{D+1} \frac{\cos 2x}{-2}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2x} \frac{1}{D+1} \cos 2x$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2x} (D-1) \frac{1}{D^2-1} \cos 2x$$

$$= \frac{1}{10} e^{-2x} [D \cos 2x - \cos 2x] = -\frac{1}{10} e^{-2x}$$

$$[\cos 2x + 2\sin 2x]$$

সাধারণ সমাধান $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{10} e^{-2x} \quad [\cos 2x + 2 \sin 2x]$

(v) $(D^2 - 4D + 4) y = 8x^2 e^{2x} \sin 2x$

বা $(D-2)^2 y = 8x^2 e^{2x} \sin 2x$

পূরক অপেক্ষক $y_C = e^{2x} [c_1 + c_2 x]$

বিশেষ সমাকল $y_p = 8 \frac{1}{(D-2)^2} x^2 e^{2x} \sin 2x$

$$= 8 \times \frac{1}{D-2} \cdot \frac{1}{D-2} e^{2x} x^2 \sin 2x$$

$$= 8 \times \frac{1}{D-2} e^{2x} \cdot \frac{1}{D} (x^2 \sin 2x)$$

$$= 8 \times \frac{1}{D-2} e^{2x} \cdot \left[-\frac{1}{2} x^2 \cos 2x - 2x \left(\frac{\sin 2x}{-4} \right) + 2 \frac{\cos 2x}{8} \right]$$

$$= 8 \times \frac{1}{D-2} e^{2x} \cdot \left[-\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \right]$$

$$= -4\frac{1}{D-2}e^{2x}x^2 \operatorname{Cos} 2x + 4\times\frac{1}{D-2}e^{2x}x\sin 2x + 2\times\frac{1}{D-2}e^{2x}\cos 2x$$

$$= -4e^{2x}\frac{1}{D}x^2\cos 2x + 4e^{2x}\frac{1}{D}x\sin 2x + 2e^{2x}\frac{1}{D}\cos 2x$$

$$= -4e^{2x}\left[x^2\frac{\sin 2x}{2} - 2x\left(\frac{-\cos 2x}{4}\right) + 2.1\left(\frac{-\sin 2x}{8}\right)\right]$$

$$+ 4e^{2x}\left[-x\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right] + e^{2x}\sin 2x$$

$$= e^{2x}\sin 2x\left(-2x^2+3\right) + e^{2x}\cos 2x\left(-4x\right)$$

$$= e^{2x}\sin 2x\left(3-2x^2\right) - 4e^{2x}x\cos 2x$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান $y = e^{2x}\left[c_1 + c_2x\right] + e^{2x}\sin 2x\left(3-2x^2\right) - 4xe^{2x}\cos 2x$

বিশেষ-সমাকল নির্ণয়ের বিকল্প পদ্ধতি।

$$y_p = 8\times\frac{1}{(D-2)^2}x^2e^{2x}\sin 2x = 8e^{2x}\frac{1}{(D-2+2)^2}x^2\sin 2x$$

$$= 8e^{2x}\frac{1}{D^2}x^2\sin 2x$$

$$= 8e^{2x}\left[x - \frac{1}{D^2}.2D\right]\left[x - \frac{1}{D^2}.2D\right]\frac{1}{D^2}\sin 2x$$

$$= 8e^{2x}\left[x - \frac{1}{D^2}.2D\right]\left[x - \frac{1}{D^2}.2D\right]\frac{\sin 2x}{-4}$$

$$= -2e^{2x}\left[x - \frac{1}{D^2}.2D\right]\left[x\sin 2x - \frac{1}{D^2}4\cos 2x\right]$$

$$= -2e^{2x}\left[x - \frac{1}{D^2}.2D\right]\left[x\sin 2x + \cos 2x\right]$$

$$= -2e^{2x}\left[x^2 \sin 2x + x\cos 2x - \frac{1}{D^2}.2D(x\sin 2x) - \sin 2x\right]$$

$$= -2e^{2x}\left[x^2 \sin 2x + x\cos 2x - \sin 2x\right] + 4e^{2x}\frac{1}{D}(x\sin 2x)$$

$$= -2e^{2x}\left[x^2 \sin 2x + x\cos 2x - \sin 2x\right] + 4e^{2x}\left[x - \frac{1}{D}.1\right]\frac{1}{D}\sin 2x$$

$$= -2e^{2x}\left[x^2 \sin 2x + x\cos 2x - \sin 2x\right] + 4e^{2x}\left[-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{\sin 2x}{4}\right]$$

$$= e^{2x}\left[\left(3-2x^2\right)\sin 2x - 4x\cos 2x\right]$$

(vi) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{e^x}$

$\dfrac{d}{dx}$ এর পরিবর্তে D বসিয়ে পাই

$\left(D^2 + 3D + 2\right)y = e^{e^x}$

পূরক অপেক্ষক নির্ণয়ের জন্য সহায়ক-সমীকরণটি হল

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

এই দ্বীঘাত সমীকরণের বীজ দুটি হল $m = -1, -2$

অতএব পূরক-অপেক্ষক $y_C = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$

বিশেষ সমাকল $y_p = \dfrac{1}{D^2 + 3d + 2}e^{e^x}$

$$= \frac{1}{(D+1)(D+2)}e^{e^x}$$

$$= \frac{1}{D+1}.\frac{1}{D+2}e^{e^x}$$

$$= \frac{1}{D+1}e^{-2x}\int e^{2x}e^{e^x}\,dx$$

$$= \frac{1}{D+1}e^{-2x}\int e^z z\,dz, \qquad z = e^x$$

$$= \frac{1}{D+1}e^{-2x}\left(e^x - 1\right)e^{e^x}$$

$$= e^{-x}\frac{1}{D}e^{-x}\left(e^{x}-1\right)e^{e^{x}}$$

$$= e^{-x}\int e^{-x}\left(e^{x}-1\right)e^{e^{x}}\,dx$$

$$= e^{-x}\int \frac{1}{z}(z-1)\frac{dz}{z}e^{z} \qquad\qquad z = e$$

$$= e^{-x}\int e^{z}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^{2}}\right)dz$$

$$= e^{-x}\,e^{z}\,\frac{1}{z}$$

$$= e^{-x}\,e^{e^{x}}.\frac{1}{e^{x}} = e^{-2x}.e^{e^{x}}$$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + e^{-2x}.\,e^{\left(e^{x}\right)}$

(vii) $\dfrac{dx}{dt} = 2y\,,\ \dfrac{dy}{dt} = 2z\,,\ \dfrac{dz}{dt} = 2x$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dy}{dt} = 4z$$

$$\Rightarrow \frac{d^3x}{dt^3} = 4\frac{dz}{dt} = 8x$$

$$\Rightarrow D^3x - 8x = 0, \qquad\qquad D = \frac{d}{dt}$$

বা, $\left(D^3 - 8\right)x = 0$

বা, $(D-2)\left(D^2+2D+4\right)x = 0$

বা, $(D-2)\left[(D+1)^2+3\right]x = 0$

$$\Rightarrow x = Ae^{2t} + e^{-t}\left[B_1\cos\sqrt{3}\,t + C_1\sin\sqrt{3}\,t\right]$$

$= Ae^{2t} + Be^{-t}\left[\cos\left(\sqrt{3}\,t-\alpha\right)\right]$, ($B_1 = B\cos\alpha$ এবং

$C_1 = B\sin\alpha$ বসিয়ে)

অতএব, $y = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}$

$$= \frac{1}{2}.2\,Ae^{2t} + \frac{B}{2}.e^{-t}(D-1)\cos\left(\sqrt{3}t-\alpha\right), D = \frac{d}{dt}$$

$$= Ae^{2t} + Be^{-t}\left[-\frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{3}t-\alpha\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\sqrt{3}t-\alpha\right)\right]$$

$$= Ae^{2t} + Be^{-t}\left[\cos\frac{2\pi}{3}\cos\left(\sqrt{3}t-\alpha\right) - \sin\frac{2\pi}{3}\sin\left(\sqrt{3}t-\alpha\right)\right]$$

$$= Ae^{2t} + Be^{-t}\left[\cos\left(\sqrt{3}t-\alpha\right) + \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$= Ae^{2t} + Be^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t-\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$$

এবং $z = \frac{1}{2}\frac{dy}{dt}$

$$= Ae^{2t} + \frac{1}{2}Be^{-t}(D-1)\cos\left(\sqrt{3}t-\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= Ae^{2t} + Be^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t-\alpha+4\frac{\pi}{3}\right)$$

11.12 সারাংশ

n-তম ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}\; P_n(x)y = \phi(x) \ldots\ldots\ldots(1)$$

এর সাধারণ সমাধান $y = y_c + y_p$

যেখানে y_c হচ্ছে

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = 0 \ldots\ldots\ldots(2)$$

এই সুষম রৈখিক অন্তরকল সমীকরণটির পূর্ণ সমাধান এবং y_p সমীকরণ (1) এর একটি বিশেষ সমাধান। y_c কে বলা হয় পূরক-অপেক্ষক এবং y_p হল বিশেষ-সমাকল।

সমীকরণ (2) এর সমাধান সেট্‌টি একটি n-মাত্রার ভেক্টর-দেশ। $y = y_1, y = y_2, \ldots, y = y_n$ এগুলি সমীকরণ (2) এর n সংখ্যক রৈখিকভাবে অনধীন সমাধান হলে,

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots\ldots\ldots + c_ny_n$$

(যেখানে $c_1, c_2, \ldots\ldots c_n$ যদৃচ্ছ ধ্রুবক) হবে সমীকরণ (2) এর পূর্ণ সমাধান এবং সমীকরণ (1) এর পূরক অপেক্ষক।

ধ্রুবক-সহগ বিশিষ্ট রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের পূরক অপেক্ষক নির্ণয়ের প্রণালী।

এখানে $P_1, P_2, \ldots\ldots\ldots P_n$ প্রত্যেকে ধ্রুবক। পূরক অপেক্ষক সমীকরণ (2) এর পূর্ণ সমাধান।

$D = \dfrac{d}{dx}$ বসিয়ে সমীকরণ (2) কে $L(D)y = 0$ আকারে লেখা যায়। যেখানে,

$$L(D) = D^n + P_1D^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + P_{n-1}D + P_n$$

$L(D)y = 0$ সমীকরণের $y = e^{mx}$ আকারের সমাধান পাবার জন্য সহায়ক সমীকরণটি হল $L(m) = 0$

$m_1, m_2, \ldots\ldots\ldots m_n$ সহায়ক সমীকরণের বাস্তব এবং স্বতন্ত্র বীজ হলে,

$$y_c = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_ne^{m_nx}$$

হবে সমীকরণ (1) অর্থাৎ, $L(D)y = \phi(x)$ সমীকরণের পূরক অপেক্ষক। $L(m) = 0$ সমীকরণটির কোনও বীজ m_1, r সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হলে ঐ বীজটির জন্য r সংখ্যক রৈখিকভাবে অনধীন সমাধান হবে $y = e^{m_1x}, y = xe^{m_1x}, \ y = x^2e^{m_1x} \ldots\ldots\ldots$ এবং $y = x^{r-1}\,e^{m_1x}$

$L(m) = 0$ সমীকরণটির কোনও বীজ m_1 জটিল অর্থাৎ, $p + iq$ (p, q বাস্তব) আকারের হলে, এর আর একটি বীজ হবে $p - iq$ এবং এই দুটি জটিল রাশির অনুসঙ্গী বাস্তব সমাধান হবে, $y = e^{px}\cos qx$ এবং $y = e^{px}\sin qx$

ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের বিশেষ সমাকল নির্ণয়ের সূত্র।

সমীকরণটি হল $L(D)y = \phi(x)$

বিশেষ সমাকল $y_p = \dfrac{1}{L(D)}\phi(x)$

(a) যখন $\phi(x) = e^{ax}, y_p = \dfrac{1}{L(D)}e^{ax} = \dfrac{1}{L(a)}e^{ax}, [L(a) \neq 0]$

$$L(D) = (D-a)^k\, f(D) \text{ হলে, } y_p = \frac{x^k e^{ax}}{\underline{|k}\, f(a)}, f(a) \neq 0$$

(b) যখন $\phi(x) = e^{ax}v(x)$, $y_p = \frac{1}{L(D)} e^{ax} v(x) = e^{ax} \frac{1}{L(D+a)} v(x)$

(c) যখন $\phi(x) = \cos mx, \sin mx$ এবং $L(D) = M(D^2)$

$$y_p = \frac{1}{L(D)} \cos mx\ (\sin mx)$$

$$= \frac{1}{M(D^2)} \cos mx\ (\sin mx)$$

$$= \frac{1}{M(-m^2)} \cos mx\ (\sin mx),\ M(-m^2) \neq 0$$

(d) যখন $\phi(x) = xv(x)$, $y_p = \frac{1}{L(D)} xv(x) = \left\{x - \frac{1}{L(D)} L'(D)\right\} \frac{1}{L(D)} v(x)$

এবং যখন $\phi(x) = x^r v(x)$, $y_p = \frac{1}{L(D)} x^r v(x) = \left\{x - \frac{1}{L(D)} L'(D)\right\}^r \frac{1}{L(D)} v(x)$

(e) $\phi(x) = x^m$, m ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা,

বিশেষ সমাকল $y_p = \frac{1}{L(D)} x^m$

$$= (a_0 + a_1 D + \ldots\ldots + a_m D^m)\, x^m$$

যেখানে, $a_0 + a_1 D + \ldots\ldots + a_m D^m$ হল $\frac{1}{L(D)}$ প্রকারকটির দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে D এর ঘাতের ঊর্দ্ধক্রম অনুসারে বিস্তৃতির $(m+1)$ সংখ্যক পদ।

(f) $\phi(x)$ ফাংশনটি অন্য কোনও আকারের হলে

$$\frac{1}{D-\alpha} \phi(x) = e^{\alpha x} \frac{1}{D} e^{-\alpha x} \phi(x)$$

$$= e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} \phi(x)\, dx$$

সূত্রটি প্রয়োগ করতে হবে।

11.13 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. নিচের সমীকরণগুলি সমাধান করুন।

(i) $6\dfrac{d^2y}{dx^2}+17\dfrac{dy}{dx}+12y=e^{-x}$

(ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-(a+b)\dfrac{dy}{dx}+aby=e^{ax}+e^{bx}$

(iii) $\left(D^2-2D+1\right)y=\left(1+e^{-x}\right)^2$

(iv) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+9y=e^{x}-\cos 2x$

(v) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=\cos 2x$

(vi) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=x\sin^2 x$

(vii) $\left(D^2-1\right)y=x^2\cos x$

2. L (D) একটি রৈখিক অন্তরকল প্রকারক হলে প্রমাণ করুন যে,

(a) $\dfrac{1}{L(D)}\left[xv(x)\right]=\left\{x-\dfrac{1}{L(D)}L'(D)\right\}\dfrac{1}{L(D)}v$

(b) $\dfrac{1}{L(D)}\left[x^2v(x)\right]=\left\{x-\dfrac{1}{L(D)}L'(D)\right\}\left\{x-\dfrac{1}{L(D)}L'(D)\right\}\dfrac{1}{L(D)}v$

উপরের সূত্র দুটি প্রয়োগ করে

(i) $\left(D^2+4\right)y=x\sin^2 x$ এবং

(ii) $\left(D^2-1\right)y=x^2\cos x$

সমীকরণ দুটির বিশেষ সমাকল নির্ণয় করুন।

3. নিচের সমীকরণগুলির বিশেষ সমাকল নির্ণয় করুন।

(i) $\left(D^2-7D\right)y=-35x^4+76x^3-24x^2-42x+6$

(ii) $(D^2-1)y = xe^x \sin x$

(iii) $(D^2+2)y = x^2e^{3x} + e^x \cos 2x$

4. (a) প্রমাণ করুন যে, $y = \frac{1}{p}\int_k^x f(t)\sin p(x-t)\,dt$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = f(x)$$

সমীকরণটির একটি বিশেষ সমাকল।

(b) উপরের সূত্রটি প্রয়োগ করে $(D^2+a^2)y = \sec ax$ সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করুন।

5. নিম্নলিখিত সহ-সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় করুন।

(i) $\frac{dx}{dt} = 5x + y,\quad \frac{dy}{dt} = y - 4x$

(ii) $\frac{dx}{dt} + 2x + 3y = 0,\quad 3x + \frac{dy}{dt} + 2y = 2e^{2t}$

(iii) $\frac{dx}{dt} - 7x + y = 0,\quad \frac{dy}{dt} - 2x - 5y = 0$

(iv) $(D-1)x + Dy = 2t + 1;\quad (2D+1)x + 2Dy = t$

(v) $\frac{d^2x}{dt^2} + y = \sin t,\quad \frac{d^2y}{dt^2} + x = \cos t$

11.14 উত্তরমালা

1. (i) $y = ae^{-\frac{3}{2}x} + be^{-\frac{4}{3}x} + e^{-x}$

(ii) $y = c_1e^{ax} + c_2e^{bx} + \frac{x}{a-b}\left(e^{ax} - e^{bx}\right)$

(iii) $y = (a+bx)e^x + 1 + \frac{1}{9}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-x}$

(iv) $y = a\cos 3x + b\sin 3x + \frac{1}{10}e^x - \frac{1}{5}\cos 2x$

(v) $y = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x$

(vi) $y_c = A\cos 2x + B\sin 2x$

$$y_p = \frac{1}{D^2+4}\, x\sin^2 x = \frac{1}{2}\,\frac{1}{D^2+4}\, x\,(1-\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{D^2+4}\, x - \frac{1}{2}\,\frac{1}{D^2+4}\, x\cos 2x$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}.\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{D^2+4}\, xe^{2ix}$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}.\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{D-2i}\,\frac{1}{D+2i}\, xe^{2ix}$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\, e^{2ix}\,\frac{1}{D}.\frac{1}{D+4i}.x$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\, e^{2ix}\,\frac{1}{D}\,\frac{1}{4i}\left(1-\frac{D}{4i}\right)x$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\, e^{2ix}\,\frac{1}{4i}\,\frac{1}{D}\left(x-\frac{1}{4i}\right)$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\, e^{2ix}\,\frac{1}{4i}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4i}\right]$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\,\mathrm{Re}\,(\cos 2x + i\sin 2x)\left[-\frac{ix^2}{2}+\frac{x}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\,x\cos 2x - \frac{1}{16}\,x^2\sin 2x$$

(vii) $y_c = Ae^x + Be^{-x}$, $\quad y_p = \frac{1}{D^2-1}\, x^2\cos x$

$$= \mathrm{Re}\,\frac{1}{D^2-1}\, x^2 e^{ix}$$

....

$$= \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)\cos x + x\sin x$$

3. (i) $x^5-2x^4+3x^2$ (ii) $-\frac{1}{25}e^x\{(10x+2)\cos x+(5x-14)\sin x\}$

(iii) $\frac{e^{3x}}{11}\left[x^2-\frac{12x}{11}+\frac{50}{121}\right]-\frac{1}{17}e^x(-4\sin 2x+\cos 2x)$

4. (a) বিশেষ সমাকল $\frac{1}{D^2+p^2}f(x)=\frac{1}{2ip}\left[\frac{1}{D-ip}-\frac{1}{D+ip}\right]f(x)$

$$=\frac{1}{2ip}\left[\int_k^x e^{ip(x-t)}f(t)\,dt-\int_k^x e^{-ip(x-t)}f(t)\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{p}\int_k^x f(t)\sin p(x-t)\,dt$$

(b) $y=A\cos ax+B\sin ax+\frac{1}{a}x\sin ax+\frac{1}{a^2}\cos ax\log\cos ax$

5. (i) $x=(c_1+c_2t)e^{3t},\quad y=e^{3t}[(1-2t)c_2-2c_1]$

(ii) $x=c_1e^t+c_2e^{-5t}+\frac{6}{7}e^{2t},\quad y=-c_1e^t+c_2e^{-5t}-\frac{8}{7}e^{2t}$

(iii) $x=e^{6t}[c_1\cos t+c_2\sin t],\quad y=e^{6t}[(c_1-c_2)\cos t+(c_2+c_1)\sin t]$

(iv) $x=-t-\frac{2}{3}.\quad y=\frac{t^2}{2}+\frac{4t}{3}+c$

(v) $x=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t+\frac{1}{4}t(\sin t-\cos t)$

$y=-c_1e^t-c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t+\frac{1}{4}(t+2)(\sin t-\cos t)$

একক 12 ❑ অন্যান্য দ্বিতীয় ও উচ্চতর ক্রমের অন্তরকল সমীকরণের সমাধানের বিভিন্ন উপায় ঃ (Differential Equations of Second and Higher order Methods of Solutions)

গঠন

12.1 প্রস্তাবনা

একাদশ এককে (unit 11) আমরা ধ্রুবক-সহগ বিশিষ্ট রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের সমাধানের পদ্ধতি আলোচনা করেছি। কিন্তু যে কোনও সহগ বিশিষ্ট রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের সমাধানের কোনও সাধারণ পদ্ধতি নেই। মাত্র কতিপয় বিশেষ আকারের সমীকরণের সহজে সমাধান সম্ভব। অন্যান্য অন্তরকল সমীকবণ যাদের সমাধান-পদ্ধতি পূর্বের এককগুলিতে আলোচিত হয়নি, বর্তমান এককে এই সমস্ত বিশেষ আকারের সমীকরণ সমাধানের উপায় আলোচিত হবে।

12.2 উদ্দেশ্য

- $$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+P_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots\ldots\ldots+P_{n-1}x\frac{dy}{dx}+P_ny=f(x)$$

(যেখানে $P_n, P_2, \ldots\ldots\ldots P_n$ ধ্রুবক) আকারের সমীকরণকে অয়লারের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ এবং

$$(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n}+P_1(ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots\ldots+P_{n-1}(ax+b)\frac{dy}{dx}+P_n(x)=f(x)$$

আকারের সমীকরণকে লজান্দ্রর (Legendre) রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ বলা হয়। এই দুইপ্রকারের সমীকরণ সমাধানের পদ্ধতির আলোচনা করা হয়েছে।

- যে সমস্ত অন্তরকল সমীকরণকে একবার সমাকলন করে একটি নিম্নতর ক্রমের অন্তরকল সমীকরণে পরিণত করা যায়, তাদের যথার্থ অন্তরকল সমীকরণ বলা হয়। যথার্থ অন্তরকল সমীকরণ সমাধানের পদ্ধতি আলোচিত হল।

- ছটি বিশেষ আকারের অন্তরকল সমীকরণ, যথা ঃ

(i) $\dfrac{d^ny}{dx^n}=f(x)$ (ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=f(y)$

(iii) $f\left(\dfrac{d^ny}{dx^n},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\dfrac{dy}{dx},x\right)=0$

(iv) $f\left(\dfrac{d^ny}{dx^n},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\dfrac{dy}{dx},y\right)=0$

(v) $f\left(\dfrac{d^ny}{dx^n},\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}},x\right)=0$

(vi) $f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, x\right) = 0$

সমাধানের পদ্ধতি বর্ণনা করা হয়েছে।

● যে সমস্ত ক্ষেত্রে দ্বিতীয়ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$$

এর সহজ সমাধান সম্ভব, সেই সমস্ত ক্ষেত্রের উদাহরণ সহ বিশদ আলোচনা করা হল।

● প্রতিটি পরিচ্ছেদে দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ এবং অনুশীলনী এবং এককটির বিষয়ভিত্তিক প্রশ্নাবলী সংযোজিত হয়েছে।

12.3 অয়লারের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ। (The Euler Linear Equation)

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{n-1}x\frac{dy}{dx} + A_n y = f(x) \qquad \ldots (1)$$

(যেখানে রৈখিক $A_1, A_2, \ldots\ldots A_{n-1}, A_n$ ধ্রুবক) আকারের অন্তরকল সমীকরণকে অয়লারের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ বলা হয়। স্বাধীন চল x -এর পরিবর্তে e^z বসিয়ে সমীকরণ (1) কে ধ্রুবক সহগবিশিষ্ট রৈখিক অন্তরকল সমীকরণে পরিণত করা যায়। এবং একাদশ এককে (Unit 11) বর্ণিত উপায়ে সমাধান করা যায়।

যদি $x = e^z$ বসান হয়, তাহলে, $z = \log x$ এবং

$$x\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = x\frac{dy}{dz}\frac{1}{x} = \frac{dy}{dz} = Dy. \qquad D = \frac{d}{dz}$$

অনুরূপভাবে,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\cdot\frac{1}{x}\right) = x^2\left[-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2}\frac{dz}{dx}\right]$$

$$= x^2\left[-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}\right]$$

$$= \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}$$

$$= D(D-1)y$$

অর্থাৎ, $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2z}\left[D^2 - D\right]y$ এবং $\frac{dy}{dx} = e^{-z}Dy$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} = e^{-z}D$$

$$\therefore \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = e^{-z}D\left[e^{-2z}\left(D^2 - D\right)\right]y$$

$$= e^{-z}\left[-2e^{-2z}\left(D^2 - D\right) + e^{-2z}\left(D^3 - D^2\right)\right]y$$

$$= e^{-3z}\left[D^3 - 3D^2 + 2D\right]y$$

$$= e^{-3z}D(D-1)(D-2)y$$

$$\Rightarrow x^3\frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y$$

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণ করা যায় যে,

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} = D(D-1)(D-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(D-n+1)y$$

উপরের প্রাপ্ত ফলগুলি সমীকরণ (1) -এ বসাবার ফলে সমীকরণ (1) নিম্নলিখিত আকার ধারণ করে

$$\left[D^n + A_1'D^{n-1} + \ldots\ldots + A_{n-1}'D + A_n\right]y = f(e^z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(2)}$$

সমীকরণ (2) সমাধানের পদ্ধতি পূর্ববর্তী একক 11-এ বর্ণিত হয়েছে।

12.3.1 উদাহরণ

$\left(x^3D^3 + 3x^2D^2 + xD\right)y = 24x^2$ **সমীকরণটি সমাধান করুন।**

$$D = \frac{d}{dx}$$

সমাধান ঃ $x = e^z$ বসান। তাহলে

$$D = \frac{d}{dx} = \frac{d}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^{-z}\frac{d}{dz} = e^{-z}\theta,$$ $\theta = \frac{d}{dz}$ (অর্থাৎ, এখানে θ হল অন্তরকল প্রকারক)

$$D^2 = D.D = e^{-z}\theta\left(e^{-z}\theta\right)$$

$$= e^{-z}\left[-e^{-z}\theta + e^{-z}\theta^2\right]$$

$$= e^{-2z}\left[\theta^2 - \theta\right]$$

$$= e^{-2z}\theta[\theta - 1]$$

এবং , $$D^3 = DD^2$$

$$= D\left[e^{-2z}\theta(\theta - 1)\right].$$

$$= e^{-z}\left[-2e^{-2z}\theta(\theta - 1) + e^{-2z}\theta^2(\theta - 1)\right]$$

$$= e^{-3z}\theta(\theta - 1)(\theta - 2)$$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণটি নিচের আকার ধারণ করে

$$\left[\theta(\theta - 1)(\theta - 2) + 3\theta(\theta - 1) + \theta\right]y = 24e^{2z}$$

অর্থাৎ, $\left[\theta^3 - 3\theta^2 + 2\theta + 3\theta^2 - 3\theta + \theta\right]y = 24e^{2z}$

বা, $\theta^3 y = 24e^{2z}$

$$y = A + Bz + Cz^2 + \frac{1}{\theta^3}24e^{2z}$$

$$= A + Bz + Cz^2 + 3e^{2z}$$

$$= A + B\log x + C(\log x)^2 + 3x^2$$

12.3.2 লজান্দ্র-র রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ (Legendre's Equation)

$$(a + bx)^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1(a + bx)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + A_{n-1}(a + bx)\frac{dy}{dx} + A_n y = f(x) \qquad \ldots.(1)$$

এখানে a, b, $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ গুলি ধ্রুবক, এই সমীকণকে লজান্দ্রের সমীকরণ বলে।

$z = a + bx$ বসিয়ে উপরের সমীকরণটিকে ধ্রুবক সহগবিশিষ্ট সমীকরণে পরিণত করা যায়।

12.3.3 উদাহরণ

$(1+2x)^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6(1+2x)\dfrac{dy}{dx} + 16y = 8(1+2x)^2$ সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $1+2x = e^z$ বসিয়ে পাই

$$2 = e^z\frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2e^{-z}$$

অতএব, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}.2e^{-z} \Rightarrow \dfrac{d}{dx} = 2e^{-z}\dfrac{d}{dz}$

$$\Rightarrow D = 2e^{-z}\theta,\ D = \frac{d}{dx} \text{ এবং } \theta = \frac{d}{dz}$$

ফলে, $\dfrac{d^2}{dx^2} = D^2 = D.(2e^{-z}\theta)$

$$= 2e^{-z}\theta.(2e^{-z}\theta)$$

$$= 4e^{-z}\left[-e^{-z}\theta + e^{-z}\theta^2\right]$$

$$= 4e^{-2z}\left[\theta^2 - \theta\right]$$

$$= 4e^{-2z}\theta(\theta - 1)$$

$\therefore\ (1+2x)^2\dfrac{d^2}{dx^2} = 4\theta(\theta-1)$

এবং, $(1+2x)\dfrac{d}{dx} = 2\theta$

$\therefore$ উপরের সমীকরণটি

$\left[4\theta(\theta-1) - 6.2\theta + 16\right]y = 8e^{2z}$ বা, $(\theta-2)^2 y = 2e^{2z}$ আকার ধারণ করে।

অতএব নির্ণেয় সমাধান,

$$y = e^{2z}(\alpha+\beta z)+\frac{1}{(\theta-2)^2}2e^{2z} \quad ,(\alpha\ ,\ \beta \text{ যদৃচ্ছ ধ্রুবক})$$

$$= e^{2z}(\alpha+\beta z)+2e^{2z}\frac{z^2}{2}$$

$$= e^{2z}(\alpha+\beta z+z^2)$$

$$= \left[\alpha+\beta\log(1+2x)+\{\log(1+2x)\}^2\right](1+2x)^2$$

12.3.4 অয়লারের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ সমাধানের বিকল্প পদ্ধতি

উপপাদ্য। ধরি D এবং θ প্রতীক দুটি দ্বারা যথাক্রমে $\frac{d}{dx}$ এবং $x\frac{d}{dx}$ প্রকারক দুটিকে নির্দেশ করা হল। ধরি

$$F(\theta) = \theta^n + p_1\theta^{n-1}+\ldots\ldots\ldots+p_{n-1}\theta+p_n$$

যেখানে, $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$ ধ্রুবক এবং n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। তাহলে,

(i) $\quad x^n D^n = \theta(\theta-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(\theta-n+1)$

(ii) $\quad F(\theta)x^m = F(m)x^m$

(iii) $\quad \frac{1}{F(\theta)}x^m = \frac{1}{F(m)}x^m, \qquad F(m)\neq 0$

(iv) $\quad \frac{1}{F(\theta)}x^m V = x^m\frac{1}{F(\theta+m)}V, \qquad$ (V, x চলের ফাংশন)

প্রমাণ ঃ

(i) সংজ্ঞা থেকে পাই $xD = \theta \Rightarrow$

$$\begin{aligned} xDy &= \theta y \Rightarrow \\ xD(x\,Dy) &= \theta^2 y \Rightarrow \\ x.Dy + x^2D^2y &= \theta^2 y \Rightarrow \\ x^2D^2y &= \theta^2 y - \theta y \\ &= \theta(\theta-1)y \Rightarrow x^2D^2 = \theta(\theta-1) \end{aligned}$$

ধরি, $x^n D^n = \theta(\theta-1)\ldots\ldots(\theta-n+1)$ সূত্রটি n-এর একটি বিশেষ মান k-এর জন্য সত্য। অর্থাৎ,

$$x^k D^k = \theta(\theta-1)\ldots\ldots(\theta-k+1) \qquad (k<n) \Rightarrow$$

$$x^k D^k y = \theta(\theta-1)\ldots\ldots(\theta-k+1)y \qquad \ldots (A)$$

$$\therefore \; xD\left[x^k D^k y\right] = \theta\{\theta(\theta-1)\ldots\ldots(\theta-k+1)y\} \Rightarrow$$

$$x^{k+1}D^{k+1}y + kx^k D^k y = \theta\{\theta(\theta-1)\ldots\ldots(\theta-k+1)y\}$$

অর্থাৎ, $x^{k+1}D^{k+1}y = \theta\{\theta(\theta-1)\ldots\ldots(\theta-k+1)y\} - k\{\theta(\theta-1)\ldots\ldots(\theta-k+1)y\}$

$$= \theta(\theta-1)\ldots\ldots(\theta-k+1)(\theta-k)y \qquad \ldots (B)$$

(A) এবং (B) থেকে পাই, সূত্রটি $n=k$ এর জন্য সত্য হলে এটি পরবর্তী অখণ্ড সংখ্যা $n=k+1$ এর জন্য সত্য। আবার সূত্রটি $n=2$ এর জন্য সত্য। অতএব, গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণিত হল যে, সূত্রটি যে কোনও ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n-এর জন্য সত্য।

(ii) যেহেতু $\theta x^m = x\frac{d}{dx}\left(x^m\right) = mx^m$

$$\theta^2 x^m = \theta(\theta x^m) = \theta(mx^m) = m\theta(x^m) = m^2 x^m$$

....

$$\theta^n x^m = m^n x^m$$

$\therefore\; F(\theta)x^m = F(m)x^m$, প্রমাণিত হল

আপনারা লক্ষ্য করুন যে, $F(m)=0$ হলে, $y = x^m$, $F(\theta)\, y = 0$ সমীকরণের সমাধান হবে।

(iii) উপরের সম্পর্কের উভয়পার্শ্বে বিপরীত প্রকারক $\frac{1}{F(\theta)}$ এর প্রক্রিয়ায় পাই

$$x^m = F(m)\frac{1}{F(\theta)}x^m$$

বা, $\frac{1}{F(\theta)}x^m = \frac{1}{F(m)}x^m$ যদি, $F(m)$ অশূন্য হয়। প্রমাণিত।

(iv) u, x চলের ফাংশন হলে

$$\theta(x^m u) = x\frac{d}{dx}(x^m u) = mx^m u + x.x^m\frac{du}{dx} = mx^m u + x^m\theta u$$

$$= x^m(\theta+m)u$$

অতএব, $\theta^2(x^m u) = x^m \theta(\theta x^m u)$

$$= \theta\left\{x^m(\theta + m)u\right\}$$

$$= x^m(\theta + m)^2 u$$

....

অনুরূপভাবে, $\theta^n(x^m u) = x^m(\theta + m)^n u$

$$\therefore \quad F(\theta)x^m u = x^m F(\theta + m)u$$

এখন $F(\theta + m)u = v$ ধরে পাই

$$u = \frac{1}{F(\theta + m)} v$$

$$\therefore \quad F(\theta)\left\{x^m \frac{1}{F(\theta + m)} v\right\} = x^m v$$

উভয় পক্ষে $\frac{1}{F(\theta)}$ বিপরীত প্রকারকের প্রক্রিয়া দ্বারা পাই

$$\frac{1}{F(\theta)} x^m v = x^m \frac{1}{F(\theta + m)} v$$, প্রমাণিত

12.3.5 উদাহরণ

উপপাদ্য 12.3.4-এ বর্ণিত পদ্ধতি প্রয়োগে

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 4y = x^4$$

সমীকরণটির সমাধান করুন।

সমাধান ঃ

$x\frac{d}{dx} = \theta$ বসিয়ে পাই

$$[\theta(\theta - 1) + 5\theta + 4]y = x^4$$

বা, $(\theta^2 + 4\theta + 4)y = x^4$

যেহেতু $F(\theta)x^m = F(m)x^m$; $y = x^m$

$$\left(\theta^2 + 4\theta + 4\right)y = 0$$

সমীকরণটির সমাধান হবে যদি $m^2 + 4m + 4 = 0$ হয় অর্থাৎ, $m = -2, -2$

$\therefore$ পূরক অপেক্ষকটি হবে $y_c = x^{-2}[A + B\log x]$

আবার বিশেষ সমাকল $= y_p = \dfrac{1}{\theta^2 + 4\theta + 4}x^4$

$$= \frac{1}{4^2 + 4.4 + 4}x^4$$

$$= \frac{1}{36}x^4$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $y = x^{-2}[A + B\log x] + \dfrac{1}{36}x^4$

মন্তব্য ঃ $x = e^z$ এবং $x\dfrac{d}{dx} = \theta = \dfrac{d}{dz}$ বসিয়ে, পূরক-অপেক্ষক নির্ণয়ের জন্য সহায়ক সমীকরণটি হল, $F(m) = 0$

$\therefore$ এর কোন বীজ m_1 পুনরাবৃত্ত হলে $e^{m_1 \cdot z}, ze^{m_1 \cdot z}$ অর্থাৎ, $x^{m_1}, x^{m_1}\log x$ হবে $F(\theta)y = 0$ এর দুটি রৈখিকভাবে অনধীন সমাধান।

12.3.6 উদাহরণ

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x\dfrac{d}{dx} = \theta$ বসিয়ে পাই

$$[\theta(\theta-1)(\theta-2) + 3\theta(\theta-1) + \theta + 1]y = 0$$

বা, $\left(\theta^3 + 1\right)y = 0$

$y = x^m$ বসিয়ে পাই

$m^3 + 1 = 0$,

অর্থাৎ, $m = -1, \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{3}i\right)$

অতএব, রৈখিকভাবে অনধীন সমাধান তিনটি হবে

$$y = x^{-1},\ y = x^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i},\ y = x^{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

বা, $y = \frac{1}{x},\ y = x^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}\log x},\ y = x^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}\log x}$

বা, $y = \frac{1}{x},\ y = \sqrt{x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\log x,\ y = \sqrt{x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\log x$

∴ নির্ণেয় সাধারণ সমাধান

$$y = \frac{c_1}{x} + \sqrt{x}\left\{c_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right) + c_3\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)\right\}$$

12.3.7 অনুশীলনী

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় করুন।

(1) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 3x^2$

(2) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 20y = (x+1)^2$

(3) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = \log x$

(4) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = x\log x$

(5) $\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}=4\pi\rho$ ($\rho=$ ধ্রুবক)

(6) $t\frac{dx}{dt}+y=0$; $t\frac{dy}{dt}+x=0$;

12.4 যথার্থ অন্তরকল সমীকরণ (Exact Differential Equation)

সংজ্ঞা—

একটি (n-1) তম ক্রমের অন্তরকল সমীকরণ

$$g\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}},\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{dy}{dx},y\right)=Q_1(x)+c$$

কে একবার অন্তরকলন করে যদি একটি n-তম ক্রমের অন্তরকল সমীকরণ

$f\left(\frac{d^{n}y}{dx^{n-1}},\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{dy}{dx},y\right)=Q(x)$, [যেখানে $Q_1=Q(x)$] পাওয়া যায়, তাহলে n-তম ক্রমের অন্তরকল সমীকরণটিকে যথার্থ অন্তরকল সমীকরণ বলা হয়।

উদাহরণ।

$x\frac{dy}{dx}+(2x-1)y=c$ অন্তরকল সমীকরণটিকে অন্তরকলন করে পাই $x\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+2y=0$ । এটি একটি দ্বিতীয় ক্রমের যথার্থ রৈখিক অন্তরকলন সমীকরণ।

মন্তব্য । $x\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+2y=0$ সমীকরণটিকে সমাকলন করে পাই

$$\int x\frac{d^2y}{dx^2}dx+\int 2x\frac{dy}{dx}dx+\int 2y dx=c$$

বা, $\left(x\frac{dy}{dx}-\int 1.\frac{dy}{dx}dx\right)+2\left(x.y-\int 1.y\,dx\right)+2\int y\,dx=c$

বা, $x\frac{dy}{dx}-y+2xy-2\int y\,dx+2\int y\,dx=c$

বা, $x\frac{dy}{dx}+(2x-1)y=c$.

কোঁনও অন্তরকল সমীকরণকে যদি একবার সমাকলন করা সম্ভব হয়, তাহলে ঐ অন্তরকল সমীকরণটি হবে যথার্থ অন্তরকল সমীকরণ।

12.4.1 $Ay + By_1 + Cy_2 = D$, (A, B, C, D x চলের ফাংশন) সমীকরণটি যথার্থ হবার শর্ত নির্ণয় ।

প্রদত্ত সমীকরণটি একটি দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ। এই সমীকরণটিকে সমাকলন করে যদি একটি প্রথম ক্রমের অন্তরকল সমীকরণ পাওয়া যায় তবে প্রদত্ত সমীকরণটিকে যথার্থ বলা হবে।

এখানে $y_1 = \frac{dy}{dx}$, $y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}$

এখন, $\int Cy_2 dx = Cy_1 - \int C_1 y_1 dx$

$$= Cy_1 - \left[C_1 y - \int C_2 y\, dx\right]$$

$$= Cy_1 - C_1 y + \int C_2 y\, dx$$

$$\int By_1 dx = By - \int B_1 y dx$$

এবং $\int Aydx = \int Aydx$

ফলে প্রদত্ত সমীকরণটির সমাকল হবে

$$\int (Ay - B_1 y + C_2 y)dx + (B - C_1)y + Cy_1 = \int Ddx + K \qquad \text{(K ধ্রুবক)}$$

অর্থাৎ, $(B - C_1)y + Cy_1 + \int (A - B_1 + C_2)y\, dx = \int D\, dx + K$

এটি একটি প্রথম ক্রমের অন্তরকল সমীকরণ হবে যদি, $A - B_1 + C_2 = 0$ হয়।

এই শর্তটি সিদ্ধ হলে $(B - C_1)y + Cy_1 = \int D\, dx + K$, সমীকরণটিকে প্রদত্ত সমীকরণের প্রথম সমাকল বলা হয়।

12.4.2 উদাহরণ

$(2x^2 + 3x)y_2 + (6x + 3)y_1 + 2y = (x + 1)e^x$

সমীকরণটি যথার্থ কিনা পরীক্ষা করুন এবং এর সমাধান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

সমীকরণটিকে

$$Cy_2 + By_1 + Ay = f(x) \qquad \ldots (1)$$

আকারে লিখে পাই

$$C = 2x^2 + 3x, \quad B = 6x + 3, \quad A = 2, \quad f(x) = (x+1)e^x$$

সমীকরণ (1) -এর যথার্থ হবার শর্ত হল

$$C_2 - B_1 + A = 0$$

যেহেতু, $\dfrac{d^2}{dx^2}(2x^2 + 3x) - \dfrac{d}{dx}(6x+3) + 2$

$$= 4 - 6 + 2$$

$$= 0$$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণটি যথার্থ। সমীকরণটির প্রথম সমাকল হচ্ছে

$$(2x^2 + 3x)y_1 + [6x + 3 - (4x+3)]y = \int (x+1)e^x dx + c$$

বা, $\quad x(2x+3)y_1 + 2xy = xe^x + c$

বা, $\quad (2x+3)y_1 + 2y = e^x + \dfrac{c}{x}$

বা, $\quad \dfrac{d}{dx}(2x+3)y = e^x + \dfrac{c}{x}$

এবার এই প্রথম সমাকলটি আবার সমাকলন করলে

বা, $\quad (2x+3)y = \int \left(e^x + \dfrac{c}{x} \right) dx + c'$

$$= e^x + c \ln x + c'$$

12.4.3 উদাহরণ

প্রমাণ করুন যে,

নিচের অরৈখিক সমীকরণ দুটি যথার্থ

(i) $yy_2 + y_1^2 = 0$

(ii) $xyy_2 + xy_1^2 + yy_1 = 0$

এবং এদের সমাধান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

(i) প্রদত্ত সমীকরণ $yy_2 + y_1^2 = 0$

এখন, $\int yy_2 dx = y.y_1 - \int y_1 y_1 dx$

$$= y.y_1 - \int y_1{}^2 dx$$

অতএব, $\int (yy_2 + y_1^2)dx = yy_1$

∴ প্রদত্ত সমীকরণটি যথার্থ। এর প্রথম সমাকল

$$yy_1 = c$$

$\Rightarrow ydy = cdx$ এবং এই সমীকরণটি আবার সমাকলন করলে পাই

$y^2 = 2cx + c'$ এটি হল সাধারণ সমাধান।

(ii) প্রদত্ত সমীকরণ $xyy_2 + xy_1^2 + yy_1 = 0$

এখন, $\int x(yy_2 + y_1^2)dx = x\,yy_1 - \int 1.yy_1 dx$

$$= x\,yy_1 - \int yy_1 dx$$

অর্থাৎ, $\int \left(xyy_2 + xy_1^2 + yy_1\right)dx = xyy_1$

প্রমাণ হল যে, প্রদত্ত সমীকরণটি যথার্থ এবং এর প্রথম সমাকলটি হল

$xyy_1 = c \Rightarrow$

$yy_1 = \dfrac{c}{x} \Rightarrow$ (সমাকলন করে)

$y^2 = 2c\ln x + c'$

$= c\ln x^2 + c'$

12.4.4 n-তম ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ

$$Ay + By_1 + Cy_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + Sy_n = T$$

(যেখানে A, B, C, ... S, T, x চলের ফাংশন) এর যথার্থ হবার শর্ত নির্ণয়।

প্রমাণ করুন যে,

$$Ay + By_1 + Cy_2 + \dots\dots\dots\dots + Sy_n = T$$

এই n-তম ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণটি যথার্থ হবে যদি,

$$A - B_1 + C_2 - \dots\dots\dots\dots + (-1)^n S_n = 0 \text{ হয়।}$$

প্রমাণ ঃ দুটি অপেক্ষকের গুণফল Sy_n -এর সমাকল $\int Sy_n dx$ নির্ণয়ে আংশিক সমাকল পদ্ধতির উত্তরোত্তর প্রয়োগে পাই $\int Sy_n dx = Sy_{n-1} - S_1 y_{n-2} + S_2 y_{n-3} - \dots\dots + (-1)^{n-1} S_{n-1} y + \int (-1)^n S_n y\, dx$

অনুরূপভাবে, $\int Cy_2 dx = Cy_1 - C_1 y + \int C_2 y\, dx$

$$\int By_1 dx = By - \int B_1 y dx$$

$$\int Ay\, dx = \int Ay\, dx$$

∴ প্রদত্ত সমীকরণটির উভয়পক্ষে সমাকলন করে এবং উপরে প্রাপ্ত সম্পর্কগুলি ব্যবহার করে পাই

$$\begin{aligned} &\int \left[A - B_1 + C_2 - \dots\dots\dots + (-1)^n S_n\right] y\, dx \\ &\quad + \left[B - C_1 + \dots\dots\dots + (-1)^{n-1} S_{n-1}\right] y \\ &\quad + \left[C - \dots\dots\dots\dots + (-1)^{n-2} S_{n-2}\right] y_1 \\ &\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ &\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + Sy_{n-1} = \int T dx + k \end{aligned}$$

অতএব দেখা যাচ্ছে যে, প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণটি যথার্থ হবে যদি

$$A - B_1 + C_2 - \dots\dots\dots\dots + (-1)^n S_n = 0 \text{ হয়। প্রমাণিত।}$$

সেক্ষেত্রে এই সমীকরণটির প্রথম সমাকলটি হবে

$$\begin{aligned} &\left[B - C_1 + \dots\dots\dots + (-1)^{n-1} S_{n-1}\right] y \\ &\quad + \left[C - D_1 + \dots\dots\dots + (-1)^{n-2} S_{n-2}\right] y_1 \\ &\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots Sy_{n-1} = \int Tdx + k \end{aligned}$$

12.4.5 তৃতীয় ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ

অনুসিদ্ধান্ত। $Py + Qy_1 + Ry_2 + Sy_3 = T$

এর যথার্থ হবার শর্ত $P - Q_1 + R_2 - S_3 = 0$ এবং শর্তটি পালিত হলে এর প্রথম সমাকলটি হবে

$$[Q - R_1 + S_2]y + [R - S_1]y_1 + Sy_2 = \int T dx + k$$

12.4.6 উদাহরণ

$$x\frac{d^3y}{dx^3} + (x^2 - 3)\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি তৃতীয় ক্রমের রৈখিক সমীকরণ।

$$Py + Qy_1 + Ry_2 + Sy_3 = T$$

সমীকরণটির সঙ্গে তুলনা করে পাই

$$P = 2, \quad Q = 4x, \quad R = x^2 - 3, \quad S = x. \quad T = 0.$$

যেহেতু, $2 - \frac{d}{dx}(4x) + \frac{d^2}{dx^2}(x^2 - 3) - \frac{d^3}{dx^3}(x)$

$$= 2 - 4 + 2 - 0 = 0$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি যথার্থ সমীকরণ। এর প্রথম সমাকলটি হল

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (x^2 - 3 - 1)\frac{dy}{dx} + (4x - 2x + 0)y = A$$

বা, $x\frac{d^2y}{dx^2} + (x^2 - 4)\frac{dy}{dx} + 2xy = A$ .... (2)

এই দ্বিতীয়ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণটিকে

$$Py + Qy_1 + Ry_2 = T$$

এর সঙ্গে তুলনা করে পাই $P = 2x,\ Q = x^2 - 4,$ এবং $R = x,\ T = A$

যেহেতু, $P - Q_1 + R_2 = 2x - 2x + 0 = 0$

$\therefore$ সমীকরণ (2) একটি যথার্থ সমীকরণ এবং প্রদত্ত সমীকরণের দ্বিতীয় সমাকলটি হল

বা, $x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-5\right)y = Ax+B$

বা, $\frac{dy}{dx}+\left(x-\frac{5}{x}\right)y = A+\frac{B}{x}$

উপরের সমীকরণটি প্রথম ক্রমের রৈখিক সমীকরণ। এর সমাকল-গুণকটি হল

$$\int e^{\left(x-\frac{5}{x}\right)dx} = \frac{1}{x^5}e^{\frac{x^2}{2}}$$

সমাধান ঃ $ye^{\frac{x^2}{2}}\frac{1}{x^5} = \int\left(A+\frac{B}{x}\right)e^{\frac{x^2}{2}}.\frac{1}{x^5}dx+c$

$$= \int e^{\frac{x^2}{2}}\left[\frac{A}{x^5}+\frac{B}{x^6}\right]dx+c$$

12.4.7

অনেক সময় কোনও অযথার্থ সমীকরণকে কোনও ফাংশন দিয়ে গুণ করলে একটি যথার্থ সমীকরণ পাওয়া যায়। যে ফাংশন দিয়ে গুণ করার ফলে ঐ অযথার্থ সমীকরণটি যথার্থ সমীকরণে পরিণত হয়, তাকে '**সমাকল গুণক**' বা **Integrating function** বলে। এবার উদাহরণটি লক্ষ করুন।

উদাহরণ ঃ $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0$

সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করুন।

উত্তর। প্রদত্ত সমীকরণটিকে

$$Py+Qy_1+Ry_2=0$$

সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করে পাই $P=2,\ Q=-2x,\ R=(1-x^2)$ যেহেতু,

$P-Q_1+R_2=2-(-2)+(-2)=2\neq 0$, প্রদত্ত সমীকরণটি যথার্থ নয়। ধরি x^m সমীকরণটির একটি সমাকল গুণক। x^m দিয়ে সমীকরণটির উভয়পক্ষকে গুণ করে পাই

$$\left(x^m-x^{m+2}\right)y_2-2x^{m+1}y_1+2x^my=0$$

এই সমীকরণটির যথার্থ হবার শর্ত

$$2x^m + 2(m+1)x^m + \left[m(m-1)x^{m-2} - (m+2)(m+1)x^m\right] = 0$$

বা, $-(m-1)(m+2)x^m + m(m-1)x^{m-2} = 0 \Rightarrow m = 1$

অর্থাৎ, x^m Integrating factor হয়, যদি m=1 হয়

অতএব, সমাকল গুণকটি হল x এবং যথার্থ সমীকরণটি হল

$$\left(x - x^3\right)y_2 - 2x^2y_1 + 2xy = 0$$

এর প্রথম সমাকলটি হচ্ছে

$$\left(x - x^3\right)y_1 + \left\{-2x^2 - (1-3x^2)\right\}y = A$$

বা, $x(1-x^2)y_1 + (x^2-1)y = A$

বা, $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{A}{x(1-x^2)}$

এই প্রথম-ক্রমের রৈখিক সমীকরণটির সমাকল-গুণক হল $e^{-\int \frac{1}{x}dx} = \dfrac{1}{x}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধানটি হল

$$y.\frac{1}{x} = \int \frac{A}{x^2(1-x^2)}dx + B$$

$$= A\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2}\right)dx + B$$

$$= A\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right] + B$$

মন্তব্য : কোন অযথার্থ সমীকরণের, বিভিন্ন পদের সহগগুলি বহুপদ রাশি (Polynomial) হলে, সাধারণত x^m আকারের সমাকল গুণক পাওয়া যায়। আবার সহগগুলি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন হলে, সমাকল গুণকও ত্রিকোণমিতিক ফাংশন হয়। তবে অবশ্যই সমস্ত অযথার্থ সমীকরণকে যথার্থ সমীকরণে পরিণত করা যায় না।

12.4.8 অনুশীলনী

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় করুন

(i) $\left(x^2+2x+1\right)\dfrac{d^2y}{dx^2}+4(x+1)\dfrac{dy}{dx}+2y=e^x$

(ii) $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+(x^2-4)\dfrac{dy}{dx}+2xy=5$

(iii) $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\dfrac{dy}{dx}-y=e^x$

(iv) $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+2x\dfrac{dy}{dx}+2y=0$

(v) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2e^x\dfrac{dy}{dx}+2e^xy=x^2$

12.5 $\dfrac{d^ny}{dx^n}=f(x)$ আকারের অন্তরকল সমীকরণ সমূহ

এটি একটি যথার্থ রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ। সমাকলন করে পাই,

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\int f(x)dx+c_1$$

প্রাপ্ত সমীকরণটিও যথার্থ এবং রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ এবং এটি পুনরায় সমাকলন করে পাওয়া যায়

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+c_1x+c_2$$

অনুরূপভাবে উত্তরোত্তর সমাকলন করে পূর্ণ সমাধানটি পাওয়া যাবে।

12.5.1 উদাহরণ

$\dfrac{d^4y}{dx^4}=xe^x$ সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\frac{d^4y}{dx^4} = xe^x \Rightarrow$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (x-1)e^x + c_1 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (x-2)e^x + c_1x + c_2$$

$$\frac{dy}{dx} = (x-3)e^x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3 \Rightarrow$$

এবং $y = (x-4)e^x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3x + c_4$

12.5.2 অনুশীলনী

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

(i) $\frac{d^ny}{dx^n} = x^m$ (ii) $x^2\frac{d^4y}{dx^4} + 1 = 0$ (iii) $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 \sin x$

12.6 $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$ আকারের অন্তরকল সমীকরণ

এই সমীকরণটি রৈখিক নয় এবং এটি যথার্থও নয়।

$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$ সমীকরণটির উভয় পার্শ্বে $2\frac{dy}{dx}$ দিয়ে গুণ করে পাই

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = 2f(y)\frac{dy}{dx}$$

বা, $\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = 2f(y)\frac{dy}{dx}$

বা, $d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2f(y)dy$

$$= d\int 2f(y)dy$$

বা, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \int 2f(y)dy + c_1$

এ থেকে পাই,

$$\frac{dy}{\left\{2\int f(y)dy + c_1\right\}^{\frac{1}{2}}} = dx$$

অর্থাৎ, $\int \frac{dy}{\left\{2\int f(y)dy + c_1\right\}^{\frac{1}{2}}} = x + c_2$

12.6.1 উদাহরণ

সমাধান নির্ণয় করুন ঃ $\frac{d^2x}{dt^2} = -p^2x$

[গতিবিদ্যায় এটি সরল সমঞ্জস গতির সমীকরণ]

উভয়পক্ষে $2\frac{dx}{dt}$ দিয়ে গুণ করে পাই

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = -2p^2x\frac{dx}{dt}$$

বা, $\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = -\frac{d}{dt}\left[p^2x^2\right]$

সমাকলন করে পাই, $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -p^2x^2 +$ ধ্রুবক

$= p^2(a^2 - x^2)$ ধরি।

$$\therefore \pm\frac{dt}{dx}=\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\Rightarrow$$

$$\therefore \pm t=\frac{1}{p}\sin^{-1}\frac{x}{a}+c'$$

$$\Rightarrow x=a\sin(\pm pt+\epsilon)$$

12.6.2 অনুশীলনী

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{a^2}{y^2}=0$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}-a^2y=0$

12.7 $f\left(\frac{d^ny}{dx^n},\ldots\ldots\ldots\frac{dy}{dx},x\right)=0$ আকারের অন্তরকল সমীকরণ

এখানে অন্তরকল সমীকরণগুলিতে প্রত্যক্ষভাবে y অনুপস্থিত।

$\frac{dy}{dx}=p,\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx},\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}$ বসিয়ে পাই

$$f\left(\frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}},\ldots\ldots\ldots\frac{dp}{dx},p,x\right)=0$$

এটি একটি $(n-1)$ তম ক্রমের অন্তরকল সমীকরণ ; এখানে p অধীন চল।

ধরি, সমাধানটি হল $p\equiv\frac{dy}{dx}=F(x)$

অতএব, $y=\int F(x)dx+c$

12.7.1 উদাহরণ

$xy_2+xy_1^2-y_1=0$ সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করুন।

সমাধান। $y_1 = \frac{dy}{dx} = p$ বসিয়ে পাই

$$x\frac{dp}{dx} + xp^2 - p = 0$$

বা, $x\frac{dp}{dx} - p = -xp^2$

বা. $\frac{dp}{dx} - \frac{p}{x} = -p^2$

বা, $-\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx} + \frac{1}{x}.\frac{1}{p} = 1$

বা, $\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z = 1, \qquad z = \frac{1}{p}$

এটি একটি প্রথম ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ।

সমাকল গুণক $= e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$

নির্ণেয় সমাধান, $xz = \int xdx + c_1$

$$= \frac{x^2}{2} + c_1 = \frac{x^2 + 2c_1}{2}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{p} = \frac{x^2 + 2c_1}{2x}$$

বা, $\frac{2x}{x^2 + 2c_1}dx = dy$

$$\Rightarrow y = \log(x^2 \pm 2c_1) + c_2$$

12.7.2 অনুশীলনী

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

(i) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

(ii) $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

(iii) $2x\dfrac{d^2y}{dx^2} \cdot \dfrac{d^3y}{dx^3} = \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - a^2$

12.8 $f\left(\dfrac{d^ny}{dx^n}, \ldots\ldots\ldots \dfrac{dy}{dx}, y\right) = 0$ আকারের অন্তরকল সমীকরণ

এখানে x চলটি প্রত্যক্ষভাবে অনুপস্থিত।

$\dfrac{dy}{dx} = p$ বসিয়ে পাই, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = p\dfrac{dp}{dy}$,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[p\frac{dp}{dy}\right] = p\frac{d}{dy}\left[p\frac{dp}{dy}\right] = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$$

অনুরূপভাবে, x-এর সাপেক্ষে y-এর প্রতিটি অন্তরকলজকে $\dfrac{d}{dx} = p\dfrac{d}{dy}$ প্রকারকের সাহায্যে y-এর সাপেক্ষে p-এর অন্তরকলজে পরিবর্তিত করে প্রদত্ত সমীকরণটিকে নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা সম্ভব।

$$\phi\left(\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p, y\right) = 0$$

এটি y এবং p-এর দ্বারা প্রকাশিত একটি (n–1) তম ক্রমের অন্তরকল সমীকরণ।

$p = \psi(y)$ -এই সমীকরণটির সমাধান হলে

প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান নিচের আকারে পাওয়া যাবে

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = x + c$$

12.8.1 উদাহরণ

$yy_2 + y_1^2 = y_1$ সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $y_1 = p$ বসিয়ে পাই

$y_2 = p\dfrac{dp}{dy}$, ফলে প্রদত্ত সমীকরণটি

$yp\dfrac{dp}{dy} + p^2 = p$ আকার ধারণ করে।

এখন, $yp\dfrac{dp}{dy} + p^2 = p \Rightarrow$

$$p\left[y\frac{dp}{dy} + p\right] = p$$

বা, $\left[y\dfrac{dp}{dy} + p - 1\right]p = 0 \Rightarrow y\dfrac{dp}{dy} + p = 1$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dy} + \frac{1}{y}p = \frac{1}{y}$$

p এবং $\dfrac{dp}{dy}$ এর সাপেক্ষে এটি একটি রৈখিক সমীকরণ। সমাকলন গুণকটি হল $e^{\int \frac{1}{y}dy} = y$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $yp = c + \int dy = c + y$

$$\Rightarrow p = \frac{c+y}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{ydy}{c+y} = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{ydy}{c+y} = x + c'$$

$$\Rightarrow y - c\log(c+y) = x + c'$$

12.8.2 অনুশীলনী

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

(i) $yy_2 + y_1^2 = 2$ (ii) $y_2 - y_1^2 = 0$

(iii) $yy_2 - y_1^2 + y^2 \log y = 0$ (iv) $y_2 + y_1^2 + y_1 = 0$

12.9 $f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, x\right) = 0$ আকারের অন্তরকল সমীকরণ

এই সমীকরণে প্রত্যক্ষভাবে y অনুপস্থিত। y-এর শুধুমাত্র দুটি অন্তরকলজ বিদ্যমান—যাদের ক্রমের অন্তর 2. নিম্নতর ক্রমের অন্তরকলজটির জন্য q বসিয়ে সমীকরণটিকে

$$f\left(\frac{d^2q}{dx^2}, q, x\right) = 0$$

এই পরিবর্তিত আকারে লেখা যায়। এটি q ও x -এর সাপেক্ষে একটি দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকল সমীকরণ।

$q = \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \phi(x)$ -এর সমাধান হলে, উত্তরোত্তর সমাকলন দ্বারা y-নির্ণয় করা সম্ভব।

12.9.1 উদাহরণ

$$x^2 \frac{d^4y}{dx^4} + a^2 \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = q$ বসিয়ে পাই

$$x^2 \frac{d^2q}{dx^2} + a^2 q = 0 \qquad \text{...............(1)}$$

x -এর পরিবর্তে e^z অর্থাৎ, $z = \log x$ বসিয়ে পাই

$$\left[\theta(\theta - 1) + a^2\right]q = 0, \text{ যেখানে } \theta = \frac{d}{dz} = x\frac{d}{dx}$$

সহায়ক সমীকরণ $m^2 - m + a^2 = 0$ এর বীজদুটি হল

$$m = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4a^2}$$

প্রথম ক্ষেত্র $4a^2 < 1$, এক্ষেত্রে $1-4a^2 > 0$. $1-4a^2 = k^2$ বসিয়ে m-এর মান দুটি হল $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}k$.

ফলে সমীকরণ (1)-এর সমাধান হবে

$$q = c_1 e^{\left(\frac{1+k}{2}\right)z} + c_2 e^{\left(\frac{1-k}{2}\right)z}$$

অর্থাৎ, $$\frac{d^2y}{dx^2} = c_1 x^{\frac{1+k}{2}} + c_2 x^{\frac{1-k}{2}}$$

পরপর দুবার সমাকলন করে পাই

$$y = A + Bx + x^{\frac{5}{2}}\left(Cx^{\frac{k}{2}} + Dx^{-\frac{k}{2}}\right)$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্র, $4a^2 > 1$, এক্ষেত্রে $1-4a^2 < 0$. $1-4a^2 = -b^2$ বসিয়ে পাই

$$m = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}b$$

$$q = e^{\frac{1}{2}z}\left[A\cos\frac{b}{2}z + B\sin\frac{b}{2}z\right]$$

$$= e^{\frac{1}{2}z} c_1 \cos\left(\frac{b}{2}z + c_2\right)$$

$$= x^{\frac{1}{2}}\left[c_1 \cos\left(\frac{b}{2}\log x + c_2\right)\right]$$

অতএব, একবার সমাকলন করে পাই

$$y_1 = A_1 x^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{b}{2}\log x + c_2\right) + B_1 \sin\left(\frac{b}{2}\log x + c_2\right) + c_3$$

$$= x^{\frac{3}{2}} c_4 \cos\left(\frac{b}{2}\log x + c_5\right) + c_3$$

আবার সমাকলন করে

$$y = c_6 x^{\frac{5}{2}} \cos\left(\frac{b}{2}\log\frac{x}{c_7}\right) + c_3 x + c_8$$

$$= A + Bx + Cx^{\frac{5}{2}} \cos\left(\frac{b}{2}\log\frac{x}{D}\right)$$

তৃতীয় ক্ষেত্র ঃ $4a^2 = 1$ অর্থাৎ $m = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

$$q = x^{\frac{1}{2}}(c_1 + c_2 \log x)$$

$$\therefore y_1 = \frac{2}{3}c_1 x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}c_2 x^{\frac{3}{2}} \log x - \frac{4}{9}c_2 x^{\frac{3}{2}} + c_3$$

সুতরাং,

$$y = Ax^{\frac{5}{2}} + Bx^{\frac{5}{2}} \log x + c_3 x + D$$

12.9.2 অনুশীলনী

নিচের সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

(i) $\frac{d^4y}{dx^4} + a^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

(ii) $\frac{d^5y}{dx^5} - m^2\frac{d^3y}{dx^3} = e^{ax}$

12.10 $f\left(\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, ...x\right) = 0$ আকারের অন্তরকল সমীকরণ

এই সমীকরণে y -এর দুটিমাত্র অন্তরকলজ বিদ্যমান, যাদের ক্রমের অন্তর 1। এছাড়া প্রত্যক্ষভাবে y অনুপস্থিত। এখানে নিম্নতর ক্রমের অন্তরকলজটির জন্য q বসিয়ে সমীকরণটির পরিবর্তিত আকার নিম্নরূপ পাই

$$f\left(\frac{dq}{dx},\ q,\ x\right) = 0$$

এটি একটি প্রথম ক্রমের অন্তরকল সমীকরণ, যেটি সমাধান করে q-কে x-এর ফাংশন হিসাবে পাওয়া যাবে।

ধরি, $$q = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = f(x)$$

এই সম্পর্ক থেকে উত্তরোত্তর সমাকলন করে, y -এর মান পাওয়া যাবে।

12.10.1 উদাহরণ

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + x\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = q$ বসিয়ে পাই

$$\left(\frac{dq}{dx}\right)^2 + x\frac{dq}{dx} - q = 0$$

বা, $$q = x\frac{dq}{dx} + \left(\frac{dq}{dx}\right)^2$$

$$= xp + p^2, \qquad p = \frac{dq}{dx}$$

এই সমীকরণটির আকার ক্লেয়ারোর (CLAIRAUT'S) সমীকরণের অনুরূপ।

অতএব, এর সাধারণ সমাধান

$$q = cx + c^2$$

অর্থাৎ, $$\frac{d^2y}{dx^2} = cx + c^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}cx^2 + c^2x + A$$

এবং, $$y = \frac{1}{6}cx^3 + \frac{1}{2}c^2x^2 + Ax + B$$

12.10.2 অনুশীলনী

নিচের সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

(i) $$a\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

(ii) $x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=0$

(iii) $\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=2$

12.11 দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ সমাধানের বিবিধ পদ্ধতি

$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x)$ হল দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের সাধারণ আকার।

P এবং Q ধ্রুবক হলে এই সমীকরণটির সমাধানের পদ্ধতি একাদশ এককে (unit 11) বর্ণিত হয়েছে। $P=\frac{1}{x}$ এবং $Q=\frac{1}{x^2}$ হলে সমীকরণটিকে অয়লারের সমীকরণে পরিণত করা যায় এবং সেক্ষেত্রে 12.3 পরিচ্ছেদে বর্ণিত পদ্ধতিতে সমাধান করা যায়। কিন্তু P এবং Q, x চলটির যদৃচ্ছ ফাংশন হলে, এই সমীকরণটি সমাধানের কোনও সাধারণ পদ্ধতি নেই। এই পরিচ্ছেদের পরবর্তী অংশগুলিতে কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x)$$

সমীকরণটির সমাধানের পদ্ধতি উদাহরণ সহ বর্ণনা করা হচ্ছে।

12.11.1 অধীন চলের পরিবর্তন (Change of dependent variable)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x) \qquad \text{..... (1)}$$

সমীকরণটির পূরক-অপেক্ষক হল

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \qquad \text{..... (2)}$$

সমীকরণটির, দুটি রৈখিকভাবে অনধীন সমাধানের রৈখিক সংযোগ। ধরি, সমীকরণ (2) এর রৈখিকভাবে অনধীন সমাধান দুটির মধ্যে একটি জানা আছে এবং সেটি হল $y = z$। তাহলে সমীকরণ (1)-এ y এর পরিবর্তে vz (v, x, চলের ফাংশন) বসিয়ে ঐ সমীকরণটিকে একটি প্রথম ক্রমের সমীকরণে পরিণত করা যায়। কারণ-

$$y = vz \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=v\frac{dz}{dx}+z\frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = v\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dz}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2}z$$

$y, \frac{dy}{dx}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2}$ -এর মান সমীকরণ (1)-এ বসিয়ে পাই

$$v\left[\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} + Qz\right] + \frac{dv}{dx}\left[2\frac{dz}{dx} + Pz\right] + \frac{d^2v}{dx^2}z = R \qquad \text{..........} (3)$$

যেহেতু z সমীকরণ (2) এর একটি সমাধান,

$$\therefore \frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} + Qz = 0$$

অতএব, উপরের সমীকরণে (3) এর পরিবর্তিত আকার হল

$$\frac{d^2v}{dx^2}z + \frac{dv}{dx}\left[2\frac{dz}{dx} + Pz\right] = R$$

বা, $z\frac{dv_1}{dx} + v_1(2z_1 + Pz) = R.$ $\qquad \left[v_1 = \frac{dv}{dr}, z_1 = \frac{dz}{dx}\right]$

বা, $\frac{dv_1}{dx} + v_1\left(2\frac{z_1}{z} + P\right) = \frac{R}{z}$ $\qquad$ .... (4)

সমীকরণ (4) হল, v_1 ফাংশনটির একটি প্রথম ক্রমের রৈখিক সমীকরণ। এর সমাকলন গুণক হল

$$e^{\int\left(\frac{2}{z}\frac{dz}{dx} + P\right)dx} = z^2 e^{\int Pdx}$$

অতএব সমীকরণ (4) এর সমাধান

$$v_1 z^2 e^{\int Pdx} \equiv A + \int Rze^{\int Pdx}dx$$

সম্পর্কটি থেকে পাওয়া যায়।

অর্থাৎ, $v_1 = \frac{A}{z^2}e^{-\int Pdx} + \frac{1}{z^2}e^{-\int Pdx}\int Re^{\int Pdx}.zdx$

$$\Rightarrow v = B + A\int \frac{1}{z^2}e^{-\int Pdx}dx + \int\left\{\frac{1}{z^2}e^{-\int Pdx}\int Rze^{\int Pdx}dx\right\}dx$$

অতএব, সমীকরণ (1) এর সাধারণ সমাধান.

$$y = vz$$

$$= Bz + Az\int \frac{1}{z^2}e^{-\int P dx}dx + z\int \left\{\frac{1}{z^2}e^{-\int P dx}\int Rze^{\int P dx}dx\right\}dx.$$

মন্তব্য : $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$ সমীকরণটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় করতে হলে অনুসঙ্গী সুষম সমীকরণ $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$ সমীকরণটির কোনও সমাধান জানা আবশ্যক। P, Q যদৃচ্ছ ফাংশন হলে, এই সমীকরণটির কোন সমাধান জানা সহজ নয়। কিন্তু কয়েকটি ক্ষেত্রে পরীক্ষা দ্বারা এই সমীকরণটির একটি সমাধান নির্ণয় করা সম্ভব।

$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$ সমীকরণটিকে $D = \frac{d}{dx}$ প্রকারকটির সাহায্যে $(D^2 + PD + Q)y = 0$ .....(1) আকারে লেখা হল।

এখন নিম্নলিখিত উক্তিগুলির যথার্থতা সহজেই প্রমাণ করা যায়

(i) $y = x$ সমীকরণ (1) এর একটি সমাধান, যদি $P + xQ = 0$

(ii) $y = e^{mx}$,, ,, ,, ,, ,, ,, $m^2 + Pm + Q = 0$

(iii) $y = e^x$,, ,, ,, ,, ,, ,, $1 + P + Q = 0$

(iv) $y = e^{-x}$,, ,, ,, ,, ,, ,, $1 - P + Q = 0$

উপরিউক্ত এই ফল গুলি প্রয়োজন মত ব্যবহার করে কোন কোন ক্ষেত্রে (1) নং সমীকরণের একটি সমাধান নির্ণয়ের চেষ্টা করা যায়।

উদাহরণ

$$(x+2)y_2 - (2x+5)y_1 + 2y = (x+1)e^x$$

সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করুন।

সমাধান :

প্রদত্ত সমীকরণটির অনুসঙ্গী সুষম সমীকরণটি হল

$$\left[(x+2)D^2 - (2x+5)D + 2\right]y = 0,\ D = \frac{d}{dx}$$

$y = e^{mx}$, এর একটি সমাধান হবে যদি

$$(x+2)m^2 - (2x+5)m + 2 = 0$$

সহজেই দেখা যাচ্ছে, $m = 2$ হলে উপরের সম্পর্কটি সিদ্ধ হয়।

অতএব, আমরা প্রদত্ত সমীকরণটির

$y = e^{2x}.v$ আকারের সমাধান খুঁজি

এখন, $y = e^{2x}.v$

$$\Rightarrow y_1 = e^{2x}[D+2]v$$

$$= e^{2x}[v_1 + 2v]$$

এবং $y_2 = e^{2x}[D+2]^2 v$

$$= e^{2x}[v_2 + 4v_1 + 4v]$$

প্রদত্ত সমীকরণ প্রতিস্থাপন করে পাই

$$e^{2x}(x+2)[v_2 + 4v_1 + 4v] - (2x+5)e^{2x}[v_1 + 2v] + 2e^{2x}v = (x+1)e^x$$

বা, $(x+2)v_2 + (2x+3)v_1 = (x+1)e^{-x}$

বা, $(x+2)\dfrac{dv_1}{dx} + (2x+3)v_1 = (x+1)e^{-x}$

বা, $\dfrac{dv_1}{dx} + \dfrac{2x+3}{x+2}v_1 = \dfrac{x+1}{x+2}e^{-x}$

এটি v_1 এবং x এর সাপেক্ষে একটি রৈখিক অবকল সমীকরণ।

সমাকল গুণকটি হল $e^{\int \frac{2x+3}{x+2}dx} = e^{2x}.\dfrac{1}{x+2}$

$\therefore$ সমাধান $v_1 e^{2x}\dfrac{1}{x+2} = c_1 + \int e^x \dfrac{x+1}{(x+2)^2}dx$

$$= c_1 + e^x \frac{1}{x+2} \quad \Rightarrow$$

$$v_1 = e^{-x} + c_1 e^{-2x}(x+2)$$

অতএব, $v = -e^{-x} + c_1 \frac{1}{D} e^{-2x}(x+2)$

$$= -e^{-x} + c_1 e^{-2x} \frac{1}{D-2}(x+2)$$

$$= -e^{-x} + c_1\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} \frac{1}{1-\frac{D}{2}}(x+2)$$

$$= -e^{-x} - \frac{c_1}{2}e^{-2x}\left[1+\frac{D}{2}\right](x+2)$$

$$= -e^{-x} - \frac{c_1}{4}e^{-2x}(2x+5)+b$$

ফলে, $y = ve^{2x}$

$$= -e^{x} - \frac{1}{4}c(2x+5) + be^{2x}$$

হল নির্ণেয় সমাধান।

অনুশীলনী

নিচের সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় করুন।

(i) $x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} - y = e^x$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy = x$

(iii) $(3-x)\frac{d^2y}{dx^2} - (9-4x)\frac{dy}{dx} + (6-3x)y = 0$

12.11.2 প্রকারকের উৎপাদক নির্ণয়ের পদ্ধতি। (Method of Factorisation of the operator)

$D = \frac{d}{dx}$ প্রকারকটির সাহায্যে $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$ .... (1)

সমীকরণটিকে $L(D)y = R(x)$ আকারে লেখা যায়। যেখানে,

$$L(D) = D^2 + PD + Q$$

$L(D)$ প্রকারকটিকে $L(D) = M(D)N(D)$ আকারে লেখা সম্ভব হলে, সমীকরণ (1) এর আকার হবে

$$M(D)N(D)y = R(x) \qquad .... (2)$$

(এখানে লক্ষণীয়, P, Q ধ্রুবক না হলে, M(D), N(D) বিনিময় যোগ্য প্রকারক হবে না।)

সমীকরণ (2)-এ $N(D)y = v$ বসিয়ে পাই

$$M(D)v = R(x)$$

এটি একটি প্রথমক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ।

$v = f(x)$ সমীকরণটির সমাধান হলে,

$$N(D)y = f(x)$$

এই প্রথম ক্রমের রৈখিক সমীকরণটি থেকে y এর মান নির্ণয় করা যাবে।

সুতরাং দেখা গেল যে, L(D)-র দুটি উৎপাদক M(D), N(D) নির্ণয় করা গেলে, $M(D)v = R(x)$, $N(D)y = f(x)$, এই দুটি প্রথম ক্রমের সমীকরণ সমাধান করে, আমরা প্রদত্ত দ্বিতীয় ক্রমের (1) নং সমীকরণের সমাধান পেতে পারি।

নিচের **উদাহরণ** লক্ষ্য করুন।

$(x+1)y_2 + (x-1)y_1 - 2y = 0$, সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করতে হবে।

D প্রকারকটির সাহায্যে প্রদত্ত সমীকরণটিকে

$$\left[(x+1)D^2 + (x-1)D - 2\right]y = 0$$ আকারে লেখা হল।

এখন, $(x+1)D^2 + (x-1)D - 2 = (x+1)D^2 + (x+1)D - 2D - 2$

$$= \left[(x+1)D - 2\right](D+1)$$

তাহলে প্রদত্ত সমীকরণটি হল,

$$\left[(x+1)D - 2\right][D+1]y = 0$$

ধরি, $(D+1)y = v \qquad .... \qquad (1)$

তাহলে, $\left[(x+1)D - 2\right]v = 0$

অর্থাৎ, $(x+1)\dfrac{dv}{dx} - 2v = 0$

বা, $$\frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x+1}$$

সমাকলন করে পাই,

$$\Rightarrow \quad v = c_1(x+1)^2$$

v এর মান সমীকরণ (1) এ বসিয়ে পাই

$$(D+1)y = c_1(x+1)^2$$

বা, $$\frac{dy}{dx} + y = c_1(x+1)^2$$

বা, $$e^x\left(\frac{dy}{dx} + y\right) = e^x c_1(x+1)^2$$

বা, $$ye^x = c_1\int e^x(x+1)^2 dx + c_2$$

$$= c_1 e^x(x^2+1) + c_2$$

$$\Rightarrow y = c_1(x^2+1) + c_2 e^{-x}$$

অনুশীলনী 2

নিচের সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

(i) $(x+2)y_2 - (2x+5)y_1 + 2y = (x+1)e^x$

(ii) $xy_2 + (x-1)y_1' - y = x^2$

(iii) $xy_2 + (x^2+1)y_1 + 2xy = 2x,$ যখন $x = 0$, তখন $y = 2$ এবং $y_1' = 0$.

12.11.3 প্রচলের ভেদের পদ্ধতি (Method of variation of parameters)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R \qquad \text{......} (1)$$

সমীকরণটির পূরক-অপেক্ষক জানা থাকলে প্রচলের ভেদের পদ্ধতি দ্বারা সমীকরণটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় করা সম্ভব। পদ্ধতিটি এবার বর্ণনা করা হবে।

ধরি সমীকরণ (1) এর পূরক অপেক্ষক হল $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$

তাহলে, $y=y_1$, $y=y_2$ হল

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0 \qquad \text{...... (2)}$$

সমীকরণটির সমাধান।

এখন C_1, C_2 গুলি যথাক্রমে A, B প্রচল (Paramter) ধরে আমরা সমীকরণ (1) এর

$$y=Ay_1+By_2 \qquad \text{...... (3)}$$

আকারের সমাধান খুঁজি। এখানে A এবং B, x চলটির ফাংশন।

উপরের সম্পর্কটির উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই

$$\frac{dy}{dx}=Ay_1'+By_2'+A'y_1+B'y_2$$

$$=Ay_1'+By_2' \qquad \text{...... (4)}$$

যদি, $A'y_1+B'y_2=0$.........(5) ধরা হয়।

(4) সম্পর্কটির উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে আবার অন্তরকলন করে পাই

$$\frac{d^2y}{dx^2}=Ay_1''+By_2''+A'y_1'+B'y_2' \qquad \text{...... (6)}$$

সমীকরণ (1)-এ y, $\frac{dy}{dx}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান প্রতিস্থাপন করে পাই

$$A\left[y_1''+Py_1'+Qy_1\right]+B\left[y_2''+Py_2'+Qy_2\right]+A'y_1'+B'y_2'=R \qquad \text{...... (7)}$$

$y=y_1$ এবং $y=y_2$ সমীকরণ (1) এর অনুসঙ্গী সুষম সমীকরণ (2) এর সমাধান.

তাই, $y_1''+Py_1'+Qy_1=0$ এবং $y_2''+Py_2'+Qy_2=0$

ফলে সমীকরণ (7) থেকে পাই

$$A'y_1'+B'y_2'=R \qquad \text{...... (8)}$$

সমীকরণ (5) ও (8) কে ম্যাট্রিক্স আকারে লিখে পাই

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix} \qquad \text{...... (9)}$$

যেহেতু y_1, y_2 সমীকরণ (2) এর রৈখিকভাবে অনধীন দুটি সমাধান, সুতরাং তাদের রনস্কিয়ান

$$W(y_1, y_2)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

অতএব সমীকরণ (5) ও (8) কে সমাধান করে পাই

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \frac{1}{W}\begin{bmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}$$

অর্থাৎ, $A' = -\dfrac{1}{W(y_1, y_2)} y_2 R$ ...... (10)

এবং, $B' = \dfrac{1}{W(y_1, y_2)} y_1 R$ ...... (11)

যেখানে $W(y_1, y_2)$ হল y_1, y_2 ফাংশন দুটির রনস্কিয়ান।

এখন (10) এবং (11) থেকে সমাকলন করে পাই

$$A = -\int \frac{y_2 R}{W} dx + c_1$$

$$B = \int \frac{y_1 R}{W} dx + c_2$$

সমীকরণ (3)-এ প্রতিস্থাপন করে পাই

$$y = \left(c_1 y_1 - y_1 \int \frac{y_2 R}{W} dx\right) + \left(c_2 y_2 + y_2 \int \frac{y_1 R}{W} dx\right)$$

এটি হল প্রদত্ত সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

উদাহরণ ঃ

$x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2 e^x$ সমীকরণটির সমাধান প্রচলের ভেদের পদ্ধতি দ্বারা নির্ণয় করুন।

দেওয়া আছে যে, সমীকরণটির পূরক-অপেক্ষক $y_c = ax + \dfrac{b}{x}$

সমাধান ঃ

ধরি, সাধারণ সমাধান

$$y = xA + \frac{1}{x}B \qquad \text{...... (1)}$$

(যেখানে A এবং B, x চলের ফাংশন)

$y = xA + \dfrac{B}{x}$ সম্পর্কটিকে অন্তরকলন করে পাই

$$\frac{dy}{dx} = A - \frac{B}{x^2} \qquad \text{...... (2)}$$

যদি, $\quad A'x + \dfrac{B'}{x} = 0 \qquad \text{...... (3)}$

আবার অন্তরকলন করে পাই

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{2B}{x^3} + A' - \frac{B'}{x^2} \qquad \text{...... (4)}$$

y, $\dfrac{dy}{dx}$ এবং $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ এর মান প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$x^2\left(\frac{2B}{x^3} + A' - \frac{B'}{x^2}\right) + x\left(A - \frac{B}{x^2}\right) - \left(xA + \frac{B}{x}\right) = x^2e^x$$

বা, $\quad A(x-x) + B\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\right) + x^2A' - B' = x^2e^x$

বা, $\quad x^2A' - B' = x^2e^x \Rightarrow A' - \dfrac{B'}{x^2} = e^x \qquad \text{...... (5)}$

এখন A', B' নির্ণয়ের জন্য (3) ও (5) সমীকরণ থেকে পাই

$$\begin{bmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^x \end{bmatrix}$$

সমাধান করে পাই, $\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \left(-\dfrac{2}{x}\right)^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x} \\ -1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^x \end{bmatrix}$

$$= \frac{x}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 1 & -x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ e^x \end{bmatrix}$$

অর্থাৎ, $A' = \frac{1}{2}e^x$, এবং $B' = -\frac{1}{2}x^2e^x$

সমাকলন করে পাই,

$$A = \frac{1}{2}e^x + a, \text{ এবং } B = -\frac{1}{2}\left[x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right] + b$$

$$= -\frac{1}{2}e^x\left[x^2 - 2x + 2\right] + b$$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণটির সাধারণ সমাধান

$$y = x\left[\frac{1}{2}e^x + a\right] + \frac{1}{x}\left\{\frac{e^x}{-2}(x^2 - 2x + 2) + b\right\}$$

$$= ax + \frac{b}{x}e^x\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

অনুশীলনী–3

নিচের সমীকরণগুলি, প্রচলের ভেদের পদ্ধতিতে, সমাধান করুন।

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4\tan 2x$

(iii) $\frac{d^2y}{dx} - y = \frac{2}{1+e^x}$

12.11.4 দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের স্বভাবী-আকার (Normal Form of a linear equation of the 2nd order)

সংজ্ঞা ঃ দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণে প্রথম ক্রমের অন্তরকলজের সহগটি শূন্য হলে, সমীকরণটিকে স্বভাবী-আকারের বলা হয়।

ধরি প্রদত্ত সমীকরণটি হল $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R$ ....(1)

এই সমীকরণে, y এর পরিবর্তে u(x) v(x) বসিয়ে পাই

$$(u''v+2u'v'+uv'')+P(u'v+v'u)+Quv=R$$

বা, $$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dv}{dx}\left[P+\frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right]+\frac{1}{u}\left[\frac{d^2u}{dx^2}+P\frac{du}{dx}+Qu\right]v=\frac{R}{u} \quad ....(2)$$

u ফাংশনটি যদি এরূপে নির্ণয় করি যে, উপরের সমীকরণ $\frac{dv}{dx}$ এর সহগ শূন্য হয় তাহলে

$$\frac{2}{u}\frac{du}{dx}+P=0 \Rightarrow \frac{1}{u}\frac{du}{dx}=-\frac{1}{2}P \quad \Rightarrow$$

$$u=e^{-\frac{1}{2}\int Pdx}$$

u এর এই মান, বসিয়ে v-এর সহগটি হবে

$$\frac{1}{u}\left\{-\frac{1}{2}u\frac{dp}{dx}-\frac{1}{2}P\frac{du}{dx}+P\frac{du}{dx}+Qu\right\}$$

$$=\frac{1}{u}\left\{-\frac{1}{2}u\frac{dp}{dx}+\frac{1}{2}P\left(-\frac{Pu}{2}\right)+Qu\right\}$$

$$=Q-\frac{1}{4}P^2-\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}=I\ (\text{ধরি})$$

অতএব, পরিবর্তিত হয়ে (2) নং সমীকরণটি হবে

$$\frac{d^2v}{dx^2}+Iv=Re^{\frac{1}{2}\int Pdx}=S\ (\text{ধরি})$$

অর্থাৎ প্রমাণ হল যে, $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R$ সমীকরণে y-এর পরিবর্তে $ve^{-\frac{1}{2}\int Pdx}$ বসালে সমীকরণটি

$$\frac{d^2v}{dx^2}+Iv=S \quad ....(3)$$

এই স্বভাবী আকারে পরিবর্তিত হবে। এখানে

$$I = Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}, \text{ এবং}$$

$$S = Re^{\frac{1}{2}\int Pdx}$$

মন্তব্য ঃ $I = A =$ ধ্রুবক অথবা, $\frac{A}{x^2}$ হলে স্বভাবী-আকারের সমীকরণটির সমাধান সহজেই নির্ণয় করা সম্ভব। সমীকরণ (3) এর সমাধান করে v নির্ণীত হলে, সমীকরণ (1) এর সমাধান হবে

$$y = vu = ve^{-\frac{1}{2}\int Pdx}$$

উদাহরণ ঃ নিচের সমীকরণটিকে স্বভাবী-আকারে পরিণত করুন, অতঃপর এর সমাধান নির্ণয় করুন।

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + (4x^2-1)y = -3e^{x^2}\sin 2x$$

উত্তর এখানে $P = -4x$, $Q = 4x^2 - 1$, $R = -3e^{x^2}\sin 2x$

$$e^{-\frac{1}{2}\int Pdx} = e^{2\int xdx} = e^{x^2}$$

$y = ve^{x^2}$ বসালে সমীকরণটি স্বভাবী আকারে পরিণত হবে।

$$I = Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}$$

$$= \left(4x^2 - 1\right) - \frac{1}{4}(-4x)^2 - \frac{1}{2}(-4)$$

$$= 4x^2 - 1 - 4x^2 + 2 = 1$$

$$S = Re^{\frac{1}{2}\int \rho dx}$$

$$= -3e^{x^2}.\sin 2x.e^{-x^2}$$

$$= -3\sin 2x$$

অতএব, নির্ণেয় স্বভাবী আকারটি হয়

$$\frac{d^2v}{dx^2} + 1 = -3\sin 2x$$

এর সমাধান হল $v = A\cos x + B\sin x - \frac{1}{D^2+1} 3\sin 2x$

$$= A\cos x + B\sin x + \frac{3}{3}\sin 2x$$

$$= A\cos x + B\sin x + \sin 2x$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $y = e^{x^2}[A\cos x + B\sin x + \sin 2x]$

অনুশীলনী–4

নিচের সমীকরণগুলিকে স্বভাবী আকারে পরিণত করে সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\tan x\frac{dy}{dx} + 5y = 0$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + (x^2+2)y = e^{\frac{1}{2}(x^2+2x)}$

12.11.5. স্বাধীন চলের পরিবর্তন দ্বারা দ্বিতীয়ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের রূপান্তর (Transformation of the equation by changing the independent variable)

কোন কোন সময় স্বাধীন চলের পরিবর্তনের দ্বারা দ্বিতীয় ক্রমের সমীকরণ সমাধান করা যায়।

ধরি, দ্বিতীয়ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণটি হল $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$ ....(1)

$z = f(x)$ বসিয়ে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} \text{ এবং, } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}\right) = \frac{dy}{dz}\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dz^2}$$

সমীকরণ (1)-এ এই মানগুলি প্রতিস্থাপন করে পাই

$$\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(P\frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2}\right)\frac{dy}{dz} + Qy = R$$

বা, $\frac{d^2y}{dz^2} + P_1\frac{dy}{dz} + Q_1 y = R_1$ ....(2)

যেখানে $P_1 = \dfrac{\dfrac{d^2z}{dx^2} + P\dfrac{dz}{dx}}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}, Q_1 = \dfrac{Q}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}, R_1 = \dfrac{R}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}$ ....(3)

প্রথমক্ষেত্র ঃ P_1 শূন্য হলে, সমীকরণ (2) এর স্বভাবী আকারের হবে।

এখন, $P_1 = 0 \Rightarrow \dfrac{d^2z}{dx^2} + P\dfrac{dz}{dx} = 0$

$$\Rightarrow z = \int e^{-\int Pdx} dx \qquad ....(4)$$

$z = \int e^{-\int Pdx} dx$ রূপান্তরের ফলে যদি $Q_1 =$ ধ্রুবক হয়, অথবা $Q_1 = \dfrac{c}{z^2}$ তাহলে পরিবর্তিত (2) নং সমীকরণটির সহজেই সমাধান করা যাবে।

দ্বিতীয় ক্ষেত্র ঃ সমীকরণ (2) এর y এর সহগ $Q_1 = a^2$ ধ্রুবক হবে, যদি z এমনভাবে নির্ণয় করা হয় যাতে করে

$$a^2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = Q \Rightarrow az = \int \sqrt{Q}\, dx$$

এক্ষেত্রে যদি P_1 ও ধ্রুবক হয়, অর্থাৎ যদি $P_1 = \left(\dfrac{d^2z}{dx^2} + P\dfrac{dz}{dx}\right) \Big/ \left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2 = K =$ ধ্রুবক হয়

তাহলে রূপান্তরিত সমীকরণের আকার হবে নিম্নরূপ।

$$\frac{d^2y}{dz^2} + k\frac{dy}{dz} + a^2y = R_1$$

এটি একটি ধ্রুবক সহগ বিশিষ্ট সমীকরণ, যার সমাধানের পদ্ধতি পূর্ববর্তী একাদশ এককে আলোচিত হয়েছে।

উদাহরণ।

(i) স্বাধীন চলের পরিবর্তন দ্বারা নিচের সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করুন।

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 4x^3y = 8x^3 \sin x^2$$

সমাধান ঃ সমীকরণটিকে $\dfrac{d^2y}{dx^2} + P\dfrac{dy}{dx} + Qy = R$ আকারে লিখে পাই,

$$P = -\frac{1}{x},\ Q = -4x^2,\ R = 8x^2 \sin x^2$$

$$z = \int e^{-\int P dx} dx = \int e^{\int \frac{1}{x} dx} dx = \int x\, dx = \frac{x^2}{2}$$ ধরলে

$$\frac{dz}{dx} = x. \quad Q_1 = \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = -4, \quad R_1 = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = 8\sin 2z$$

অতএব রূপান্তরিত সমীকরণটি হল,

$$\frac{d^2y}{dz^2} - 4y = 8\sin 2z$$

এর সমাধান হল, $y = ae^{2z} + be^{-2z} + 8\frac{1}{D^2 - 4}\sin 2z$

$$= ae^{2z} + be^{-2z} - 8\frac{1}{8}\sin 2z$$

$$= ae^{2z} + be^{-2z} - \sin 2z$$

অতএব মূল সমীকরণটির সমাধান হল,

$$y = ae^{x^2} + be^{-x^2} - \sin x^2$$

উদাহরণ (ii) স্বাধীন চলের পরিবর্তন দ্বারা নিচের সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করুন।

$$(1+x^2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

সমীকরণটিকে $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$ আকারে লিখে পাই

$$P = \frac{2x}{(1+x^2)},\ Q = \frac{4}{(1+x^2)^2}$$

$z = f(x)$ এমনভাবে নির্ণয় করুন যাতে করে,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{Q}{4} = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$ হয়,

অর্থাৎ , $$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow z=\tan^{-1}x$$

রূপান্তরিত সমীকরণটি $\frac{d^2y}{dz^2}+P_1\frac{dy}{dz}+Q_1y=0$ হলে

$$P_1=\left(\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}\right)\Big/\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

$$=\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}+\frac{2x}{(1+x^2)}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)\Big/\frac{1}{(1+x^2)^2}=0$$

এবং, $$Q_1=\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\frac{Q}{\frac{Q}{4}}=4$$

অতএব, সমীকরণটির রূপান্তরিত আকার হবে

$$\frac{d^2y}{dz^2}+4y=0$$

যার সমাধান হল $y=A\cos 2z+B\sin 2z,\qquad z=\tan^{-1}x \Rightarrow x=\tan z$

$$=A\frac{1-x^2}{1+x^2}+B\frac{2x}{1+x^2}$$

অর্থাৎ, $$(1+x^2)y=a(1-x^2)+bx$$

অনুশীলনী–5

স্বাধীন চলের পরিবর্তন দ্বারা নিচের সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}-\cot x\frac{dy}{dx}-(\sin^2 x)y=\cos x-\cos^3 x$

(ii) $x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+4x^3y=x^5$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2}+\left(4x-\frac{1}{x}\right)\frac{dy}{dx}+4x^2y=3xe^{-x^2}$

12.12 সারাংশ

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + P_{n-1} x \frac{dy}{dx} + P_n y = f(x) \qquad \ldots(1)$$

আকারের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণকে অয়লারের রৈখিক সমীকরণ এবং

$$(ax+b)^n \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 (ax+b)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + P_{n-1}(ax+b)\frac{dy}{dx} + P_n y = f(x) \qquad \ldots(2)$$

আকারের রৈখিক সমীকরণকে লজান্দরের সমীকরণ বলা হয়। প্রথমক্ষেত্রে $x = e$ এবং দ্বিতীয়ক্ষেত্রে $ax + b = e^z$ বসিয়ে সমীকরণ দুটিকে ধ্রুবক-সহগবিশিষ্ট রৈখিক অন্তরকল সমীকরণে পরিণত করা সম্ভব।

কোনও অন্তরকল সমীকরণকে একবার সমাকলন করে যদি একটি নিম্নতরক্রমের অন্তরকল সমীকরণে পরিণত করা সম্ভব হয়, তবে প্রথম সমীকরণটিকে যথার্থ অন্তরকল সমীকরণ বলা হয়।

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + Sy_n = T \qquad \ldots(3)$$

এই n-তম ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণটি যথার্থ হবার শর্ত হল

$$A - \frac{dB}{dx} + \frac{d^2C}{dx^2} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n \frac{d^nS}{dx^n} = 0 \qquad \ldots(4)$$

উপরের শর্তটি সিদ্ধ হলে সমীকরণ (3) এর প্রথম সমাকলটি হবে

$$\left[B - \frac{dC}{dx} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}S}{dx^{n-1}}\right]y$$

$$+\left[C - \frac{d}{dx}D + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-2}\frac{d^{n-2}S}{dx^{n-2}}\right]\frac{dy}{dx} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{Sd^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int T dx + h \qquad \ldots(5)$$

<u>দ্বিতীয়ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ সমাধানের বিভিন্ন পদ্ধতি</u> ঃ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R \qquad \ldots(1)$$

হল দ্বিতীয়ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণের সাধারণ আকার।

P, Q, R হয় ধ্রুবক, আর নয়ত x চলের ফাংশন।

1. P এবং Q ধ্রুবক হলে একাদশ এককে বর্ণিত পদ্ধতিতে সমাধান করুন।

2. $P = \frac{1}{x}$ এবং $Q = -\frac{1}{x^2}$ অথবা, $P = \frac{1}{a+bx}$ এবং $Q = \frac{1}{(a+bx)^2}$ হলে সমীকরণটিকে যথাক্রমে অয়লারের অথবা লজান্দ্রর রৈখিক সমীকরণে পরিণত করা যাবে। তখন 12.3 পরিচ্ছেদে বর্ণিত পদ্ধতিতে সমাধান করুন।

3. সমীকরণটি যথার্থ হলে 12.4 পরিচ্ছেদে বর্ণিত পদ্ধতি প্রয়োগ করুন।

4. সমীকরণটিতে প্রত্যক্ষভাবে অধীন চল y অনুপস্থিত হলে, 12.7 পরিচ্ছেদে বর্ণিত পদ্ধতির প্রয়োগ করুন।

5. সমীকরণটিতে স্বাধীন চল x প্রত্যক্ষভাবে অনুপস্থিত হলে, 12.8 পরিচ্ছেদে বর্ণিত পদ্ধতির প্রয়োগ করতে হবে।

6. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$ এই বিশেষ আকারের দ্বিতীয়ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণটি সমাধানের জন্য 12.6 পরিচ্ছেদে বর্ণিত পদ্ধতি প্রয়োগ করুন। $2\frac{dy}{dx}$ দিয়ে গুণ করে সমাকলন করুন।

7. সমীকরণ (1)-এর অনুসঙ্গী সুষম অন্তরকল সমীকরণটির একটি সমাধান জানা থাকলে, 12.11 পরিচ্ছেদের প্রথম অংশটি দেখুন।

8. সমীকরণ (1) এর পূরক অপেক্ষক জানা থাকলে, প্রচলের ভেদের পদ্ধতি প্রয়োগ করুন (12.11 পরিচ্ছেদের তৃতীয় অংশটি দেখুন)

9. সমীকরণটিকে $L(D)y = R$ আকারে লেখা হলে যদি $L(D) = M(D)N(D)$ হয়, তাহলে সমীকরণটি সমাধানের জন্য 12.11 পরিচ্ছেদের দ্বিতীয় অংশটি দেখুন।

10. 7, 8 এবং 9 অনুচ্ছেদে যে পদ্ধতিগুলির কথা বলা হল, সেগুলি প্রয়োগ করা সম্ভব না হলে $Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}$ রাশিটির মান নির্ণয় করুন।

যদি $Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dp}{dx} =$ ধ্রুবক অথবা $\frac{C}{x^2}$ হয় তবে, $y = ve^{-\frac{1}{2}\int P dx}$ রূপান্তরটি ব্যবহার করুন। (12.11 পরিচ্ছেদের চতুর্থ অংশটি দেখুন।)

11. 10 অনুচ্ছেদে বর্ণিত পদ্ধতি প্রয়োগ করা সম্ভব না হলে, $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{|Q|}{a^2}$ সমীকরণটি সমাধান করে $z = f(x)$ নির্ণয় করুন এবং এই রূপান্তর প্রয়োগ করে সমীকরণটি স্বাধীন চলের পরিবর্তন ঘটান। এবার

$$\frac{\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$ এর মান নির্ণয় করুন।

মানটি ধ্রুবক অথবা শূন্য হলে $z = \int \sqrt{\frac{Q}{a^2}}\,dx$ রূপান্তর প্রয়োগে সমীকরণ (1) z স্বাধীন চলের সাপেক্ষে একটি ধ্রুবক-সহগ বিশিষ্ট সমীকরণে পরিণত হবে। (12.11 পরিচ্ছেদের পঞ্চম অংশটি দেখুন)

12.13 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

নিচের অন্তরকল সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় করুন ঃ

1. $\left[x^3D^3 + 2x^2D^2 + 2\right]y = 10\left(x + \frac{1}{x}\right)$

2. $\left[x^2D^2 + 3xD + 1\right]y = \frac{1}{(1-x)^2}$

3. $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x(x^2+2)\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 2x$ সমীকরণটি যথার্থ কিনা পরীক্ষা করুন এবং এর প্রথম সমাকলটি নির্ণয় করুন।

4 $\frac{d^4y}{dx^4} - a^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = e^x$

6. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2$

7. $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{2x}$ (দেওয়া আছে যে যখন $x = 0$, তখন $y = \frac{dy}{dx} = 0$)

8. $y = x + \frac{1}{x}$; $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0$ সমীকরণটির একটি সমাধান কিনা পরীক্ষা করুন এবং উক্ত সমীকরণের পূর্ণ সমাধান নির্ণয় করুন।

9. সমাধান করুন ঃ $\left[(x+3)D^2 - (2x+7)D + 2\right]y = (x+3)^2e^x$

[সমীকরণটিকে $\left[(x+3)D - 1\right]\left[D-2\right]y = (x+3)^2e^x$ আকারে প্রকাশ করা যায়]

10. $\frac{d^2y}{dx^2}+\cot x\frac{dy}{dx}+4y\operatorname{cosec}^2 x=0$

11. $4x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x^5\frac{dy}{dx}+(x^8+6x^4+4)y=0$

12. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2(x^2+x)\frac{dy}{dx}+(x^2+2x+2)y=0$

13. দুটি ভিন্ন পদ্ধতিতে

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}-y=e^x$$

সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করুন।

14. দুটি ভিন্ন পদ্ধতিতে

$$(x+2)\frac{d^2y}{dx^2}-(2x+5)\frac{dy}{dx}+2y=(x+1)e^x$$

সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করুন।

[সঙ্কেত ঃ লক্ষ্য করুন যে (i) সমীকরণটিকে

$[(x+2)D-1][D-2]y=(x+1)e^x$ আকারে লেখা সম্ভব এবং (ii) সমীকরণটির $y=e^{2x}v$ আকারের সমাধান আছে]

12.14 উত্তরমালা

অনুশীলনী (12.3.7)

(1) $y=\sqrt{x}\left[A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x+B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right]+x^2$

(2) $y=c_1x^{-5}+c_2x^4-\left(\frac{1}{14}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{1}{20}\right)$

(3) $y=x(A+B\log x)+(\log x+2)$

(4) $y = x(A + B\log x) + \frac{x}{6}(\log x)^3$

(5) $V = (A + B\ln r) + \pi\rho r^2$

(6) $x = At + \frac{B}{t}$. $y = -At + \frac{B}{t}$

অনুশীলনী (12.4.8)

(1) $(x+1)^2 y = e^x + Ax + B$

(2) $y\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x^5} = \int \left(5 + \frac{A}{x}\right)\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x^5}dx + B$

(3) $y = Be^x + e^x \ln x + e^x \int e^{-x}\frac{A}{x}dx$

(4) $y\frac{e^{2x}}{x} = A\int \frac{e^{2x}}{x^2}dx + B$

(5) $e^{2e^x}y = \frac{1}{3}\int e^{2e^x}x^3dx + c_1\int e^{2e^x}dx + c_2$

অনুশীলনী (12.5.2)

(i) $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots + c_nx^{n-1} + \frac{m!\, x^{m+n}}{(m+n)!}$

(ii) $y = A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3 + \frac{1}{2}x^2\ln x$

(iii) $y = c_1 + c_2x + (6 - x^2)\sin x - 4x\cos x$

অনুশীলনী (12.6.2)

(i) $\sqrt{c_1y^2 + y} - \frac{1}{\sqrt{c_1}}\log\left(\sqrt{c_1y} + \sqrt{1 + c_1y}\right) = ac_1\sqrt{2}x + c_2$

(ii) $ax = \log\left[y + \sqrt{y^2 + c_1}\right] + c_2$

অনুশীলনী (12.7.2)

(i) $2(y - b) = e^{x-a} + e^{-(x-a)}$

(ii) $y = (1 + b^2)\ln(x + b) - bx + c$

(iii) $15c_1^2y = 4(c_1x + a^2)^{\frac{5}{2}} + c_2x + c_3$

অনুশীলনী (12.8.2)

(i) $y^2 = 2x^2 + c_1x + c_2$

(ii) $e^{-y} = Ax + B$

(iii) $y = e^{A\cos x + B\sin x}$

(iv) $e^x(c_1 - e^y) = c_2$

অনুশীলনী (12.9.2)

(i) $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + c_3x + c_4$

(ii) $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{lmx} + c_5e^{-mx} + \frac{1}{a^3}\frac{1}{a^2 - m^2}e^{ax}$

অনুশীলনী (12.10.2)

(i) $2\frac{A}{a}y = A^2e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} + B$

(ii) $y = c_1 \log x + c_2$

(iii) $15y = 8(x + c_1)^{\frac{5}{2}} + c_2x + c_3$

12.11

অনুশীলনী–1

(i) $y = e^x \log x + c_1e^x \int x^{-1}e^{-x}dx + c_2e^x$ ($y = e^x v$ বসান)

(ii) $y = Ax + Bx \int x^{-2}e^{\frac{x^3}{3}}dx + 1$ $y = xv$ বসান

(iii) $y = Ae^x + Be^{3x}[4x^3 - 42x^2 + 150x - 183]$

অনুশীলনী–2

(i) $y = a(2x + 5) + be^{2x} - e^x$

[$\{(x + 2)D - 1\}\{D - 2\}y = (x + 1)e^x$, আকারে সমীকরণটিকে লিখুন]

(ii) $y = a(x - 1) + be^{-x} + x^2$ [সমীকরণটিকে $(xD - 1)(D + 1)y = x^2$ আকারে লিখুন।]

(iii) $y = 1 + e^{-\frac{x^2}{2}}$ [সমীকরণটিকে $(xD + 1)(D + x)y = 2x$ আকারে লিখুন।]

অনুশীলনী–3

(i) $y = (a - x)\cos x + (b + \log \sin x)\sin x$

(ii) $y = \left\{a - \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right\}\cos 2x + b\sin 2x$

(iii) $y = \{a - e^{-x} + \log(1 + e^{-x})\}e^x + \{b - \log(1 + e^x)\}e^{-x}$

অনুশীলনী–4

(i) $y = \left(A\cos\sqrt{6}x + B\sin\sqrt{6}x\right)\sec x$

(ii) $y = \left(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x\right)e^{\frac{1}{2}x^2} + \frac{1}{4}e^{x+\frac{1}{2}x^2}$

অনুশীলনী–5

(i) $y = c_1 e^{-\cos x} + c_2 e^{\cos x} - \cos x$

$y = c_1 \sin(x^2 + c_2) + \frac{x^2}{4}$

$y = c_1 e^{-x^2} + c_2 x^2 e^{-x^2} + x^3 e^{-x^2}$

12.13 প্রশ্নাবলীর উত্তরমালা

1. $y = x(c_1 \cos\log x + c_2 \sin\log x + 5) + \frac{1}{x}(c_3 + 2\log x)$

2. $y = \frac{1}{x}\left(\log\frac{x}{x-1} + c_1 \log x + c_2\right)$

3. $x^3\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx} + x^3 y = x^2 + c$

4. $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{ax} + c_4 e^{-ax}$

5. $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}e^x$

6. $y = c_1 \sin^{-1} x + (\sin^{-1} x)^2 + c_2$

7. $e^{2y} = \sec^2 x$

8. $y = \frac{A}{x} + B\left(x + \frac{1}{x}\right)$

9. $y = -xe^x - 4e^x + c_1(2x+7) + c_2 e^{2x}$

10. $y = c_1 \sin 2\log\left(4\tan\frac{x}{2}\right) + c_2 \cos 2\log\left(4\tan\frac{x}{2}\right)$

11. $y = Ce^{-\frac{x^4}{8}}\ x^{\frac{1}{2}} - \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x + \alpha\right)$

12. $y = xe^x(A + Bx)$