প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমত কোনো বিষয়ে সাম্মানিক (Honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে— যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয় সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ-কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন ; যখনই কোন শিক্ষার্থীও এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশকিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার
উপাচার্য

তৃতীয় পুনর্মুদ্রণ ঃ ফেব্রুয়ারি, 2013

ভারত সরকারের দূরশিক্ষা পর্ষদের বিধি অনুযায়ী এবং অর্থানুকূল্যে মুদ্রিত।

Printed in accordance with the regulations and financial assistance of the Distance Education Council, Government of India.

NOSU

পরিচিতি

বিষয় : গণিতবিদ্যা সাম্মানিক স্তর

পাঠক্রম : পর্যায় : EMT 10 : 1 & 2

পর্যায়

1	রচনা	সম্পাদনা
একক 1-10	ড. শান্তিকান্ত চক্রবর্তী	ড. মণীন্দ্রনাথ মিত্র

পর্যায়

2	রচনা	সম্পাদনা
একক 11-18	কনক কান্তি দাশ	ড. রণজিৎ ধর

NOSU

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

EMT – 10

বৈশ্লেষিক স্থিতিবিদ্যা ও প্রবাহী পদার্থের স্থিতিবিদ্যা

(স্নাতক পাঠক্রম)

পর্যায়

1

বৈশ্লেষিক স্থিতিবিদ্যা

একক 1 ❑	বল ও অন্যান্য পরিচিতি	7–13
একক 2 ❑	সমবিন্দু বলসমূহ ও লব্ধি এবং সাম্য	14–47
একক 3 ❑	সমান্তরাল বলসমূহ ও লব্ধি, বলের ভ্রামক ও বলের দ্বন্দ্ব	48–83
একক 4 ❑	বলগোষ্ঠীর স্থৈতিক সমতুলতা	84–113
একক 5 ❑	বলগোষ্ঠীর সাম্য	114–131
একক 6 ❑	ঘর্ষণ বল	132–155
একক 7 ❑	ভারকেন্দ্র	156–189
একক 8 ❑	বীম, তার ও শৃঙ্খল	190–218
একক 9 ❑	কার্য ও কল্পিত কার্যনীতি	219–249
একক 10 ❑	সাম্যের সুস্থিতি	250–276

NOSU

পর্যায়
2

প্রবাহী পদার্থের স্থিতিবিদ্যা

একক 11	❑ বিষয় পরিচিতি (মাধ্যমে ক্রিয়াশীল চাপ, বলসমূহ, পীড়ন ইত্যাদি) প্রবাহী পদার্থের বলাধনী স্থিতিসূত্রসমূহ ও বিভিন্ন ধর্ম	279–289
একক 12	❑ তরল পদার্থের চাপ	290–303
একক 13	❑ সমতলোপরি চাপকেন্দ্র। বিভিন্ন ধর্ম ও উদাহরণ	304–322
একক 14	❑ তলোপরি ক্রিয়ারত বলগোষ্ঠী	323–336
একক 15	❑ ঘূর্ণায়মান মাধ্যমের স্থিতি	337–352
একক 16	❑ আর্কিমেডিসের সূত্র, ভাসমান এবং নিমজ্জিত বস্তুর সাম্য	353–367
একক 17	❑ ভাসমান বস্তুর সাম্যের সুস্থিতি ও পরাকেন্দ্র	368–387
একক 18	❑ বায়ুমণ্ডলের সাম্য	388–404
	পরিভাষা	404–406

একক 1 ❑ বল ও অন্যান্য পরিচিতি (Force and other Ideas)

গঠন

1.1 প্রস্তাবনা

1.2 উদ্দেশ্য

1.3 বল (Force)

1.4 দৃঢ় বস্তু (Rigid Body)

1.5 দুটি বলের সাম্যাবস্থা (Equilibrium of two Forces)

1.6 বলের প্রচলনমূলক নীতি (Principle of Transmissibility of Forces)

1.7 বলের স্বাতন্ত্র্য নীতি (Principle of Independence of Action of Forces)

1.8 বলের সামন্তরিক সূত্র (Parallelogram Law of Forces)

1.9 স্থিতিবিদ্যার ভিত্তি

1.10 বিভিন্ন প্রকারের বল (Different types of Forces)

1.11 সারাংশ

1.12 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1.1 প্রস্তাবনা

যে সকল বস্তু পারিপার্শ্বিকের সাপেক্ষে স্থির আছে, তাদের স্থিতির কারণ অনুসন্ধান করাই বৈশ্লেষিক স্থিতিবিদ্যার উদ্দেশ্য। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় : একটি ভারী বস্তু একটি টেবিলের উপর স্থিরভাবে আছে ; এখানে বস্তুটির সাম্যাবস্থা কি কি বলের অধীনে সম্ভব হল সেটাই আমাদের বিবেচ্য। আবার একটি স্থিরদৈর্ঘ্য তারের একপ্রান্ত থেকে একটি ভারী বস্তু যদি এমনভাবে থাকে যে তারটি উল্লম্ব (Vertical) অবস্থায় থাকে, তবে বস্তুটির উপর কি কি বল ক্রিয়া করছে আর তাদের মধ্যে সম্বন্ধ কি—এটা জানাও আমাদের উদ্দেশ্য।

1.2 উদ্দেশ্য

এই এককে বৈশ্লেষিক স্থিতিবিদ্যার প্রাথমিক ধারণাগুলি ব্যাখ্যা করা হয়েছে। এটি অধ্যয়ন করলে আপনি

- বল কাকে বলে, কোন দৃঢ়বস্তুর স্থিতি সম্বন্ধে জানবার জন্য প্রযুক্ত বলের দিক, মান ইত্যাদির প্রয়োজনীয় জ্ঞান প্রয়োজন, সে সম্বন্ধে জানতে পারবেন।
- বল কি প্রকারের হতে পারে সেটা জানতে পারবেন।
- বলের ক্রিয়ারেখা (line of action) সম্বন্ধে জানতে পারবেন।
- দৃঢ়বস্তু সম্বন্ধে ধারণা করতে পারবেন।
- দুইটি বল কিভাবে ও কখন একটি বলে পরিণত হয়, তাহা জানতে পারবেন।

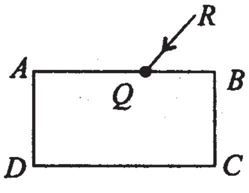
1.3 বল (Force)

স্থিতিবিদ্যায় প্রধান আলোচ্য বিষয় হল কোন বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বলসমূহের সাম্য ইত্যাদি। অতএব, প্রথমে বল সম্বন্ধে আমাদের ধারণা স্পষ্ট করা প্রয়োজন।

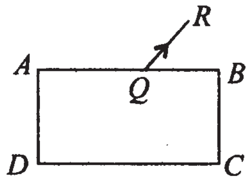
(a) বল বস্তুর একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত হয়, অর্থাৎ বলের একটি প্রয়োগবিন্দু আছে।

(b) বলের একটি প্রয়োগরেখা বা ক্রিয়ারেখা (line of action) আছে অর্থাৎ প্রয়োগবিন্দুগামী একটি রেখা বরাবর বলটি ক্রিয়া করে।

(c) বলের একটি দিক আছে অর্থাৎ শুধু ক্রিয়ারেখা জানলেই হবে না—একই ক্রিয়ারেখায় বলটির সম্ভাব্য দুইটি দিকের একটিকে নির্দিষ্টভাবে জানতে হবে। যেমন, 1(a) নং চিত্রে $ABCD$ বস্তুটির Q বিন্দুতে একটি বল ক্রিয়া করে। তীর চিহ্ন দিয়ে বোঝান হচ্ছে যে বলটির দিক হল R থেকে Q-এর দিকে। 1(b) চিত্রে বলের দিক পূর্বের দিকের বিপরীত অর্থাৎ Q থেকে R-এর দিকে।



1(a) নং চিত্র



1(b) নং চিত্র

(*d*) প্রত্যেকটি বলের একটি মান আছে। অর্থাৎ একটি নির্দিষ্ট এককের সাহায্যে বলের মানের পরিমাপ প্রকাশ করা হয়। আমরা বল বোঝাতে এভাবে বলতে পারি—P মানবিশিষ্ট একটি বল বস্তুর A বিন্দুতে উত্তর-পূর্ব দিকে ক্রিয়া করছে। অর্থাৎ এর প্রয়োগবিন্দু হল A, ক্রিয়ারেখা হল উত্তর-পূর্ব দিক অর্থাৎ দিকটি উত্তর ও পূর্ব দিকের সহিত 45^o কোণ করিয়া আছে। এবং বলটির মান হল P একক। নিউটনের গতিসূত্র অনুসারে বস্তুটির বলের দিকে একটি বলপ্রসূত ত্বরণ সৃষ্টি হয়, যে ত্বরণের মান পাওয়া যায় বলটির মানকে বস্তুটির ভরবেগ দিয়ে ভাগ করলে।

1.4 দৃঢ়বস্তু (Rigid Body)

একটি বস্তুকে তখনই দৃঢ়বস্তু বলা হবে যদি উহা যে সমস্ত কণা (particle) দ্বারা গঠিত তাদের পারস্পরিক অবস্থান এমন যে, যে-কোন দুটির মধ্যে দূরত্ব সর্বদা অপরিবর্তিত থাকে। ফলে একটি দৃঢ়বস্তুর A, B, C তিনটি কণা হলে, দৈর্ঘ্য AB, BC, CA অপরিবর্তিত এবং AB, AC-এর মধ্যস্থ কোণ অপরিবর্তিত থাকবে।

দৃঢ়বস্তু বাস্তবে পাওয়া অসম্ভব, কেননা প্রচণ্ড বল প্রয়োগ করে কোন বস্তুর আয়তন ও রূপ পরিবর্তন করা যায়। গাণিতিক আদর্শ হিসাবে আমরা দৃঢ়বস্তুর অস্তিত্ব স্বীকার করব এবং বলসমূহ দৃঢ়বস্তুর উপর ক্রিয়া করছে এটা ধরে নেব (যদি না অন্যভাবে বলা থাকে)।

1.5 দুটি বলের সাম্যাবস্থা (Equilibrium of two Forces)

একটি দৃঢ়বস্তুর একটি বিন্দুতে দুটি বল প্রযুক্ত হলে তারা বস্তুটিকে সাম্যাবস্থায় রাখবে যদি, এবং কেবলমাত্র যদি, বল দুটির মান সমান হয়, ক্রিয়ারেখা এক হয় এবং পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে। কোন বস্তুর উপর (বস্তুটি যে অবস্থায় থাকুক না কেন) যদি দুটি বিপরীতমুখী সমান মানের দুটি বল কোন বিন্দুতে প্রযুক্ত হয়, তবে (যেহেতু বল দুটি একে অন্যকে নিরস্ত করে) বস্তুটির স্থিতাবস্থা অথবা গতির কোন পরিবর্তন হবে না।

আমরা স্থিতিবিদ্যা আলোচনায় বহুস্থলে এরূপ দুটি বিপরীতমুখী সমান মানবিশিষ্ট বল প্রয়োগ করব।

1.6 বলের প্রচলনমূলক নীতি (Principle of Transmissibility of Forces)

‘কোন দৃঢ়বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলের ক্রিয়ারেখার যে কোন বিন্দুকে বলের প্রয়োগবিন্দু ধরা যেতে পারে।’ (অবশ্য প্রয়োগবিন্দুটি দৃঢ়বস্তুর সঙ্গে দৃঢ়ভাবে সংযুক্ত হতে হবে।)

এখানে বলা আবশ্যক যে বস্তুটির দৃঢ় (rigid) হওয়া প্রয়োজন। বস্তুটির আয়তন বা আকৃতি যদি

পরিবর্তনক্ষম হয়, তবে এই নীতি প্রযোজ্য হবে না। সেক্ষেত্রে বলের প্রয়োগবিন্দুর উপর বলের ফল নির্ভর করে।

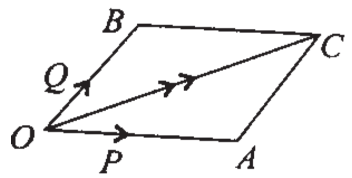
1.7 বলের স্বাতন্ত্র্য নীতি (Principle of Independence of Action of Forces)

'প্রতিটি বল বস্তুর উপর প্রযুক্ত অন্যান্য বলের থেকে নিরপেক্ষ ভাবে ক্রিয়া করে। অর্থাৎ প্রত্যেকটি বল নিজস্ব ক্রিয়া (অর্থাৎ ভরবেগের পরিবর্তন নিজ ক্রিয়ারেখার দিকেও বলটির মান অনুপাতে) করে। ঐ বস্তুর উপর অন্যান্য বল প্রযুক্ত হউক বা না হউক তাহাতে কিছু ব্যতিক্রম হয় না।

1.8 বলের সামন্তরিক সূত্র (Parallelogram Law of Forces)

একটি বস্তুর উপর প্রযুক্ত দুটি বলের একই প্রয়োগ বিন্দু হলে, বল দুটির ক্রিয়া একটিমাত্র বল দ্বারা রূপায়িত করা সম্ভব। উহাকে বল দুটির লব্ধি (Resultant) বলা হয়। এটা বলসমূহের সামন্তরিক সূত্র। সূত্রটি এইরূপ :

দুটি বল একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত হলে এবং নির্দিষ্ট কোন মাপক অনুসারে বল দুটিকে একটি সামন্তরিকের দুটি পরস্পরচ্ছেদী বাহু দিয়ে মান ও দিকসহ রূপায়িত করলে, তাহলে ঐ বিন্দুগামী সামন্তরিকটির কর্ণ (Diagonal) দিকে ও মানে প্রযুক্ত বল দুটির লব্ধিকে রূপায়িত করে।



2 নং চিত্র

2 নং চিত্রে P, Q দুটি সমবিন্দু বল একটি নির্দিষ্ট মাপক অনুসারে যথাক্রমে $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ দ্বারা মানে ও দিকে রূপায়িত হয়েছে। অর্থাৎ, P ও Q-এর মান OA ও OB দৈর্ঘ্যের অনুপাতী। সামন্তরিক সূত্র অনুসারে $OACB$ সামন্তরিকের কর্ণ $\overrightarrow{OC}$, P ও Q বল দুটির লব্ধি বল R অর্থাৎ R বলটির মান OC-এর অনুপাতী।

মন্তব্য : উপরের সূত্রটি একটি পরীক্ষালব্ধ সত্য।

1.9 স্থিতিবিদ্যার ভিত্তি

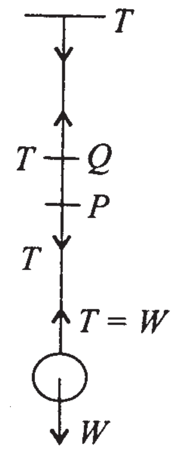
আমরা স্থিতিবিদ্যার আলোচনায় বলের ধর্ম বা **1.5, 1.6, 1.7 ও 1.8** অনুচ্ছেদে আলোচিত হয়েছে—তার উপর ভিত্তি করে বিভিন্ন বৈশ্লেষিক পদ্ধতি যেমন স্থানাঙ্ক জ্যামিতি, কলনবিদ্যা, ভেক্টর, বীজগণিত ইত্যাদির প্রয়োগ করে বিষয়টি ব্যাখ্যা করব।

1.10 বিভিন্ন প্রকারের বল (Different types of Forces)

উদাহরণস্বরূপ কয়েকটি বলের কথা বলা হচ্ছে—

(1) **বস্তুর উপর ওজন বল (Weight) :** একদিকে পৃথিবীর মাধ্যাকর্ষণ নিয়ম অনুসারে প্রতিটি বস্তু ভর-এর সমানুপাতী বল দ্বারা আকৃষ্ট হয়। ঐ বলের কিয়দংশ বস্তুটির পৃথিবীর অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনের জন্য ব্যয়িত হয় এবং অবশিষ্ট বল বস্তুটির উপর ক্রিয়া করে—উহাই ওজন বল (weight)। ওজন বলের দিক হল উল্লম্ব (vertical) দিকে (পৃথিবীমুখী)। m বস্তুটির ভর হলে ওজন বল উহার উপর হবে mg যেখানে g হল অভিকর্ষজ ত্বরণ।

(2) **টান (Tension বা Tensile Force) :** একটি সটান দড়ির একপ্রান্তে একটি ভারীবস্তু (যার ওজন W) বাঁধা হয়ে যদি বস্তুটিকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে ঐ দড়ির সাহায্যে ঝুলিয়ে দেওয়া হয়, তাহলে বস্তুটি সাম্যাবস্থায় থাকে। বস্তুটির উপর ওজন বল ক্রিয়া করছে। বস্তুটি



3 নং চিত্র

যেহেতু সাম্যাবস্থায় আছে, অতএব দড়িটি বস্তুটির উপর বিপরীত একটি বল প্রয়োগ করছে, যাকে আমরা টান বল বলে থাকি। দড়িটির (যার ওজন অতি সামান্য) একটি অংশ PQ-এর উপর যে বল দুটি কাজ করছে 3 নং চিত্রে দেখানো হচ্ছে। সেগুলি হল P বিন্দুতে T নীচের দিকে ও Q বিন্দুতে T উপর দিকে। এই দুটি বল PQকে সাম্যাবস্থায় রাখছে।

(3) **প্রতিক্রিয়া বল (Force of Reaction) :** দুটি বস্তুর পৃষ্ঠদ্বয় একটি বিন্দুতে পরস্পর স্পর্শ করলে ঐ বিন্দুতে প্রতিটি বস্তু দ্বারা অপরটির উপর একটি বল প্রযুক্ত হয়। বল দুটি সমান মানের এবং বিপরীতমুখী। এদের প্রতিক্রিয়া বল (Force of Reaction) বলা হয়। যদি বস্তু দুটির তল মসৃণ হয় তবে বলগুলি স্পর্শকতলের অভিলম্ব দিকে হবে। আর যদি তল দুটি অমসৃণ হয়, তাহলে প্রতিক্রিয়া বলগুলির দিক পরস্পর বিপরীতমুখী ও সমান মানের হলেও উহাদের দিক স্পর্শকতলের অভিলম্ব দিকে হবে না।

(4) **ঘাত বল (Thrust) :** টানের বিপরীতমুখী বল হল ঘাত বল। একটি দণ্ডের মধ্যে যদি দুটি বল এমন ভাবে ক্রিয়া করে যে উহার প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে বলটি প্রান্তবিন্দুমুখী হয় (4 নং চিত্র দেখুন)। এরূপ বলকে ঘাতবল বলা হয়।

4 নং চিত্র

1.11 সারাংশ

বস্তুর উপর বল প্রযুক্ত হলে সে বল সম্বন্ধে সঠিকভাবে জানা, বল প্রভাবে বলটি সাম্যাবস্থায় থাকবে কিনা এসব জানা বৈশ্লেষিক স্থিতিবিদ্যার উদ্দেশ্য।

বলের একটি প্রয়োগবিন্দু, ক্রিয়ারেখা ও মান রয়েছে।

দুটি সমান মানের বল পরস্পর বিপরীতমুখী বস্তুর একটি বিন্দু ক্রিয়াশীল হলে বস্তুটি ঐ বল দুটি সাপেক্ষে সাম্যাবস্থায় থাকবে এবং বল দুটি প্রয়োগের ফলে বস্তুটির অবস্থার কোন হেরফের হবে না।

দৃঢ় বস্তুর ক্ষেত্রে বল ক্রিয়ারেখার যে কোন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল ধরা যেতে পারে। স্থিতিস্থাপক বস্তুর ক্ষেত্রে বলের প্রয়োগবিন্দুর উপর নির্ভর করে তার ফল।

প্রত্যেকটি বল অন্য বল নিরপেক্ষভাবে ক্রিয়াশীল। বল অনেক প্রকারের যেমন, ওজন বল, টান বল, ঘাত বল। দুটি বল একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হলে তাদের লব্ধি একটি বল দ্বারা রূপায়িত হয়।

1.12 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. বলের বৈশিষ্ট্য কী কী?
2. দুই বিপরীতমুখী সমমানবিশিষ্ট বল বস্তুকে কিরূপ প্রভাবিত করে?
3. বিভিন্ন প্রকারের বলের উদাহরণ দিন।
4. কি কি স্বতঃসিদ্ধের উপর ভিত্তি করে বৈশ্লেষিক স্থিতিবিদ্যা রচিত?
5. স্থিতিস্থাপক (Elastic) বস্তুর ক্ষেত্রে বলের প্রচলনমূলক নীতি সত্য কিনা? যুক্তিসহ উদাহরণ দিন।

একক 2 ❑ সমবিন্দু বলসমূহ ও তাহাদের লব্ধি এবং সাম্য (Concurrent Forces—Resultant and Equilibrium)

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা

2.2 উদ্দেশ্য

2.3 দুটি সমবিন্দু বলের লব্ধি বলের মান ও দিক নির্ণয়

2.3.1 বল ও ভেক্টরের মধ্যে সম্পর্ক

2.3.2 দুটি বলের সাম্য

2.3.3 অনুশীলনী

2.4 বলের উপাংশ **(Resolved part of a force)**

2.4.1 বলের বিশ্লেষিতাংশ

2.4.2 সমতলের বলের উপাংশদ্বয়

2.4.3 ত্রিমাত্রিক দেশে বলের উপাংশত্রয়

2.5 একাধিক সমবিন্দু বলের লব্ধি

2.5.1 একাধিক সমবিন্দু ও সমতলীয় বলের লব্ধি

2.5.2 অসমতলীয় সমবিন্দু বলগোষ্ঠীর লব্ধি

2.5.3 অনুশীলনী

2.6 জ্যামিতিক পদ্ধতিতে সমবিন্দু বলগোষ্ঠীর লব্ধি নির্ণয়—বহুভুজ **(Polygon)** অঙ্কন সাহায্যে

2.7 সমবিন্দু বলসমূহের সাম্য **(Equilibrium of concurrent forces)**

2.7.1 সমতলীয় **(Coplanar)** সমবিন্দু বলগোষ্ঠী

2.7.2 তিনটি সমবিন্দু বলের সাম্যাবস্থায় ত্রিভুজ উপপাদ্য

2.7.3 বল ত্রিভুজ উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা

2.7.4 বলগোষ্ঠীর বহুভুজ উপপাদ্য

2.7.5 অনুশীলনী

2.7.6 লামির উপপাদ্য

2.8 সারাংশ

2.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

2.1 প্রস্তাবনা

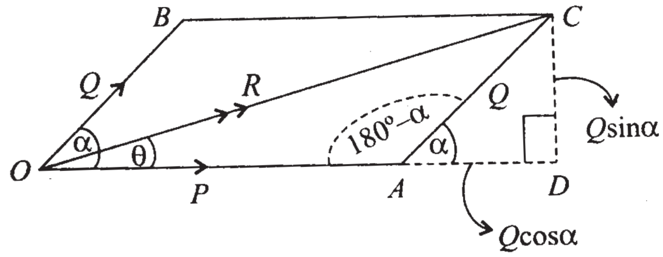
আমরা প্রথম এককে দেখেছি যে দুটি বল একটি বস্তুর একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত হলে ঐ বলদ্বয়ের ফল কেবলমাত্র একটি বলের সাহায্যে পাওয়া যায়। ঐ সূত্রটিকে সামান্তরিক সূত্র বলা হয়। আমরা প্রথমে এই সূত্র অনুসারে দুটি বলের লব্ধি নির্ণয় করব। তারপর এই সূত্রটি পুনঃপুনঃ প্রয়োগ করে তিন বা ততোধিক বলগোষ্ঠীর বেলায় লব্ধি বল নির্ণয় করব। এর ফলে দেখা যাবে যে সমবিন্দু অসীম সংখ্যক বলের বেলায় ঐ বলগোষ্ঠীকে আমরা একটি মাত্র বল দ্বারা রূপায়িত করতে পারি। ঐ লব্ধি বলের মান ও দিক নির্ণয় করাই আমাদের এই এককের প্রধান বিষয়। যখন সমবিন্দু বলগোষ্ঠীর লব্ধির মান শূন্য হয়, তখন ঐ বলগোষ্ঠীকে সাম্যাবস্থায় আছে বলা হয়। অর্থাৎ ঐরূপ বলগোষ্ঠীর ক্রিয়ার ফলে কোন বস্তুর অবস্থার কোন তারতম্য হয় না।

2.2 উদ্দেশ্য

এই এককে দুইটি অথবা তার অধিক সংখ্যক বল একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত হলে, আপনি জানতে পারবেন—

- কি করে ঐ বল সমষ্টিকে একটি বলে পরিণত করা যায়।
- দুটি বল এক বিন্দুতে প্রযুক্ত হলে তাদের লব্ধি বল বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে পাওয়া যায়।
- সসীম সংখ্যক বল এক বিন্দুতে প্রযুক্ত হলে, তাদের লব্ধি নির্ণয় করার জন্য একটি বহুভুজ অঙ্কন করলে পাওয়া যাবে।
- সমবিন্দু বলগোষ্ঠী সাম্যাবস্থায় থাকতে হলে কি কি শর্ত সত্য হতে হবে।

2.3 দুইটি সমবিন্দু বলের লব্ধি বলের মান ও দিক নির্ণয়



1 নং চিত্র

ধরা যাক, একটি বস্তুর O একটি বিন্দু। যেখানে দুটি বল, যাদের মান যথাক্রমে P ও Q, ক্রিয়া করছে। একটি নির্দিষ্ট মাপক অনুসারে 1 নং চিত্রে OA একটি রেখাংশ নিলাম যেখানে O থেকে A-এর দিকে বল P প্রযুক্ত এবং OA দৈর্ঘ P মানকে রূপায়িত করে। একইভাবে Q বলটি রূপায়িত হল OB রেখাংশ দিয়ে যেখানে O থেকে B-এর দিকে Q বলটি প্রসারিত এবং OB-এর দৈর্ঘ Q-এর মানকে রূপায়িত করে। আমরা P, Q দ্বারা OA ও OB দৈর্ঘদ্বয় বোঝাব। OA ও OB-এর মধ্যবর্তী কোণ হল α. $OACB$ সামান্তরিকটি অঙ্কন করা হল। সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী P ও Q বল দুটির লব্ধি বলের দিক ও মান O বিন্দুগামী কর্ণ OC দ্বারা রূপায়িত। লব্ধি বলটিকে R দ্বারা চিহ্নিত করা হল। OC রেখা OA-এর সঙ্গে θ কোণ করে।

ত্রিকোণমিতি থেকে আমরা পাই,

$$OC^2 = OA^2 + AC^2 - 2OA.AC\ cos\ \angle OAC$$

$$= OA^2 + OB^2 + 2OA.OB\ cos\ \angle AOB \quad [\because \angle OAC = 180° - \angle AOB]$$

অতএব, OA, OB ও OC-এর স্থানে যথাক্রমে P, Q ও R লিখে পাচ্ছি।

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2P.Q\ cos\ \alpha \tag{1}$$

OCA ত্রিভুজের ধর্ম থেকে $\dfrac{Q}{\sin\theta} = \dfrac{P}{\sin(\alpha - \theta)}$

অর্থাৎ $\quad (P + Q\ cos\ \alpha)\ \sin\ \theta = Q\ \sin\ \alpha\ cos\ \theta$

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} \tag{2}$$

2.3.1 বল ও ভেক্টরের মধ্যে সম্পর্ক

মন্তব্য : সামান্তরিক সূত্র থেকে আমরা বুঝতে পারছি যে, সমবিন্দু বলের ক্ষেত্রে, দুটি বলের লব্ধি আমরা ভেক্টর তত্ত্ব সাহায্যে নিরূপণ করতে পারি। P বলকে $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টর এবং Q বলকে $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টর দ্বারা রূপায়িত করা যায়। ভেক্টরের যোগের ত্রিভুজ সূত্র অনুযায়ী

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ (ত্রিভুজ যোগসূত্র অনুসারে) যেহেতু $\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ একই ভেক্টর।

অতএব, $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরের যোগফল হল $\overrightarrow{OC}$ ভেক্টর। অতএব ভেক্টর সূত্র সাহায্যে দুটি বল ভেক্টরের যোগফল বলের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী লব্ধির সমান। আমরা এরপর থেকে প্রয়োজন অনুসারে ভেক্টর যোগ সাহায্যে বলের লব্ধি নির্ণয় করব।

2.3.2 দুইটি বলের সাম্য

আমরা 2.3– তে (1) থেকে দেখেছি, দুটি সমবিন্দু বলের লব্ধি হল R যেখানে

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$$
$$= (P + Q\cos\alpha)^2 + Q^2\sin^2\alpha \tag{3}$$

অতএব, P, Q বল দুটি সাম্যাবস্থায় থাকতে হলে $R = 0$ হতে হবে। (3) থেকে পাচ্ছি $R = 0$ হবার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল

$$P + Q\cos\alpha = 0 \text{ এবং } Q\sin\alpha = 0 \tag{4}$$

যেহেতু $P>0$, $Q>0$, অতএব (4) থেকে পাচ্ছি $\sin\alpha = 0$ অর্থাৎ $\alpha = 0$ অথবা $\alpha = \pi$.

$\alpha = 0$ হতে পারে না, কেননা সেক্ষেত্রে প্রথম শর্তটি দাঁড়ায় $P + Q = 0$ যেটা অসম্ভব।

$\alpha = \pi$ হলে প্রথম শর্তটি হল $P - Q = 0$ অর্থাৎ $P = Q$.

অতএব, P, Q বল দুটির লব্ধি শূন্য হওয়ার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল

$$\boxed{\alpha = \pi \text{ এবং } P = Q}$$

অর্থাৎ বল দুটির মান পরস্পর বিপরীতমুখী এবং সমান মান বিশিষ্ট হলে তারা সাম্যাবস্থায় থাকবে।

2.3.3 অনুশীলনী

1. দুটি প্রদত্ত বলের লব্ধি বলের মান উহাদের মধ্যবর্তী কোণ কত হলে সর্বাধিক হয়?

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$$
$$= (P + Q)^2 - 2PQ(1 - \cos\alpha)$$

প্রথম পদটি ধনাত্মক, দ্বিতীয় পদটি অধনাত্মক। অতএব, R বৃহত্তম মানবিশিষ্ট হবে যদি $1 - \cos\alpha = 0$ অর্থাৎ $\alpha = 0$ হয়, এবং তখন R-এর মান $P + Q$.

2. α কোণের পরিমাণ কত হলে R-এর মান সর্বনিম্ন হবে?

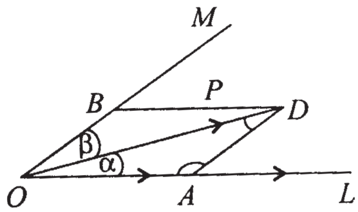
সমাধান : যেহেতু $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$ এবং P^2, Q^2 ধনাত্মক

অতএব নিম্নতম মান হবে যখন $2PQ\cos\alpha$ নিম্নতম মানবিশিষ্ট হয়, অর্থাৎ যখন $\cos\alpha = -1$ বা $\alpha = 180°$। অতএব, বল দুটি যদি পরস্পর বিপরীতমুখী হয়, তখন R-এর মান নিম্নতম এবং $|P - Q|$ এর সমান।

2.4 বলের উপাংশ (Component of a Force)

(1 নং চিত্র) সামান্তরিক সূত্র অনুসারে আমরা দেখেছি যে সামান্তরিকের দুটি বাহুর দিকে দুটি বলের লব্ধি ঐ সামান্তরিকের ঐ বিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা রূপায়িত হয়। আমরা এখানে বল R-এর উপাংশ P ও Q-কে বলতে পারি।

সংজ্ঞা : উপাংশ (একই সমতলে দুটি দিকে) : ধরা যাক, দুইটি সরলরেখা OL ও OM দেওয়া আছে এবং O বিন্দুতে P বল OL ও OM-এর সমতলে ক্রিয়া করছে।



2 নং চিত্র

যদি $\overrightarrow{OD}$ দ্বারা P বল রূপায়িত হয়, তবে D-এর মধ্য দিয়ে OL ও OM-এর সমান্তরাল রেখাদ্বয় অঙ্কন করলে $OADB$ এই সামান্তরিক পাওয়া যায়, যার কর্ণ OD এবং OA, OB দুটি সন্নিহিত বাহু।

এখানে OA ও OB দ্বারা রূপায়িত বলদ্বয়কে যথাক্রমে OL ও OM দিকে P বলের উপাংশ বলা হবে।

সামান্তরিক $OADB$ -এর ODA ত্রিভুজ ধর্ম থেকে পাই

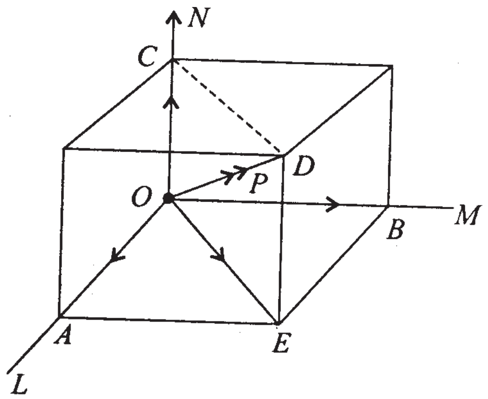
$$\frac{OA}{\sin\beta} = \frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{OD}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore \; O\text{L দিকে উপাংশ} = \frac{P\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$OM \quad ,, \quad ,, \quad = \frac{P\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

মন্তব্য : যদি $\alpha + \beta = 90°$ হয়, তবে $\sin\beta = \cos\alpha$ এবং OL ও OM দিকে উপাংশ দুটি হয় $P\cos\alpha$ ও $P\sin\alpha$.

উপাংশ (তিনটি অসমতলীয় দিকে) : ধরা যাক, OL, OM, ON তিনটি অসমতলীয় দিক এবং P একটি বল (যাহা $\overrightarrow{OD}$ দ্বারা রূপায়িত) O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। এখন OL, OM, ON দিকে P বলটির উপাংশসমূহ পেতে হলে OD -কে কর্ণ ও OL, OM, ON দিকে প্রসারিত তিনটি ধারবিশিষ্ট একটি ষড়তলক (Parallelopiped) তৈরী করলে উপাংশগুলি ষড়তলকের ধারগুলি দ্বারা রূপায়িত বলসমূহ হবে।



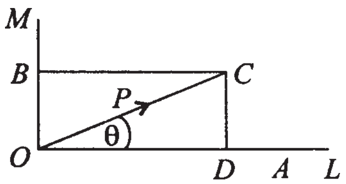
3 নং চিত্র

3 নং চিত্রে $\overrightarrow{OD}$ দ্বারা P রূপায়িত। OL, OM, ON দিকে তিনটি ধার এবং OD একটি কর্ণসহ ষড়তলক (যাদের বিপরীত তলগুলি সমান্তরাল) অঙ্কন করা হয়েছে $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ দ্বারা রূপায়িত

বল তিনটির লব্ধি হল $\overrightarrow{OD}$, কারণ, সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$-এর লব্ধি হল $\overrightarrow{OE}$, আবার $\overrightarrow{OE}$ ও $\overrightarrow{OC}$ বলদ্বয়ের লব্ধি হল $\overrightarrow{OD}$ (সামান্তরিক সূত্র অনুসারে) যেহেতু $OCDE$ একটি সামান্তরিক। অতএব দেখা গেল, $\overrightarrow{OD}$ বলটি $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{OC}$ এই তিনটি বল দ্বারা রূপায়িত এবং বল তিনটি OL, OM, ON দিকে প্রসারিত। $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{OC}$ বল তিনটিকে P বলের ঐ তিনদিকে উপাংশ বলা হয়।

2.4.1 বলের বিশ্লেষিতাংশ (Resolved part of a Force in a Direction)

সংজ্ঞা : একটি বল P, O বিন্দুতে OC দিকে প্রসারিত আছে। O গামী অন্য যে-কোন দিক OL দেওয়া হলে, P বলটির OL দিকে বিশ্লেষিতাংশ হল বল $P\cos\theta$, যেখানে θ হল P বলের ক্রিয়ারেখা ও OL দিকের মধ্যবর্তী কোণ।



4 নং চিত্র

$\overrightarrow{OD}$ বলের C বিন্দু থেকে OL দিকের উপর লম্ব CD অঙ্কন করলে $OA = OD\cos\theta = P\cos\theta$ অতএব, $\overrightarrow{OA}$ হল OL দিকে P বলের বিশ্লেষিতাংশ।

2.4.2 সমতলে বলের উপাংশদ্বয়

অনুরূপভাবে, OM যদি O বিন্দুগামী এবং OL, OC-এর সমতলে একটি রেখা হয় এবং $OM \perp OL$ হয়, তবে OM দিকে $\overrightarrow{OD}$ বলের বিশ্লেষিতাংশ হল $\overrightarrow{OB}$, যেখানে

$$\begin{aligned} OB &= P\cos(90^\circ - \theta) \\ &= P\sin\theta \end{aligned}$$

অতএব, দেখা গেল দুটি পরস্পর লম্ব দিকে একটি বলের বিশ্লেষিতাংশ $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ হলে,

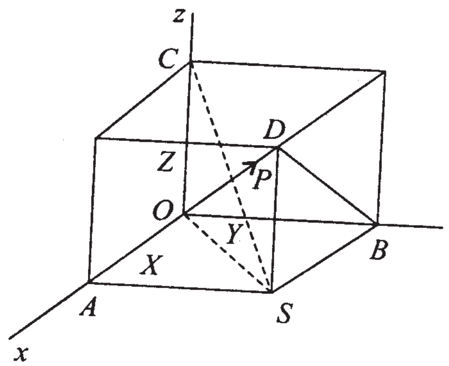
$$OA^2 + OB^2 = OD^2$$

OL, OM যদি যথাক্রমে x ও y অক্ষের সমান্তরাল হয় এবং $OD = X$, $OE = Y$ লেখা হয়, তবে

$$X^2 + Y^2 = OC^2 = P^2$$

2.4.3 ত্রিমাত্রিক দেশে বলের উপাংশসমূহ

যদি একটি বিন্দু O তে P বল OD রেখায় প্রযুক্ত হয় এবং OL, OM, ON তিনটি পরস্পর লম্ব রেখা হয়, তাহলে OL, OM, ON দিকে OC-এর অভিক্ষেপসমূহ যথাক্রমে X, Y, Z $(OA = X,\ OB = Y,\ OC = Z)$ হলে আমরা পাই



5 নং চিত্র

$$
\begin{aligned}
OD^2 &= OB^2 + BD^2 && [\because DB \perp OB] \\
&= OB^2 + DS^2 + SB^2 && [\because DS \perp SB] \\
&= OB^2 + OC^2 + OA^2
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ P^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

মন্তব্য : OA, OB, OC দিকে যথাক্রমে x-অক্ষ, y-অক্ষ, z-অক্ষ প্রসারিত হলে P বলের রূপায়ক $\overrightarrow{OD}$ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দু D-এর স্থানাঙ্ক হল (OA, OB, OC) $OA = X$, $OB = Y$, $OC = Z$ লিখে আমরা $\overrightarrow{OD}$ ভেক্টরকে তিনটি ভেক্টরের যোগ হিসাবে লিখতে পারি। ধরা যাক, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ হল তিনটি পরস্পরলম্বী একক ভেক্টর যারা যথাক্রমে x, y, z অক্ষদিকে প্রসারিত। তাহলে

$$\overrightarrow{OD} = \vec{i}\,OA + \vec{j}\,OB + \vec{k}\,OC = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z$$

অতএব, $$\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OD} = |OD|^2 = \left(\vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z\right).\left(\vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\vec{i}.\vec{i}\right)X^2 + \left(\vec{j}.\vec{j}\right)Y^2 + \left(\vec{k}.\vec{k}\right)Z^2 \\
&\quad +2\left(\vec{i}.\vec{j}\right)XY + 2\left(\vec{i}.\vec{k}\right)XZ + 2\left(\vec{j}.\vec{k}\right)YZ \\
&= X^2 + Y^2 + Z^2
\end{aligned}
$$

যেহেতু $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = O$ এবং $\left(\vec{i}.\vec{i}\right) = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$

2.5 একাধিক সমবিন্দু বলের লব্ধি

আমরা দুটি ক্ষেত্রের জন্য পৃথকভাবে লব্ধি নির্ণয় করব।

2.5.1 একাধিক সমবিন্দু সমতলীয় বলের লব্ধি (Resultant of a System of Coplanar Concurrent Forces) :

ধরা যাক $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n$ n সংখ্যক বল O বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং $O\mathrm{L}_1$, $O\mathrm{L}_2$, ... , $O\mathrm{L}_\mathrm{n}$ ঐ বলগুলির ক্রিয়ারেখা এবং তারা সমতলীয়। যেহেতু বলগুলি সমতলীয়, ঐ সমতলে O_x, O_y দুটি পরস্পর লম্ব দুটি দিকে নেওয়া যায়। Ox, Oy দিকে বলগুলির বিশ্লেষিতাংশসমূহ যথাক্রমে (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n)

ধরা যাক, ভেক্টর অঙ্কপাতন (notation) সাহায্যে বলগুলিকে নিম্নের মত করে লিখতে পারি।

$\vec{P}_1 = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}$, $\vec{P}_2 = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j}$, ইত্যাদি ..., $\vec{P}_n = X_n\vec{i} + Y_n\vec{j}$

যেখানে $\vec{i}, \vec{j}$ হল O_x, O_y দিকে একক ভেক্টর।

উপপাদ্য : এখন আমরা প্রমাণ করব যে $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \cdots, \vec{P}_n$ বলগুলির লব্ধি হল একটি বল $\vec{R}$ যার Ox, Oy দিকে বিশ্লেষিতাংশ হল X, Y যেখানে $X = \sum_{r=1}^{n} X_r$, $Y = \sum_{r=1}^{n} Y_r$ অর্থাৎ $\vec{R} = \vec{i}X + \vec{j}Y$

প্রমাণ : দুটি বলের ক্ষেত্রে অর্থাৎ P_1, P_2-এর ক্ষেত্র বিশ্লেষিতাংশ (X_1, Y_1) ও (X_2, Y_2) যথাক্রমে Ox, Oy দিকে। অতএব, P_1, P_2 বল দুটিকে $X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}$ এবং $X_2\vec{i} + Y_2\vec{j}$ হিসাবে লিখতে পারি। অতএব, বল দুটির লব্ধি বল হল

$$(X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}) + (X_2\vec{i} + Y_2\vec{j}) = (X_1 + X_2)\vec{i} + (Y_1 + Y_2)\vec{j}$$

[ভেক্টর নিয়ম অনুযায়ী] (i)

(i) থেকে আমরা দেখছি বল দুটির লব্ধি বল হল একটি বল যার Ox ও Oy দিকে বিশ্লেষিতাংশ হল যথাক্রমে $X_1 + X_2$ এবং $Y_1 + Y_2$. অতএব আমাদের উপপাদ্যটি $n = 1$ এবং $n = 2$ এর জন্য সত্য। উপপাদ্যটিকে m সংখ্যক বলের জন্য সত্য ধরলে অর্থাৎ

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \cdots + \vec{P}_m = \vec{i}\sum_{r=1}^{m} X_r + \vec{j}\sum_{r=1}^{m} Y_r$$

সত্য ধরে আমরা দেখি যে,

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \cdots + \vec{P}_m + \vec{P}_{m+1} = (\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \cdots + \vec{P}_m) + \vec{P}_{m+1}$$

$$= \left(\vec{i}\sum_{r=1}^{m} X_r + \vec{j}\sum_{r=1}^{m} Y_r\right) + (X_{m+1}\vec{i} + \vec{j}Y_{m+1})$$

$$= \vec{i}\sum_{r=1}^{m+1} X_r + \vec{j}\sum_{r=1}^{m+1} Y_r$$

অতএব উপপাদ্যটি $m + 1$ বলের জন্য সত্য। কিন্তু আমরা দেখেছি যে উপপাদ্যটি $n = 1, 2$-এর জন্য সত্য। অতএব আরোহ প্রণালী দিয়ে বলতে পারি যে উপপাদ্যটি যে-কোন n সংখ্যক বলের জন্য সত্য।

অতএব, প্রমাণিত হল যে, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n$ সমতলীয় বল সমবিন্দু হলে তাদের লব্ধি একটি বল $\vec{F}$ যেখানে

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

এবং $$F^2 = X^2 + Y^2$$

যেখানে $$X = \sum_{r=1}^{n} X_r,\ Y = \sum_{r=1}^{n} Y_r$$

এবং $\vec{F}$ বলটি x অক্ষের সঙ্গে θ কোণ করলে $X = |\vec{F}|\cos\theta,\ Y = |\vec{F}|\sin\theta$

অর্থাৎ $\tan\theta = \dfrac{Y}{X}$

অতএব লব্ধি বলের মান হল $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ এবং দিক Ox অক্ষের সহিত $\tan^{-1}\dfrac{Y}{X}$ কোণ করে।

2.5.2 অসমতলীয় সমবিন্দু বলগোষ্ঠীর লব্ধি

উপপাদ্য : O বিন্দুতে $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \cdots, \vec{P}_n$ বলগুলি ক্রিয়া করলে এবং Ox, Oy, Oz তিনটি পরস্পর লম্ব রেখার দিকে উহাদের বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে (X_1, Y_1, Z_1) ... (X_n, Y_n, Z_n) হলে ঐ বলগোষ্ঠীর লব্ধি বল $\vec{R}$ যেখানে R-এর বিশ্লেষিতাংশ হল

$$X,\ Y,\ Z \text{ এবং } X = \sum_{r=1}^{n} X_r,\ Y = \sum_{r=1}^{n} Y_r,\ Z = \sum_{r=1}^{n} Z_r$$

প্রমাণ : আমরা ভেক্টরের সাহায্যে বলগুলিকে প্রকাশ করে তাদের লব্ধি ভেক্টর যোগ করে পাই। অতএব

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n = (\vec{i}X_1 + \vec{j}Y_1 + \vec{k}Z_1) + (\vec{i}X_2 + \vec{j}Y_2 + \vec{k}Z_2)$$
$$+ \cdots + (\vec{i}X_n + \vec{j}Y_n + \vec{k}Z_n)$$
$$= \vec{i}\sum_{r=1}^{n} X_r + \vec{j}\sum_{r=1}^{n} Y_r + \vec{k}\sum_{r=1}^{n} Z_r$$
$$= \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z$$

অতএব বলগোষ্ঠী একটি বল $\vec{R}$-এ পরিণত হয়, যেখানে

$$\vec{F} = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z$$
$$F^2 = \vec{F}.\vec{F} = X^2 + Y^2 + Z^2$$

এবং $$X = \sum_{r=1}^{n} X_r,\ Y = \sum_{r=1}^{n} Y_r,\ Z = \sum_{r=1}^{n} Z_r$$

$$X_r = \left|\vec{F}_r\right| \cos\alpha$$
$$Y_r = \left|\vec{F}_r\right| \cos\beta$$
$$Z_r = \left|\vec{F}_r\right| \cos\gamma$$

যেখানে $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ হল $\vec{F}_r$ বল-এর ক্রিয়ারেখার দিক কোসাইন। অর্থাৎ $\vec{F}_r$ বলের ক্রিয়ারেখা O_x, O_y, O_z সঙ্গে যথাক্রমে α, β, γ কোণ করছে।

2.5.3 অনুশীলনী

1. xy সমতলে দুটি সমবিন্দু বলের Ox, Oy দিকে বিশ্লেষিতাংশদ্বয় যথাক্রমে (10, 15), (5, 8) হলে তাহাদের লব্ধি বল নির্ণয় করুন।

   উত্তর : লব্ধি বলের বিশ্লেষিতাংশ (15, 23)। অতএব এর মান $\sqrt{15^2 + 23^2}$ এবং উহা Ox অক্ষের সঙ্গে $\tan^{-1}\frac{23}{15}$ কোণ করে।

2. 10 এককের বল একটি বস্তুর একটি বিন্দুতে পূর্বদিকে ক্রিয়া করে। অপর একটি বল 12 এককবিশিষ্ট এবং উত্তর-পূর্বদিকে ক্রিয়া করে। বল দুটির লব্ধি বল নির্ণয় করুন।

   উত্তর : সামান্তরিক সূত্র অনুসারে

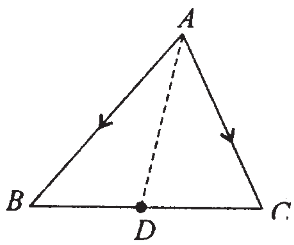
$$\text{লব্ধি বলের মান } = \sqrt{12^2 + 10^2 + 2.12.10\cos 45°}$$

   এবং লব্ধি বলের দিক পূর্বদিকের সহিত θ কোণ করে যেখানে

$$\theta = \tan^{-1}\frac{12.\sin 45°}{10 + 12\cos 45°} = \tan^{-1}\frac{12}{10\sqrt{2} + 12}$$

3. ABC ত্রিভুজের A বিন্দুতে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ বল ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি নির্ণয় করুন।

   উত্তর :



6 নং চিত্র

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ = লব্ধি বল।

D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু হলে ভেক্টরের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$$

এবং $$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

অতএব $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$$

কিন্তু $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ দুটি পরস্পর সমান বিপরীতমুখী ভেক্টর। অতএব $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$ একটি শূন্য ভেক্টর।

অতএব, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ বলদ্বয়ের লব্ধি বলের মান $2\overrightarrow{AD}$.

4. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ তিনটি বল O বিন্দুতে প্রযুক্ত। $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = a$ হলে এবং এরা পরস্পর লম্ব হলে এদের লব্ধি বল কত?

   উত্তর : $\sqrt{3}a$ = লব্ধি বলের মান এবং বলটির ক্রিয়ারেখা বল তিনটির সহিত $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ কোণ উৎপন্ন করে।

5. P, Q, R বল তিনটি একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং এদের ক্রিয়ারেখাগুলির দিক কোসাইন যথাক্রমে (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3)। লব্ধি বল নিরূপণ করুন।

   উত্তর : লব্ধি বলের মান L এবং তার দিক কোসাইন l, m, n হলে

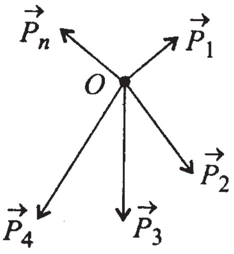
$$\mathrm{L}l = Pl_1 + Ql_2 + Pl_3 \quad \text{(x-অক্ষের দিকে বিশ্লেষিতাংশ নিলে)}$$

$$\mathrm{L}m = Pm_1 + Qm_2 + Rm_3 \quad \text{(y-অক্ষের দিকে বিশ্লেষিতাংশ নিলে)}$$

$$\mathrm{L}n = Pn_1 + Qn_2 + Rn_3 \quad \text{(z-অক্ষের দিকে বিশ্লেষিতাংশ নিলে)}$$

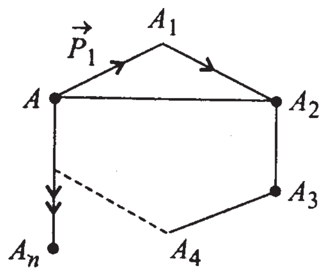
এবং
$$\begin{aligned}
\mathrm{L}^2 = \mathrm{L}^2(l^2 + m^2 + n^2) &= (Pl_1 + Ql_2 + Rl_3)^2 + (Pm_1 + Qm_2 + Rm_3)^2 \\
&\quad + (Pn_1 + Qn_2 + Rn_3)^2 \\
&= P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2) \\
&\quad + 2RP(l_3l_1 + m_3m_1 + n_3n_1) \\
&\quad + 2QR(l_2l_3 + m_2m_3 + n_2n_3) \\
&= P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos(\widehat{P, Q}) \\
&\quad + 2RP\cos(\widehat{R, P}) + 2QR\cos(\widehat{Q, R})
\end{aligned}$$

2.6 জ্যামিতিক পদ্ধতিতে সমবিন্দু বলগোষ্ঠীর লব্ধি নির্ণয়—বহুভুজ (Polygon) অঙ্কন সাহায্যে



7 নং চিত্র

ধরা যাক, নির্দিষ্ট বিন্দু O তে $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \cdots, \vec{P}_n$ বলগুলি ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি বল সামান্তরিক সূত্র বা ভেক্টরের ত্রিভুজ যোগফল সূত্র সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। আমরা এখানে দ্বিতীয় পদ্ধতিটি প্রয়োগ করে লব্ধি বল নির্ণয় করব।



8 নং চিত্র

A একটি বিন্দু নেওয়া গেল। নির্দিষ্ট একটি মাপক অনুসারে $\overrightarrow{AA_1}$ দ্বারা $\vec{P}_1$ বল রূপায়িত হল। ঐ একই মাপক অনুযায়ী $\vec{P}_2$ বলের সমান ও একদিকবিশিষ্ট $\overrightarrow{A_1A_2}$ ভেক্টর নেওয়া হল। এভাবে প্রত্যেকটি বলকে $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \cdots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ দ্বারা রূপায়িত করা হল। আমরা প্রমাণ করব যে $\overrightarrow{AA_n}$ হল সমগ্র বলগোষ্ঠীর লব্ধি (মানে ও দিকে)।

প্রমাণ : AA_2, AA_3, ..., AA_n যোগ করা হল। ত্রিভুজ যোগ নিয়ম অনুযায়ী

$$\overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

আবার $$\overrightarrow{AA_3} = \overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{A_2A_3}$$

$$= \left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right) + \vec{P}_3$$

এভাবে করে গেলে আমরা পাই (আরোহী প্রণালী অনুসারে)

$$\overrightarrow{AA_n} = \overrightarrow{AA_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

$$= (\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \cdots + \vec{P}_{n-1}) + \vec{P}_n$$

অতএব প্রমাণিত হল যে, $\overrightarrow{AA_n}$ সমগ্র সমবিন্দু বলগোষ্ঠীর লব্ধি।

2.7 সমবিন্দু বলসমূহের সাম্য (Equilibrium of Concurrent Forces)

ধরা যাক, একটি বিন্দু O তে $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \cdots, \vec{P}_n$ বলগুলি প্রযুক্ত আছে। পূর্বের উপপাদ্য অনুসারে তাদের লব্ধি বল $\vec{R}$ হলে

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \cdots + \vec{P}_n \qquad \text{(i)}$$

যদি পরস্পর লম্ব তিনটি দিক Ox, Oy, Oz নেওয়া যায় এবং

$$\vec{P}_n = \vec{i}X_r + \vec{j}Y_r + \vec{k}Z_r \quad (R = 1, 2, ..., n)$$

যেখানে $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ একক ভেক্টর Ox, Oy, Oz দিকে।

অতএব, $\vec{R}$-এর বিশ্লেষিতাংশগুলি হল (X, Y, Z)

যেখানে $\vec{R} = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z$

এবং (i) থেকে $$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{r=1}^{n} X_r$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = \sum_{r=1}^{n} Y_r$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = \sum_{r=1}^{n} Z_r$$

এখন বলগোষ্ঠী সাম্যাবস্থায় থাকে যদি এবং কেবলমাত্র যদি তাহার লব্ধি বলের মান শূন্য হয়। অর্থাৎ $R^2 = 0$ হয়, কিন্তু $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$. অতএব, সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্তহল $X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0$.

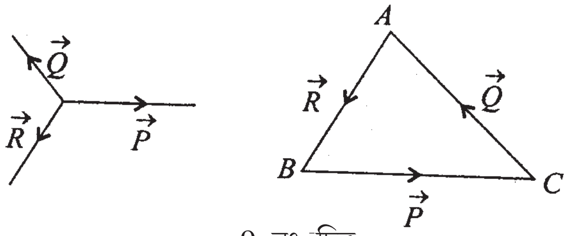
2.7.1 সমতলীয় (Coplanar) সমবিন্দু বলগোষ্ঠী

সমবিন্দু বলগোষ্ঠী সমতলীয় (Coplanar) হলে সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল যে, যে কোন দুটি পরস্পর লম্বদিকে বিশ্লেষিতাংশ শূন্য হবে। (প্রমাণ 3.9 থেকে বোঝা যাচ্ছে, কেননা সমতলটির লম্বদিকে বলগুলির বিশ্লেষিতাংশ সর্বদাই শূন্য।)

2.7.2 তিনটি সমবিন্দু বলের সাম্যাবস্থার জন্য বলের ত্রিভুজ উপপাদ্য (Theorem on Triangle of Forces)

'সমবিন্দু তিনটি বল যদি একটি ত্রিভুজের বাহু তিনটি দ্বারা মানে, দিকে ও ক্রমে রূপায়িত করা যায়, তবে বল তিনটি সাম্যে থাকিবে।'

প্রমাণ : ধরা যাক, নির্দিষ্ট কোন মাপক অনুযায়ী তিনটি সমবিন্দু বল $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ একটি ত্রিভুজ ABC-এর বাহু $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ ও $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা সম্পূর্ণ রূপ মানে, দিকে ও ক্রমে রূপায়িত করা যায়।



9 নং চিত্র

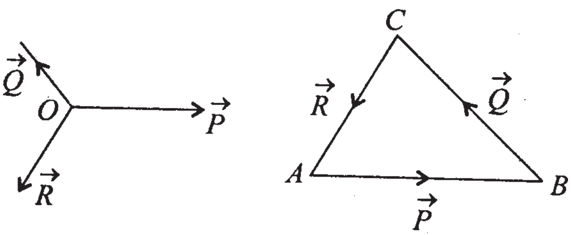
যেহেতু $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{CA}$ দ্বারা $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ রূপায়িত এবং ভেক্টরের ত্রিভুজ সূত্র অনুযায়ী $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$. অর্থাৎ $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি বল $\overrightarrow{BA}$ দ্বারা রূপায়িত। অতএব, $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$-এর লব্ধি $\vec{P}, \vec{Q}$-এর লব্ধি $\overrightarrow{BA}$ এবং $\overrightarrow{AB}$ এই দুটির লব্ধির সমান। কিন্তু $\overrightarrow{BA}$ এবং $\overrightarrow{AB}$ দুইটি পরস্পর বিপরীতমুখী সমান মানের বল হওয়ায় তাদের লব্ধি শূন্য। অতএব, $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ বল তিনটি সাম্যে আছে।

মন্তব্য : উপরের উপপাদ্যে দেওয়া আছে যে, একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা বল তিনটিকে রূপায়িত করা যায়। অতএব, বল তিনটিকে সমতলীয় হতে হবে। কেননা অন্যথায় তারা একটি ত্রিভুজের বাহু তিনটি (যারা সমতলীয়) দিয়ে রূপায়িত হতে পারে না।

2.7.3 বল ত্রিভুজ উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা (Converse of the triangle of forces)

'তিনটি সমবিন্দু বল সাম্যে অবস্থিত হলে ঐ বল তিনটিকে সমান্তরাল ও সমদিশা বিশিষ্ট যে কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা রূপায়িত করা সম্ভব।'

প্রমাণ :



10 নং চিত্র

ধরা যাক, O বিন্দুতে $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। যেহেতু বল তিনটি সাম্যাবস্থায়, অতএব এদের যে কোন দুটির লব্ধি তৃতীয় বলের বিপরীতমুখী ও সমমান বিশিষ্ট। অতএব, বল তিনটি সমতলীয়। এখন A বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট মাপক অনুসারে AB বাহু নেওয়া হল $\vec{P}$ বলের সমান্তরাল করে এবং $|\vec{P}| = AB$. B থেকে $\vec{Q}$ বলের সমান্তরাল ও সমান করে BC বাহু অঙ্কন করলাম। এখন CA যোগ করলে $\overrightarrow{CA}$ ভেক্টর $\vec{R}$ বলটি রূপায়িত করতে বাধ্য যেহেতু $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি বল $\overrightarrow{AC}$

এবং $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ বল তিনটি সাম্যে রয়েছে। অতএব, দেখা গেল, ABC ত্রিভুজ পাওয়া গেল যার বাহুগুলি সাম্যাবস্থার বল তিনটিকে মানে ও দিকে রূপায়িত করে। অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

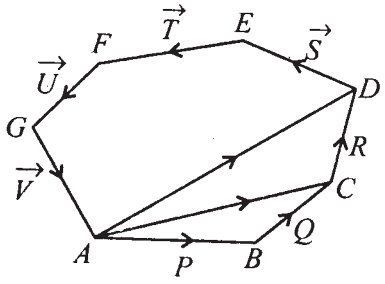
মন্তব্য : 2.9.2 ও 2.9.3-এ বর্ণিত প্রতিজ্ঞা দুটি একসঙ্গে করে নীচের উপপাদ্যটি সত্য :

'তিনটি সমবিন্দু বল সাম্যে থাকার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল বল তিনটি সমতলীয় হবে এবং একটি ত্রিভুজ পাওয়া যাবে যার বাহুগুলি বল তিনটিকে মানে ও দিশায় একই ক্রমে রূপায়িত করবে।'

2.7.4 বলগোষ্ঠীর বহুভুজ উপপাদ্য

'যদি সমবিন্দু বলগোষ্ঠীর বলগুলিকে একটি সম্পূর্ণ বহুভুজের বাহুগুলির দ্বারা ক্রমান্বয়ে মানে ও দিশায় রূপায়িত করা যায়, তবে বলগোষ্ঠীটি সাম্যে আছে।'

প্রমাণ :

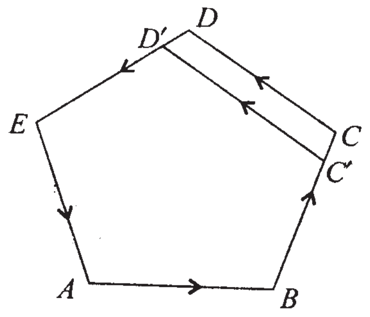


11 নং চিত্র

ধরা যাক, $ABCDEFGA$ বহুভুজটির বাহুগুলি AB, BC, CD, DE, EF, FG ও GA যথাক্রমে সমবিন্দু বলগোষ্ঠীর সমস্ত বল অর্থাৎ $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}, \vec{T}, \vec{U}, \vec{V}$ বলগুলিকে মানে ও দিশায় রূপায়িত করে। তা হলে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি বল $\overrightarrow{AC}$ দ্বারা রূপায়িত। আবার, $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বলের লব্ধি $\overrightarrow{AD}$ দ্বারা রূপায়িত হয়। অর্থাৎ $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ও $\vec{R}$-এর লব্ধি বল $\overrightarrow{AD}$ দ্বারা মানে ও দিশায় রূপায়িত। এভাবে একে একে $\vec{S}, \vec{T}, \vec{U}$ বলগুলি নিলে আমরা শেষ পর্যন্ত পাই যে $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}, \vec{T}, \vec{U}$-এর লব্ধি হল $\overrightarrow{AG}$, অতএব, এবার $\vec{V}$ বলটি যুক্ত হলে $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}, \vec{T}$-এর লব্ধি $\overrightarrow{AG}$ এবং $\overrightarrow{GA}$ হল $\vec{V}$ বল অতএব $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}, \vec{T}$ ও $\vec{V}$-এর লব্ধি হল $\overrightarrow{AG}$ ও $\overrightarrow{GA}$ বলের লব্ধি। কিন্তু এই বল দুটি পরস্পর বিপরীতমুখী ও সমান মানের। অতএব সমগ্র বলগোষ্ঠী সাম্যে অবস্থিত।

মন্তব্য : উপরের উপপাদ্যের বিপরীত সত্য নয়। কারণ, তিনের অধিক কতগুলি বল সাম্যাবস্থায় হলে ঐ বলসমূহের সমান্তরাল বাহুবিশিষ্ট বহুভুজ অঙ্কন করা যায়, যাদের বাহুগুলির দৈর্ঘ বলগুলির

সমানুপাতী নয়। নিম্নের চিত্র থেকে বোঝা যায় যে, বহুভুজ $ABCDEA$ এবং $ABC'D'EA$ দুটির বাহুগুলি প্রদত্ত বলসমূহের সমান্তরাল হলেও এবং বলসমূহের মানকে উভয়ক্ষেত্রে রূপায়িত করতে পারেনা। তিনটি বলের সাম্যের ক্ষেত্রে ত্রিভুজের বাহুগুলি বলগুলির যথাক্রমে সমান্তরাল হলেই বলগুলির মানও রূপায়িত করবে—বহুভুজের ক্ষেত্রে এটা সত্য নয়।

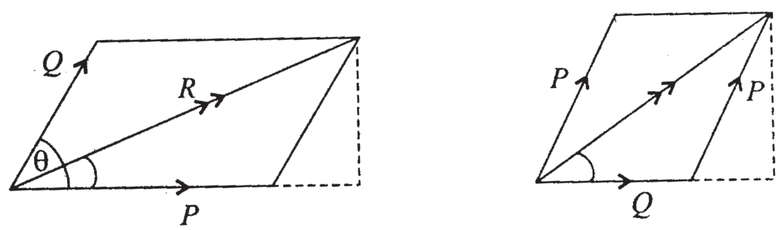


12 নং চিত্র

2.7.5 অনুশীলনী

1. কোন বিন্দুতে প্রযুক্ত P ও Q বলদ্বয়ের মধ্যে কোণ θ. বল দুটির ক্রিয়ারেখা পরস্পর পরিবর্তন করলে এদের লব্ধি বল $2\tan^{-1}\left(\dfrac{P-Q}{P+Q}\tan\dfrac{\theta}{2}\right)$ কোণে ঘুরে যাবে—দেখান।

সমাধান :



13 নং চিত্র

প্রথম চিত্র থেকে লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা P বলের সঙ্গে কোণ $\phi_1 = \sin^{-1}(Q \sin \theta)/R$ কোণ করে। দ্বিতীয় চিত্রে (যখন P ও Q-এর বলের ক্রিয়ারেখা পরস্পর স্থান পরিবর্তন করেছে) তখন লব্ধি বল একই দিকের সঙ্গে $\phi_2 = \sin^{-1}(P\sin\theta/R)$ কোণ করে।

অতএব, $\dfrac{\sin\phi_1}{\sin\phi_2} = \dfrac{Q\sin\phi}{P\sin\phi} = \dfrac{Q}{P}$

অতএব, $\dfrac{\sin\phi_1 + \sin\phi_2}{\sin\phi_1 - \sin\phi_2} = \dfrac{Q+P}{Q-P}$

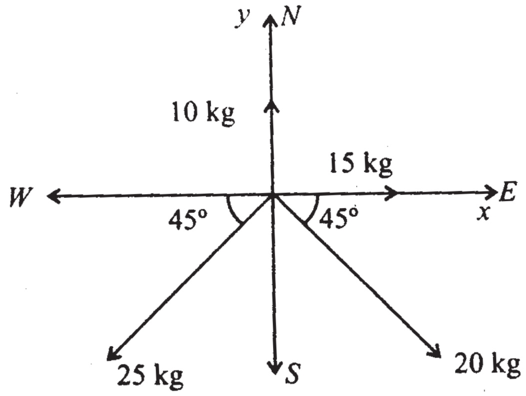
$$\frac{2\sin\left(\dfrac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)\cos\dfrac{\phi_1-\phi_2}{2}}{2\cos\left(\dfrac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)\sin\dfrac{\phi_1-\phi_2}{2}} = \frac{Q+P}{Q-P}$$

কিন্তু, $\phi_1 + \phi_2 = \theta$

অতএব, $\tan = \dfrac{\phi_1-\phi_2}{\phi_2} = \dfrac{Q-P}{Q+P}\tan\dfrac{\theta}{2}$

2. একটি টেলিফোন পোস্টের উপর একটি বিন্দুতে অনুভূমিক তলে চারটি টান বল ক্রিয়া করে। টান বলগুলি যথাক্রমে 10 kg ভার উত্তরদিকে, 15 kg ভার পূর্বদিকে, 20 kg ভার দক্ষিণ-পূর্বদিকে এবং 25 kg ভার দক্ষিণ-পশ্চিমে ক্রিয়া করে। পোস্টটির উপর বল চারিটির লব্ধি নির্ণয় করুন।

সমাধান :



14 নং চিত্র

লব্ধির পূর্বদিকে বিশ্লেষিতাংশ

$$X = \left(15 + \frac{20}{\sqrt{2}} - \frac{25}{\sqrt{2}}\right)\text{kg}$$

লব্ধির উত্তরদিকে বিশ্লেষিতাংশ

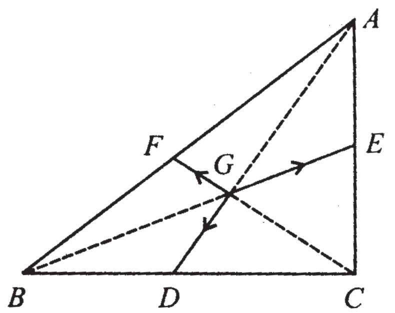
$$Y = \left(10 - \frac{25}{\sqrt{2}} - \frac{20}{\sqrt{2}}\right) = \frac{10\sqrt{2} - 45}{\sqrt{2}}$$

অতএব লব্ধি $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ kg

$$= \sqrt{\frac{(15\sqrt{2} - 5)^2}{2} + \frac{(10\sqrt{2} - 45)^2}{2}} \ \text{k}g$$

এবং লব্ধির ক্রিয়ারেখা পূর্বদিকের সঙ্গে দক্ষিণদিকে $\tan^{-1}\left(\frac{45 - 10\sqrt{2}}{15\sqrt{2} - 5}\right)$ কোণ উৎপন্ন করে।

3. ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G তে $\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{GE}, \overrightarrow{GF}$ বলত্রয় ক্রিয়া করে (যেখানে D, E, F যথাক্রমে BC, CA, AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু)। দেখান যে বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে।
সমাধান : (ত্রিভুজ যোগসূত্র অনুসারে)



15 নং চিত্র

$$\overrightarrow{GD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$$

$$\overrightarrow{GE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right)$$

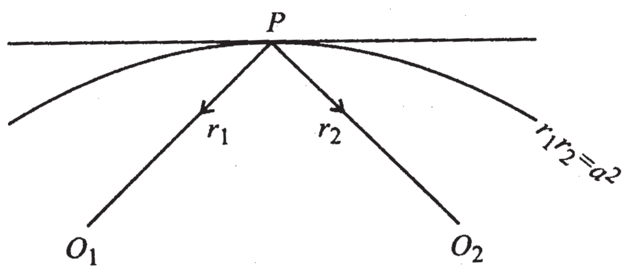
$$\overrightarrow{GF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$

অতএব, $\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$

কিন্তু $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ সাম্যাবস্থায় অতএব প্রমাণিত।

4. একটি বস্তু কণার P-এর উপর O_1, O_2 স্থিরবিন্দুর দিকে $\frac{\mu}{r_1}, \frac{\mu}{r_2}$ বল দুটি ক্রিয়া করে। (যেখানে $r_1 = O_1P$, $r_2 = O_2P$)। দেখান যে কণাটি $r_1r_2 = a^2$ এই মসৃণ খাতের উপর যে কোন বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় থাকবে।

সমাধান :



16 নং চিত্র

মসৃণ খাতের লম্বদিকে বল বিশ্লেষিতাংশ প্রতিক্রিয়া বল দ্বারা প্রতিহত হয়। মসৃণ খাতের স্পর্শক দিকে সাম্যাবস্থার জন্য বস্তুকণার উপর প্রযুক্ত বলদ্বয়ের বিশ্লেষিতাংশ যোগফল

$$= \frac{\mu}{r_1}\frac{dr_1}{ds} + \frac{\mu}{r_2}\frac{dr_2}{ds}$$

$$= \mu \frac{d}{ds}(\log r_1 + \log r_2)$$

$$= \mu \frac{d}{ds}\log r_1r_2$$

$$= \mu \frac{d}{ds}\log a^2$$

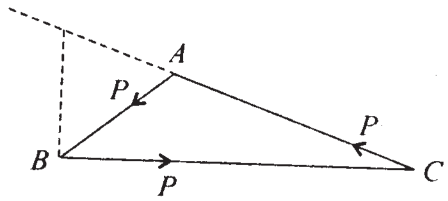
$$= 0 \qquad (\because\ a^2 \text{ একটি ধ্রুবক})$$

অতএব, যে কোন বিন্দুতে বস্তুকণার উপর স্পর্শকদিকে লব্ধিবলের বিশ্লেষিতাংশ $= 0$. অতএব কণাটি সাম্যাবস্থায় আছে।

5. তিনটি সমান মানের (= P) সমবিন্দু বলের ক্রিয়ারেখার সমান্তরাল রেখা দ্বারা ABC ত্রিভুজ হলে, বলগোষ্ঠীর লব্ধি R-এর মান

$$R^2 = P^2 (3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C)$$

সমাধান :



17 নং চিত্র

বলগুলির বিশ্লেষিতাংশ BC দিকে ও তার লম্ব দিকে যথাক্রমে

$$P - P\cos B - P\cos C - P\sin B + P\sin C$$

$$\therefore\ R^2 = P^2(1 - \cos B - \cos C)^2 + P^2(-\sin B + \sin C)^2$$

$$= P^2\{3 - 2\cos B - 2\cos C + 2(\cos B\cos C - \sin B\sin C)\}$$

$$= P^2\{3 - 2\cos B - 2\cos C + 2\cos(B + C)\}$$

$$= P^2\{3 - 2\cos B - 2\cos C - 2\cos A\}$$

2.7.6 লামির উপপাদ্য (Lami's Theorem)

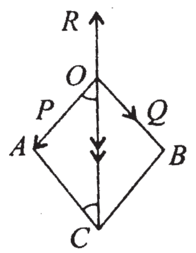
'যদি তিনটি সমবিন্দু বল সাম্যে থাকে, তবে প্রতিটি বল ও অপর বল দুটির মধ্যস্থ কোণের সাইনের অনুপাত পরস্পর সমান হবে।'

অর্থাৎ যদি P, Q, R সমবিন্দু বল তিনটি সাম্যে থাকে তাহলে

$$\frac{P}{\sin(Q\hat{,}R)} = \frac{Q}{\sin(R\hat{,}P)} = \frac{R}{\sin(P\hat{,}Q)}$$

যেখানে $(Q\hat{,}R)$ = বল Q ও বল R-এর ক্রিয়ারেখার মধ্যস্থ কোণ।

প্রমাণ : ধরা যাক O বিন্দুতে P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। অতএব, P ও Q-এর লব্ধি R বলের বিপরীত এবং R-এর মানের সমান হবে।



18 নং চিত্র

18 নং চিত্র অনুসারে P ও Q-এর লব্ধি $\overrightarrow{OC}$, অতএব R বল $\overrightarrow{OC}$-এর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে। ত্রিভুজ OAC থেকে পাই

$$\frac{OA}{\sin OCA} = \frac{AC}{\sin AOC} = \frac{OC}{\sin OAC} \qquad \ldots \qquad \text{(i)}$$

কিন্তু $\angle OCA = \angle COB = 180° - (\widehat{Q, R})$

$$\therefore \quad \sin OCA = \sin (\widehat{Q, R})$$

এরূপে $\sin AOC = \sin (\widehat{P, R})$

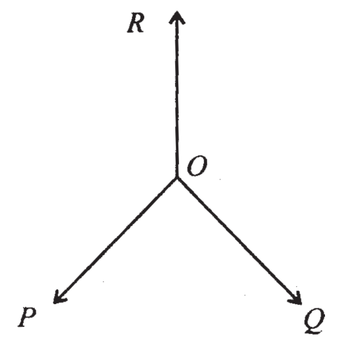
$$\sin OAC = \sin (180° - AOB) = \sin AOB = \sin (\widehat{P, Q})$$

অতএব (i) থেকে পাই,

$$\frac{P}{\sin (\widehat{Q, R})} = \frac{Q}{\sin (\widehat{R, P})} = \frac{R}{\sin (\widehat{P, Q})} \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

লামির বিপরীত প্রতিজ্ঞা (Converse of Lami's Theorem) : 'তিনটি সমবিন্দু সমতলীয় বল যদি প্রত্যেকে অপর দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণের "সাইন"-এর সমানুপাতী হয়, তবে বল তিনটি সাম্যে থাকে।'

প্রমাণ :



19 নং চিত্র

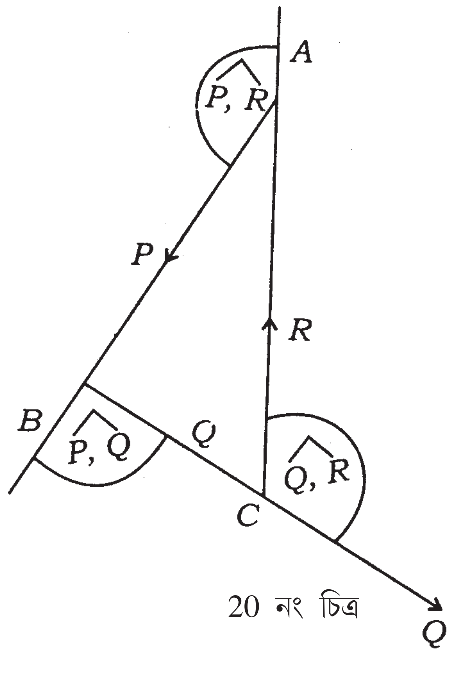
P, Q, R বল তিনটি এক সমতলে থাকায়, তাদের সমান্তরাল রেখা অঙ্কন করে AB, BC, CA বাহু তিনটি দিয়ে ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করা হল।

$$\angle A = 180° - (\widehat{P,R})$$

$$\angle B = 180° - (\widehat{P,Q})$$

$$\angle C = 180° - (\widehat{Q,R})$$

$\therefore\ \sin A = \sin\ (\widehat{P,R})$ ইত্যাদি।



20 নং চিত্র

এখন ABC ত্রিভুজে

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{\sin(\widehat{Q,R})} = \frac{BC}{\sin(\widehat{R,P})} = \frac{CA}{\sin(\widehat{P,Q})}$$

কিন্তু দেওয়া আছে যে,

$$P : Q : R = \sin(\widehat{Q,R}) : \sin(\widehat{R,P}) : \sin(\widehat{P,Q})$$

অতএব $\qquad \dfrac{AB}{P} = \dfrac{BC}{Q} = \dfrac{CA}{R}$

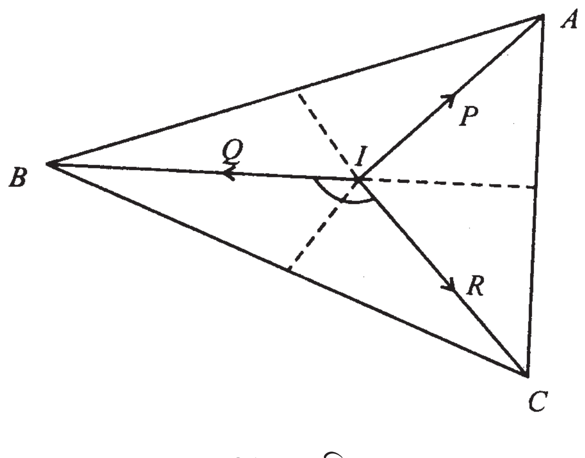
অর্থাৎ AB, BC, CA বাহুগুলি P, Q, R -কে মানে ও দিকে রূপায়িত করে। অতএব, বল ত্রিভুজ উপপাদ্য থেকে পাই যে, P, Q, R বল তিনটি সাম্যে আছে।

অনুশীলনী :

1. P, Q, R বলত্রয় IA, IB, IC বরাবর ক্রিয়া করে। যেখানে I হল ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র। দেখান যে P, Q, R সাম্যাবস্থায় থাকিলে।

$$P : Q : R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$$

প্রমাণ :



21 নং চিত্র

যেখানে P, Q, R সাম্যে, লামির উপপাদ্য অনুসারে

$$\frac{P}{\sin BIC} = \frac{Q}{\sin CIA} = \frac{R}{\sin AIB} \qquad \text{(i)}$$

কিন্তু $\qquad \angle BIC = 180° - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2}$

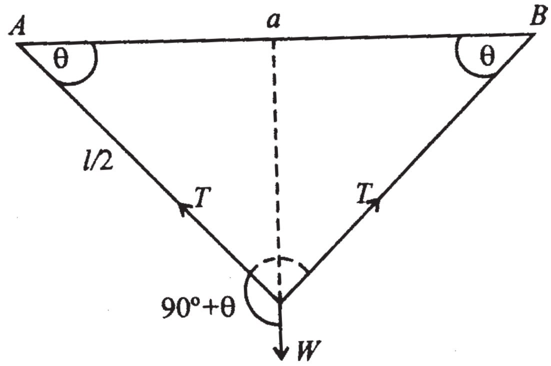
$$\therefore \sin BIC = \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90° - \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2} \qquad \text{(ii)}$$

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পাই

$$\frac{P}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{Q}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{R}{\cos\frac{C}{2}}$$

2. l-দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সরু সূত্রের দুই প্রান্ত একই অনুভূমিক তবে a দূরত্বে দুটি বিন্দুতে আবদ্ধ এবং একটি মসৃণ আংটি ঐ তারের মধ্যে গমনাগমন করতে পারে। আংটিটির ওজন W হলেও আংটি সাম্যে অবস্থানকালে সূত্রের টানে নির্ণয় করুন। ($l > a$)

সমাধান :



22 নং চিত্র

এখানে আংটির উপর তিনটি বল ক্রিয়া করে (1) ওজন W উল্লম্ব দিকে (2) ও (3) তারটির টান বল T, T যথাক্রমে A ও B বিন্দুর দিকে। যেহেতু বল তিনটি সাম্যে আছে অতএব

$$\frac{T}{\sin(90°+\theta)} = \frac{W}{\sin(180°-2\theta)} \qquad \text{(লামি উপপাদ্য)}$$

$$\therefore T = W\frac{\cos\theta}{\sin 2\theta} = \frac{W}{2\sin\theta} = \frac{W}{2\frac{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{l/2}} = \frac{lW}{2\sqrt{l^2 - a^2}}$$

2.8 সারাংশ

এই এককে প্রথমে দুটি সমবিন্দু বলের লব্ধি সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। দেখা গেছে বল দুটি P, Q এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ α হলে লব্ধি বল R এর মান $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ এবং R বল P-এর দিকের সহিত $\theta = \tan^{-1}\dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ কোণ করে।

দুটি সমবিন্দু বলের লব্ধির সামন্তরিক সূত্র অনুসারে লব্ধি এবং ভেক্টরের ত্রিভুজ যোগসূত্র দুটি ভেক্টরের যোগফল যেহেতু একই, সেই কারণে সমবিন্দু বলের ক্ষেত্রে ভেক্টরের সাহায্যে বিভিন্ন উপপাদ্য প্রমাণ করা যায়।

কোন দিকে বলের বিশ্লেষিতাংশ আর ভেক্টরের অভিক্ষেপ এক। অর্থাৎ P বলের কোন দিকে বিশ্লেষিতাংশ $= P\cos\,\theta$, যেখানে $\theta = P$-এর ক্রিয়ারেখা ও ঐ দিকের মধ্যে কোণ R বলের তিনটি পরস্পর লম্বদিকে বিশ্লেষিতাংশ X, Y, Z হলে $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ হয়। যদি R বলটি Z-অক্ষের সঙ্গে θ কোণ আর xy তলে প্রক্ষেপ যদি x-অক্ষের সঙ্গে ϕ কোণ করে, তবে $X = R\sin\,\theta\cos\,\phi$, $Y = R\sin\,\theta\,\sin\phi$, $Z = R\cos\,\theta$ সমতলীয় ক্ষেত্রে অর্থাৎ যদি দুটি পরস্পর লম্বদিক এমন হয় যে, তাদের সমতলে বল R অবস্থিত থাকে, তবে ঐ লম্বদিক দুটিতে R-এর বিশ্লেষিতাংশ X, Y হলে $R^2 = X^2 + Y^2$ হবে।

অর্থাৎ $X = R\cos\,\theta$, $Y = R\sin\theta$. তিন বা ততোধিক সমবিন্দু বল একটি লব্ধি বল দ্বারা রূপায়িত হয়। যদি তিনটি পরস্পর লম্বদিক নেওয়া যায় এবং P_1, P_2, ..., P_n বলগুলির ঐ দিকগুলিতে বিশ্লেষিতাংশসমূহ যথাক্রমে $(X_1, X_2, ..., X_n)$, $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$, (Z_1, Z_2, Z_n) হয় এবং এদের লব্ধি বল R-এর বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে X, Y, Z হয়, তবে

$$X = \sum_{r=1}^{n} X_r,\ Y = \sum_{r=1}^{n} Y_r,\ Z = \sum_{r=1}^{n} Z_r$$

এবং $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$

R-এর দিক প্রদত্ত লম্ব দিক তিনটির সঙ্গে যে কোণগুলি করে তা α, β, γ হলে

$$\cos\alpha = \frac{X}{R},\ \cos\beta = \frac{Y}{R},\ \cos\gamma = \frac{Z}{R}$$

বল সাম্য : কোন বিন্দুতে ক্রিয়াকারী কতগুলি বল যদি এমন হয় তাদের লব্ধি বল শূন্য মানবিশিষ্ট হয়, তা হলে ঐ বলগোষ্ঠী সাম্যে আছে বলা হয়। সমবিন্দু বলগোষ্ঠীর সাম্যের প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্তগুলি হল $X = Y = Z = 0$

অর্থাৎ $$\sum_{r=1}^{n} X_r = \sum_{r=1}^{n} Y_r = \sum_{r=1}^{n} Z_r = 0$$

সমতলীয় বলক্ষেত্রে ঐ তলে দুটি লম্বদিক (x, y অক্ষ) সাপেক্ষে শর্ত হয়

$$X = \sum_{r=1}^{n} X_r = 0, Y = \sum_{r=1}^{n} Y_r = 0$$

তিনটি বল একবিন্দুতে ক্রিয়াশীল হলে এবং তারা যদি মানে, দিশায় ক্রমান্বয়ে একটি ত্রিভুজের বাহু তিনটি দ্বারা রূপায়িত হয়, তবে বল তিনটি সাম্যে থাকে (ত্রিভুজ বল সূত্র) ত্রিভুজ বলসূত্রের বিপরীতও সত্য :

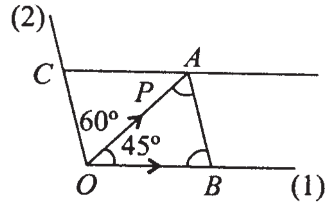
তিনটি সমবিন্দু বল সাম্যে থাকলে, বলগুলি প্রত্যেকে অপর বল দুটির মধ্যস্থ কোণের সাইনের সমানুপাতী হবে (লামির উপপাদ্য)। লামির উপপাদ্যের বিপরীতও সত্য।

বহুভুজ দ্বারা সমবিন্দু বলসমূহের লব্ধি নির্ণয় করা যায়। সাম্যে আছে এমন কতগুলি বলকে একটি সম্পূর্ণ বহুভুজ দ্বারা রূপায়িত করা যায়। ইহার বিপরীত সত্য নয়।

2.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. P বলের দুই পাশে দুটি সরলরেখা বলটির ক্রিয়ারেখার সঙ্গে যথাক্রমে 45º, 60º কোণ করে। ঐ দুটি দিকে বলটির উপাংশ নির্ণয় করুন।

সংকেত :



23 নং চিত্র

$\overrightarrow{OA}$, P বল হলে (1) ও (2) নং দিকের সঙ্গে OA কে কর্ণ করে সামন্তরিক আঁকা হলে, OB, OC-এর মান নির্ণয় করুন। ঐ দুটিই বলটির উপাংশ

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin(180^\circ - 60^\circ - 45^\circ)}$$

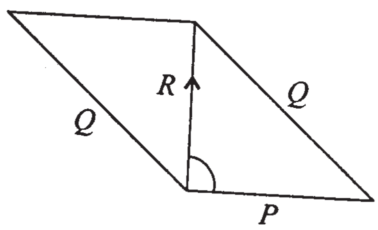
$$\therefore OB = \frac{\sqrt{3}\, OA}{2\sin(60^\circ + 45^\circ)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\, P}{2\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\, P}{\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{6}\, P}{\sqrt{3}+1}$$

অনুরূপভাবে OC নির্ণয় করুন।

2. P ও Q সমবিন্দু বলদ্বয়ের লব্ধি R যদি P-এর ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব হয়, তবে দেখান যে $R^2 = Q^2 - P^2$



24 নং চিত্র

3. দুটি সমবিন্দু বল P, Q-এর লব্ধির মান P-এর সমান হলে দেখান যে P, Q-এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $= \cos^{-1}\left(-\frac{Q}{2P}\right)$ ($\because$ $P^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$)

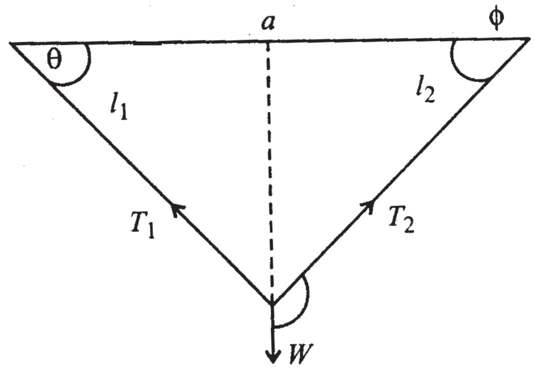
4. P ও Q সমবিন্দু বল দুটি O বিন্দুতে এবং R, S বল দুটি O' বিন্দুতে ক্রিয়া করে। P, Q, R, S সাম্যে থাকিলে P ও Q-এর লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা নির্ণয় করুন।

[**সংকেত** : P, Q-এর লব্ধি বল R, S-এর লব্ধি বলের সমান ও বিপরীতমুখী হবে। অতএব, P, Q-এর লব্ধি বল O' দিয়ে যাবে। এবং ROS-এর লব্ধি বল O দিয়ে যাবে।]

5. l_0, l_2 দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুটি দড়ির সাহায্যে একটি ভারী বস্তুকণাকে দুটি অনুভূমিক বিন্দু হতে ঝোলান হল। বিন্দু দুটির দূরত্ব a হলে এবং W কোণটির ওজন হলে দড়ি দুটির টান কত?

$(l_1 + l_2 > a,\ l_1 + a > l_2,\ l_2 + a > l_1)$

সমাধান :



25 নং চিত্র

ধরা যাক, দড়ি দুটির টান T_1, T_2, অতএব, লামির উপপাদ্য থেকে

$$\frac{T_1}{\cos\phi} = \frac{T_2}{\cos\theta} = \frac{W}{\sin(180° - \theta - \phi)}$$

আবার,
$$\frac{l_1}{\sin\phi} = \frac{l_2}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin(\theta+\phi)}$$

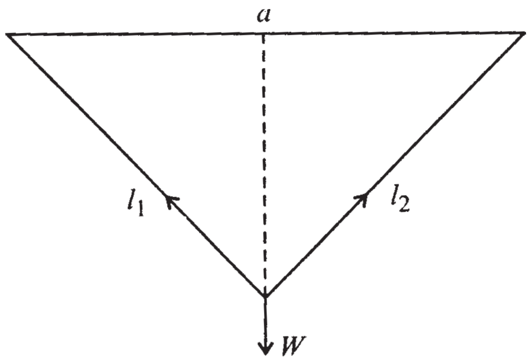
$$\therefore T_1 = \frac{W\cos\phi}{\sin(\theta+\phi)}$$

$$= \frac{Wl_1\cos\phi}{a\sin\phi}$$

$$= \frac{Wl_1}{a} = \frac{\dfrac{l_2^2 + a^2 - l_1^2}{2l_2 a}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{l_2^2 + a^2 - l_1^2}{2l_2 a}\right)^2}}$$

$$= \frac{Wl_1}{a} \cdot \frac{l_2^2 + a^2 - l_1^2}{\sqrt{4l_2^2 a^2 - \left(l_2^2 + a^2 - l_1^2\right)^2}}$$

$$= \frac{Wl_1\left(l_2^2 + a^2 - l_1^2\right)}{a\sqrt{\left(2l_2 a + l_2^2 + a^2 - l_1^2\right)\left(2l_2 a - l_2^2 - a^2 + l_1^2\right)}}$$



26 নং চিত্র

6. তিনটি সমতলীয় বল P, Q, R একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। দেখান যে লব্ধি বল হল

$$\left\{P^2 + Q^2 + R^2 + 2QR\cos\alpha + 2RP\cos\beta + 2PQ\cos\gamma\right\}^{\frac{1}{2}}$$

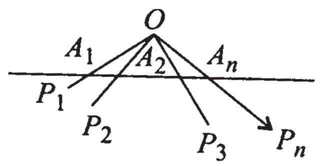
যেখানে α, β, γ যথাক্রমে (Q, R), (R, P) ও (P, Q)-এর মধ্যে কোণ।

[**সংকেত** : বল তিনটিকে P বলের ক্রিয়ারেখার দিকে ও তার অভিলম্ব দিকে বিশ্লেষিতাংশ X, Y হলে, লব্ধি বল $\sqrt{X^2 + Y^2}$]

7. O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং সাম্যাবস্থায় অবস্থিত $P_1, P_2, ..., P_n$ বল কটির ক্রিয়ারেখাগুলিকে একটি সরলরেখার ছেদক যথাক্রমে $A_1, A_2, ..., A_n$ বিন্দুতে ছেদ করে। দেখান যে,

$$\frac{P_1}{OA_1} + \frac{P_2}{OA_2} + \ldots + \frac{P_n}{OA_n} = 0$$

যেখানে $OA_1 = O$ ও A_1 এর মধ্যস্থ দূরত্ব।

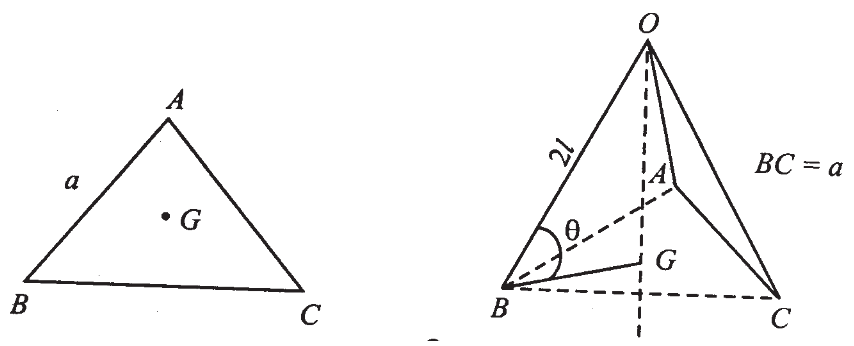


27 নং চিত্র

[**সংকেত :** যেহেতু বলগোষ্ঠী সাম্যে অতএব লব্ধি বল শূন্য। ফলে ছেদকের লম্বদিকে বলগুলির বিশ্লেষিতাংশ যোগফল শূন্য। অতএব ইত্যাদি।]

8. তিনটি সমান দণ্ডের একপ্রান্ত একটি বিন্দুতে যুক্ত দণ্ড তিনটির অপর প্রান্তগুলি একটি অনুভূমিক তলের উপর অবস্থিত এবং একটি ভার W ঐ বিন্দু হতে ঝুলছে। দণ্ডগুলির অনুভূমিক তলে পদভ্রংশ না হলে এবং দণ্ড তিনটির পদ একটি সমবাহু ত্রিভুজ রচনা করলে দণ্ডগুলির ঘাতবল কত?

সংকেত :



28 নং চিত্র

ধরা যাক, দলগুলির দৈর্ঘ্য $2l$ এবং পদগুলি ভূমিতে ABC ত্রিভুজের কোণ বিন্দু তৈরী করেছে।

দণ্ডগুলি অনুভূমিক তলের সহিত θ কোণ তৈরী করলে এবং T ঘাত বল হলে আমরা পাই ও $T \sin \theta = W$ ভূমি ত্রিভুজ সমবাহু হওয়ায় ঘাত বল তিনটির লব্ধি সমবাহুর ভারকেন্দ্র দিয়ে যাবে।

অতএব, $$2l \cos \theta = AG = \frac{2}{3} a \sin 60° = \frac{2}{3} a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

অতএব, $$\cos \theta = \frac{a}{2\sqrt{3}l}$$

এবং $$T = \frac{W}{3 \sin \theta} = \frac{W}{3\sqrt{1 - \frac{a_2}{12l^2}}}$$

একক 3 ❑ সমান্তরাল বলসমূহ ও লব্ধি, বলের ভ্রামক ও বলের দ্বন্দ্ব (Parallel Forces, their Resultant; Moment of Forces and Couple)

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা

3.2 উদ্দেশ্য

3.3 দুটি সমমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি (**Resultant of Two Like Parallel Forces**)

3.3.1 তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি

3.4 অসমমুখী দুটি সমান্তরাল বলের লব্ধি

3.5 সমান্তরাল বলসমূহের সাম্য

3.6 সমান্তরাল বলগোষ্ঠী (ভেক্টর প্রয়োগ)

3.7 কয়েকটি উদাহরণ

3.8 একটি বিন্দুর সাপেক্ষে বলের ভ্রামক (**Moment of a Force About a Point**)

3.9 ভ্রামক সম্পর্কিত ভারিগ্‌নন্‌ এর উপপাদ্য (**Varignon's Theorem**)

3.10 বলদ্বন্দ্ব বা বলযুগ্ম (**Couple**)

3.11 দ্বন্দ্বের সমতুলতা

3.12 উদাহরণ

3.13 বিভিন্ন সূত্র দ্বারা গঠিত কপিকল যন্ত্র

3.14 সারাংশ

3.15 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

3.1 প্রস্তাবনা

আমরা পূর্বের এককে সমবিন্দু বল ও তার লব্ধি বিষয়ক জ্ঞান লাভ করেছি। কিন্তু সকল সময়েই যে দুটি বলের ক্রিয়ারেখা ছেদ করবে তা সত্য নয়। বল দুটির ক্রিয়ারেখা পরস্পর সমান্তরাল হতে পারে। আবার এমনও হতে পারে যে বলের ক্রিয়ারেখা দুটি এক তলে অবস্থিত নয়।

আমরা এই এককে দুটি বলের ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল হলে কখন এবং কিভাবে তাদের লব্ধিবল পাওয়া যায় সে বিষয় আলোচনা করব। আমরা দেখব যে, সমান্তরাল বল দুটি সমমুখী (Like) হলে তাদের সর্বদা লব্ধি বল আছে। কিন্তু সমান্তরাল বলদুটি বিষমমুখী (Unlike) হলে এবং সমমানের হলে তাদের লব্ধি বল থাকে না। সেক্ষেত্রে তাদের একটি পৃথক নাম 'ভ্রামক' (Couple) বলা হয়। তাদের ধর্মও এখানে আলোচিত হবে।

3.2 উদ্দেশ্য

এই এককে আপনারা জানতে পারবেন

(1) দুটি বলের ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল হলে তাদের লব্ধিবল আছে কিনা এবং থাকলে তার ক্রিয়ারেখা কোথায় ও লব্ধিবলের মান কত?

(2) সমান্তরাল বল দুটি সমমুখী হলে দেখতে পাবেন তাদের একটি লব্ধিবল আছে।

(3) সমান্তরাল বল দুটি অসমমুখী হলে তাদের লব্ধিবল হয়, কেবলমাত্র যদি বলদুটির মান অসমান হয়।

(4) অসমমুখী সমান্তরাল সমান মানের দুটি বলের কোন লব্ধি বল নেই।

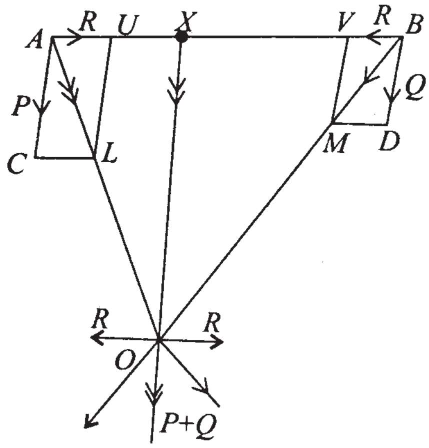
(5) অসমমুখী সমান্তরাল বল (যাদের মান সমান) এদের একটি ধ্রুবক আছে—এখানে বলের ভ্রামক ভেক্টর সংজ্ঞা দেওয়া হবে। অসম সমান মানের সমান্তরাল বল দুটির যে কোন বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক যোগফল একটি ধ্রুবক ভেক্টর।

(6) বলের ভ্রামক সাহায্যে বলের ঘূর্ণন প্রবণতা মাপা হয়।

3.3 দুটি সমমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি (Resultant of Two Like Parallel Forces)

ধরা যাক, P ও Q দুটি বল একটি দৃঢ় বস্তুর দুটি বিন্দু A ও B তে ক্রিয়া করছে এবং বল দুটির

ক্রিয়ারেখা পরস্পর সমান্তরাল ও বলের দিশা সমমুখী (Like) অর্থাৎ $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ বল দুটির ভেক্টররূপ হলে $AC \parallel BD$ এবং $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ সমদিশা সম্পন্ন। চিত্র থেকে পরিষ্কার বোঝা যাবে।



1 নং চিত্র

উপপাদ্য : P, Q দুটি সমমুখী সমান্তরাল বল A ও B তে ক্রিয়া করলে, তাদের লব্ধিবল একটি সমমুখী সমান্তরাল বল $(P + Q)$ মানবিশিষ্ট এবং AB সরলরেখার অন্তঃস্থ X বিন্দুতে ক্রিয়া করে যেখানে, $P.AX = Q.BX$.

প্রমাণ : A ও B বিন্দুতে দুটি বিপরীতমুখী R মানবিশিষ্ট বল (অর্থাৎ A তে $\overrightarrow{AU}$ বলটি $\overrightarrow{AB}$ -এর দিকে এবং B তে $\overrightarrow{BV}$ বলটি $\overrightarrow{BA}$ -এর দিকে) প্রয়োগ করা হল। এই বল দুটি যেহেতু বিপরীতমুখী ও সমমানবিশিষ্ট অতএব স্বতঃসিদ্ধ অনুসারে এরূপ দুটি বল সমান্তরাল বল দুটির সঙ্গে যুক্ত করলে তাদের কোন পরিবর্তন হবে না। এখন A বিন্দুতে P বল ও R বলের লব্ধি হল (সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী) $\overrightarrow{AL}$ এবং Q ও R বলের লব্ধি হল $\overrightarrow{BM}$. যেহেতু ক্রিয়ারেখার যে কোন বিন্দুতে বল $\overrightarrow{AL}$ ও বল $\overrightarrow{BM}$ ক্রিয়া করতে পারে, AL ও BM রেখা বর্দ্ধিত করলে তাদের ছেদবিন্দু O তে ক্রিয়া করছে মনে করলাম। এখন O বিন্দুতে $\overrightarrow{AL}$ ও $\overrightarrow{BM}$ বল দুটিকে তাদের উপাংশ (Components) একটি P, Q বলের সমান্তরাল দিকে ও অপরটি AB-এর সমান্তরাল দিকে নিলাম। ফলে R বল একটি AB-এর সমান্তরাল ও অপরটি BA-এর সমান্তরাল দিকে হওয়ায় তাদের লব্ধি শূন্য। এছাড়া O বিন্দু দিয়ে P

ও Q-এর সমান্তরাল বল দুটি একই দিকে হওয়ায় তাদের লব্ধি $P + Q$ মানবিশিষ্ট O বিন্দুগামী সমান্তরাল বল হল। কিন্তু O-এর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত সমান্তরাল রেখা AB কে A ও B-এর মধ্যস্থ একটি বিন্দু X এ ছেদ করে। অতএব সমান্তরাল বল P ও Q-এর লব্ধি একটি সমান্তরাল বল $P + Q$, যাহা X বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

ΔALU ও ΔAOX সদৃশ।

অতএব, $\dfrac{UL}{OX} = \dfrac{AU}{AX}$, *i,e.* $P.AX = R.OX$

একইভাবে $\dfrac{VM}{OX} = \dfrac{BV}{BX}$ অতএব $Q.BX = R.OX$

অতএব $P.AX = R.OX = Q.BX$. অর্থাৎ X বিন্দু AB রেখাংশকে $AX : XB = P : Q$ এই অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে। যেহেতু X-এর অবস্থান শুধুমাত্র P ও Q-এর মানের উপর নির্ভর করে, অতএব প্রযুক্ত বিপরীতমুখী বলের মানের উপর নির্ভর করবে না। আবার X-এর অবস্থান P, Q-এর সমান্তরাল থেকে দিক্ পরিবর্তন করলেও একই থাকবে।

অনুশীলনী—I

P, Q সমান্তরাল বল A ও B তে ক্রিয়া করে এবং $AB = 10$ সেমি।

(a) $P = 3Q$, (b) $Q = 3P$, (c) $P = Q$ এইসব ক্ষেত্রে X-এর অবস্থান নির্ণয় করুন।

(সংকেত : $P.AX = Q.BX$ প্রয়োগ করতে হবে)

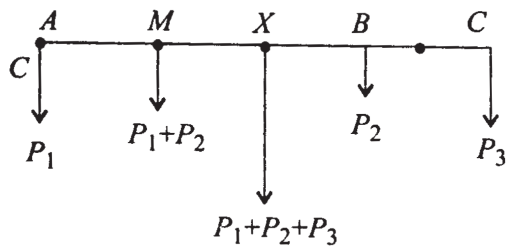
3.3.1 তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি

উপপাদ্য : তিনটি সমমুখী সমতলীয় সমান্তরাল বল P_1, P_2, P_3 x-অক্ষের A, B, C বিন্দুতে ক্রিয়া করে যেখানে তাদের স্থানাঙ্ক হল $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, $C(x_3, 0)$. বল তিনটির লব্ধি সমান্তরাল বল $P + Q + R$ মানবিশিষ্ট এবং ABC সরলরেখার $X(x, 0)$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে, যেখানে

$$x = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

প্রমাণ : P_1, P_2 বলদুটির লব্ধি AB রেখাস্থ বিন্দু $M(x', 0)$ তে ক্রিয়া করে যেখানে

$$P_1.AM = P_2.MB$$



2 নং চিত্র

অর্থাৎ

$$P_1(x' - x_1) = P_2(x_2 - x')$$

অর্থাৎ

$$x' = \frac{P_1x_1 + P_2x_2}{P_1 + P_2} \qquad \text{(i)}$$

এখন $P_1 + P_2$ বল $(x', 0)$ তেও সমমুখী সমান্তরাল বল P_3, C বিন্দুতে, এ দুটির লব্ধি একটি সমান্তরাল বল যার মান $(P_1 + P_2) + P_3$ এবং ABC রেখার $X(x, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে যেখানে $(P_1 + P_2).XM = P_3.CX$

বা, $\qquad (P_1 + P_2)\ (x - x') = P_3(x_3 - x)$

অতএব $\qquad x = \dfrac{(P_1 + P_2)x' + P_3x_3}{P_1 + P_2 + P_3}$

$$= \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3}{P_1 + P_2 + P_3} \quad \text{((i) থেকে)}$$

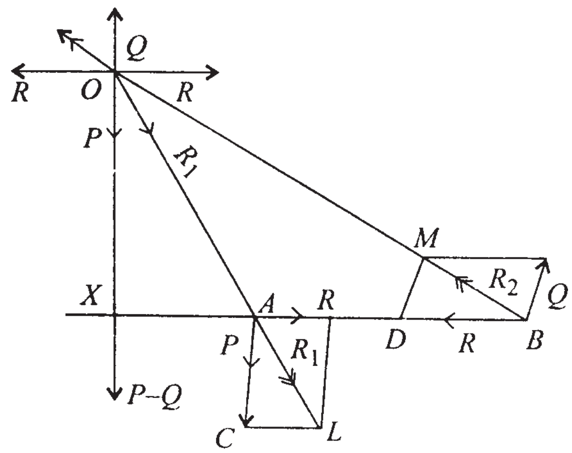
মন্তব্য : উপরের উপপাদ্য থেকে সহজেই বোঝা যায় যে, n সংখ্যক সমমুখী সমান্তরাল বলের বেলায় $x = \dfrac{\sum P_r x_r}{\sum P_r}$, এটি সত্য হবে।

3.4 অ-সমমুখী সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি

উপপাদ্য : যদি P ও Q দুটি অসমমুখী সমান্তরাল বল হয়, এবং $P \neq Q$ হয় তাহলে উহাদের লব্ধি হল একটি সমান্তরাল বল যার মান $|P - Q|$ এবং বলটি P, Q দুটির মধ্যে যেটি বড় হবে সেদিকে

থাকবে। আর একটি সরলরেখা যদি P, Q বলদুটিকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে, তবে লব্ধি বল AB রেখার একটি বহিঃস্থ বিন্দু X -তে ছেদ করবে, যেখানে $P.AX = Q.BX$।

প্রমাণ :



3 নং চিত্র

এখানেও আমরা দুটি সমমান (R, R) বিপরীতমুখী বল A ও B তে যথাক্রমে AB ও BA দিকে প্রয়োগ করব। যথাক্রমে P ও Q-এর সঙ্গে সামান্তরিক সূত্রে লব্ধি নির্ণয় করে লব্ধির রেখাদ্বয় LA ও BM বর্ধিত করলে তারা O বিন্দুতে ছেদ করে। (যদি P ও Q সমান হত তবে রেখা দুটি সমান্তরাল হত ও ছেদ করত না।) O বিন্দুতে বল দুটিকে তাদের উপাংশতে ভেঙে নিলে দেখা যাচ্ছে O বিন্দুতে কেবলমাত্র $P–Q$ বল ক্রিয়া করে।

এখানে চিত্রে $P > Q$ নেওয়া হয়েছে। যদি $Q > P$ হত তবে বলটি Q-এর দিকে এবং $Q–P$ হত।

ΔACL ও ΔOXA ত্রিভুজ দুটি সদৃশ

$$\therefore \frac{AC}{OX} = \frac{CL}{XA}, \quad \text{অর্থাৎ} \quad AC.AX = CL.OX \qquad \text{(i)}$$

আবার সদৃশ ত্রিভুজ ΔOBX, ΔMBD থেকে পাই

$$\frac{MD}{OX} = \frac{BD}{BX} \quad \text{অর্থাৎ} \quad MD.BX = BD.OX \qquad \text{(ii)}$$

কিন্তু $CL = BD = R$ হওয়ায় (i) ও (ii) থেকে পাই

$$AC.AX = MD.BX$$

অর্থাৎ $\boxed{P.AX = Q.BX}$ বা, $AX : XB = Q : P$.

অতএব X বিন্দুটি AB কে বহিঃস্থভাবে ভাগ করে যে $AX : XB = Q : P$ এবং লব্ধিবলটি $P - Q$ এবং P-এর সমমুখী সমান্তরাল।

মন্তব্য : (1) $Q > P$ হলে লব্ধিবল হয় $Q - P$ এবং Q-এর সমান্তরাল এবং $AX : XB = Q : P$ হবে। এখানে X বিন্দুটি AB-এর B-এর দিকে বর্ধিত অংশে থাকবে।

(2) এখানে আমরা ভেক্টর ব্যবহার করলে এবং $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ দুটি অসমমুখী বল হলে তাদের লব্ধিবল হবে $\vec{F_1} + \vec{F_2}$ যেটা এমন একটি বিন্দু X -এ ক্রিয়া করবে যে $\left|\vec{F_1}\right| AX = \left|\vec{F_2}\right| XB$

3.5 সমান্তরাল বলসমূহের সাম্য

যদি কোন বস্তুর উপর একই সমতলে কতগুলি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে তা হল তাদের ক্রিয়ামুখ অনুসারে দুই শ্রেণীতে ভেদ করা যায়। অর্থাৎ কতগুলি একদিকে সমমুখী আর অন্যগুলি বিপরীত দিকে সমমুখী। এই দুই গোষ্ঠীর লব্ধি যথাক্রমে R_1, R_2 হলে R_1, R_2 পরস্পর সমান্তরাল ও অসমমুখী হবে। অতএব $R_1 \neq R_2$ হলে এদের লব্ধি একটি সমান্তরাল বল হবে। এখন যদি $R_1 = R_2$ হয় এবং উহাদের একই প্রয়োগবিন্দু হয়, কেবলমাত্র তখনই সমান্তরাল বলগুলি সাম্যে থাকবে।

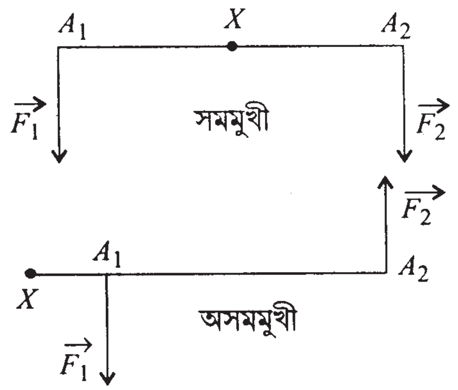
3.6 সমান্তরাল বলগোষ্ঠী (ভেক্টর প্রয়োগ)

$\vec{F_1}$ ও $\vec{F_2}$ দুটি সমান্তরাল বল যদি A ও B তে ক্রিয়া করে এবং $\vec{F_1} + \vec{F_2} \neq 0$ হয় তবে পূর্বের 3.3 ও 3.4 অনুচ্ছেদে আমরা দেখেছি যে বলদুটির লব্ধি একটি সমান্তরাল বল $\vec{F_1} + \vec{F_2}$ এবং উহা AB রেখার X বিন্দুতে ক্রিয়া করলে, X বিন্দু A_1A_2 রেখাংশের সমমুখী বলের ক্ষেত্রে AB-এর অন্তঃস্থ বিন্দু এবং অসমমুখী বলের ক্ষেত্রে X বহিঃস্থ এবং উভয় ক্ষেত্রেই।

$$\left|\vec{F_1}\right| A_1X = \left|\vec{F_2}\right| XA_2$$

যেখানে A_1, A_2 ও X-এর স্থান-ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$ ও $\vec{r}$ হয় তবে

$$\overrightarrow{AX} = \vec{r} - \vec{r_1}$$
$$\overrightarrow{XA_2} = \vec{r_2} - \vec{r}$$



4 নং চিত্র

(i) কে ভেক্টর গুণফল সাহায্যে লিখতে পারি অসমমুখী বা সমমুখী বলের ক্ষেত্রে

$$\overrightarrow{A_1X} \times \vec{F_1} = \overrightarrow{XA_2} \times \vec{F_2}$$

অর্থাৎ $\quad (\vec{r} - \vec{r_1}) \times \vec{F_1} = (\vec{r_2} - \mathrm{r}) \times \vec{F_2}$

$$\therefore \quad \vec{r} \times (\vec{F_1} + \vec{F_2}) = \vec{r_1} \times \vec{F_1} + \vec{r_2} \times \vec{F_2} \qquad \text{(ii)}$$

(ii) সম্পর্কটি দুই-এর অধিক বলের ক্ষেত্রে সত্য দেখান যায়। $\vec{F_1} + \vec{F_2}$ এই বলটি X বিন্দুতে ক্রিয়া করে। এখন বল যদি $\vec{F_3}$ বল যদি $\vec{F_1} + \vec{F_2}$-এর সমান্তরাল হয় এবং A_3 বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} \neq 0$ হয় তবে $(\vec{F_1} + \vec{F_2})$ ও $\vec{F_3}$-এর সম্মিলিত বল $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$ এমন একটি বিন্দু X' তে (যাহা XA_3-এর উপর আছে) ক্রিয়া করবে যে (X'-এর স্থান ভেক্টর $\vec{r'}$ A_3-এর স্থান ভেক্টর $\vec{r_3}$)

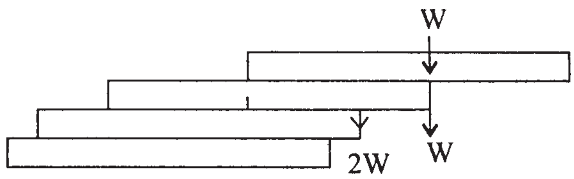
$$\vec{r'} \times (\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}) = \vec{rx}\ (\vec{F_1} + \vec{F_2}) + \vec{r_3} \times (\vec{F_3})$$
$$= \vec{r_1} \times \vec{F_1} + \vec{r_2} \times \vec{F_2} + \vec{r_3} \times \vec{F_3} \quad \text{[(ii) থেকে (iii)]}$$

এভাবে যদি n সংখ্যক সমান্তরাল বল $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, ..., $\vec{F_n}$ যথাক্রমে A_1 ($\vec{r_1}$), A_2 ($\vec{r_2}$), ... An ($\vec{r_n}$) বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং $\vec{F_1} + \vec{F_2} ..... + \vec{F_n} = \vec{F} \neq 0$ হয় তবে $\vec{F}$ বলের ক্রিয়া বিন্দুর অবস্থান-ভেক্টর হলে $\vec{R}$

$$\vec{R} \times \vec{F} = \sum_{k=0}^{n} \vec{r_k} \times \vec{F_k} \qquad \text{(iv)}$$

3.7 কয়েকটি উদাহরণ

1. এক গোছা তাস টেবিলের উপর রাখা হল। প্রত্যেকটি তাস তার নীচের তাসের তুলনায় কিছুটা বের হয়ে আছে। প্রত্যেকটি যদি যতদূর বাহির থাকা সম্ভব ততটাই থাকে, দেখান যে পরপর তাসগুলির প্রান্তগুলির দূরত্বসমূহ একটি বিপরীত প্রগতিতে থাকবে।



5 নং চিত্র

সবচেয় উপরের তাসটি দৈর্ঘ্য l-এর অর্ধেক বের হয়ে থাকতে পারে, কেননা তাহলে ওর ওজন ও নীচের তাসের প্রান্তবিন্দুতে প্রদত্ত প্রতিক্রিয়া বল সাম্যাবস্থায় থাকে। তার নীচের তাসের উপর ওজন বল W ও উপরের তাস কর্তৃক প্রদত্ত চাপ W এদের লব্ধি $2W$ নীচের তাসের প্রান্তে ক্রিয়া করে, অতএব তাসটি $\frac{l}{4}$ বাইরে থাকে। অনুরূপে তার নীচের তাসের উপর প্রদত্ত চাপ $2W$ ও ওজন W-এর লব্ধি প্রান্ত হতে x দূরে হলে

$$2W.x = W\left(\frac{1}{2} - x\right)$$

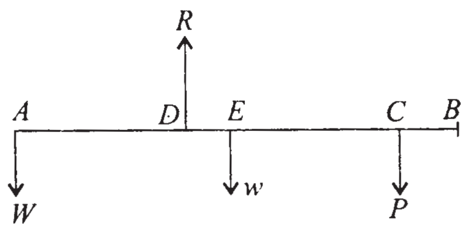
$$3W.x = \frac{Wl}{2}$$

অথবা $$x = \frac{l}{6}$$

এভাবে তাসগুলি ক্রমান্বয়ে $\frac{l}{2}, \frac{l}{4}, \frac{l}{6}, \frac{l}{8}$, ... অংশ বাইরে আছে। কিন্তু এদের ব্যস্ত সংখ্যাগুলি $\frac{2}{l}, \frac{4}{l}, \frac{6}{l}, \frac{8}{l}$, ... পরস্পর সমান্তর প্রগতিতে আছে।

2. একটি লোক তার কাঁধের উপর অবস্থিত লাঠির প্রান্তে একটি বোঝা নিয়ে চলে। যদি লাঠিটি আনুভূমিকভাবে থাকে এবং সে লাঠিটি একটি হাত দিয়ে ধরে থাকে, তাহলে তার হাত ও কাঁধের মধ্যে দূরত্ব পরিবর্তন হলে কাঁধের উপর চাপ কিরূপ পরিবর্তিত হবে?

হাত দিয়ে যে বল প্রযুক্ত হয় তা P ধরা যাক এবং উহা C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। লাঠিটির ওজন দণ্ডটির মধ্যবিন্দু E -তে ক্রিয়া করে। এখন লাঠির ওজন w ধরলাম। বোঝার ওজন W ধরলাম। লাঠির D বিন্দু কাঁধের উপর আছে ধরলাম। অতএব W, P ও লাঠির ওজন w এই তিনটি সমমুখ



6 নং চিত্র

বলের লব্ধি D দিয়ে যাবে এবং প্রতিক্রিয়া বল R দ্বারা নিরস্ত হবে।

ধরলাম $AB = 2l$ লাঠির দৈর্ঘ্য এবং $CD = x$, $AD = y$.

অতএব $$W.AD - P.CD - \text{w}.DE = 0$$

এবং $$R = W + \text{w} + P.$$

$$= W + \text{w} + \frac{W.AD - w.DE}{CD}$$

$$= W + \text{w} + \frac{W.y - w(l-y)}{x}$$

$$= \frac{W(x+y) + w(x-l+y)}{x} = \frac{(W+w)(x+y) - wl}{x}$$

যেহেতু হাত সর্বদা C বিন্দুতেই আছে, অতএব AC_1 দৈর্ঘ্য স্থির, অর্থাৎ $x + y$ নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য। অতএব চিত্র হতে বুঝা যায় x যতটা বৃহৎ সম্ভব হবে R তত কম হবে।

যদি লোকটি লাঠির প্রান্ত ধরে থাকে, তাহলে $x + y$ = সমগ্র লাঠির দৈর্ঘ্য = $2l$, এবং সেক্ষেত্রে কাঁধের প্রতিক্রিয়া বল

$$R = \frac{2lW = wl}{x}$$

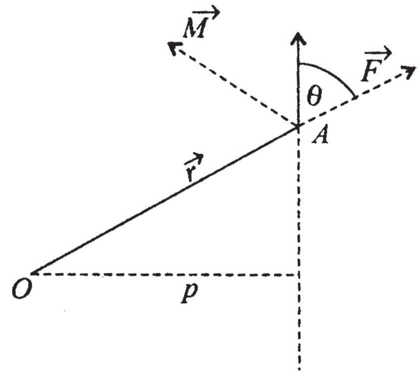
3. দুটি সদৃশ সমান্তরাল বল P এবং $Q(P > Q)$ কোন দৃঢ় বস্তুর দুটি বিন্দু A এবং B -তে ক্রিয়া করে। P এবং Q পরস্পর স্থান বিনিময় করলে, দেখান যে লব্ধির প্রয়োগবিন্দু AB বরাবর d পরিমাণ দূরে সরে যাবে যেখানে

$$\frac{d}{AB} = \frac{P-Q}{P+Q}$$

3.8 একটি বিন্দুর সাপেক্ষে বলের ভ্রামক (Moment of a Force about a point)

সংজ্ঞা ঃ ধরা যাক $\vec{F}$ বল একটি দৃঢ় বস্তুর A বিন্দুতে ক্রিয়া করে। O যে কোন একটি বিন্দু থাকে আদিবিন্দু নিয়ে A বিন্দুর স্থান-ভেক্টর (positio*n* v*e*ctor) $\vec{r}$, তাহলে O-এর সাপেক্ষে $\vec{F}$ বলের ভ্রামক হল একটি ভেক্টর $\vec{M}$, যেখানে

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



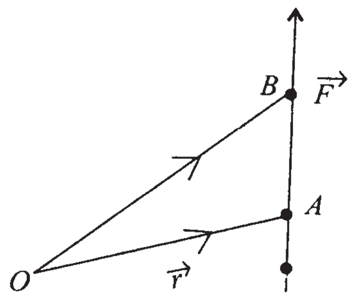
7নং চিত্র

অতএব দেখা গেল $\vec{M}$ ভেক্টরটির মান হল $|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta = p|\vec{F}|$, যেখানে $p = 0$ থেকে

বলটির উপর লম্ব এবং $\vec{M}$ ভেক্টরটির দিক্ হল $\vec{r}$ ও $\vec{F}$-এর সমতলের উপর লম্বদিকে এমনভাবে যে, $\vec{r}$, $\vec{F}$ ও $\vec{M}$ এই দিক তিনটি একটি দক্ষিণাবর্তে থাকে।

মন্তব্য : 1. উপরের সংজ্ঞা থেকে স্পষ্ট যে $\vec{F}$ বলটির ক্রিয়ারেখার যেকোন বিন্দুকে প্রয়োগবিন্দু নিয়ে O-এর সাপেক্ষে ভ্রামক একই হয়। কারণ ধরা যাক B, $\vec{F}$-এর ক্রিয়ারেখার অপর একটি বিন্দু। তাহলে B-এর স্থান-ভেক্টর হবে $\vec{r} + \overrightarrow{AB}$. অতএব B বিন্দুকে প্রয়োগবিন্দু দিয়ে O-এর সাপেক্ষে $\vec{F}$ এর ভ্রামক $= (\vec{r} + \overrightarrow{AB}) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} + \overrightarrow{AB} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$

যেহেতু $\overrightarrow{AB}$, $\vec{F}$ দুটি একই রেখার ভেক্টর, অতএব $\overrightarrow{AB} \times \vec{F} = 0$



8 নং চিত্র

2. বলের ক্রিয়া রেখার উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু সাপেক্ষে বলের ভ্রামক শূন্য। (এখানে $\vec{r}$ ও $\vec{F}$ সমরেখীয়)

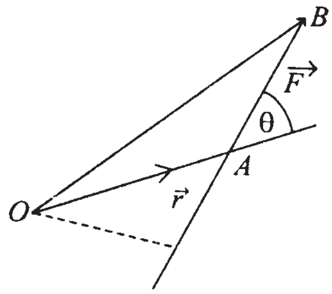
3. কোন বিন্দু O-এর সাপেক্ষে $\vec{F}$ বলের ভ্রামক শূন্য হলে হয় O, $\vec{F}$-এর ক্রিয়ারেখার উপর থাকিবে অথবা $|\vec{F}| = 0$ শূন্য হবে।

4. $\vec{F}$ বলের O সাপেক্ষে ভ্রামক $\vec{M}$-এর মান

$$|\vec{M}| = 2\Delta OAB$$

যেখানে $\overrightarrow{AB}$ হল $\vec{F}$ বল-ভেক্টর।

প্রমাণ ঃ



9 নং চিত্র

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\therefore \left|\vec{M}\right| = |\vec{r}|\left|\vec{F}\right| \sin\theta$$

$$= OA.\,AB \sin\theta = 2.\frac{1}{2} AB.(OA \sin\theta)$$

$= 2\Delta O\mathrm{A}B$, যেখানে

$\Delta OAB = OAB$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

5. ভ্রামকের বৈশ্লেষিক রূপ (Analytical Form of Moment in Rectangular Coordinates)

ধরা যাক $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ তিনটি একক ভেক্টর আয়তক্ষেত্রাকার Ox, Oy, Oz অক্ষদিকে প্রসারিত। O বিন্দু সাপেক্ষে A বিন্দুর আয়তক্ষেত্রাকার স্থানাঙ্ক (x, y, z) হলে $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$. $\vec{F}$ বলটি A তে প্রযুক্ত এবং $\vec{F}$-এর আয়তক্ষেত্রাকার বিশ্লেষিতাংশগুলি X, Y, Z হলে

$$\vec{F} = \vec{i} = X + \vec{j}Y + \vec{k}Z$$

অতএব সংজ্ঞানুসারে $\vec{F}$-এর O সাপেক্ষে ভ্রামক

$$= \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) \times (\vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z)$$

$$= \vec{i}(yZ - zY) + \vec{j}(zX - xZ) + \vec{k}(xY - yX)$$

$\vec{M}$-কে ডিটারমিনান্ট রূপে লেখা যায় অর্থাৎ $\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$

অতএব $\vec{M}$ ভ্রামক ভেক্টরের আয়তক্ষেত্রাকার উপাংশগুলি হল M_1, M_2, M_3, যেখানে

$$M_1 = yZ - zY, \quad M_2 = zX - xZ, \; M_3 = xY - yZ$$

6. একটি বলের কোন বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক শূন্য হওয়ার প্রয়োজনীয় শর্ত হল ভ্রামকের আয়তক্ষেত্রাকার উপাংশ তিনটি শূন্য হবে।

প্রমাণ : আগের মন্তব্য থেকে আমরা

$$\vec{M} = \vec{i}M_1 + \vec{j}M_2 + \vec{k}M_3$$

$\therefore$ $\vec{M} = 0$ হওয়ার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল $M_1 = M_2 = M_3 = 0$

7. একটি বল $\vec{F}$-এর ক্রিয়ারেখা ও একটি নির্দিষ্ট বহিঃস্থ বিন্দু O সর্বদা একটি সমতল দেয় যাতে ঐ বিন্দুটি $\vec{F}$ বলের ক্রিয়ারেখা থাকে। অতএব $\vec{F}$-এর O বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ যেখানে $\vec{r}$ হল O থেকে $\vec{F}$-এর ক্রিয়ারেখাস্থ একটি বিন্দু পর্যন্ত সংযোজক ভেক্টর। অতএব সংজ্ঞানুসারে ভ্রামক $\vec{M}$ একটি ভেক্টর যার দিক হল $\vec{r}$ ও $\vec{F}$-এর দ্বারা রূপায়িত সমতলের উপর লম্ব।

3.9 ভ্রামক সম্পর্কিত ভারিগ্নন্ এর উপপাদ্য (Varignon's Theorem)

সমবিন্দু বলগোষ্ঠীর ক্ষেত্রে :

'একটি সমবিন্দু বলগোষ্ঠীর লব্ধির কোন বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক প্রতিটি বলের ঐ বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামকসমূহের ভেক্টর যোগফলের সমান।'

প্রমাণ : সমবিন্দু বলগুলি $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$ দ্বারা রূপায়িত হলে এবং A বিন্দুতে ক্রিয়ারত হলে, বলগুলির লব্ধি হল $\vec{F}$, যেখানে

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$$

এখন O বিন্দু সাপেক্ষে $\vec{F}$-এর ভ্রামক $\vec{M}$ হলে

$$\vec{M} = \vec{O}A \times \vec{F} = (\vec{O}A \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots \vec{F}_n)$$

$$= \vec{O}A \times \vec{F}_1 + \vec{O}A \times \vec{F}_2 + \ldots + \vec{O}A \times \vec{F}_n$$

$$= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n$$

যেখানে $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \ldots \vec{M}_n$ হল $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$ বলগুলির O সাপেক্ষে ভ্রামক। অতএব প্রমাণিত হল। সমান্তরাল বলসমূহের ক্ষেত্রে

'যদি $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$ বলগুলি পরস্পর সমান্তরাল হয় এবং $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n \neq 0$ হয় তবে যে কোন বিন্দুর সাপেক্ষে লব্ধি বলের ভ্রামক ভেক্টর ঐ বিন্দুর সাপেক্ষে প্রত্যেকটি বলের সাপেক্ষে ভ্রামক ভেক্টরসমূহের যোগফলের সমান হবে।'

প্রমাণ : আমরা 3.6 তে দেখেছি যে, কোন সমান্তরাল বলগোষ্ঠীর $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$ যদি $A_1(\vec{r}_1), \ldots A_n(\vec{r}_n)$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং যদি $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n \neq 0$ হয়, তবে বলগোষ্ঠীটির লব্ধিবল হয় একটি সমান্তরাল বল $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ এবং $\vec{F}$ এমন একটি বিন্দু $X(\vec{r}_x)$-এ ক্রিয়া করে যে

$$\vec{r}_X \times \vec{F} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_1 \times \vec{F}_i) \qquad \text{..................(i)}$$

অতএব যে বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক নেওয়া হচ্ছে সে বিন্দুকে আদিবিন্দু নিলে

($\vec{F}$-এর O-এর সাপেক্ষে ভ্রামক) $= \vec{r}_X \times \vec{F}$

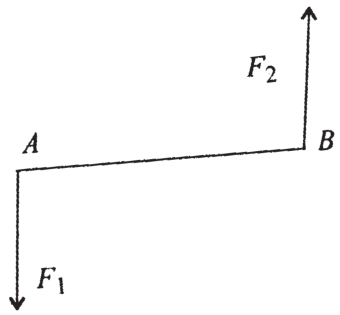
এবং $\vec{F}_i$ বল যাকে $A_i(\vec{r}_i)$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে তার O সাপেক্ষে ভ্রামক $= \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

অতএব (1) থেকে আমরা ভারিগ্নন্-এর উপপাদ্য পাই।

3.10 বলদ্বন্দ্ব বা বলযুগ্ম (Couple)

দুটি অসমমুখী সমমানের সমান্তরাল বলের লব্ধি কোণ অশূন্যক বল হতে পারে না। কারণ যদি সম্ভব হয় $\vec{F}_1$ ও $\vec{F}_2$ বলদ্বয় যথাক্রমে $A(\vec{r}_1)$ ও $B(\vec{r}_2)$ তে ক্রিয়া করে এবং উহাদের লব্ধি বল ঐ সমতলে একটি বল $\vec{R}$। ধরা যাক, এখন $\vec{R}$ অশূন্যক হলে এবং বলদ্বয়ের সমান্তরাল হলে যেহেতু

$$\vec{F}_1 + (\vec{F}_2) + \vec{R} = 0 + \vec{R} = \vec{R} \neq 0$$



10 নং চিত্র

অতএব, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ও $\vec{R}$-এর লব্ধি হল $\vec{R}$ এবং ভারিগ্ননের উপপাদ্য অনুসারে

$$\vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R}) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{R}$$

$$= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_1) + \vec{r} \times \vec{R} \quad [\because \vec{F}_2 = -\vec{F}_1]$$

$$= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{R}$$

অতএব, $\vec{r} \times \vec{R} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{R}$

অতএব, $O = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 \qquad \ldots \quad \text{(i)}$

কিন্তু $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \overrightarrow{BA} \neq 0$

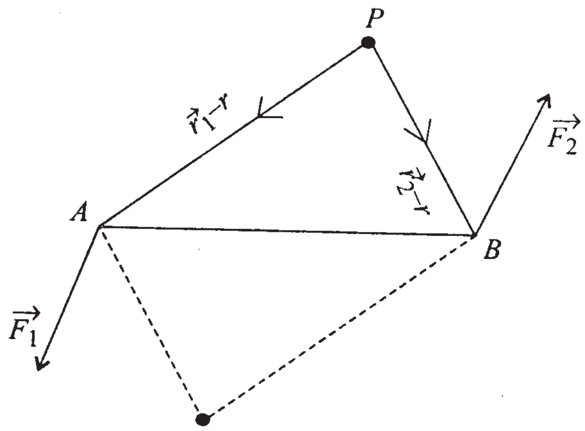
$\vec{F}_1 \neq 0$

এবং $\overrightarrow{BA}$ ও $\vec{F}_1$ সমান্তরাল নয়, অতএব (i) সত্য হতে পারে না। অতএব সমান্তরাল অসমমুখী সমমানের বলদুটি একটি সমান্তরাল অশূন্যক বল হতে পারে না। অনুরূপভাবে দেখান যায় উহা এমন একটি বল হতে পারে না যেটা $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ বলের ক্রিয়ারেখাকে ছেদ করে। কেননা সেক্ষেত্রে সামান্তরিক সূত্র প্রয়োগ করে দেখান যায় যে বলদুটির বিপরীত দুটি ঐ বলের সহিত যুক্ত হয়ে সাম্য হয় না।

সংজ্ঞা : বলদ্বন্দ্ব বা বলযুগ্ম (Couple)

'দুটি সমান্তরাল অসমমুখী ও সমমানের বল একটি বলদ্বন্দ্ব বা বলযুগ্ম গঠন করে।' আমরা প্রাথমিক আলোচনায় দেখেছি যে, এরূপ দুটি বল কখনও একটি বলে পরিণত হয় না। অসমমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় করার পদ্ধতি প্রয়োগ করে দেখা যায় যে তাদের কোন লব্ধিবল পাওয়া যায় না। অতএব এরূপ দুটি বলের জন্য আমরা একটি নূতন গাণিতিক বস্তুর সন্ধান পাচ্ছি। এখন দেখা যাক এরূপ বলদ্বন্দ্বের স্বরূপ কী?

বলদ্বন্দ্বের ভ্রামক (Moment of a Couple)



11 নং চিত্র

কোন নির্দিষ্ট আদিবিন্দু O সাপেক্ষে $A(\vec{r}_1)$ বিন্দুতে $\vec{F}_1$ বল ও $B(\vec{r}_2)$ বিন্দুতে $\vec{F}_2$ বল ক্রিয়া করে, যেখানে $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, অর্থাৎ $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ এবং বল দুটি সমান্তরাল এবং অসমমুখী।

ধরা যাক $P(\vec{r})$ যে কোন একটি বিন্দু, তা হলে $\vec{F}_1$ বলের P বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক

$$= \overrightarrow{PA} \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}) \times \vec{F}_1$$

$\vec{F}_2$ বলের P বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক $= \overrightarrow{PB} \times \vec{F}_2$

$$= (\vec{r}_2 - \vec{r}) \times \vec{F}_2$$

অতএব $\vec{F}_1$ ও $\vec{F}_2$ বলদ্বয়ের P বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামকের যোগফল

$$= (\vec{r}_1 - \vec{r}) \times F_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}) \times \vec{F}_2$$

$$= (\vec{r}_1 - \vec{r}) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}) \times (-\vec{F}_1)$$

$$= (\vec{r}_1 - \vec{r} - \vec{r}_2 + \vec{r}) \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1$$

$$= \overrightarrow{BA} \times \vec{F}_1$$

অতএব, $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ বলরেখাদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব p হলে বল দুটির যে কোন বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামকের যোগফল একটি ভেক্টর যার মান $|\vec{F}_1|p$ এবং দিক্ ঐ বলদ্বয়ের সমতলের উপর লম্ব। অতএব দেখা যাচ্ছে ভ্রামকের যোগফল সমস্ত বিন্দু P-এর অবস্থানের উপর নির্ভর করে না। ভ্রামকের যোগফল নির্ভর করে শুধু বলটির মান ও বল দুটির মধ্যস্থ দূরত্বের গুণফলের উপর। অতএব বলদ্বন্দ্বের একটি মাপক হল তার যেকোন বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক, যাহা বলদ্বন্দ্বের জন্য একটি নির্দিষ্ট ভেক্টর।

সংজ্ঞা : বলদ্বন্দ্বের ভ্রামক $\vec{M}$ হল বলদুটির যে কোন বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামকের যোগফল।

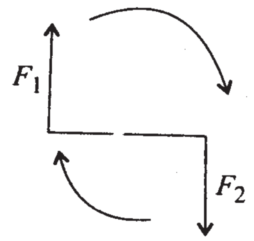
বলদ্বন্দ্বের বাহু (Arm of A Couple)

বলদ্বন্দ্বের বল দুটির ক্রিয়ারেখার লম্বদূরত্বকে উহার বাহু বলা হয়। অতএব বলদ্বন্দ্বের ভ্রামকমান

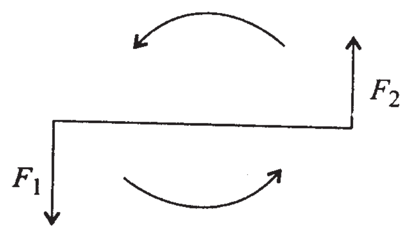
$$= \frac{\text{বলের মান} \times \text{বলদ্বন্দ্বেরবাহুদৈর্ঘ্য}}{\text{দ্বন্দ্বের ঘূর্ণন দিক}}$$

বলদ্বন্দ্বের ভ্রামক যেহেতু বল দুটির মান ও তাদের মধ্যবর্তী দূরত্বের গুণফলের উপর নির্ভর করে এবং বল দুটির ভ্রামকের সঙ্গো যেহেতু ঘূর্ণনের সম্পর্ক আছে।

নিম্নের 12 নং চিত্রে বল দুটির ঘূর্ণন দিক্ একটি ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের মত (*Clockwise*)।



12 নং চিত্র



13 নং চিত্র

আবার 13 নং চিত্রে ঘূর্ণন দিক্ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে (Anticlockwise). যেহেতু বলদ্বন্দ্বের ভ্রামকের সংজ্ঞা ভেক্টর গুণফল দ্বারা দেওয়া হয়, অতএব একটি বলদ্বন্দ্বের ভ্রামক Anticlockwise হলে দক্ষিণাবর্ত তন্ত্রে (Right-handed System of Axes) তার দিক ধণাত্মক দিকে আর বলদ্বন্দ্বের ভ্রামক Clockwise হলে তার দিক ঋণাত্মক দিকে।

উদাহরণ 1 উদাহরণস্বরূপ : ধরা যাক

$(2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k})$ বল $(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$ বিন্দুতে

ও $(-2\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$ বল $(2\vec{j}-\vec{k})$ বিন্দুতে ক্রিয়া করলে বলদ্বন্দ্বটির ভ্রামক নির্ণয় করুন।

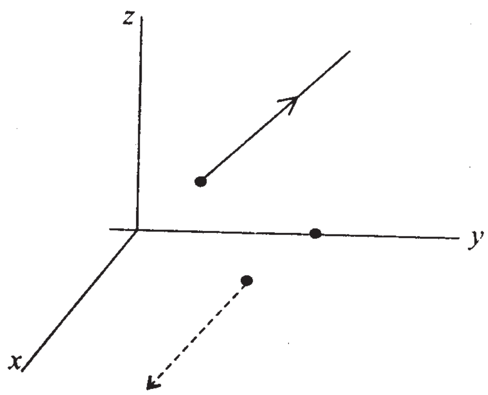
সমাধান : বলদুটি সমান্তরাল ও অসমমুখী। আদি বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক

$$= (\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}-\vec{o})\times(2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k})$$

$$+(2\vec{j}-\vec{k})\times(-2\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

$$= 3\vec{k} - 5\vec{j} - 2\vec{k} + 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{i} + 4\vec{k} - 10\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{i}$$

$$= 5\vec{k} - \vec{j} - 11\vec{i}$$



14 নং চিত্র

অতএব বলটির ভ্রামকের তিনটি উপাংশ তারমধ্যে x-এর ঋণাত্মক দিকে 11 একক y-এর ঋণাত্মক দিকে। একক এবং z-অক্ষের ধনাত্মক দিকে 5 একক উপাংশ আছে।

উদাহরণ 2. যদি $5\vec{i} + 6\vec{j}$ বল $\vec{i} + \vec{j}$ বিন্দুতে ও $-5\vec{i} - 6\vec{j}$ বল $(-\vec{i} + \vec{j})$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে তবে বলদ্বয়ের ভ্রামক কত?

$(-\vec{i} + \vec{j})$ বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক নিলে পাই ভ্রামক

$$= ((\vec{i} + \vec{j}) - (-\vec{i} + \vec{j})) \times (5\vec{i} + 6\vec{j})$$

$$= 2\vec{i} \times (5\vec{i} + 6\vec{j}) = 12\vec{k}$$

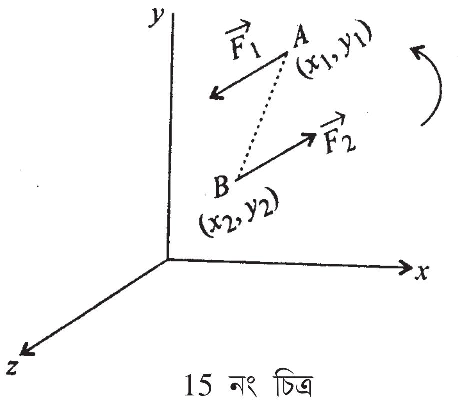
অতএব বলদ্বন্দ্বটির ভ্রামক z-এর ধনাত্মক দিকে ও 12 একক মান।

3.11 দ্বন্দ্বের সমতুলতা

যদি xy-তলে দুটি বল দ্বারা দ্বন্দ্ব তৈরী হয় যেমন $\vec{F}_1(X, Y)$ বল $A(x_1,\ y_1)$ বিন্দুতে এবং $\vec{F}_2 = (-X, -Y)$ বল $B(x_2,\ y_2)$ বিন্দুতে ক্রিয়াশীল আছে।

এ দ্বন্দ্বের ভ্রামক $= \overrightarrow{BA} \times \vec{F}_1$

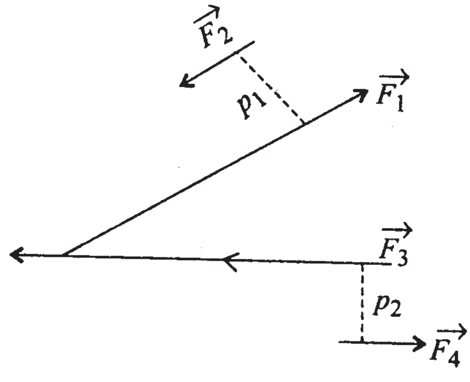
$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & 0 \\ X & Y & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(Y(x_1 - x_2) - X(y_1 - y_2))$$



15 নং চিত্র

অতএব দ্বন্দ্ব ভ্রামক বলদ্বয়ের সমতলের লম্বদিকে। চিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে দ্বন্দ্বের ভ্রামক z-অক্ষের ধনাত্মক দিকে।

দ্বন্দ্ব সমতুলতা : দুটি দ্বন্দ্ব xy-তলে $(\vec{F_1}, \vec{F_2})$ এবং $(\vec{F_3}, \vec{F_4})$ যেখানে $\vec{F_2} = -\vec{F_1}, \vec{F_4} = -\vec{F_3}$ ক্রিয়া করছে, এবং তাদের ভ্রামক দুটি সমান। অর্থাৎ $|\vec{F_1}|p_1 = |\vec{F_3}|p_2$ এবং উহাদের ঘূর্ণনদিক একই। অতএব যে কোন বিন্দু সাপেক্ষে বলদ্বন্দ্বদুটির ভ্রমক সমান, ফলে বলদ্বন্দ্বদুটি সমতুল।



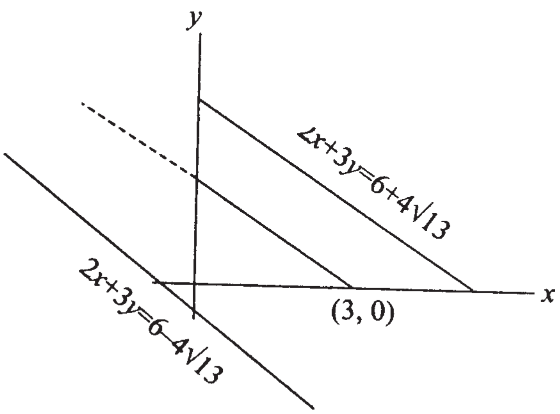
16 নং চিত্র

একটি বলযুগ্ম তার ভ্রমক দ্বারা নিরূপিত হয়। অতএব দুটি বলযুগ্মকে সমান বলা হবে যদি তাদের ভ্রামক দুটি সমান হয়। অতএব দেখা যাচ্ছে যে বলযুগ্ম দুটি এক সমতলে অথবা সমান্তরাল সমতলে থাকিলেও তাদের ভ্রামক সমান হতে পারে। দ্বন্দ্বের ভ্রামক-ভেক্টর একটি মুক্ত ভেক্টর (Free Vector)।

দুই বা ততোধিক বলযুগ্মের লব্ধি বলযুগ্ম। যদি দুটি বলযুগ্মের ভ্রামক যথাক্রমে $\vec{M}_1$ ও $\vec{M}_2$ ভেক্টর হয়, তাহলে এ দুটি বলযুগ্মের লব্ধি একটি বলযুগ্ম, যার ভ্রামক হল $\vec{M}$ যেখানে $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$.

3.12 উদাহরণ

1. xy সমতলে একটি বলযুগ্মের 10 এককের একটি বল $2x + 3y = 6$ রেখা বরাবর ক্রিয়া করছে। বলযুগ্মের ভ্রামক 40 একক z-অক্ষের দিকে হলে, বলযুগ্মের অর বলটির ক্রিয়ারেখা নির্ণয় করুন।



17 নং চিত্র

সমাধান : অপর বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল হবে এবং প্রথম রেখা থেকে 4 একক দূরে থাকবে। অতএব সমীকরণ হল $2x + 3y = c$

এবং $\dfrac{6-c}{\sqrt{2^2+3^2}} = \pm 4$ বা, $\dfrac{(6-c)^2}{13} = 16$

$$6 - c = \pm\, 4\sqrt{13}$$

অতএব দ্বিতীয় বলটি

$$2x + 3y = 6 \pm 4\sqrt{13}$$

এই রেখা দুটি যে কোন একটি বরাবর ক্রিয়া করে।

যদি প্রথম বলটির দিক জানা থাকে, তবে দ্বিতীয়টির দিক এমন হবে যে, z-অক্ষ থেকে দেখলে বলদ্বন্দ্বটির ঘূর্ণন ঘড়ির কাঁটার বিপরীত হবে।

2. তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল P, Q, R ABC ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু তিনটিতে ক্রিয়া করে। যদি ওদের লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা সর্বদা

(i) ভর কেন্দ্র G গামী হয়, তবে দেখান যে

$$P = Q = R$$

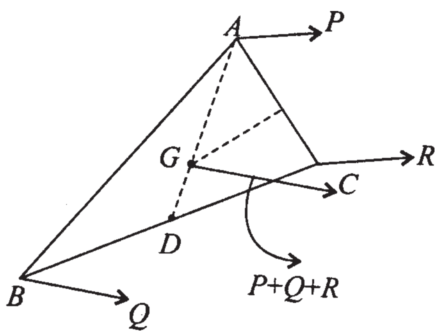
(ii) অন্তঃকেন্দ্র দিয়ে যাবে, তবে দেখান যে

$$\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$$

(iii) পরিকেন্দ্র দিয়ে যায়, তবে দেখান যে

$$\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$$

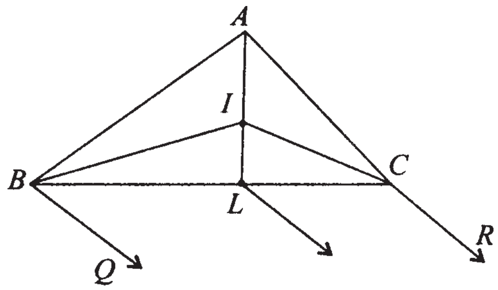
[**সংকেত :** (i)



18 নং চিত্র

AG বর্ধিত করে BC কে D বিন্দুতে ছেদ করল, D হল BC-এর মধ্যবিন্দু Q ও R-এর লব্ধি বল এমন হবে যে উহা D' বিন্দুতে BC কে ছেদ করলে $Q.DB' = R.D'C$. কিন্তু D' ও A-এর যোগকারী রেখার যে বিন্দু দিয়ে যাবে সেটা G দিয়ে নাও যেতে পারে, সেজন্য Q ও R-এর লব্ধি বল D দিয়ে যাবে। অতএব $Q = R$]

সংকেত : (ii)



19 নং চিত্র

$$Q.BL = R.CL$$

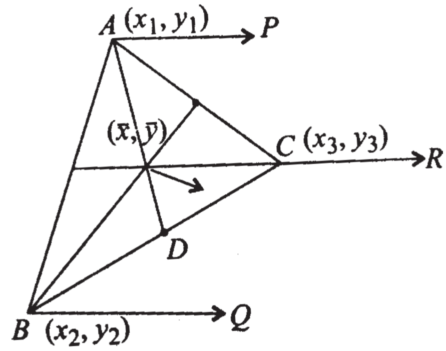
$\therefore \quad \dfrac{BL}{CL} = \dfrac{\sin C}{\sin B} \quad$ [ΔABL, ΔACL থেকে]

$\therefore \quad Q.BL = R.CL$

$\therefore \quad \dfrac{Q}{R} = \dfrac{CL}{BL} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$ ইত্যাদি

দ্বিতীয় পদ্ধতি : সমান্তরাল বলসমূহের কেন্দ্র $\bar{x} = \dfrac{Px_1 + Qx_2 + Rx_3}{P+Q+R}$ ইত্যাদি

$\bar{y} = \dfrac{Py_1 + Qy_2 + Ry_3}{P+Q+R}$



20 নং চিত্র

দেওয়া আছে

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

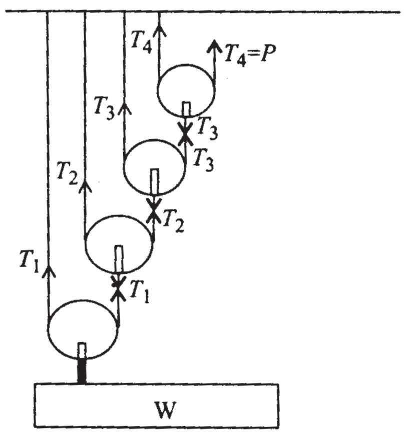
যদি স্থানাঙ্ক এমন নেওয়া হয় যে $x_2 = x_3 = 0$

তাহলে $\dfrac{Px_1}{P+Q+R} = \dfrac{x_1}{3}$

$$\left.\begin{array}{rl} \text{তাহলে} & 2P = Q + R \\ \text{এভাবে} & 2Q = P + R \\ \text{এবং} & 2R = P + Q \end{array}\right\} Q = P = R$$

3.13 বিভিন্ন সূত্র দ্বারা গঠিত কপিকল যন্ত্র

কতগুলি মসৃণ কপিকলের (Smooth Pulleys) সাহায্যে চিত্রানুযায়ী একটি ভারী বস্তু যার ওজন W -কে তোলা হচ্ছে। যদি বস্তুটিকে সাম্যাবস্থায় রাখতে শেষ কপিকলটিতে P পরিমাণ বল প্রয়োগ করতে হয় এবং কপিকলগুলির ওজন যথাক্রমে w_1, w_2, w_3, w_4 হয়, তবে P ও W-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করুন। (আলাদা তার দ্বারা কপিকলগুলি ঝুলছে)



21 নং চিত্র

চিত্র থেকে নীচে থেকে শুরু করে প্রতিটি কপিকলের সাম্যের জন্য

$$W + w_1 = 2T_1$$
$$T_1 + w_2 = 2T_2$$
$$T_2 + w_3 = 2T_3$$
$$T_3 + w_4 = 2T_4$$

অতএব দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ সমীকরণকে যথাক্রমে 2, 2^2, 2^3 দিয়ে গুণ করে চারটি সমীকরণ যোগ করে পাওয়া যায়

$$W + w_1 + 2w_2 + 2^2w_3 + 2^2w_4 = 2^4T_4 = 2^4P$$

অতএব $\dfrac{W}{P} = 2^4 - \dfrac{(w_1 + 2w_1 + 2^2 w_2 + 2^3 w_3)}{P}$ (1)

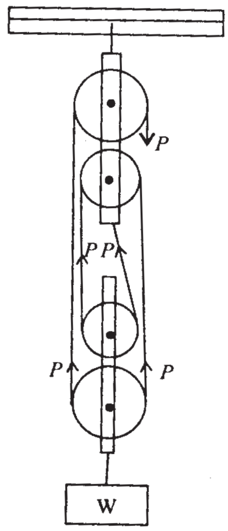
যদি কপিকলগুলির ওজন সামান্য এবং অবহেলাযোগ্য হয়, তাহলে $\dfrac{W}{P} = 2^4$

অতএব এক্ষেত্রে n সংখ্যক হালকা কপিকলসমেত চিত্ররূপ কপিকলসমষ্টির বেলায় $\dfrac{W}{P} = 2^n$.

$\dfrac{W}{P}$ এই সংখ্যাকে যে কোনো মেশিনের যান্ত্রিক সুবিধা (Mechanical Advantage) বলা হয়।

(1) থেকে বোঝা যাচ্ছে যে কপিকলগুলির ওজন খুব হালকা না হলে যান্ত্রিক সুবিধা কমে যায়। যান্ত্রিক সুবিধা যত বড় হবে, মেশিন দ্বারা বস্তু উত্তোলনকার্য তত সহজ হবে।

(2) একই সূত্র দ্বারা কত গুলি কপিকল যুক্ত করে একটি যন্ত্র তৈরী করে ভারী ওজন উত্তোলনকার্যে কিরূপ যান্ত্রিক সুবিধা হয় নির্ণয় করুন (চিত্র দেখুন) (এখানে কপিকলগুলি হালকা ধরে নিন)।



22 নং চিত্র

এখানে চিত্রে দুটি স্থির কপিকল ও অপর দুটি কপিকল ভারী বস্তুর সঙ্গে সংযুক্ত আছে। একটি

দড়ি কপিকল চারটির উপর দিয়ে যাচ্ছে। দড়িটির টান বল T হলে ভারী বস্তু W -কে স্থির রাখবার জন্য P বল প্রয়োগ করা দরকার, যেখানে

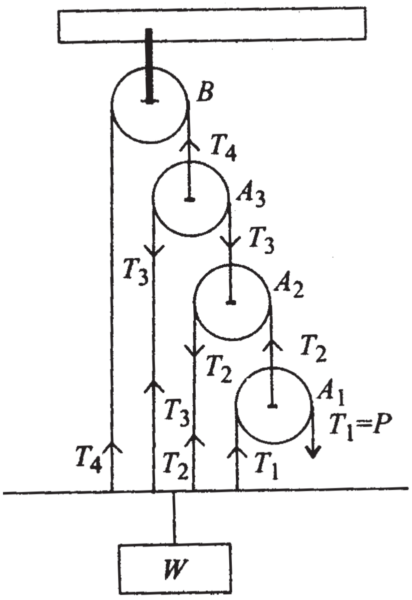
$$P = T$$

ভারী বস্তুটির সাম্যের জন্য

$$W = 2P + 2P = 4P$$

$$\therefore \quad \frac{W}{P} = 4 = \text{M.A.} \text{ (যান্ত্রিক সুবিধা)}$$

(3) কতগুলি কপিকল এমনভাবে আছে যে উচ্চতমটি স্থির অবস্থানে আর অন্যান্যগুলি একটি একটি করে উপরটির সঙ্গো দড়ির সাহায্যে ঝুলছে। এই কপিকলের দ্বারা প্রস্তুত যন্ত্রটির যান্ত্রিক সুবিধা কত? (যতগুলো কপিকল ততগুলো সুতো)



23 নং চিত্র

এখানে B স্থির।

A_1-এর সাম্যের জন্য $T_2 = 2T_1$

A_2-এর সাম্যের জন্য $T_3 = 2T_2$

A_3-এর সাম্যের জন্য $T_4 = 2T_3$

অতএব

$$T_1 = P$$

$$\therefore \quad P = T_1 = \frac{1}{2}T_2 = \frac{1}{2^2}T_3 = \frac{1}{2^3}T_4$$

আবার, $W = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

$$= P + 2P + 2^2P + 2^3P$$

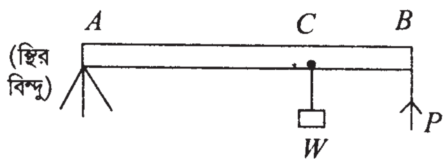
$$= P\frac{(2^4 - 1)}{2 - 1} = P(2^4 - 1)$$

$\therefore$ যান্ত্রিক সুবিধা $= \dfrac{W}{P} = 2^4 - 1$

$\therefore$ যা কপিকলের বেলায় যান্ত্রিক সুবিধা $= \dfrac{W}{P} = 2^n - 1$

উদাহরণ লিভার (Lever) :

(1) AB একটি দৃঢ় দণ্ডের প্রান্তবিন্দু A স্থির আছে এবং দণ্ডটি ঐ বিন্দু মাধ্যমে ঘূরতে পারে। একটি ভারী বস্তু দণ্ডটি থেকে ঝোলানো হলে, দণ্ডটির অপর প্রান্ত B -তে P প্রয়াস বল প্রয়োগ করলে দণ্ডটি সাম্যে থাকে। P ও W-এর মধ্যে সম্পর্ক কি? (এখানে দণ্ডটির ওজন অবহেলাযোগ্য।) যান্ত্রিক সুবিধা কত?



24 নং চিত্র

A বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক নিলে (যেহেতু A -তে প্রতিক্রিয়া বল ও B -তে প্রযুক্ত বল PW -কে সাম্যে রাখে, অতএব)

$$W.AC = P.AB$$

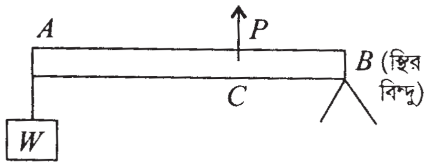
$$\therefore \quad \frac{W}{P} = \frac{AB}{AC}$$

অতএব $\frac{W}{P} =$ যান্ত্রিক সুবিধা

$$= \frac{AB}{AC} > 1$$

এখানে স্থিরবিন্দু A থেকে ভার W-এর দূরত্ব < প্রযুক্ত বলের দূরত্ব।

2. AB একটি দৃঢ় দণ্ড যার একপ্রান্তে A ভার W ঝুলছে এবং অপর প্রান্ত B স্থির আছে এবং AB-এর উপর একটি বিন্দুতে P প্রয়াস বল প্রযুক্ত হয়ে সাম্যে আছে। যান্ত্রিক সুবিধা কত?



25 নং চিত্র

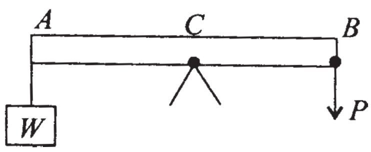
B-এর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাওয়া যায়

$$W.AB = P.BC$$

$$\therefore \quad \frac{W}{P} = \frac{BC}{AB} < 1$$

এখানে স্থিরবিন্দু থেকে ভারের দূরত্ব > প্রযুক্ত বল P-এর দূরত্ব।

3. AB দণ্ডের মধ্যস্থ একটি বিন্দু C স্থির থাকলে এবং একটি প্রান্তে ভার W ও অপর প্রান্তে $e$ffort অর্থাৎ প্রয়াস বল P প্রযুক্ত হয়।



26 নং চিত্র

এবার স্থিরবিন্দু C-এর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে

$$W.AC = P.BC$$

অতএব এখানে যান্ত্রিক সুবিধা $\frac{W}{P} = \frac{BC}{AC}$

3.14 সারাংশ

1. A ও B তে দুটি সমমুখী সমান্তরাল বলের (P, Q) লব্ধি একটি সমমুখী সমান্তরাল বল, যার মান বলদুটির মানের যোগফল এবং উহা AB-এর উপর C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল, যেখানে $P.AC = Q.CB$.

2. A ও B তে দুটি অসমমুখী ও অসমান মানের (P, Q) সমান্তরাল বলের লব্ধি একটি সমান্তরাল বল $P \ {}_2\ Q$ এবং উহা AB-এর উপর C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল যেখানে $P.AC = Q.CB$.

3. একাধিক সমমুখী সমান্তরাল বল, যার মান $P_1 + P_2 + \ldots, + P_n$ যদি $A_1, A_2, \ldots\ldots. A_n$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে তাদের লব্ধি একটি সমমুখী সমান্তরাল বল, যার মান $P_1+P_2+\ldots\ldots,+P_n$ এবং উহা যদি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে, তাহলে, একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O-এর সাপেক্ষে C-এর অবস্থান ভেক্টর হবে $\vec{R}$, যেখানে

$$\vec{R} = \frac{P_1\vec{r}_1 + P_2\vec{r}_2 + \cdots + P_n\vec{r}_n}{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}$$

যেখানে $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n$ এই অবস্থান ভেক্টরগুলি হল $A_1, A_2, \ldots, A_n$ বিন্দুর।

4. A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বল $\vec{F}$-এর কোন বিন্দু O-এর সাপেক্ষে ভ্রামক হল একটি ভেক্টর $\vec{M} = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$ যেখানে $\vec{r}_{OA} = 0$ সাপেক্ষে A-এর অবস্থান ভেক্টর। সংজ্ঞা থেকে প্রমাণ করা যায় যে, A বিন্দুটি বলের ক্রিয়ারেখার যে কোন বিন্দুতে নিলে ভ্রামক একই হয়।

5. দুটি সমতলীয় বলের একটি বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক যোগফল ঐ সমতলীয় বলদুটির লব্ধির ঐ বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামকের সমান। (ভারিগ্নন্ উপপাদ্য)

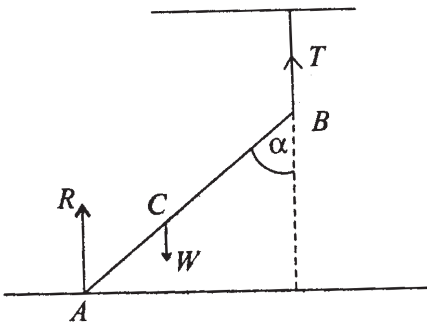
6. দুটি অসমমুখী সমান মানের সমান্তরাল বলের যে কোন বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক যোগফল একটি ধ্রুবক অর্থাৎ ভ্রামক যোগফল একটি ভেক্টর যার দিক হল সমান্তরাল বলদুটির সমতলের উপর লম্ব। এরূপ দুটি সমান মানের অসমমুখী সমান্তরাল বলকে বলদ্বন্দ্ব বা বলযুগ্ম (Couple) বলা হয়।

7. দুটি বলদ্বন্দ্বের ভ্রামক প্রত্যেকটির ভ্রামক-ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর নিয়ম অনুযায়ী যোগ করে পাওয়া যায়।

8. দুটি বলদ্বন্দ্বের ভ্রামক-ভেক্টর সমান হলে, বলদ্বন্দ্ব দুটি সমান হবে।

3.15 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. W ভারবিশিষ্ট একটি সরল সমদণ্ড উল্লম্বের সহিত α কোণে নত থাকিয়া সাম্যাবস্থায় আছে। দণ্ডটির একপ্রান্ত একটি মসৃণ টেবিলকে স্পর্শ করে আছে এবং অপর প্রান্ত একটি দড়ির সহিত আবদ্ধ। দড়ির টানের মান ও দিক্ নির্ণয় করুন।



27 নং চিত্র

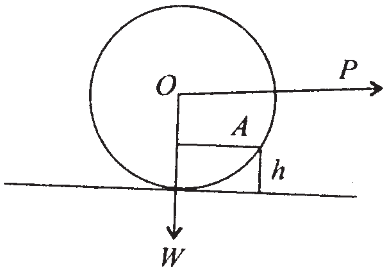
যেহেতু টেবিলটি মসৃণ, অতএব AB দণ্ডটির উপর প্রযুক্ত সমস্ত বল উল্লম্বদিকে হওয়ায়, দড়িটিও উল্লম্ব দিকে আছে। A প্রান্ত টেবিলের উপর আছে। A বিন্দুর সাপেক্ষে বলগুলির ভ্রামক নিলে (যেহেতু টান T ও ভার W-এর লব্ধি A বিন্দু দিয়ে যাবে) ভ্রামক শূন্য হবে। অর্থাৎ

$$T\overline{AB}\sin\alpha - W\overline{AC}\sin\alpha = 0$$

$$\therefore \ T = \frac{W}{2}$$

2. একটি ভারী চাকাকে (যার ওজন W ও ব্যাসার্দ্ধ r) একটি h একক উচ্চতাবিশিষ্ট বাধা অতিক্রম করতে হবে। কেবলমাত্র চাকাটির কেন্দ্রে একটি অনুভূমিক বল P প্রযুক্ত হলে, দেখান যে P বলটি অন্ততঃপক্ষে

$\dfrac{W\sqrt{2rh - h^2}}{r - h}$-এর অপেক্ষা সামান্য বড় হতে হবে।



28 নং চিত্র

চাকাটিকে বাধার কোণ A-কে অতিক্রম করতে হলে A বিন্দু সাপেক্ষ ভ্রামক শূন্য অপেক্ষা বৃহৎ হবে। অর্থাৎ

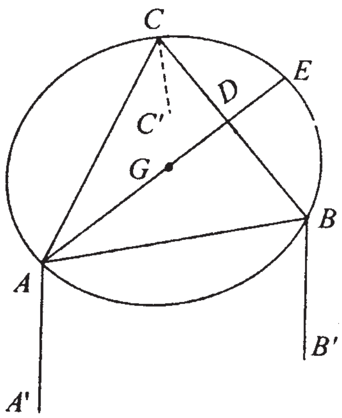
$$(r-h)P - W\sqrt{r^2-(r-h)^2} > 0$$

অর্থাৎ P-কে ন্যূনপক্ষে

$$\frac{W\sqrt{2rh-h^2}}{r-h}$$

অপেক্ষা বড় হতে হবে।

3. একটি গোলাকার টেবিল (যার ওজন W) তিনটি পায়ের উপর দাঁড়িয়ে আছে। পা তিনটি এমনভাবে টেবিলের প্রান্তে আটকানো আছে যে বিন্দুত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজ রচনা করে। দেখান যে W হতে কম যে কোনও ওজনের বস্তু টেবিলের উপর যে কোনও স্থানে রাখলে টেবিলটি উল্টাবে না।



29 নং চিত্র

চিত্রে A, B, C বিন্দুতে পা তিনটি যুক্ত এবং ABC সমবাহু ত্রিভুজ। কোনও ভারী বস্তু টেবিলের

উপর রাখলে যদি তা ABC ত্রিভুজের মধ্যে থাকে, তাহলে টেবিলটি উল্টাবে না। এখন যদি ABC ত্রিভুজের বাহিরে টেবিলের উপর থাকে, তাহলে উল্টাবার সম্ভাবনা হয়। ধরা যাক, বস্তুটি BC রেখা হতে সবচেয়ে বেশী দূরে AD মধ্যমার উপর E বিন্দুতে আছে। B ও C বিন্দুতে পায়ের মাটিতে স্থিত অপর বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে B' ও C' হলে, E বিন্দুতে ভার P থাকলে উহার $B'C'$ রেখার সাপেক্ষে ভ্রামক $P.DE$ দড়ির ঘূর্ণনমত এবং G বিন্দুগামী টেবিলের ওজন W-এর $B'C'$-এর সাপেক্ষে ভ্রামক $= W.GD$ ঘড়ির ঘূর্ণন বিপরীত। অতএব টেবিল কখনই উল্টাবে না যদি $W.GD > P.DE$ হয়।

অর্থাৎ যদি $P < W$ হয়।

4. যদি একটি বলের ভ্রামক (i) একটি বিন্দুর সাপেক্ষে, (ii) বলের সমতলস্থ দুটি বিন্দুর প্রত্যেকটির সাপেক্ষে, (iii) এক সরলরেখায় নহে এরূপ বলের সমতলস্থ তিনটি বিন্দুর প্রত্যেকটির সাপেক্ষে শূন্য হয়, তবে কি সিদ্ধান্ত করতে পারা যায়?

5. 3, 6, 9, 12 এককবিশিষ্ট চারটি সমমুখী সমান্তরাল বল একটি অনুভূমিক দণ্ডের উপর সমান দূরত্বে থেকে সক্রিয়। প্রমাণ করুন যে, ওদের লব্ধি যে বিন্দুতে ক্রিয়া করে, তৃতীয় বলটিকে অপসারিত করলেও বল তিনটির লব্ধি ওই একই বিন্দুতে ক্রিয়া করবে।

6. ABC সমবাহু ত্রিভুজের $\overline{AB}, \overline{BC}$ এবং $\overline{CA}$ বাহু বরাবর P, $2P$ ও $3P$ বল তিনটি সক্রিয়। উহাদের লব্ধির মান ও দিক এবং ঐ লব্ধির ক্রিয়ারেখা $\overline{BC}$ বাহুর সঙ্গে যে বিন্দুতে মিলিত হয়েছে সে বিন্দুটি নির্ণয় করুন।

7. একটি 12 মিঃ দীর্ঘ 20 kg ভারের সমদণ্ডের দুই প্রান্তে 12 kg এবং 4 kg ভার প্রয়োগ করা হয়েছে। 4 kg ভার যে প্রান্তে প্রযুক্ত সেই প্রান্ত হতে 4 মি. দূরে 8 kg ভার প্রযুক্ত হয়েছে। দণ্ডটি 8 মিঃ ব্যবধানে অবস্থিত দুটি কীলকের উপর স্থাপিত আছে এবং একটি কীলক হতে 4 kg ভার যে প্রান্তে প্রযুক্ত সে প্রান্ত 1 মি. বাহিরে আছে। কীলকসমূহের উপর চাপ নির্ণয় করুন।

8. একটি টেলিগ্রাফ থামের এক বিন্দুতে 20 ফুট লম্বা একখণ্ড শক্ত দড়ির একপ্রান্ত আটকান আছে। অপর প্রান্ত ধরে এক ব্যক্তি উহাকে একটি নির্দিষ্ট বলে টানছে। থামের কত উচ্চে দড়িটি আটকানো থাকলে ঐ ব্যক্তির পক্ষে থামটি উল্টে ফেলার সম্ভাবনা সবচেয়ে বেশী থাকবে, তাহা নির্ণয় করুন।

9. ABC ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষত্রয়ে সক্রিয় P, Q, R বল তিনটির প্রত্যেকটি ঐ শীর্ষত্রয়ের বিপরীত বাহুর উপর লম্বভাবে থেকে ত্রিভুজটিকে সাম্যাবস্থায় রাখে। প্রমাণ করুন যে, $P : Q : R = a : b : c$.

10. ABC সমবাহু ত্রিভুজের $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ বাহু বরাবর P, Q, R বল তিনটি সক্রিয়। যদি উহাদের লব্ধি ভরকেন্দ্রগামী হয়ে $\overline{BC}$ বাহুর সমান্তরাল হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $Q = R = \frac{1}{2}P$.

11. ABC ত্রিভুজের $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ বাহুত্রয় বরাবর P, Q, R বল তিনটি সক্রিয়। যদি উহাদের লব্ধি যথাক্রমে (i) অন্তঃকেন্দ্র, (ii) ভরকেন্দ্র, (iii) পরিকেন্দ্র ও (iv) লম্ববিন্দু দিয়ে যায়, তবে দেখান যে,

(i) $P + Q + R = 0$

(ii) $P \operatorname{cosec} A + Q \operatorname{cosec} B + R \operatorname{cosec} C = 0$

(iii) $P \cos A + Q \cos B + R \cos C = 0$

(iv) $P \sec A + Q \sec B + R \sec C = 0$

12. ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ বাহু বরাবর সক্রিয় P, Q, R বলসমূহের লব্ধি, যদি (i) ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র এবং ভরকেন্দ্রগামী হয়, দেখান যে

$$\frac{P}{a(b-c)} = \frac{Q}{b(c-a)} = \frac{R}{c(a-b)}$$

(ii) ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র এবং পরিকেন্দ্রগামী হয়, দেখান যে

$$\frac{P}{(b-c)(b+c-a)} = \frac{Q}{(c-a)(c+a-b)} = \frac{R}{(a-b)(a+b-c)}$$

13. একটি খুঁটি খাড়াভাবে মাটিতে এরূপে পুঁতে রাখা হয়েছে যে, উহা মাটির 10 ফুট উপরে অবস্থিত। শীর্ষদেশে ও খুঁটি হতে 20 ফুট দূরত্বে মাটিতে একটি দড়ি বাঁধা আছে এবং ঐ দড়িতে 112 পাউণ্ড ভারের বল প্রয়োগ করলে খুঁটিটি ভেঙে যাবে। খুঁটির পাদদেশ হতে দ্বিগুণ দূরত্বে দড়ি বাঁধা থাকলে ওতে কি পরিমাণ বল প্রয়োগ করলে খুঁটিটি ভেঙে যাবে?

[**সংকেত ঃ** এক্ষেত্রে খুঁটিটি ভাঙতে হলে পাদদেশের সাপেক্ষে প্রযুক্ত বলটির ভ্রামক একটি নির্দিষ্ট মান হতে হবে।]

14. কোনও ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুত্রয় বরাবর সক্রিয় তিনটি বলগোষ্ঠী একটি দ্বন্দ্বের সমতুল। দেখান যে, বল তিনটি ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সমানুপাতিক।

ধরা যাক P, Q, R বলত্রয় যথাক্রমে BC, CA, AB বরাবর ক্রিয়া করে এবং উহারা একটি দ্বন্দ্বের সমান, যার ভ্রামক মান M। এখন A হতে BC-এর উপর লম্ব p, B হতে CA-এর উপর লম্ব

q, C হতে AB-এর উপর লম্ব r হলে, যেহেতু বলগুলি একটি দ্বন্দ্বের সমতুল, অতএব উহাদের ভ্রামক A, B, C-এর সাপেক্ষে একই হবে। অতএব

$$Pp = Qq = Rr$$

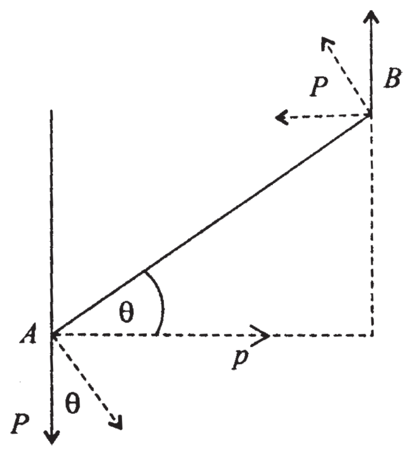
ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল Δ দিয়ে ভাগ করলে পাই

$$\frac{Pp}{\Delta} = \frac{Qq}{\Delta} = \frac{Rr}{\Delta}$$

কিন্তু $\Delta = \frac{1}{2}\overline{BC} \times p = \frac{1}{2} \quad \overline{CA} \times q = \frac{1}{2}\overline{AB} \times r$

অতএব $\quad \frac{P}{\overline{BC}} = \frac{Q}{\overline{CA}} = \frac{R}{\overline{AB}}$

15. একটি যুগ্মবলের বলদুটির প্রয়োগবিন্দু A ও B এবং উহাদের ভ্রামক G। যদি বলদুটির ক্রিয়ারেখা 90° ঘুরে যায়, তবে ওরা H ভ্রামকবিশিষ্ট যুগ্মবল গঠন করে। যখন বল দুটির ক্রিয়ারেখা $\overline{AB}$-এর উপর লম্ব হবে, তখন দেখান যে বল দুটি $\sqrt{G^2 + H^2}$ ভ্রামকবিশিষ্ট যুগ্মবল গঠন করে।



30 নং চিত্র

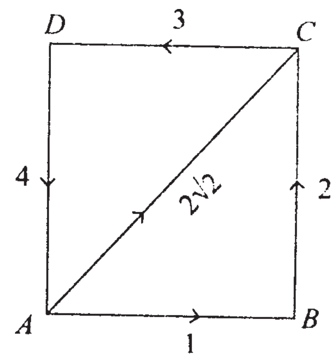
চিত্রে (P, p) দ্বন্দ্বের ভ্রামক

$$G = Pp = P.\ \overline{AB}\ \cos\theta$$

যেখানে P হল দ্বন্দ্বটির বাহু। এখন বলদুটিকে 90° ঘুরালে যে নূতন দ্বন্দ্ব হয়, তার ভ্রামক $H = P.\overline{AB}\sin\theta\cdot$

আবার বল দুটি AB-এর উপর লম্ব হলে যে দ্বন্দ্ব হয়, তার ভ্রামক $= P.\overline{AB} = \sqrt{G^2 + H^2}$

16. 1, 2, 3, 4, $2\sqrt{2}$ মানবিশিষ্ট বলগুলি $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের AB, BC, CD, DA বাহুগুলির দিকে এবং AC কর্ণের দিকে ক্রিয়া করে। দেখান যে, বলগুলি একটি দ্বন্দ্বের সমতুল। AB, DA ও AC বাহুর দিকে 1, 4, $2\sqrt{2}$ বলগুলির AB-এর দিকে বিশ্লেষিতাংশসমূহের যোগফল = 1 + 2 = 3 আর AD-এর দিকে ঐ বল তিনটির বিশ্লেষিতাংশসমূহের যোগল = 2 − 4 = − 2.



31 নং চিত্র

আবার C বিন্দুতে ক্রিয়াকারী বল দুটি একটি CD-এর দিকে 3 এবং CB-এর দিকে –2, অতএব বলগুলি দুটি দ্বন্দ্ব তৈরী করে, যার একটির ভ্রামক $3l$, আর একটি ভ্রামক $2l$. অতএব বলগোষ্ঠীটির ভ্রামক $5l$.

একক 4 ❑ বলগোষ্ঠীর স্থৈতিক সমতুলতা (Statical Equivalence of Force Systems)

গঠন

4.1 প্রস্তাবনা

4.2 উদ্দেশ্য

4.3 স্থৈতিক সমতুলতা

4.4 উপপাদ্য

4.4.1 সমতলীয় বলগোষ্ঠী

4.4.2 বলগোষ্ঠীর বলদ্বন্দ্বের সমতুল হওয়ার শর্ত

4.4.3 পোঁয়াস-এর কেন্দ্রীয় অক্ষ (Poinsot's Central Axis)

4.4.3.1 প্রদত্ত বলগোষ্ঠীর ধ্রুবরাশিসমূহ (Invariants)

4.4.3.2 রেন্চ (Wrench)

4.5 সমতলীয় বলগোষ্ঠীর দিক্ নিরপেক্ষ কেন্দ্র (Astatic Centre of a System of Coplanar Forces)

4.6 সারাংশ

4.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

4.1 প্রস্তাবনা

এ পর্যন্ত আমরা সমবিন্দু বলগোষ্ঠী ও সমান্তরাল বলগোষ্ঠী সম্বন্ধে আলোচনা করেছি। আমরা দেখেছি সমবিন্দু বলগোষ্ঠী একটি লব্ধি বলের দ্বারা রূপায়িত করা যায়। আবার সমান্তরাল বলসমূহের ভেক্টর যোগফল অশূন্যক হলে ঐ সমান্তরাল বলগোষ্ঠীর একটি লব্ধি বল থাকে।

এখন আমাদের কাছে প্রধান বিবেচ্য হল সাধারণভাবে যে কোন বলগোষ্ঠী যদি একটি দৃঢ় বস্তুর উপর ক্রিয়া করে, তাহলে ঐ বলগোষ্ঠীর কতটা সরলীকরণ করা সম্ভব? আমরা এই এককে দেখাব যে, যে কোন বলগোষ্ঠী একটি বল ও একটি বলদ্বন্দ্বের দ্বারা রূপায়িত করা সম্ভব।

4.2 উদ্দেশ্য

এই এককে আপনারা যে কোন প্রদত্ত বলগোষ্ঠীকে কিভাবে সহজভাবে একটি বল ও একটি বলদ্বন্দ্বের সহিত সমতুল দেখানো যায় তা জানতে পারবেন।

তাছাড়া আরও দেখতে পাবেন বলগোষ্ঠী সমতলীয় হলে, দেখা যাবে ঐ বলগোষ্ঠী একটি বলের অথবা একটি দ্বন্দ্বের সমতুল।

কতগুলি বলকে তাদের ক্রিয়াবিন্দু মাধ্যমে একই কোণে ঘোরালে দেখা যায় বলগুলির লব্ধি বল সর্বদা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যাবে। এই বিন্দুকে দিক্ নিরপেক্ষ বলা হয়।

আবার দেখা যাবে বলগুলির ভেক্টর যোগফল অশূন্য হলে, বলগোষ্ঠীটি একটি রেন্চ অর্থাৎ একই রেখায় প্রযুক্ত একটি বল ও একটি দ্বন্দ্বের সমতুল হবে।

আবার দেখা যাবে যে কোন বলগোষ্ঠী দেওয়া থাকলে উহাদের দ্বারা গঠিত দুটি ধ্রুবরাশি (Invariant) হবে।

উপরের এই সকল ধর্ম থেকে আমাদের পক্ষে কোন বস্তুর সাম্য ইত্যাদি পরীক্ষার দ্বারা বলা সম্ভব হবে।

4.3 স্থৈতিক সমতুলতা

সংজ্ঞা : দুটি বলগোষ্ঠী S_1, S_2 যদি এমন হয় যে S_1 বলগোষ্ঠীর সঙ্গে শূন্য লব্ধিযুক্ত পরস্পর বিপরীতমুখী সমান মানের দুটি বল অথবা এরূপ অনেকগুলি বল যোগ করলে S_2 বলগোষ্ঠী পাওয়া যায়, তাহলে S_1 এবং S_2 বলগোষ্ঠীদ্বয়কে স্থৈতিক সমতুল বলা হবে। সহজেই অনুমেয় S_1 থেকে যদি S_2 পাওয়া যায়, তাহলে S_2 থেকেও একইভাবে S_1 পাওয়া যায়। আবার S_1, S_2-এর সঙ্গে এবং S_2, S_3-এর সঙ্গে সমতুল হলে S_1, S_3-এর সঙ্গে সমতুল হবে।

যেহেতু আমরা পরস্পর বিপরীতমুখী সমান মানের দুটি বল যোগ করছি, অতএব স্বতঃসিদ্ধ অনুসারে বলগোষ্ঠীর কোন পরিবর্তন হয় না। যে সকল বল বলগোষ্ঠীর সঙ্গে যুক্ত করা হল যে কোন বিন্দুর সাপেক্ষে তাদের ভ্রামক $= 0$ হবে। অতএব দুটি সমতুল বলগোষ্ঠীর বলগুলির ভেক্টর যোগফল এবং যে কোন বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক অপরিবর্তিত থাকে।

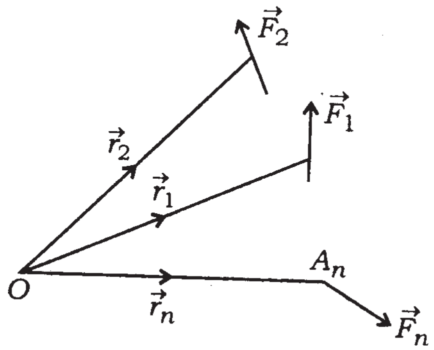
4.4 উপপাদ্য

একটি প্রদত্ত বলগোষ্ঠীর বল $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n$ একটি দৃঢ় বস্তুর A_1, A_2, ..., A_n বিন্দুতে ক্রিয়া করে। যদি O যে কোন একটি বিন্দু হয় যার সাপেক্ষে A_1, A_2, ..., A_n বিন্দুসমূহের স্থানভেক্টর যথাক্রমে

$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots, \vec{r}_n$, তাহলে প্রদত্ত বলগোষ্ঠী সমতুল হবে O বিন্দুতে ক্রিয়ারত বল $\vec{F}$ ও একটি দ্বন্দ্ব $\vec{G}$-এর সহিত, যেখানে $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$ এবং $\vec{G} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \cdots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n =$ বলগুলির O বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামকসমূহের যোগফল।

প্রমাণ : বলগোষ্ঠীর সহিত নিম্নে বলগুলি যোগ করলাম।

(1) O বিন্দুতে ক্রিয়ারত $(\vec{F}_1, -\vec{F}_1), (\vec{F}_2, -\vec{F}_2), \cdots, (\vec{F}_n, -\vec{F}_n)$ এই বলগুলি যেহেতু সমান মানের এবং বিপরীতমুখী, অতএব উহাদের যুক্ত করার ফলে প্রদত্ত বলগোষ্ঠীর কোন পরিবর্তন হয় না।



1 নং চিত্র

এখন A_1 বিন্দুতে $\vec{F}_1$ এবং O বিন্দুতে $-\vec{F}_1$ একটি বলদ্বন্দ্ব তৈরী করে এবং সেই বলদ্বন্দ্বের ভ্রামক (O সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে)।

$$= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$$

একইভাবে প্রত্যেকটি বল $\vec{F}_k$ (যাহা A_k তে ক্রিয়ারত) ও O বিন্দুতে $-\vec{F}_k$ এই দুটির $\vec{r}_k \times -\vec{F}_k$ এই ভ্রামকযুক্ত বলদ্বন্দ্ব তৈরী করে।

অতএব প্রদত্ত বলগোষ্ঠী নূতন বলগুলি সহ O সমতুল হল (1) একটি বল $\vec{F}$ O বিন্দুতে যেখানে $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$

(2) একটি বলদ্বন্দ্ব যাহা উপরে বর্ণিত n সংখ্যক বলদ্বন্দ্বের লব্ধি বলদ্বন্দ্ব $\vec{G}$ যেখানে

$$\vec{G} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k$$

অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

4.4.1 সমতলীয় বলগোষ্ঠী

একটি সমতল বলগোষ্ঠী $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n$ যথাক্রমে $A_1(\vec{r}_1), A_2(\vec{r}_2), \cdots, A_n(\vec{r}_n)$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে যেখানে $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n$ হল বিন্দু O-এর সাপেক্ষে স্থানভেক্টর। ঐ তলের একটি বিন্দু O তে একটি বল $\vec{F}$ এবং একটি ভ্রামক $\vec{G}$-এর সঙ্গে সমতুল। এখানে $\vec{G} = \sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k$ যেখানে $\vec{r}_k$ ও $\vec{F}_k$ ভেক্টরদ্বয় ঐ তলে অবস্থিত হওয়ায় $\vec{G}$ ঐ তলের উপর লম্ব দিকে প্রসারিত।

উপপাদ্য : একটি সমতলীয় বলগোষ্ঠী নিম্নলিখিত বলগোষ্ঠীর সঙ্গে সমতুল হবে :—

প্রথম ক্ষেত্র : বলগোষ্ঠীর বলসমূহের ভেক্টর যোগফল শূন্য না হলে প্রদত্ত বলগোষ্ঠী একটি বলের সঙ্গে সমতুল।

দ্বিতীয় ক্ষেত্র : বলগোষ্ঠীর বলগুলির ভেক্টর যোগফল শূন্য হলে বলগোষ্ঠীটি একটি বলদ্বন্দ্বের সহিত সমতুল হয়।

প্রমাণ : ধরা যাক সমতল বলগোষ্ঠীর বলগুলি $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n$ যথাক্রমে ঐ তলের A_1, A_2, ..., A_n বিন্দুতে ক্রিয়া করে। এখন একটি বিন্দু O নেওয়া গেল। O বিন্দুতে জোড়া জোড়া $(\vec{F}_1, -\vec{F}_1), (\vec{F}_2, -\vec{F}_2), \cdots (\vec{F}_n, -\vec{F}_n)$ এই বলগুলি প্রযুক্ত হল। যেহেতু বলদ্বয় সমান মানের ও পরস্পর বিপরীতমুখী, অতএব ঐ বলগুলির যোগদানে বলগোষ্ঠীর কোন পরিবর্তন হবে না। এখন $\vec{F}_1$ বল A_1 বিন্দুতে ও $-\vec{F}_1$ বল O বিন্দুতে একটি বলদ্বন্দ্ব তৈরী করে যার ভ্রামক $= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$ যেখানে $\vec{r}_1$ হল O সাপেক্ষে A_1-এর স্থানভেক্টর। এভাবে আমরা n সংখ্যক ভ্রামক পাই। তাছাড়া পড়ে রইল O বিন্দুতে ক্রিয়াকারী $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n$ বলসমূহ। অতএব দেখা গেল প্রদত্ত বলগোষ্ঠীর সমতুল হল O বিন্দুতে ক্রিয়ারত একটি বল যার ভেক্টর রূপ $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$ এবং একটি বলদ্বন্দ্ব যার ভ্রামক হল $\vec{G} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k$।

এখন O বিন্দু দিয়ে যদি Ox, Oy অক্ষদ্বয় নেওয়া যায় এবং

$\vec{r}_k = x_k\vec{i} + y_k\vec{j}, \vec{F}_k = X_k\vec{i} + Y_k\vec{j}$ লেখা যায় তবে

$$\vec{F} = \vec{i}\sum_{k=1}^{n} X_k + \vec{j}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \vec{i}X + \vec{j}Y \quad \text{যেখানে} \qquad X = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$Y = \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

এবং $\vec{G} = \sum_{k=1}^{n}(\vec{i}x_k + \vec{j}y_k) \times (\vec{i}X_k + \vec{j}Y_k)$

$$= \vec{k}\sum_{k=1}^{n}(x_k Y_k - y_k X_k) = G\vec{k}$$

প্রথম ক্ষেত্র : যেহেতু $\vec{F} \neq 0,$ অতএব $X^2 + Y^2 \neq 0$। আবার $\vec{G}$ বলদ্বন্দ্বকে একটি বল $-\vec{F}$, O বিন্দুতে এবং $\vec{F}$ বল $P(x, y)$ বিন্দুতে যেখানে $(\vec{i}x + \vec{j}y) \times (\vec{i}X + \vec{j}Y) = \vec{G} = G\vec{k}$

অর্থাৎ $\quad xY - yX = G$

অর্থাৎ $\quad G - xY + yX = 0 \qquad (1)$

অতএব (x, y) একটি সরলরেখার সমীকরণ হল। অতএব সমতলীয় বলগোষ্ঠীটি একটি বল $\vec{F} = \vec{i}X + \vec{j}Y$-এর সমতুল যেখানে $\vec{F}$ বলটি ক্রিয়া করছে (1) নং সমীকরণ দ্বারা রূপায়িত সরলরেখার দিকে। অবশ্যই দেখা যাচ্ছে যে (1) নং সরলরেখা $\vec{F}$-এর সমান্তরাল।

দ্বিতীয় ক্ষেত্র : এখানে $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = 0$ অতএব এখানে $X = 0, \ Y = 0$

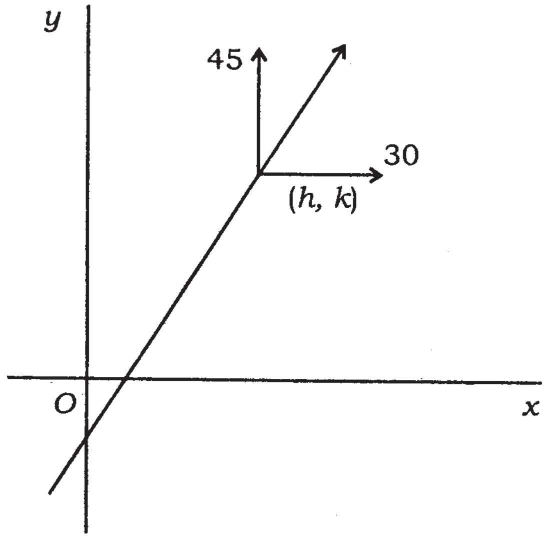
$$G = \sum_{k=1}^{n}(x_k Y_k - y_k X_k)$$

অতএব এই ক্ষেত্রে বলগোষ্ঠী একটি বলদ্বন্দ্বের সমতুল যার ভ্রামক $\vec{G}$ ঐ সমতলের লম্ব দিকে।

উদাহরণ :

(1, 2), (3, 4), (5, 6) বিন্দু তিনটিতে বলত্রয় যাদের বিশ্লেষিতাংশ x, y দিকে (5, 10), (10,

15), (15, 20) ক্রিয়া করে। দেখান যে বলগোষ্ঠীটি একটি লব্ধি বলের সমতুল এবং ঐ লব্ধি বল ও ক্রিয়ারেখা নির্ণয় করুন।



2 নং চিত্র

বলগুলির x-দিকে বিশ্লেষিতাংশ

$$X = 5 + 10 + 15 = 30$$

বলগুলির y-দিকে

$$Y = 10 + 15 + 20 = 45$$

অতএব বলসমূহের ভেক্টর যোগফল = $(30, 45) \neq 0$

অতএব বলগোষ্ঠী একটি লব্ধি বলের সঙ্গে সমতুল।

বলগুলির O (0, 0) বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক যোগফল

$$\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 10 & 15 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 6 & 0 \\ 15 & 20 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{k}(10 - 10) + \vec{k}(45 - 40) + \vec{k}(100 - 90)$$

$$= 15\vec{k}$$

অতএব লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখার সমীকরণ হল :

$$G - xY + yX = 0$$

$$\text{বা,} \quad 15 - 45x + 30y = 0$$

$$\text{অথবা,} \quad 1 - 3x + 2y = 0$$

যদি একটি সমতলীয় বলগোষ্ঠীর বলগুলির ভ্রামক যোগফল প্রদত্ত একরেখীয় নয় এমন তিনটি বিন্দুর সাপেক্ষে সমান হয়, বলগোষ্ঠী একটি দ্বন্দ্বের সমতুল।

সমাধান : ধরা যাক বলগোষ্ঠীটি আদি বিন্দু O তে ক্রিয়াশীল একটি বল (X, Y) ও G ভ্রামকযুক্ত একটি বলদ্বন্দ্বের সমতুল। প্রদত্ত শর্তানুসারে (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) তিনটি বিন্দু সাপেক্ষে যেহেতু বলগোষ্ঠীর ভ্রামক যোগফল সমান, অতএব সমতুলতার শর্তানুযায়ী (x_1, y_1)-এর সাপেক্ষে বলগোষ্ঠীর ভ্রামক।

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ X & Y & 0 \end{vmatrix} + G\vec{k} = (x_1 Y - y_1 X + G)\vec{k}$$

অতএব শর্তানুসারে $x_1Y - y_1X + G = x_2Y - y_2X + G = x_3Y - y_3X + G$

$$\text{অতএব} \quad \left.\begin{aligned} (x_1 - x_2)Y - (y_1 - y_2)X = 0 \\ (x_1 - x_3)Y - (y_1 - y_3)X = 0 \end{aligned}\right\}$$

এখন যদি $(x_1 - x_2)\,(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)\,(y_1 - y_2) \neq 0$ হয় তবে $X = Y = 0$ অর্থাৎ বলগোষ্ঠী একটি বলদ্বন্দ্বে পর্যবসিত। যদি $(x_1 - x_2)\,(y_1 - y_3) = (x_1 - x_3)\,(y_1 - y_2) = 0$ হয় তবে (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) বিন্দু তিনটির দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য, অর্থাৎ বিন্দু তিনটি একরেখীয়। কিন্তু ইহা সম্ভব নহে। অতএব বলগোষ্ঠীটি একটি দ্বন্দ্বের সমতুল। আর ঐ দ্বন্দ্বের ভ্রামক G যদি শূন্য হয় তবে বলগোষ্ঠী সাম্যে থাকে।

4.4.2 বলগোষ্ঠীর বলদ্বন্দ্বের সমতুল হওয়ার শর্ত

উপপাদ্য : বলগোষ্ঠীর বলদ্বন্দ্বের সমতুল হওয়ার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল বলসমূহের ভেক্টর যোগফল শূন্য।

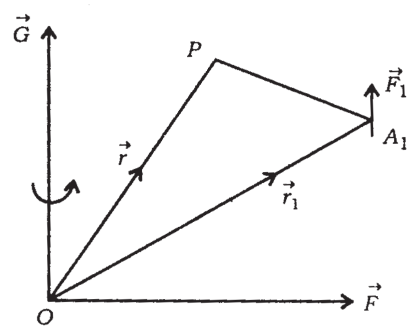
প্রমাণ : ধরা যাক বলগোষ্ঠীর বল $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n$ যথাক্রমে $A_1(\vec{r}_1), A_2(\vec{r}_2), \cdots, A_n(\vec{r}_n)$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে। দুটি সমতুল বলগোষ্ঠীর যে কোন বিন্দুসাপেক্ষে ভ্রামক সমান, এবং বলদ্বন্দ্বের বলসমূহের ভ্রামক প্রত্যেক বিন্দু সাপেক্ষে একই হয়। ভেক্টর যোগফল $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$ এবং

$$\vec{G} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k$$

O বিন্দুতে $\vec{F}$ বল ও $\vec{G}$ বলদ্বন্দ্ব বলগোষ্ঠীর সমতুল। (যেখানে আদি বিন্দু O-এর সাপেক্ষে ভ্রামক নেওয়া হয়েছে)।

এখন একটি বিন্দু $P(\vec{r})$ সাপেক্ষে বলগোষ্ঠীর ভ্রামক নিলে ভ্রামক হবে $\vec{G}'$

$\vec{G}' = \vec{G} + \overrightarrow{PO} \times \vec{F} = \vec{G} - \vec{r} \times \vec{F}$ যদি $|\vec{F}| \neq 0$ হয়, তবে যেহেতু P যে কোন বিন্দু নেওয়া যায়। অতএব $\vec{r} \times \vec{F} \neq 0$ এবং বিভিন্ন P বিন্দুর জন্য এই ভ্রামক আলাদা হয়। কিন্তু প্রদত্ত আছে বলগোষ্ঠীটি একটি বলদ্বন্দ্বের সমতুল। অতএব উহাদের ভ্রামক ভিন্ন ভিন্ন বিন্দুতে একই হতে হবে। অতএব $|\vec{F}| \neq 0$ হতে পারে না। অতএব $\vec{F} = 0$ হতে হবে।



3 নং চিত্র

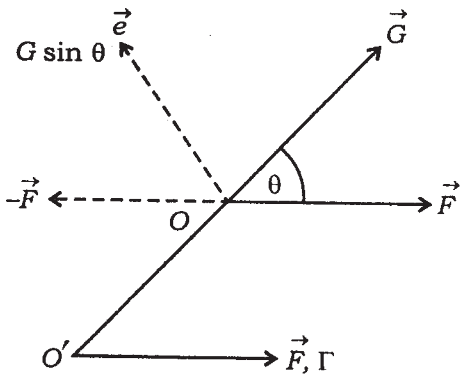
অতএব প্রমাণিত হল $\vec{F} = 0$ প্রয়োজনীয় শর্ত। আবার $\vec{F} = 0$ শর্ত যথেষ্ট—যেটা 4.4-এর উপপাদ্য থেকে পাওয়া যায়।

4.4.3 পোঁয়াস-এর কেন্দ্রীয় অক্ষ (Poinsot's Central Axis)

4.4 অনুচ্ছেদে আমরা দেখেছি যে একটি বলগোষ্ঠী বল $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n$ যথাক্রমে A_1, A_2, ..., A_n বিন্দুতে ক্রিয়া করলে এবং যে কোন বিন্দু O সাপেক্ষে A_1, A_2, ..., A_n এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n$ হলে বলগোষ্ঠীটি সমতুল হয় একটি বল $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$ যাহা O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং একটি বলদ্বন্দ্ব যার ভ্রামক $\vec{G} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k$ = সমস্ত বলের O সাপেক্ষে ভ্রামক যোগফল এই দুটির সহিত।

এখন যদি $\vec{F} \neq 0$ হয়, তবে দেখানো হবে যে বলগোষ্ঠীটি একটি ক্রিয়ারেখা বরাবর একটি বল $\vec{F}$ এবং একটি বলদ্বন্দ্ব যার অক্ষও ঐ বলরেখা বরাবর এরূপ দুটির সমতুল হবে।

প্রমাণ : O বিন্দুতে $\vec{F}$ বল এবং বলদ্বন্দ্ব $\vec{G}$ এদের মধ্যে কোণ θ ধরা হল। $\vec{G}$ বলদ্বন্দ্বটিকে দুটি বলদ্বন্দ্বের লব্ধি হিসেবে দেখা যায় যেখানে একটি হল $\vec{F}$ বরাবর অর্থাৎ $G\ cos\ \theta$ মানের আর অপরটি হল $G\ \sin\ \theta\vec{e}$ যাহা $\vec{G}$, $\vec{F}$ সমতলে এবং $\vec{F}$-এর লম্ব দিকে (এখানে $\vec{e}$ একটি একক ভেক্টর এমন যে $\vec{e}.\vec{F} = 0$ এবং $\vec{e}.\vec{G} = G\ \sin\ \theta$)।



4 নং চিত্র

$G\sin\theta\vec{e}$ বলদ্বন্দ্বটি যেহেতু $\vec{F}$-এর লম্ব, অতএব উহাকে $\vec{e}$-এর লম্ব সমতলে O বিন্দুতে $-\vec{F}$ এবং অপর বল $\vec{F}O'$ বিন্দুতে লম্ব সমতলে যাদের মধ্যে দূরত্ব $\frac{G\sin\theta}{F}$, অর্থাৎ $\overrightarrow{OO'}$, ভেক্টর $\vec{e}$ ও $\vec{F}$-এর উপর লম্ব এবং $OO' = \frac{G\sin\theta}{F}$, অতএব এবার আমরা সমতুল এই বলগোষ্ঠী পাই।

(a) $\vec{F}$ বল O বিন্দুতে

(b) $G\cos\theta\frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$ বলদ্বন্দ্ব $\vec{F}$-এর দিকে

(c) $-\vec{F}$ বল O বিন্দুতে

(d) $\vec{F}$ বল O' বিন্দুতে যেখানে $\overrightarrow{OO'} \times \vec{F} = \vec{G}\sin\theta\vec{e}$

(a) ও (c) বল দুটি সাম্যে। অতএব অবশিষ্ট রইল O' বিন্দুতে $\vec{F}$ বল এবং $\vec{F}$ বলের দিকে $G\cos\theta$ মান বিশিষ্ট বলদ্বন্দ্ব। অতএব আমরা একটি সরলরেখা পেলাম সমতুল একটি বল $\vec{F}$ (যাহা O' -তে ক্রিয়া করে) এবং একটি বলদ্বন্দ্ব যার ভ্রামক $\vec{F}$ বরাবর আছে।

বলদ্বন্দ্বটির ভ্রামক $= (G\cos\theta)\dfrac{\vec{F}}{F} = \dfrac{(FG\cos\theta)\vec{F}}{F^2} = \dfrac{\vec{F}.\vec{G}}{F^2}\vec{F}$

এই ভ্রামকটিকে $\vec{\Gamma}$ দিয়ে বোঝালে

$$\vec{\Gamma} = \frac{\vec{F}.\vec{G}}{F^2}\vec{F}$$

$\dfrac{\vec{F}.\vec{G}}{F^2}$ -কে সাধারণতঃ p দ্বারা নির্দেশ করা হয়। p-কে প্রদত্ত বলতন্ত্রের পিচ্ (pitch) বলা হয়।

বলতন্ত্রের সমতুল একটি বল ও একটি বলদ্বন্দ্ব যে সরলরেখা বরাবর ক্রিয়া করে তাকে পোঁয়াস-এর কেন্দ্রীয় অক্ষ বলা হয়।

পোঁয়াস-এর কেন্দ্রীয় অক্ষের সমীকরণ :

4.4.3 -তে আমরা দেখলাম যে প্রদত্ত বলতন্ত্র সমতুল হয় O' বিন্দুগামী বল $\vec{F}$ এবং $\vec{F}$ বরাবর অক্ষসহ একটি বলদ্বন্দ্ব যার ভ্রামক $\vec{\Gamma} = \dfrac{\vec{F}.\vec{G}}{F^2}\vec{F} = p\vec{F}$ বল ও বলদ্বন্দ্বের ক্রিয়া রেখার সমীকরণ নির্ণয় করবার জন্য ক্রিয়া রেখার উপর যে কোন বিন্দু $P(\vec{r})$ নেওয়া যাক। ($\vec{r}$ হল O সাপেক্ষে P-এর অবস্থান ভেক্টর) যেহেতু প্রদত্ত বলগোষ্ঠী ও তার সমতুল যে কোন বলগোষ্ঠীর ভ্রামক যে কোন বিন্দু সাপেক্ষে সমান, অতএব P বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই (O বিন্দুতে $\vec{F}$ ও $\vec{G}$ তন্ত্রের জন্য) =

$$\overrightarrow{PO}\times \vec{F} + \vec{G} = -\vec{r}\times\vec{F} + \vec{G}$$

কেন্দ্রীয় রেখা বরাবর বল $\vec{F}$ ও বলদ্বন্দ্ব $\vec{\Gamma}$ এবং এদের P সাপেক্ষে ভ্রামক $= \vec{\Gamma}$

অতএব $\vec{\Gamma} = -\vec{r}\times\vec{F} + \vec{G}$

অর্থাৎ $\dfrac{\vec{F}.\vec{G}}{F^2}\vec{F} = -\vec{r}\times\vec{F} + \vec{G}$ (i)

কার্তিয় স্থানাঙ্ক (o সাপেক্ষে) ব্যবহার করে

$$\vec{r} = (x, y, z),\ \vec{F} = (X, Y, Z),\ \vec{G} = (L, M, N)$$

ox, oy, oz দিকে বিশ্লেষিতাংশ ব্যবহার করে পাই,

$$\vec{G} - \vec{r} \times \vec{F} = p\vec{F} \quad \text{যেখানে} \quad p = \frac{\vec{F}.\vec{G}}{F^2}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z} = p \qquad \text{(ii)}$$

এবং $p = \dfrac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}$

অতএব (i) হল পোঁয়াস-এর কেন্দ্রীয় অক্ষের ভেক্টর সমীকরণ এবং (i) থেকে পাই

$$\vec{F} \times (\vec{G} - \vec{r} \times \vec{F}) = 0$$

$$\text{বা,} \quad \vec{F} \times \vec{G} - \vec{r}(\vec{F}.\vec{F}) + (\vec{F}.\vec{r})\vec{F} = 0$$

$$\text{বা,} \quad \vec{r} = \frac{\vec{F} \times \vec{G}}{F^2} + t.\vec{F} \quad \text{যেখানে t একটি স্কেলার।}$$

4.4.3.1 প্রদত্ত বলগোষ্ঠীর ধ্রুবরাশিসমূহ (Invariants)

একটি প্রদত্ত বলগোষ্ঠীর বলসমূহের ভেক্টর যোগফল $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \cdots + \vec{F_n}$ হলে এবং যে কোন বিন্দু সাপেক্ষে বলসমূহের ভ্রামকসমূহের যোগফল $\vec{G}$ হলে,

$\vec{F}.\vec{F}$ এবং $\vec{F}.\vec{G}$ ধ্রুবরাশি হবে। অর্থাৎ ঐ বিন্দুর উপর নির্ভর করবে না।

প্রমাণ : একটি বিন্দু *O*-কে আদি বিন্দু নিয়ে $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \cdots, \vec{F_n}$ বলসমূহ প্রয়োগ বিন্দু A_1, A_2, ..., A_n এদের স্থানভেক্টর যথাক্রমে $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \cdots, \vec{r_n}$ হলে আমরা পাই সমগ্র বলসমূহের ভেক্টর যোগফল $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \cdots + \vec{F_n}$

এবং *O* বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামকসমূহের ভেক্টর যোগফল $= \vec{G} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r_k} \times \vec{F_k}$

এখন *P*(*r*) অন্য যে কোন বিন্দু হলে *P* সাপেক্ষে বলসমূহের ভ্রামকের ভেক্টর যোগফল

$$= \vec{G'} = \sum_{k=1}^{n} (\vec{r_k} - \vec{r}) \times \vec{F_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k - \vec{r} \times \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

$$= \vec{G} - \vec{r} \times \vec{F}$$

এখন $\vec{F}.\vec{F}$ (একটি ভেক্টরের মান)^2 ইহা আদিবিন্দু, অক্ষতন্ত্র ইত্যাদির উপর নির্ভর করে না। আবার

$$\vec{F}.\vec{G}' = \vec{F}.(\vec{G} - \vec{r} \times \vec{F})$$

$$= \vec{F}.\vec{G} - \vec{F}.(\vec{r} \times \vec{F})$$

$$= \vec{F}.\vec{G}$$

যেহেতু $\vec{F}.(\vec{r} \times \vec{F}) = 0$

অতএব প্রমাণিত।

4.4.3.2 রেন্‌চ (Wrench)

আমরা 4.4.3-তে দেখলাম যে কোন বলগোষ্ঠীকে (যাহার বলসমূহের ভেক্টর যোগফল শূন্য নয়) একটি লব্ধি বল ও ঐ বলের ক্রিয়ারেখা দিকে প্রসারিত ভ্রামকবিশিষ্ট একটি বলদ্বন্দ্ব দ্বারা রূপায়িত করা যায়। বলটি $\vec{F}$ হলে দ্বন্দ্বের ভ্রামক p$\vec{F}$ লেখা যায়, যেখানে p একটি স্কেলার এবং $p = \dfrac{\vec{F}.\vec{G}}{|\vec{F}|^2}$, ($G$ হল যে কোন বিন্দু সাপেক্ষে বলগোষ্ঠীর ভ্রামকসমূহের যোগফল) একটি রেখায় ক্রিয়াশীল একটি বল $\vec{F}$ ও বলদ্বন্দ্ব যার ভ্রামক $p\vec{F}$, এই দুটিকে একসঙ্গে একটি রেন্‌চ (Wrench) বলা হয়। অতএব পোঁয়াস-এর কেন্দ্রীয় অক্ষ বরাবর একটি রেন্‌চ ($\vec{F}$, $P^{\vec{F}}$) বলগোষ্ঠীটির সমতুল।

4.5 সমতলীয় বলগোষ্ঠীর দিক্ নিরপেক্ষ কেন্দ্র (Astatic Centre of a System of Coplanar Forces)

আমরা দেখেছি যে সমতলীয় বলগোষ্ঠীর বেলায় যদি বলগুলির ভেক্টর যোগফল অশূন্যক হয় তাহলে বলগোষ্ঠী একটি লব্ধি বলের সমতুল। এখন যদি বলগোষ্ঠীর প্রতিটি বলকে একটি নির্দিষ্ট কোণে উহাদের প্রয়োগ বিন্দু সাপেক্ষে উহাদের সমতলে ঘুরিয়ে নূতন দিকে বলগুলি প্রযুক্ত হয়, তাহলে আমরা দেখাব

যে নূতন লব্ধি বল ও আদি লব্ধি বল প্রত্যেকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায় যে বিন্দুটি ঘূর্ণন কোণের উপর নির্ভর করে না। সমতল বলগোষ্ঠীর ঐ বিন্দুকে দিক্ নিরপেক্ষ কেন্দ্র (Astatic Centre) বলা হয়।

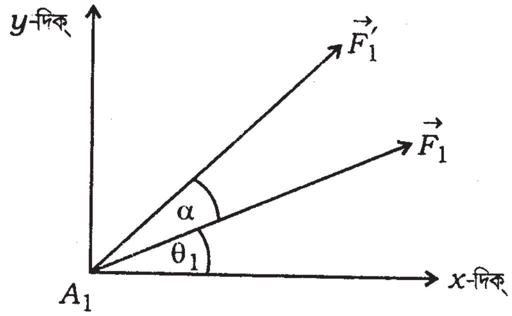
ধরা যাক xy-তলে, $A_1(x_1, \ y_1), \ A_2(x_2, \ y_2), \ \ldots, \ A_n(x_n, \ y_n)$ বিন্দুতে $\vec{F}_1 = (X_1, Y_1), \vec{F}_2(X_2, Y_2), \cdots, \vec{F}_n = (X_n, Y_n)$ এই বলগুলি ক্রিয়ারত আছে। এই বলগোষ্ঠীর বলগুলির ভেক্টর যোগফল হল $\vec{F} = (X, Y)$ যেখানে $X = \sum_{k=1}^{n} X_k, \ Y = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ যদি $X^2 + Y^2 \neq 0$ হয়, তবে আমরা জানি যে সমতল বলগোষ্ঠীটি একটি বল $(X, \ Y)$ এর সমতুল যেখানে ঐ লব্ধি বল।

$$G - xY + yX = 0 \tag{1}$$

এই সরলরেখা বরাবর ক্রিয়ারত। [এখানে G হল বলগোষ্ঠীর ভ্রামক যোগফলের মান অর্থাৎ

$$G = \sum_{k=1}^{n} (x_k Y_k - y_k X_k)]$$

এবার আমরা মনে করি প্রত্যেকটি বলকে α কোণে ঘুরানো হল। ফলে $\vec{F}_1$ বলটি $\vec{F}_1'$ বলে পরিণত হল, যেখানে $\vec{F}_1' = (X_1', Y_1')$



5 নং চিত্র

$$X_1 = F_1 \cos \theta_1$$
$$X_1' = F_1' \cos(\theta_1 + \alpha)$$
$$Y_1 = F_1 \sin \theta_1$$
$$Y_1' = F_1' \sin(\theta_1 + \alpha)$$

কিন্তু $|\vec{F}_1| = |F_1'|$ হওয়ায় $F_1 = F_1'$

অতএব

$$X_1' = F_1\cos(\theta_1 + \alpha) = F_1\cos\theta_1\cos\alpha - F_1\sin\theta_1\sin\alpha$$
$$= X_1\cos\alpha - Y_1\sin\alpha$$

অনুরূপে,

$$Y_1' = F_1\sin(\theta_1 + \alpha)$$
$$= Y_1\cos\alpha + X_1\sin\alpha$$

এখন যেহেতু $\sum_{k=1}^{n} X_k' = \sum_{k=1}^{n}(X_k\cos\alpha - Y_k\sin\alpha)$

$$= \cos\alpha\sum_{k=1}^{n} X_k - \sin\alpha\sum_{k=1}^{n} Y_k$$
$$= X\cos\alpha - Y\sin\alpha$$

এবং $\sum_{k=1}^{n} Y_k' = Y\cos\alpha + X\sin\alpha,$

$X'^2 + Y'^2 = (X\cos\alpha - Y\sin\alpha)^2 + (X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 = X^2 + Y^2$

অতএব নূতন বলগোষ্ঠী একটি লব্ধি বলের সমতুল যার বিশ্লেষিতাংশদ্বয় হল X', Y' এবং লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা হল।

$$G' - xY' + yX' = 0 \qquad (2)$$

যেখানে G' = নতুন বলগোষ্ঠীর আদি বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক

$$= \sum_{k=1}^{n}(x_k Y_k' - y_k X_k')$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[x_k(X_k\sin\alpha + Y_k\cos\alpha) - y_k(X_k\cos\alpha - Y_k\sin\alpha)]$$

$$= \sin\alpha\sum_{k=1}^{n}\left(x_k X_k + y_k Y_k\right) + \cos\alpha\sum_{k=1}^{n}\left(x_k Y_k - y_k Y_k\right)$$

$$= V\sin\alpha + G\cos\alpha \qquad (3)$$

যেখানে $V \equiv \sum\left(x_k X_k + y_k Y_k\right)$

V-কে বলগোষ্ঠীর ভিরিয়াল (Virial) বলা হয়।

এবার (2) নং সমীকরণে X', Y', G'-এর মান X, Y, G-এর মাধ্যমে বসিয়ে পাই

$$G\cos\alpha + V\sin\alpha - x\,(X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + y\,(X\cos\alpha - Y\sin\alpha) = 0$$

অর্থাৎ $\cos\alpha\,(G - xY - yX) + \sin\alpha\,(V - xX - yY) = 0$ (4)

(1) ও (4) থেকে বল লব্ধি দ্বয়ের ক্রিয়ারেখা যদি (ξ, η) বিন্দুতে ছেদ করে তবে

$$\left.\begin{array}{r} G - \xi Y + \eta X = 0 \\ \text{এবং} \quad (V - \xi X - \eta Y) = 0 \end{array}\right\}$$

এদের সমাধান $\xi = \dfrac{GY + VX}{X^2 + Y^2}\,\eta = \dfrac{VY - GX}{X^2 + Y^2}$ (5)

(ξ, η) বিন্দুটি সর্বদা লব্ধি বলের উপর থাকবে। (ξ, η) ঘূর্ণন পরিমাণ α-এর উপর ξ, η নির্ভর করে না। (ξ, η) বিন্দুকে বলগোষ্ঠীর দিক নিরপেক্ষ কেন্দ্র বলা হয়।

মন্তব্য :

(1) কোন বলদ্বন্দ্বের দিক্ নিরপেক্ষ কেন্দ্র থাকে না, যেহেতু বলগুলির ভেক্টর যোগফল = 0

(2) সমমুখী কতগুলি সমতলীয় সমান্তরাল বল ক্রিয়া করলে তাদের দিক্ নিরপেক্ষ কেন্দ্র আছে। যেহেতু তাদের লব্ধি বল আছে।

বলগুলি x-অক্ষের সমান্তরাল হলে

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k,\, Y = \sum Y_k = 0$$

$$G = \sum \left(x_k Y_k - y_k X_k\right) = -\sum_{k=1}^{n} y_k X_k$$

$$\therefore \quad V = \sum_{k=1}^{n} x_k X_k$$

অতএব

$$\xi = \frac{GY + VX}{X^2 + Y^2} = \frac{VX}{X^2} = \frac{V}{X} = \frac{\sum x_k X_k}{\sum X_k}$$

$$\eta = \frac{VY - GX}{X^2 + Y^2} = \frac{-G}{X} = \frac{\sum y_k X_k}{\sum X_k}$$

উদাহরণ :

(1) একটি সমতলীয় বলগোষ্ঠী দ্বন্দ্ব G-এর সমতুল। বলসমূহ α কোণে ঘূর্ণিত করলে বলগোষ্ঠী কিসের সমতুল?

সঙ্কেত : এখানে $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \vec{F} = 0$ অর্থাৎ $X = Y = 0$ ঘূর্ণিত করলে $X' = 0$, $Y' = 0$, $G' = V \sin\alpha + G \cos\alpha$, যেখানে $V = \sum(x_i X_i + y_i Y_i)$। অতএব বলগোষ্ঠীটি একটি নূতন বলদ্বন্দ্বে পরিণত হচ্ছে যার ভ্রামক $V \sin\alpha + G\cos\alpha$।

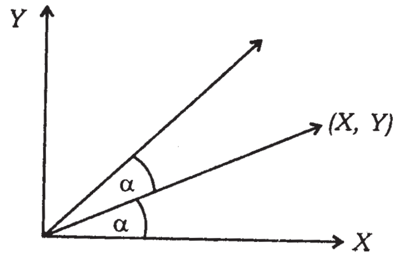
(2) সমতল বলগোষ্ঠী যদি কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত $\vec{F}$ বল ও $\vec{G}$ দ্বন্দ্বের সহিত সমতুল হয় তাহলে যদি বলগোষ্ঠীকে α কোণে ঘূর্ণিত করা যায় এবং ঐ একই বিন্দু মাধ্যমে বল $\vec{F}'$ ও দ্বন্দ্ব G' হয় এবং ভিরিয়াল V' হয়, তবে দেখান যে $G^2 + V^2 = G'^2 + V'^2$

প্রমাণ : ধরা যাক O আদি বিন্দু মাধ্যমে বল লব্ধি $\vec{F} = \vec{F}_1 + \ldots + \vec{F}_n$ এবং দ্বন্দ্ব G যেখানে

$$G = \sum_{k=1}^{n}(x_k Y_k - y_k X_k)$$

$$V = \sum(x_k X_k + y_k Y_k)$$

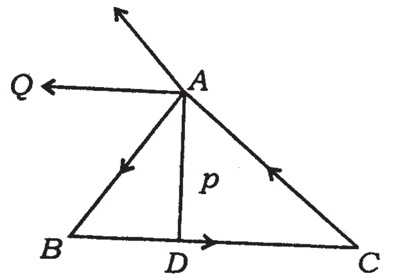
এখন বলগুলি প্রয়োগ বিন্দু মাধ্যমে α কোণে ঘূর্ণিত করা হলে আমরা পাচ্ছি।



6 নং চিত্র

$$X'_k = X_k \cos\alpha - Y_k \sin\alpha$$
$$Y'_k = X_k \sin\alpha - Y_k \cos\alpha$$
$$G' = V \sin\alpha + G\cos\alpha$$
$$V' = \sum(x_k X'_k + y_k Y'_k)$$
$$= \cos\alpha V - \sin\alpha \sum(x_k Y_k - y_k X_k)$$
$$= V\cos\alpha - G\sin\alpha$$
$$G^2 + V^2 = G'^2 + V'^2$$

(3) যদি তিনটি বল ABC ত্রিভুজের AB, BC, CA বাহু তিনটি বরাবর এবং ঐ বলগুলির মান AB, BC, CA দ্বারা নিরূপিত হয়, তাহলে দেখান যে বল তিনটি একটি দ্বন্দ্বে পরিণত হয় এবং দ্বন্দ্বটির ভ্রামক হল ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।



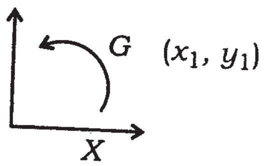
7 নং চিত্র

এখানে বল তিনটি $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ ও $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা রূপায়িত। বল $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CA}$, A বিন্দু ক্রিয়া করে এবং উহাদের লব্ধি বল A বিন্দুগামী $\overrightarrow{AQ}$ এবং, $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{CB}$ অতএব বল $\overrightarrow{AQ}$ ও $\overrightarrow{BC}$ একটি দ্বন্দ্ব তৈরী করে যার ভ্রামক মান 2Δ ABC।

(4) একটি সমতলীয় বলগোষ্ঠীর বলগুলি তিনটি অসমরেখীয় (non-collinear) বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক সমান হলে, বলগোষ্ঠীটি বলদ্বন্দ্বের সমতুল হবে।

ধরা যাক বলগোষ্ঠীটি ঐ সমতলে আদি বিন্দু O সাপেক্ষে সমতুল হয় (X, Y) লব্ধি বল ও দ্বন্দ্ব G.

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি (x_i, y_i) i = 1, 2, 3 সাপেক্ষে বলগোষ্ঠীর ভ্রামক যথাক্রমে



8 নং চিত্র

$$x_1Y - y_1X + G$$
$$x_2Y - y_2X + G$$
$$x_3Y - y_3X + G$$

যেহেতু ইহারা সমান।

অতএব

$$x_1Y - y_1X = x_2Y - y_2X = x_3Y - y_3X$$

$$(x_1 - x_2)Y = (y_1 - y_2)X$$

$$(x_2 - x_3)Y = (y_2 - y_3)\ X$$

যদি $X^2 + Y^2 \neq 0$ না হয় তবে

$$\frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3}$$

কিন্তু ইহা সত্য নহে। যেহেতু বিন্দু তিনটি অসমরেখীয়। অতএব $X = Y = 0$ হতে হবে। অর্থাৎ বলগোষ্ঠীকে একটি দ্বন্দ্বের সমতুল।

4.6 সারাংশ

দুটি বলগোষ্ঠী সমতুল হয় যদি এদের একটির সহিত কতগুলি পরস্পর বিপরীতমুখী সমান মানের বল যোগ করে এবং সামান্তরিক যোগফল নীতি প্রয়োগ করে দ্বিতীয় বলগোষ্ঠী পাওয়া যায়।

যে কোন বলগোষ্ঠীকে যে কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল একটি বল (যাহা সমস্ত বল ভেক্টরের যোগফলের সমান) ও একটি দ্বন্দ্ব (যাহার ভ্রামক ঐ বিন্দু সাপেক্ষে সমস্ত বলের ভ্রামক ভেক্টর যোগফলের সমান)-এর সহিত সমতুল।

যে কোন বলগোষ্ঠী একই রেখায় ক্রিয়ারত একটি বল ও একটি দ্বন্দ্ব (যার ভ্রামক বলটির ক্রিয়ারেখা দিকে)-এর সমতুল। ইহাকে পোঁয়াস-এর কেন্দ্রীয় অক্ষ বলা হয়। বলগোষ্ঠীর বলসমূহের ভেক্টর যোগফল শূন্য হলে বলগোষ্ঠীটি একটি দ্বন্দ্বের সমতুল। সমতলীয় বলগোষ্ঠীর বেলায় যদি x, y অক্ষ সাপেক্ষে সমগ্র বলের x ও y দিকে বিশ্লেষিতাংশ যোগফল যথাক্রমে X, Y (যেখানে $X = \sum_{k=1}^{n} X_k,\ Y = \sum_{k=1}^{n} Y_k$) হয় এবং আদি বিন্দুর সাপেক্ষে বলসমূহের ভ্রামক যোগফল $G\vec{k}$ (যেখানে $\vec{k}$ একটি একক ভেক্টর xy তলের লম্ব দিকে) হয়, তা হলে $X^2 + Y^2 \neq 0$ হলে বলগোষ্ঠীটি একটি বল (X, Y)-এর সমতুল যাহা $G - xY + yX = 0$ এই সরলরেখা বরাবর ক্রিয়া করে। এক্ষেত্রে $X = Y = 0$ হলে বলগোষ্ঠীটি একটি দ্বন্দ্বের সমতুল।

সমতলীয় বলগোষ্ঠীর বলগুলির প্রত্যেকটিকে যদি তাদের প্রয়োগ বিন্দুর সাপেক্ষে একই কোণে ঐ সমতলে আবর্তিত করা হয় তাহলে (যদি বলগুলির ভেক্টর যোগফল অশূন্য হয় সেক্ষেত্রে) বলগুলির সমতুল লব্ধি বল সর্বদা একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ক্রিয়া করবে, ঘূর্ণন কোণ যে পরিমাণই হোক না কেন।

যদি বলগুলি $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ ..... (X_n, Y_n) যথাক্রমে $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, ..., (x_n, y_n) বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং α যদি বলগুলির ঘূর্ণন কোণ হয় তবে নির্দিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক হল (ξ, η) যেখানে

$$\xi = \frac{VX + GY}{X^2 + Y^2}, \ \eta = \frac{VY - GX}{X^2 + Y^2}$$

এখানে $$V = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k X_k + y_k Y_k\right)$$

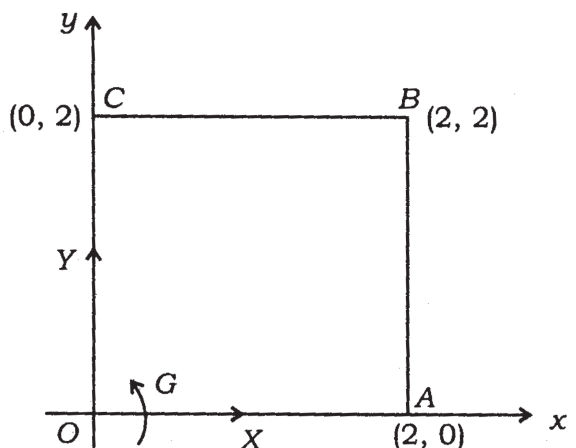
$$G = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k Y_k - y_k X_k\right)$$

4.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

একতলীয় বলসমূহ :

(1) কতগুলি একতলীয় বলের ভ্রামক তিনটি বিন্দু (2, 0), (0, 2) এবং (2, 2) বিন্দুর চারিদিকে যথাক্রমে 3, 4, 10 একক হলে, উহাদের লব্ধি বলের মান বের করুন। প্রমাণ করুন যে ঐ লব্ধি বল $6x + 7y = 6$ সরলরেখা বরাবর ক্রিয়া করে।

সমাধান : মনে করি, সমস্ত বলগুলির সমতুল একটি বল X, Ox বরাবর, একটি বল Y, Oy বরাবর এবং একটি দ্বন্দ্ব যার O বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক G-তে পরিণত করা হল।



9 নং চিত্র

তাহলে বলগুলির A (2, 0) বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল $= G - Y.2$

$$\therefore \quad G - 2Y = 3 \qquad (1)$$

অনুরূপে, বলগুলি C (0, 2) ও B (2, 2) বিন্দুদ্বয়ের চারিদিকে ভ্রামক নিলে

$$G + 2X = 4 \qquad (2)$$

$$G + 2X - 2Y = 10 \qquad (3)$$

(1) এবং (3) হতে $2X = 10 - 3 = 7$ বা, $X = \frac{7}{2}$

(2) এবং (3) হতে $2Y = 4 - 10 = -6$, বা, $Y = -3$

$\therefore$ লব্ধি বলের মান $R = \sqrt{X^2 + X^2}$

$$= \sqrt{\frac{49}{4} + 9} = \tfrac{1}{2}\sqrt{85}$$

(1) হতে $G = 3 + 2Y = 3 - 6 = 3$

$\therefore$ লব্ধি বল যে সরলরেখা বরাবর ক্রিয়া করে তাহার সমীকরণ

$$xY - yX = G$$

অথবা, $x\,(-3) - y\left(\frac{7}{2}\right) = -3$

অথবা, $6x + 7y = 6$

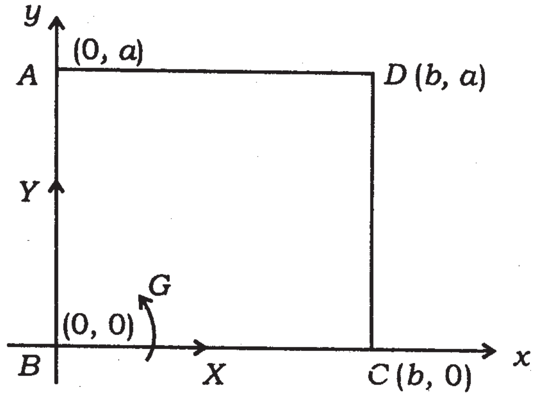
(2) আয়তাকার পাত $ABCD$-এর তলে কতগুলি বল ক্রিয়া করে এবং G_1, G_2, G_3 হল ঐ বলগুলির যথাক্রমে A, B, C বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামকের যোগফল। দেখান যে ঐ বলগুলির লব্ধির মান

$$\sqrt{\left[\left(\frac{G_1 - G_2}{AB}\right)^2 + \left(\frac{G_3 - G_2}{BC}\right)^2\right]}$$

হবে এবং ঐ লব্ধির ক্রিয়ারেখা AB-কে যে বিন্দুতে ছেদ করে A বিন্দু হতে তার দূরত্ব নির্ণয় করুন।

যদি $G_1 = G_2 = G_3$ হয়, তাহলে কি হবে?

সমাধান : B বিন্দুকে মূল বিন্দু, BC-কে x-অক্ষ ও BA-কে y-অক্ষ ধরলাম। ধরা যাক $BC = b$ এবং $AB = a$।



10 নং চিত্র

প্রদত্ত বলগোষ্ঠীকে একটি বল X, BC বরাবর, একটি বল Y, BA বরাবর এবং একটি দ্বন্দ্ব যার ভ্রামক মান G এইরূপ বলগোষ্ঠীতে রূপান্তরিত করা হল। শর্তানুসারে,

বলগোষ্ঠীর স্থৈতিক সমতুলতা,

$$G_1 = G + aX$$

$$G_2 = G$$

$$G_3 = G - by$$

$$\therefore \quad X = \frac{G_1 - G_2}{a}, \qquad Y = -\frac{G_3 - G_2}{b}$$

$$\therefore \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{\left(\frac{G_1 - G_2}{AB}\right)^2 + \left(\frac{G_3 - G_2}{BC}\right)^2}$$

লব্ধির ক্রিয়ারেখার সমীকরণ

$$G - xY + yX = 0$$

$$\text{বা,} \quad G_2 + \left(\frac{G_1 - G_2}{a}\right)y + \left(\frac{G_3 - G_2}{b}\right)x = 0$$

$$\text{বা,} \quad \frac{y}{\dfrac{aG_2}{G_2 - G_1}} + \frac{x}{\dfrac{bG_2}{G_2 - G_3}} = 1$$

এই রেখাটি

$$\left(O, \frac{aG_2}{G_2 - G_1}\right)$$

বিন্দুতে AB-কে ছেদ করে।

$\therefore$ ঐ বিন্দুটির A হইতে দূরত্ব

$$= a - \frac{aG_2}{G_2 - G_1}$$

$$= \frac{aG_1}{G_1 - G_2}$$

যদি $G_1 = G_2 = G_3$ হয় $X = 0,\ Y = 0$

$\therefore$ বলসমূহ একটি দ্বন্দ্বের সমান।

(3) একটি চতুর্ভুজ $ABCD$-এর চারিটি বাহু $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ এবং $\overline{DA}$ বরাবর চারিটি বল যথাক্রমে pa, qb, rc এবং sd ক্রিয়া করে, যেখানে a, b, c, d হল যথাক্রমে ঐ বাহুগুলির দৈর্ঘ। প্রমাণ করুন যে ঐ বলগুলি একটি দ্বন্দ্বের সমান হবে যদি

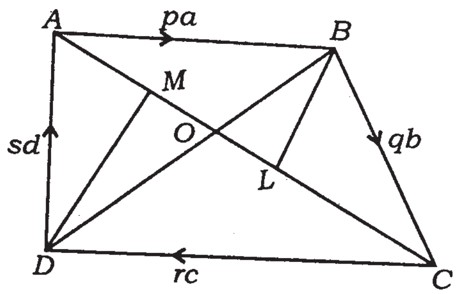
$$(p - q)\ OB = (r - s)\ OD$$

এবং $(q - r)\ OC = (s - p)\ OA$

যেখানে O বিন্দু হল AC ও BD-এর ছেদবিন্দু।

সমাধান : যেহেতু বলগুলি একটি দ্বন্দ্বের সমতুল অতএব সমস্ত বলগুলির যে কোন দুটি সরলরেখা বরাবর উপাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি আলাদাভাবে শূন্য হবে। বলগুলিকে $\overline{AC}$-এর লম্ব দিকে বিশ্লেষিত করলে,

$$pa \sin \angle BAL - qb \sin \angle BCL - rc \sin \angle DCM + s\,d \sin \angle DAM = 0$$



11 নং চিত্র

বা, $p.BL - q.BL - r.DM + s.DM = 0$

বা, $\dfrac{p-q}{r-s} = \dfrac{DM}{BL} = \dfrac{OD}{OB}$

$\therefore \ (p - q) \ OB = (r - s) \ OD$

অনুরূপে, বলগুলিকে BD-এর লম্ব দিকে বিশ্লেষিত করলে অন্য সম্পর্কটি পাওয়া যাবে।

(4) একটি সমতলীয় বলগোষ্ঠীর বলগুলি এমনভাবে পরিবর্তিত হয় যে ঐ সমতলে অবস্থিত দুটি নির্দিষ্ট স্থির বিন্দুর সাপেক্ষে তাহাদের ভ্রামক সর্বদা ধ্রুবক। দেখান যে বলগোষ্ঠীর লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা একটি স্থির বিন্দু দিয়ে সর্বদা যায়।

[**সংকেত :** স্থির বিন্দু দুটি যথাক্রমে O (0, 0) ও A (a, 0) ধরলে আমরা পাই যে O এবং A-এর সাপেক্ষে ভ্রামক G_1, G_2 হলে, G_1 এবং G_2 ধ্রুবক। কিন্তু আমরা জানি $G_2 = G_1 - aY$ যেখানে X, Y হল $X = \sum X_i$ এবং $Y = \sum Y_i$। অতএব লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা

$$G_1 - xY + yX = 0$$

অর্থাৎ $$G_1 - x\frac{G_1 - G_2}{a} + yX = 0$$

অতএব এই রেখাটির উপর

$$\left(\frac{G_1 a}{G_1 - G_2}, 0\right)$$

এই বিন্দুটি সর্বদা আছে।]

(5) একটি সমতলীয় বলগোষ্ঠীর বলগুলির ভ্রামকসমূহের ভেক্টর যোগফল (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) বিন্দুগুলির সাপেক্ষে যথাক্রমে G_1, G_2, G_3 এবং G_4 দেখান যে

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & G_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & G_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & G_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & G_4 \end{vmatrix} = 0$$

[**সংকেত :** $G_1 = G - x_1Y + y_1X$ ইত্যাদি। এইরূপ চারিটি সমীকরণ হতে X, Y ও G -এর অপনয়ন করলে প্রয়োজনীয় শর্তটি পাওয়া যায়।]

(6) একটি সমতলীয় বলগোষ্ঠীর ঐ তলে অবস্থিত (0, 0), (1, 0) ও (0, 1) বিন্দুত্রয়ের সাপেক্ষে ভ্রামক যথাক্রমে G_1, G_2, G_3 হলে বলগোষ্ঠীর লব্ধির ক্রিয়ারেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

[**সংকেত** : $G_2 = G_1 - Y$, $G_3 = G_1 + X$, অতএব লব্ধির ক্রিয়ারেখার সমীকরণ হল $G_1 - x(G_1 - G_2) + y(G_3 - G_1) = 0$]

ত্রিমাত্রিক দেশে বলসমূহ ঃ

(1) X, Y, Z বল যথাক্রমে $y = b, z = -c; z = c, x = -a; x = a, y = -b$। এই রেখাগুলিতে ক্রিয়া করলে দেখান যে উহাদের একটি লব্ধি বল থাকবে যদি $\frac{a}{X} + \frac{b}{Y} + \frac{c}{Z} = 0$ হয়। সেই ক্ষেত্রে লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ X বল-এর ক্রিয়ারেখার দিক্ কোসাইন যথাক্রমে (1, 0. 0) অনুরূপভাবে Y বলের দিক্ কোসাইন (0, 1, 0)। মূলবিন্দু 0-এর সাপেক্ষে ভ্রামক নিলে পাই যে বল তিনটির ভ্রামক যোগফল

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & b & -c \\ X & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & 0 & c \\ 0 & Y & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & -b & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{vmatrix}$$

$$= -\vec{j}\, cX - \vec{k}\, bX - cY\vec{i} - aY\vec{k} - bZ\vec{i} - aZ\vec{j}$$

$$= -\vec{i}\,(-cY - bZ) + \vec{j}\,(-cX - aZ) + \vec{k}\,(-bX - aY)$$

আমরা দেখেছি যে কোন বলতন্ত্র একটি বলে পরিণত হবার শর্ত হল

$$|\vec{F}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \neq 0$$

এবং $\vec{F}.\vec{G} = 0$ অর্থাৎ $LX + MY + NZ = 0$

অতএব বর্তমান ক্ষেত্রে একটি বলে পরিণত হবে যদি

$$X(cY + bZ) + Y(cX + aZ) + Z(bX + aY) = 0$$

অর্থাৎ যদি $cXY + bXZ + aYZ = 0$

অর্থাৎ যদি $\frac{c}{Z} + \frac{b}{Y} + \frac{a}{X} = 0$ হয়।

আমরা জানি যে বলতন্ত্রটি কেন্দ্রীয় অক্ষের সমীকরণ হল

$$\frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z}$$

যাহা হইতে এক্ষেত্রে আমরা পাই

$$\frac{-cY - bZ - yZ - zY}{X} = \frac{-cX - aZ - zX + xZ}{Y}$$

$$= \frac{-aY - bX - xY + yX}{Z} = 0$$

অর্থাৎ $\quad - yZ + zY = cY + bZ$

$$- zX + xZ = cX + aZ$$

$$- xY + yX = aY + bX$$

(2) একটি পরাবৃত্তকের, যার সমীকরণ $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\right)$ একটি কারিকাশ্রেণীর রেখাগুলি বরাবর বলসমূহ ক্রিয়া করে। যদি বলতন্ত্রটি একটি p পিচ্ সমন্বিত রেন্‌চের সমতুল হয়, তাহলে দেখান যে কেন্দ্রীয় অক্ষটি

$$\left(\frac{bc}{a} - p\right)x^2 + \left(\frac{ca}{b} - p\right)y^2 - \left(\frac{ab}{c} + p\right)z^2$$

$$= \left(\frac{bc}{a} - p\right) + \left(\frac{ca}{b} - p\right) - \left(\frac{ab}{c} + p\right)$$

এই পরাবৃত্তকের একটি কারিকা হবে।

সমাধান : ধরা যাক বলগুলি পরাবৃত্তকের

$$\frac{x - a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y - b\sin\theta}{-b\cos\theta} = \frac{z}{c}$$

এই কারিকাশ্রেণীর বিভিন্ন রেখা বরাবর ক্রিয়া করে। অতএব যদি P একটি বল $(a\cos\theta, b\sin\theta, 0)$ এই বিন্দুতে ক্রিয়া করে, তাহলে মূল বিন্দু সাপেক্ষে বলসমূহের বিশ্লেষিতাংশ ও ভ্রামক নিলে পাই

$$X = \sum \frac{Pa\sin\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2}},$$

$$Y = \sum \frac{-bP\cos\theta}{\sqrt{}},$$

$$Z = \sum \frac{Pc}{\sqrt{}}$$

$$L = bc\sum \frac{P\sin\theta}{\sqrt{}} = \frac{bc}{a}X,$$

$$M = \frac{ac}{b}Y, \qquad N = \frac{ab}{c}Z,$$

যেখানে $\sqrt{} = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2}$

কেন্দ্রীয় অক্ষের সমীকরণ হল

$L - yZ + zY = pX$ ইত্যাদি

অর্থাৎ $\left(\frac{bc}{a} - p\right)X + zY - yZ = 0$

$$-zX + \left(\frac{ca}{b} - p\right)Y + xZ = 0$$

$$yX - xY - \left(\frac{ab}{c} + p\right)Z = 0$$

অতএব $X : Y : Z$ অপনয়ন করে পাই

$$\begin{vmatrix} \frac{bc}{a} - p & z & -y \\ -z & \frac{ca}{b} - p & x \\ y & -x & -\left(\frac{ab}{c} + p\right) \end{vmatrix} = 0$$

(3) তিনটি বল যথাক্রমে $x = 0,\ y - z = a;\ y = 0,\ z - x = a;\ z = 0,\ x - y = a$ এই তিনটি রেখা বরাবর ক্রিয়া করে। দেখান যে বলতন্ত্রটি একটি দ্বন্দ্বে পরিণত হতে পারে না। আর যদি তন্ত্রটি একটি বলে পরিণত হয়, তাহলে উহার ক্রিয়ারেখা $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = a^2$ তলের উপর থাকবে।

সমাধান : ধরা যাক P, Q, R বল তিনটি প্রদত্ত রেখা বরাবর ক্রিয়া করে। মূলবিন্দু সাপেক্ষে X, Y, Z ও L, M, N হল

$$X = \frac{Q}{\sqrt{2}} + \frac{R}{\sqrt{2}},\ Y = \frac{P}{\sqrt{2}} + \frac{R}{\sqrt{2}},\ Z = \frac{P}{\sqrt{2}} + \frac{Q}{\sqrt{2}}$$

ভ্রামক ভেক্টর $= \vec{i}\,L + \vec{j}\,M + \vec{k}\,N$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & 0 \\ 0 & \frac{P}{\sqrt{2}} & \frac{P}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & a \\ \frac{Q}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{Q}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ \frac{R}{\sqrt{2}} & \frac{R}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(\frac{aP}{\sqrt{2}}\right) + \vec{j}\left(\frac{aQ}{\sqrt{2}}\right) + \vec{k}\left(\frac{aR}{\sqrt{2}}\right)$$

অতএব $$\vec{F}.\vec{G} = \frac{a[P(Q+R) + Q(R+P) + R(P+Q)]}{2}$$

$$= a(PQ + QR + RP)$$

$$= aPQR\ \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R}\right)$$

বলগোষ্ঠীটি একটি দ্বন্দ্বে পরিণত হতে হলে $Q + R = R + P = P + Q = 0$ অর্থাৎ $P = Q = R = 0$। অতএব বলগোষ্ঠী একটি দ্বন্দ্বে পরিণত হয় না। যদি বলতন্ত্রটি একটি বলে পরিণত হয়, তাহলে $LX + MY + NZ = 0$

অর্থাৎ $PQ + QR + RP = 0$ হবে

এক্ষেত্রে বলটির ক্রিয়ারেখার সমীকরণ

$$\frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z} = 0$$

অর্থাৎ

$$\frac{aP}{\sqrt{2}} - y\left(\frac{P+Q}{\sqrt{2}}\right) + z\left(\frac{P+R}{\sqrt{2}}\right) = 0 \text{ ইত্যাদি}$$

অর্থাৎ $aP - y(P + Q) + z(P + R) = 0,$

$aQ - z(Q + R) + x(Q + P) = 0,$

$aR - x(R + P) + y(R + Q) = 0.$

অথবা $P(a - y + z) - Q_y + Rz = 0$

$Px + Q(a - z + x) - Rz = 0,$

$- Px + Qy + R(a–x+y) = 0.$

অতএব $P : Q : R$ অপনয়ন করে

$$\begin{vmatrix} a-y+z & -y & z \\ x & a-z+x & -z \\ -x & y & a-x+y \end{vmatrix} = 0$$

অথবা
$$\begin{vmatrix} a-x-y+z & 0 & a-x+y+z \\ 0 & a-z+x+y & a-x+y-z \\ -x & y & a-x+y \end{vmatrix} = 0$$

সরল করে পাই,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = a^2$$

(4) কতগুলি সমান পিচ্ বিশিষ্ট রেন্চ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

এই পরাবৃত্তকের একই শ্রেণীর কারিকাগুলি দিয়া ক্রিয়া করে। দেখান যে বলগোষ্ঠী একটি বলে পরিণত হতে হলে উহার কেন্দ্রীয় অক্ষ নিম্নের শঙ্কুর কোন কারিকার সমান্তরাল ঃ

$$\left(p+\frac{bc}{a}\right)x^2+\left(p+\frac{ca}{b}\right)y^2+\left(p-\frac{ab}{c}\right)z^2=0$$

সমাধান : ধরলাম p পিচ্ বিশিষ্ট কতগুলি রেন্চ

$$\frac{x-a\cos\theta}{a\sin\theta}=\frac{y-b\sin\theta}{-b\cos\theta}=\frac{z}{c}$$

এই তন্ত্রের কারিকাগুলির দিকে ক্রিয়া করে। $(P_i,\ pP_i)$ যদি এইরূপ একটি রেন্চ হয় যার বল P_i ও দ্বন্দ্ব pP_i এবং উহা যদি $\theta = \theta_i$ এই কারিকা বরাবর ক্রিয়া করে তাহলে ঐ রেন্চের বল ও দ্বন্দ্ব বিশ্লেষিতাংশসমূহ হবে যথাক্রমে

$$\left[\frac{p_i a\sin\theta_i}{\sqrt{}},\frac{-P_i b\cos\theta_i}{\sqrt{}},\frac{P_i c}{\sqrt{}}\right]$$

ও $$\frac{pP_i\, a\sin\theta_i}{\sqrt{}},\ \frac{-pP_i\, b\cos\theta_i}{\sqrt{}},\ \frac{pP_i c}{\sqrt{}}$$

যেখানে $\sqrt{} = \sqrt{a^2\sin^2\theta_i+b^2\cos\theta_i+c^2}$

অতএব ঐ বল ও দ্বন্দ্বগুলির মূল বিন্দু সাপেক্ষে বিশ্লেষিতাংশ ও ভ্রামকের বিশ্লেষিতাংশসমূহ হবে যথাক্রমে

$$\frac{P_i\, a\sin\theta_i}{\sqrt{}},\ \frac{-P_i\, b\cos\theta_i}{\sqrt{}},\ \frac{P_i c}{\sqrt{}}$$

এবং $$p\frac{P_i\, a\sin\theta_i}{\sqrt{}}+bc\frac{P_i\sin\theta_i}{\sqrt{}},-pb\frac{P_i\cos\theta_i}{\sqrt{}}$$

$$-ac\frac{P_i\cos\theta_i}{\sqrt{}},\ p\frac{P_i\,c}{\sqrt{}},-ab\frac{P_i}{\sqrt{}}$$

অতএব যদি কতগুলি এইরূপ p পিচ্ বিশিষ্ট রেন্চ ক্রিয়া করে, তবে ঐ বলতন্ত্রে মূল বিন্দু সাপেক্ষে বল বিশ্লেষিতাংশ (X, Y, Z) এব ভ্রামক বিশ্লেষিতাংশ $(L;\ M,\ N)$ হলে আমরা পাই,

$$X = a\sum_i \frac{P_i \sin\theta_i}{\sqrt{}},\quad Y = -b\sum_i \frac{P_i \cos\theta_i}{\sqrt{}},$$

$$Z = c\sum_i \frac{P_i}{\sqrt{}}$$

এবং
$$L = pa\sum_i \left(\frac{P_i \sin\theta_i}{\sqrt{}}\right) + bc\sum_i \left(\frac{P_i \sin\theta_i}{\sqrt{}}\right)$$

$$= pX + \frac{bc}{a}X = \left(p + \frac{bc}{a}\right)X$$

$$\mathrm{M} = -pb\sum \frac{P_i \cos\theta_i}{\sqrt{}} - ac\sum \frac{P_i \cos\theta_i}{\sqrt{}}$$

$$= \left(p + \frac{ac}{b}\right)Y$$

$$N = \left(p - \frac{ab}{b}\right)Z$$

সমগ্র বলতন্ত্রটি যদি একটি বলে পরিণত হয় তাহলে সেই বলের বিশ্লেষিতাংশসমূহ হবে $X,\ Y,\ Z$ এবং $LX + MY + NZ = 0$ হবে অর্থাৎ

$$\left(p + \frac{bc}{b}\right)X^2 + \left(p + \frac{ac}{b}\right)Y^2 + \left(p - \frac{ab}{c}\right)Z^2 = 0$$

হবে। অতএব কেন্দ্রীয় অক্ষটি

$$\left(p + \frac{bc}{b}\right)x^2 + \left(p + \frac{ac}{b}\right)y^2 + \left(p - \frac{ab}{c}\right)z^2 = 0$$

এই শঙ্কুর কারিকার সহিত সমান্তরাল হবে।

একক 5 ❑ বলগোষ্ঠীর সাম্য (Equilibrium of Force Systems)

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা
5.2 উদ্দেশ্য
5.3 বল ও দ্বন্দ্ব
5.4 বলগোষ্ঠীর সাম্যাবস্থার শর্তাদি (Conditions of Equilibrium of System of Forces)
5.5 সমতলীয় বলগোষ্ঠীর সাম্য
5.6 সমতলীয় বলগোষ্ঠীর দিক্ নিরপেক্ষ সাম্য (Astatic Equilibrium)
5.7 সাম্যাবস্থার কয়েকটি বিশেষ উদাহরণ
5.7.1 একটি মসৃণ বক্রের উপরিস্থিত বস্তুকণার সাম্যের শর্ত
5.7.2 মসৃণ তলের উপর বস্তুকণার সাম্যের শর্ত
5.8 সারাংশ
5.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

5.1 প্রস্তাবনা

চতুর্থ এককে দেখা গেল বিভিন্ন বলগোষ্ঠী কিভাবে সহজতর বলগোষ্ঠীতে রূপান্তরিত করা যায়। এবার আমরা দেখব বলগোষ্ঠী সাম্য কখন হয়। বলগোষ্ঠীর সাম্য স্থিতিবিদ্যার একটি প্রধান উপজীব্য। বলগোষ্ঠীর সাম্যে থাকার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট কতগুলি শর্ত আমরা নির্ণয় করব। কোন বলগোষ্ঠীর বেলায় শর্তগুলি পরীক্ষা করে বলা সম্ভব হবে প্রদত্ত বলগোষ্ঠী সাম্যে আছে কিনা।

বলগোষ্ঠী সাম্যাবস্থায় থাকার অর্থ হল ঐ বলগোষ্ঠী কোন অশূন্যক বলে অথবা অশূন্যক দ্বন্দ্বে পরিণত হবে না। প্রথমে আমাদের দেখাতে হবে একটি বল ও একটি দ্বন্দ্ব কখনও সাম্যাবস্থায় থাকতে পারে না। তারপরে আমরা সাধারণভাবে বলগোষ্ঠীর সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত নির্ণয় করব।

5.2 উদ্দেশ্য

এই এককের উদ্দেশ্য হল যে, কোন প্রদত্ত বলগোষ্ঠী সাম্যাবস্থায় আছে কিনা পরীক্ষা করার উপায় নির্ধারণ করা। পূর্বের এককে যে কোন বলগোষ্ঠীর সমতুল সহজ ও সরল বলগোষ্ঠী নির্ণয় করার পদ্ধতি ব্যাখ্যা করা হয়েছে। এই এককে সমতুল বলগোষ্ঠীর সাহায্যে সাম্যাবস্থার শর্ত নির্ধারণ করাই আমাদের উদ্দেশ্য। এখানে আপনারা দেখবেন যে—

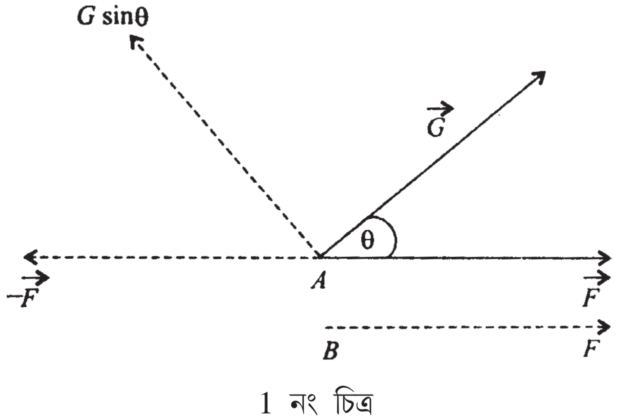
(1) বলগোষ্ঠীর ভেক্টর যোগফল শূন্য হওয়া একটি প্রয়োজনীয় শর্ত। তার সঙ্গে বলগোষ্ঠীর যে কোন বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামকসমূহের যোগফল শূন্য হওয়াও প্রয়োজনীয়। আরও দেখা যাবে যে ঐ শর্ত দুটি সাম্যাবস্থার জন্য যথেষ্ঠও বটে।

(2) বলগোষ্ঠীর ভ্রামকসমূহের যে কোন তিনটি অসমরেখীয় বিন্দু সাপেক্ষে যদি আলাদাভাবে শূন্য হয়, তবে এবং কেবলমাত্র তবেই বলগোষ্ঠী সাম্যে থাকে।

5.3 বল ও দ্বন্দ্ব

উপপাদ্য ঃ একটি বল ও একটি দ্বন্দ্ববিশিষ্ট বলগোষ্ঠী সাম্যে থাকতে পারে না।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক একটি বলগোষ্ঠী হল : একটি বিন্দু A-তে একটি বল $\vec{F}$ এবং একটি দ্বন্দ্ব $\vec{G}$ এবং $\vec{F} \neq 0, \vec{G} \neq 0$। $\vec{G}$ এবং $\vec{F}$ -এর মধ্যে কোণ θ হলে, $\vec{G}$ -কে দুটি দ্বন্দ্বে বিশ্লেষিত করা হল—একটি $\vec{F}$ -এর দিকে এবং অন্যটি $\vec{F}$ -এর লম্ব দিকে। দ্বিতীয় দ্বন্দ্বটির ভ্রামক হল $|\vec{G}| Sin\theta = G\sin\theta$ । এখন এই দ্বন্দ্বটিকে দুটি বল দ্বারা রূপায়িত করলাম—একটি A বিন্দুতে $-\vec{F}$ ও অপরটি $\vec{F}$ যার ক্রিয়া বিন্দু একটি বিন্দু B-তে যেন। $|\vec{AB}\times\vec{F}| = G\sin\theta$ হয়।



1 নং চিত্র

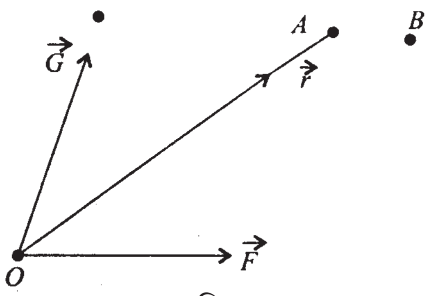
অতএব দেখা গেল যে বলগোষ্ঠীটি B বিন্দুতে বল $\vec{F}$ এবং ঐ একই দিকে বলদ্বন্দ্ব $G\cos\theta$ যার ভ্রামক। কিন্তু বল ও বলদ্বন্দ্ব একদিকে থাকলে কখনও সাম্যে থাকতে পারে না। অতএব প্রমাণিত হল।

5.4 বলগোষ্ঠীর সাম্যাবস্থার শর্তাদি (Conditions of Equilibrium of System of Forces)

এখানে সাধারণভাবে বলগোষ্ঠীর বলগুলি $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots, \vec{F_n}$ যথাক্রমে $A_1, A_2, \ldots, A_n$ বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \ldots, \vec{r_n}$ যথাক্রমে $A_1, A_2, \ldots, A_n$ বিন্দুসমূহের স্থানভেক্টর।

উপপাদ্য 1 : একটি বলগোষ্ঠীর সাম্যবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল : (1) সমস্ত বলগুলির ভেক্টর যোগফল শূন্য হবে, (2) যে কোন একটি বিন্দুর সাপেক্ষে বলগোষ্ঠীর বলগুলির ভ্রামক যোগফল শূন্য হবে।

প্রমাণ : যদি বলগোষ্ঠীর ভেক্টর যোগফল শূন্য না হয় তবে বলগোষ্ঠীটি যে কোন বিন্দু O সাপেক্ষে একটি বল $\vec{F} = \sum \vec{F_k}$ ও একটি দ্বন্দ্ব পরিণত হবে এবং এরূপ একটি দ্বন্দ্ব ও বল কখনই সাম্যে থাকে না। এমনকি দ্বন্দ্বের ভ্রামক শূন্য হলেও বলটি অশূন্যক থাকায় এদের কখনই সাম্যে থাকা সম্ভব নয়। অতএব বলগোষ্ঠীর ভেক্টর যোগফল শূন্য হওয়া প্রয়োজন। আবার কোন বিন্দু A -এর সাপেক্ষে বলগোষ্ঠীর ভ্রামক $\vec{r} \times \vec{F} + \vec{G} = \vec{G}$ (যেহেতু $\vec{F} = 0$) অতএব সাম্যের জন্য $\vec{G} = 0$ হওয়া প্রয়োজন।



2 নং চিত্র

আবার যদি $\vec{F} = 0$ এবং A বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক $\vec{G} = 0$ হয়, তবে যে কোন বিন্দু B-এর সাপেক্ষে বলগোষ্ঠীর ভ্রামক

$$\vec{M_B} = \vec{r_{AB}} \times \vec{F} + \vec{G} = 0$$

অতএব প্রত্যেকটি বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক শূন্য হয়। অতএব বলগোষ্ঠীটি সাম্যে থাকে।

উপপাদ্য 2 : প্রদত্ত বলগোষ্ঠী সাম্যে থাকবার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল : (1) তিনটি পরস্পর লম্ব দিকে বলগুলির বিশ্লোশিতাংশগুলির যোগফল শূন্য হবে, (2) যে কোন তিনটি লম্ব দিকে বলগুলি ভ্রামক যোগফল-এর বিশ্লেষিতাংশগুলি শূন্য হবে।

প্রমাণ : আমাদের দেখাতে হবে যে

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} Y_k = \sum_{k=1}^{n} Z_k = 0$$

এবং

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\vec{r_k} \times \vec{F_k} \right)$$

এই ভ্রামক ভেক্টর বিশ্লেষিতাংশ তিনটি শূন্য এই দুটি শর্ত প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট।

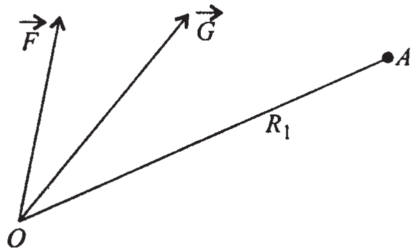
প্রমাণ : প্রথম শর্তটি উপপাদ্য 1-এর প্রথম শর্তের সমান। আর দ্বিতীয় শর্তটি বলগোষ্ঠী ভ্রামক ভেক্টর যোগফল কোন বিন্দু যেমন আদিবিন্দুর সাপেক্ষে x, y, z দিকে শূন্য। এই শর্তটি উপপাদ্য 1-এর দ্বিতীয় শর্তের কার্তিয় রূপ। এতএব উপপাদ্য 2 প্রমাণিত।

উপপাদ্য 3 : যে কোন তিনটি অসমরেখীয় বিন্দুর সাপেক্ষে বলগোষ্ঠীর ভ্রামক শূন্য সাম্যের পক্ষে প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত।

প্রমাণ : ধরা যাক আদিবিন্দু O বিন্দু সাপেক্ষে বলগোষ্ঠীটি একটি বল $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots + \vec{F_n}$ এবং একটি দ্বন্দ্ব যার ভ্রামক $\vec{G} = \sum \vec{r_k} \times \vec{F_k}$ -এর সমতুল।

এখন যদি বলগোষ্ঠী সাম্যে থাকে, তবে $\vec{F} = 0$ এবং $\vec{G} = 0$ হতে হবে। অতএব যে কোন বিন্দু $A(\vec{r})$ সাপেক্ষে বলগোষ্ঠীর ভ্রামক $= \vec{G} + \vec{r} \times \vec{F} = 0$, অতএব সাম্য হলে যে কোন তিনটি অসমরেখীয় বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক শূন্য হয়।

ধরা যাক A, B, C এই বিন্দু তিনটি এক সরলরেখায় নয় এবং উহাদের সাপেক্ষে বলগোষ্ঠীর ভ্রামক $= 0$।



3 নং চিত্র

অতএব বলগোষ্ঠীটি O বিন্দু সাপেক্ষে একটি বল $\vec{F}\left(=\sum_{k=1}^{n}\vec{F_k}\right)$ এবং দ্বন্দ্ব

$$\vec{G}=\sum \vec{r_k}\times \vec{F_k}$$

এর সমতুল।

অতএব $A(\vec{R_1})$ বিন্দু সাপেক্ষে বলগোষ্ঠীর ভ্রামক

$$=\vec{G}+\vec{AO}\times \vec{F}$$

$$=\vec{G}-\vec{OA}\times \vec{F}=\vec{G}-R_1\times \vec{F}=0 \qquad \text{(i)}$$

এভাবে $B(\vec{R_2})$ সাপেক্ষে

$$\vec{G}-\vec{R_2}\times \vec{F}=0 \qquad \text{(ii)}$$

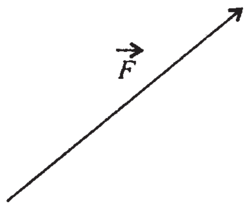
এবং $C(\vec{R_3})$ সাপেক্ষে

$$\vec{G}-\vec{R_3}\times \vec{F}=0 \qquad \text{(iii)}$$

অতএব (i), (ii), (iii) থেকে পাই

$$(\vec{R_1}-\vec{R_2})\times \vec{F}=0,(\vec{R_1}-\vec{R_3})\times \vec{F}=0,$$

$\therefore$ $\vec{F}=0$ অথবা $\vec{R_1}-\vec{R_2}$ ও $\vec{R_1}-\vec{R_3}$ দুটি ভেক্টর $\vec{F}$ -এর সমান্তরাল। কিন্তু A, B, C সমরেখীয় না হওয়ায় $\vec{R_1}-\vec{R_2}$ এবং $\vec{R_1}-\vec{R_3}$ সমান্তরাল হতে পারে না।



4 নং চিত্র

অতএব $\vec{F}=0$, অতএব (i) থেকে $\vec{G}=0$, অতএব বলগোষ্ঠী সাম্যে থাকে।

মন্তব্য : উপরের তিনটি উপপাদ্যের শর্তের সঙ্গে সমতুল অর্থাৎ এমন শর্তগুচ্ছ যাহা উপপাদ্য তিনটির যে কোন একটির থেকে পাওয়া যায় এবং নূতন শর্তগুলি থেকে উপপাদ্যের শর্তগুচ্ছে উপনীত হওয়া যায় তাহাই সাম্যের প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্তগুচ্ছ হবে।

5.5 সমতলীয় বলগোষ্ঠীর সাম্য

উপপাদ্য : সমতলীয় বলগোষ্ঠীর সাম্যের জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হচ্ছে : (1) বলগুলির ভেক্টর যোগফল শূন্য, (2) বলগুলির যে কোন বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক যোগফল শূন্য।

প্রমাণ : বলগুলি সমতুল হয় একটি বিন্দুতে O (যাকে আমরা আদিবিন্দু নিতে পারি) একটি লব্ধি বল ও একটি দ্বন্দ্ব যার ভ্রামক ভেক্টর সমস্ত বলগুলির ঐ বিন্দু O সাপেক্ষে ভ্রামকের যোগফল। বলগুলি সাম্যে থাকলে লব্ধি বল শূন্য হতে হবে এবং বলদ্বন্দ্বের ভ্রামক শূন্য হতে হবে—অতএব শর্ত দুটি প্রয়োজনীয়। আবার শর্ত দুটি সত্য হলে বলগোষ্ঠীটি সাম্যে আছে। অতএব শর্ত দুটি যথেষ্ট।

উপপাদ্য 1 : সমতলীয় বলগোষ্ঠীর সাম্যের জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হচ্ছে—(1) বলসমূহের বিশ্লেষিতাংশ যে কোন দুটি পরস্পর লম্ব দিকে প্রত্যেকটি শূন্য। (2) যে কোন একটি বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক ভেক্টরসমূহের যোগফল শূন্য।

প্রমাণ : আমরা জানি যে আদিবিন্দু O মাধ্যমে বলগোষ্ঠী একটি বল (X, Y) এবং একটি দ্বন্দ্ব যার ভ্রামক G এদের সঙ্গে সমতুল। এখানে

$$X = \sum_{r=1}^{n} X_r, \;\; Y = \sum_{r=1}^{n} Y_r, \;\; G = \sum_{r=1}^{n} (x_r Y_r - y_r X_r)$$

যেখানে (X_r, Y_r) = একটি বল যার প্রয়োগ বিন্দু (x_r, y_r)। এখন যেহেতু বল ও দ্বন্দ্ব পরস্পর সাম্যে থাকতে পারে না, তাহলে সাম্যের জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত দুটি হল $X = 0$, $Y = 0$, $G = 0$।

উপপাদ্য 2 : সমতল বলগোষ্ঠীর সাম্যের প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হচ্ছে : বলগোষ্ঠীতে বলের ভ্রামকসমূহের যোগফল তিনটি অসমরেখীয় বিন্দু সাপেক্ষে শূন্য।

প্রমাণ : xy তলে অবস্থিত বলগোষ্ঠীটি আদিবিন্দু O সাপেক্ষে একটি বল (X, Y) যেখানে $X = \sum_{i=1}^{n} X_i, \;\; Y = \sum_{ri=1}^{n} Y_i$ (বলগোষ্ঠীর বলগুলি যথাক্রমে (X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n), ক্রিয়াশীল $A_1(x_1, y_1) \ldots A_n(x_n, y_n)$ বিন্দুতে) এবং একটি দ্বন্দ্ব যার ভ্রামক অক্ষ xy সমতলের লম্ব এবং যার মান

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i) = G$$

এখন $A\ \xi_1, \eta_1)$ $B(\xi_2, \eta_2)$ $C(\xi_3, \eta_3)$ তিনটি অসমরেখীয় তিনটি বিন্দুর সাপেক্ষে বলগোষ্ঠীর বলগুলির ভ্রামক যোগফল শূন্য হলে আমরা পাই

$$\left.\begin{array}{l} G - \xi_1 Y + \eta_1 X = 0 \\ G - \xi_2 Y + \eta_2 X = 0 \\ G - \xi_3 Y + \eta_3 X = 0 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} Y(\xi_1 - \xi_2) + (\eta_1 - \eta_2)X = 0 \\ Y(\xi_1 - \xi_{23}) + (\eta_1 - \eta_3)X = 0 \end{array}$$

অতএব হয় $X = Y = 0$ অথবা

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 - \xi_2 & \eta_1 - \eta_2 \\ \xi_1 - \xi_3 & \eta_1 - \eta_3 \end{vmatrix} = 0$$

কিন্তু Δ শূন্য হতে পারে না যেহেতু A, B, C বিন্দু তিনটি অসমরেখীয়। অতএব $X = Y = 0$ অতএব (i) থেকে $G = 0$, অতএব বলগোষ্ঠী সাম্যে আছে। অতএব শর্তদ্বয় সাম্যের জন্য যথেষ্ট। আবার বলগোষ্ঠী সাম্যে থাকলে $X = Y = G = 0$, অতএব যে কোন বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক শূন্য হবে। অতএব শর্তদ্বয় প্রয়োজনীয়।

5.6 সমতলীয় বলগোষ্ঠীর দিক্ নিরপেক্ষ সাম্য (Astatic Equilibrium)

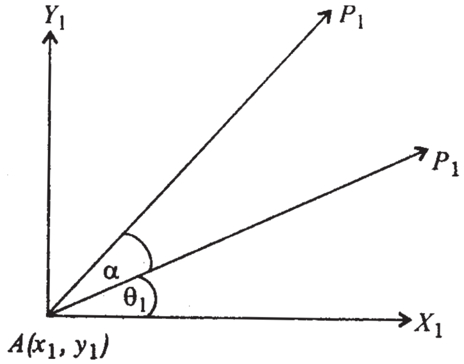
কোন সমতলীয় বলগোষ্ঠীর বলগুলি P_1, P_2, ..., P_n, $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$ বিন্দুতে ক্রিয়া করলে এবং সাম্যে থাকলে এবং বলগুলি যদি ঐ সমতলে একই কোণে প্রয়োগ বিন্দু সাপেক্ষে ঘূর্ণিত করলেও যদি বলগোষ্ঠী সাম্যে থাকে তবে ঐ বলগোষ্ঠীকে দিক্ নিরপেক্ষ সাম্যে আছে বলা হয়। ধরা যাক $P_1(X_1, Y_1)$, $P_2(X_2, Y_2)$, ..., $P_n(X_n, Y_n)$ বলগুলির বিশ্লেষিতাংশ।

আমরা এখন প্রমাণ করব যে

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i + y_i X_i) = 0$$

এই শর্ত দিক্ নিরপেক্ষ সাম্যের জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত।

প্রমাণ :



5 নং চিত্র

যদি P_1 বল x-অক্ষের সহিত θ_1 কোণ করে তবে $X_1 = P_1\cos\theta_1$, $Y_1 = P_1\sin\theta_1$ বলগুলি α কোণে ঘূর্ণিত করলে P_1 বলটির বিশ্লেষিতাংশসমূহ

$$X_1' = P_1\cos(\theta_1 + \alpha),\ Y_1' = P_1\sin(\theta_1 + \alpha)$$

অতএব O (আদিবিন্দু) সাপেক্ষে

বলগোষ্ঠীর প্রথম অবস্থায় বল (X, Y) ও দ্বন্দ্ব G বল

$$X = \sum_{i=1}^{n} P_i \cos\theta_i,\ \ Y = \sum_{i=1}^{n} P_i \sin\theta_i,$$

$$G = \sum_i (x_i Y_i - y_i X_i) = \sum_i (x_i P_i \sin\theta_i - y_i P_i \cos\theta_i)$$

ঘূর্ণিত অবস্থায় O বিন্দু সাপেক্ষে (X', Y') বল ও দ্বন্দ্ব G' যেখানে

$$\begin{aligned}
X' &= \Sigma P_i\cos(\theta_i + \alpha) \\
&= \cos\alpha\ \Sigma P_i\cos\theta_1 - \sin\alpha\ \Sigma P_i\ \sin\theta_i = X\cos\alpha = Y\sin\alpha \\
Y' &= \Sigma P_i\sin(\theta_i + \alpha) \\
&= \cos\alpha\ \sum_i P_i \sin\theta_i + \sin\alpha \sum_i P_i \cos\theta_i \\
&= Y\cos\alpha + X\sin\alpha \\
G' &= \sum_i [x_i P_i \sin(\theta_i + \alpha) - y_i P_i \cos(\theta_i + \alpha)] \\
&= \cos\alpha \sum_i (x_i Y_i - y_i X_i) + \sin\alpha \sum_i (x_i X_i + y_i Y_i) \\
&= G\cos\alpha + V\sin\alpha
\end{aligned}$$

যেখানে

$$V = \sum_i (x_i X_i + y_i Y_i)$$

এখন দেখা যাচ্ছে যে, যে কোন কোণ α-এর জন্য সাম্য হবে যদি $X = Y = 0$ হয়, এবং $G = 0$, $V = 0$ হয়।

অতএব দেখা যাচ্ছে দিক্ নিরপেক্ষ সাম্যের জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল $\boldsymbol{X = Y = 0}$, $\boldsymbol{G = 0}$ **এবং** $\boldsymbol{V = 0}$

উপপাদ্য : সমতলীয় কোন বলগোষ্ঠী সাম্যে থাকা বলগোষ্ঠীর প্রতিটি বলকে তার প্রয়োগ বিন্দুর সাপেক্ষে α কোণে ঘূর্ণিত করলে নূতন অবস্থায় বলগোষ্ঠীটি একটি দ্বন্দ্বের সমতুল হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক $A_1,(x_1, y_1), \ldots, A_n(x_n, y_n)$ বিন্দুতে $P_1, P_2, \ldots, P_n$ বল ক্রিয়া করে যাদের x, y দিকে বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$।

যেহেতু বলগোষ্ঠীটি সাম্যাবস্থায় আছে

অতএব

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \\ Y &= \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \\ G &= \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(i)}$$

এখন বলগুলিকে α কোণে ঘূর্ণিত করলে নূতন বলগোষ্ঠীটি O বিন্দু সাপেক্ষে (X', Y') বল ও G' দ্বন্দ্ব সমতুল,

যেখানে

$$X' = X\cos\alpha - Y\sin\alpha$$

$$Y' = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \text{ (পূর্বের উপপাদ্যের প্রমাণ থেকে)}$$

এবং

$$G' = G\cos\alpha + V\sin\alpha$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} (x_i X_i + y_i Y_i)$$

এখন (i) থেকে X, Y, G শূন্য হওয়ায় $X' = Y' = 0$ এবং $G' = V\sin\alpha$

অতএব নূতন বলগোষ্ঠী একটি দ্বন্দ্বে পরিণত হবে।

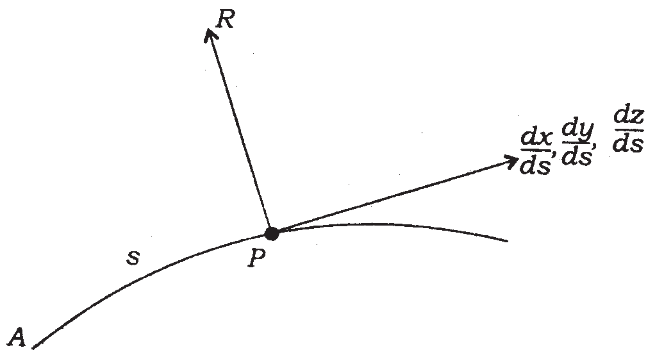
5.7 সাম্যাবস্থার কয়েকটি বিশেষ উদাহরণ

5.7.1 একটি মসৃণ বক্রের উপরিস্থিত বস্তুকণার সাম্যের শর্ত

ধরা যাক একটি মসৃণ বক্রের কার্তিয় সমীকরণ

$$x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s)$$

যেখানে s হল বক্রটির একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে মাপা P বিন্দু পর্যন্ত দৈর্ঘ্য।



6 নং চিত্র

যেহেতু বক্রটি মসৃণ, বক্রটি বস্তুকণার উপর বক্রের অভিলম্ব দিকে রিঅ্যাকশন্ বল R। বস্তুকণার উপর অন্যান্য যেসব বল ক্রিয়া করছে তাদের **কার্তিয়** বিশ্লেষিতাংশ X, Y, Z। এখন (X, Y, Z) এবং অভিলম্ব দিকে $\vec{R}$। বক্রটির (x, y, z) বিন্দুতে স্পর্শকের দিক্ কোসাইন্ হল $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$। সাম্যের জন্য স্পর্শক দিকে বলগুলির বিশ্লেষিতাংশ শূন্য। অতএব।

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} Z\frac{dz}{ds} = 0$$

এবং X, Y, Z বল তিনটির লব্ধি প্রতিক্রিয়া-বল R-এর বিপরীতে হবে।

$$\therefore\ R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

5.7.2 মসৃণ তলের উপর বস্তুকণার সাম্যের শর্ত

কার্তিয় স্থানাঙ্ক $x, y,$ সাহায্যে মসৃণ তলটির সমীকরণ $f(x, y, z) = 0$ ধরা যাক। বস্তুকণাটির সাম্যের জন্য কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বহিঃস্থ বলের কার্তিয় বিশ্লেষিতাংশ (X, Y, Z) হলে বলটি তলের

অভিলম্ব দিকে থাকলে তবেই সাম্যে থাকবে। (বহিঃস্থ বল প্রতিক্রিয়া-বল দ্বারা নিরুদ্ধ হবে)। কিন্তু অভিলম্ব দিকের দিক কোসাইন্ $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ এর সমানুপাতী।

অতএব সাম্যের জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত হল

$$\frac{X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

5.8 সারাংশ

বলগোষ্ঠীর সাম্য হতে গেলে সমতুল একটি বল ও একটি দ্বন্দ্ব হলে চলবে না। কেননা একটি বল ও একটি দ্বন্দ্ব কখনই সাম্যাবস্থায় থাকতে পারে না।

বলগোষ্ঠীর সমগ্র বলসমূহের ভেক্টর যোগফল যদি শূন্য হয় এবং বলসমূহের যে কোন একটি বিন্দু সাপেক্ষে যদি ভ্রামকদের ভেক্টর যোগফল শূন্য হয় তবে বলগোষ্ঠীটি সাম্যে থাকবে। শর্ত দুটি সাম্যে থাকার জন্য একদিকে প্রয়োজনীয়, অপরদিকে যথেষ্ট।

অন্যভাবে শর্ত দুটি বলা যায় যেমন—বলগোষ্ঠীর বলগুলির তিনটি লম্ব দিকে বিশ্লেষিতাংশগুলির যোগফল যদি প্রত্যেকটি শূন্য হয় এবং বলগোষ্ঠীর বলগুলির যে কোন বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক ভেক্টরের যোগফল যদি শূন্য হয় তবে বলগোষ্ঠী সাম্যে থাকে। এ দুটিও প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত।

আরেকভাবে প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত বলা যায়। সেটা হল বলগোষ্ঠীর বলসমূহের ভ্রামকসমূহের যোগফল যদি তিনটি অসমরেখীয় বিন্দুর সাপেক্ষে প্রত্যেকটি শূন্য হয় তবে উহা বলগোষ্ঠীর সাম্যের জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত।

একটি সমতলীয় বলগোষ্ঠী সাম্যে থাকার জন্য অনুরূপ শর্ত আছে। যেমন—যদি ঐ সমতলে দুটি লম্ব দিকে বলগুলির বিশ্লেষিতাংশগুলির যোগফল প্রত্যেকটি শূন্য হয় এবং যে কোন একটি বিন্দুর সাপেক্ষে বলগুলির ভ্রামক যোগফল যদি শূন্য হয় তবে সমতলীয় বলগোষ্ঠীটি সাম্যে থাকে।

একটি সমতলীয় বলগোষ্ঠীর বলগুলি যদি সাম্যে থাকে, তবে ঐ বলগুলিকে প্রয়োগ বিন্দু সাপেক্ষে প্রত্যেকটি বলের ক্রিয়া রেখাকে একই কোণ α পরিমাণ ঐ সমতলে ঘূর্ণিত করা হয়, তাহলে নূতন অবস্থায় বলগোষ্ঠীটি একটি দ্বন্দ্বে পরিণত হয়। দ্বন্দ্বের ভ্রামক মান $= \sin\alpha \sum_{i=1}^{n} (x_i X_i + y_i Y_i)$,

যেখানে (X_i, Y_i) বল প্রযুক্ত হয়েছে (x_i, y_i) বিন্দুতে। $\sum_i (x_i X_i + y_i Y_i)$ কে ভিরিয়াল বলা হয়।

সমতলীয় বলগোষ্ঠী যদি সাম্যে থাকে অর্থাৎ যদি

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0,$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0,$$

$$G = \sum_{i}^{i=1} (x_i Y_i - y_i X_i) = 0 \text{ হয়}$$

এবং যদি

$$V = \sum_{i=1}^{n} (x_i X_i + y_i Y_i) = 0$$

হয় তাহলে এরূপ সমতলীয় বলগোষ্ঠীর বলগুলিকে প্রয়োগ বিন্দু সাপেক্ষে যে কোন নির্দিষ্ট একটি কোণে ঘূর্ণিত করলেও এই নূতন অবস্থায় বলগোষ্ঠী সাম্যে থাকে।

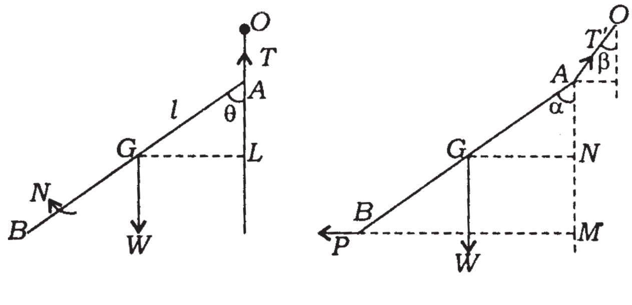
একটি মসৃণ বক্রের উপর কোন বস্তুকণা যদি কতগুলি বল প্রযুক্ত হয়ে সাম্যে থাকে তাহলে ঐ বলগুলি যে শর্ত পালন করে সেটা আলোচনা করা হয়েছে। আবার একটি মসৃণ তলের উপরে কোন বস্তুকণা সাম্যে থাকলে, যে সব বল ঐ বস্তুর উপর ক্রিয়া করে তারা যে সম্পর্ক পালন করে সেটাও আলোচনা করা হয়েছে।

5.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. একটি সুষম দণ্ড AB (যা ভার W এবং দৈর্ঘ $2l$)-কে একটি ভারহীন দড়ি OA-এর সাহায্যে O বিন্দু হতে ঝোলানো হল, যার A বিন্দুটি দণ্ডের সহিত যুক্ত। একটি দ্বন্দ্ব যার ভ্রামক $N(< lW)$ দণ্ডটির উপরে উল্লম্ব তলে ক্রিয়া করে। সাম্যবস্থায় থাকাকালীন দড়ির উপর টান এবং দণ্ডটির উল্লম্বরেখার সহিত নতি নির্ণয় করুন।

দণ্ডটি হতে দ্বন্দ্বকে সরিয়ে একটি অনুভূমিক বল P, B বিন্দুতে প্রয়োগ করা হল। সাম্যবস্থায় দড়ি এবং দণ্ডের সহিত উল্লম্বরেখা যে কোণগুলি উৎপন্ন করে তাদের ট্যানজেন্ট-এর মান বার করুন।

সমাধান :



7 নং চিত্র

প্রথম ক্ষেত্রে, দড়িটি উল্লম্বভাবে থাকবে, যাতে দড়ির টান T, ভার বল W এবং দ্বন্দ্ব N-এর সহিত সাম্যতা বজায় রাখে।

$\therefore$ উল্লম্ব দিকে বিশ্লেষিত করলে পাই, $T = W$

এবং

$$N = W \cdot GL = Wl\sin\theta$$

$$\therefore \sin\theta = N / Wl,$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, দড়িটি অবশ্যই উল্লম্বের সহিত নতি β থাকবে, যাতে দড়ির টান T অনুভূমিক বল P-এর সহিত সাম্য আনতে পারে।

$\therefore$ অনুভূমিক ও উল্লম্ব দিকে T' কে বিশ্লেষিত করলে পাই,

$$T'\sin\beta = P,\ T'\cos\beta = W, \quad \therefore \tan\beta = P/W$$

আবার A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক নিলে,

$$P \cdot AM - W \cdot GN = 0$$

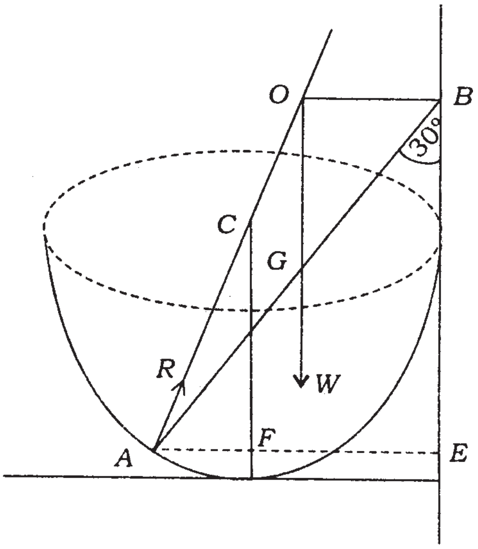
অথবা, $P \cdot 2l\cos\alpha - W \cdot l\sin\alpha = 0$

অথবা, $\tan\alpha = \dfrac{2P}{W}$

2. একটি a ব্যাসযুক্ত মসৃণ অর্ধগোলকাকৃতি বাটিকে এরূপভাবে রাখা আছে যাতে উহার ধার একটি মসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালকে স্পর্শ করে। একটি W ভারযুক্ত সমদণ্ড AB-এর একটি প্রান্ত A, বাটির ভিতরের বক্রতলে অবস্থিত এবং অপর প্রান্ত দেওয়ালে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। দেখান যে দণ্ডের দৈর্ঘ $a+a/\sqrt{13}$ ।

দণ্ডটির দেওয়াল ও বাটির উপর প্রতিক্রিয়া-বল নির্ণয় করুন।

সমাধান : পার্শ্বের চিত্রটি, সমস্ত বস্তুগুলির AB দণ্ডের মধ্য দিয়ে উল্লম্ব ছেদ। মনে করি $AB = 2l$



8 নং চিত্র

নিম্নলিখিত বলসমূহ দণ্ডের উপর ক্রিয়া করে। W, দণ্ডের ভার উহার মধ্যবিন্দু G দিয়ে উল্লম্বভাবে ক্রিয়া করে। S, দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া, B বিন্দুতে দেওয়ালের লম্বভাবে কাজ করে, যেহেতু দেওয়ালটি মসৃণ; R, A বিন্দুতে বাটির প্রতিক্রিয়া-বল (যেহেতু বাটিটি মসৃণ) বাটির অভিলম্ব বরাবর ক্রিয়া করে উহার কেন্দ্র C দিয়ে যায়।

মনে করি R বলটি উল্লম্বের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে। A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক নিলে

$$W \cdot AG\sin 30° = S \cdot BE = S \cdot AB\cos 30°$$

$$\therefore \; W\frac{AG}{AC}\tan 30° = W\frac{\frac{1}{2}a}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{W}{2\sqrt{3}} \qquad (1)$$

সমস্ত বলগুলিকে অনুভূমিক ও উল্লম্বের দিকে বিশ্লেষিত করলে

$$R\sin\theta = S \text{ এবং } R\cos\theta = W \;\therefore\; \tan\theta \; \frac{S}{W}$$

$$\therefore \ R = W\sec\theta\left[(1) \text{ হতে } \tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ \therefore \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{13}} \ \therefore \cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right]$$

$$= \frac{W\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$$

আবার, $AB = AE \operatorname{cosec} 30° \quad = (AF = FE) \operatorname{cosec} 30°$

$$= (AC \sin\theta + FE) \operatorname{cosec} 30°$$

$$= \left(\frac{1}{2}a.\frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{2}a\right).2 = a + a/\sqrt{13}$$

3. সমবেধ যুক্ত একটি পাটাতন $ABCD$ (যার ভার W)-কে AB-র মধ্যবিন্দু থেকে ঝোলানো আছে যাতে পাটাতনটি ঐ বিন্দু সাপেক্ষে উল্লম্ব তলে মুরতে পারে। P ও $Q(P > Q)$ দুটি ভারকে দুটি ভারহীন দড়ির সাহায্যে B ও D বিন্দু হতে ঝোলানো হল। প্রমাণ করুন, সাম্যাবস্থায় AB বাহুটি অনুভূমিকের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তার মান

$$\tan^{-1}\frac{a(P-Q)}{b(W+2Q)}$$

সমাধান : $ABCD$ পাটাতনের ভার W, উহার ভরকেন্দ্র G বিন্দুতে উল্লম্বভাবে ক্রিয়া করে, যেখানে

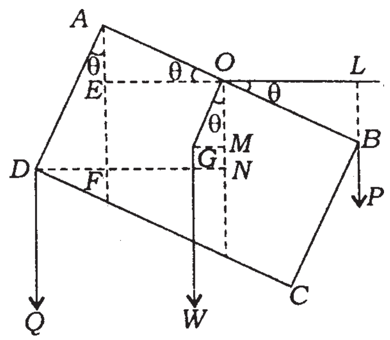
$$OG = \frac{1}{2}AD = \frac{b}{2}$$

মনে করি সাম্যাবস্থায় AB, অনুভূমিকের সহিত θ কোণ করে ; O বিন্দু হল AB-র মধ্যবিন্দু;

O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক নিলে,

$$-P \cdot OL + W \cdot GM + Q \cdot DN = 0$$

$$OL = OB \cdot \cos\theta = \frac{a}{2}\cos\theta$$



9 নং চিত্র

$$GM = OG\ \sin\theta = \frac{b}{2}\sin\theta$$

$$DN = DF + FN = AD\sin\theta + OE$$

$$= AD\sin\theta + AO\cos\theta$$

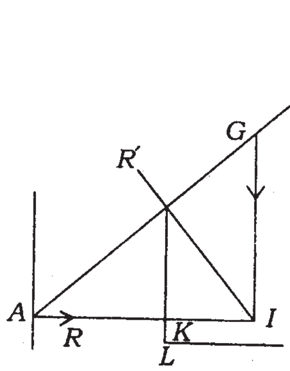
$\therefore$ (1) হতে,

$$-P\frac{a}{2}\cos\theta + W\frac{b}{2}\sin\theta + Q(b\sin\theta + \frac{a}{2}\cos\theta) = 0$$

অথবা, $(Q-P)\frac{a}{2}\cos\theta + (W+2Q)\frac{b}{2}\sin\theta = 0 \quad \therefore \quad \tan\theta = \frac{(P-Q)a}{(W+2Q)b}$

4. একটি খোলা বেলনাকার জার, যার ব্যাসার্দ্ধ a এবং ওজন nW, একটি অনুভূমিক টেবিলের উপর রয়েছে। একটি ভারী দণ্ড, যার দৈর্ঘ $2l$, ওজন W, ঐ জারের মধ্যে উল্লম্ব তলের সঙ্গে একটি প্রান্ত লেগে আছে এবং অপর প্রান্ত জারের কানার উপর ভর দিয়ে বাইরে আছে। (1) দেখান যে দণ্ডটি অনুভূমির সহিত θ কোণ করে আছে যেখানে $l\cos^3\theta = 2a$, (2) দণ্ডটি জারের বাইরে পড়ে যাবে যদি দণ্ডটির নতি উপরের θ হতে কম হয়, (3) জারটি পড়ে যাবে যদি $l\cos\theta < (n + 2)a$ না হয়।

সমাধান : (1) প্রতিক্রিয়া-বল R, R', ওজন বল W, একবিন্দু হবে। অতএব চিত্রানুসারে (M জারের কানায় অবস্থিত)



10 নং চিত্র

$$\cos\theta = \frac{AK}{AM} = \frac{AI}{AG} = \frac{AM}{AI}$$

$$\therefore \cos^3\theta = \frac{2a}{l}$$

(2) যদি θ এমন হয় যে $\cos^3\theta > \dfrac{2a}{l}$ তাহলে যেহেতু দণ্ডের সাম্যের জন্য প্রয়োজনীয় $R'\sin\theta = R$, $R'\cos\theta = W$ হলেও বলগুলি একটি দ্বন্দ্বে রূপায়িত যার ভ্রামক

$$= R \cdot AM \cdot \sin\theta - W(l\cos\theta - 2a)$$

$$= W[2a - l\cos^3\theta] \,/\, \cos^2\theta, \text{ যেহেতু } AM \cos\theta = 2a$$

এবং ইহা <0 অর্থাৎ দণ্ডটি বাইরে দিকে ঘুরে পড়ে।

(3) L-এর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে দণ্ড ও জার দুটির জন্য, জারটি L-এর সাপেক্ষে উল্টিয়ে যায় যদি $-nWa + W(l\cos\theta - 2a) > 0$

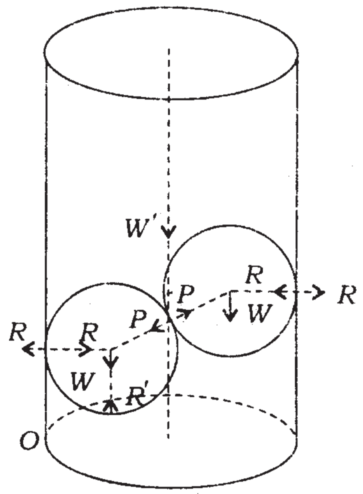
অর্থাৎ $Wl\cos\theta > W(n + 2)a$

অর্থাৎ $l\cos\theta > (n + 2)a$

অতএব $l\cos\theta < (n + 2)a$ হলে জারটি পড়ে যাবে না।

5. দুটি মসৃণ গোলক (প্রত্যেকটির ব্যাসার্ধ r এবং ভার W) একটি অনুভূমিক তলের উপর লম্বভাবে অবস্থিত একটি ফাঁপা a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট চোঙের মধ্যে সাম্যাবস্থায় আছে। দেখান যে চোঙটি যাতে না ওল্টায় তার জন্য চোঙটির ভার অন্ততঃ

$2W\left(1-\frac{r}{a}\right)$ হবে। $\left(\right.$ এখানে $\left. r>\frac{a}{2}\right)$



11 নং চিত্র

নীচের গোলকটির উপর চারিটি বল (R, P, W, R'), যেখানে R হল চোঙ প্রদত্ত প্রতিক্রিয়া, P হল দ্বিতীয় গোলক কর্তৃক প্রদত্ত প্রতিক্রিয়া, R' হল ভূমি কর্তৃক প্রদত্ত প্রতিক্রয়া। গোলক দুটির কেন্দ্রদ্বয় সংযোগকারী রেখা অনুভূমির সহিত θ কোণ করে। চিত্র হতে পাই

$$r + 2r\cos\theta + r = 2a \tag{1}$$

নীচের গোলকের সাম্যাবস্থার জন্য

$$P\cos\theta = R,\ P\sin\theta = R' - W \tag{2}$$

একক 6 ❑ ঘর্ষণ বল (Force of Friction)

গঠন

6.1 প্রস্তাবনা

6.2 উদ্দেশ্য

6.3 দুটি রুক্ষ পৃষ্ঠের মধ্যে প্রতিক্রিয়া বল

6.3.1 সীমাস্থ ঘর্ষণ বল

6.3.2 ঘর্ষণ কোণ ও ঘর্ষণ শঙ্কু

6.4 একটি রুক্ষ আনত সমতলের উপর একটি বস্তুর সীমাস্থ সাম্য

6.5 একটি অমসৃণ বক্রের উপর একটি কণা সাম্যাবস্থায় থাকার শর্ত

6.6 একটি অমসৃণ তলের উপর একটি কণার সাম্য

6.7 কয়েকটি উদাহরণ

6.8 সারাংশ

6.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

6.1 প্রস্তাবনা

যে কোন দুটি বস্তু তলের সংস্পর্শে সান্নিধ্যজনিত কারণে একটি তলের বস্তু অপর বস্তুর উপর কিছু বল প্রয়োগ করে এবং নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুসারে দ্বিতীয় বস্তুটি বিপরীত দিকে ঐ পরিমাণ বল প্রথম বস্তুর উপর ক্রিয়া করে। এই বল কোন্ দিকে ক্রিয়া করবে সেটা নির্ভর করে বস্তুটি কি পদার্থের এবং স্পর্শতল দুটি কিরূপ মসৃণ। এ বিষয়ে পরীক্ষালব্ধ জ্ঞান থেকে জানা গেছে যে তল দুটি যদি অতিশয় মসৃণ হয় তাহলে পারস্পরিক ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া বল স্পর্শক তলের সাধারণ অভিলম্ব দিকে ক্রিয়া করে। এ ধরনের বস্তুকে আমরা পূর্ণ মসৃণ (Perfectly Smooth) বলে থাকি। পূর্ণভাবে মসৃণ ধারণাটি কিছুটা আদর্শ অবস্থা যেটা অনেক সময়ই সত্য হয় না। বাস্তবে দুটি তলের মধ্যে প্রতিক্রিয়া বলের কিছু পরিমাণ বিশ্লেষিতাংশ স্পর্শক দিকে থাকে। এই স্পর্শক দিকে যে বল ক্রিয়া করে তাকেই ঘর্ষণ বল (Force of Friction) বলা হয়। আমরা এই এককে প্রথমে ঘর্ষণ বলের প্রকৃতি, মান ইত্যাদি সম্বন্ধে আলোচনা করব। এর পরে ঘর্ষণ বল ক্রিয়া করে এরকম পরিস্থিতিতে বলসমূহের সাম্যাবস্থার কতকগুলি উদাহরণ সহযোগে ব্যাখ্যা করব।

6.2 উদ্দেশ্য

যখন দুটি বস্তু সংস্পর্শে থাকে তখন তাদের সাধারণ স্পর্শতল মধ্য দিয়ে একটি অপরটির উপর বল ক্রিয়া করে এবং এই বল দুটি পরস্পর সমান মানের ও বিপরীতমুখী।

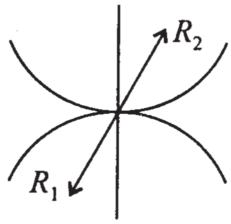
এই এককে আমাদের উদ্দেশ্য হল

(1) প্রথমে নির্ণয় করা বস্তু দুটির মধ্যে স্পর্শজনিত বলের প্রকৃতি। এই বলের মধ্যে যে উপাংশটি স্পর্শতলে অবস্থিত সেটাকেই ঘর্ষণ বল বলা হয় এবং ঘর্ষণ বলের প্রভাব বলগোষ্ঠীর সাম্যের ব্যাপারে নির্ণয় করাই আমাদের উদ্দেশ্য।

(2) কোন ভারী বস্তু যদি একটি আনত সমতলের উপর থাকে, তবে বস্তুটি যদি নামবার উপক্রম করে তখন ঘর্ষণ বল ও বস্তুটি যদি উপর দিকে উঠবার উপক্রম করে সেক্ষেত্রে ঘর্ষণ বল বিপরীতমুখী হবে ও সর্বদা স্পর্শ বিন্দুর গতিবেগের প্রবণতাকে বাধা দিবে। এই বাধা দিবার ক্ষমতা বস্তু দুটি যে পদার্থ দিয়ে গঠিত তার উপর নির্ভর করবে এবং বস্তু দুটির মধ্যে অভিলম্ব রিয়াক্‌শন বলের উপর নির্ভর করবে।

6.3 দুটি রুক্ষ পৃষ্ঠের মধ্যে প্রতিক্রিয়া বল

ধরা যাক (I) ও (II) দুটি রুক্ষ পৃষ্ঠ বিশিষ্ট বস্তু কোনও এক বিন্দুতে পরস্পর স্পর্শ করছে। নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র হতে আমরা জানি (I) বস্তুটি (II) বস্তুটি উপর একটি বল প্রয়োগ করে এবং (II) বস্তুটি (I) বস্তুটির উপর বিপরীত দিকে এবং একই মান বিশিষ্ট প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে। অর্থাৎ 1নং চিত্রে প্রদর্শিত R_1, R_2 যথাক্রমে (I) নং বস্তু ও (II) নং বস্তুর উপর প্রতিক্রিয়া বল হলে R_1, R_2 -এর ক্রিয়া রেখা একই সরলরেখায় এবং $R_1 = R_2$ হবে। ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুতে বস্তু দুটির পৃষ্ঠের সাধারণ স্পর্শকের অভিলম্ব টানা হল। এখন (I) নং বস্তুটির উপর ক্রিয়ারত প্রতিক্রিয়া বল R_1-এর



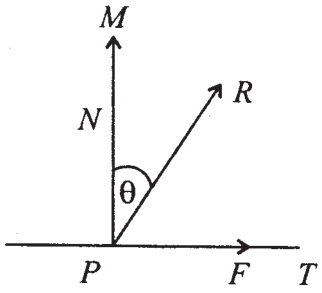
1 নং চিত্র

অভিলম্ব অভিমুখী বিশ্লেষিতাংশ N_1 এবং স্পর্শক তলে R_1, N_1 তলে অবস্থিত একটি স্পর্শক রেখার দিকে বিশ্লেষিতাংশ F_2। অনুরূপভাবে (II) নং বস্তুর উপর ক্রিয়ারত প্রতিক্রিয়া বলের N_2 ও F_2 এই বিশ্লেষিতাংশ অভিলম্ব ও স্পর্শক দিকে। এখন যেহেতু R_1 ও R_2 পরস্পর বিপরীতমুখী ও

সমমানযুক্ত। অতএব N_1, F_1 ও N_2, F_2 পরস্পর সমমানযুক্ত ও বিপরীতমুখী হবে। যদি বস্তু দুটির মধ্যে একটি কণা হয়, তাহলে উপরের বক্তব্য সত্য হবে।

আমরা এখন যে কোনও একটি বস্তুর উপর প্রযুক্ত প্রতিক্রিয়া বল সম্বন্ধে আলোচনা করব। কেননা তাহলেই অপর বস্তু সম্বন্ধে জানা যাবে।

ধরা যাক একটি বস্তুর P বিন্দুতে অন্য একটি বস্তু কর্তৃক প্রযুক্ত প্রতিক্রিয়া বল 2 নং চিত্র অনুযায়ী R দ্বারা সূচিত হল। PM সাধারণ স্পর্শক তলের উপর লম্ব ও PM ও R-এর ক্রিয়ারেখার



2 নং চিত্র

সহিত সমতলে PT সাধারণ স্পর্শক টানা হল। প্রতিক্রিয়া বল R ও লম্ব PM মধ্যবর্তী কোণ θ দ্বারা সূচিত হল। PT-এর দিকে R-এর বিশ্লেষিতাংশ F হলে এবং লম্ব PM-এর দিকে R-এর বিশ্লেষিতাংশ N হলে, আমরা পাই

$$N^2 + F^2 = R^2$$

$$R\cos\theta = N,\ R\sin\theta = F \text{ অর্থাৎ } \tan\theta = \frac{F}{N}$$

এখানে N ও F এই দুটি বলকে যথাক্রমে অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া (Normal Reaction) ও ঘর্ষণ বল (Friction) বলা হয়। যে সকল বস্তুদ্বয়ের মধ্যে ঘর্ষণ বল ক্রিয়া করে না তাদের প্রতিক্রিয়া সম্পূর্ণভাবে অভিলম্ব এবং এই ধরনের বস্তুপৃষ্ঠকে মসৃণ (Smooth) বলা হয়। সাধারণভাবে যেখানে ঘর্ষণ বল শূন্য নয়, সেখানে বস্তুদ্বয়কে রুক্ষ (Rough) বলা হয়।

6.3.1 সীমাস্থ ঘর্ষণ বল

প্রতিক্রিয়া বল স্বাভাবিকভাবে অন্যান্য বলের দ্বারা নিয়ন্ত্রিত হয়। সেজন্য প্রতিক্রিয়া বলকে নিষ্ক্রিয় বল বলা হয়। কয়েকটি পরীক্ষা-সঞ্জাত নিয়ম ঘর্ষণ সম্বন্ধে বিধিবন্ধ হয়েছে সেগুলিকে ঘর্ষণের নিয়মাবলী (Laws of Friction) বলা হয়। নিচে নিয়মগুলি দেওয়া হল :

(1) ঘর্ষণ বল না থাকলে প্রয়োগবিন্দুটি যে দিকে যাবার কথা ঘর্ষণ বল সর্বদা তার বিপরীতমুখী। আপেক্ষিক গতির ক্ষেত্রে ঘর্ষণ বল আপেক্ষিক গতির প্রতিরোধ করে।

(2) ঘর্ষণ বলের মান সর্বদা সাম্যাবস্থার পক্ষে যথেষ্ট অথবা স্পর্শ বিন্দুর আপেক্ষিক গতিকে প্রতিরোধ করার পক্ষে যথেষ্ট (অবশ্য যদি ঐ যথেষ্ট পরিমাণ ঘর্ষণ বল পাওয়া সম্ভব হয়)।

(3) যে পরিমাণ ঘর্ষণ বল পাওয়া যায় তার একটি ঊর্ধ্বসীমা আছে। ঘর্ষণ বল যখন ঊর্ধ্বসীমা প্রাপ্ত হয় তখন তাকে সীমাস্থ ঘর্ষণ বল (Limiting Friction) বলা হয়।

(4) দুটি বস্তুর মধ্যে ক্রিয়াশীল সীমাস্থ ঘর্ষণ বল ও উহাদের মধ্যে ক্রিয়াশীল অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া সর্বদা সমানুপাতী অর্থাৎ N যদি অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া হয়, তাহলে μN হবে সীমাস্থ ঘর্ষণ, যেখানে μ একটি ধ্রুবক। μ কেবলমাত্র স্পর্শকারী বস্তু দুটির উপর নির্ভর করে। μ কে ঘর্ষণ-সহগ (Coefficient of Friction) বলা হয়।

(5) সীমাস্থ ঘর্ষণ স্পর্শকারী ক্ষেত্রফলের উপর সাধারণতঃ নির্ভরশীল নহে।

মন্তব্য : (1) উপরে নিয়মগুলি পরীক্ষালব্ধ এবং সর্বাবস্থায় কঠোরভাবে সত্য না হলেও মোটামুটিভাবে সত্য। (2) স্পর্শকারী বিন্দুগুলির মধ্যে আপেক্ষিক গতি থাকলে ঘর্ষণ বল সীমাস্থ ঘর্ষণ বলের সমান হয় এবং উহা (4) নম্বর নির্ণয় অনুযায়ী হয়, যদিও এইক্ষেত্রে μ এর মান বস্তু দুটি স্থির হলে যা হত তা অপেক্ষা কিঞ্চিৎ কম।

6.3.2 ঘর্ষণ কোণ ও ঘর্ষণ শঙ্কু (Angle of Friction and Cone of Friction)

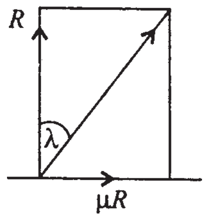
সীমাস্থ ঘর্ষণের ক্ষেত্রে মোট প্রতিক্রিয়া ও অভিলম্বের মধ্যে কোণকে ঘর্ষণ কোণ (Angle of Friction) আখ্যা দেওয়া হয়।

সীমাস্থ ঘর্ষণ ক্ষেত্রে যেহেতু, R অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া হলে, ঘর্ষণ বল μR, অতএব লব্ধি প্রতিক্রিয়া বল অভিলম্বের সহিত λ কোণ করলে আমরা পাই

$$\tan\lambda = \frac{\mu R}{R} = \mu$$

সুতরাং ঘর্ষণ কোণ ও ঘর্ষণ-সহগ এদের মধ্যে $\mu = \tan\lambda$ এই সম্পর্কে রয়েছে। যেহেতু ঘর্ষণের মান সীমাস্থ না হওয়া পর্যন্ত ঘর্ষণ বল F সীমাস্থ ঘর্ষণ অপেক্ষা কম এবং যেহেতু সীমাস্থ ঘর্ষণকালেই $\left|\frac{F}{R}\right|$-এর মান সর্ববৃহৎ হয়, অতএব মোট প্রতিক্রিয়ালব্ধি কখনই অভিলম্বের সহিত λ-এর অধিক কোণ

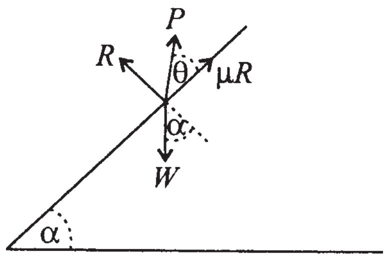
করতে পারে না। এজন্য অভিলম্বকে অক্ষ করিয়া উহার সহিত λ কোণকারী শঙ্কুকে ঘর্ষণ শঙ্কু (Cone of Friction) বলা হয়। ইহা পরিষ্কার যে প্রতিক্রিয়ালব্ধি সর্বদা ঘর্ষণ শঙ্কুর মধ্যে অবস্থিত হবে।



3 নং চিত্র

দুটি বস্তুর তলের মধ্যে ঘর্ষণ যদি এমন হয় যে, যে কোনও মানের ঘর্ষণ বল প্রযুক্ত হওয়া সম্ভব, এমন তলদ্বয়কে পরিপূর্ণ রুক্ষ বা পরিপূর্ণ অমসৃণ (Perfectly Rough) বলা হয়। অপরপক্ষে দুটি তলের মধ্যে ঘর্ষণাঙ্ক সীমিত হলে তলদ্বয়কে অপরিপূর্ণ রূক্ষ বা অপরিপূর্ণ অমসৃণ (Imperfectly Rough) বলা হয়।

6.4 একটি রুক্ষ আনত সমতলের উপর একটি বস্তুর সীমাস্থ সাম্য (Limiting Equilibrium on Inclined Plane)



4 নং চিত্র

প্রথমে নেওয়া যাক যে পরিস্থিতিতে বস্তুটি নীচের দিকে গড়িয়ে পড়া থেকে সীমাস্থভাবে নিবৃত্ত হয়েছে ঘর্ষণ বলের সর্বাধিক অর্থাৎ সীমাস্থ ঘর্ষণ বল এবং বহিঃস্থ বল P-এর জন্য।

রুক্ষ সমতলটি অনুভূমির সহিত α কোণ করে। বস্তুটির উপর অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া বল R এবং বস্তুটির উপর বল P উল্লম্বতলে অবস্থিত ও সর্বাধিক নতি রেখার (Line of Greatest Slope) সহিত θ কোণ করে। ধরা যাক ভারী বস্তুটি (যার ওজন W) সীমাস্থ সাম্যাবস্থায় রয়েছে। সাম্যাবস্থার জন্য সমতলের সমান্তরাল ও লম্বভাবে বিশ্লেষিতাংশ নিয়ে পাই

$$P\cos\theta + \mu R = W \sin\alpha \qquad (1)$$

$$R + P\sin\theta = W \cos\alpha \qquad (2)$$

(1) ও (2) হতে পাই $P = W\dfrac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\theta - \mu\sin\theta}$

$$= W\frac{\sin(\alpha-\lambda)}{\cos(\theta+\lambda)} \qquad (3)$$

যেখানে $\mu = \tan\lambda$, অতএব P বলের প্রয়োজন হবে যদি $\alpha > \lambda$ হয়।

$$R = W\cos\alpha - \frac{W\sin(\alpha-\lambda)\sin\theta}{\cos(\theta+\lambda)}$$

$$= W\frac{\cos\alpha\cos(\theta+\lambda) - \sin(\alpha-\lambda)\sin\theta}{\cos(\theta+\lambda)}$$

অপরপক্ষে যদি বস্তুটি সীমাস্থ সাম্যাবস্থায় কিন্তু উপরের দিকে চলবার প্রবণতা যুক্ত থাকে তাহলে ঘর্ষণ বল নীচের দিকে ক্রিয়া করে এবং সে অবস্থায় বহিঃস্থ বল P-এর মান হবে

$$P = W\frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)} \qquad (4)$$

অতএব দেখা যাচ্ছে একটি বস্তুর সমতলের উপর দিকে উঠবার জন্য P-এর নিম্নতম মান হবে যখন $\theta = \lambda$ এবং $P = W\sin(\alpha + \lambda)$।

6.5 একটি অমসৃণ বক্রের উপর একটি কণা সাম্যাবস্থায় থাকার শর্ত

যদি μ ঘর্ষণাঙ্ক হয় এবং X, Y, Z যদি কণাটির উপর প্রযুক্ত বলসমূহের আয়তক্ষেত্রাকার কার্তিয় বিশ্লেষিতাংশ হয় তাহলে সাম্যের শর্ত নির্ণয় করা হবে।

ধারা যাক, কণাটি প্রদত্ত বক্রের একটি বিন্দু P তে সাম্যাবস্থায় আছে। X, Y, Z বহিঃস্থ বল, আর বক্রের লম্ব প্রতিক্রিয়া বল R এবং ঘর্ষণ বল F যারা যথাক্রমে বক্রের P বিন্দুতে লম্ব ও স্পর্শক দিকে। স্পর্শকটির দিক—কোসাইন যথাক্রমে l, m, n হলে এবং $\lambda(= \tan^{-1}\mu)$ ঘর্ষণ কোণ হলে, সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত এই যে বহিঃস্থবল X, Y, Z-এর লব্ধি বল $\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$, P বিন্দুতে বক্রের লম্বের সহিত λ থেকে বেশী কোণ করবে না। অর্থাৎ স্পর্শক ও ঐ লব্ধির মধ্যে কোণ $\dfrac{\pi}{2} - \lambda$ হতে বেশী বা বড় জোর সমান হবে। অর্থাৎ

$$\cos^{-1}\left(\frac{lX + mY + nZ}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\right) \geq \frac{\pi}{2} - \lambda$$

অথবা $\left(\dfrac{lX + mY + nZ}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\right) \le \sin\lambda$

অর্থাৎ $\dfrac{(lX + mY + nZ)^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} \le \dfrac{\tan^2\lambda}{1 + \tan^2\lambda}$

অর্থাৎ $\dfrac{(lX + mY + nZ)^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} \le \dfrac{\mu^2}{1 + \mu^2}$ (*i*)

এখন সমতলীয় বক্রের ক্ষেত্রে আমরা $n = 0$, $Z = 0$ বসিয়ে এবং $l = \dfrac{dx}{ds}, m = \dfrac{dy}{ds}$ লিখে (i) থেকে পাই

$$\frac{\left(X\dfrac{dx}{ds} + Y\dfrac{dy}{ds}\right)^2}{X^2 + Y^2} \le \mu^2 / (1 + \mu^2)$$

অথবা $$\frac{\left(X + Y\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{X^2 + Y^2\left(\dfrac{ds}{dx}\right)^2} \le \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}$$

অর্থাৎ $$\left(X + Y\frac{dy}{dx}\right)^2 \le \mu^2\left[X\frac{dy}{dx} - Y\right]^2$$

6.6 একটি অমসৃণ তলের উপর একটি কণার সাম্য

ধরা যাক একটি বিন্দুতে কণাটি বহিঃস্থ বল (X, Y, Z)-এর দ্বারা ও প্রতিক্রিয়া বল যথাক্রমে লম্ব দিকে R ও কোনও স্পর্শক দিক F এর যুগপৎ ক্রিয়াধীন সাম্যাবস্থায় আছে। এক্ষেত্রে সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত এই যে বহিঃস্থ বল এর লব্ধি তলের অভিলম্বের সহিত ঘর্ষণ কোণ λ-এর থেকে ছোট বা সমান হবে।

এখন ধরা যাক যে তলটির সমীকরণ হল $\phi\ (x, y, z) = 0$, অতএব অভিলম্বের দিক কোসাইন সমূহ নির্দিষ্ট বিন্দুতে

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\text{-এর}$$

সহিত সমানুপাতী। অতএব সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত হল

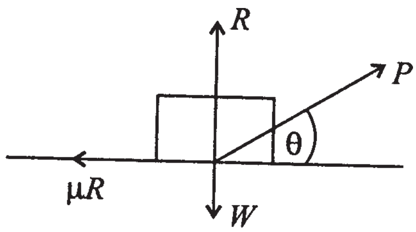
$$\cos^{-1}\left[\frac{X\phi_x + Y\phi_y + Z\phi_z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\sqrt{\phi_z^2+\phi_y^2+\phi_z^2)}}\right] \le \lambda$$

অর্থাৎ $$\frac{\left(X\phi_x + Y\phi_y + Z\phi_z\right)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)\left(\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2\right)} \ge \cos^2\lambda$$

অর্থাৎ $$\frac{\left(X\phi_x + Y\phi_y + Z\phi_z\right)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)\left(\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2\right)} \ge \frac{1}{1+\mu^2}$$

6.7 কয়েকটি উদাহরণ

1. একটি ভারী বস্তুকে (যার ওজন *W*) একটি অমসৃণ অনুভূমিক তলে চালিত করবার জন্য নিম্নতম বল কত?



5 নং চিত্র

ধরা যাক P বল অনুভূমিক তলের সহিত θ কোণ করে বস্তুটিকে প্রায় চলতে বাধ্য করছে। অতএব ইহা সীমাস্থ সাম্য এবং উপরের চিত্র হতে

$$P\sin\theta + R = W,\ P\cos\theta = \mu R$$

অতএব $$P\cos\theta = \mu(W - P\sin\theta)$$

$$P = \mu W sec\theta - \mu P\tan\theta$$

$$P = \frac{\mu W\sec\theta}{1+\mu\tan\theta}$$

$$= \frac{\mu W}{\cos\theta+\mu\sin\theta}$$

$$= W\frac{\tan\lambda}{\cos\theta + \tan\lambda\sin\theta}$$

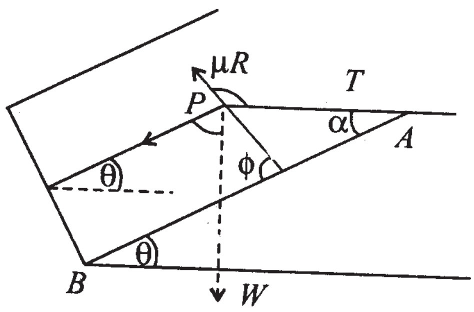
$$= \frac{W\sin\lambda}{\cos(\theta-\lambda)} = \frac{W\sin\lambda}{\cos(\theta-\lambda)}$$

অতএব নিম্নতম মান $P = W\sin\lambda$

2. একটি ভারী বস্তুকণা অমসৃণ সমতলের উপর আছে এবং ঐ তলটি অনুভূমিক তলের সহিত θ কোণ করে। কণাটি একটি ভারহীন সূতা AP দিয়া ঐ তলের A বিন্দুর সঙ্গে সংযুক্ত। AB যদি বৃহত্তম নতিযুক্ত রেখা হয় এবং কণাটি যদি সরণোন্মুখ হয়, তাহলে দেখান যে

$$\sin\alpha = \mu\cot\theta$$

যেখানে $\alpha = \angle PAB$ হলে সূতার টান কত? ($\mu\cot\theta > 1$)



6 নং চিত্র

ধরা যাক ঘর্ষণ বল AB-এর সহিত ϕ কোণ উৎপন্ন করে। AB-এর দিকে W-এর বিশ্লেষিতাংশ $= W\sin\theta$ আর AB-এর লম্ব দিকে এবং তলটির লম্ব দিকে $W\cos\theta$। T-এর AB-এর দিকে বিশ্লেষিতাংশ $= -T\cos\alpha$ ও ঐ তলে AB-এর লম্ব দিকে $T\sin\alpha$। অতএব AB-এর দিকে বলসমূহের বিশ্লেষিতাংশ নিলে পাই

$$W\sin\theta - T\cos\alpha = -\mu R\cos\phi$$

আবার AB-এর লম্ব দিকে বিশ্লেষিতাংশ শূন্য $T\sin\alpha = \mu R\sin\phi$

তলটির লম্ব দিকে বলসমূহের বিশ্লেষিতাংশ নিয়ে পাই $R = W\cos\phi$

$$\therefore \quad T\sin\alpha = \mu W\cos\theta\sin\phi$$

$$T\cos\alpha = W\sin\theta + \mu W\cos\theta\cos\phi$$

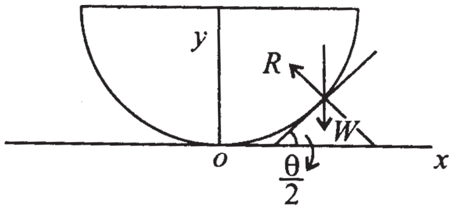
$$\therefore \quad \tan\alpha = \frac{\mu\cos\theta\sin\phi}{\sin\theta + \mu\cos\theta\cos\phi}$$

এখন কণাটির সরণ দিক P হতে AP উপর লম্ব দিকে হবে, যেহেতু সুতার সঙ্গে দিকটি লম্ব দিকে অতএব $\phi = \pi / 2 + \alpha$ অতএব $\sin\alpha = \mu\cot\theta$। $\mu\cot\theta > 1$ হলে $\tan\theta < \mu$, সেক্ষেত্রে

বস্তুটি এমনি (শুধু নিজস্ব ভার ও ঘর্ষণ বল লম্ব প্রতিক্রিয়া বলে) সাম্যে থাকবে। সূতাটির কোনও প্রয়োজন হবে না অর্থাৎ সেক্ষেত্রে $T = 0$।

3. একটি সাইক্লয়েডের অক্ষ উল্লম্ব এবং শীর্ষবিন্দু নীচে আছে। দেখান যে একটি কণা উহার কোনও বিন্দুতে স্থির থাকতে পারে যদি বিন্দুটি নিম্নতম বিন্দু হতে $2a\sin^2\varepsilon$-এর বেশী উচ্চতায় না থাকে।

(এখানে ε হল ঘর্ষণ কোণ a হল সাইক্লয়েড-এর স্রষ্টা বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ)



7 নং চিত্র

$$x = a(\theta + \sin\theta)$$

$$y = a(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ \psi = \frac{\theta}{2}$$

সাম্যাবস্থার জন্য W বলটি অভিলম্ব দিকের সহিত ε-এর কম কোণ করবে।

অর্থাৎ $\frac{\theta}{2} < \varepsilon$ হওয়া প্রয়োজন।

অর্থাৎ $\sin^2\frac{\theta}{2} < \sin^2\varepsilon$

অর্থাৎ $2a\sin^2\frac{\theta}{2} < 2a\sin^2\varepsilon$

অর্থাৎ উচ্চতা $< 2a\sin^2\varepsilon$ হওয়া প্রয়োজন।

4. একটি ভারী দণ্ড, যার দৈর্ঘ্য $2a$, একটি অমসৃণ পেরেকের উপর আছে এবং উহার একটি প্রান্ত একটি অমসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালের গায়ে আছে। যদি দেওয়াল হতে পেরেকটি দূরত্ব c হয়, এবং λ যদি ঘর্ষণ কোণ হয় (পেরেক ও দেওয়ালের মধ্যে) দেখান যে, যদি দেওয়ালের সহিত দণ্ডটির স্পর্শ বিন্দু পেরেকের উপরে থাকে, তখন দণ্ডটি নীচের দিকে পতনোন্মুখ হলে

$$\sin^3\theta = \frac{c}{a}\cos^2\lambda$$

এখানে দণ্ডটি দেওয়ালের সঙ্গে θ কোণ করে।

দেওয়ালের সহিত সংস্পৃষ্ঠ প্রান্তটি পেরেকের নীচে থাকলে, দেখান যে

$$\sin^2\theta\sin(\theta+2\lambda) = \frac{c}{a}\cos^2\lambda$$

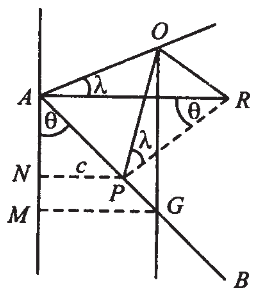
(যখন দণ্ডটি পতনোন্মুখ হবে)

$$\text{এবং}\ \sin^2\theta\sin(\theta-2\lambda) = \frac{c}{a}\cos^2\lambda$$

(যখন দণ্ডটি উপর দিকে চলনোন্মুখ হবে)

প্রথম ক্ষেত্র : দণ্ডটির A নীচে দিকে গমনোন্মুখ এবং A, পেরেকটি দিগন্ত হতে উঁচুতে আছে।

AB দন্ড, G ভার কেন্দ্র, P পেরেক A ও P তে ঘর্ষণসহ প্রতিক্রিয়া বল ও ওজন বল O বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle OAR = \lambda$, $\angle OPR = \lambda$, $PN = c$।



8 নং চিত্র

$OAPR$ সমবৃত্তীয়

$(\because\ \angle OAR = \angle OPR)$

আবার $\angle APR = \pi / 2$, অতএব

$\angle AOR = \pi / 2$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{c}{AP}$$

$$\sin\theta = \frac{AP}{AR}$$

$$\sin\theta = \frac{MG}{AG} = \frac{MG}{a}$$

$$\cos\lambda = \frac{OA}{AR}$$

$$\cos\lambda = \frac{MG}{OA}$$

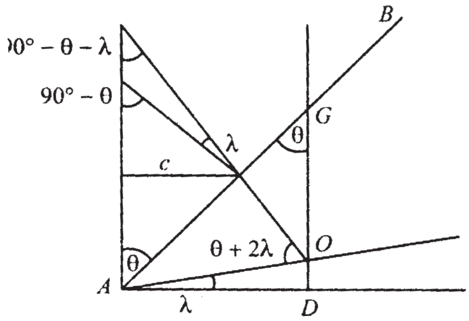
$$\therefore \qquad \sin^2\theta = \frac{c}{a}\cdot\frac{MG}{AR}$$

$$= \frac{c}{a}\,\frac{MG}{OA}\cdot\frac{OA}{AR}$$

$$= \frac{c}{a}\cos^2\lambda$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্র ঃ A পতনোন্মুখ : A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া বল AO দিকে, উহা লম্ব AD-এর সঙ্গে λ কোণ করে।

$$\therefore \sin\theta = \frac{PK}{AP} = \frac{c}{AP}.\sin\theta = \frac{AD}{AG} = \frac{AD}{a}$$



9 নং চিত্র

$$\therefore \sin^2\theta = \frac{c}{a}\cdot\frac{AD}{AP} = \frac{c}{a}\,\frac{AD}{OA}\cdot\frac{OA}{AP}$$

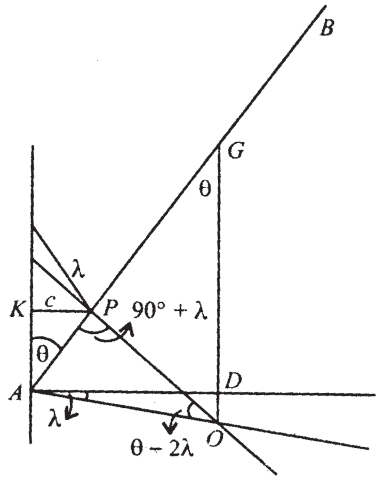
$$= \frac{c}{a}.\cos\lambda.\frac{\sin(90^\circ-\lambda)}{\sin(\theta+2\lambda)} = \frac{c}{a}\cos^2\lambda\,/\,\sin(\theta+2\lambda)$$

তৃতীয় ক্ষেত্র ঃ A, P-এর নীচে এবং A উপর দিকে গমনোন্মুখ বল তিনটি অর্থাৎ G-তে ওজন বল, A-তে প্রতিক্রিয়া ও P-তে প্রতিক্রিয়া বল O বিন্দুতে মিলিত।

উপরের চিত্র হইতে, $\sin\theta = \dfrac{PK}{AP} = \dfrac{c}{AP}$

$$\sin\theta = \frac{AD}{AG} = \frac{AD}{a}$$

$$\therefore \qquad \sin^2\theta = \frac{c}{a}\cdot\frac{AD}{AP} = \frac{c}{a}\frac{AD}{AO}\cdot\frac{AO}{AP}$$

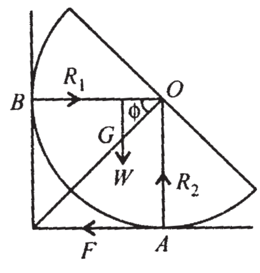


10 নং চিত্র

$$= \frac{c}{a}\cos\lambda\,\frac{\sin(90^\circ+\lambda)}{\sin(\theta-2\lambda)}$$

$$= \frac{c}{a}\,\frac{\cos^2\lambda}{\sin(\theta-2\lambda)}$$

5. একটি ঘন গোলকার্ধ একটি অমসৃণ অনুভূমিক তলের উপর আছে এবং উহা একটি মসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালের সঙ্গে ঠেস দিয়া আছে। দেখান যে, ঘর্ষণাঙ্ক $\frac{3}{8}$ অপেক্ষা বেশী হলে, গোলকার্ধটি যে কোন অবস্থায় স্থির থাকতে পারে। আরও দেখান যে ঘর্ষণাঙ্ক $\frac{3}{8}$ -এর কম হলে গোলকার্ধের সমতল ভূমি উল্লম্ব রেখার সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহা ন্যূনপক্ষে $\cos^{-1}\frac{8\mu}{3}$ হবে।



11 নং চিত্র

গোলকার্ধটি A বিন্দুতে অনুভূমিক তল ও B বিন্দুতে উল্লম্ব দেওয়ালের সঙ্গে স্পর্শ করে আছে। উহার ওজন বল W, G-তে ক্রিয়া করে যেখানে $OG = \frac{3a}{8}$ । অতএব সাম্যের জন্য

$$F = R_1$$

$$R_2 = W$$

A বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক লইয়া $W\frac{3a}{8}\cos\phi = R_1 a$

অতএব $\frac{F}{R_2} = \frac{R_1}{W} = \frac{3}{8}\cos\phi$

অতএব যদি $\mu > \frac{3}{8}$ হয়, তাহলে $\frac{3}{8}\cos\phi < \mu$ যে কোনও ϕ -এর জন্য হবে অর্থাৎ তলদেশটি যে কোনও নতিতে থাকলে সাম্যাবস্থা হবে।

যদি $\mu < \frac{3}{8}$ হয়, তাহলে কেবলমাত্র যদি ϕ এমন হয় যে

$$\frac{3}{8}\cos\phi < \mu$$

অর্থাৎ $\cos\phi < \frac{8\mu}{3}$

অর্থাৎ $\phi > \cos^{-1}\left(\frac{8\mu}{3}\right)$

হয়, তাহলে সাম্যাবস্থা হবে।

6. একটি ত্রিভুজাকৃতি টেবিলের প্রতিটি কৌণিক বিন্দু A, B, C -তে ভর দেওয়ার ব্যবস্থা আছে। টেবিলটিকে একটি অমসৃণ অনুভূমিক মেঝের উপর স্থাপন করা হল। টেবিলটি নিজ সমতলে ঘুরবার জন্য নিম্নতম দ্বন্দ্ব কত?

সমাধান ঃ A, B, C বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া বল $\frac{W}{3}$, যাদের সম্মিলিত বল W ত্রিভুজের ওজনের বিপরীতে ক্রিয়া করে। সীমাস্থ সাম্যের কালে ঘর্ষণ বলগুলি বহিঃস্থ দ্বন্দ্বকে নিবারিত করে। অতএব যদি তাৎক্ষণিক ঘূর্ণনকেন্দ্র I হয় এবং I-এর অবস্থান ত্রিভুজে অভ্যন্তস্থ বিন্দু হয়, তাহলে ঘর্ষণ হল

A, B, C বিন্দুতে যথাক্রমে $\frac{1}{3}\mu W$ এবং উহাদের দিক হল যথাক্রমে IA, IB, IC-এর সহিত লম্ব। যেহেতু এই বলগুলি একটি দ্বন্দ্বের সমতুল। অতএব বলরেখাগুলি এক সমকোণে ঘূর্ণিত করলে উহারা সাম্যে থাকবে। কিন্তু ঘর্ষণ বলগুলি সমান অতএব AIB, BIC, CIA প্রত্যেকটি $120°$। এইরূপ বিন্দু I পাওয়া গেলে যে দ্বন্দ্ব প্রয়োগের প্রয়োজন তার ভ্রামক মান ঘর্ষণ বলের ভ্রামকের সমান অতএব দ্বন্দ্বটির ভ্রামক

$$= \frac{1}{3}\mu W(IA + IB + IC)$$

যদি ত্রিভুজটির তাৎক্ষণিক ঘূর্ণন বিন্দু I ত্রিভুজ ABC-এর বাইরে থাকে তাহলে ঘর্ষণ বল একটি দ্বন্দ্বের সমতুল হবে না। অতএব ত্রিভুজটির কোনও কোণ $120°$ অপেক্ষা বেশী হলে I ত্রিভুজের ভেতরে কোনও বিন্দু হবে না।

ত্রিভুজের কোন কৌণিক বিন্দু A-এ পরিপ্রেক্ষিতে ঘূর্ণন সম্ভব হলে, B ও C বিন্দুতে ঘর্ষণ বল $\frac{1}{3}\mu W$ হবে এবং A বিন্দুতে $\frac{1}{3}\mu W$ অপেক্ষা কম হবে, এবং তিনটি বল মিলিয়া একটি দ্বন্দ্ব উৎপন্ন করবে। সেক্ষেত্রে বলগুলিকে সমকোণে ঘুরাইলে বল তিনটি A-তে মিলিত হয়ে সাম্যে থাকবে। কিন্তু $\frac{1}{3}\mu W$, $\frac{1}{3}\mu W$, যথাক্রমে AB ও AC-এর দিকে ক্রিয়া করে ও উহাদের লব্ধি $\frac{2}{3}\mu W \cos\frac{1}{2}A$; অতএব বল তিনটি সাম্যে থাকতে হলে

$\cos\frac{1}{2}A < \frac{1}{2}$ হতে হবে

অর্থাৎ $\frac{1}{2}A > 60°$ হবে

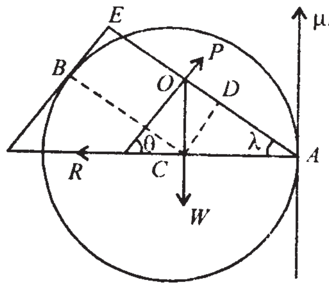
অর্থাৎ $A>120°$ হবে।

অতএব ত্রিভুজপাতটির কোনও কৌণিক বিন্দু A সাপেক্ষে ঘূর্ণন সম্ভব যদি A কোণ $120°$ হতে বেশী হয় এবং সে ক্ষেত্রে সর্বনিম্ন প্রয়োজনীয় দ্বন্দ্ব হল $\frac{1}{3}\mu W(AB + AC)$।

7. একটি W ভারের গোলককে একটি অমসৃণ উল্লম্ব তলের উপর সাম্যাবস্থায় রাখিতে দেখান যে সর্বাপেক্ষা কম বল $W\text{cso}\lambda$ উহার উপর প্রয়োগ করতে হবে, যেখানে ঘর্ষণ কোণ λ-এর মান $\cos^{-1}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ অপেক্ষা কম।

সমাধান ঃ নিম্নের চিত্রটি একটি a ব্যাসার্দ্ধের গোলকের, উহার কেন্দ্র C বিন্দুগামী উল্লম্ব তল দ্বারা ছেদের চিত্র।

ধরা যাক P মানের একটি বল ঐ গোলকটির উপর প্রয়োগকালে উহা গমনোম্মুখ হয়, অর্থাৎ সেমতাবস্থায় সীমাস্থ ঘর্ষণ বল, উল্লম্ব কালের সহিত স্পর্শবিন্দু A-তে উপরের দিকে ক্রিয়া করবে।



12 নং চিত্র

ধরা যাক A বিন্দুতে অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া R ও সীমাস্থ তলে ঘর্ষণ μR-এর লব্ধি AD দিক বরাবর ক্রিয়া করে, যেখানে $\angle CAD = \lambda$। গোলকের কেন্দ্র C বিন্দুগামী উল্লম্বরেখা AD-কে O বিন্দুতে ছেদ করলে P বল অবশ্যই O বিন্দুগামী হবে। মনে করি P বলটি AC-এর সহিত θ কোণে নত। অনুভূমিক ও উল্লম্ব দিকে বলগুলিকে বিশ্লেষিত করলে, আমরা পাই,

$$P\cos\theta = R,\ P\sin\theta + \mu R = W \text{ যেখানে, } \mu = \tan\lambda$$

$$\therefore W = P\sin\theta + \mu P\cos\theta = \frac{P\sin(\theta+\lambda)}{\cos\lambda}$$

বা, $$P = \frac{W\cos\lambda}{\sin(\theta+\lambda)}$$

এক্ষনে P-কে সর্বনিম্ন হতে হলে $\sin(\theta + \lambda)$ কে সর্বাপেক্ষা বেশী হতে হবে, অর্থাৎ

$$\sin(\theta + \lambda) = 1$$

বা, $\theta = 90^\circ - \lambda$

$\therefore$ P-এর সর্বনিম্ন মান $W\cos\lambda$, যখন P-এর ক্রিয়া রেখা AD-এর উপর লম্ব। আবার যেহেতু P বলের ক্রিয়া বিন্দু সর্বদাই গোলকের উপর অবস্থিত, উহার বাইরে নহে, অতএব উহার ক্রিয়া রেখার কেন্দ্র C হতে দূরত্ব অবশ্যই ব্যাসার্দ্ধ a অপেক্ষা কম হবে।

অর্থাৎ $AO < AE$ হবে

যেখানে E বিন্দুটি হল, P বলের ক্রিয়া রেখার সমান্তরাল স্পর্শকের সহিত AO সরলরেখা ছেদবিন্দু।

এখন, $AO = a\sec\lambda,\ AE = AD + DE = a\cos\lambda + a$

$\therefore\ a\sec\lambda < a\cos\lambda + a$, বা, $\cos^2\lambda + \cos\lambda > 1$

বা, $\left(\cos\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{5}{4}$, বা $\cos\lambda > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

বা, $\lambda < \cos^{-1}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

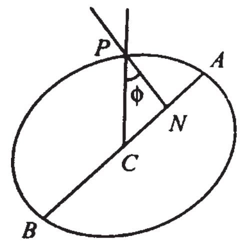
8. একটি উপবৃত্তাকার ভারী তারকে যাহার পরাক্ষ ও উপাক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ ও $2b$, একটি ছোট অমসৃণ হুকে ঝোলানো আছে। দেখান যে তারটিকে যে-কোনো বিন্দুতেই হুকের উপর সাম্যাবস্থায় রাখা যাবে যদি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক $\frac{a^2-b^2}{2ab}$ অপেক্ষা কম না হয়।

সমাধান ঃ ধরা যাক C বিন্দুটি উপবৃত্তের কেন্দ্র ; BCA হল উপবৃত্তটির পরাক্ষ এবং P বিন্দুটি তারটির সাম্যাবস্থার হুকের অবস্থান।

মনে করি উল্লম্ব রেখা CP, P বিন্দুতে অভিলম্ব PN-এর সহিত ϕ কোণে নত।

$\therefore\ \phi \le \lambda$ যেখানে λ হল ঘর্ষণ কোণ।

ধরা যাক P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$



13 নং চিত্র

CP সরলরেখার প্রবণতা $= \frac{b\sin\theta}{a\cos\theta} = \frac{b}{a}\tan\theta$

অভিলম্ব PN-এর প্রবণতা $= \dfrac{\frac{2(b\sin\theta)}{b^2}}{\frac{2(a\cos\theta)}{a^2}} = \frac{a}{b}\tan\theta$

$$\therefore \tan\phi = \frac{\frac{a}{b}\tan\theta - \frac{b}{a}\tan\theta}{1+\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{a}\tan^2\theta} = \frac{(a^2-b^2)\tan\theta}{ab\sec^2\theta}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{2ab} \sin 2\theta$$

$$\therefore \frac{a^2 - b^2}{2ab} \sin 2\theta = \tan\phi \le \tan\lambda \le \mu$$

$\therefore$ যে-কোনো বিন্দুতেই সাম্যাবস্থায় থাকতে হলে

$\mu \ge \frac{a^2 - b^2}{2ab} \sin 2\theta$, যেখানে $0 \le \theta \le \pi / 2$

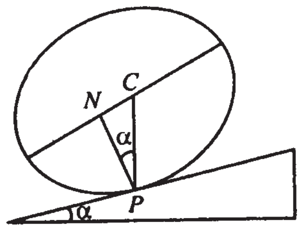
$\therefore$ যে-কোনো বিন্দুতেই তারটির হুকের উপর সাম্যাবস্থায় থাকবে যদি $\mu \ge \frac{a^2 - b^2}{2ab}$

9. অনুভূমিকের সহিত α-কোণে নত একটি অমসৃণ তলের উপর উপবৃত্তাকার ভারী তার রাখা আছে। দেখাও যে তারটি সাম্যাবস্থায় তলের উপর থাকবে যদি উহার উৎকেন্দ্রিকতা

$$\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

অপেক্ষা কম না হয়।

সমাধান ঃ ধরা যাক C বিন্দুটি উপবৃত্তের কেন্দ্র, যার পরাক্ষ ও উপাক্ষ $2a$ ও $2b$। মনে করি $P(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ বিন্দুটি হল সাম্যাবস্থায় উপবৃত্তের সহিত তলের স্পর্শবিন্দু।



14 নং চিত্র

অতএব PC সরলরেখা উল্লম্ব হবে।

যদি PN সরলরেখা P বিন্দুতে উপবৃত্তের অভিলম্ব এবং $\angle CPN = \alpha$ হয়, তবে

$\tan\angle CPN = \frac{a^2 - b^2}{2ab} \sin 2\theta$ [8 নং অঙ্ক হতে]

$$\therefore \tan\alpha = \frac{a^2 - b^2}{2ab} \sin 2\theta$$

$\therefore$ θ-এর বাস্তব মানের জন্য, $\dfrac{2ab\tan\alpha}{a^2-b^2}\le 1$

বা, $a^2 - b^2 \ge 2ab \tan\alpha$

$\therefore b^2 = a^2 (1 - e^2)$

$\therefore a^2e^2 \ge 2a^2\sqrt{1-e^2}\tan\alpha$

বা, $e^4 \ge 4(1- e^2)\tan^2\alpha$

বা, $(e^2 + 2\tan^2\alpha)^2 \ge 4\tan^2 \alpha(1 + \tan^2\alpha)$

বা, $e^2 + 2\tan^2\alpha \ge 2 \tan\alpha \sec\alpha$

বা, $e^2 \ge 2\tan\alpha(\sec\alpha - \tan\alpha)$

$$= \frac{2\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}$$

$$\therefore e^2 \ge \frac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$$

6.8 সারাংশ

যে-কোনো দুটি বস্তুর দুটি তল পারস্পরিক সংস্পর্শে এলে একে অন্যকে যে বল প্রয়োগ করে তাহা প্রতিক্রিয়া বল অভিহিত হয় এবং বল দুটি বিপরীত ও সমমানের। প্রতিক্রিয়া বল স্পর্শতলের অভিলম্ব দিকে হলে তল দুটিকে মসৃণ তল বলা হয়। আর বল দুটির প্রত্যেকটির যদি স্পর্শতলে কোনো অশূন্য বিশ্লেষিতাংশ থাকে, তাহলে তল দুটিকে অমসৃণ বা রুক্ষ তল বলা হয় এবং ঐ বিশ্লেষিতাংকে ঘর্ষণ বল (Frictional Force) বলা হয়।

ঘর্ষণ বলের $(\vec{F})$ ও অভিলম্ব দিকে প্রতিক্রিয়া বলের বিশ্লেষিতাংশের $(\vec{R})$ মধ্যে সম্পর্ক আছে। যদি স্পর্শতল দুটি বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে আপেক্ষিক গতি না থাকে, তাহলে $|\vec{F}| < \mu|\vec{R}|$, যেখানে μ একটি ধ্রুবক যার মান বস্তু দুটির পদার্থের উপর প্রধানতঃ নির্ভর করে। বস্তুদ্বয় যখন সীমাস্থ সাম্যে (Limiting Equilibrium) থাকে তখন $|F| = \mu|\vec{R}|$ হয়।

তল দুটির স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের আপেক্ষিক গতি থাকলে ঘর্ষণ বল সর্বদা $\mu|\vec{R}|$-এর সমান হয় এবং আপেক্ষিক গতির বিরুদ্ধে ক্রিয়া করে। যখন বস্তুদ্বয় সাম্যে থাকে এবং সীমাস্থ সাম্যে না থাকে তখন ঘর্ষণ বল ঠিক ততটুকু ক্রিয়া করে যতটুকু সাম্যের জন্য প্রয়োজন।

6.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. একটি সুষম ঘন গোলকার্ধ (যাহা ব্যাসার্ধ a ও ওজন W) অনুভূমিক তলের উপর রাখা হল যাতে গোলকার্ধের বক্রতল অনুভূমিক তলের সহিত সংস্পর্শে থাকে। W' ওজনের একটি অমসৃণ বস্তুকণা গোলকার্ধের সমতলের উপর স্থিরাবস্থায় আছে। দেখান যে কেন্দ্র হতে বস্তুকণার দূরত্ব $\dfrac{3a\mu W}{8W'}$ -এর বেশী নয়, যেখানে μ ঘর্ষণাঙ্ক।

2. একটি ভারী সুষম অমসৃণ বৃত্তাকার প্লেট (যার ওজন W ও ব্যাসার্ধ a) একটি অমসৃণ অনুভূমিক তলের উপর শায়িত আছে। AB ব্যাসের A প্রান্তকে স্থির করে ধরা আছে এবং অপর প্রান্ত Bতে আটকানো একটি দড়ির সাহায্যে P টান (pull) দেওয়া হচ্ছে। প্লেটকে A বিন্দুর সাপেক্ষে ঘুরাবার জন্য P-এর নিম্নতম মান কত?

3. ω ওজনের একটি সুষম মই একপ্রান্ত অমসৃণ অনুভূমিক তলে রেখে ও অপর প্রান্ত একটি মসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালে ঠেকে স্থিরাবস্থায় আছে। অনুভূমির সহিত মইয়ের নতি α। দেখান যে W ওজনের একটি লোক মইটির একেবারে ওপরে উঠলেও মইটি পিছলে সরে যাবে না যদি

$$\frac{\omega}{W} > \frac{2(1-\mu\tan\alpha)}{(2\mu\tan\alpha-1)}$$

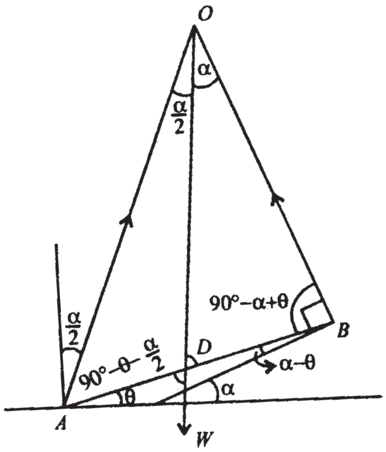
হয় যেখানে μ = ঘর্ষণাঙ্ক।

4. বৃত্তার্ধের আকারবিশিষ্ট এক সুষম তারকে উল্লম্ব তলে একটি অমসৃণ অনুভূমিক পেরেকের উপর ঝুলানো আছে। যখন পিছলানোর উপক্রম হয় তখন তারের প্রান্তদ্বয় সংযোজক সরলরেখা অনুভূমির সহিত 30° কোণ করে। ঘর্ষণ কোণ নির্ণয় করো।

5. W ওজনের একটি সুষম ঘনগোলকার্ধ তার বক্রতলকে একটি অমসৃণ নততলের উপর রেখে সীমাস্থ সাম্যে আছে। একটি ওজন P গোলকার্ধের সমতলের পরিধিতে আটকিয়ে ঐ সমতলকে অনুভূমিক রাখা হয়েছে। দেখান যে ঘর্ষণাঙ্ক হল

$$\frac{P}{\left[W(W+2P)\right]^{1/2}}$$

6. একটি ভারী সুষম দণ্ড AB-এর A রুক্ষ অনুভূমিক তলে এবং B প্রান্ত একটি আনত মসৃণ সমতলে সাম্যে আছে। যদি α = মসৃণ সমতলের নতি হয়, $\frac{\alpha}{2}$ = রুক্ষ তলের ঘর্ষণ কোণ হয়, দেখাও যে সীমাস্থ সাম্যে দণ্ডটি অনুভূমির সহিত $\tan^{-1}\left(\cot\frac{\alpha}{2}\,\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}-1}{2\cos\frac{\alpha}{2}+1}\right)$



15 নং চিত্র

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{a}=\frac{\sin\left(90^\circ-\theta-\frac{\alpha}{2}\right)}{OD}=\frac{\cos\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right)}{OD}=\frac{\sin(90^\circ+\theta)}{OA}=\frac{\cos\theta}{OA}$$

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\cos\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)}{OD}=\frac{\cos\theta}{OB}$$

$$OD=\frac{a\cos\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}=\frac{a\cos\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha=0$$

$$\cos\theta\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\theta\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$-\cos\theta\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha+\sin\theta\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha=0$$

$$\cos\theta\left[\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\right]+\sin\theta\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\right)=0$$

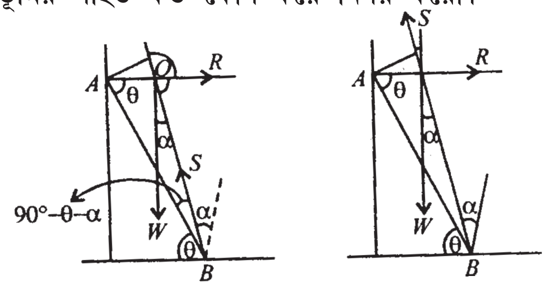
$$a\tan\theta=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha}{\sin\frac{d}{2}\frac{\alpha}{\left(\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}}=\frac{\sin\alpha\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-1\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)}$$

$$\boxed{\tan\theta=\cot\frac{\alpha}{2}\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}-1}{2\cos\frac{\alpha}{2}+1}}$$

7. একটি সুষম মই-এর এক প্রান্ত উল্লম্ব মসৃণ দেওয়ালে এবং অপর প্রান্ত রুক্ষ ভূমিতে অবস্থিত মই-এর দৈর্ঘ্য $= 2a$, ওজন $= W$, রুক্ষ সমতলের ঘর্ষণ কোণ α হলে মই-এর সীমাস্থ সাম্য অবস্থানে অনুভূমির সহিত কত কোণ করে নির্ণয় করো।



16 নং চিত্র

যেহেতু দণ্ডের উপর (i) W, (ii) দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া বল R, (iii) অনুভূমির মোট প্রতিক্রিয়া বল S সমবিন্দু O-তে। $\theta = AB$ অনুভূমিকের সঙ্গে কোণ করে।

$$\frac{W}{\sin(90^\circ+\alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{S}{1}$$

$$\frac{W}{\cos\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha} = S$$

A বিন্দু সাপেক্ষ ভ্রামক = 0

$Wa \cos\theta = S\ 2a \sin(90^\circ - \theta - \alpha)$

$$Wa\cos\theta = \frac{2Wa}{\cos\alpha}\cos(\theta+\alpha)$$

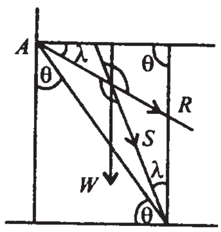
$\cos\theta \cos\alpha = 2\cos(\theta + \alpha)$

$\cos\theta \cos\alpha - 2\sin\theta \sin\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha - 2\tan\theta \sin\alpha = 0$

বা, $\tan\theta = \dfrac{\cos\alpha}{2\sin\alpha} = \dfrac{1}{2}\cot\alpha$

8. একটি সুষম মই-এর প্রান্ত একটি রুক্ষ উল্লম্ব তলের উপর আছে ও অপর প্রান্ত সমান রুক্ষ অনুভূমিক তলে আছে। যদি λ উভয় তলের ঘর্ষণ কোণ হয়, তাহলে মইটি সাম্যাবস্থায় উল্লম্ব তলের সঙ্গে কত কোণ করে?



17 নং চিত্র

$2a$ = মই-এর দৈর্ঘ্য, θ = মই ও উল্লম্ব রেখার মধ্যে কোণ

এখানে তিনটি বল

(i) ওজন বল W

(ii) অনুভূমিক প্রতিক্রিয়া বল S

(iii) উল্লম্ব তলের প্রতিক্রিয়া বল R

একটি বিন্দু O-তে ছেদ করে।

লামির উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\frac{W}{\sin(90^\circ + 2\lambda)} = \frac{R}{\sin\lambda} = \frac{S}{\sin(90^\circ - \lambda)}$$

$$\frac{W}{\cos 2\lambda} = \frac{R}{\sin\lambda} = \frac{S}{\cos\lambda} \qquad (1)$$

A সাপেক্ষে ভ্রামক নিলে

$$S.\ 2a\sin(\theta - \lambda) = Wa\sin\theta \qquad (2)$$

অতএব (1) ও (2) থেকে পাই $\dfrac{2\cos\lambda}{\cos 2\lambda}\sin(\theta - \lambda) = \sin\theta$

বা, $2\cos\lambda\ \sin(\theta - \lambda) = \cos 2\lambda\ \sin\theta$

$2\cos\lambda\ (\sin\theta\ \cos\lambda - \cos\theta\ \sin\lambda) = \sin\theta\ \cos 2\lambda$

বা, $\sin\theta\ (2\cos\lambda - \cos 2\lambda) = 2\cos\lambda\ \cos\theta\ \sin\lambda$

বা, $\tan\theta = \dfrac{\sin 2\lambda}{2\cos\lambda - \cos 2\lambda}$

একক 7 ❑ ভারকেন্দ্র (Centre of Gravity)

গঠন

7.1 প্রস্তাবনা

7.2 উদ্দেশ্য

7.3 ভারকেন্দ্রের সংজ্ঞা

7.4 বিভিন্ন বস্তুর ভারকেন্দ্র নির্ণয়ের সূত্র

7.5 মেরুস্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দেশিত ভারকেন্দ্র

7.6 একটি ত্রিমাত্রিক তলে বিস্তৃত বস্তুর ভারকেন্দ্র

7.7 একটি আবর্তনজাত তলবিশিষ্ট বস্তুর ভারকেন্দ্র

7.8 একটি সমতলাংশকে ঐ তলে অবস্থিত কোনও অক্ষের সাপেক্ষে সম্পূর্ণ আবর্তনজাত আয়তনের ভারকেন্দ্র

7.9 ভারকেন্দ্র নির্ণয় (বিভিন্ন বস্তুর)

7.10 পাপ্যাসের প্রতিজ্ঞার প্রয়োগ

7.11 উদাহরণ

7.12 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

7.13 সারাংশ

7.1 প্রস্তাবনা

পৃথিবীর তলোপরি অথবা তলের নিকটস্থ প্রতিটি বস্তুকণা নিউটনের মাধ্যাকর্ষণের নিয়ম অনুযায়ী পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে একটি বল দ্বারা আকৃষ্ট হয়। একটি বস্তুর বিভিন্ন কণার উপর এইরূপ বলগুলি মোটামুটি পরস্পর সমান্তরাল রেখায় ক্রিয়াশীল এটা ধরা যায়। অবশ্য এখানে বস্তুটির বিস্তার পৃথিবীর ব্যাসার্ধের অনুপাতে বেশ ছোট এটা ধরে নেওয়া প্রয়োজন। যদি তা না হয় তবে বলগুলির ক্রিয়ারেখা পরস্পর সমান্তরাল হবে না।

আমরা সমান্তরাল বল শীর্ষক এককে দেখেছি যে, কতগুলি সমমুখী সমান্তরাল বল একটি দৃঢ় বস্তুর

কতগুলি বিন্দুতে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি বল একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়। এই কেন্দ্রবিন্দু স্থির। একে বস্তুটির ভারকেন্দ্র বলা হয়।

বস্তুটির অবস্থানভেদে বস্তুকণাগুলির উপর প্রযুক্ত বলসমূহের দিক্ পরিবর্তন হলেও বলের মান অপরিবর্তিত ও সমান্তরাল থাকায় লব্ধি বলের প্রয়োগবিন্দুর অবস্থান বস্তুটির সাপেক্ষে একই থাকে। যেমন একটি বেলনাকার বস্তুর উপর প্রযুক্ত মাধ্যাকর্ষণী বলগুলির লব্ধি উহার অক্ষের মধ্যবিন্দু দিয়ে যায়, বেলনকে একটি অনুভূমিক তলে অথবা উল্লম্বভাবে যে ভাবেই রাখা হোক না কেন।

7.2 উদ্দেশ্য

এই এককে

- আপনারা ভারী বস্তুর ওজন বল কোথায় সর্বদা ক্রিয়া করে সেটা জানতে পারবেন।
- এই বল যে সর্বদা ঐ বস্তুর সাপেক্ষে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ক্রিয়া করে তা জানা যাবে।
- দেখবেন যে একটি সুষম দণ্ডের বেলায় ভারকেন্দ্র উহার মধ্যবিন্দুতে।
- বস্তুটি যদি সমান ঘনত্বযুক্ত হয় তবে বস্তুটির ভারকেন্দ্র ও ভরকেন্দ্র একই হয় সেটাও জানা যাবে।
- ভারকেন্দ্র যে সর্বদা বস্তুর একটি বিন্দু হবে তা নয়। যেমন একটি বৃত্তাকার সুষম তারের ভারকেন্দ্র তার কেন্দ্রে। কিন্তু কেন্দ্রের তারের কোনো বস্তু নাই। কিন্তু বৃত্তের কেন্দ্র তারের প্রতিটি বিন্দুর সাপেক্ষে একটি স্থির বিন্দু।
- বৃত্তাকার বস্তু, উপবৃত্তাকার বস্তু, উপবৃত্তক, গোলক, গোলকের তলদেশ ও অন্যান্য বহু বস্তুর ভারকেন্দ্র জানা যায়।

7.3 ভারকেন্দ্রের সংজ্ঞা

দৃঢ় বস্তুর ভারকেন্দ্রের সংজ্ঞা ঃ

একটি দৃঢ় বস্তুর কণাগুলির উপর প্রযুক্ত পৃথিবীর আকর্ষণী বলের লব্ধি বল সর্বদা ঐ বস্তুটির সাপেক্ষে যে নির্দিষ্ট বিন্দুতে ক্রিয়া করে তাকে ঐ বস্তুর ভারকেন্দ্র (Centre of Gravity) বলা হয়।

কোন প্রদত্ত বস্তুকণার সমাবেশের ভারকেন্দ্র—কতগুলি বস্তুকণার ভার জানা হলে এবং ওদের অবস্থান জানা হলে ঐ অবস্থানের সাপেক্ষে ঐ বস্তুকণাপুঞ্জের ভারকেন্দ্র নির্ণয় করা যেতে পারে।

যদি w_1, w_2 ..., w_n ভারবিশিষ্ট কতগুলি কণার অবস্থান ভেক্টর (কোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O-এর সাপেক্ষে) $A_1(\vec{r}_1), A_2(\vec{r}_2), \ldots, A_n(\vec{r}_n)$ হয় তাহা হলে ঐ সমাবেশের ভারকেন্দ্র হবে এমন একটি

বিন্দু যেখানে সমস্ত বস্তুকণাগুলির ভার বলের লব্ধি ক্রিয়া করে। সমমুখী সমান্তরাল বলসমূহের লব্ধির প্রয়োগবিন্দু হল G, যার স্থান ভেক্টর $\vec{r}_0$

$$\vec{r}_0 = \frac{w_1\vec{r}_1 + w_2\vec{r}_2 + \ldots + w_n\vec{r}_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n} \qquad (1)$$

এই বিন্দু $G(\vec{r}_0)$ হল ঐ বস্তু সমাবেশের প্রদত্ত অবস্থানের জন্য ভারকেন্দ্র।

বস্তুকণার সংখ্যা অসংখ্য হলে এবং ওরা একটি দৃঢ় বস্তু গঠন করলে (1)-এর স্থলে সমাকলন হবে অর্থাৎ বস্তুটির কতগুলি ছোট ছোট অংশে বিভক্ত করে ওদের সীমা নেওয়া হলে,

$$\vec{r}_0 = \frac{\underset{n\to\infty}{Lt}\sum_{i=1}^{n}(\Delta w_i)\vec{r}_i}{\underset{n\to\infty}{Lt}\sum_{i=1}^{n}(\Delta w_i)}$$

$$= \frac{\int_v \vec{r}\, dw}{\int dw} \qquad = \frac{\int_v \vec{r} dw}{W} \qquad (2)$$

যেখানে V হল বস্তুটির আয়তন এবং বস্তুর ভার হল W. এখানে dw হল dv আয়তনের বস্তুটির অংশের ভার।

$\therefore\ dw = \rho g dv$, যেখানে ρ = একক ঘনের ভর

g = পৃথিবীর মাধ্যাকর্ষণজাত ত্বরণ (পৃথিবী পৃষ্ঠে)

dv = ক্ষুদ্র আকার আয়তন

লম্ব কার্তিয় অক্ষ ব্যবহার করলে $dv = dxdydz$

আবার

$$W = \int_V dw = g\int_V \rho dv = gM$$ যেখানে M = বস্তুটির ভর।

অতএব (2) হতে পাই

$$\vec{r}_0 = \frac{\int \rho\vec{r} dv}{\int \rho dv} = \frac{\int_v \rho\vec{r} dv}{M} \qquad (3)$$

কার্তিয় অক্ষ সাপেক্ষে $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ হলে আমরা পাই

$$x_0 = \frac{\int_V \rho x dv}{\int_V \rho dv} = \frac{\iiint \rho x dx dy dz}{\iiint \rho dx dy dz}$$

$$y_0 = \frac{\int_V \rho y dv}{\int_V \rho dv} = \frac{\iiint \rho y dx dy dz}{\iiint \rho dx dy dz}$$

$$z_0 = \frac{\int_V \rho z dv}{\int_V \rho dv} = \frac{\iiint \rho z dx dy dz}{\iiint \rho dx dy dz} \tag{4}$$

এখানে সমাকলের সীমা এমনভাবে নিতে হবে যে সমগ্র বস্তুটির আয়তনের জন্য হয়।

মন্তব্য (1) ঃ উপরে (1) নং সূত্র দ্বারা কতগুলি বস্তুকণার ভারকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় করা যায়। যদি বস্তুকণাগুলির ভর যথাক্রমে m_1, m_2, ..., m_n হয় তাহলে যেহেতু $w_1 = m_1 g$, $w_2 = m_2 g$, ইত্যাদি অতএব ওদের ভারকেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর হবে

$$\vec{r}_0 = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \tag{5}$$

অতএব (5) নং-এর সূত্র হতে আমরা বলতে পারি যে, কতগুলি বস্তুকণার ভরকেন্দ্র ও ভারকেন্দ্র একই বিন্দু। এখানে অবশ্য মনে রাখতে হবে যে বস্তুকণাগুলির উপর পৃথিবীর মাধ্যাকর্ষণ বলগুলির ক্রিয়ারেখাগুলি সমান্তরাল।

মন্তব্য (2) ঃ (1) বা (5) হতে আমরা সহজেই দেখতে পাই যে বস্তুকণাগুলির অবস্থানের কোনো পরিবর্তন না হলে আমরা যে-কোনো আদি বিন্দু নিই না কেন ভারকেন্দ্রের অবস্থান অভিন্ন হবে। অর্থাৎ যদি O পূর্বের আদি বিন্দু O' নূতন আদি বিন্দু হয় এবং $\vec{r}_i' = i$-তম বস্তুকণার অবস্থান ভেক্টর O'-এর সাপেক্ষে হয় তা হলে $\vec{r}_i = \vec{r}_i' + o\vec{o}'$

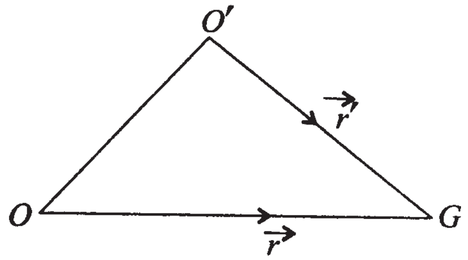
তাহলে ভারকেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর

$$\vec{r}' = \frac{w_1\vec{r}_i' + \ldots + w_n\vec{r}_n'}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

$$= \frac{w_1(\vec{r}_1 - o\vec{o}') + w_2(\vec{r}_2 - o\vec{o}') + \ldots + w_n(\vec{r}_n - o\vec{o})}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

$$= \frac{w_1\vec{r}_1 + \ldots + w_n\vec{r}_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n} - o\vec{o}'$$

$$= \vec{r} - o\vec{o}'$$



1 নং চিত্র

অর্থাৎ $\vec{r}' + o\vec{o}' = \vec{r}$

অতএব নূতন অবস্থান ভেক্টর একই বিন্দু G কে নির্দেশ করে। অর্থাৎ G বিন্দুটি অক্ষতন্ত্র নিরপেক্ষ।

মন্তব্য (3) ঃ (1) নং সূত্রকে আমরা নিম্নভাবে লিখতে পারি

$$\vec{r} = \frac{w_1\vec{r}_1 + w_2\vec{r}_2 + \ldots + w_k\vec{r}_k}{w_1 + w_2 + \ldots + w_k} \cdot \left(\frac{w_1 + w_2 + \ldots + w_k}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \right)$$

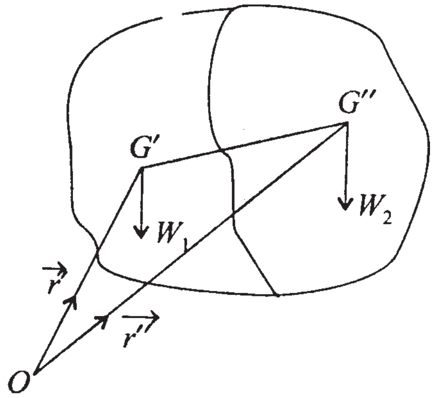
$$+ \frac{w_{k+1}\vec{r}_{k+1} + w_{k+2}\vec{r}_{k+2} + \ldots + w_n\vec{r}_n}{\sum_{i=k+1}^{n} w_i} \cdot \frac{\sum_{i=k+1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

$$= \vec{r}_i{}' \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \right) + \vec{r}_i{}'' \left(\frac{\sum_{i=k+1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \right) \qquad (6)$$

যেখানে $\vec{r}'$ ও $\vec{r}''$ যথাক্রমে 1, 2, ... , k-তম পর্যন্ত বস্তুকণাগুলির এবং $k+1$, $k+2$ ..n-তম বস্তুকণাগুলির ভারকেন্দ্র। অতএব (6) হতে আমরা বলতে পারি যে, দুটি বস্তুকণাগোষ্ঠির ভারকেন্দ্র জানা থাকলে আমরা ওদের সম্মিলিত বস্তুকণাগোষ্ঠীর ভারকেন্দ্র জানতে পারি। যদি কোন দৃঢ় বস্তুর দুটি অংশের ভার যথাক্রমে W_1 ও W_2 হয় এবং ওদের ভারকেন্দ্র যথাক্রমে $\vec{r}'$ ও $\vec{r}''$ দ্বারা নির্দেশিত হয়, তাহলে (5) নং সূত্র হতে আমরা সমগ্র দৃঢ় বস্তুটির ভারকেন্দ্রের জন্য নিম্নের সূত্রটি পাই

$$\vec{r} = \frac{W_1}{W_1+W_2}\vec{r}' + \frac{W_2}{W_1+W_2}\vec{r}''$$

$$= \frac{W_1\vec{r}' + W_2\vec{r}''}{W_1+W_2} \tag{7}$$



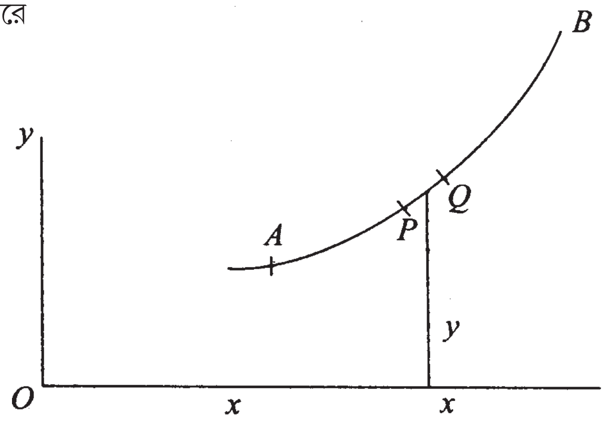
2 নং চিত্র

অর্থাৎ প্রথম অংশের ভার $\vec{r}'$ বিন্দুতে W_1 বল হিসেবে ক্রিয়া করে আবার দ্বিতীয় অংশের ভার $\vec{r}''$ বিন্দুতে W_2 বল হিসেবে ক্রিয়া করে। উহাদের সম্মিলিত ভার ঐ দুই বিন্দু সংযোগকারী রেখার উপর W_1 ও W_2 বলদ্বয়ের লব্ধির প্রয়োগবিন্দু হবে। (7) নং সূত্র তাই নির্দেশ করে।

7.4 বিভিন্ন বস্তুর ভারকেন্দ্র নির্ণয়ের সূত্র

1. প্রথম ক্ষেত্র—বস্তুটি যদি একটি রেখাকার হয়, সেই রেখাটি বক্র অথবা সরল হতে পারে। আবার রেখাটি একটি সমতলে অবস্থিত হতে পারে আবার নাও হতে পারে। যদি একই সমতলে অবস্থিত হয়, তাহলে ভারকেন্দ্র ঐ সমতলেই থাকবে। আমরা দুটি ক্ষেত্র আলাদাভাবে দিলাম ঃ

(a) সমতলীয় বক্রের ক্ষেত্রে ঃ **আয়তক্ষেত্রাকার অক্ষদ্বয় *Ox*, *Oy***-এর সপেক্ষে ভারকেন্দ্র $\bar{x}, \bar{y}$ হলে (3) নং সূত্র অনুসারে



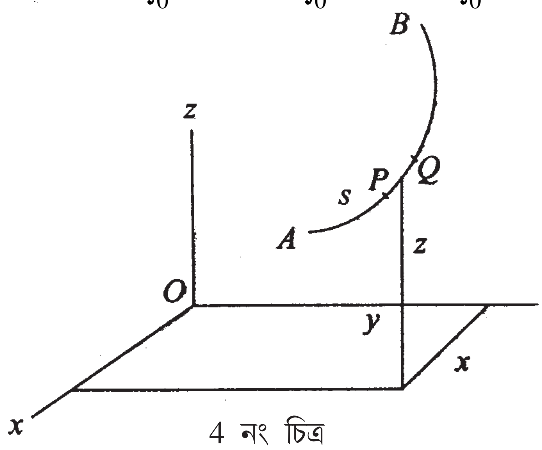
3 নং চিত্র

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 \rho x ds}{\int_0^1 \rho ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int_0^1 \rho x ds}{\int_0^1 \rho ds}$$

যেখানে ρ হল রৈখিক ভর মাত্রা, l হল বক্রটির দৈর্ঘ্য এবং A হতে যে-কোনো বিন্দু P অবধি দৈর্ঘ্য s ধরে ক্ষুদ্র অংশ PQ-এর দৈর্ঘ্য ds নেওয়া হয়েছে।

(b) অসমতলীয় বক্রের ক্ষেত্রে ভারকেন্দ্র হবে $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, যেখানে

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 \rho x ds}{\int_0^1 \rho ds}, \bar{y} = \frac{\int_0^1 \rho y ds}{\int_0^1 \rho ds}, \bar{z} = \frac{\int_0^1 \rho z ds}{\int_0^1 \rho ds}$$



4 নং চিত্র

2. দ্বিতীয় ক্ষেত্র—একটি সমতলীয় বস্তু (Plane lamina) ঃ ধরা যাক একই সমতলে একটি বস্তু রয়েছে। সমতলটিকে xy-সমতল নিয়ে আমরা উহার ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\bar{x}, \bar{y}, 0)$ পাই যেখানে

$$\bar{x} = \frac{\iint \rho x dx dy}{\iint \rho dx dy}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint \rho y dx dy}{\iint \rho dx dy}$$

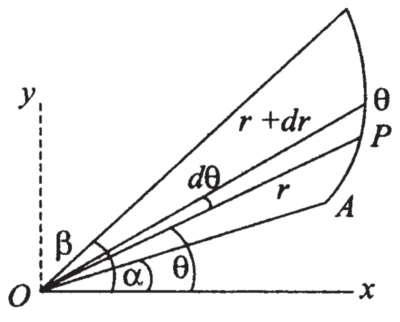
এখানে উল্লেখ করা যেতে পারে যে যদি ρ সর্বত্র সমমান বিশিষ্ট হয়, তা হলে উপরের সূত্র হতে আমরা দেখি যে

$$\bar{x} = \frac{\iint x dx dy}{\iint dx dy}, \bar{y} = \frac{\iint y dx dy}{\iint dx dy}$$

অর্থাৎ এইক্ষেত্রে বস্তুটির ভারকেন্দ্র বস্তুটির ক্ষেত্রকেন্দ্র (Centre of area)-এর সহিত অভিন্ন হয়।

7.5 মেরুস্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দেশিত ভারকেন্দ্র

যদি মেরুস্থানাঙ্ক (r, θ) ব্যবহার করা যায় তাহলে $r = f(\theta)$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$ একটি সমতলীয় বক্ররেখাকার বস্তুর সমীকরণ হয়,



5 নং চিত্র

তাহলে ভারকেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}_0$ হবে যেখানে

$$\vec{r}_0 = \frac{\int \vec{r}\rho ds}{\int \rho ds} = \frac{\int_\alpha^\beta \vec{r}\rho r d\theta}{\int_\alpha^\beta \rho r d\theta}$$

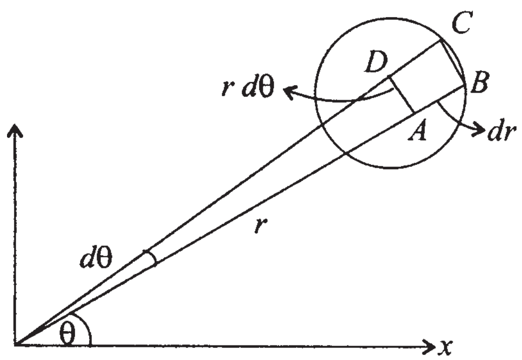
যেহেতু ক্ষুদ্রাকার PQ-এর ভর = ρds এবং উহার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$.

অতএব ভারকেন্দ্রের অবস্থান $(\bar{x}, \bar{y})$ হলে আমরা পাই

$$\bar{x} = \frac{\int_\alpha^\beta x\rho r d\theta}{\int_\alpha^\beta \rho r d\theta} = \frac{\int_\alpha^\beta \rho r^2 \cos\theta d\theta}{\int_\alpha^\beta \rho r d\theta}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_\alpha^\beta \rho r^2 \sin\theta d\theta}{\int_\alpha^\beta \rho r d\theta}$$

আবার একটি সমতল ক্ষেত্রাকার বস্তুর বেলায় একটি ক্ষুদ্রাকার $ABCD$ অংশের ক্ষেত্রফল $= rd\theta dr$, অতএব মেরুস্থানাঙ্ক ব্যবহার করলে আমরা ভারকেন্দ্রের আয়তক্ষেত্রাকার স্থানাঙ্ক $\bar{x}, \bar{y}$ নিম্নরূপে পাই



6 নং চিত্র

$$\bar{x} = \frac{\iint (r\cos\theta)\rho(rd\theta dr)}{\iint \rho r d\theta dr}, \bar{y} = \frac{\iint r\sin\theta\rho(rd\theta dr)}{\iint \rho r d\theta dr}$$

যেখানে সমাকলগুলিতে r ও θ-এর সীমা এমন নিতে হবে যে বস্তুটির সমস্ত ক্ষেত্রকে ব্যাপ্ত করে।

মন্তব্য ঃ কোনো সমতলীয় ক্ষেত্রফলের কেন্দ্রবিন্দু (Centroid of area) বের করার সূত্র ও যদি ক্ষেত্রটি কোন সমান তল-ঘনত্বযুক্ত বস্তু হয়, তাহলে সেই সমতলীয় বস্তুর ভারকেন্দ্র নির্ণয় করবার সূত্র একই হওয়ায়, এইসকল ক্ষেত্রে ভারকেন্দ্র ও ক্ষেত্রফলের কেন্দ্রবিন্দু একই হয়।

7.6 একটি ত্রিমাত্রিক তলে বিস্তৃত বস্তুর ভারকেন্দ্র

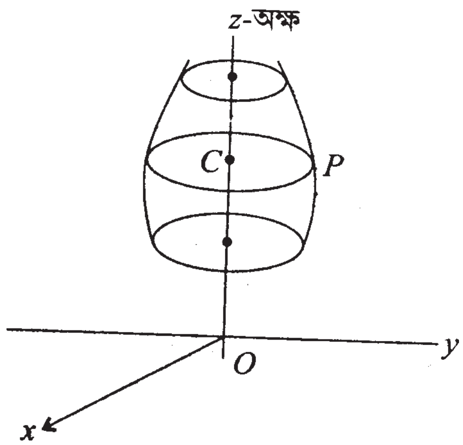
এখানে তলোপরি কোন বিন্দু P-এর চারদিকে একটি ক্ষুদ্র ক্ষেত্র $d\sigma$ নিলে, আমরা ভারকেন্দ্রের অবস্থান নিম্নভাবে লিখতে পারি, যেখানে ρ হল প্রতি একক ক্ষেত্রযুক্ত তলের ভর

$$\bar{x} = \frac{\int \rho x d\sigma}{\int \rho d\sigma}, \bar{y} = \frac{\int \rho y d\sigma}{\int \rho d\sigma}, \bar{z} = \frac{\int \rho z d\sigma}{\int \rho d\sigma}$$

এখানে সমাকলের সীমাগুলি এমন নিতে হবে যে, উহা সমগ্র তলটিকে ব্যাপ্ত করে।

7.7 একটি আবর্তনজাত তলবিশিষ্ট বস্তুর ভারকেন্দ্র

ধরা যাক একটি বস্তু একটি আবর্তনজাত তলবিশিষ্ট। আবর্তন অক্ষকে z-অক্ষ ধরলে, এবং বেলন-স্থানাঙ্ক ব্যবহার করলে আমরা তলটির সমীকরণ $z = f(r)$, এরূপে লিখতে পারি, যেখানে $r^2 = x^2 + y^2$ এবং



7 নং চিত্র

$z = f(x)$ এই সমতলীয় বক্রের আবর্তনের ফলে এই তল সৃষ্ট হয়। এখন P বিন্দু দিয়ে একটি বৃত্ত ঐ তলের উপর অঙ্কিত করলাম। এরপর আমরা সমগ্র তলটিকে কতগুলি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বৃত্তাকার অংশে বিভক্ত করতে পারি এবং প্রত্যেকটি বৃত্তাকার অংশের ভারকেন্দ্র ঐ তলে অবস্থিত z-অক্ষের উপর কেন্দ্রবিন্দু

C হবে। অতএব সমগ্র তলটির জন্য আমরা পাই যে ভারকেন্দ্র z-অক্ষের উপর একটি বিন্দু হবে যার z-স্থানাঙ্ক হবে $\bar{z}$ যেখানে

$$\bar{z} = \frac{\int z\rho 2\pi r ds}{\int \rho 2\pi r ds}$$

7.8 একটি সমতলাংশকে ঐ তলে অবস্থিত কোনো অক্ষের সাপেক্ষে সম্পূর্ণ আবর্তনজাত আয়তনের ভারকেন্দ্র

ধরাযাক xy-তলে অবস্থিত কোনো সমতলীয় অংশের ক্ষেত্রকেন্দ্র হল $(\bar{x}, \bar{y})$। এখন ক্ষেত্রটিকে y-অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরালে যে আয়তন সৃষ্ট হয় তার ভারকেন্দ্র (এখানে ঘনত্ব সর্বত্র সমান ধরা হয়েছে) y-অক্ষের উপর থাকবে $(0, y_0)$। ঐ ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হল

$$y_0 = \frac{\iint \rho y dxdy\, 2\pi x}{\iint \rho dxdy\, 2\pi x}$$

যেখানে সমাকলের সীমাগুলি প্রদত্ত ক্ষেত্রের উপর বিস্তৃত হবে। অতএব

$$y_0 = \frac{\iint xydxdy}{\iint xdxdy}$$

আবর্তনজাত আয়তন

$$= \iint 2\pi\, xdxdy$$

$$= 2\pi \iint xdxdy$$

$$= 2\pi\, A\bar{x}$$

যেখানে সমতলীয় অংশটির ক্ষেত্রফল হল A.

7.8.1 α-কোণ ঘূর্ণনজাত আয়তনের ভারকেন্দ্র

যদি আয়তনটি সমতলীয় অংশটির y-অক্ষ সাপেক্ষে α-কোণ ঘূর্ণন ফলে জাত হয় তাহলে আবর্তনজাত আয়তন

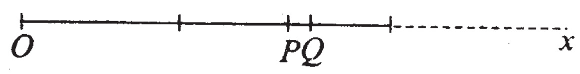
$$= \iint \alpha xdxdy = \alpha A\bar{x}$$

অতএব দেখা গেল যে, কোনো সমতলীয় অংশের আবর্তনজাত আয়তন ঐ অংশের ক্ষেত্রফল A ও উহার ভারকেন্দ্রের আবর্তনজাত পথের দৈর্ঘ্য $\alpha\bar{x}$ -এর গুণফলের সমান। উপরের এই ধর্মটি পাপ্যাস-এর প্রতিজ্ঞা (Pappus' theorem) বলে পরিচিত। আবার, কোনো সমতল ক্ষেত্র ঐ তলস্থিত কোনো অক্ষ সাপেক্ষে আবর্তনজনিত কোনো তল উৎপন্ন করলে ঐ সমতলের পরিধি-দৈর্ঘ্য ও পরিধির ভারকেন্দ্রের আবর্তনজনিত পথের দৈর্ঘের গুণফল ঐ আবর্তনজাত তলদেশের ক্ষেত্রফলের সমান হবে।

7.9 ভারকেন্দ্র নির্ণয় (বিভিন্ন বস্তুর)

1. একটি দণ্ড ঃ

একটি সরলরৈখিক সুষমভাবে বিস্তৃত ভরযুক্ত দণ্ড নেওয়া হল। উহার দৈর্ঘ্য $2a$ ধরা হল। Ox-অক্ষ এমনভাবে ধরলাম যে



এই দণ্ডটির দিকে বিস্তৃত। অর্থাৎ $O \le x \le 2a$ হল দণ্ডটির পরিসর। P বিন্দুতে দণ্ডের উপর যে-কোনো বিন্দু যার x-স্থানাঙ্ক x. দণ্ডটির PQ অংশের দৈর্ঘ্য $= dx$, অতএব দণ্ডটির PQ অংশের ভর $= \rho dx$, যেখানে ρ = প্রতি একক দৈর্ঘের ভর।

অতএব দণ্ডটির ভারকেন্দ্রের x-স্থানাঙ্ক $\bar{x}$ দ্বারা নির্দেশিত করলে

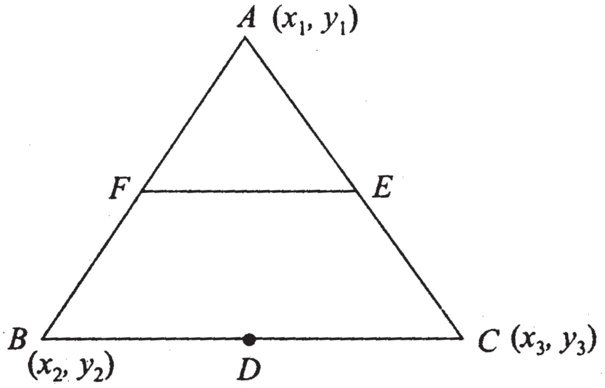
$$\bar{x} = \frac{\int_0^{2a} x\rho dx}{\int_0^{2a} \rho dx} = \frac{\rho\int_0^{2a} xdx}{\rho\int_0^{2a} dx}$$

$$= \frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2a}}{[x]_0^{2a}} = \frac{2a^2}{2a} = a$$

যেহেতু দণ্ডের প্রতিটি বিন্দুর y ও z-স্থানাঙ্ক শূন্য, অতএব ভারকেন্দ্রের y ও z স্থানাঙ্ক শূন্য। অতএব দণ্ডটির ভারকেন্দ্র হল ওর মধ্যবিন্দু।

2. তিনটি সমান একক দৈর্ঘ্য ভরযুক্ত ও a, b, c বাহু-দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র ঃ

BC, CA, AB দণ্ডত্রয়ের ভারকেন্দ্র যথাক্রমে ওদের মধ্যবিন্দু D, E ও F বিন্দুতে সমান্তরাল বল aw, bw, cw ক্রিয়া করে, যেখানে w = একক দৈর্ঘ্যের ওজন। ওদের কেন্দ্রবিন্দু হল $G\ (\bar{x}, \bar{y})$ বিন্দুতে যেখানে



8 নং চিত্র

$$\bar{x} = \frac{aw\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + bw\left(\frac{x_3 + x_1}{2}\right) + cw\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{aw + bw + cw}$$

$$= \frac{x_1(b+c) + x_2(c+a) + x_3(a+b)}{2(a+b+c)}$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3) - \frac{(ax_1 + bx_2 + cx_3)}{2(a+b+c)}$$

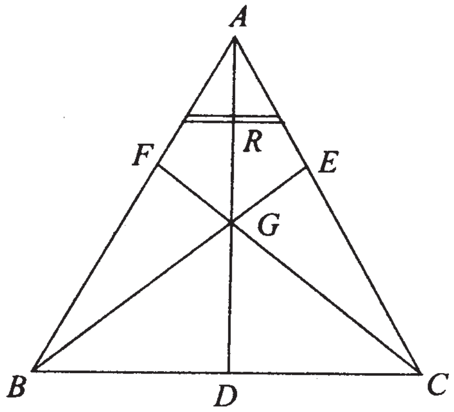
অনুরূপে

$$\bar{y} = \frac{y_1(b+c) + y_2(c+a) + y_3(a+b)}{2(a+b+c)}$$

3. একটি ত্রিভুজাকার সমতলাংশের ভারকেন্দ্র (Triangular lamina) ঃ

ABC ত্রিভুজকে BC বাহুর সমান্তরাল কতগুলি দণ্ডের সমষ্টি হিসাবে নিয়ে আমরা পাই যে, প্রতিটি দণ্ডের ভারকেন্দ্র AD মধ্যমার উপর আছে, ফলে ত্রিভুজটির ভারকেন্দ্র ত্রিভুজটির মধ্যমা

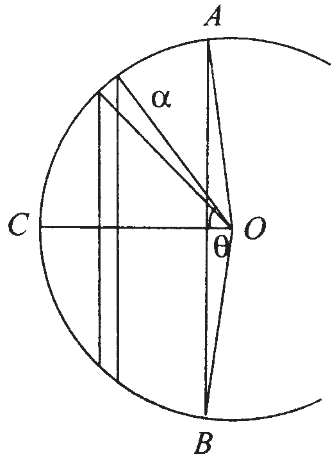
AD-এর উপর থাকবে। একইভাবে



9 নং চিত্র

ত্রিভুজটির ভারকেন্দ্র অন্য দুটি মধ্যমা BE ও CF-এর উপর থাকবে। অতএব ভারকেন্দ্রটি হল ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু G.

4. একটি বৃত্তখণ্ড (Segment of a circle) ঃ



10 নং চিত্র

O কেন্দ্রবিশিষ্ট AB জ্যা ও বৃত্তের পরিধির একটি অংশ ACB একটি বৃত্তখণ্ড কেন্দ্রে 2α কোণ উৎপন্ন করে। AB জ্যা দ্বারা সীমাবদ্ধ খণ্ডটির ভারকেন্দ্র প্রতিসাম্য কারণে OC ব্যাসার্দ্ধের (যা $\angle AOB$

কে সমদ্বিখণ্ডিত করে) উপর অবস্থিত। ক্ষেত্রটি AB জ্যা-এর সমান্তরাল জ্যাতে ভাগ করে ও OC-কে x-অক্ষ ধরে ভারকেন্দ্রের x-স্থানাঙ্ক $\bar{x}$ পাই

$$\bar{x} = \frac{\int_0^\alpha 2a\sin\theta.\, a\cos\theta.\, d(a\cos\theta)}{\int_0^\alpha 2a\sin\theta d(a\cos\theta)}$$

$$= a.\frac{\int_0^\alpha \sin^2\theta\cos\theta d\theta}{\int_0^\alpha \sin^2\theta d\theta}$$

$$= \frac{\frac{a\sin^3\alpha}{3}}{\frac{1}{2}\left[\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right]} = \frac{4a\sin^2\alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}$$

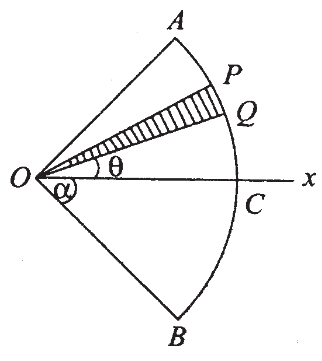
5. বৃত্তের একটি চাপের ভারকেন্দ্র (Arc of a circle) ঃ

10 নং চিত্রের ACB চাপের ভারকেন্দ্র G, OC-এর উপর অবস্থিত এবং চাপটিকে GC-এর দুই পাশে সমান সমান অংশে ভাগ করে পাই

$$OG = \frac{\int_0^\alpha \rho a d\theta.\, a\cos\theta}{\int_0^\alpha \rho a d\theta} = \frac{a.\sin\alpha}{\alpha}$$

6. বৃত্তাংশ *OAB* (Sector of a circle)-এর ভারকেন্দ্র ঃ

এখানেও ভারকেন্দ্র OC-এর উপর আছে এবং বৃত্তাংশটিকে কতগুলি ছোট ত্রিভুজাকৃতি (যেমন ΔOPQ) অংশে ভাগ করে আমরা পাই

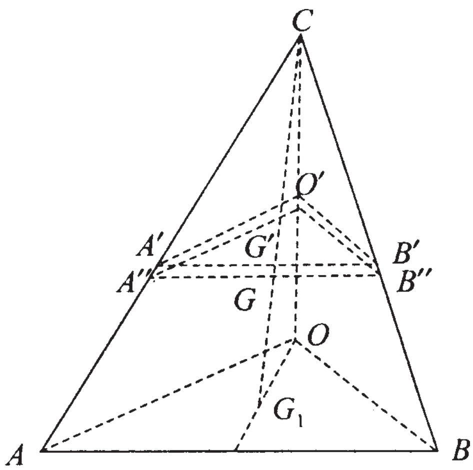


11 নং চিত্র

$$\bar{x} = \frac{\int_0^\alpha \rho \frac{2}{3} a \cos\theta . \frac{1}{2} a^2 d\theta}{\int_0^\alpha \rho \frac{1}{2} a^2 d\theta} = \frac{2}{3} a \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

7. চতুস্তলক (Tetrahedron)-এর ভারকেন্দ্র ঃ

ভূমি ΔOAB-এর সমান্তরাল $\Delta O'A'B'$ নেওয়া হল। $\Delta O'A'B'$ -এর ভারকেন্দ্র G' এবং



12 নং চিত্র

$$\frac{\Delta O'A'B'}{\Delta OAB} = \frac{(CG')^2}{(CG_1)^2}$$ যেখানে G_1 হল ΔOAB-এর ভারকেন্দ্র।

অতএব G যদি চতুস্তলকের ভারকেন্দ্র হয়, তবে G, CG_1-এর উপর থাকবে এবং

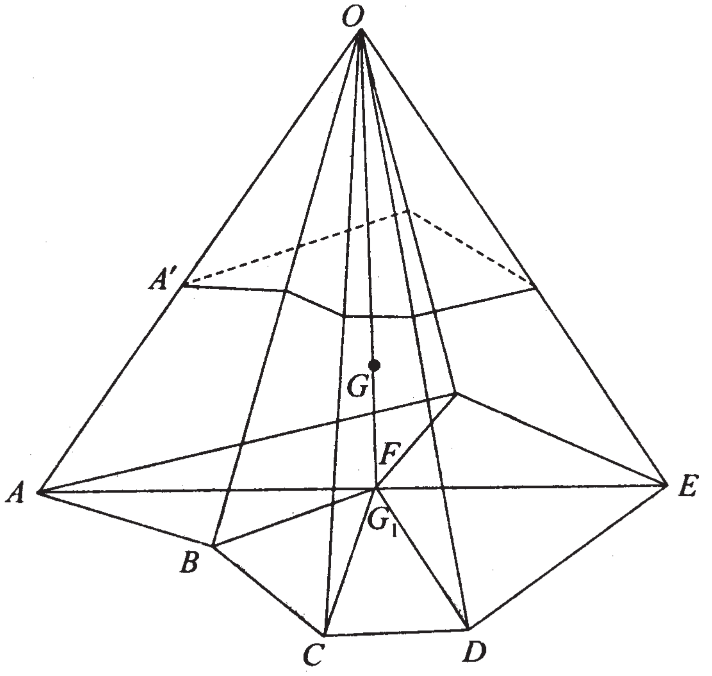
$$CG = \frac{\lim \sum \rho \Delta O'A'B'. CG'. G'G''}{\lim \sum \rho \Delta O'A'B'. G'G''}$$

অতএব আমরা পাই, যেখানে x-অক্ষ CG বরাবর

$$CG = \frac{\int_0^{CG_1} x^3 dx}{\int_0^{CG_1} x^2 dx} = \frac{3}{4} CG_1$$

অতএব চুতস্তলকের ভারকেন্দ্র G_1 ভূমির ভরকেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দু সংযোজক রেখার উপর এবং উহার ভূমি থেকে উচ্চতা হল চতুস্তলকটির উচ্চতার এক চতুর্থাংশ।

8. একটি পিরামিডের আকৃতিবিশিষ্ট বস্তুর ভারকেন্দ্র ঃ



13 নং চিত্র

ধরা যা, $OABCDE$F একটি পিরামিড (Pyramid)। ওর ভূমিতলের ভারকেন্দ্র হল G_1। একটি ভূমিতলের সমান্তরাল সমতল পিরামিডটিকে ছেদ করল। ছেদিতাংশের ভারকেন্দ্র OG_1-এর উপর থাকবে। পিরামিডটিকে কতগুলি চতুস্তলকে ভাগ করা যায়, যার প্রত্যেকটির ভারকেন্দ্র ভূমি হতে এক-চতুর্থাংশ উচ্চে আছে। অতএব সমস্ত পিরামিডের ভারকেন্দ্র G, OG_1-রেখার উপর এবং ভূমিতল হতে G-এর উচ্চতা $\frac{1}{4}h$, যেখানে h = পিরামিডের উচ্চতা।

9. একটি ঘন শঙ্কুর ভারকেন্দ্র ঃ

যেহেতু একটি ঘন শঙ্কুকে একটি পিরামিডের সীমাবস্থা হিসাবে দেখা যায় এতএব উহার শীর্ষবিন্দু C ও ভূমির ভারকেন্দ্র G_1 সংযোজক সরলরেখাটির উপর শঙ্কুর ভারকেন্দ্র বিন্দু G-তে অবস্থিত যেখানে

$$CG = \frac{1}{4} CG_1$$

একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুর বেলায় ভারকেন্দ্র শঙ্কুর অক্ষের উপর ভূমি থেকে $\frac{1}{4}h$ দূরে থাকবে, যেখানে h = শঙ্কুর উচ্চতা।

10. একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের ভারকেন্দ্র ঃ

$CD' = x$

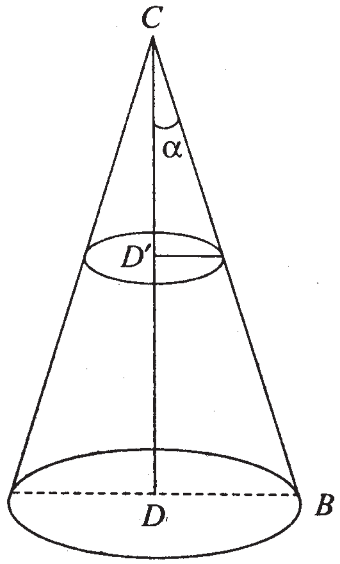
h = শঙ্কুর উচ্চতা

α = শঙ্কুর অধঃশীর্ষকোণ

স্পষ্টতঃ ভারকেন্দ্র লম্ব CD-এর উপর অবস্থি এবং উহা G হলে

$$CG = \frac{\int_0^h 2\pi x^2 \tan\alpha dx}{\int_0^h 2\pi x \tan\alpha dx}$$

$$= \frac{2h}{3}$$



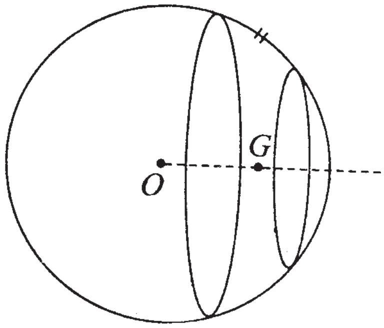
14 নং চিত্র

$$\therefore DG = \frac{h}{3} = \frac{1}{3} CD$$

11. দুটি সমান্তরাল তলদ্বারা খণ্ডিত একটি গোলকের অংশের ভারকেন্দ্র ঃ

ধরা যাক দুটি সমান্তরাল সমতল একটি গোলকের একটি অংশকে ছিন্ন করে যেখানে সমতল দুটি কেন্দ্র থেকে যথাক্রমে b ও c দূরে অবস্থিত এবং a গোলকের ব্যাসার্দ্ধ।

কেন্দ্র O থেকে সমতল দুইটির উপর লম্ব x-অক্ষ ধরে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব পাই



15 নং চিত্র

$$\bar{x} = \rho\int_b^c \pi(a^2 - x^2)x\,dx \,/\, \rho\int_b^c \pi(a^2 - x^2)\,dx$$

$$\bar{x} = \frac{a^2\left(\frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(c^4 - b^4\right)}{a^2(c-b) - \frac{1}{3}\left(c^3 - b^3\right)}$$

$$= \frac{\frac{a^2(c+b)}{2} - \frac{1}{4}\left(c^2 + b^2\right)(c+b)}{a^2 - \frac{1}{3}\left(c^2 + b^2 + cb\right)}$$

$$= 3.\frac{2a^2(c+b) - \left(c^2 + b^2\right)(c+b)}{4\left\{3a^2 - c^2 - b^2 - bc\right\}}$$

$$= \frac{3(c+b)}{4}\frac{2a^2 - c^2 - b^2}{3a^2 - c^2 - b^2 - bc}$$

(এখানে সমতল দুটি কেন্দ্রের একই ধারে অবস্থিত ধরা হয়েছে)

অর্ধগোলকের বেলায় $b = 0,\ c = a$ বসিয়ে পাই

$$\bar{x} = \frac{3a}{4}\frac{a^2}{2a^2} = \frac{3a}{8}$$

12. গোলকের তলের অংশের ভারকেন্দ্র ঃ

(যা দুটি সমান্তরাল দ্বারা ছিন্ন হয়েছে) এখানে তলটিকে একটি বৃত্তের অংশের আবর্তনজাত বলে ধরব। এখানে পূর্বের চিত্রের সাহায্যে আমরা ভারকেন্দ্র কেন্দ্র O হতে লম্ব x-অক্ষের উপর আছে বলতে পারি এবং

$$\bar{x} = \frac{\int_\alpha^\beta 2\pi(a\sin\theta)x\,ds}{\int_\alpha^\beta 2\pi a\sin\theta\,ds}$$

$$= a\frac{\int_\alpha^\beta \sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\int_\alpha^\beta \sin\theta\,d\theta}$$

$$= \frac{a(\sin^2\beta - \sin^2\alpha)}{2(\cos\alpha - \cos\beta)}$$

$$= \frac{a(\cos^2\alpha - \cos^2\beta)}{2(\cos\alpha - \cos\beta)}$$

$$= \frac{a(\cos\alpha + \cos\beta)}{2}$$

$$= \frac{b+c}{2}$$

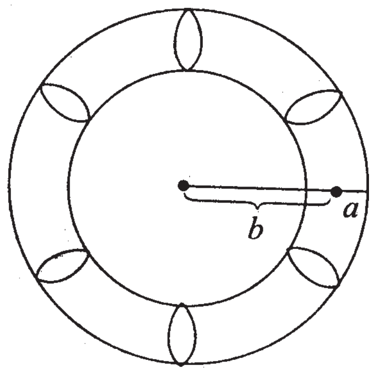
অতএব ভারকেন্দ্রটি সমতল দুটির দূরত্বকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

7.10 পাপ্যাসের প্রতিজ্ঞার প্রয়োগ

1. একটি বৃত্তকে তাহার বহিঃস্থ কোনো সরলরেখা (যাহা বৃত্তটির তলে অবস্থিত) সাপেক্ষে ঘুরালে যে তলদেশ হয় তাকে নোঙ্গার-রিং (Anchor-ring) বলা হয়।

$2\pi b.\ \pi a^2$ = আঙ্কর-রিং-এর আয়তন

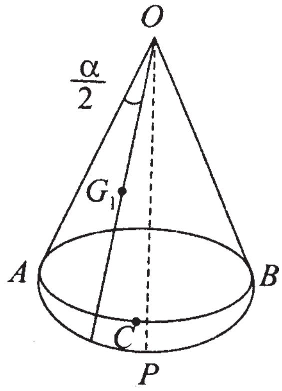
$2\pi b.\ 2\pi a$ = আঙ্কর-রিং-এর তলের ক্ষেত্রফল



16 নং চিত্র

2. একটি গোলকের তলদেশের উপর অঙ্কিত একটি বৃত্তের বিন্দুগুলির সঙ্গে গোলকের কেন্দ্র সংযুক্ত করলে যে গোলকাংশ (Sector) উৎপন্ন হয় তার আয়তন নির্ণয়।

O কেন্দ্র, *ABC* বৃত্তের দ্বারা সীমাবদ্ধ *APB* গোলকের তলাংশের উপর গোলকাংশটি অবস্থিত। স্পষ্টতঃ *OP* রেখাটি *ABC* তলের উপর লম্ব হইলে



17 নং চিত্র

OAP সমতলকে *OP*-কে অক্ষ নিয়ে ঘুরালে প্রদত্ত গোলকাংশ পাওয়া যায়। কিন্তু *OAP* একটি বৃত্তাংশ। অতএব উহার ভারকেন্দ্র উহার শীর্ষকোণ-সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত এবং উহার অবস্থান G_1 যেখানে

$$OG_1 = \frac{2}{3}a\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} a \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha}$$

অতএব OAP, OP-এর চারদিকে একবার ঘুরলে G_1 বিন্দুর গতিপথের দৈর্ঘ্য

$$= 2\pi OG_1 \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{2\pi \frac{4}{3} a \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha}$$

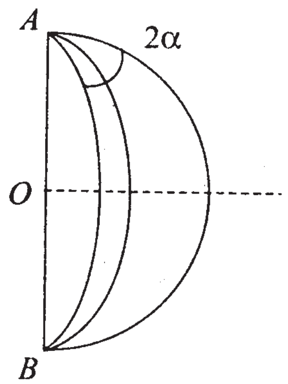
$\therefore$ গোলকাংশের আয়তন

$$= \frac{1}{2} a^2 \alpha . \frac{2\pi \frac{4}{3} a \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha}$$

$$= a^3 \frac{4\pi}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

7.11 উদাহরণ ঃ একটি গোলকের 2α কোণের একটি কলার তলের ভারকেন্দ্র ঃ

এই তলটিকে একটি অর্ধবৃত্তের তার সীমাস্থ ব্যাস-এর সাপেক্ষে ঘূর্ণনজাত ধরা যায়। প্রতিসাম্য থাকায় তলটির ভারকেন্দ্র ঐ কলার কোণটিকে সমদ্বিখণ্ডককারী সমতলে অবস্থিত হবে। কেন্দ্র O থেকে ঐ সমতলে AB-এর উপর লম্ব রেখাটিকে x-অক্ষ নিলে, প্রদত্ত কলার তলদেশের ভারকেন্দ্রের x-স্থানাঙ্ক $\bar{x}$ যেখানে



18 নং চিত্র

$$\bar{x} = \frac{\int_{\phi=-4}^{\alpha}\int_{\theta=0}^{\pi}\rho x\left(a^2 \sin\theta d\theta d\phi\right)}{\iint \rho a^2 \sin\theta d\theta d\phi}$$

$$= \frac{\int_{-4}^{\alpha}\int_{0}^{\pi}(a\sin\theta\cos\phi)a^2 \sin\theta d\theta d\phi}{a^2.2\alpha.2}$$

$$= \frac{a^3 2\sin\alpha.\frac{\pi}{2}}{4a^2\alpha}$$

$$= \frac{a\pi}{4}.\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

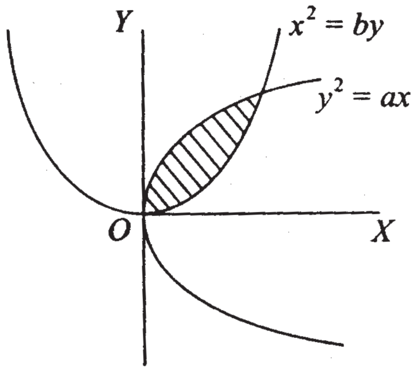
7.12 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. সমান ঘনত্বযুক্ত সমতলীয় ক্ষেত্র যা নিম্নের বক্ররেখাগুলির দ্বারা সীমাবদ্ধ তাদের ভারকেন্দ্র নির্ণয় করুন ঃ

(i) $y^2 = ax$ এবং $x^2 = by$

(ii) $y^2 = 4ax$, $y^2 = 4bx$, $x^2 = 4cy$ এবং $x^2 = 4dy$

সমাধান ঃ



19 নং চিত্র

(i) বক্রদুটির ছেদ বিন্দুদ্বয় হল $x = y = 0$ ও $x = b^{2/3}a^{1/3}$, $y = b^{1/3}\ a^{\ 2/3}$

অতএব দুটি অধিবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্রের x-স্থানাঙ্ক

$$\bar{x} = \frac{\iint \rho x dx dy}{\iint \rho dx dy}$$

$$= \frac{\int x dx [y]_{y_1}^{y_2}}{\int dx [y]_{y_1}^{y^2}}$$

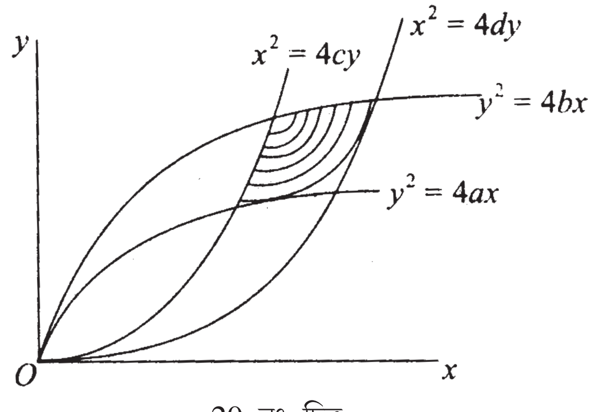
$$= \frac{\int_0^{b^{2/3}a^{1/3}} x\left[\sqrt{ax} - \frac{x^2}{b}\right] dx}{\int_0^{b^{2/3}a^{1/3}} \left[\sqrt{ax} - \frac{x^2}{b}\right] dx}$$

$$= \frac{9}{20} a^{1/3} b^{2/3}$$

অনুরূপভাবে $\bar{y} = \frac{9}{20} a^{2/3} b^{1/3}$

(ii) এখানে চিত্রটিতে একটি ক্ষেত্র পাওয়া যায়। ছায়াযুক্ত স্থানটির উপর সমাকল নিতে হবে, অতএব

$$\vec{x} = \frac{\iint x dx dy}{\iint dx dy}$$



20 নং চিত্র

এখন আমরা যদি $dxdy$ কে $dudv$-এর মাধ্যমে প্রকাশ করি, তাহলে $dxdy = |J| dudv$ যেখানে J হল x, y হতে u, v রূপান্তরের জ্যাকোবিয়ান, যেখানে আমরা u, v দুটি নূতন চলরাশি নিলাম।

$y^2 = 4ux,\ x^2 = 4vy$ এই রূপান্তরের মাধ্যমে।

অতএব $y^4 = 16u^2 x^2 = 16u^2\, 4vy$

অতএব $y = 0$ না হলে $y^3 = 64u^2 v$

অর্থাৎ $y = 4u^{2/3}\ v^{1/3}$

অনুরূপভাবে $x = 4u^{1/3}\ v^{2/3}$

অতএব জ্যাকোবিয়ান $$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{4}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \dfrac{8}{3}u^{1/3}v^{-1/3} \\ \dfrac{8}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \dfrac{4}{3}u^{2/3}v^{-1/3} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{16}{9} - \frac{64}{9} = -\frac{48}{9} = -\frac{16}{3}$$

অতএব

$$\bar{x} = \frac{\int_{v=c}^{d}\int_{u=a}^{b} 4u^{1/3}v^{2/3} - \dfrac{16}{3}\,dudv}{\int_{v=c}^{d}\int_{u=a}^{b} \dfrac{16}{3}\,dudv}$$

$$= \frac{9}{5}\frac{\left(b^{4/3} - a^{4/3}\right)\left(d^{5/3} - c^{5/3}\right)}{(b-a)(d-c)}$$

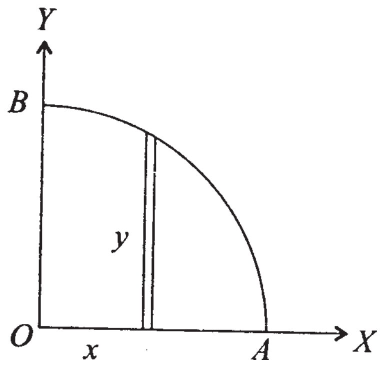
অনুরূপভাবে

$$\bar{y} = \frac{9}{5}\frac{\left(d^{4/3} - c^{4/3}\right)\left(b^{5/3} - a^{5/3}\right)}{(b-a)(d-c)}$$

2. উপবৃত্তের একটি পাদ *AOB*-এর আকৃতিবিশিষ্ট ফলক আছে যার বেধ যে-কোনো বিন্দুতে উহার ফলকটির সীমান্তে *OA* ও *OB* হতে দূরত্বদ্বয়ের গুণফলের সমানুপাতী। ফলকটির ভারকেন্দ্র নির্ণয় করতে হবে।

ফলকটির ঘনত্ব ... $= kxy$ নিলাম।

অতএব উপবৃত্তের একটি পাদের ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\bar{x}, \bar{y})$ হলে



21 নং চিত্র

$$\bar{x} = \frac{\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \rho g x dx dy}{\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \rho g dx dy}$$

$$= \frac{\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)x^2 dx}{\int_2^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)x dx} \quad = \frac{\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^5}{5a^2}\right)}{\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{4a^2}\right)}$$

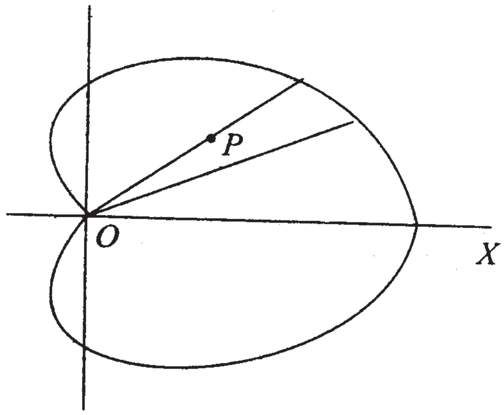
$$= \frac{\frac{2a}{15}}{\frac{1}{4}} \quad = \frac{8a}{15}$$

অনুরূপে $\bar{y} = \frac{8}{15}b.$

3. একটি কার্ডিওয়েড-এর আকৃতিবিশিষ্ট ক্ষেত্রে বস্তুনিচয়ের ঘনত্ব যদি কার্ডিওয়েড-এর কাস্‌প্‌ থেকে দূরত্বের n—ঘাতের সঙ্গে সমানুপাতী হয় তাহলে বস্তুনিচয়ের ভারকেন্দ্র নির্ণয় করতে হবে।

কার্ডিওয়েডের মেরু-স্থানাঙ্ক সমীকরণ হল

$$r = a\ (1+\ \cos\theta)$$



22 নং চিত্র

বস্তুটির ঘনত্ব = P/r^n = Kr^n যেখানে r হল কাস্‌প্‌ O থেকে বিন্দুটির দূরত্ব।

অতএব যেহেতু মেরু অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র ক্ষেত্রটি প্রতিসম, অতএব ভারকেন্দ্র মেরু অক্ষের উপর থাকবে। অতএব কার্তীয় অক্ষ অনুসারে ভারকেন্দ্র G-এর স্থানাঙ্ক $(\bar{x},0)$ যেখানে

$$\bar{x} = \frac{\iint \rho(rd\theta dr)r\cos\theta}{\iint \rho rd\theta dr}$$

$$= \frac{\int_{\theta=0}^{\pi}\cos\theta\int_{r=0}^{a(1+\cos\theta)} r^{2+n}drd\theta}{\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{a(1+\cos\theta)} r^{1+n}drd\theta}$$

$$= \frac{n+2}{n+3}\frac{\int_0^{\pi}a^{n+3}(1+\cos\theta)^{n+3}\cos\theta d\theta}{\int_0^{\pi}a^{n+2}(1+\cos\theta)^{n+2}d\theta}$$

$$= \frac{n+2}{n+3}a.\frac{\int_0^{\pi}2^{n+3}\cos^{2(n+3)}\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\theta}{2^{n+2}\int_0^{\pi}\cos^{2(n+2)}\frac{\theta}{2}d\theta}$$

$$= 2a\frac{n+2}{n+3}\cdot\frac{\int_0^{\pi/2}\left(\cos^{2n+8}\psi-\cos^{2n+6}\psi\sin^2\psi\right)d\psi}{\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+4}\psi\, d\psi}$$

$$= 2a\frac{n+2}{n+3}\cdot\left[\begin{array}{l}\Gamma\left(\frac{2n+9}{2}\right)\sqrt{\pi/2}\Big/\Gamma(n+5)\\ -\Gamma\left(\frac{2n+7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Big/2\Gamma(n+5)\end{array}\right]\Bigg/\left\{\Gamma\left(\frac{2n+5}{2}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big/\Gamma(n+3)\right\}$$

$$= 2a\frac{n+2}{n+3}\frac{\Gamma\left(\frac{2n+7}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+5)}\left(\frac{2n+7}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\Gamma(n+3)}{\Gamma\left(\frac{2n+5}{2}\right)\sqrt{\pi}}$$

$$= 2a\frac{n+2}{n+3}\cdot\frac{2n+5}{2(n+4)(n+3)}\cdot(n+3)$$

$$= a\frac{(n+2)(2n+5)}{(n+4)(n+3)}$$

4. $r = a\ (1+\cos\theta)$ এই বক্রটিকে উহার অক্ষ সাপেক্ষে ঘুরালে যে আবর্তনজাত তল হবে তার ভারকেন্দ্র নির্ণয় করুন।

ভারকেন্দ্রটি অক্ষ অর্থাৎ প্রাথমিক রেখার উপর থাকবে। যদি অক্ষটিকে x-অক্ষ ধরা যায় তাহলে ভারকেন্দ্রের x-স্থানাঙ্ক

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\pi}\rho 2\pi(r\sin\theta)ds\, r\cos\theta}{\int_0^{\pi}\rho 2\pi r\sin\theta ds}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi}r^2\sin\theta\cos\theta ds}{\int_0^{\pi}r\sin\theta ds}$$

কিন্তু $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = a\sqrt{2(1+\cos\theta)}d\theta = 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\pi} a^2 (1+\cos\theta)^2\, 2a\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta) 2a\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\, d\theta}$$

$$= 2a\frac{\int_0^{\pi}\cos^6\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\theta}{\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta}$$

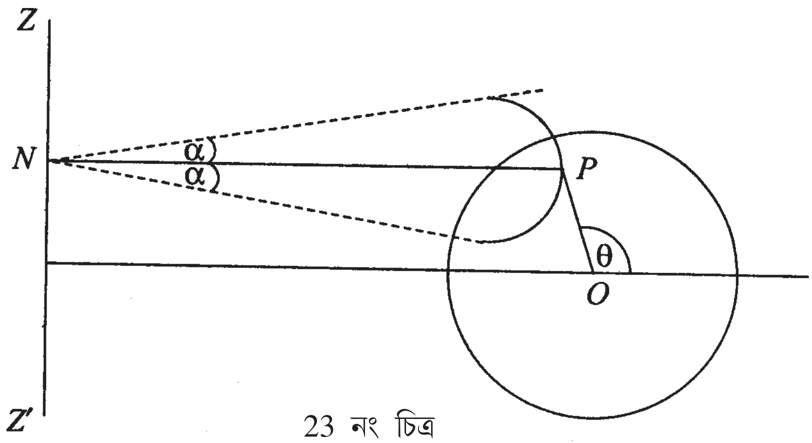
$$= 2a\frac{\int_0^{\pi}\cos^6\psi\sin\psi\left(\cos^2\psi-\sin^2\psi\right)d\psi}{\int_0^{\pi/2}\cos^4\psi\sin\psi\, d\psi}$$

$$= 2a\frac{\frac{\Gamma(9/2)\Gamma(1)}{2\Gamma(11/2)}-\frac{\Gamma(7/2)\Gamma(2)}{2\Gamma(11/2)}}{\frac{\Gamma(5/2)\Gamma(1)}{2\Gamma(7/2)}}$$

$$= 2a\frac{\Gamma(7/2)2\Gamma(7/2)}{2\Gamma(11/2)\Gamma(5/2)}\times(7/2-1)$$

$$= 2a\frac{5/2}{9/2.7/2}\cdot\frac{5}{2} = 2a.\frac{25}{63} = \frac{50}{63}a$$

5. একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের উহার তলের একটি সরলরেখার সাপেক্ষে ঘূর্ণনজাত একটি নোঙ্গররিং-এর অংশ বিশেষের ভারকেন্দ্র নির্ণয় করুন। বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্দ্ধ a, এবং কেন্দ্র হতে



23 নং চিত্র

সরলরেখার দূরত্ব $c(> a)$ এবং যদি তলটি 2. কোণে আবর্তিত হয়, দেখান যে উহার ভারকেন্দ্র ঐ সরলরেখা হতে $\frac{4c^2+a^2}{4c}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ এই দূরত্বে অবস্থিত।

zz' হল ঘূর্ণন অক্ষ এবং প্রতিটি বিন্দু একটি বৃত্তাকার পথ রচনা করে এবং $AO = c(> a)$। O কে মেরুবিন্দু ধরে P বিন্দুর মেরুস্থানাঙ্ক (r, θ) হলে P-এর মধ্য দিয়ে একটি ক্ষুদ্র ক্ষেত্র $rd\theta dr$ নিলে উহা ঘূর্ণনের ফলে আয়তন রচনা করে

2a. $PN \,.\, rd\theta dr = 2\alpha\ (c + r\cos\theta)\ rd\theta dr$

এবং ঐ আয়তনের ভারকেন্দ্র zz' হতে

$$PN\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

দূরত্বে এবং PN-এর উপর অবস্থিত। অতএব নোঙ্গাররিং-এর ভারকেন্দ্র ঐ 2α কোণের সমদ্বিখণ্ডক তলের উপর ও zz' উপর লম্ব OA-এর উপর থাকবে। OA কে x-অক্ষ ধরলে ভারকেন্দ্রের x-স্থানাঙ্ক

$$\bar{x}\,\frac{\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}2\alpha(c+r\cos\theta)rd\theta dr(c+r\cos\theta)\frac{\sin\alpha}{\alpha}}{\int_0^{2\pi}\int_0^{a}2\alpha(c+r\cos\theta)rd\theta dr}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{a}(c+r\cos\theta)^2 rd\theta dr}{\int_0^{2\pi}\int_0^{a}(c+r\cos\theta)rd\theta dr}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\int_0^{2\pi}\left(\frac{c^2a^2}{2}+\frac{2ca^3}{3}\cos\theta+\frac{a^4}{4}\cos^4\theta\right)d\theta}{\int_c^{2\pi}\left(\frac{ca^2}{2}+\frac{a^3}{3}\cos\theta\right)d\theta}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{4c^2+a^2}{4c}$$

6. একটি উপবৃত্তকের অষ্টমাংশের (তিনটি পরস্পর লম্ব এবং প্রধান তল দ্বারা আবদ্ধ) ভারকেন্দ্র নির্ণয় করুন যেখানে উপবৃত্তকের সমীকরণ হল

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

এবং উপবৃত্তকের যে-কোনো বিন্দু (x, y, z)-এ ভর-ঘনত্ব $kx^p y^q z^r$, (এখানে k, p, q, r ধ্রুবক)

সমাধান ঃ

প্রদত্ত অষ্টমাংশটি স্থানাঙ্ক তলত্রয় দ্বারা এবং উপবৃত্তকের তলের অংশ দ্বারা বেষ্টিত। অতএব ভারকেন্দ্র $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ হলে

$$\bar{x}=\frac{\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\int_0^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}\rho x\,dx\,dy\,dz}{\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\int_0^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}\rho\,dx\,dy\,dz}$$

$\rho=kx^p y^q z^r$ বসিয়ে এবং চলরাশি $\xi,\eta.\zeta$ ব্যবহার করে,

(যেখানে $\xi=\frac{x^2}{a^2},\eta=\frac{y^2}{b^2},\zeta=\frac{z^2}{c^2}$)

আমরা পাই

$$\bar{x}=\frac{\int_0^1\xi^{p/2}d\xi\int_0^{\sqrt{1-\xi^2}}\eta^{q/2-\frac{1}{2}}d\eta\int_0^{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}\zeta^{r/2-\frac{1}{2}}d\zeta}{\int_0^1\xi^{p/2-1/2}d\xi\int_0^{\sqrt{1-\xi^2}}\eta^{q/2-\frac{1}{2}}d\eta\int_0^{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}\zeta^{r/2-\frac{1}{2}}d\zeta}$$

ডিরিচ্লেট (*Dirichlet*)-এর সমাকল অনুসারে আমরা পাই

$$\bar{x}=a\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{p}{2}+1+\frac{q}{2}+\frac{1}{2}+\frac{r}{2}+\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{2}+\frac{q}{2}+\frac{1}{2}+\frac{r}{2}+\frac{1}{2}+1\right)}$$

$$=a\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p+q+r}{2}+\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q+r}{2}+3\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

যদি বস্তুটি সমঘনত্বযুক্ত হয়, তাহলে p = q = r = 0 হবে ; এবং সেক্ষেত্রে

$$\bar{x} = a\frac{\Gamma(1)\Gamma(5/2)}{\Gamma(3)\Gamma(1/2)} = a\frac{\Gamma(1).3/2.1/2\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2).2.1.\Gamma(1)}$$

$$= \frac{3a}{8}$$

অনুরূপভাবে $\bar{y} = \frac{3b}{8}, \bar{z} = \frac{3c}{8}$ হবে।

7. একটি বর্গক্ষেত্রাকার অংশ একটি বৃত্তাকার ফলক হতে একটি ব্যাসার্ধকে কর্ণ করে কেটে নেওয়া হল। দেখান যে অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র কেন্দ্র হতে $\frac{a}{8\pi - 4}$ দূরে অবস্থিত, যেখানে a হল বৃত্তটির ব্যাস।

8. একটি ত্রিভুজাকৃতি পাত ABC, যার C স্থূলকোণ। AC বাহু টেবিলের সংস্পর্শে আছে এবং ত্রিভুজটি দাঁড়িয়ে আছে। দেখান যে ত্রিভুজটি উল্টাবার জন্য B হতে ঝোলানো নিম্নতম ভার হল

$$\frac{1}{3}W\frac{a^2 + 3b^2 - c^2}{c^2 - a^2 - c^2}$$

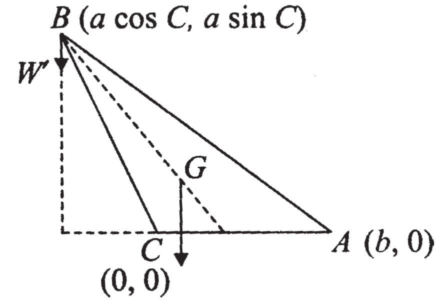
যেখানে W হল ত্রিভুজটির ওজন।

যদি $c^2 > a^2 + 3b^2$ হয়, তাহলে পরিস্থিতি ব্যাখ্যা করুন।

[**সংকেত** ঃ ত্রিভুজটির ওজন W বলের C-এর সাপেক্ষে ভ্রামক ও ঝোলানো ওজনের C-এর সাপেক্ষে ভ্রামকের পরস্পর বিপরীত ও সমান মান হলে ত্রিভুজটি ওল্টাবে। ভারকেন্দ্র G-এর স্থানাঙ্ক

$$\bar{x} = \frac{1}{3}(0 + b + a\cos C) = \frac{1}{3}(b + a\cos C)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{3}(0 + 0 + a\sin C) = \frac{1}{3}a\sin C$$



24 নং চিত্র

অতএব ওল্টাবার জন্য কমপক্ষে W' ঝোলানো দরকার যেখানে

$$-a\cos C.W' = W\frac{1}{3}(b + a\cos C)$$

$$\therefore W' = \frac{W}{3}.\frac{b+a\cos C}{-a\cos C} = \frac{W}{3}\left(-1-\frac{b.2ab}{a\left(a^2+b^2-c^2\right)}\right)$$

$$= \frac{W}{3}.\frac{a^2+3b^2-c^2}{c^2-a^2-b^2}$$

$a^2 + 3b^2 > c^2$ হলে, ভারকেন্দ্র $G(\bar{x}, \bar{y})$-এর

$$\bar{x} = \frac{1}{3}\left(b+\frac{a\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2ab}\right)-\frac{\left(3b^2+a^2-c^2\right)}{6b}$$

= ঋণাত্মক

অতএব এক্ষেত্রে ত্রিবুজটি নিজের ভারেই পড়ে যাবে।

9. ভূমিবৃত্তের ব্যাসার্ধের চতুর্গুণ উচ্চতাবিশিষ্ট একটি শঙ্কুকে উহার ভূমির পরিধির একটি বিন্দু হতে ঝোলানো হয়েছে। দেখান যে ওটি সাম্যাবস্থায় এমন ভাবে থাকবে যে উহার ভূমি ও অক্ষ উল্লম্ব রেখার সঙ্গো সমান কোণ করে অবস্থিত হবে।

10. একটি ঘন শঙ্কুর অবচ্ছিন্ন অংশকে একটি অমসৃণ নতিযুক্ত সমতলের উপর (শঙ্কুর ভূমিতল) বসানো হয়েছে। সমতলের নতি ধীরে ধীরে বাড়ালে দেখান যে শঙ্কুটি শেষপর্যন্ত উল্টাবে যদি ঘর্ষণাঙ্ক

$$\mu > \frac{4R}{h}.\frac{R^2+Rr+r^2}{R^2+2Rr+3r^2}$$

হয়।

7.13 সারাংশ

ভারকেন্দ্র শীর্ষক এই সপ্তম এককে বস্তুর ভারকেন্দ্র কাকে বলে সেখান থেকে শুরু করে বিভিন্ন আকারের বস্তুর ভারকেন্দ্র নির্ণয় করার গাণিতিক পদ্ধতি ব্যাখ্যা করা হয়েছে। বস্তুর উপর যে ওজন বল প্রযুক্ত হয় তার ক্রিয়ারেখা সর্বদা ঐ ভারকেন্দ্র দিয়ে যাবে। কোনো তলাকার বস্তুর ভারকেন্দ্রও নির্ণয় করা হয়। একটি সমতলীয় পাত যথা ত্রিভুজাকৃতি, বৃত্তাকৃতি বা বৃত্তের অংশ বিশেষ (যেমন বৃত্তাংশ, দুটি সমান্তরাল জ্যা দ্বারা বদ্ধ, বা পরিধির কোনো অংশ), উপবৃত্ত ইত্যাদি আকারের ভারকেন্দ্র নির্ণয় করা হয়েছে। কোনো সমতল বক্রকে যদি উহার তলস্থ কোনো অক্ষ সাপেক্ষে ঘোরানো হয়, তবে ঐ ভাবে জাত তলের

ভারকেন্দ্র নির্ণয়ের পদ্ধতি আলোচিত হয়েছে। কোনো সমতলীয় ক্ষেত্রকে ঐ ভাবে একই সমতলে অবস্থিত কোনো অক্ষ সাপেক্ষে ঘোরানো হলে যে আয়তন পাওয়া যায় তার আয়তন = প্রদত্ত সমতলীয় ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল × উহার ভারকেন্দ্র দ্বারা অঙ্কিত রেখার দৈর্ঘ্য। ইহা পাপ্যাসের উপপাদ্য। গোলক, গোলকের সমতল দ্বারা ছেদিত অংশ ইত্যাদি ভারকেন্দ্রও নির্ণয় করা হয়।

ভারকেন্দ্র

(i) সরল দণ্ড ঃ দণ্ডের মধ্যবিন্দু

(ii) আয়তক্ষেত্রাকার পাত ঃ কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু

(iii) ত্রিভুজাকার পাত ঃ মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু (AD একটি মধ্যমা হলে, $AG : GD = 2:1$) BC বাহু থেকে G-এর উচ্চতা $=\frac{1}{3}h$, যেখানে $h = A$ থেকে BC-এর উপর লম্ব

(iv) চতুস্তলক ঃ (শীর্ষবিন্দু ও ভূমির কেন্দ্রবিন্দুর সংযোজক রেখার উপর অবস্থিত এবং ভূমি হতে উচ্চতা $=\frac{1}{4}h$, যেখানে = h শীর্ষবিন্দুটির ভূমি থেকে উচ্চতা)

(v) পিরামিড (চতুস্তলকের মত)

(vi) ঘন শঙ্কু ঃ (চতুস্তলকের মত) ভূমি থেকে G-এর উচ্চতা $=\frac{1}{4}h$, যেখানে h = শঙ্কুর উচ্চতা

(vii) লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের ভারকেন্দ্র G অক্ষের উপর ভূমি থেকে $\frac{1}{3}h$ উচ্চতায় যেখানে h = শঙ্কুর উচ্চতা

(viii) বৃত্তাংশের ভারকেন্দ্র G, কোণ সমদ্বিখণ্ডক ব্যাসার্ধের উপর কেন্দ্র থেকে $\frac{2}{3}a\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ দূরে যেখানে 2α = বৃত্তাংশের কেন্দ্রস্থ কোণ

(ix) বৃত্তের একটি চাপ ঃ ভারকেন্দ্র G, কোণ সমদ্বিখণ্ডক ব্যাসার্ধের উপর এবং কেন্দ্র থেকে $\frac{a\sin\alpha}{\alpha}$ দূরে যেখানে 2α = চাপ কর্ত্তৃক কেন্দ্রে কোণ

(x) অর্ধবৃত্তের ভারকেন্দ্র G, যেখানে G থাকবে কেন্দ্র O থেকে প্রান্তিক ব্যাসের উপর লম্ব-ব্যাসার্ধের উপর এবং $OG = \frac{4a}{3\pi}$

(xi) অর্ধগোলক ঃ প্রান্তিক তলের উপর লম্ব-ব্যাসার্ধের উপর কেন্দ্র থেকে $\frac{3a}{8}$ দূরে

(xii) একটি ইলিপ্সয়েডের $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ প্রথম অষ্টমাংশ (oct*a*nt)-এর ভারকেন্দ্র $G(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ যেখানে $\bar{x}=\frac{3a}{8}, \bar{y}=\frac{3b}{8}, \bar{z}=\frac{3c}{8}$

একক 8 ☐ বীম, তার ও শৃঙ্খল (Beam, Wire and Chain)

গঠন

8.1 প্রস্তাবনা

8.2 উদ্দেশ্য

8.3 বীম (**Beam**) : উহার স্পার্শক পীড়ন, নমনাঙ্ক ইত্যাদি

8.3.1 বীমের স্পার্শক পীড়ন, নমন ভ্রামক ও তাহাদের মধ্যে সম্পর্ক

8.3.2 উদাহরণ

8.4 নমনীয় সূত্র ও শৃঙ্খলের সাম্য

8.4.1 বলাধীন একটি সূত্রের সাম্যাবস্থার সাধারণ সমীকরণ

8.4.2 সমতলীয় বলের অধীন সূত্রের সাম্যের সমীকরণ

8.4.3 সাধারণ ক্যাটেনারী (**Common Catenary**)

8.4.4 উদাহরণ

8.5 সমশক্তি ক্যাটেনারী

8.5.1 উদাহরণ

8.6 সারাংশ

8.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

8.1 প্রস্তাবনা

বীমের উপর বল ক্রিয়া করলে বীমের সাম্য নির্ণয় করার জন্য সাম্যাবস্থার সূত্রগুলি প্রয়োগ করে বীমের নমন ভ্রামক (Bending Moment) (অর্থাৎ বীমটি ভেঙ্গে পড়ার সম্ভাবনা আছে কিনা) দেখা যায়। এই নমন ভ্রামক আবার স্পার্শক বলের সঙ্গে সংযুক্ত। এই দুটির মধ্যে যোগাযোগ নির্ণয় করা একটি উদ্দেশ্য।

আবার সম্পূর্ণ নমনীয় সূত্র বা শৃঙ্খলের ক্ষেত্রে টান বল (Tension) বিশেষ উল্লেখযোগ্য বল। এই আভ্যন্তরীণ বল আবার নির্ভর করে সূত্রটির উপর বহির্বলের প্রকৃতির উপর। অভিকর্ষ বল যে-কোনো ভারী সূত্র বা শৃঙ্খলের উপর প্রযুক্ত হয়। একটি সুষম ভারী সূত্র যে সমতলীয় রেখায় ঝুলে তাকে ক্যাটেনারী (Catenary) বলা হয়। যেমন টেলিফোনের তার বা আগে দেখা যেত টেলিগ্রাফের তার। দেখা গেছে

যদি টান খুব বাড়ান যায় তবে এই সব তার একটি অধিবৃত্তাকারে ঝুলে—এটা গাণিতিক পদ্ধতিতে প্রমাণ হয়।

আবার অসম তারের বেলায় (যেমন টানের সঙ্গে সূত্রের ভর সমানুপাতী হলে) তারের চিত্রটি আলাদা হয়—তার নাম দেওয়া হয়েছে সমশক্তি ক্যাটেনারী (Catenary of Uniform Strength).

8.2 উদ্দেশ্য

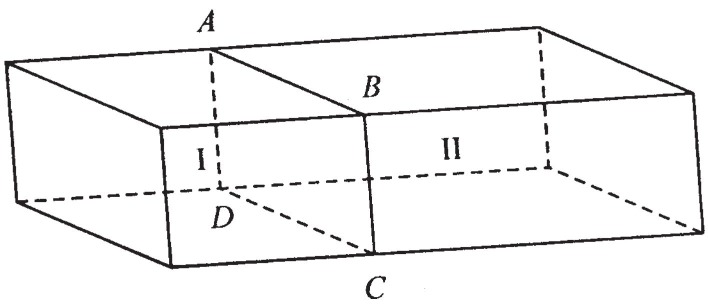
এই একক পাঠ করে আপনি

- একটি বীম (beam) বা দণ্ড (যার উপর কিছু বল প্রযুক্ত হয়েছে) কোথাও ভাঙ্গাবার সম্ভাবনা আছে কি না তা জানতে পারবেন
- একটি নমনীয় তার বা শৃঙ্খলের ক্ষেত্রে বিভিন্ন বিন্দুতে টান কিরূপ পরিবর্তিত হয় তা নির্ণয় করা হয়েছে
- দুটি পোষ্ট থেকে একটি ভারী তার ঝুলিয়ে দিলে তারটি কি রূপ নিয়ে ঝুলবে, সেটা জানা যাবে। দেখা যাবে যে সরলরেখায় কখনই থাকবে না
- দুটি প্রান্তে যদি প্রচণ্ড বল প্রযুক্ত হয়, তবে সূত্রটি একটি অধিবৃত্তাকারে ঝুলবে

8.3 বীম (Beam) : উহার স্পার্শক পীড়ন, নমনাঙ্ক ইত্যাদি

একটি কাঠের অথবা ইস্পাতের অথবা অন্য কোনও পদার্থের লম্বা একই প্রকার প্রস্থচ্ছেদযুক্ত সরল বীম (Straight Beam) নেওয়া যাক। বীমটির উপর বাহির হতে যে সকল বল প্রযুক্ত হয় সেগুলো বীমটির দৈর্ঘ্য সম্বলিত একটি সমতলে আছে ধরা হল।

এখন বীমটির যে-কোনোও একটি কাল্পনিক প্রস্থচ্ছেদ *ABCD*-এর সাপেক্ষে

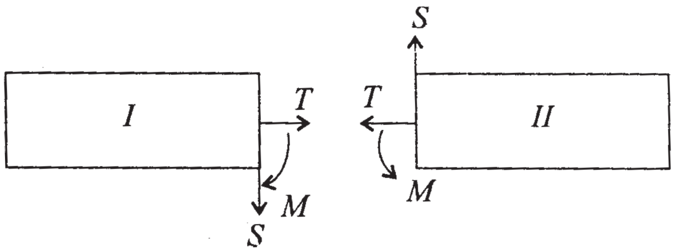


1 নং চিত্র

বীমটির দুটি অংশ ধরা যায় যথা (I) চিহ্নিত অংশ এবং (II) চিহ্নিত অংশ। এখন আমরা যদি উহাদের যে-কোনও একটি অংশ II-এর সাম্যের কথা বিবেচনা করি, তবে যে সমস্ত বল (II) উপর ক্রিয়া করে সেগুলি হল

(I) (II) অংশের বাইরের তলের উপর প্রযুক্ত বলসমূহ ঃ

(2) *ABCD* প্রস্থচ্ছেদের মধ্য দিয়ে (I) অংশের অণুগুলো কর্তৃক (II) অংশের উপর প্রযুক্ত বল। এই বলগুলো অভ্যন্তরস্থ বল বলা যায়। (এগুলো নিকটত্বজাত, মাধ্যাকর্ষণজাত নয়)।



2 নং চিত্র

উপরের বলগুলির মধ্যে (2) নং বলগুলিকে *ABCD* কেন্দ্রবিন্দুতে সমস্ত বলগুলির একীভূত ভেক্টর যোগজাত বল আর একটি দ্বন্দ্ব এই দুটির সমতুল হিসাবে দেখা যায়। এখন আমরা যেহেতু বহিঃস্থ বলগুলিকে একটি নির্দিষ্ট সমতলে আছে ধরেছি অতএব সাম্যের জন্য অন্তঃ বলগুলির লব্ধি ও ঐ সমতলেই একটি বল হবে এবং দ্বন্দ্বটির ভ্রামকের ভেক্টরের দিকও ঐ সমতলের লম্ব হবে। অতএব আমরা *ABCD* তলের মধ্য দিয়ে ক্রিয়াকরী বলসমূহকে নিম্নভাবে সংশ্লেষিত করতে পারি ঃ

(1) একটি বল যাহা *ABCD* তলের লম্ব এবং (II) হতে (I)-এর দিকে প্রযুক্ত। ইহাকে আমরা টান বা Tension বলব। অবশ্য ইহা ঋণাত্মক হলে উহার ক্রিয়ার দিক হবে (I) হতে (II)-এর দিকে এবং তখন একে চাপ (Thrust) বলা যায়।

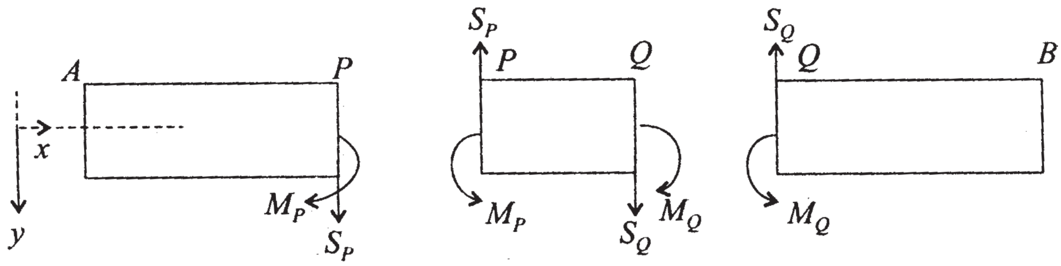
(2) একটি বল যাহার ক্রিয়াদিক *ABCD* তলকে স্পর্শ করে। ইহা যে সমতলে বলগুলি ক্রিয়া করে, সেই সমতলে স্পর্শকের দিকে হবে। ইহাকে আমরা স্পার্শক পীড়ন বা Shearing Stress S বলব।

(3) ইহা ছাড়া *ABCD* উপর ক্রিয়ারত অভ্যন্তরস্থ বলগোষ্ঠী একটি দ্বন্দ্ব উৎপন্ন করে, যাহার ভ্রামক ভেক্টর বলগুলির সমতলের লম্ব। এই দ্বন্দ্বকে নমন ভ্রামক বা নমনাঙ্ক (Bending Moment) বলা হয়।

2নং চিত্রে আমরা (II)-এর উপর (I) অংশ কর্তৃক প্রযুক্ত বল ও (II) কর্তৃক (I) অংশের উপর প্রযুক্ত বলগুলির পরস্পর বিপরীত ও সমান মানের, অতএব (I) ও (II)-এর উপর প্রযুক্ত বলগুলি একত্রে সাম্যাবস্থায় আছে।

8.3.1 বীমের স্পার্শক পীড়ন ও নমন ভ্রামক ও তাহাদের মধ্যে সম্পর্ক

একটি বীমের স্পার্শক পীড়ন ও নমন ভ্রামকই সাধারণতঃ প্রয়োজনীয়। টান বল সাধারণতঃ বীমের বেলায় বিশেষ অনুধাবনযোগ্য নয়।



3 নং চিত্র

AB এই বীমের বরাবর *x*-অক্ষ ধরা যাক। *AB* বীমের একটি অংশ *PQ*-এর উপর ক্রিয়ারত স্পার্শক পীড়ন S_P ও S_Q এবং নমন ভ্রামক M_P ও M_Q। বীম *AB*-এর উপর প্রযুক্ত বলগুলি বীমের দৈর্ঘ্যের উপর লম্বভাবে ক্রিয়াশীল। উপরে বল 3নং চিত্রে চিহ্ন সম্পর্কিত একটি নিয়ম অনুসরণ করা হবে। অর্থাৎ বীমের কোনও ছেদের উপর লম্ব যদি *x*-অক্ষের ধনাত্মক দিকে হয় তাহলে স্পার্শক পীড়ন নীচের দিকে ও নমন ভ্রামকের ঘূর্ণন দক্ষিণাবর্ত দিকে ধরা হবে। আর ঐ লম্ব যদি *x*-অক্ষের বিপরীত হয় সেক্ষেত্রে সেই ছেদের স্পার্শক পীড়ন উপর দিকে এবং নমন ভ্রামকের ঘূর্ণন বামাবর্ত উপর দিকে হবে।

এখন *PQ* অংশের উপর বহিঃপ্রযুক্ত বল অনুযায়ী পাই ঃ

(i) **প্রথম কল্প ঃ** *PQ* অংশের উপর কোন বহিঃ প্রযুক্ত বল (স্পার্শক বল ও নমন ভ্রামক দ্বন্দ্ব ব্যতিরেকে) নাই। অতএব সাম্যের জন্য *y*-এর দিকে বলসমূহের বিশ্লেষিতাংশকে শূন্য করিলে পাই

$$S_P = S_Q \qquad (1)$$

আর বলসমূহের *Q* বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামককে শূন্যমান করিয়া পাই

$$M_Q - M_P + S_p.PQ = 0$$

$$\therefore \frac{M_Q - M_P}{PQ} = -S_P$$

অতএব $PQ \to 0$ হলে

$$\frac{dM}{dx} = -S \qquad (2)$$

অতএব (1) ও (2) হতে পাওয়া যাচ্ছে যে স্পার্শক পীড়ন বল ধ্রুবক এবং $M = -Sx + C$ যেখানে C একটি ধ্রুবক।

(ii) **দ্বিতীয় কল্প ঃ** যখন PQ-এর উপর লম্বভাবে সুষমভাবে একটি ভার ক্রিয়া করে—যথাক্রমে y-দিকে বিশ্লেষিতাংশ নিয়ে ও Q-এর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই

$$S_Q - S_P + w.PQ = 0$$

$$\text{আর } M_Q - M_P + S_P\, PQ - \frac{1}{2}w.\ (PQ)^2 = 0$$

যেখানে w হল প্রতি একক দৈর্ঘ্যের উপর প্রযুক্ত ভার।

অতএব PQ-এর দৈর্ঘ্য শূন্যের দিকে গেলে অর্থাৎ $Q \to P$ হলে আমরা পাই

$$\frac{dS}{dx} = -w \tag{3}$$

$$\frac{dM}{dx} + S = 0 \tag{4}$$

(iii) **তৃতীয় কল্প ঃ** যখন PQ-এর উপর একটি কেন্দ্রীভূত ভার বল W, PQ-এর একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে। এখানে সাম্যের জন্য বলসমূহের y-দিকে বিশ্লেষিতাংশ শূন্য। অতএব

$$S_Q - S_P = -W \tag{5}$$

আবার Q বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক শূন্যের সহিত সমান।

অতএব

$$M_Q - M_P + S_P.PQ - W.\varepsilon PQ = 0 \tag{6}$$

যেখানে $0 < \varepsilon < 1$

অতএব (5) হইতে দেখা যায় যে কেন্দ্রীভূত বলের দরুণ ঐ বিন্দুতে স্পার্শক বলের একটি অসন্ততি আছে। যার (6) হইতে $PQ \to 0$ করিলে আমরা পাই

$$M_Q - M_P = 0$$

অতএব M_P-এর কোনও অসন্ততি নাই। আবার (6) কে PQ দ্বারা ভাগ করে এবং $Q \to P$ করে পাই $\dfrac{dM}{dx} + S = 0$ যেহেতু $\varepsilon \to 0$

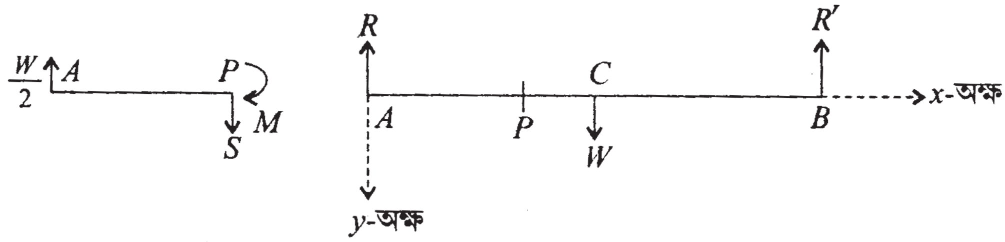
এখন যেহেতু SP বিন্দুতে অসন্তত, অতএব $\dfrac{dM}{dx}$-এরও ঐ বিন্দুতে অসন্ততি আছে।

8.3.2 উদাহরণ

1. একটি দণ্ড (বীম) AB অনুভূমিক অবস্থায় প্রান্তদ্বয়ে খুঁটির উপর আছে। দণ্ডের যে কোনও বিন্দু P-তে স্পার্শক পীড়ন ও নমন ভ্রামক নির্ণয় করুন যখন (ক) দণ্ডটি W ভারযুক্ত (খ) দণ্ডটির ভার নাই, কিন্তু সমওজনের W ভার দণ্ডটির মধ্য বিন্দুতে প্রযুক্ত।

সমাধান ঃ

(ক) মনে করি AB দণ্ডটির দৈর্ঘ্য $= 2l$



4 নং চিত্র

এক্ষেত্রে ধরা যাক দণ্ডটির উপর $\dfrac{W}{2l}$ পরিমাণ ভার সুষমভাবে ক্রিয়া করে।

যদি A ও B বিন্দুতে লম্ব প্রতিক্রিয়া যথাক্রমে R ও R' হয় তবে $R + R' = W$ এবং $R = R' = W/2$. দণ্ডটির AP অংশের উপর বলসমূহ হইল, P বিন্দুতে স্পার্শক পীড়ন S এবং নমনাঙ্ক M এবং AP-এর ওজন বল $\dfrac{W}{2l}.x$ যাহা AP-এর মধ্য বিন্দুতে ক্রিয়া করে। অতএব সাম্যের জন্য

$$\frac{W}{2} = S + \frac{Wx}{2l}$$

$$M - \frac{Wx}{2l}\cdot\frac{x}{2} + \frac{W}{2}x = 0$$

P-এর সাপেক্ষে ভ্রামক লইয়া পাই

$$S = \frac{W}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

এবং $M = \dfrac{Wx}{4l}(x - 2l) = -\dfrac{Wx}{4l}(2l - x) = -\dfrac{W}{4l}AP.BP$

(খ) যখন দণ্ডটির ভার নাই, শুধু মধ্য বিন্দুতে একটি বল W প্রযুক্ত।

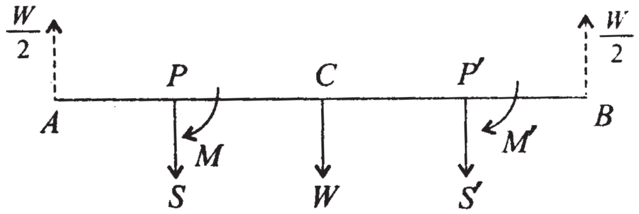
(i) AP অংশের সাম্যের জন্য (যখন $AP < l$)

$$S - \frac{W}{2} = 0$$

P -এর সাপেক্ষে ভ্রামক শূন্য

$$M + \frac{W}{2} . x = 0$$

$$\therefore \qquad S = \frac{W}{2}, M = -\frac{W}{2} x$$



5 নং চিত্র

(ii) যখন $AP' > l$, তখন AP অংশের সাম্য বিবেচনা করে এবং $AP' = x$ ধরে পাই

$$-\frac{W}{2} + W + S' = 0$$

এবং P'-এর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে

$$M' + \frac{W}{2} x - W(x - l) = 0$$

অতএব $S' = -\dfrac{W}{2}$

এবং $M' = -\dfrac{W}{2} x + W(x - l)$

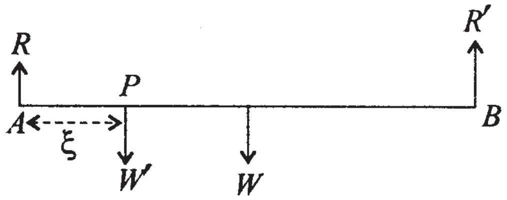
$$= \frac{W}{2} x - Wl = -W\left(l - \frac{x}{2}\right)$$

$$= -\frac{W}{2}(2l - x)$$

অতএব (খ) থেকে বলা যায় যে স্পার্শক পীড়ন S, AC ও CB অংশে সমান নয় এবং C বিন্দুতে S অসন্তত অর্থাৎ C-এর বাম দিক হইতে ডান দিকে গেলে S-এর মানের $-W$ পরিমাণ পরিবর্তন হয় যদিও M-এর কোনও অসন্ততি নাই।

2. $2l$ দৈর্ঘযুক্ত ও W ভার বিশিষ্ট একটি সুষম AB দণ্ডকে উহার দুই প্রান্তে খুটির সাহায্যে আনুভূমিক অবস্থায় আছে। W' ভার বিশিষ্ট এক ব্যক্তি দণ্ডটির উপর P বিন্দুতে দণ্ডায়মান, যেখানে $AP = \xi$ $(< l)$। দেখান যে দুটি অধিবৃত্তের সমীকরণ দ্বারা দণ্ডটির নমন ভ্রামক নির্ণীত হয় এবং অধিবৃত্তদ্বয়ের নাভিলম্বদ্বয় সমান।

সমাধান ঃ



6 নং চিত্র

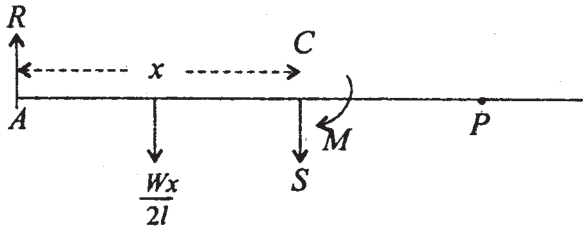
A ও B প্রান্ত বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া যথাক্রমে R ও R'। দণ্ডটির সাম্যাবস্থার জন্য A ও B বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক যোগফল শূন্য। অতএব

$$R'.2l - W'\xi - Wl = 0$$

এবং $$W'(2l - \xi) + W.l - R.2l = 0$$

অতএব $R'\dfrac{W}{2} + \dfrac{W'}{2l}\xi$ এবং $R = \dfrac{W}{2} + \dfrac{W'(2l - \xi)}{2l}$

(i) দণ্ডটির AC অংশে যেখানে $AC = x < \xi$ C-তে S স্পার্শক পীড়ন, ও M নমন ভ্রামক হলে AC-এর সাম্যের জন্য



7 নং চিত্র

$$R - S - \frac{Wx}{2l} = 0$$

এবং C-এর সাপেক্ষে ভ্রামক শূন্য। অতএব

$$-R.x - M + \frac{Wx}{2l} \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$\therefore \quad M = -Rx + \frac{Wx^2}{4l}$$

$$= -\left\{\frac{W}{2} + \frac{W'}{2l}(2l - \xi)\right\}x + \frac{Wx^2}{4l}$$

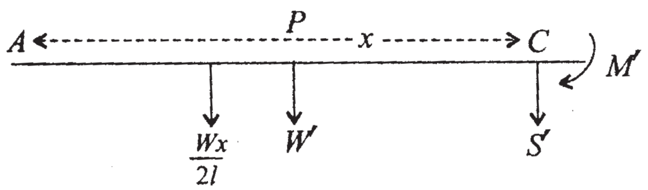
$$= \frac{Wx^2}{4l} - \frac{Wl + W'(2l - \xi)}{2l} . x \qquad (1)$$

যেখানে $0 \leq x \leq \xi$

অতএব M কে x-এর সাপেক্ষে চিত্রে অঙ্কিত করা হলে উহা একটি অধিবৃত্ত হবে যাহার নাভিলম্ব দৈর্ঘ $= \dfrac{4l}{W}$

(ii) এখানে $AC > \xi$ .C ও A-এর সাপেক্ষে ভ্রামক নিলে

$$Rx + M' - W'(x - \xi) - \frac{W}{2l} \cdot \frac{x^2}{2} = 0$$



8 নং চিত্র

$$M' = W(x - \xi) + \frac{Wx^2}{4l} - Rx \qquad \xi < x < l \qquad (2)$$

3. W ভার বিশিষ্ট এক ব্যক্তি l দৈর্ঘযুক্ত একটি সুষম দণ্ডের উপর চলছে এবং দণ্ডটি অনুভূমিক অবস্থায় দুই প্রান্তবিন্দুতে সাপোর্টের উপর আছে। ব্যক্তিটির পায়ের নিম্নের বিন্দুতে নমন ভ্রামক, প্রান্ত বিন্দু থেকে ঐ বিন্দুর দূরত্বের সাপেক্ষে, নির্ণয় করুন। ব্যক্তিটির সম্মুখের এবং পশ্চাৎ বিন্দুর জন্য স্পার্শক পীড়ন নির্ণয় করুন।

4. 12 kg ভার বিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ড $ABCD$ কে B ও D বিন্দুতে অনুভূমিক অবস্থায় সাপোর্টের উপর আছে। দণ্ডটির C বিন্দুতে অপর একটি 10 kg ভার প্রযুক্ত হলে এবং যদি $AB = BC = CD$ = 4 মিঃ হয়, তবে দণ্ডটির সমস্ত বিন্দুতে স্পার্শক পীড়ন ও নমন ভ্রামক নির্ণয় করুন।

5. W ভার ও $2a$ দৈর্ঘ বিশিষ্ট সুষম সরল AB দণ্ডকে অনুভূমিক অবস্থায় A ও B বিন্দুতে সাপোর্টের উপর আছে। দণ্ডটির C বিন্দুতে $\frac{2W}{3}$ ভার প্রযুক্ত হলে (যেখানে $AC = \frac{a}{2}$). দণ্ডটির যে কোন বিন্দুতে নমন ভ্রামক ও স্পার্শক পীড়ন নির্ণয় করুন।

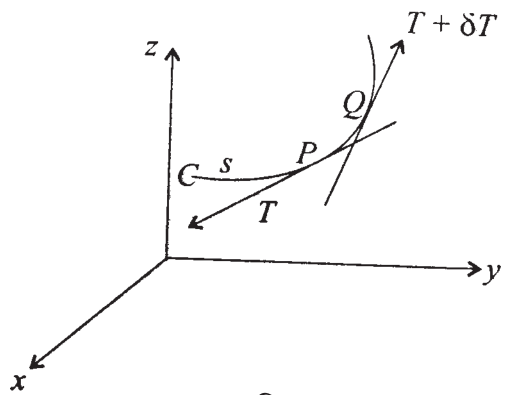
8.4 নমনীয় সূত্র ও শৃঙ্খলের সাম্য

একটি পরিপূর্ণ নমনীয় সূত্র (Perfectly Flexible String) এমন যে উহার লম্বচ্ছেদের মধ্য দিয়ে কেবলমাত্র একটি বল ক্রিয়াশীল হবে এবং এই বল সূত্রটির ঐ বিন্দুতে স্পর্শক দিকে প্রসারিত হবে।

ছোট ছোট অংশ যুক্ত করে তৈয়ারী শৃঙ্খল ও একটি নমনীয় সূত্রের মত হবে যদি ঐ অংশগুলির মধ্যে ঘর্ষণ বল না থাকে।

8.4.1 বলাধীন একটি সূত্রের সাম্যাবস্থায় সাধারণ সমীকরণ

সূত্রটির C বিন্দু থেকে সূত্র দৈর্ঘ মাপা হচ্ছে। ত্রিমাত্রিক দেশে CPQ সূত্রের PQ অংশের সাম্য শর্ত নির্ণয় করা হচ্ছে।



9 নং চিত্র

$PQ = \delta s$ P বিন্দুতে টান T স্পর্শক দিকে এবং Q বিন্দুতে টান $T + \delta T$, Q বিন্দুতে স্পর্শক দিকে সূত্রটির সমীকরণ হল $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$। টান সূত্রের বিন্দুর উপর নির্ভর করে। ধরা যাক $T = f(s)$, P বিন্দুতে। অতএব x-দিকে T-এর বল $= -T\frac{dx}{ds} = -f(x)\frac{dx}{ds}$

$\therefore$ Q বিন্দুতে টানের x-দিকে বল

$$= \left(T\frac{dx}{ds}\right)_{s+ds} = \left(T\frac{dx}{ds}\right)_s + \frac{d}{ds}\left(T - \frac{dx}{ds}\right)ds + O(ds^2)$$

একক দৈর্ঘের ভর m ধরে বহির্বলের কার্তিয় উপাংশ একক দৈর্ঘের উপর যথাক্রমে (mX, mY, mZ) হয় তা হলে PQ সূত্রাংশের সাম্যের জন্য x-দিকে বলসমূহের বিশ্লেষিতাংশ শূন্য হবে।

অতএব

$$-T\frac{dx}{ds} + T\frac{dx}{ds} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)ds + Xds + O(ds^2) = 0$$

ds দিয়ে ভাগ করে $ds \to 0$ নিলে পাই P বিন্দুতে

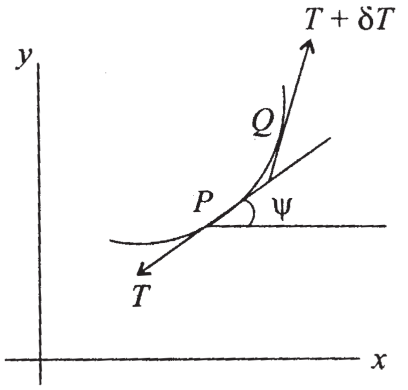
$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + mX = 0 \qquad (1)$$

এভাবে y, z দিকের বিশ্লেষিতাংশ নিয়ে পাই

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + my = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + mz = 0 \qquad (3)$$

8.4.2 সমতলীয় বলের অধীন সূত্রের সাম্যের সমীকরণ



10 নং চিত্র

সূত্রের PQ অংশের উপর বলসমূহ হল P বিন্দুতে টান বল T, Q বিন্দুতে T + δT বল, বহির্বল (mX, mY) δs (m = প্রতি একক দৈর্ঘের ভর m)।

PQ দৈর্ঘ্যের উপর বলের x-দিকে বিশ্লেষিতাংশ

$$-T\cos\psi + (T+\delta T)\cos(\psi+\delta\psi) + mX\,\delta s = 0$$

অর্থাৎ

$$-T\cos\psi + (T+\delta \mathrm{T})(\cos\psi\cos\delta\psi - \sin\psi\sin\delta\psi) + mX\,\delta s = 0$$

$$\left(\therefore \delta\psi \to 0, \cos\delta\psi \to 1, \lim_{\delta s\to 0}\frac{\sin\delta\psi}{\delta s} = \frac{d\psi}{ds}\right)$$

অতএব

$$-T\cos\psi + T\cos\psi\cos\delta\psi - T\sin\psi\sin\delta\psi$$
$$+\cos\psi\,\delta T\cos\delta\psi - \sin\psi\sin\delta\psi\,\delta T + mX\,\delta s = 0$$

δs দিয়ে ভাগ করে এবং $\delta s \to 0$, তাহলে $\delta\psi \to 0$, $\cos\delta\psi \to 1$, $\sin\delta\psi \to \delta\psi$

$$-T\sin\psi\frac{d\psi}{ds} + \cos\psi\frac{dT}{ds} + mX = 0$$

অথবা

$$\frac{d}{ds}(T\cos\psi) + mX = 0 \tag{1}$$

অনুরূপভাবে y-দিকে বিশ্লেষিতাংশ থেকে অপর সমীকরণ হল

$$\frac{d}{ds}(T\sin\psi) + mY = 0 \tag{2}$$

8.4.3 সাধারণ ক্যাটেনারী (Common Catenary)

একটি সুষম ভারী সুত্র অভিকর্ষ অধীনে মুক্তভাবে ঝুলছে। সূত্রটির টান ও সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

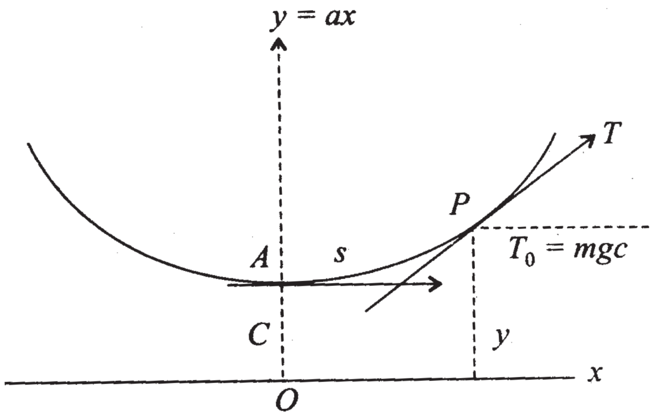
এখানে সূত্রটি একটি উল্লম্ব সমতলে থাকবে। উল্লম্ব দিকে y-অক্ষ নিলে বলসমূহ হল প্রতি একক ভরের $X = 0$, $Y = -g$

8.4.1 এর (1) ও (2) সমীকরণ থেকে পাই

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0 \tag{i}$$

এবং

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) - mg = 0 \qquad \text{(ii)}$$



11 নং চিত্র

(i) থেকে $T\frac{dx}{ds}$ = ধ্রুবক $T_0 = mgc$ ধরা যাক (এখানে নিম্নতম বিন্দু A তে টান $T_0 = mgc$ ধরা হল)

অতএব

$$T = mgc\ \frac{ds}{dx} \qquad \text{(iii)}$$

(ii) তে বসিয়ে পাই

$$\frac{d}{ds}\left(mgc\frac{ds}{dx}\ \frac{dy}{ds}\right) - mg = 0$$

বা, $$c\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad \text{(iv)}$$

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = z$$ বসিয়ে

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$= \frac{d^2y}{dx^2}\left(1 + \frac{\frac{dy}{dx}}{z - \frac{dy}{dx}}\right)$$

$$= \frac{d^2y}{dx^2} \frac{z}{z - \frac{dy}{dx}}$$

(iii) থেকে $\frac{d^2y}{dx^2}$-এর মান বসিয়ে পাই

$$\frac{c\left(z - \frac{dy}{dx}\right)}{z}\frac{dz}{dx} = z - \frac{dy}{dx}$$

কিন্তু, $z - \frac{dy}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \neq 0$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{c}$$

অতএব সমাকল করে $\log z = \frac{x}{c} + K$

অথবা, $\frac{dy}{dx} + \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = Ke^{x/c}, K =$ ধ্রুবক (v)

$$-\frac{dy}{dx} + \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{K}e^{-x/c}$$

অতএব $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(Ke^{x/c} - \frac{1}{K}e^{-x/c}\right)$

$$y = \frac{1}{2}\left(cKe^{x/c} + \frac{c}{K}e^{-x/c}\right) + K' \qquad \text{যেখানে } K' = \text{ ধ্রুবক} \tag{5}$$

এখন যদি সূত্রটির যেখানে স্পর্শক অনুভূমিক সে বিন্দুটির x-স্থানাঙ্ক = 0 এবং y স্থানাঙ্ক = c নিলে (iv) ও (v) থেকে $K = 1$, $K' = 0$.

অতএব সূত্রটির সমীকরণ হল

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \tag{vi}$$

আবার

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \sin h^2 \frac{x}{c} = \cosh^2 \frac{x}{c}$$

অতএব

$$ds - \cosh \frac{x}{c} dx$$

সমাকল করে

$$s = c \sinh \frac{x}{c} + \text{ ধ্রুবক}$$

কিন্তু $x = 0$ বিন্দু থেকে s মাপা হলে $s = 0$ অতএব এখানে ধ্রুবক $= 0$

$$s = c \sinh \frac{x}{c} \tag{vii}$$

অতএব $s^2 = c^2 \sinh^2 \frac{x}{c} = c^2\left(\cosh^2 \frac{x}{c} - 1\right)$

$$\therefore \quad s^2 + c^2 = y^2 \tag{viii}$$

আবার

$$\frac{dy}{dx} = \tan \psi = \sinh \frac{x}{c} = \frac{s}{c}$$

$$\therefore \quad s = c \tan \psi \tag{ix}$$

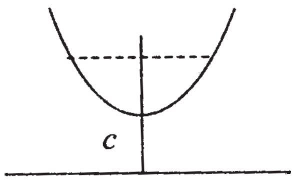
আবার (iii) থেকে T = $mgc \dfrac{ds}{dx} = mgc \sec \psi = mgy$

অতএব y যেখানে সর্বোচ্চ সেখানে টান T বৃহত্তম।

সিদ্ধান্ত ঃ

1. ক্যাটেনারীটির $x = 0$ বিন্দুর নিটকস্থ x-এর স্বল্পমানের জন্য ক্যাটেনারীটিকে একটি অধিবৃত্ত দ্বারা রূপান্তরিত করা যায় কারণ

$$y = c\cosh\frac{x}{c} = \frac{c}{2}(e^{x/c} + e^{-x/c})$$



12 নং চিত্র

$\dfrac{x}{c}$ -এর মান স্বল্প হলে $\dfrac{x^2}{c^2}$ পদ পর্যন্ত রেখে পাই

$$y = c + \frac{x^2}{2c} \quad \text{অথবা} \quad x^2 = 2c(y - c)$$

ইহা একটি অধিবৃত্ত।

2. x-এর মান খুব বেশীর জন্য ক্যাটেনারীর আসন্ন রূপ একটি সূচক অপেক্ষক (Exponential Function)

$$y = \frac{c}{2}e^{x/c}(1 + e^{-2x/c}) = \frac{c}{2}e^{x/c}$$

যখন x খুব বড়।

3. ক্যাটেনারী প্রান্তে টান অত্যন্ত বেশী হলে সূত্রটি অধিবৃত্তাকার ধারণ করে।

টান বেশী হলে c বেশী হবে। তা হলে

$$y = c\cosh\frac{x}{c} = \frac{c}{2}\left[e^{x/c} + e^{-x/c}\right]$$

$$= \text{c}\left[1 + \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^4}{24c^4} + \ldots..\right]$$

$$\therefore \quad 2cy = 2c^2 + x^2 + \frac{x^4}{12c^2} + \ldots..$$

$$2c\ (y - c) = x^2$$

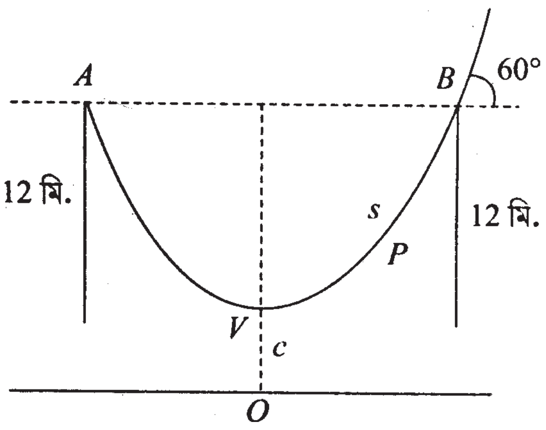
যদি $\frac{x^4}{c^2}$ ও আরও ক্ষুদ্রতর পদ অগ্রাহ্য করা হয়।

এটি একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ। এর শীর্ষ হল $y = c$, $x = 0$ বিন্দুতে এবং নাভিলম্ব $2c$.

8.4.4 উদাহরণ

1. একই উচ্চতায় অবস্থিত দুটি মসৃণ পেরেকের মাঝে একটি সুষম সূত্র এমনভাবে ঝুলছে যে সূত্রটির দুই প্রান্ত পেরেক দুটির দুই পার্শ্বে লম্বভাবে থাকে। যদি পেরেকগুলি থেকে সূত্রের প্রান্তদ্বয় 12 মিটার নিম্নে থাকে এবং পেরেকের কাছে ক্যাটেনারীর স্পর্শক অনুভূমিকের সঙ্গো 60° কোণ করলে, সূত্রটির দৈর্ঘ কত নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ A ও B তে পেরেক দুটির দূরত্ব $2a$ হলে $y = c\cosh\frac{x}{c}$ ক্যাটেনারী $s = c\ \tan\psi$ দৈর্ঘ $VPB = s$ হলে $s = c\ \tan 60° = c\sqrt{3}$



13 নং চিত্র

A ও B বিন্দুতে টান T_A হলে

$T_A \cos 30° = 12$ মি. দীর্ঘ সূত্রের ওজন $= 12\ mg$

$\therefore\ T_A = 12\ mg \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}\ mg$

আবার $T_A = mgc \sec \psi = 2mgc$

$\therefore\ 2mgc = 12\ mg$

$\therefore\ c = 6$ মিটার

অতএব দৈর্ঘ্য $VPB = c\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

অতএব সূত্রটির পূর্ণদৈর্ঘ্য $\left(24+12\sqrt{3}\right)$মি.

2. l-দৈর্ঘ্যের একটি সুষম শৃঙ্খল একই অনুভূমিক রেখায় A ও B বিন্দু দুটি থেকে ঝোলানো হল। A ও B বিন্দুতে টান সর্বনিম্ন বিন্দুতে টানের n গুণ হলে AB দূরত্ব $= \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} \log_e\left[n+\sqrt{n^2-1}\right]$ হবে, দেখান।

সমাধান ঃ শৃঙ্খলটি ক্যাটেনারী এবং $T_0 =$ সর্বনিম্ন বিন্দু O তে টান $= mgc$ তাহলে A বিন্দুতে টান $n\ mgc$ অতএব O থেকে A পর্যন্ত শৃঙ্খলের দৈর্ঘ্য s হলে,

$$s = c \tan \psi$$

এবং $$T = mgc \sec \psi$$

$$\therefore\quad n\ mgc = mgc \sec \psi$$

$$\therefore\quad n = \sec \psi$$

$$\therefore\quad s = c \tan \psi = c\sqrt{n^2-1}$$

অতএব শৃঙ্খলটির দৈর্ঘ্য $= 2c\sqrt{n^2-1}$

অতএব $l = 2c\sqrt{n^2-1}$

আবার B বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক a হলে $AB = 2a$. কিন্তু

$$y^2 = c^2 + s^2 = c^2 + c^2\,(n^2 - 1)$$
$$= c^2n^2$$

আবার $y = c\cosh\dfrac{x}{c}$

$$\therefore\quad cn = c\cosh\frac{a}{c}$$

$$\therefore \quad \cosh\frac{a}{c} = n$$

$$\therefore \quad e^{a/c} + e^{-a/c} \quad 2n$$

বা, $$e^{2a/c} - 2ne^{a/c} + 1 = 0$$

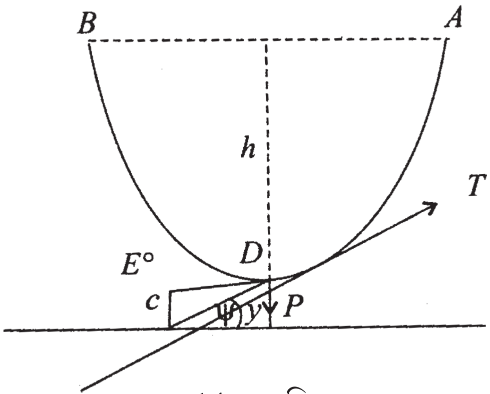
বা, $$e^{a/c} = n + \sqrt{n^2 - 1}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{c} = \log_e\left[n + \sqrt{n^2 - 1}\right]$$

$$\therefore \quad AB = 2a = 2c \; log_e \left[n + \sqrt{n^2 - 1}\right]$$

$$= \frac{l}{\sqrt{n^2 - 1}} \log_e\left[n + \sqrt{n^2 - 1}\right]$$

3. $2l$ দৈর্ঘের ও W ওজনের একটি সুষম শৃঙ্খল একই অনুভূমিক রেখায় দুটি বিন্দু A ও B থেকে ঝোলানো হয়েছে এবং মধ্যবিন্দু D থেকে একটি P ভার প্রযুক্ত হয়েছে। AB রেখা থেকে D এর গভীরতা h হলে A ও B বিন্দুতে টান $= \frac{1}{2}\left[P\frac{l}{h} + W\frac{h^2 + l^2}{2hl}\right]$



14 নং চিত্র

শৃঙ্খলটির AD অংশ ও BD অংশ দুটি এক ধরণের ক্যাটেনারী হবে। AD কে বর্ধিত করে EDA একটি কাল্পনিক ক্যাটেনারী যার নিম্নতম বিন্দু E.

P ওজন বলকে $2T \sin \psi$ নিরস্ত করে। অর্থাৎ $P = 2T \sin \psi$

চাপ $ED = s$ হলে ক্যাটেনারীর সুত্র থেকে

$$s = c \tan \psi = T \sin \psi \qquad (i)$$

ক্যাটেনারী ADE থেকে পাই

$$\mathrm{T} = mg\ y = \frac{W}{2l}y$$

$$y = c\ \sec\ \psi$$

$$s = c\ \tan\ \psi$$

$$\therefore \quad P = 2\frac{W}{2l}y\sin\psi = \frac{Wy}{l}\frac{s}{y} = \frac{Ws}{l}$$

আবার

$$y^2 = s^2 + c^2 \ (D \text{ বিন্দুর জন্য})$$

এবং

$$(y + h)^2 = (s + l)^2 + c^2 \ (A \text{ বিন্দুর জন্য})$$

অতএব

$$(y + h)^2 - y^2 = (s + l)^2 - s^2$$

বা, $$2yh + h^2 = 2sl + l^2$$

বা, $$y = \frac{l^2 + 2sl - h^2}{2h}$$

$$= \frac{l^2 - h^2}{2h} + \frac{l}{h}.s$$

$$= \frac{l^2 - h^2}{2h} + \frac{l}{h}.\frac{lP}{W}$$

A বিন্দুতে টান

$$\mathrm{T} = \frac{W}{2l}(y + h)$$

$$= \frac{W}{2l}\left[h + \frac{l^2 - h^2}{2h} + \frac{l^2 P}{hW}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{Wh}{l} + \frac{W(l^2 - h^2)}{2hl} + \frac{lP}{h}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{Pl}{h} + W\frac{2h^2 + l^2 - h^2}{2hl}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{Pl}{h} + W\frac{l^2 + h^2}{2hl}\right]$$

8.5 সমশক্তি ক্যাটেনারী (Catenary of Uniform Strength)

কোন ভারী সূত্র যদি অভিকর্ষ অধীন ঝুলে এবং এমন হয় যে উহার যে কোন বিন্দুতে একক দৈর্ঘের ভর ঐ বিন্দুর টানের সমানুপাতী অনুভূমিক দিকে x-অক্ষ ও উর্ধ্ব উল্লম্ব দিকে y-অক্ষ নিলে আমরা পাই বহিঃস্থ বল (X, Y) যেখানে $X = 0$ এবং $Y = -\,g$ এবং প্রতি একক দৈর্ঘের ভর হল $m = KT$, যেখানে K = ধ্রুবক ও T হল সূত্রটির ঐ বিন্দুতে টান। এক্ষেত্রে x ও y দিকে সাম্য সমীকরণ দুটি হল

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0 \text{ এবং } \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) = mg = KTg$$

প্রথমটির সমাকল করে

$$T\frac{dx}{ds} = C \text{ (ধ্রুবক)} \tag{1}$$

দ্বিতীয়টি হল

$$\frac{d}{dx}\left(T\frac{dy}{dx}\frac{dx}{ds}\right)\frac{dx}{ds} = KTg$$

বা (1) থেকে

$$\frac{d}{dx}\left(C\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{ds} = KgC\frac{ds}{dx}$$

$$\text{বা,}\quad \frac{d^2y}{dx^2} = Kg\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = Kg\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} = Kg$$

বা, $$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = Kg\,dx$$

সমাকল করে

$$\tan^{-1}\frac{dy}{dx} = Kgx + A \qquad A = \text{ধ্রুবক}$$

যেখানে সূত্রটির স্পর্শক অনুভূমিক, তার x-স্থানাঙ্ক $= 0$ নেওয়া হলে $A = 0$

অতএব $\dfrac{dy}{dx} = \tan(Kgx)$

সমাকলন করে

$$y = -\frac{1}{Kg}\log\cos(Kgx) + B$$

যদি $x = 0$, $y = 0$ সূত্রটির বিন্দু ধরা হয়, তাহলে $B = 0$ এবং

$$y = -\frac{1}{Kg}\log\cos(Kgx)$$

সমশক্তি ক্যাটেনারীর সমীকরণ। যে কোন বিন্দুতে টান

$$T = C\frac{ds}{dx} = C\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= C\ \sec\ Kgx$$

অতএব

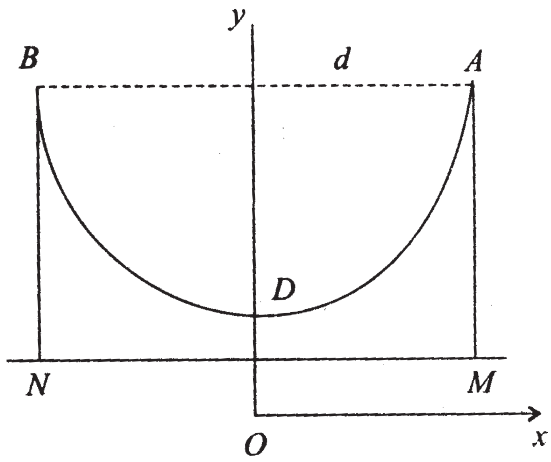
$$s = \frac{1}{Kg}\log\tan\left(\frac{\pi}{4} + Kgx\right)$$

যেখানে s মাপা হচ্ছে $x = 0$, $y = 0$ বিন্দু থেকে।

8.5.1 উদাহরণ

d-দূরত্বে অবস্থিত ও একই উচ্চতাবিশিষ্ট দুই স্তম্ভের মাঝখানে কোন নির্দিষ্ট বস্তু দ্বারা নির্মিত একটি টেলিগ্রাফের তারকে এমনভাবে ঝুলানো হয়েছে যে l স্তম্ভদ্বয়ে তারের টান ক্ষুদ্রতম হয়। তারের দৈর্ঘ l হলে দেখান যে

$$l = \frac{d}{\lambda}\sinh\lambda \quad \text{যেখানে } \lambda \tanh \lambda = 1$$



15 নং চিত্র

সমাধান ঃ ক্যাটেনারীর সমীকরণ $y = C \cosh \frac{x}{c}$ হলে এবং $AM = BN$ স্তম্ভ-উচ্চতা $AB = d$, AD চাপ $= l/2$

A বিন্দুতে টান T হলে A বিন্দুতে $y = c\cosh\frac{d}{2c}$

$$\therefore \quad \mathrm{T} = mgy = mgc \cosh \frac{d}{2c} \tag{1}$$

আবার

$$s = c \sinh \frac{x}{c}$$

$$\therefore \quad \frac{l}{2} = c\sinh\frac{d}{2c} \tag{2}$$

এখন টান c-এর উপর নির্ভর করে।

অতএব ক্ষুদ্রতম T-এর জন্য

$$\frac{d}{dc}\left(c\cosh\frac{d}{2c}\right) = 0$$

$$\cosh\frac{d}{2c} + c\left(\sinh\frac{d}{2c}\right)\left(-\frac{d}{2c^2}\right) = 0$$

বা, $$1 - \frac{d}{2c}\tanh\frac{d}{2c} = 0 \qquad (3)$$

যখন টান ক্ষুদ্রতম তখন (2) থেকে

$$l = 2c\sinh\frac{d}{2c} \qquad (4)$$

(3) ও (4) থেকে $\frac{d}{2c} = \lambda$ বসালে পাই

$$1 - \lambda \tanh \lambda = 0$$

এবং $$l = \frac{d}{\lambda}\sinh\lambda$$

8.6 সারাংশ

এই এককে

(1) বীম এর যে কোন প্রস্থচ্ছেদের উপর অন্ত বল সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। স্পার্শক বল ও নমন ভ্রামক কিভাবে ক্রিয়া করে তাহা আলোচনা করা হয়েছে। স্পার্শক বল S এবং M নমন ভ্রামক বলে এবং অন্য কোন বল না থাকলে $\frac{dM}{dx} = -S$. যদি বীমের উপর লম্বভাবে সুষমভাবে প্রতি এককে W ভার ক্রিয়া করে তা হলে $\frac{dS}{dx} = -W$, এবং $\frac{dM}{dx} = -S$.

(2) একটি নমনীয় সূত্রে টান বলই এক্ষেত্রে প্রধান এবং বহিঃস্থ বলের অধীন বিভিন্ন রূপ ধারণ করে।

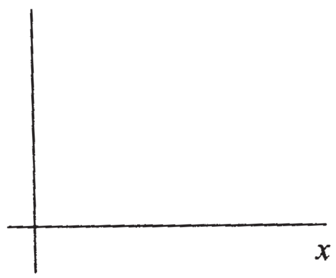
(3) সুষম ভারী সূত্রের গাণিতিক রূপটি হল ক্যাটেনারী $y = c\cosh\frac{x}{c}$, এই সমীকরণ যেখানে x-অক্ষ অনুভূমিক ও y-অক্ষ উল্লম্ব দিকে এবং তারের নিম্নতম বিন্দু $x = 0$, $y = c$. যদি তারটির উপর অন্যান্য বল থাকে যেক্ষেত্রে তারটি ক্যাটেনারীর একটি অংশ বিশেষ হবে।

(4) তারটি যদি সুযম না হয় তবে রূপ একটু আলাদা হয় যেমন সমশক্তি ক্যাটেনারী যেখানে একক দৈর্ঘের ভর $m = KT$, T = টান, K = ধ্রুবক। অর্থাৎ এখানে দেওয়া আছে যে টানের সঙ্গে ভর সমানুপাতী। এখানে $yKg = log \sec (Kgx)$

(5) এই এককে সাধারণভাবে যে কোন সূত্রের সাম্য xy-তলে জানার জন্য সমীকরণ জানা যায়। কোন প্রকার বল প্রযুক্ত হলে, সূত্রটি কি আকার ধারণ করবে তাহা জানা যাবে।

8.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. একটি অসম সূত্র অভিকর্ষ অধীন ঝুলছে। সূত্রটির যে কোন বিন্দুতে প্রস্থচ্ছেদ ঐ বিন্দুর টানের ব্যস্ত সমানুপাতী। প্রমাণ করুন যে সূত্রটি একটি অধিবৃত্তের আকারে ঝুলছে।



16 নং চিত্র

x-অক্ষ অনুভূমিক দিকে y-অক্ষ উর্ধ্ব উল্লম্ব দিকে।

সাম্য সমীকরণ দুটি হল

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) - mg = 0 \tag{2}$$

এখন m = কোন বিন্দুতে একক দৈর্ঘ্যের ভর

$$m = \frac{K}{T}$$

$$K = \text{ধ্রুবক},\ T = \text{টান} \tag{3}$$

(1) থেকে $T\dfrac{dx}{ds} = C =$ (ধ্রুবক)

এবং (2) থেকে

$$\frac{d}{dx}\left(C\frac{ds}{dx}\cdot\frac{dy}{ds}\right)-\frac{Kg}{T}=0$$

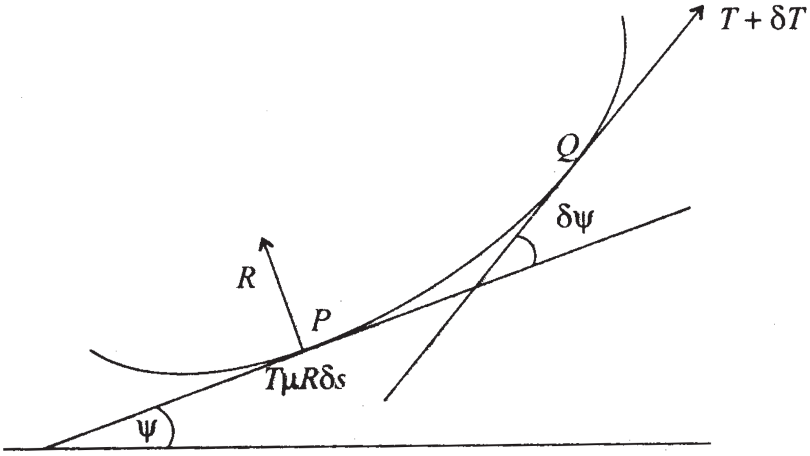
বা, $$\frac{d}{ds}\left(C\frac{dy}{dx}\right)-\frac{kg}{C\dfrac{ds}{dx}}=0$$

বা, $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{kg}{C^2}=0$$

$$y=\frac{gK}{2c^2}x^2+Ax+B$$

যেখানে A, B ধ্রুবক। ইহা একটি অধিবৃত্ত।

2. একটি হাল্কা সমদৈর্ঘ সূত্র একটি রুক্ষ সমতলীয় বক্রের উপর সীমাস্থ সাম্যে আছে। যদি কোনও বহিঃস্থ বল উহার উপর ক্রিয়া না করে, তা হলে সূত্রটির টান নির্ণয় করতে হবে।



17 নং চিত্র

PQ অংশের উপর বলসমূহ যথাক্রমে T, T + δT অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া বল R এবং ঘর্ষণ বল μR P বিন্দুতে, অতএব সাম্যের জন্য P বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্ব দিকে বিশ্লেষিত করে পাওয়া যায়।

$$(T+\delta T)\cos\delta\psi = T+\mu R\,\delta s$$

$$(T+\delta T)\sin\delta\psi = R\,\delta s$$

অতএব δs দিয়ে ভাগ করে $\delta s \to 0$ করলে পাই

$$\frac{dT}{ds} = \mu R \qquad (i)$$

$$T\frac{d\psi}{ds} = R \qquad (ii)$$

অতএব (i) ও (ii) থেকে

$$\frac{dT}{T} = \mu\, d\psi$$

সমাকলন করে $T = T_0\, e^{\mu\psi}$

যেখানে $T = T_0$ যখন $\psi = 0$

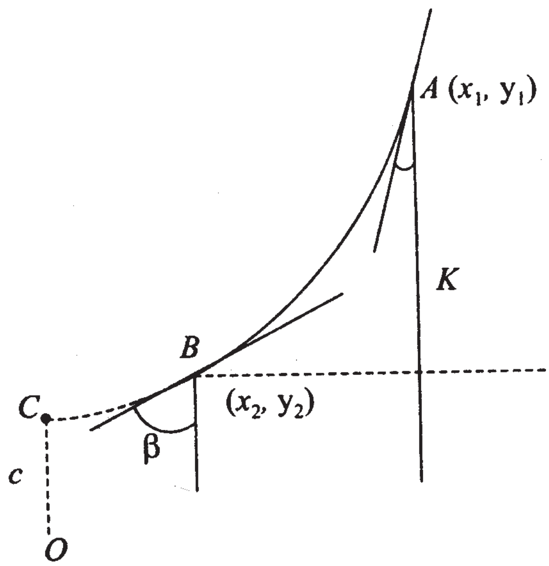
অতএব ψ বৃদ্ধির সঙ্গে T বৃদ্ধি পাবে। একটি দড়িকে একটি রুক্ষ খুঁটির চারদিকে এক পাক দিলে দুটি প্রান্তের টান-এর অনুপাত $e^{2\pi\mu}$ হবে।

3. l দৈর্ঘ্যের ভারী সূত্র দুটি বিন্দু থেকে ঝোলান হল। যদি বিন্দু দুটি একই উল্লম্ব রেখায় না থাকে এবং ক্যাটেনারীর শীর্ষবিন্দু উহাদের মধ্যে না থাকে তবে দেখান যে K বিন্দুর দুটির মধ্যে উল্লম্ব দূরত্ব হলে

$$K = l\frac{\cos(\alpha+\beta)/2}{\cos(\alpha-\beta)/2}$$

যেখানে α, β হল প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের স্পর্শক ও উল্লম্ব রেখার মধ্যে কোণ।

সমাধান ঃ



18 নং চিত্র

প্রশ্ন অনুসারে

$$y_1 = c\cosh\frac{x_1}{c} \qquad y_2 = c\cosh\frac{x_2}{c}$$

$$\therefore \quad K = y_1 - y_2 = c\left(\cosh\frac{x_1}{c} - \cosh\frac{x_2}{c}\right)$$

কিন্তু

$$y_1 = c\sec\alpha \qquad y_2 = c\sec\beta$$

$$\therefore \quad k = c\,(\sec\alpha - \sec\beta) \qquad (i)$$

আবার

$$s_1 = c\tan\alpha \qquad s_2 = c\tan\beta$$

এবং

$$l = s_1 - s_2 = c\,(\tan\alpha - \tan\beta) \qquad (ii)$$

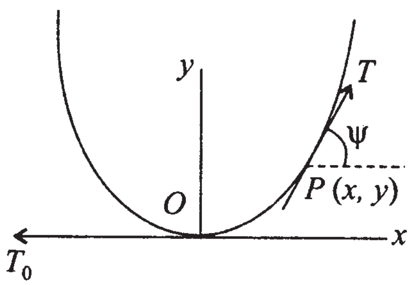
অতএব

$$\frac{k}{l} = \frac{\sec\alpha - \sec\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

4. একটি সূত্র অভিকর্ষের অধীনে ঝুলছে এবং সূত্রটির প্রতিটি ক্ষুদ্র অংশের ভার আনুভূমিকের উপর ঐ অংশের লম্ব অভিক্ষেপের সহিত সমানুপাতী। সূত্রটির সমীকরণ কিরূপ?



19 নং চিত্র

সূত্রটির সর্বনিম্ন বিন্দু O তে টান T_0. ঐ বিন্দুতে অনুভূমিক দিকে x এবং উল্লম্ব দিকে y-অক্ষ নিলে এবং P একটি সূত্রের বিন্দু হলে OP অংশের সাম্যের জন্য

$$\mathrm{T} \cos \psi = \mathrm{T}_0$$

এবং

$$T \sin \psi = \int_0^x \omega \, dx = \omega x$$

$$\therefore \quad \tan \psi = \frac{\omega x}{T_0}$$

বা, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega x}{T_0}$$

$$\therefore \quad dy = \frac{\omega}{T_0} x \, dx$$

$$\therefore \quad y = \frac{\omega}{T_0} = \frac{X^2}{2} \quad (\because\ y = 0 \text{ যখন } x = 0)$$

অতএব এটি একটি অধিবৃত্ত আকারে হবে।

মন্তব্য ঃ ঝুলন্ত সেতুর ক্ষেত্রে এই সূত্রের প্রয়োগ আছে।

একক 9 ❑ কার্য ও কল্পিত কার্যনীতি (Work Principle of Virtual Work)

গঠন

9.1 প্রস্তাবনা

9.2 উদ্দেশ্য

9.3 কার্য (Work)

9.3.1 সমবিন্দু বলের কার্য

9.3.2 ওজন বল কর্তৃক কৃতকার্য

9.4

9.4.1 পরিবর্তনশীল বলের ক্ষেত্রে কার্যের সংজ্ঞা ও সংরক্ষী বল (Conservative force)

9.4.2 সংরক্ষী বল হওয়ার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত

9.5 বলদ্বন্দ্ব কর্তৃক কৃতকার্য

9.5.1 স্থিতিস্থাপক সূত্রের (Elastic string) দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির জন্য কার্যের পরিমাণ

9.5.2 কতিপয় ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া বলের কার্য

9.6 সাধারণীকৃত স্থানাঙ্ক (Generalized Co-ordinates)

9.7 বিভিন্ন প্রকারের বাধক (Different Types of Constraints)

9.7.1 বাধক সম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞা

9.8 কল্পিত কার্যবিষয়ক নীতি (Principal of Virtual Work)

9.8.1 প্রতিক্রিয়া বল সম্পর্কিত প্রকল্প

9.8.2 কল্পিত কার্যনীতির প্রয়োজনীয়তা

9.8.3 কতকগুলি বিশেষ ক্ষেত্রে কল্পিত কার্যনীতির প্রমাণ

9.9 কল্পিত কার্যনীতির প্রয়োগ

9.10. পরিশিষ্ট

9.11 উদাহরণমালা

9.12 সারাংশ

9.13 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

9.1 প্রস্তাবনা

কোন বস্তু বা বস্তুপুঞ্জের উপর বাইরে থেকে বলসমূহ প্রযুক্ত হলে বস্তুর একটি অংশের সঙ্গো অপর অংশের মধ্যে পারস্পরিক ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া বল দেখা দেয়। ফলে বস্তুর সাম্য সমীকরণে, ঐ অন্তর্বল স্থান পেতে পারে। তাছাড়া এমন কতগুলি বল আছে যেমন মসৃণ তলের উপর প্রতিক্রিয়াবল, যেগুলি কোন সামান্য সরণের জন্য কোন কার্য করে না। লাগ্রাঞ্জ এ বিষয়ে একটি তত্ত্ব বা নীতি নির্ধারণ করলেন যেটা হল প্রযুক্ত বলগোষ্ঠী সাম্যে থাকলে সামান্য সরণের জন্য শূন্য পরিমাণ কার্য করে এবং কল্পিত যে কোন সরণের জন্য যদি প্রযুক্ত বলগুলির মোট কার্য শূন্য হয় তবে বলগোষ্ঠী সাম্যে থাকবে। এই নীতির সাহায্যে বস্তুর সাম্য নির্ধারণ করা সম্ভব হয়। আবার কোন বাধকের জন্য ক্রিয়াকারী বল নির্ধারণ করা যায় যদি সাম্যাবস্থা পূর্বে জানা থাকে। এভাবে সংরক্ষী বল সমন্বিত বস্তুতন্ত্রের সাম্যাবস্থার শর্ত কল্পিত কার্য মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়।

9.2 উদ্দেশ্য

সাম্যের জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত আমরা আগের পঞ্চম এককে পেয়েছি যেখানে শর্তগুলি বলগুলির মান, দিক্ ও প্রয়োগবিন্দু দ্বারা নির্ধারিত হয়। এই এককে আপনারা দেখবেন কিভাবে বস্তুতন্ত্রের কল্পিত সরণ চিন্তা করা যায়, এবং ঐরূপ কল্পিত সরণের জন্য প্রযুক্ত বলগুলি কিরূপ কার্য করে। বলগোষ্ঠীর প্রতিটি বলের দ্বারা কৃতকার্য সমষ্টির উপর সাম্য নির্ভর করে। দেখানো যায় যদি বস্তুতন্ত্রে কোন ক্ষয়শীল (dispersive) বল না থাকে (যেমন ঘর্ষণ বল ইত্যাদি) এবং বস্তুতন্ত্রটির উপর কোন বাধক যদি উভচারী অর্থাৎ যদি বাধকটিকে একটি সমীকরণের দ্বারা উপস্থাপিত করা যায় তবে সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল—বস্তুতন্ত্রের বাধক ভঙ্গ না করে যে কোন কল্পিত সরণের জন্য কল্পিত কার্যসমষ্টি শূন্য।

এই নীতি প্রয়োগ করে একটি কণার সাম্য বা দৃঢ় বস্তুর উপর সমতলীয় বলসমূহের সাম্য অথবা দৃঢ় বস্তুর উপর যে কোন বলসমষ্টির সাম্যাবস্থা নির্ধারণ করা যায়।

9.3 কার্য (Work)

একটি বল একটি বস্তুর উপর একটি বিন্দুতে কিছু সময়ের জন্য ক্রিয়া করলে ঐ সময়ে প্রয়োগ বিন্দুটির যদি সরণ ঘটে, তাহা হলে প্রদত্ত বলটি কার্য করেছে বলা হবে। প্রকৃতপক্ষে, $\vec{F}$ বল প্রযুক্ত বলে এবং প্রয়োগবিন্দুর সরণ $\vec{d}$ ভেক্টর দ্বারা সূচিত হলে, ঐ বল দ্বারা কার্যের পরিমাণ

$$W = \vec{F}.\vec{d} = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{d}\right|\cos\theta \qquad (1)$$

যেখানে θ হল $\vec{F}$ ও $\vec{d}$-এর মধ্যে কোণ।

সংজ্ঞা থেকে সহজেই পাই যে

(1) $\vec{d} = 0$ হলে $W = 0$ অর্থাৎ প্রয়োগবিন্দুর সরণ না হলে কার্য পরিমাণ শূন্য।

(2) $\theta = 90°$ হলে $W = \vec{F}.\ \vec{d} = 0$ অর্থাৎ প্রয়োগবিন্দুর সরণ বল $\vec{F}$-এর লম্বদিকে হলে, কার্য শূন্য হবে।

(3) $\theta > 90°$ হলে, W ঋণাত্মক হবে।

(4) $\theta = 180°$ হলে $\vec{F}.\ \vec{d} = -\left|\vec{F}\right|\left|\vec{d}\right|$. এইক্ষেত্রে $\vec{F}$ বলের বিরুদ্ধে $\left|\vec{F}\right|\left|\vec{d}\right|$ পরিমাণ কার্য হয়েছে বলা যায়।

9.3.1 সমবিন্দু বলের কার্য

একটি বিন্দুতে কতগুলি বল ক্রিয়া করলে তাদের প্রত্যেকের কার্যের সমষ্টি ঐ বলগুলির লব্ধি দ্বারা কৃতকার্যের সমান হবে।

প্রমাণ : এখানে $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ বল যদি একটি বিন্দু P-তে প্রযুক্ত হয় এবং $\vec{F}$ যদি তাদের লব্ধি হয়, তাহলে

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$$

এখন $\vec{d}$ যদি বিন্দু P-এর সরণ ভেক্টর হয়, তাহলে লব্ধি কর্তৃক কৃতকার্যের পরিমাণ $= \vec{F}.\ \vec{d}$

$$= \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n\right).\vec{d}$$

$$= \vec{F}_1.\vec{d} + \vec{F}_2.\vec{d} + \ldots + \vec{F}_n.\vec{d}$$

= প্রতিটি বল কর্তৃক কৃতকার্যসমূহের সমষ্টি।

9.3.2 ওজন বল কর্তৃক কৃতকার্য

ধরা যাক w_1, w_2, ... w_n ওজনবিশিষ্ট n-সংখ্যক কণা রয়েছে, এখন তাদের যথাক্রমে h_1, h_2, ..., h_n পরিমাণ উর্ধ্বে উল্লম্বদিকে সরণ হল। যদি h = কণাগুলির ভারকেন্দ্রের উল্লম্বদিকে ঊর্ধ্বে; সরণ হয়, তাহলে ঐ কণাগুলির উপর ওজন বলসমূহের বিরুদ্ধে কৃতকার্যের পরিমাণ = $(w_1 + w_2 + ... + w_n)\ h$

প্রমাণ ঃ x-অক্ষের উর্ধ্বদিকে উল্লম্বভাবে নেওয়া হল। কণাগুলির x-স্থানাঙ্ক প্রথমাবস্থায় x_1, x_2, ..., x_n এবং দ্বিতীয় অবস্থায় x'_1, x'_2 ....., x'_n অতএব ওজন বল দ্বারা কৃতকার্যের সমষ্টি

$$= w_1(x_1 - x_1') + w_2(x_2 - x_2') + \ldots\ldots w_n(x_n - x_n') \qquad (1)$$

এখন যদি কণাসমূহের প্রাথমিক অবস্থান সাপেক্ষে ভারকেন্দ্রের x-স্থানাঙ্ক $\bar{x}$ এবং দ্বিতীয় অবস্থায় ভারকেন্দ্রের x-স্থানাঙ্ক $\bar{x}'$ হয়, তবে

$$W\bar{x} = w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots\ldots + w_nx_n$$

যেখানে $W = w_1 + w_2 + \ldots.\ w_n$

$$W\bar{x}' = w_1x_1' + w_2x_2' + \ldots\ldots + w_nx_n'$$

$$\therefore \quad W(\bar{x}' - \bar{x}) = w_1(x_1' - x_1) + w_2(x_2' - x_2) + \ldots + w_n(x_n' - x_n) \qquad (2)$$

অতএব (1) ও (2) থেকে পাই

$$Wh = W(\bar{x}' - \bar{x}) = \text{ওজন বলগুলির বিরুদ্ধে কৃতকার্য সমষ্টি}$$

মন্তব্য ঃ উপরের প্রমাণ থেকে এটা স্পষ্ট যে বস্তুকণাগুলির সরণ যেভাবেই ঘটুক না কেন, প্রথম অবস্থায় ও দ্বিতীয় অবস্থায় তাদের ভারকেন্দ্রের উল্লম্ব সরণই কার্যের পরিমাণ নির্ধারণ করে। ইহা একটি দৃঢ় বস্তুর বেলায়ও প্রযোজ্য।

9.4.1 পরিবর্তনশীল বলের ক্ষেত্রে কার্যের সংজ্ঞা ও সংরক্ষী বল (Conservative force)

ধরা যাক একটি বস্তুকণার উপর বল $\vec{F}$ ক্রিয়া করে এবং কণাটি A বিন্দু হতে B বিন্দু পর্যন্ত যেতে ACB বক্রটিকে রচনা করে, আর বল $\vec{F}$-এর মান ও দিক পরিবর্তনশীল হওয়ায় কণাটির প্রতি স্বল্প সরণের জন্য কার্যসমূহের যোগফল করিলে সম্পূর্ণ কার্য পাওয়া যাবে।

$P(x, y, z)$ ঐ পথের একটি বিন্দু এবং আর একটি বিন্দু Q, P-এর নিকটবর্তী। অতএব P হতে Q-তে যেতে $\vec{F}$ কর্তৃক কৃতকার্যের পরিমাণ $\vec{F}.\overrightarrow{PQ} = \vec{F}.\vec{dr}$, যেখানে $P(\vec{r})$ এবং $Q\left(\vec{r} + \vec{dr}\right)$ অতএব A থেকে B পর্যন্ত গমনকালে $\vec{F}$ কর্তৃক কৃতকার্যের পরিমাণ

$$W = \int_{ACB} \vec{F}.\vec{dr} = \int_{ACB} (Xdx + Ydy + Zdz) \tag{1}$$

যেখানে (X, Y, Z) হল $\vec{F}$-এর লম্ব কার্তেজীয় অক্ষ সাপেক্ষে বিশ্লেষিতাংশসমূহ। এখানে (1)-এর সমকালে X, Y, Z (x, y, z)-এর সঙ্গে পরিবর্তিত হলেও কোন অসুবিধা হবে না। (1) হতে আমরা দেখি যে সাধারণভাবে সমাকলটির মান A ও B-এর উপর নির্ভর করেই, তাছাড়া A হতে B-তে যে পথে বস্তুকণাটি যায় তার উপরও নির্ভর করে।

কোন কোন বল $\vec{F}$-এর বেলায় দেখা যায় যে A হতে B পর্যন্ত পথের জন্য কৃতকার্য শুধুমাত্র পথপ্রান্ত A ও B-এর উপর নির্ভর করে। মধ্যবর্তী পথের পরিবর্তনে কৃতকার্যের কোন হেরফের হয় না। এহেন বলকে সংরক্ষী (conservative) বল বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ, যদি কোন বল মানে ও দিকে অপরিবর্তিত থাকে, তাহলে

$$W = \int_{ACB} \vec{F}.\vec{dr} = \vec{F}.\int_{ACB} \vec{dr} = \vec{F}.[\vec{r}]_A^B = \vec{F}.(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

অতএব দেখা গেল W এখানে শুধুমাত্র A ও B-এর অবস্থানের উপর নির্ভর করে।

9.4.2 সংরক্ষী বল হওয়ার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত

কোন বস্তুকণার উপর প্রযুক্ত বল $\vec{F}$ সংরক্ষী হওয়ার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল—এমন একটি অপেক্ষক $\mathrm{V}(x, y, z)$ থাকবে যে $\vec{F} = grad\ \mathrm{V}$ হবে, যেখানে $grad\ \mathrm{V}$ একটি ভেক্টর, যার লম্ব কার্তেজীয় বিশ্লেষিতাংশসমূহ হল যথাক্রমে

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$$

প্রমাণ ঃ শর্ত যথেষ্ট—ধরলাম $\vec{F} = grad\ \mathrm{V}$

অতএব $W = \int_{ACB} \vec{F}.\vec{dr} = \int_{ACB} (\text{grad } V).\vec{dr}$

$$= \int\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$$

$$= \int_{ACB} dV = [V]_A^B = V_B - V_A$$

শর্ত প্রয়োজনীয়—ধরলাম $\vec{F}$ সংরক্ষী বল।

অতএব $\int_{ACB} \vec{F}.\vec{d}r$ শুধুমাত্র A ও B-এর উপর নির্ভর করবে।

অতএব $\int_A^P \vec{F}.\vec{d}r$ এই সমাকলটিকে P-এর অপেক্ষক হিসাবে ভাবা যায়।

$V = \int_A^P \vec{F}.\vec{d}r = \int_A^P (Xdx + Ydy + Zdz)$ ধরা হল।

$$\therefore \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_A^P (Xdx + Ydy + Zdz) = X$$

এবং $\frac{\partial V}{\partial y} = Y, \frac{\partial V}{\partial z} = Z.$ অতএব শর্তটি প্রয়োজনীয়।

উদাহরণস্বরূপ অভিকর্ষ বল একটি সংরক্ষী বল। কারণ, যদি A ও B-এর মধ্যে সংযোগকারী যে কোন একটি বক্র ACB হয়, তাহলে একটি কণা A হতে B তে ঐ পথে গেলে অভিকর্ষ বল কর্তৃক কৃতকার্য

$$W = \int_{ACB} \vec{F}.\vec{d}r = \int mg\vec{k}.\vec{d}r$$

যেখানে $\vec{k}$ হল একক ভেক্টর অভিকর্ষবলের দিকে, এবং

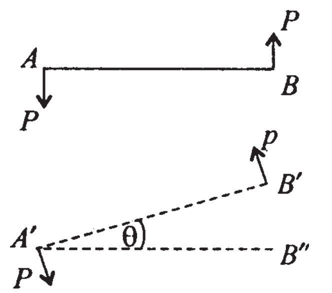
$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

অতএব $W = mg \int_{ACB} dz = mg[z_B - z_A]$. ইহা শুধুমাত্র A ও B-এর অবস্থানের উপর নির্ভর করে।

অসংরক্ষী বলের উদাহরণ—ঘর্ষণবল সাধারণতঃ অসংরক্ষী। ধরা যাক একটি কণা একটি অমসৃণ তলের একটি বিন্দু A হতে B বিন্দুতে ACB পথে গিয়েছে। এখন ঘর্ষণবল F দ্বারা নির্দেশিত হলে, উহার দ্বারা কার্যের পরিমাণ $= -\int_{ACB} F ds$, যেখানে ds হল বক্রটির ছোট অংশের দৈর্ঘ্য। এখানে ঋণাত্মক চিহ্ন নেওয়া হয়েছে এই কারণে যে ঘর্ষণবল সর্বদা কণাটির গতিবেগের বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে। অতএব ইহা পরিষ্কার যে A থেকে B-তে যেতে পথ যত দীর্ঘ হবে, F কর্তৃক কৃতকার্যের পরিমাণ তত সংখ্যাগতভাবে বেশী হবে। অতএব, ঘর্ষণবল সংরক্ষী হতে পারে না।

9.5 বলদ্বন্দ্ব কর্তৃক কৃতকার্য

ধরা যাক দ্বন্দ্বটির বলদ্বয় P, P এবং উহার বাহু AB এই অবস্থান হতে দ্বন্দ্বটির বলদ্বয় A', B' বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং AB বাহু ও $A'B'$ বাহু ইহাদের মধ্যে কোণ θ। দ্বন্দ্বটির বলগুলির তল একই রয়েছে ধরা হল। এখন দ্বন্দ্বটির বলগুলি সমান্তরাল থেকে A' ও B' বিন্দুতে গেলে বল দুটির সরণ পরস্পর সমান ও বল দুটি পরস্পর বিপরীত হওয়ায় মোট কার্যের পরিমাণ শূন্য হয়। এখন A', B'' অবস্থান হতে A', B' অবস্থানে আসতে কার্যের পরিমাণ $= Pp\theta = M\theta$, যেখানে $p = A'B'$ এবং M হল দ্বন্দ্বটির ভ্রামক মান। অতএব প্রমাণ হল যে, ভ্রামক ভেক্টরের সাপেক্ষে θ কোণে ঘূর্ণনের ফলে দ্বন্দ্ব দ্বারা কৃতকার্য $= M\theta$. (θ ক্ষুদ্র ধরা হয়েছে)



1 নং চিত্র

9.5.1 একটি স্থিতিস্থাপক সূত্রের (Elastic string) দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির জন্য কার্যের পরিমাণ

ধরা যাক AB একটি স্থিতিস্থাপক সূত্র যাহার স্বাভাবিক অবস্থায় দৈর্ঘ্য $AB = l_0$. এইবার A বিন্দুকে স্থির রেখে B বিন্দুতে বলপ্রয়োগ হেতু উহা B_1 এ সম্প্রসারিত হল। ফলে নূতন দৈর্ঘ্য $= l_1$ এখন দৈর্ঘ্য l_1 হতে l_2 পর্যন্ত সম্প্রসারিত করতে টান কর্তৃক কার্যের পরিমাণ বের করতে হবে। দৈর্ঘ্য x হলে টান $T = \lambda \dfrac{x - l_0}{l_0}$ (Hooke-এর নিয়ম অনুযায়ী)

অতএব সূত্রটিকে AB_1 হইতে AB_2 $(= l_2)$ পর্যন্ত বর্ধিত করলে যে পরিমাণ কার্য হয় তা

$$= \int_{l_1}^{l_2} T dx = \int_{l_1}^{l_2} \lambda \frac{(x - l_0)}{l_0} dx = \frac{\lambda}{2l_0}(l_2 - l_1)(l_1 + l_2 - 2l_0)$$

$$= \frac{\lambda}{l_0}(l_2 - l_1)\left(\frac{l_1 + l_2}{2} - l_0\right)$$

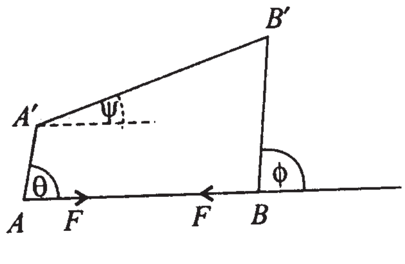
$$= \frac{\lambda}{l_0}(l_2 - l_1)\left(\frac{l_2 - l_0}{2} + \frac{l_1 - l_0}{2}\right)$$

$$= \frac{l_2 - l_1}{2}\left(T_{B_1} + T_{B_2}\right).$$

9.5.2 কতিপয় ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া বলের কার্য

কতগুলি ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়ার ক্ষেত্রে দেখা যায়, কোন সরণের জন্য কার্যের পরিমাণ প্রথম ক্রমের ক্ষুদ্র রাশি। নিম্নে কতগুলি ক্ষেত্রে আমরা কার্যের পরিমাণ বার করব।

(1) দুটি কণার মধ্যে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়াবল কর্তৃক কার্য শূন্য হবে, যদি কণা দুটির মধ্যে দূরত্ব অপরিবর্তিত থাকে।



2 নং চিত্র

A ও B অবস্থান হতে বস্তুকণা দুটি A' ও B'-এ যাওয়ার ফলে উহাদের মধ্যে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া বল A-তে F বল এবং B-তে বিপরীতদিকে F বল ক্রিয়া করে। অতএব AA' ও BB' সরণের জন্য

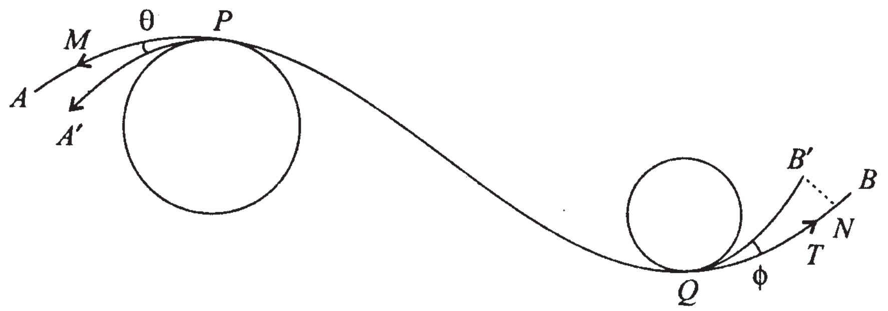
$$\text{কার্য} = F.\ AA' \cos\theta - F.\ BB' \cos\phi$$

যেখানে AA' ও BB', AB-এর সঙ্গে যথাক্রমে θ ও ϕ কোণ করেছে। কিন্তু $AB = A'B' = l.$ অতএব অভিক্ষেপ নিলে পাই

$AB - A'B'$-এর AB এর উপর অভিক্ষেপ $= AA' \cos\theta - BB' \cos\phi$. অতএব F, F বল দুটি দ্বারা কৃতকার্যের পরিমাণ $= F\,(l - l\cos\psi) = \dfrac{Fl.\psi^2}{2} + \psi$-এর চার ও ততোধিক ঘাতের পদ। অতএব ψ-এর প্রথম ঘাত (যা ক্ষুদ্র) পর্যন্ত নিয়ে পাই, প্রতিক্রিয়া বলদ্বয় দ্বারা কৃতকার্য = 0.

(2) অল্প সরণের জন্য একটি সমদৈর্ঘ সূত্র বা তারের প্রান্তদ্বয়ে টান বল (tension) কর্তৃক কৃতকার্য শূন্য হবে, যদি সূত্রটি মসৃণ তলের সঙ্গে থাকে।

যেহেতু যেসকল তলের সঙ্গে সূত্রটি লেগে আছে তারা মসৃণ। অতএব ঐ তলগুলি সূত্রের উপর লম্ব-প্রতিক্রিয়া করছে, আর সূত্রের যে কোন অংশে উহার দৈর্ঘের দিকে টান বল থাকবে।



3 নং চিত্র

এখন $APQB$ যদি সূত্রটির সাম্যাবস্থা হয় এবং $A'PQB'$ উহার একটি সরণ অবস্থা হয়, তাহলে $A'P + QB' = AP + QB$, যেহেতু সূত্রটি সমদৈর্ঘ্য। এখন T যদি সূত্র দুটির প্রান্তদ্বয়ে টান হয়, তাহলে কার্য $\mathrm{T}.\,AM - \mathrm{T}.\,BN = \mathrm{T}\,(PM - PA) - \mathrm{T}\,(BQ - NQ)$

$$= \mathrm{T}(PA' \cos\theta - PA) - \mathrm{T}(BQ - B'Q\cos\phi)$$

যেখানে $\theta = AP$, $A'P$-এর মধ্যে কোণ ; $\phi = BP$, $B'P$-এর মধ্যে কোণ

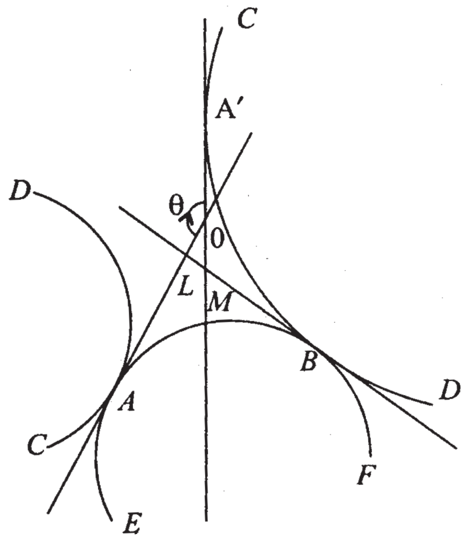
$$\therefore \quad \text{কার্য} = \mathrm{T}(PA' - PA - BQ + B'Q) - \mathrm{T}\left(PA'\frac{\theta^2}{2} + B'Q\frac{\phi^2}{2}\right) + \ldots.$$

$$= 0 - \frac{T}{2}(PA\theta^2 + B'Q\phi^2), \text{ যেহেতু সূত্রটি সমদৈর্ঘ}$$

$$= 0 \text{ (}\theta \text{ ও } \phi\text{-এর প্রথম ঘাতযুক্তপদ পর্যন্ত নিয়ে)}$$

(3) একটি মসৃণ তলের উপর অবস্থানরত কোন বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলটির প্রতিক্রিয়া বল কোন কার্য করে না। কারণ প্রতিক্রিয়া বল তলটির লম্বদিকে আর সরণ স্পর্শক দিকে হতে পারে।

(4) একটি স্থির তলের উপর গড়াইয়া যায় এমন বস্তুর উপর প্রতিক্রিয়াবল কোন কার্য (Rolling) করে না ;



4 নং চিত্র

ধরা যাক্, একটি স্থিরতল EAF-এর উপর গড়াচ্ছে এমন বস্তুর স্পর্শবিন্দু A এবং θ পরিমাণ কোণের ঘূর্ণনের পর নূতন স্পর্শবিন্দু B এবং চলমান বস্তুটিতে A' বিন্দু হল স্পর্শবিন্দু A-এর নতুন অবস্থান। যেহেতু গতি হল গড়ানো, অতএব AB চাপ = গড়ানো বস্তুটির $A'B$ চাপ।

এখন EAF বক্র এবং CAD বক্র দুটির বক্রতাব্যাসার্ধ যদি ρ, ρ' হয়, এবং A বিন্দুতে তলের স্পর্শক ও B বিন্দুতে তলের স্পর্শক-এর মধ্যে কোণ ϕ_1 এবং B বিন্দুতে স্পর্শক ও A' বিন্দুতে স্পর্শক-এর মধ্যে কোণ ϕ_2 হলে

$$\theta = \phi_1 + \phi_2 = \frac{AB}{\rho} + \frac{A'B}{\rho'}$$

প্রতিক্রিয়া বল কর্তৃক কার্য পরিমাণ AA'-এর সঙ্গে সমানুপাতী, কিন্তু $AA' \approx AB.\theta$ এবং AB-এর আসন্ন মান θ-এর সমানুপাতী। অতএব প্রতিক্রিয়া কর্তৃক কৃতকার্যের পরিমাণ θ^2-এর সমানুপাতী। অতএব θ-র প্রথম ঘাত অবধি প্রতিক্রিয়া বলের দ্বারা কৃতকার্য শূন্য পরিমাণ।

9.6 সাধারণীকৃত স্থানাঙ্ক (Generalized Co-ordinates)

কোনও বস্তু অথবা বস্তুসমুচ্চয় দ্বারা গঠিত বস্তুতন্ত্রের যে কোন অবস্থানকে কতগুলি গাণিতিক বস্তু দ্বারা নির্দিষ্টভাবে চিহ্নিত করা যায়। একটি কণার অবস্থান আমরা একটি দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক

জ্যামিতিতে তিনটি পরস্পর লম্ব সমতল হতে দূরত্ব দ্বারা নিদিষ্ট করতে পারি। অন্যথায় গৌলিক মেরুস্থানাঙ্ক অনুসারে একটি দূরত্ব ও অপর দুটি কোণের সাহায্যে কণাটির অবস্থান নির্ণয় করতে পারি। প্রত্যেকটি ক্ষেত্রে ঐগুলি হল কণাটির সাধারণীকৃত স্থানাঙ্ক।

একটি দৃঢ় বস্তুর ক্ষেত্রে বস্তুটির যে কোন একটি বিন্দুর স্থানাঙ্কত্রয় এবং ঐ বস্তুটির মধ্যে ঐ বিন্দু দিয়ে তিনটি অসমতলীয় রেখার (যারা বস্তুটির সাপেক্ষে স্থির আছে) অবস্থান-দ্যোতক তিনটি কোণ জানা থাকলে ঐ বস্তুটির অবস্থান পূর্ণভাবে জানা যাবে। উপরিউক্ত ছয়টি গাণিতিক বস্তুর মান দ্বারা দৃঢ় বস্তুটির অবস্থান নির্ণয় করা যায়।

অনেক সময় দেখা যায় যে কোন বস্তুতন্ত্রের অবস্থান নির্ণায়ক সাধারণীকৃত স্থানাঙ্ক হিসাবে ব্যবহৃত গাণিতিক বস্তুগুলি পরস্পর স্বাধীন নয়। এক্ষেত্রে ঐ স্থানাঙ্কগুলি কিছু সমীকরণ অথবা অসমীকরণকে সিদ্ধ করে। এই জাতীয় সম্পর্ককে বাধক (constraint) বলা হয়। যদি সাধারণীকৃত স্থানাঙ্ক সংখ্যা n ও বাধক সংখ্যা m হয়, তাহলে $n - m$ সংখ্যক সাধারণীকৃত স্থানাঙ্ককে পরস্পর স্বাধীন বলা যায় এবং $n - m$ কে বস্তুতন্ত্রটির মুক্তির মাত্রা (degrees of freedom) বলা হয়।

9.7 বিভিন্ন প্রকারের বাধক (Differrent Types of Constraints)

বস্তুতন্ত্রের উপর অর্থাৎ উহার বিভিন্ন বস্তুকণার অবস্থানের উপর অনেক সময় যে বিধিনিষেধ আরোপিত হয় অর্থাৎ যাকে আমরা বাধক বলি, তা নানা প্রকারের হতে পারে। যেমন, যদি বস্তুকণাসমূহের স্থানাঙ্কর মধ্যে একটি সমীকরণ সম্বন্ধ থাকে অর্থাৎ যদি বাধকটি নিম্নরূপ হয়

$$F(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots, x_n, y_n, z_n) = 0$$

তাহলে বাধকটিকে উভচারী বাধক (Bilateral constraint) বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ, দুটি বস্তুকণার মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্দিষ্ট থাকলে উহা একটি উভচারী বাধক।

কখনও কখনও বাধক অসমীকরণের রূপ গ্রহণ করে, যেমন

$$\phi(x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots, x_n, y_n, z_n) \leq 0 \tag{2}$$

উপরের (2) নং বাধককে একচারী বাধক (unilateral constraint) বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ একটি কণা যদি সর্বদা একটি গোলকের অভ্যন্তরে থাকে, তাহলে উহার স্থানাঙ্কত্রয় $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ এই অসমীকরণকে সিদ্ধ করবে। অতএব ঐ তলটির একদিকে সরণের জন্য বাধকটি সত্য কিন্তু অন্য দিকে সরণের জন্য বাধকটি সত্য থাকবে না।

কল্পিত সরণ (Virtual displacement) :

ধরা যাক একটি বস্তুকণা সর্বদা একটি নির্দিষ্ট তল S-এর উপর রয়েছে এবং A উহার একটি বিন্দু। এখন কণাটি A হইতে B-তে সৃত হলে, সরণ ভেক্টর $\overline{AB}$-কে সম্ভব বলা হবে যদি B বিন্দুটিও S-এর উপর হয়। অন্যথায় $\overline{AB}$ সরণকে অসম্ভব সরণ বলা হবে।

A-তে অবস্থিত বস্তুকণাকে যদি গতি $\vec{v}$ দেওয়া হয়, তাহলে এই গতি কে সম্ভব অথবা বাধকসমূহের সঙ্গো সামঞ্জস্যপূর্ণ বলা হবে, যদি বস্তুকণাটি ঐ তলের উপর চলতে থাকে। অন্যথায় এই গতিকে অসম্ভব বা বাধকসমূহের সঙ্গো সামঞ্জস্যহীন বলা হবে। অতএব বোঝা যায় A বিন্দুতে তলটির যে কোন স্পর্শক দিকের ভেক্টর একটি সম্ভব গতি এবং সমস্ত গতিদিকগুলি তলের স্পর্শক।

এখন A বিন্দুতে যে কোন সম্ভব গতির সঙ্গো সমানুপাতী সরণকে ঐ বিন্দুতে কল্পিত সরণ (virtual displacement) বলা হয়। একটি কল্পিত সরণ ঐ তলের স্পর্শক দিকে থাকে, তার মান ও দিশা ইচ্ছামত হতে পারে। মনে রাখা প্রয়োজন, সাধারণতঃ কল্পিত সরণ সম্ভব সরণ নাও হতে পারে। অবশ্য তল S যদি সমতল হয়, তাহলে কল্পিত সরণ সম্ভব হবে।

সাধারণভাবে কল্পিত সরণ (Virtual displacement in general) ঃ

ধরা যাক A_1, ..., A_n n-সংখ্যক বস্তুকণাবিশিষ্ট একটি বস্তুতন্ত্র। $\overline{A_1B_1}, \ldots, \overline{A_nB_n}$ যথাক্রমে A_1, A_2, ..., A_n-এর সরণ বুঝাবে। এমন বস্তুতন্ত্রটির এই সরণ সম্ভব হবে যদি B_1, B_2, ..., B_n এই অবস্থানগুলিতে বস্তুতন্ত্রটির উপর বাধকগুলি সত্য থাকে। অন্যথায় ঐ সরণ অসম্ভব বলা হবে। যদি A_1, A_2, ..., A_n-কে v_1, v_2, ..., v_n এই বেগগুলি দেওয়া হয়, তাহলে এই বেগসমূহকে সম্ভব বলা যায় যদি ঐ বিন্দুগুলি ঐ বেগ নিয়ে চলতে পারে এবং বাধকগুলি পালিত হয়। অন্যথায় ঐ বেগসমহূকে অসম্ভব বলা হবে।

এখন একটি বস্তুতন্ত্রের কোন নির্দিষ্ট অবস্থানে যদি কণাবিন্দুগুলির সরণ এমন হয় যে উহারা কোন সম্ভব বেগসমূহের সঙ্গো সমানুপাতী, তাহলে ঐ সরণকে বস্তুতন্ত্রের কল্পিত সরণ (virtual displacement) বলা হবে।

এখানে লক্ষণীয় যে বস্তুতন্ত্রটি বাধকমুক্ত হলে, যে কোন সরণই কল্পিত সরণ হবে। কেননা যে কোন বেগই সম্ভব হবে।

9.7.1 বাধক সম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞা

যদি n সংখ্যক বস্তুকণাযুক্ত একটি বস্তুতন্ত্রের উপর নিম্নলিখিত বাধকগুলি প্রযুক্ত থাকে

$$F_j\,(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \ldots\ x_n,\ y_n,\ z_n) = 0 \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

$$\phi_r\,(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_n,\ z_n) \le 0,\ \ r = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$$

তাহলে (δx_1, δy_1, δz_1, ..., δz_n) কোন নির্দিষ্ট অবস্থান হতে কল্পিত সরণ হলে নিম্নলিখিত সমীকরণ ও অসমীকরণ সম্বন্ধ সত্য

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial F_j}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial F_j}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \phi_r}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \phi_r}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \phi_r}{\partial z_i}\delta z_i\right) \le 0,\ r = 1, 2, \ldots, s$$

যেখানে $\phi_r = 0$ নির্দিষ্ট অবস্থানটির জন্য সত্য।

প্রমাণ ঃ (δx_1, ..., δz_n) একটি কল্পিত সরণ।

অতএব F_j (x_1, y_1, ..., z_n) = 0 এই সমীকরণের

সময় t-এর সাপেক্ষে অবকল নিয়ে পাই

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial F_j}{\partial z_n}\frac{dz_n}{dt} = 0,\ \ j = 1, 2, \ldots, m \qquad (1)$$

কিন্তু প্রতিটি বিন্দুর বেগের সঙ্গে সমানুপাতী হল কল্পিত সরণ ; অতএব

$$\delta x_1 : \delta y_1 : \delta z_1 : \ldots : \delta z_n = \frac{dx_1}{dt} : \frac{dy_1}{dt} : \frac{dz_1}{dt} : \ldots : \frac{dz_n}{dt}$$

অতএব (1) হতে পাই

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\delta F_j}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial F_j}{\partial z_i}\delta z_i\right)$$

অনুরূপে ϕ_r (x_1, y_1, z_1, ..., z_n) ≤ 0

ধরা যাক ϕ_r (x_1, ..., z_n) < 0 একটি অবস্থানে। এখন যদি একটি সরণ হয়, তাহলে সন্ততির ধর্ম অনুযায়ী অল্প একটু সময়ের জন্য ϕ_r (x_1, ..., z_n) < 0 থাকিবে এবং ফলে $\phi_r \le 0$ ইহা সত্য থাকবে। আবার যদি $\phi_r = 0$ কোন একটি অবস্থানে একটি নির্দিষ্ট সময়ে, তাহলে বস্তুতন্ত্রটির একটি গতি দিলে (বাধকসমূহ ঠিক থেকে), ϕ_r-এর মান হবে $\phi_r' = \phi_r + \Delta\phi_r$ $t + \Delta t$ সময়ে, (Δt >

0). এখন যেহেতু $\phi_r' \le 0$ এবং $\phi_r = 0$, অতএব $\Delta\phi_r \le 0$. ফলে $\dfrac{\Delta\phi_r}{\Delta t} \le 0$ অর্থাৎ $\dfrac{d\phi_r}{dt} \le 0$. অতএব আমরা পাই

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\phi_r}{\partial x_i}x_i + \frac{\partial\phi_r}{\partial y_i}y_i + \frac{\partial\phi_r}{\partial z_i}z_i\right) \le 0, \quad r = 1, 2, \ldots, s$$

যেহেতু কল্পিত সরণ বেগের সমানুপাতী, অতএব

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\phi_r}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial\phi_r}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial\phi_r}{\partial z_i}\delta z_i\right) \le 0$$

অতএব প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণিত হল।

মন্তব্য ঃ ইহা লক্ষণীয় যে, যদি $\phi_r < 0$ হয়, তাহলে কল্পিত সরণজনিত উপরের অসমীকরণ সত্য নাও হতে পারে।

9.8 কল্পিত কার্যবিষয়ক নীতি (Principle of Virtual Work)

কল্পিত কার্য (Virtual Work)

ধরা যাক n-সংখ্যক বস্তুকণা সমন্বিত একটি তন্ত্রের $\vec{P}_1, \ldots\ldots, \vec{P}_n$ বলগুলির যথাক্রমে A_1, ..., A_n-এ অবস্থিত কণাগুলির উপর ক্রিয়া করছে। এখন এই বস্তুতন্ত্রের একটি ইচ্ছামত কল্পিত সরণ হলে বলগুলির কার্যসমষ্টি

$$= \delta' L = \vec{P}_1 . \vec{\delta}s_1 + \ldots + \vec{P}_n . \vec{\delta}s_n$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(P_{ix}\delta x_i + P_{iy}\delta y_i + P_{iz}\delta z_i\right) \tag{1}$$

যেখানে $\vec{\delta}s_1, \ldots, \vec{\delta}s_n$ গুলি হল A_1, ..., A_n-এর সরণ ভেক্টর এবং δx_i, δy_i, δz_i হল $\vec{\delta}s_i$ ভেক্টরের বিশ্লেষিতাংশ। (1) নং সূত্র দ্বারা $\vec{P}_1, \ldots\ldots, \vec{P}_n$ বলসমূহের কল্পিত কার্যের সংজ্ঞা পাওয়া যায়। বলগুলি যদি একটি অপেক্ষক V হতে উদ্ভূত হয়, তাহলে

$$P_{ix} = \frac{\partial V}{\partial x_i}, P_{iy} = \frac{\partial V}{\partial y_i}, P_{iz} = \frac{\partial V}{\partial z_i}$$

এবং $\delta' L = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\right) = \delta V$

কল্পিত কার্যবিষয়ক নীতি (Principle of Virtual Work)

যদি (A_1, ... , A_n) অবস্থানযুক্ত n-সংখ্যক বস্তুকণাতন্ত্র হয় এবং উহাদের বাধকগুলি যদি সময় নিরপেক্ষ ও উভচারী হয় এবং যদি ঘর্ষণ বল উপস্থিত না থাকে, তাহলে A_1, ... A_n বিন্দুতে প্রযুক্ত $\vec{P}_1,\ldots\vec{P}_n$ বলগুলির সাম্যাবস্থা হবার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল যে প্রতিটি কল্পিত সরণের জন্য প্রযুক্ত বলগুলির কল্পিত কার্যসমষ্টি শূন্য হবে।

অর্থাৎ $\delta' L \equiv \sum_{i=1}^{n}\left(P_{ix}\delta x_i + P_{iy}\delta y_i + P_{iz}\delta z_i\right) = 0$

মন্তব্য : এখানে প্রযুক্ত বল বলতে বস্তুতন্ত্রে অভ্যন্তরজাত বল অথবা প্রতিক্রিয়াবল ব্যতিরেকে অন্যান্য বলকে বুঝান হয়েছে।

লাগ্রাঞ্জ (Lagrange) কর্তৃক উপস্থাপিত উপরের নীতিটি সাধারণভাবে সত্য ধরে স্থিতিবিদ্যা আলোচনা করা যেতে পারে। অবশ্য কতগুলি বিশেষ ক্ষেত্রে এই নীতির সরাসরি প্রমাণ সম্ভব। আমরা প্রথমে প্রতিক্রিয়া বলসমূহের কার্য সম্পর্কে একটি প্রকল্প (hypothesis) গ্রহণ করব ও উহার সাহায্যে কল্পিত কার্যনীতির প্রয়োজনীয়তা দেখাব।

9.8.1 প্রতিক্রিয়া বল সম্পর্কিত প্রকল্প

'কোন বস্তুতন্ত্রে (যেখানে ঘর্ষণবল অনুপস্থিত) যে-কোনো কল্পিত সরণজনিত প্রতিক্রিয়া বলগুলির কার্যসমষ্টি শূন্য।'

9.8.2 কল্পিত কার্যনীতির প্রয়োজনীয়তা

ধরা যাক বস্তুতন্ত্রটি প্রযুক্ত বল $\vec{P}_1,\ldots\vec{P}_n$ সাপেক্ষে সাম্যাবস্থায় আছে। এখন প্রতিটি বিন্দু A_1, ... A_n -তে যথাক্রমে $\vec{R}_1,\vec{R}_2,\ldots,\vec{R}_n$ প্রতিক্রিয়া বল হলে, A_1, ..., A_n-এর প্রত্যেকের সাম্যের জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল

$$\vec{P}_1 + \vec{R}_1 = 0, \vec{P}_2 + \vec{R}_2 = 0, \vec{P}_n + \vec{R}_n = 0 \qquad (1)$$

অতএব কোন কল্পিত সরণ $\vec{\delta}s_1,\ldots,\vec{\delta}s_n$-এর জন্য বলসমূহ কর্তৃক কৃতকার্য

$$=\left(\vec{P}_1+\vec{R}_1\right).\vec{\delta}s_1+\ldots+\left(\vec{P}_2+\vec{R}_1\right).\vec{\delta}s_2+\ldots\left(\vec{P}_n+\vec{R}_n\right).\vec{\delta}s_n=0 \tag{2}$$

[(1) হতে]

কিন্তু 9.8.1-এর প্রকল্প অনুসারে

$$\vec{R}_1.\vec{\delta}s_1+\ldots+\vec{R}_n.\vec{\delta}s_n=0 \tag{3}$$

অতএব (2) হতে (3) ব্যবহার করিয়া পাই

$$\vec{P}_1.\vec{\delta}s_1+\ldots+\vec{P}_n.\vec{\delta}s_n=-\left(\vec{R}_1.\vec{\delta}s_1+\ldots+\vec{R}_n.\vec{\delta}s_n\right)=0 \tag{4}$$

অতএব (4) হতে পাই যে প্রযুক্ত বলগুলি কর্তৃক কল্পিত কার্য শূন্য। অতএব 9.8-এ বর্ণিত কল্পিত কার্যনীতি প্রয়োজনীয়।

9.8.3 কতকগুলি বিশেষ ক্ষেত্রে কল্পিত কার্যনীতির প্রমাণ

(i) একটি মুক্ত বস্তুকণার ক্ষেত্রে (A particle free constraints) :

ধরা যাক একটি মাত্র বস্তুকণা—যা কোনো প্রকার বাধক দ্বারা বন্ধ নয় A তে রয়েছে এবং $\vec{P}$ বল প্রযুক্ত হয়েছে। যেহেতু বস্তুকণাটি মুক্ত, অতএব উহার উপর কোনো প্রতিক্রিয়া বল নেই। অতএব সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল $\vec{P}=0$.

এখন $\vec{\delta}s$ কোনো কল্পিত সরণ হলে কল্পিত কার্য $\vec{P}\cdot\vec{\delta}s$. অতএব সাম্যের জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত হল $\vec{P}\cdot\vec{\delta}s=0$. যে-কোনো কল্পিত সরণ $\vec{\delta}s$-এর জন্য। আবার যদি যে-কোনো কল্পিত সরণের জন্য $\vec{P}.\vec{d}s=0$ হয় তবে $d\vec{s}\parallel\vec{P}$ নিলে $P^2=0$ হয় অর্থাৎ $P=0$. অতএব কণাটি সাম্যে থাকবে। অতএব শর্তটি যথেষ্ট।

(ii) একটি মুক্ত দৃঢ় বস্তুর উপর ক্রিয়ারত সমতলীয় বলগোষ্ঠীর ক্ষেত্রে :

ধরা যাক $\vec{P}_1,\ldots\vec{P}_n$ বলগুলি (একই সমতলে অবস্থিত) একটি দৃঢ় বস্তুর A_1, A_2 ..., A_n বিন্দুতে ক্রিয়া করে, যেখানে A_1, A_2 ..., A_n বিন্দুগুলি বলগুলির সমতলে অবস্থিত।

একটি দৃঢ় বস্তুর উপর বলগুলি সমতলের একটি বিন্দু O-কে আদি বিন্দু ধরে Ox, Oy ঐ সমতলে লম্ব অক্ষ ধরলাম। A_1 ..., A_n-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. এখন

বলগোষ্ঠীটির সমতুল হল O বিন্দুতে একটি বল (X, Y) এবং একটি দ্বন্দ্ব G যার ভ্রামক সমতলের উপর লম্ব। অর্থাৎ

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i, Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i, G = \sum_{i} \left(x_i Y_i - y_i X_i\right) \tag{1}$$

এই বলগুলির সমতলে বস্তুটির যে-কোনো একটি কল্পিত সরণ—এইভাবে নেওয়া যেতে পারে। সমগ্র বস্তুটির Oz অক্ষের সাপেক্ষে $\delta\theta$ কোণে ঘূর্ণন এবং তারপরে সমগ্র বস্তুর একটি সাধারণ চলন (পরিশিষ্ট দ্রষ্টব্য)। সাধারণ চলনের বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে a, b. ফলে ঐ তলে অবস্থিত যে-কোনো বিন্দু (x, y)-এর কল্পিত সরণ হবে $(\delta x, \delta y, \delta z)$, যেখানে

$$\delta x = a + \left[\delta\theta \vec{k} \times \vec{r}\right]_x = a - y\delta\theta$$

$$\delta y = b + \left[\delta\theta \vec{k} \times \vec{r}\right]_y = b + x\delta\theta$$

$$\delta z = 0$$

অতএব বলগুলির দ্বারা কল্পিত কার্য

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i\right) = a\sum X_i + b\sum Y_\delta + \delta\theta \sum_i \left(x_i Y_i - y_i X_i\right)$$

$$= aX + bY + G\delta\theta \tag{2}$$

এখন ধরা যাক দৃঢ় বস্তুটি সাম্যাবস্থায় আছে। অতএব $X = Y = G = 0$. অতএব (2) হতে আমরা পাই কল্পিত কার্য যে-কোনো সরণের জন্য শূন্য মান। অতএব নীতিটি প্রয়োজনীয়।

এবার ধরা যাক যে-কোনো কল্পিত সরণের জন্য কল্পিত কার্য শূন্য। অতএব $(a, b, \delta\theta)$ যাই হোক না কেন, কল্পিত কার্য শূন্য। অতএব যদি $a \neq 0$, $b = \delta\theta = 0$ এইরূপ কল্পিত সরণ নেওয়া হয়, তাহলে (2) থেকে পাই $X = 0$. অনুরূপভাবে $b \neq 0$, $a = \delta\theta = 0$ থেকে পাই $Y = 0$ এবং $a = b = 0$, $\delta\theta \neq 0$ থেকে পাই $G = 0$. অতএব $X = Y = G = 0$. অর্থাৎ বস্তুতন্ত্রের উপর প্রযুক্ত বলগুলি সাম্যে রয়েছে। অতএব কল্পিত কার্যনীতি সাম্যাবস্থার জন্য যথেষ্ট।

অতএব প্রমাণ হল যে-কোনো দৃঢ় বস্তুর উপর ক্রিয়ারত সমতলীয় বলের ক্ষেত্রে কল্পিত কার্যনীতি সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট।

(iii) একটি দৃঢ় বস্তুর উপর বলসমূহের সাম্যের শর্ত :

'কোনো দৃঢ় বস্তুর উপর বলসমূহের সাম্যের জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল—যে-কোনো কল্পিত সরণের জন্য প্রযুক্ত বলসমূহ দ্বারা কল্পিত কার্যের পরিমাণ শূন্য।'

প্রমাণ : কোন দৃঢ় বস্তুর সাধারণ সরণকে ঐ বস্তুর কোন একটি বিন্দুর চলন ও অতঃপর ঐ বিন্দুর মধ্যগামী কোন রেখার সাপেক্ষে ঘূর্ণন হিসাবে দেখা যেতে পারে। ধরা যাক একটি কল্পিত সরণ (δa, δb, δc) বস্তুটির O বিন্দুকে O'-এ নিয়ে যায় এবং O'-এর মধ্য দিয়ে একটি ঘূর্ণন যার বিশ্লেষিতাংশসমূহ $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$, $\delta\theta_3$. ফলে বস্তুটির যে-কোনো বিন্দু (x, y, z)-এর কল্পিত সরণ হবে

$$\delta x, \delta y, \delta z = (\delta a, \delta b, \delta c) + (\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3) \times (x, y, z)$$

অর্থাৎ $\delta x = \delta a - y\delta\theta_3 + z\delta\theta_2$

$$\delta y = \delta b - z\delta\theta_1 + x\delta\theta_3$$

$$\delta z = \delta c - x\delta\theta_2 + y\delta\theta_1 \qquad (1)$$

অতএব A_1, A_2, ..., Aw বিন্দুতে $\vec{P}_1, \vec{P}_{2,} \ldots, \vec{P}_n$ বলসমূহ প্রযুক্ত হলে উপরের কল্পিত সরণজনিত কার্য

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i\right) \qquad (2)$$

যেখানে $(X_i, Y_i, Z_i) = \vec{P}_i$ এবং A_i-এর স্থানাঙ্ক (x_i, y_i, z_i)

অতএব (1) ব্যবহার করে (2) হতে পাই,

কার্য $\sum_{i=1}^{n}[X_i(\delta a - y_i\delta\theta_3 + z_i\delta\theta_2) + Y_i(\delta b - z_i\delta\theta_1 + x_i\delta\theta_3$

$$+Z_i(\delta c - x_i\delta\theta_2 + y_i\delta\theta_1)]$$

$$= \delta a\sum X_i + \delta b\sum Y_i + \delta c\sum Z_i + \delta\theta_1\sum_{i=1}^{n}\left(y_iZ_i - z_iY_i\right)$$

$$+\delta\theta_2\sum\left(z_iX_i - x_iZ_i\right) + \delta\theta_3\sum\left(x_iY_i - y_iX_i\right) \qquad (3)$$

সাম্যাবস্থার জন্য যথেষ্ট :

ধরা যাক যে-কোনো কল্পিত সরণের জন্য বলসমূহের কল্পিত কার্য শূন্যের সমান। অতএব যদি $\delta a \neq 0$, $\delta b = \delta c = \delta\theta_1 = \delta\theta_2 = \delta\theta_3 = 0$ এইরূপে একটি সরণ নেওয়া হয়, তাহলে (3)

থেকে পাই যে $\delta a\sum X_i = 0.$ কিন্তু $\delta a \neq 0$, অতএব $\sum X_i = 0$. অনুরূপভাবে পাওয়া যায়

$$\sum Y_i = 0, \sum Z_i = 0 \tag{4}$$
$$\sum (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0$$
$$\sum (z_i X_i - x_i Z_i) = 0$$
$$\sum (x_i Y_i - y_i X_i) = 0$$

কিন্তু উপরের (4)-এ শর্ত ছয়টি বস্তুটির সাম্যের পক্ষে যথেষ্ট। অতএব বস্তুটি সাম্যে থাকিবে।

সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় :

ধরা যাক বস্তুটি প্রযুক্ত বলাধীন সাম্যে আছে। অতএব বলগুলির ভেক্টর যোগফল শূন্য এবং বলগুলির আদি বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক যোগফলও শূন্য।

অর্থাৎ $\sum X_i = 0 \sum Y_i = \sum Z_i$

$$0 = \sum \left(Y_i Z_i - z_i Y_i\right) = \sum \left(z_i X_i - x_i Z_i\right) = \sum \left(x_i Y_i - y_i X_i\right)$$

অতএব (3) থেকে পাচ্ছি, যে-কোনো কল্পিত সরণের জন্য কল্পিত কার্য = 0. অতএব কল্পিত কার্যনীতি সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয়।

9.9 কল্পিত কার্যনীতির প্রয়োগ

আমরা দেখলাম যে কল্পিত কার্যনীতি কোনো দৃঢ় বস্তুর বলসমূহের সাম্যাবস্থার জন্য একটি প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত। প্রকৃতপক্ষে স্থিতি তত্ত্বের মূলনীতি হিসাবে কল্পিত কার্যনীতি গ্রহণ করা যেতে পারে। যে-কোনো বস্তুতন্ত্রের সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত পাওয়া যায়। উদাহরণস্বরূপ নিম্নে কয়েকটি ক্ষেত্র দেওয়া হল।

(1) কতকগুলি দৃঢ় বস্তু দ্বারা গঠিত বস্তুতন্ত্র যার উপর একমাত্র বহিঃস্থ বল হল উহাদের ওজন বল।

এই ক্ষেত্রে যদি কোনো নির্দিষ্ট তল হইতে বস্তুগুলির ভারকেন্দ্রের উচ্চতা যথাক্রমে z_1, z_2, ... হয় এবং w_1, w_2, ... যথাক্রমে উহাদের ওজন বল হয়, তাহলে আমরা বস্তুতন্ত্রের ভারকেন্দ্রের উচ্চতা $\bar{z}$ পাই, যেখানে

$$\bar{z} = \frac{w_1 z_1 + w_2 z_2 + \ldots + w_n z_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

এখন কল্পিত কার্যনীতি অনুসারে উপরের ঐ অবস্থান সাম্যাবস্থা হলে সামান্য একটু কল্পিত সরণের জন্য কল্পিত কার্য শূন্য হবে। (এখানে বস্তুতন্ত্রটির বাথকসমূহ উভচারী ধরা হল।)

অতএব আমরা পাই

$$w_1dz_1 + w_2dz_2 + \ldots + w_ndz_n = 0$$

কিন্তু $d\bar{z} = \dfrac{w_1dz_1 + w_2dz_2 + \ldots + w_2dz_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$

অতএব সাম্যাবস্থার শর্ত হল $d\bar{z} = 0$. এই শর্তটি থেকে আমরা পাই যে বস্তুতন্ত্রটি সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত এই যে বস্তুতন্ত্রের ভারকেন্দ্রের উচ্চতা ষ্টেশনারী (*stationary*) হবে। যেমন উচতা সর্ববৃহৎ অথবা ক্ষুদ্র হইতে পারে।

যদি পরস্পর সম্পর্কশূন্য সাধারণ স্থানাঙ্ক θ ϕ ψ .....ইত্যাদির মাধ্যমে বস্তুগুলির অবস্থান নির্দেশ করা যায়, তাহলে $d\bar{z} = 0$ এই শর্তটিকে θ ϕ ψ .....ইত্যাদির মাধ্যমে লেখা যায় :

$\Theta d\theta + \Phi d\phi + \Psi d\psi + \ldots = 0$. এখন θ ϕ ψ পরস্পর অনির্ভর হলে আমরা পাই

$\Theta = 0,\ \Phi = 0,\ \Psi = 0$ ইত্যাদি।

এই সমীকরণগুলির সমাধান থেকে বস্তুতন্ত্রের সাম্যাবস্থা পাওয়া যায়।

(2) কল্পিত কার্যনীতির প্রয়োগ দ্বারা অজ্ঞাত প্রতিক্রিয়া বল নির্ণয় :

আমরা জানি কোনো বস্তুতন্ত্রে কল্পিত সরণ দিলে, কেবলমাত্র প্রযুক্ত বলগুলির কার্যসমষ্টি নিতে হয়। প্রতিক্রিয়া বলগুলির কার্যসমষ্টি শূন্য। এখন যদি বস্তুতন্ত্রটির সাম্যাবস্থা জানা থাকে, তাহলে আমরা ঐ অবস্থায় কোনো প্রতিক্রিয়া বল কল্পিত কার্যনীতির সাহায্যে জানিতে পারি। এক্ষেত্রে আমরা অজ্ঞাত প্রতিক্রিয়া বলগুলিকে প্রযুক্ত বল হিসাবে কল্পিত কার্যের মধ্যে নেব এবং এমন একটি কল্পিত সরণ নেব যে ঐ প্রতিক্রিয়া বলের উদ্ভবের কারণস্বরূপ বাধকটিকে ভঙ্গ করে। যেমন যদি একটি সূত্র দ্বারা দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু যুক্ত থাকে, তবে উহার টান (tension) (সাম্যাবস্থায়) জানতে হলে সাম্যাবস্থা হতে এমন একটি সরণ নিতে হবে যা ঐ সূত্রটির সংযোগ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্বকে পরিবর্তিত করে। অর্থাৎ যদি T ঐ সূত্রের টান হয়, তাহলে আমরা মনে করি যে সূত্রটি নেই, তার পরিবর্তে ঐ প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে যথাক্রমে T, T পরস্পর বিপরীত বল ক্রিয়া করছে। এখন যদি কল্পিত সরণ অনুসারে ঐ দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব dl বৃদ্ধি পায়, তাহলে উপরের (T, T) বলদ্বয়—Tdl এই পরিমাণ কার্য করছে। অতএব কল্পিত কার্যনীতি হতে আমরা পাই

$$-Tdl + \Theta\, d\theta + \ldots = 0 \qquad (1)$$

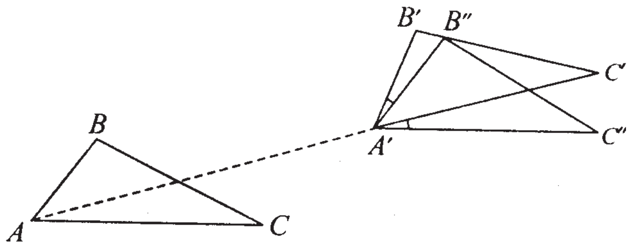
যেহেতু সাম্যাবস্থা জানা আছে এবং dl-কে স্থানাঙ্ক পরিবর্তনের মাধ্যমে প্রকাশ করে $d\theta$ ইত্যাদির সহগ শূন্য মান হবে। অতএব কল্পিত কার্য শূন্য অর্থাৎ (1) নং সমীকরণ হতে আমরা T-এর মান পাই।

9.10 পরিশিষ্ট

1. একটি দৃঢ় বস্তুর সমতলীয় সরণ (Planar displacement of a rigid body) :

আমরা একটি দৃঢ় বস্তুর এমন একটি সরণ সম্পর্কে আলোচনা করব যে সরণের ফলে বস্তুটির প্রতিটি কণা একটি নির্দিষ্ট সমতলের সমান্তরাল সমতলে থাকবে।

ধরা যাক একটি নির্দিষ্ট সমতলের সমান্তরাল সমতলের একটি ছেদ বস্তুটির আদি অবস্থানে A, B, C তিনটি অসমরেখীয় বিন্দু দিয়ে যাচ্ছে এবং সরণ হবার পর ঐ বিন্দুত্রয় একই সমতলে যথাক্রমে A', B', C' বিন্দুতে অবস্থান করছে। A, B, C তিনটি যেহেতু অসমরেখীয় এবং বস্তুটি দৃঢ়, অতএব উহাদের অবস্থান জানলেই সমগ্র বস্তুটির অবস্থান অনন্যভাবে জানা যায়। প্রথমে আমরা বস্তুটির প্রত্যেক বিন্দুকে $\vec{AA'}$ এই মাপের চলন (translation) কল্পনা করলাম। ফলে A বিন্দু A'-এর



5 নং চিত্র

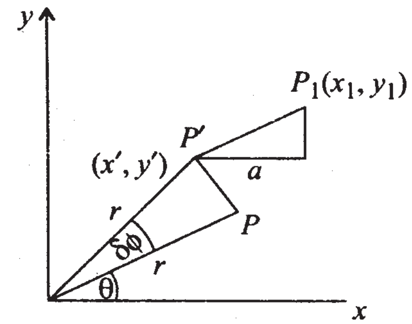
সঙ্গে মিলিত হল। এবং A', B'', C হল A, B, C-এর চলনজনিত অবস্থান। এখন দৃঢ় বস্তুর ধর্ম হতে $AB = A'B'' = A'B'$ এবং $AC = A'C'' = A'C'$ এবং $\angle BAC = \angle B''A'C'' = \angle B'A'C$। অতএব (5 নং চিত্র) হতে পাই $\angle C''A'C' = \angle B''A'B'$. অতএব বস্তটিকে A'-এর মধ্যগামী নির্দিষ্ট সমতলের অক্ষের সাপেক্ষে $\angle C''A'C'$ এই পরিমাণ ঘূর্ণন দিলে বস্তুটির C'', A', B'' বিন্দুগুলি যথাক্রমে C', A', B' বিন্দুগুলিতে যাবে। অর্থাৎ বস্তুটি সরণজাত অবস্থানে আসবে। অতএব আমরা দেখলাম যে বস্তুটির প্রথম অবস্থান হতে দ্বিতীয় অবস্থানে যাবার জন্য একটি উপযুক্ত চলন এবং একটি উপযুক্ত ঘূর্ণন সর্বদা পাওয়া যায়।

মন্তব্য : উপরের প্রমাণ হতে সহজেই অনুমেয় যে-কোনো অবস্থান হতে অন্য কোনো নির্দিষ্ট অবস্থানে যাবার জন্য একাধিক উপায়ে ঐ চলন ও ঘূর্ণন নেওয়া যেতে পারে।

2. উপরের চিত্র হতে সহজেই অনুমেয় যে আগে ঘূর্ণন পরে চলন এইরূপ প্রয়োগ করলে অসুবিধা হবে না।

দৃঢ় বস্তুর সরণজনিত স্থানাঙ্ক পরিবর্তন :

ধরা যাক নির্দিষ্ট সমতলে অবস্থিত Ox, Oy অক্ষ সাপেক্ষে ঐ তলে যে-কোনো বিন্দুর আদি স্থানাঙ্ক (x, y). ধরা যাক্ Oz অক্ষের সাপেক্ষে $\delta\phi$ কোণে বিঘূর্ণিত ও পরে (a, b) এই পরিমাণ চলন প্রাপ্ত। ঘূর্ণনের ফলে (x, y) বিন্দুটি (x', y') গিয়েছে এবং সরণের ফলে (x_1, y_1)-এ গিয়েছে।



6 নং চিত্র

অতএব $$x' = r\cos(\theta + \delta\phi)$$

$$y' = r\sin(\theta + \delta\phi)$$

এবং $$x_1 = x' + a = r\cos(\theta + \delta\phi) + a$$

$$y_1 = y' + b = r\sin(\theta + \delta\phi) + b$$

অতএব P বিন্দুর সরণ $(\delta x, \delta y)$ হচ্ছে

$$\delta x = r\cos(\theta + \delta\phi) + a - r\cos\theta$$

$$\delta y = r\sin(\theta + \delta\phi) + b - r\sin\theta$$

এখন সমগ্র সরণটি অল্প হলে অর্থাৎ $\delta\phi$ এবং a, b স্বল্প হলে আমরা উপরের ফর্মূলা হতে পাই

$$\delta x = r(\cos\theta\cos\delta\phi - \sin\theta\sin\delta\phi) - r\cos\theta + a$$

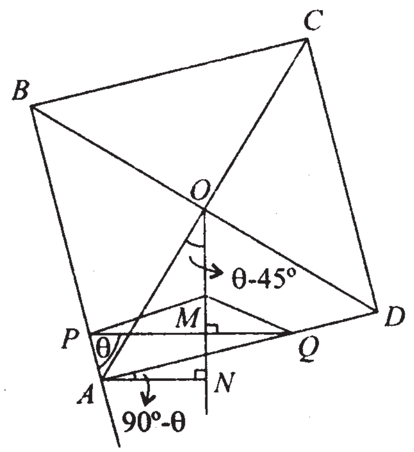
$$\approx a - r\sin\theta\sin\delta\phi \approx a - y\delta\phi = a - y\delta\phi$$

$$\delta y = r(\sin\theta\cos\delta\phi + \cos\theta\sin\delta\phi) + b \quad r\sin\theta \approx b + x\delta\phi$$

9.11 উদাহরণমালা

1. একটি বর্গক্ষেত্রাকার বোর্ড যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য $2a$, উল্লম্ব তলে দুটি সমঅনুভূমিক মসৃণ পেরেকের উপর সাম্যাবস্থায় আছে। পেরেক দুটির দূরত্ব c. দেখান যে বর্গক্ষেত্রটির একটি পার্শ্ব দিগন্তরেখার সঙ্গে 45^o অথবা $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{a^2-c^2}{c^2}$ কোণ করে আছে।

P, Q দুটি পেরেক, $ABCD$ বর্গক্ষেত্র চিত্রে সাম্যাবস্থায় থাকিবার কালে BA বাহু PQ-এর সঙ্গে θ কোণ করে।



7 নং চিত্র

A হতে PQ-এর উপর লম্ব $= AP \sin\theta$

$$= MN = PQ\cos\theta\sin\theta$$

$$= \mathrm{C}\cos\theta \sin\theta$$

অতএব PQ হতে বর্গক্ষেত্রের ভারকেন্দ্রের উচ্চতা

$$h = OM = ON - MN = OA \cos(\theta - 45^o) - c \cos\theta\sin\theta$$

$$= \sqrt{2}a\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\right)-c\cos\theta\sin\theta$$

$$= a(\cos\theta + \sin\theta) - c \cos\theta \sin\theta$$

এখন কোনো কল্পিত সরণের জন্য

কল্পিত কার্য $= 0, - W\delta h = 0$

অর্থাৎ $\delta h = 0$

অর্থাৎ

$$a(\cos\theta - \sin\theta) - c\cos^2\theta + c \sin^2\theta = 0$$

$$(\cos\theta - \sin\theta)\ (a- c\cos\theta - c\sin^2\theta) = 0$$

অতএব হয় $\cos\theta - \sin = 0 \Rightarrow \theta = 45^o$

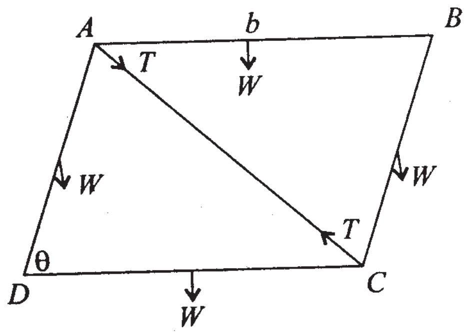
অথবা $a = c(\cos\theta + \sin\theta) \Rightarrow a^2 = c^2(1+\sin 2\theta) \Rightarrow \sin 2\theta = \dfrac{a^2 - c^2}{c^2}$

$$\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{a^2 - c^2}{c^2}$$

2. b দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ও W ওজনবিশিষ্ট চারটি সমান দণ্ড দ্বারা গঠিত রম্বসের ক্ষুদ্রতম কর্ণটি a দৈর্ঘ্যের দড়ি হলে এবং রম্বসের একটি বাহু অনুভূমিক করিয়া রাখা হলে দেখান যে দড়িটির টান হল

$$\frac{2W\left(2b^2 - a^2\right)}{b\sqrt{4b^2 - a^2}}$$

সমাধান :



8 নং চিত্র

$ABCD$ রম্বসের AB বাহু অনুভূমিকভাবে স্থির আছে। AC ক্ষুদ্র কর্ণ একটি দড়ি যার সাম্যাবস্থায় টান = T। দড়ির টান বার করবার জন্য দড়ির পরিবর্তে দুটি প্রান্তে T ও T বিপরীত বল ক্রিয়া করে ধরলাম। AD বাহু অনুভূমির সঙ্গো θ কোণ করলে এমন একটি সরণ দেওয়া হল যাতে θ পরিবর্তিত হয়ে $\theta + \delta\theta$ হল, কিন্তু AB স্থির থাকল। তাহলে সাম্যের জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত অনুসারে (AB হতে AD, BC ও DC-এর ভারকেন্দ্রের গভীরতা মেপে) সাম্যাবস্থার θ কোণ এমন হবে যে

$$2W\delta\left(\frac{b}{2}\sin\theta\right)+W\delta(b\sin\theta)-T\delta\sqrt{\left(b^2+b^2-2b^2\cos\theta\right)}=0$$

$$2Wb\cos\theta-T\frac{b^2\sin\theta}{\sqrt{2b^2(1-\cos\theta)}}=0$$

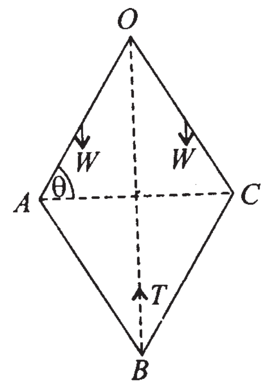
অতএব সাম্যাবস্থায় দড়ির টান $T=\dfrac{2Wb\cos\theta\sqrt{2b^2(1-\cos\theta)}}{b^2\sin\theta}$

কিন্তু $a^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos\theta$ ($\therefore$ কর্ণটির দৈর্ঘ্য $= a$)

অতএব $T=\dfrac{2bW(2b^2-a^2)a}{2b^2b^2\sqrt{1-\dfrac{(2b^2-a^2)^2}{4b^4}}}$

$$=\frac{2W\left(2b^2-a^2\right)}{b\sqrt{4b^2-a^2}}$$

3. চারটি সমান যুক্ত কাঠি—যাহাদের প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য a, একটি কৌণিক বিন্দু হতে ঝোলান আছে। ঐ কৌণিক বিন্দুর সঙ্গো বিপরীত কৌণিক বিন্দু একটি স্থিতিস্থাপক দড়ি দিয়ে যুক্ত। যদি স্থিতিস্থাপিতাঙ্ক একটি কাঠির ওজনের সমান হয় এবং কাঠিগুলি একটি বর্গক্ষেত্রাকারে ঝুলতে থাকে, দেখান যে দড়ির অসংবৃদ্ধ দৈর্ঘ্য ছিল $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.



9 নং চিত্র

ধরা যাক অসংবৃদ্ধ দড়ির দৈর্ঘ্য x. তাহলে যেহেতু সাম্যাবস্থায় দৈর্ঘ্য হল $\sqrt{2a}$, অতএব দড়ির সাম্যাবস্থায় টান হল

$$T = W\frac{\sqrt{2a} - x}{x}$$

কিন্তু সাম্যাবস্থায় কল্পিত কার্যনীতি অনুসারে

$$2W\delta\left(\frac{a}{2}\sin\theta\right) + 2W\delta\left(a\sin\theta + \frac{a}{2}\sin\theta\right)$$

$$-T\delta(2a\sin\theta) = 0$$

বা, $4Wa\cos\theta = 2Ta\cos\theta$

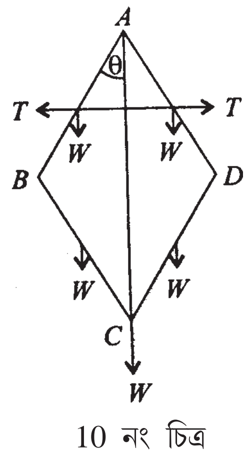
কিন্তু $\cos\theta \neq 0$, অতএব $T = 2W$

অতএব $W\frac{\sqrt{2a} - x}{x} = 2W$

অর্থাৎ $x = \frac{\sqrt{2}}{3}a$

4. সমান ওজন W বিশিষ্ট চারটি দণ্ড দ্বারা একটি রম্বস $ABCD$ (মসৃণভাবে সংযুক্ত) A বিন্দু হতে ঝুলছে এবং ভার WC বিন্দুতে যুক্ত আছে। একটি কঠিন দণ্ড দ্বারা (যার ওজন অবহেলাযোগ্য) AB ও AD-এর মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযুক্ত হয়েছে। AB, AD-এর AC-এর সঙ্গে কোণ α হলে, দেখান যে কঠিন দণ্ডটির উপর চাপবল হবে

$$(2W + 4w)\tan\alpha$$



10 নং চিত্র

ধরলাম যে AB ও AD-এর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের চাপবল T এবং উহারা AB, AD দণ্ড দুটির উপর ক্রিয়া করে।

দণ্ডগুলির দৈর্ঘ্য প্রতিটির $2a$ ধরলাম। অতএব একটু সরণ কল্পনা করা হল যাতে $\theta \to \theta + d\theta$ হল। ফলে প্রযুক্ত বলগুলি যে ক্রিয়া করবে, তা শূন্য হতে হবে, সাম্যাবস্থার জন্য। অতএব

$$2w\delta(a\cos\theta) + 2w\delta(3a\cos\theta) + W\delta(4a\cos\theta) + 2T\delta(a\sin\theta) = 0$$

$$(-8wa\sin\theta - 4Wa\sin\theta)\ \delta\theta + 2T\ a\cos0\delta\theta = 0$$

অতএব সাম্যাবস্থার জন্য, যেহেতু $\delta\theta \neq 0$, $\theta = \alpha$ আমরা পাই

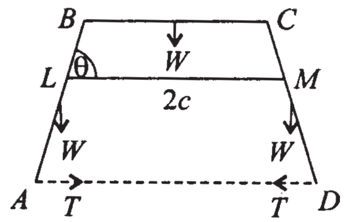
$$T = (4w + 2W)\ \tan\alpha$$

5. তিনটি দৃঢ় দণ্ড AB, BC, CD, যাদের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য $2a$। মসৃণভাবে B ও C-তে সংযুক্ত হয়েছে ; এই বস্তুতন্ত্রটি এমনভাবে রাখা হল যে উহা দুটি মসৃণ পেরেক (যাদের মধ্যে দূরত্ব $2c$) এর উপর সমভূমিকভাবে অবস্থিত থাকে ; এবং AB ও CD অনুভূমিক রেখার সঙ্গে α কোণ করে। দেখান যে এই বস্তু সংগঠন রাখবার জন্য প্রয়োজনীয় AD দড়ির টান হবে

$$\frac{1}{4} W \operatorname{cosec}\alpha \sec^2\alpha \left\{\frac{3c}{a} - \left(3 + 2\cos^2\alpha\right)\right\}$$

যেখানে W হল প্রতিটি দণ্ডের ওজন।

সমাধান :



11 নং চিত্র

L, M পেরেক দুটি হলে, স্থির অনুভূমিক রেখা LM হতে অন্যান্য দণ্ডগুলির ভারকেন্দ্রের উচ্চতা মাপা হবে। এখন যদি AB অনুভূমিক রেখা LM-এর সঙ্গে θ কোণ করে, তাহলে একটি কল্পিত সরণ দেওয়া হল, যাতে $\theta \to \theta + d\theta$ হল। উপরের চিতর অনুসারে $2a = BC$.

অতএব $2c = LM = BC + 2BL\cos\theta$

$$= 2a + 2BL\cos\theta$$

অতএব $BL = \dfrac{c-a}{\cos\theta}$

অতএব AB দণ্ডের ভারকেন্দ্রের অবস্থান LM হতে নীচে দুরত্ব

$$= a\ \sin\theta - BL\sin\theta$$

$$= \left(a - \frac{c-a}{\cos\theta}\right)\sin\theta$$

$$= (a\cos\theta - c + a)\ \tan\theta$$

অনুরূপভাবে, BC-এর উচ্চতা $= BL\sin\theta$

$$= (c - a)\ \tan\theta$$

অতএব কল্পিত সরণের জন্য কার্যের পরিমাণ $= 0$

অর্থাৎ

$$2W\delta\{(a\cos\theta - c + a)\ \tan\theta\} - W\delta(c - a)\ \tan\theta$$
$$- T\delta(2a + 4a\cos\theta) = 0$$

$$2W\{a\cos\theta - (c - a)\ sec^2\theta\ \} - W(c - a)\ sec^2\theta + T.\ 4a\sin\theta = 0$$

যেহেতু সাম্যের জন্য কল্পিত সরণজনিত কার্য $= 0$ অতএব $\theta = \alpha$ সাম্যাবস্থায় θ-এর মান হলে

$$T = \frac{W}{4}\operatorname{cosec}\alpha\left[\frac{(c-a)}{a}\sec^2\alpha - 2\cos\alpha + 2\frac{(c-a)}{a}\sec^2\alpha\right]$$

$$= \frac{W}{4}\operatorname{cosec}\alpha\left[\frac{3c}{a}\sec^2\alpha - 3\sec^2\alpha - 2\cos\alpha\right]$$

$$= \frac{W}{4}\operatorname{cosec}\alpha\sec^2\alpha\left\{\frac{3c}{a} - 3 - 2\cos^3\alpha\right\}$$

6. দুটি সমান ($2b$ দৈর্ঘ্যের) সুষম দণ্ড AB ও AC, A বিন্দুতে মুক্তভাবে যুক্ত (*freely jointed*) এবং তারা একটি সমৃণ উল্লম্ব বৃত্তের উপর স্থিরাবস্থায় আছে। বৃত্তের ব্যাসার্ধ a. যদি দণ্ডদ্বয়ের মধ্যে কোণ হয় 2θ, তবে দেখান যে

$$b\sin^3\theta = a\cos\theta$$

9.12 সারাংশ

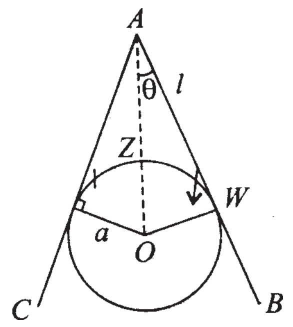
এই এককে সাম্যের জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত কল্পিত কার্য মাধ্যমে প্রকাশ করা হচ্ছে। যদি একটি বস্তুতন্ত্রের বাধকগুলি এমন হয় যে তারা উভচারী (অর্থাৎ যদি বাধক সম্পর্ক একটি সমীকরণ রূপে প্রকাশ করা সম্ভব হয়) তাহলে সাম্যের জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল যে-কোনো কল্পিত সরণ (যা বস্তুতন্ত্রটির জ্যামিতিক শর্তকে লঙ্ঘন করে না) দেওয়া হলে তার দরুন প্রযুক্ত বলসমূহ দ্বারা কৃতকার্য সমষ্টি শূন্য হবে।

এই শর্ত প্রয়োগ করে বিভিন্ন বস্তুর সাম্য নির্ধারণ করা হয়ে থাকে।

আবার সাম্যাবস্থা জানা থাকলে বস্তুতন্ত্রে ক্রিয়াশীল অভ্যন্তরস্থ বলও জানা যেতে পারে।

9.13 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. দুটি সুষম ভারী সমান দৈর্ঘ্যের ও প্রত্যেকটি W ওজনের দণ্ড AB ও AC, $A\theta$ প্রান্তে মুক্তভাবে যুক্ত এবং তারা একটি ছোট স্থির বৃত্তাকার বস্তুর উপর সুসমঞ্জসভাবে আছে। যদি $AB = AC = 2l$ এবং বৃত্তটির ব্যাসার্ধ a হয় এবং $a < 1$ হয়, তবে AB, AC উল্লম্ব দিকের সঙ্গে যে কোণ করে তা নির্ণয় করুন।



12 নং চিত্র

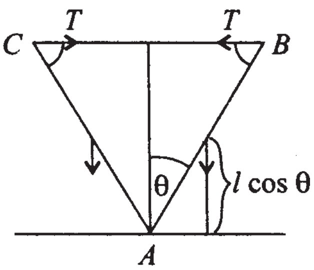
ধরা যাক AB, AC-এর ভারকেন্দ্র O থেকে Z উচ্চতায় থাকবে। তাহলে ওজন বল WO থেকে $Z = (a\text{cosec}\theta - 1\cos\theta)$ এই উচ্চতায় আছে। অতএব কল্পিত কার্যনীতি অনুযায়ী $2W\delta Z = 0.$

$$- a\text{cosec}\ \theta\ \cot\theta + l\sin\theta = 0$$

$$l\sin\theta = \frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

বা, $$a\sin^3\theta = \frac{a}{l}\cos\theta$$

2.



13 নং চিত্র

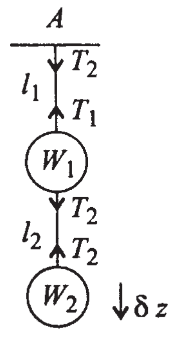
সমান দৈর্ঘ্য ও ওজনের দুটি দণ্ড একটি প্রান্তে যুক্ত ও অপর প্রান্ত দুটি একটি দড়ি দিয়ে বন্ধ। দড়ির দৈর্ঘ্য $2l$ এবং দণ্ডের দৈর্ঘ্য $2a$ হলে এবং উহাদের মধ্যে $\theta = 60^\circ$ হলে দড়ির টান কত?

ধরা যাক সূত্রটির বল বিপরীত বল T, T কাজ C ও B বিন্দুতে করে। অতএব $\theta \to \theta + \delta\theta$ এই সরণের জন্য কার্য $= 0$

$$\therefore\ -\ 2T\delta(2a\sin\theta)\ -\ 2W\delta(l\cos\theta)\ =\ 0$$

$$\therefore T(2a\cos\theta) = lW\sin\theta \text{ বা } T = \frac{l}{2a}\tan\theta$$

3.



14 নং চিত্র

একটি স্থির বিন্দু A হতে একটি দড়ি সহযোগে W_1 ওজন ঝোলানো হল। আবার W_1 থেকে আর একটি দড়ি সহযোগে W_2 ওজন ঝোলানো হল। দড়ি দুটির টান কত কল্পিত সরণ সাহায্যে নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ W_1 স্থির বিন্দু হতে কল্পনা করা হয় যেন দড়িগুলির স্থানে তাদের টান বল যথাক্রমে

T_1 T_2 ধরলাম। ধরা যাক, Z_1 নীচে ও W_2, $Z_1 + Z_2$ নীচে আছে। এখন যদি $Z_1 \rightarrow Z_1 + \delta Z_1$ এবং $Z_2 \rightarrow Z_2 + \delta Z_2$ নীচে সরণ হয়, তবে কল্পিত কার্য $= W_1\delta Z_1 + W_2(\delta Z_1 + \delta Z_2)$

$$-T_1\delta Z_1 + T_2\delta Z_1 - T_2(\delta Z_1 + \delta Z_2) = 0$$

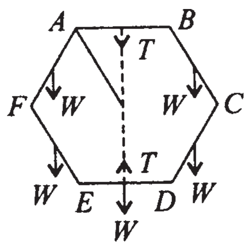
বা,
$$\delta Z_1\begin{pmatrix} +W_2 \\ W_1 - \quad T_1 \\ +T_2 \end{pmatrix} + \delta Z_2\left(W_2 - T_2\right) = 0$$

$$W_2 + W_1 - T_1 + T_2 = 0$$
$$W_2 - T_2 = 0$$
$$\therefore\ T_2 = W_2, T_1 = W_1 + W_2 + T_2 = W_1 + 2W_2$$

অতএব উপরের দড়িটির টান $= W_1 + 2W_2$ এবং নীচের দড়ির টান $= W_2$

কল্পিত সরণ

ছটি সমান দণ্ড AB, BC, CD, DE, EF এবং FA প্রত্যেকটির ওজন W মুক্তভাবে তাদের প্রান্তে যুক্ত হয়ে একটি ষড়ভুজ তৈরী করে। AB বাহু একটি আনুভূমিকভাবে আছে এবং AB ও DE-এর মধ্য বিন্দুদ্বয় একটি সুতো দিয়ে বাঁধা আছে। দেখান যে সুতোর টান $3W$। সুতোর পরিবর্তে উহার দ্বারা প্রযুক্ত দুটি বল T, T দিয়ে বোঝান হল।



15 নং চিত্র

AB স্থির, অতএব এমন একটি সরণ দেওয়া হল যে AF ও BC-এর মধ্যবিন্দু x-দৈর্ঘ্য নীচে যায়। ফলে DC ও FE-এর মধ্যবিন্দু $3x_2$ দৈর্ঘ্য নীচে নামে এবং ED-এর মধ্যবিন্দু $4x$ নীচে নামে। অতএব এরূপ সরণের জন্য মোট কার্য $= 0$

$$\therefore\ - T4x + 2Wx + W.\ 3x + W.\ 3x + W.\ 4x = 0$$

অতএব $T = 3W$

একক 10 ❑ সাম্যের সুস্থিতি (Stability of Equilibrium)

গঠন

10.1 প্রস্তাবনা

10.2 উদ্দেশ্য

10.3 সুস্থিতি সম্বন্ধীয় শক্তি নিয়ম (Energy Test of Stablility)

10.4 একটি স্থির বস্তুর উপর অপর একটি ভারী বস্তুর সাম্যাবস্থার সুস্থিতি

10.5 উদাহরণ

10.6 পরিশিষ্ট : একঘাত স্বাতন্ত্র্য (one degree of freedom) যুক্ত বস্তুর সাম্যাবস্থার সুস্থিতি নির্ণয়

10.7 সারাংশ

10.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

10.1 প্রস্তাবনা

কোনও বস্তু বা বস্তুতন্ত্র বল প্রযুক্ত হয়ে সাম্যাবস্থায় থাকলে স্বাভাবিকভাবে প্রশ্ন উঠে যে উহার সাম্যাবস্থাটি কেমন অর্থাৎ সাম্যাবস্থা হতে সামান্য বিচ্যুতির জন্য বস্তুতন্ত্রটি সাম্যাবস্থা হতে বহু দূরে যায় অথবা উহার অবস্থান সর্বদা সাম্যাবস্থার নিকটেই থাকে। যদি সাম্যাবস্থার নিকটেই বস্তুটি সর্বদা অবস্থান করে (স্থির না থাকবার প্রয়োজন নেই) সেক্ষেত্রে ঐ সাম্যাবস্থাকে সুস্থিত (stable) বলা হয়। আর যদি বস্তুতন্ত্রটির গোড়াতে সামান্য সরণ সত্ত্বেও পরবর্তীকালে উহা ক্রমাগত সাম্যাবস্থা থেকে দূরে চলে যায়, সেক্ষেত্রে বস্তুতন্ত্রটির ঐ সাম্যাবস্থাকে সুস্থিতিহীন (unstable) বলা হয়।

উপরের আলোচনা থেকে স্পষ্ট হয় যে কোনও সাম্যাবস্থার সুস্থিতি সম্পর্কে স্থিরনিশ্চয় হওয়ার জন্য প্রয়োজন বস্তুটির গতি সম্বন্ধে জ্ঞান অর্থাৎ সাম্যাবস্থা থেকে সামান্য বিচ্যুতির ফলস্বরূপ বস্তুতন্ত্রের পরবর্তী গতির স্বরূপ জানা আবশ্যক। যদি উহা সামান্য আন্দোলন আকারে হয় (প্রাথমিক স্বল্প বিচ্যুতি যেই প্রকারেরই হউক না কেন) সেক্ষেত্রে বস্তুতন্ত্রটি ঐ সাম্যাবস্থা সুস্থিত, অন্যথায় যদি স্বল্প প্রাথমিক বিচ্যুতি সত্ত্বেও পরবর্তীকালে বস্তুতন্ত্রটি ক্রমাগত সাম্যাবস্থা থেকে দূরে যাবার প্রবণতা থাকে (অন্তত একপ্রকার বিচ্যুতির জন্যও), সেক্ষেত্রে ঐ সাম্যাবস্থাকে আমরা সুস্থিতিহীন বলি। অতএব গতিশাস্ত্রের

প্রয়োগ দ্বারা কেবলমাত্র সুস্থিতি সম্বন্ধে নিশ্চিতভাবে বলা যায়। বর্তমান পরিসরে আমরা একটি নিয়মের উপর ভিত্তি করে বস্তুতন্ত্রের সুস্থিতি সম্বন্ধে আলোচনা করছি।

10.2 উদ্দেশ্য

সাম্যাবস্থায় একটি বস্তুর উপর বলগোষ্ঠীর বলগুলি এমনভাবে থাকে যে বস্তুর ঐ অবস্থায় বস্তুটির উপর ক্রিয়ারত বলগুলি পারস্পরিক সাম্যাবস্থার শর্তগুলি পালন করে। এখন প্রশ্ন এই যে কোন বস্তু যদি সাম্যাবস্থান থেকে সামান্য পরিমাণে বিচ্যুত হয়, অর্থাৎ বস্তুর জ্যামিতিক বাধকগুলি মান্য করে বস্তুটির যদি একটু অল্প সরণ (displacement) দেওয়া হয়। তবে তার পরবর্তী অবস্থা কেমন হবে? এ বিষয়ে বেশ কয়েকটি সম্ভাবনা আছে। যেমন বস্তুটির পরবর্তী গতি এমন যে তার অবস্থিতি সর্বদা সাম্যের অবস্থার নিকটেই থাকে। আবার এমনও হতে পারে যে সামান্য সরণের পর বস্তুটি এমনভাবে চলতে শুরু করল যে সাম্যাবস্থা থেকে উহা অনেক দূরে সরে গেল। প্রথম ক্ষেত্রকে আমরা বলি সাম্যাবস্থা সুস্থিত (stable) আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রকে বলি সাম্যাবস্থা অ-সুস্থিত (unstable) অথবা সুস্থিতিহীন। এই এককে আপনারা এই সম্বন্ধে বিস্তৃতভাবে জানতে পারবেন।

10.3 সুস্থিতি সম্বন্ধীয় শক্তি নিয়ম (Energy Test of Stability)

যদি কোনও বস্তুতন্ত্রের উপর প্রযুক্ত বলসমূহ সংরক্ষী হয়, তাহলে কোনও কল্পিত সরণের জন্য বলগুলি দ্বারা কার্যের পরিমাণ $= \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i)$ যেখানে (X_i, Y_i, Z_i) বল (x_i, y_i, z_i) বিন্দুতে অবস্থিত বস্তুকণার উপর ক্রিয়া করছে। যেহেতু বলসমূহ সংরক্ষী, অতএব এমন একটি অপেক্ষক V আছে (যাহা স্থিতিশক্তির সমান) যে উপরের কার্যের পরিমাণ $= - dV$ হবে। V-কে তন্ত্রটির 'স্থিতিশক্তি' বলা হয়। এখন কল্পিত কার্যনীতি অনুসারে কোনও কল্পিত সরণ-(এখানে বস্তুতন্ত্রটির বাধকগুলি উভচারী ও কালনিরপেক্ষ ধরা হয়) জনিত কার্য পরিমাণ $= 0$ অর্থাৎ $dV = 0$ ইহা সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত। অর্থাৎ কোনও সাম্যাবস্থায় স্থিতিশক্তি V-এর মান ষ্টেশনারী থাকে। এইবার আমরা দেখাব যে V-এর মান সাম্যাবস্থায় স্থানীয়ভাবে নিম্নতম হলে ঐ সাম্যাবস্থা সুস্থিত হবে।

সুস্থিতির যথেষ্ট শর্ত : কোনও সংরক্ষী বলের ক্ষেত্রে যেখানে বস্তুতন্ত্রটির উপর বাধকগুলি সময়নিরপেক্ষ সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত হয়, সেক্ষেত্রে বস্তুতন্ত্রের সাম্যাবস্থায় যদি স্থিতিশক্তির স্থানীয় ক্ষুদ্রতম মান হয়, তাহলে ঐ সাম্যাবস্থা সুস্থিত হবে। আর সাম্যাবস্থা যদি স্থিতিশক্তির স্থানীয় বৃহত্তম মান হয়, তাহলে ঐ সাম্যাবস্থা সুস্থিতিহীন হবে।

কারণ : যেহেতু বস্তুতন্ত্রটির বাধকগুলি সময়নিরপেক্ষ এবং বলগুলি সংরক্ষী, অতএব গতিতত্ত্ব থেকে পাওয়া যায় যে চলাকালীন গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির যোগফল অপরিবর্তিত থাকবে। এখন ধরা যাক,

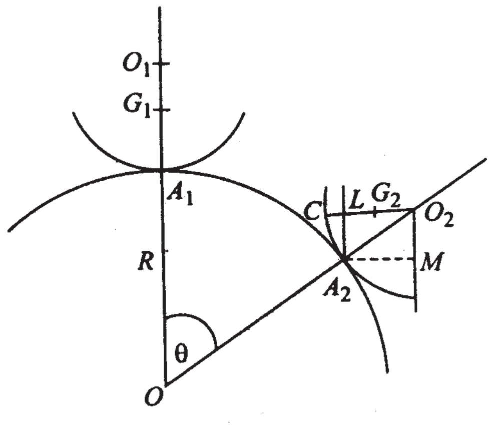
বস্তুতন্ত্রটিকে উহার সাম্যাবস্থা হতে স্বল্প সরণ যুক্ত হয়ে স্থির অবস্থা থেকে ছাড়া হল। তাহলে পরবর্তী গতিকালীন গতিশক্তি T ও স্থিতিশক্তি V এদের যোগফল সর্বদা ধ্রুবক থাকবে ও আদিতে স্থিতিশক্তির সমান হবে।

এখন বস্তুতন্ত্রটির পরবর্তী গতিতে উহার গতিশক্তি অশূন্যক হবে। অতএব যদি সাম্যাবস্থায় স্থিতিশক্তি স্থানীয় ক্ষুদ্রতম হয়, তাহলে বস্তুতন্ত্রটি সাম্যাবস্থার নিকটে গেলে V-এর মান কমবে এবং T-এর মান সহ T + V-এর মান অপরিবর্তিত থাকবে। অতএব বস্তুতন্ত্রটি সাম্যাবস্থার নিকটে থাকবে অপরপক্ষে সাম্যাবস্থায় স্থিতিশক্তি স্থানীয় বৃহত্তম হলে গতি এমন হবে যে বস্তুতন্ত্রটি সাম্যাবস্থা থেকে দূরে যাবে, কারণ সেক্ষেত্রে V-এর মান কমে ও T-এর মান বাড়ে। অতএব সাম্যাবস্থাটি সুস্থিতিবিহীন। (পরিশিষ্টে এক ঘাতের স্বাতন্ত্র্যের দৃঢ়বস্তুর উপর সংরক্ষীবল প্রযুক্ত সাম্যাবস্থার সুস্থিতি সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে।)

মন্তব্য : কখনও কখনও পরিস্থিতি এমন হতে পারে যে, কোনও বস্তুর বাধক-অনুসারী কোনও সরণের ফলে বস্তুটির নূতন অবস্থানও একটি সাম্যাবস্থা। এক্ষেত্রে সাম্যাবস্থাকে নিরপেক্ষ (neutral) বলা যায়। যেমন একটি ভারী গোলক একটি অনুভূমিক সমতলের সংস্পর্শে সাম্যাবস্থায় থাকলে ঐ তলের উপর অন্য যে-কোনও অবস্থানেও সাম্যাবস্থা থাকবে।

10.4 একটি স্থির বস্তুর উপর অপর একটি ভারী বস্তুর সাম্যাবস্থার সুস্থিতি

ধরা যাক একটি ভারী বস্তু অপর একটি স্থির বস্তুর উপর সাম্যাবস্থায় আছে ; বস্তু দুটির যে অংশ পরস্পর স্পর্শ করে আছে তাহারা যথাক্রমে r এবং R ব্যাসার্ধের গোলক এবং গোলক দুটির কেন্দ্রদ্বয় সংযোগকারী রেখা উল্লম্ব ও স্পর্শতলের দুই দিকে। এখন প্রথম বস্তুটিকে সামান্য সরণ দেওয়া হল এবং বস্তু দুটির তলদেশ যথেষ্ট পরিমাণে অমসৃণ।



1 নং চিত্র

স্থির বস্তুটির গোলতলের কেন্দ্র হল O আর উপরের বস্তুটির সাম্যাবস্থায় গোলতলের কেন্দ্র O_1, উপরের বস্তুটির ভারকেন্দ্র হল G_1, যেখানে $A_1G_1 = h$।

এখন উপরের বস্তুটির সামান্য সরণের ফলে উহা গড়িয়ে নূতন অবস্থানে গেলে বস্তুটির কেন্দ্র O_2 বিন্দুতে এবং নূতন স্পর্শবিন্দু A_2 এবং বস্তুটির ভারকেন্দ্র এখন G_2 তে। 1 নং চিত্রে $CG_2 = h$, A_2L উল্লম্ব রেখা O_2C-এর সহিত L বিন্দুতে ছেদ রে, আর উল্লম্বরেখা O_2M, A_2M এই অনুভূমিক রেখাকে M বিন্দুতে ছেদ করে। এখন $\angle A_2OA_1 = \theta$, $\angle A_2O_2C = \phi$ হলে, বস্তুটির ঘূর্ণনের পরিমাণ $= CO_2M = \theta + \phi$। যেহেতু উপরের বস্তুটি গড়িয়ে নূতন স্থানে এসেছে, অতএব A_1A_2 চাপ (স্থির বস্তুটির) $= CA_2$ চাপ (চলমান বস্তুটির) অর্থাৎ $R.\theta = r\phi$।

এখন G_2 বিন্দুর মধ্যগামী ভারবলের ক্রিয়ারেখা যদি A_2 বিন্দুর বামে অবস্থিত হয় তাহলে ভারবল ও A_2 তে প্রতিক্রিয়াবল দুটির ফলে বস্তুটি সাম্যাবস্থার নিকটে যাবে অর্থাৎ বস্তুটির সাম্যাবস্থা সূচিত হবে।

অতএব বলা যায় সাম্যাবস্থা সুস্থিত হবে যদি O_2M থেকে G_2-এর দূরত্ব $> A_2M$ হয়। সুস্থিতিহীন হবে যদি O_2M থেকে G_2-এর দূরত্ব $< A_2M$ হয়। কিন্তু O_2M থেকে G_2-এর দূরত্ব

$$= (r - h)\sin(\theta + \phi)$$

এবং $A_2M = r\sin\theta$।

অতএব সাম্যাবস্থা সুস্থিত যদি $(r - h)\ \sin(\theta + \phi) > r\sin\theta$

সুস্থিতিহীন যদি $(r - h)\sin(\theta + \phi) < r\sin\theta$

অতএব সুস্থিতির শর্ত হল

$$(r-h)\sin\left[\frac{R+r}{r}\theta\right] > r\sin\theta$$

অথবা $(r-h)\left[\frac{R+r}{r}\theta - \frac{1}{<3}\left(\frac{R+r}{r}\right)^3\theta^3 + \ldots\right] > r\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots\right)$ (1)

অতএব খুব অল্প θ-এর মানের জন্য

সুস্থিতির শর্ত $(r-h)\frac{R+r}{r} > r$

সুস্থিতিহীনতার শর্ত $(r-h)\frac{R+r}{r} < r$

অর্থাৎ $(r+R)-\frac{h(R+r)}{r} \gtrless r$

অর্থাৎ $R-\frac{h(R+r)}{r} \gtrless 0$

অর্থাৎ $\frac{h(R+r)}{r} \lessgtr R$

অথবা $h \lessgtr \frac{rR}{R+r}$

অথবা $\frac{1}{h} \gtrless \frac{1}{R}+\frac{1}{r}$

এখন যদি $\frac{1}{h}=\frac{1}{R}+\frac{1}{r}$ হয়, $\left(\text{অর্থাৎ } h=\frac{rR}{R+r}\right)$,

তবে (I) থেকে আমরা পাই যে সুস্থিত বা সুস্থিতিহীন হওয়ার শর্ত এক্ষেত্রে

$$\frac{r^2}{R+r}\left[\frac{R+r}{r}\theta-\frac{1}{\lfloor 3}\left(\frac{R+r}{r}\right)^3\theta^3+\ldots\right] > \text{অথবা } < r\left(\theta-\frac{\theta^3}{\lfloor 3}+\ldots\right)$$

অর্থাৎ শর্ত হল

$$-\frac{1}{6}(R+r)^2\theta^3 > \text{ অথবা } < -\frac{1}{6}r^2\theta^3$$

অর্থাৎ $(R + r)^2 <$ অথবা $> r^2$

কিন্তু $(R + r)^2$ সর্বদাই r^2 অপেক্ষা বড়। অতএব দেখা গেল যে সাম্যাবস্থাটি কেবলমাত্র

$$\frac{1}{h} > \frac{1}{r}+\frac{1}{R} \text{ হলেই সুস্থিত এবং অন্যান্য ক্ষেত্রে}$$

$$\text{অর্থাৎ } \frac{1}{h} \leq \frac{1}{r}+\frac{1}{R} \text{ হলে অসুস্থিত হবে।}$$

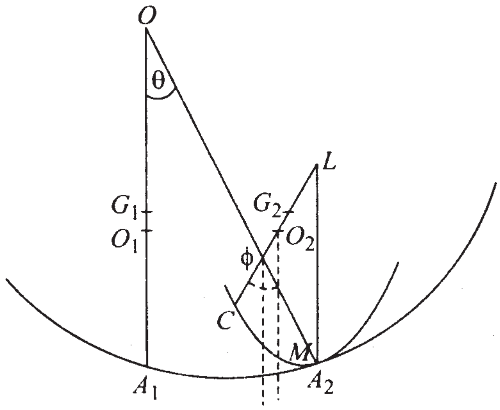
মন্তব্য : উপরের প্রতিজ্ঞায় তল দুটির বক্রতা বিপরীত দিকে ছিল। যদি তা না হয়ে একই দিকে অর্থাৎ 2 নং চিত্রের মত হয়, তাহলে বস্তুটির সাম্য সুস্থিত হওয়ার শর্ত হল যে G_2 মধ্য দিয়ে উল্লম্ব A_2-এর বাম দিকে থাকবে।

অর্থাৎ $O_2G_2 \sin(\phi - \theta) < MA_2$

অর্থাৎ $(h-r)\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta\right) < r\sin\theta$ (যেহেতু $R\theta = r\phi$)

অর্থাৎ $(h-r)\left[\frac{R-r}{r}\theta - \frac{1}{3!}\left(\frac{R-r}{r}\theta\right)^3 + \ldots\right] < r\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \ldots\right)$ (II)

অর্থাৎ $(h-r)\left(\frac{R-r}{r}\right) > r$



2 নং চিত্র

অর্থাৎ $h < \frac{Rr}{R-r}$ অর্থাৎ $\frac{1}{h} > \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$ হলে বস্তুটির সাম্যাবস্থা সুস্থিত হবে। আর যদি $\frac{1}{h} < \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$ হল, তাহলে বস্তুটির সাম্যাবস্থা সুস্থিতিহীন হবে। আবার যদি $\frac{1}{h} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$ হয়, তাহলে (*II*) থেকে θ^3 পর্যন্ত নিয়ে পাই

$$-\frac{1}{6}\frac{(R-r)^2}{r^2}\theta^3 < -\frac{\theta^3}{6} + \ldots.$$

অতএব θ খুব অল্প হলে দৃঢ়সাম্যের জন্য শর্ত হল $(R - r)^2 > r^3$ অর্থাৎ $R > 2r$ হলে সাম্যটি সুস্থিত। এইভাবে বলা যায়, $R < 2r$ হলে সাম্যটি অসুস্থিত। অপর সম্ভাবনা অর্থাৎ যদি

$R = 2r$ হয়, এবং $h = \frac{Rr}{R-r} = 2r$ হয়

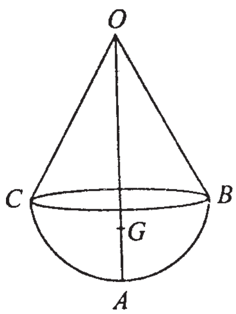
তাহলে $\phi = \frac{R}{r}\theta = 2\theta$ হয়, এবং

এক্ষেত্রে $O_2G_2 \sin(\phi - \theta) = (h - r)\sin(\phi - \theta) = r\sin\theta = MA_2$

অতএব উপরের ক্ষেত্রে G_2 সর্বদা L-এর সাথে একীভূত হবে অর্থাৎ ভারকেন্দ্র সর্বদা স্পর্শবিন্দুতে উল্লম্বের উপর থাকবে। অতএব এক্ষেত্রে বস্তুটি প্রতিটি অবস্থানেই সাম্যে থাকবে। অর্থাৎ সাম্যাবস্থাটিকে নিরপেক্ষ সাম্যাবস্থা বলা যায়।

10.5 উদাহরণ

1. একটি বৃত্তাকার শঙ্কু ও একটি অর্ধগোলক সমন্বিত একটি বস্তু (অর্ধগোলকের ভূমি ও শঙ্কুর ভূমি সাধারণ) একটি অমসৃণ অনুভূমিক তলের উপর অর্ধগোলকের বক্রতলের সাথে স্পর্শ করে আছে। দেখান যে সাম্যাবস্থা সুস্থিত হতে হলে শঙ্কুটির উচ্চতা $\sqrt{3}a$-এর বেশী হতে পারে না, যেখানে a = অর্ধগোলকটির ব্যাসার্ধ।



3 নং চিত্র

বস্তুটির সুষমতা হেতু উহার ভারকেন্দ্র শঙ্কুর অক্ষ বর্ধিত করলে উহার উপর থাকবে, এবং সাম্যাবস্থার জন্য ঐ অক্ষরেখা উল্লম্ব হবে, এবং ভূমির প্রতিক্রিয়া বল বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে ওজনবলকে নিরস্ত করে। ধরা যাক বস্তুটির ভারকেন্দ্র G-তে অবস্থিত, যেখানে $AG = h$ = ভূমি থেকে G-এর উচ্চতা। যেহেতু বস্তুটি একটি শঙ্কু ও একটি অর্ধগোলক দ্বারা গঠিত, অতএব,

$$h = \frac{\frac{2}{3}\pi a^3 . \frac{5a}{8} + \frac{1}{3}\pi a^2 x\left(a + \frac{x}{4}\right)}{\frac{2}{3}\pi a^3 + \frac{1}{3}\pi a^2 x}$$, যেখানে x = শঙ্কুর উচ্চতা

$$= \frac{\frac{5}{4}a^2 + \frac{x(4a+x)}{4}}{2a+x}$$

$$= \frac{5a^2 + 4ax + x^2}{4(2a + x)} \qquad (1)$$

এই সাম্যাবস্থা সুস্থিত হতে হলে $\frac{1}{h} > \frac{1}{r} + \frac{1}{R}$

অর্থাৎ $\frac{1}{h} > \frac{1}{a}$, যেহেতু এখানে $r = a$, $R = \infty$

অর্থাৎ $h < a$,

অতএব, (1) অনুসারে সাম্যাবস্থা সুস্থিত হতে হলে

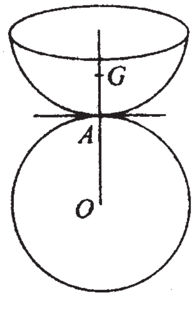
$$\frac{5a^2 + 4ax + x^2}{4(2a + x)} < a$$

অর্থাৎ $x_2 - 3a_2 < 0$

অর্থাৎ $x < \sqrt{3a}$ হতে হবে।

অতএব শঙ্কুর উচ্চতা $\sqrt{3a}$ এর বেশী না হলে বস্তুটি সুস্থিত হবে।

2. একটি অর্ধগোলক একটি সমব্যাসার্ধযুক্ত স্থির গোলকের উপর রয়েছে এবং অর্ধগোলকের বক্রতল গোলকটিকে স্পর্শ করে। দেখান যে সাম্যাবস্থা সুস্থিতিহীন। কিন্তু যদি অর্ধগোলকের সমতল গোলকটিকে স্পর্শ করে, তবে দেখান যে সাম্যাবস্থা সুস্থিত হবে।



4 (a) নং চিত্র

প্রথম ক্ষেত্র :

সাম্যাবস্থা হলে অর্ধগোলকের ভারকেন্দ্র G গোলকের কেন্দ্রগামী ব্যাসার্ধ OA বর্দ্ধিত করলে উহার উপর থাকবে এবং OAG উল্লম্ব হবে।

এখন $h = AG = \frac{5a}{8}$

অতএব, $\frac{1}{h} = \frac{8}{5a}$

এবং $\frac{1}{r} + \frac{1}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$

$\therefore \frac{1}{h} < \frac{2}{a}$

সাম্যটি সুস্থিতিহীন হবে।

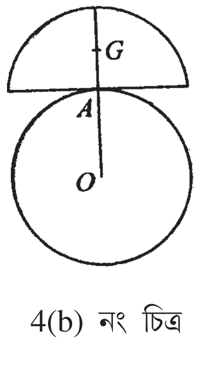
দ্বিতীয় ক্ষেত্র : যদি অর্ধগোলকটির সমতল গোলকের উপর থাকে, তাহলে

$$h = AG = \frac{3}{8}a$$

এবং $\frac{1}{r} + \frac{1}{R} = \frac{1}{a}$

$\therefore \frac{1}{h} > \frac{1}{r} + \frac{1}{R}$

অর্থাৎ সাম্যাবস্থাটি সুস্থিত হবে।

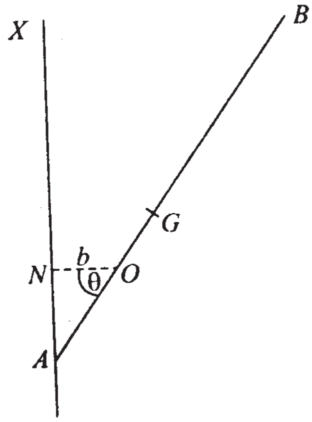


4(b) নং চিত্র

3. একটি ভারী সুষম দণ্ডের একটি প্রান্ত একটি মসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালের সঙ্গে সংলগ্ন আছে এবং দণ্ডটির একটি বিন্দু একটি মসৃণ পেরেকের উপর আছে। সাম্যাবস্থা নির্ণয় করুন ও দেখান যে উহা সুস্থিত নহে।

প্রমাণ : AX হল একটি উল্লম্ব দেওয়াল, যার A বিন্দুতে AB দণ্ডের প্রান্তটি সংলগ্ন আছে। O-তে একটি পেরেক আছে, যার উপর দণ্ডটি আছে। দণ্ডটির দৈর্ঘ্য = $2a$, ON = O থেকে দেওয়ালের উপর লম্ব = b। দণ্ডটি অনুভূমিকের সহিত θ কোণ করে। দণ্ডটির ভারকেন্দ্র G-এর উচ্চতা (O-এর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত অনুভূমিক তল থেকে)

$$\bar{x} = a\sin\theta - b\tan\theta$$



5 নং চিত্র

স্থিতিশক্তি = V হলে, $V = W\bar{x}$

অতএব , $\dfrac{dV}{d\theta} = W\left(a\cos\theta - b\sec^2\theta\right)$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = W\left(-a\sin\theta - 2b\sec^2\theta\tan\theta\right)$$

$= -\ W(a\sin\theta\ +\ 2b\sec^2\theta\ \tan\theta)$

কিন্তু সাম্যের জন্য $\dfrac{dV}{d\theta} = 0$

অতএব $\cos^3\theta = \dfrac{b}{a}$

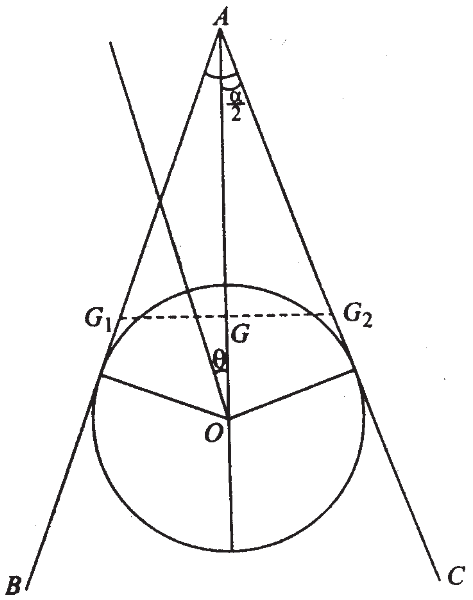
θ-এর মান বসিয়ে দেখি

$$\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)\theta = \cos^{-1}\sqrt[3]{b/a} = -W\sqrt{1-\cos^2\theta}\left[a+\frac{2ba}{b}\right]$$

= ঋণাত্মক

অতএব V-এর মান $\theta = \cos^{-1}\sqrt[3]{b/a}$-এর জন্য স্থানীয়ভাবে বৃহত্তম। অতএব এই সাম্যাবস্থা সুস্থিত নহে।

4. l দৈর্ঘযুক্ত দুটি দুন্ডের এক প্রান্ত যুক্ত আছে এবং উহাদের মধ্যে কোণ α। উহারা একটি উল্লম্ব তলে একটি মসৃণ গোলকের উপর স্থির হয়ে আছে। যদি গোলাকটির ব্যাসার্ধ r হয়, তবে দেখান যে $l > 4r$ cosecα হলে দণ্ড দুটির সাম্যাবস্থা সুস্থিত হবে এবং $l > 4r$ cosecα.হলে সাম্যাবস্থা সুস্থিতিহীন হবে।



6 নং চিত্র

সমাধান :

ধরা যাক বস্তুতন্ত্রটিকে একটি কল্পিত সরণ দেওয়া হল, যার ফলে উহার OA রেখা উল্লম্বের সহিত θ কোণ করে। অতএব বস্তুতন্ত্রটির স্থিতিশক্তি

V= $2W.\ OG\ \cos\theta$, যেখানে W প্রতিটি দণ্ডের ওজন

$= 2W(OA - AG)\ \cos\theta$

$$= 2W\left(r\cos ec\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\cos\theta$$

অতএব $\dfrac{dV}{d\theta} = -2W\left(r\,\mathrm{cosec}\,\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{l}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\theta$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -2W\left(r\,\mathrm{cosec}\,\frac{\alpha}{2} - \frac{l}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\cos\theta$$

এখন $\dfrac{dV}{d\theta} = 0$ সাম্যাবস্থার জন্য। অর্থাৎ $\theta = 0$ হবে।

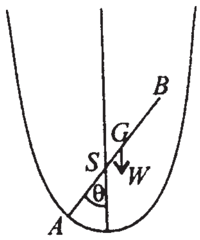
$$\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)_{\theta-0} = -2W\left(r\,\mathrm{cosec}\,\frac{\alpha}{2} - \frac{l}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

অতএব সাম্যাবস্থা সুস্থিত হবে যদি

$r\,\mathrm{cosec}\,\dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{l}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$ অর্থাৎ $l > 2r / \sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$

অর্থাৎ যদি $l > 4r$ cosecα হয়, সাম্যাবস্থা সুস্থিত হবে এবং যদি $l > 4r$ cosecα হয়, তবে সাম্যাবস্থা সুস্থিতিহীন হবে।

5. একটি মসৃণ দণ্ড একটি স্থির অধিবৃত্তের নাভিকেন্দ্রে অবস্থিত অঙ্গুরী মধ্য দিয়ে যায়। অধিবৃত্তটির অক্ষ অল্লম্ব এবং উহার শীর্ষবিন্দু নীচে থাকলে, এবং দণ্ডটির একটি প্রান্ত অধিবৃত্তের উপর থাকলে, দেখান যে সাম্যাবস্থায় দণ্ডটি উল্লম্ব রেখার সহিত θ কোণ করে আছে, যেখানে $\cos^4\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{a}{2c}$ এবং $4a$ = অধিবৃত্তের নাভিলম্ব দৈর্ঘ্য এবং $2c$ = দণ্ডটির দৈর্ঘ্য। সাম্যাবস্থার সুস্থিতি বিচার করুন।



7 নং চিত্র

অধিবৃত্তটির সমীকরণ

$$\frac{2a}{r} = 1 + \cos\theta$$

অথবা $r = a\sec^2(\theta/2)$,

যেখানে মূলবিন্দু নাভিবিন্দু S।

ধরা যাক দণ্ডটির ভারকেন্দ্র S থেকে z উচ্চতায় আছে। তাহলে

$$z = GS\cos\theta = (AG - AS)\cos\theta$$

$$=\left(c - a\sec^2\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta$$

$$= c\cos\theta - a\cos\theta - a\tan^2\frac{\theta}{2}\cos\theta$$

$$= c\cos\theta - a\cos\theta + a(\cos\theta - 1) + a\tan^2\frac{\theta}{2}$$

$$= c\cos\theta - a\cos\theta - 2a\sin^2\frac{\theta}{2} + a\tan^2\frac{\theta}{2}$$

$$= c\cos\theta - a + \tan^2\frac{\theta}{2}$$

অতএব, $\dfrac{dz}{d\theta} = -c\sin\theta + 2a\tan\dfrac{\theta}{2}\sec^2\dfrac{\theta}{2}.\dfrac{1}{2}$

$$= -c\sin\theta + a\sin\frac{\theta}{2}\sec^3\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} = -c\cos\theta + \frac{1}{2}a\cos\frac{\theta}{2}\sec^3\frac{\theta}{2} + a\sin\frac{\theta}{2}3\sec sc^2\frac{\theta}{2}\quad sce\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}.\frac{1}{2}$$

$$= -c\cos\theta + \frac{1}{2}a\sec^2\frac{\theta}{2} + \frac{3a}{2}\sec^4\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= -c\cos\theta + \frac{1}{2}a\sec^2\frac{\theta}{2} + \frac{3a}{2}\sec^4\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$\dfrac{dz}{d\theta} = 0$ থেকে পাই $c\sin\theta = a\sin\dfrac{\theta}{2}\sec^3\dfrac{\theta}{2}$

অতএব, হয় $\theta = 0$, অথবা

$$2c\cos\frac{\theta}{2} = a\sec^3\frac{\theta}{2}$$

অর্থাৎ $\cos^4 \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{a}{2c}$

অতএব, যদি $a < 2c$ হয়, তাহলে উল্লম্ব রেখার সহিত θ কোণ করে দণ্ডটি সাম্যে থাকবে, যেখানে

$$\theta = 2\cos^{-1}\left(\frac{a}{2c}\right)^{1/4} = \alpha \quad \text{ধরি।}$$

$$\left(\frac{d^2 z}{d\theta^2}\right)_{\theta=\alpha} = -c\cos\alpha + \frac{a}{2}\sec^2\frac{\alpha}{2} + \frac{3a}{2}\sec^4\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= -c\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) + \frac{a}{2\sqrt{a/2c}} + \frac{3a}{2}\frac{2c}{a}\sqrt{1-\sqrt{\frac{a}{2c}}}$$

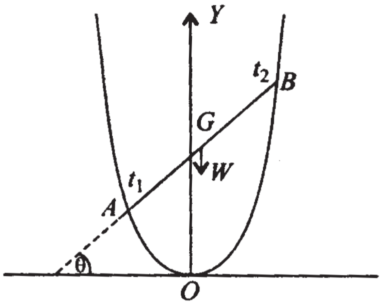
$$= c\left(1 - 2\sqrt{\frac{a}{2c}}\right) + \frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{2c}} + 3c\sqrt{1-\sqrt{\frac{a}{2c}}}$$

$$= c - \sqrt{2ac} + \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{2}} + 3c\sqrt{1-\sqrt{\frac{a}{2c}}}$$

$$= c - \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{2}} + 3c\sqrt{1-\sqrt{\frac{a}{2c}}} > 0$$

অতএব ভারকেন্দ্রের উচ্চতা নিম্নতম। অর্থাৎ বস্তুটির সাম্য সুস্থিত।

6. একটি $2l$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট সুষম ভারী দণ্ডের প্রান্ত দুটি একটি মসৃণ অধিবৃত্তের সাথে সংলগ্ন আছে। অধিবৃত্তটির অক্ষ উল্লম্ব এবং শীর্ষবিন্দু নিম্নদিকে থাকলে, দেখান যে যদি দণ্ডটির দৈর্ঘ্য অধিবৃত্তের নাভিলম্ব হতে অধিক হয় তাহলে তিনটি সাম্যাবস্থা আছে এবং উহার মধ্যে অনুভূমিক অবস্থায় সাম্য সুস্থিতিহীন। দণ্ডটির দৈর্ঘ অধিবৃত্তের নাভিলম্ব অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হলে একমাত্র অনুভূমিক অবস্থায় সাম্য হবে।



8 নং চিত্র

প্রমাণ :

AB একটি দণ্ড। উহা অনুভূমিক রেখা x-অক্ষের সহিত θ কোণ করলে, সুস্থিত সাম্যের জন্য শীর্ষবিন্দু থেকে উচ্চতা স্থানীয়ভাবে নিম্নতম হতে হবে।

ধরি A ও B-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2at_1, at_1^2), (2at_2, at_2^2)$। তাহলে G-এর স্থানাঙ্ক

$$\left(at_1 + at_2, \frac{at_1^2 + at_2^2}{2}\right) \text{ হবে।}$$

এক্ষণে দেওয়া আছে যে

$$2l = \sqrt{a^2\left(t_1^2 - t_2^2\right)^2 + 4a^2 + \left(t_1 - t_2\right)^2}$$

অর্থাৎ $4l^2 = a^2 \; (t_1 - t_2)^2 \; [(t_1 - t_2)^2 + 4a^2]$

আবার $\sin\theta = \dfrac{a\left(t_2^2 - t_1^2\right)}{2l}$

$$\cos\theta = \frac{2a\left(t_2 - t_1\right)}{2l} = \frac{a\left(t_2 - t_1\right)}{e}$$

অতএব, দণ্ডটির ভারকেন্দ্রের উচ্চতা

$$= \frac{a\left(t_1^2 + t_2^2\right)}{2}$$

$$= \frac{a\left[\left(t_1 - t_2\right)^2 + 2t_1t_2\right]}{2}$$

$$= \frac{1}{2}a\left[\frac{l^2}{a^2}\cos^2\theta + \frac{1}{2}\left\{\left(t_1 + t_2\right)^2 - \left(t_1 - t_2\right)^2\right\}\right]$$

$$= \frac{l^2}{2a}\cos^2\theta + \frac{1}{4}a\left[4\tan^2\theta - \frac{l^2}{a^2}\cos^2\theta\right]$$

$$= \frac{l^2}{2a}\cos^2\theta + a\tan^2\theta - \frac{l^2}{4a}\cos^2\theta$$

$$= \frac{l^2}{4a}\cos^2\theta + a\tan^2\theta$$

$$= \frac{a}{4}\left[4\tan^2\theta + \frac{l^2}{a^2}\cos^2\theta\right]$$

অতএব, $\dfrac{dz}{d\theta} = \dfrac{a}{4}\sin\theta\left(8\sec^3\theta - \dfrac{2l^2}{a^2}\cos\theta\right)$

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} = \frac{a}{4}\left[\cos\theta\left(8\sec^3\theta - \frac{2l^3}{a^2}\cos\theta\right) + \sin\theta\left(24\sec^3\theta\tan\theta + \frac{2l^2}{a^2}\sin\theta\right)\right]$$

$$= \frac{a}{4}\left[8\sec^2\theta - \frac{2l^2}{a^2}\cos 2\theta + 24\sec^2\theta\tan^2\theta\right]$$

সাম্যাবস্থার জন্য $\dfrac{dz}{d\theta} = 0 \Rightarrow \theta = 0$, অথবা $\cos^4\theta = \dfrac{4a^2}{l^2}$

অতএব, যদি $l > 2a$ হয়, তাহলে $\theta = 0$ ছাড়া আরও দুটি সাম্যাবস্থান আছে

যখন $\theta = \cos^{-1}\sqrt{\dfrac{2a}{l}}$, অথবা $\theta = \pi - \cos^{-1}\sqrt{\dfrac{2a}{l}}$

যদি $l > 2a$ হয়, তাহলে

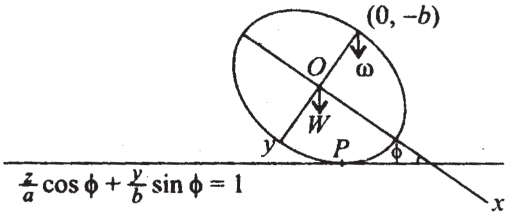
$$\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = \frac{a}{4}\left(8 - \frac{2l^2}{a^2}\right) > 0$$

অতএব, $\theta = 0$ সাম্যাবস্থাটি সুস্থিত নহে।

7. একটি উপবৃত্তীয় ঘন বেলন একটি অনুভূমিক সমতলের উপর সুস্থিত সাম্যে অবস্থিত। দেখান যে একটি ভারী কণা উচ্চতম কারিকা রেখার উপর থাকলেও সাম্য সুস্থিত থাকবে যদি উপবৃত্তীয় ছেদের উৎকেন্দ্রতা $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ হতে বড় হয়। যেহেতু প্রাথমিক অবস্থায় বেলনটি সুস্থিত সাম্যে অবস্থিত ছিল, অতএব বেলনটির উপাক্ষ উল্লম্বভাবে থাকবে। এখন বেলনটির একটি সামান্য সরণ ধরলাম যখন পরোক্ষ অনুভূমিক রেখার সাথে একটি অশূন্যক কোণ করে। এখন $P(a\cos\phi,\ b\sin\phi)$ যদি স্পর্শবিন্দু হয়, তাহা হইলে সমগ্র বস্তুতন্ত্রের স্থিতিশক্তি

$$V = \frac{W}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\phi}{a^2} + \dfrac{\sin^2\phi}{b^2}}} + \frac{\omega(1+\sin\theta)}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\phi}{a^2} + \dfrac{\sin^2\phi}{b^2}}}$$

$$= \frac{Wb + \omega b(1+\sin\phi)}{\sqrt{1-e^2\cos^2\phi}}$$



9 নং চিত্র

অতএব $\frac{dV}{d\phi} = b\left[\frac{\omega(1-2e^2) - W\sin\phi}{(1-e^2\cos^2{}_\phi)^{3/2}}\right]\cos\phi$

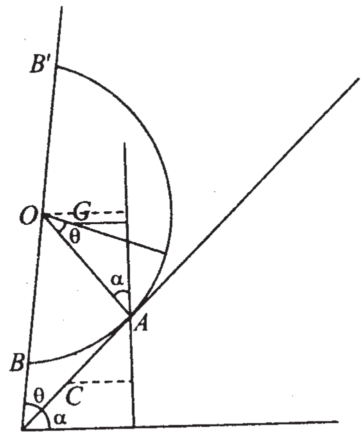
$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = -b\sin\phi\left[\frac{\omega(1-2e^2) - W\sin\phi}{(1-e^2\cos^2\phi)^{3/2}}\right] + b\cos\phi\frac{d}{d\phi}\left[\frac{\omega(1-2e^2) - W\sin\phi}{\left(1-e^2\cos^2\phi^{3/2}\right)}\right]$$

সাম্যের জন্য $\frac{dV}{d\phi} = 0 \Rightarrow \cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$

$$\left(\frac{d^2V}{d\phi^2}\right)_{\phi=\frac{\pi}{2}} = -b\left[\omega\left(1-2e^2\right) - W\right]$$

অতএব, যদি $1-2e^2 < 0$ অর্থাৎ $2e^2 > 1$ হয়, তাহলে $\left(\frac{d^2V}{d\phi^2}\right)_{\phi=\frac{\pi}{2}}$ যে-কোনো ω-এর জন্য ধনাত্মক হবে এবং ফলেV-এর সাম্যমান ক্ষুদ্রতম এবং এজন্য সাম্যাবস্থা সুস্থিত।

8. একটি ঘন অর্ধগোলক অনুভূমিক তলের সাথে α কোণে আনত একটি সমতলের উপর আছে। সমতলটি যথেষ্ট রুক্ষ, যাহাতে কোনো অপসৃতি ঘটে না। $\alpha < \sin^{-1}\frac{3}{8}$ হলে, দেখান যে সাম্যাবস্থাটি সুস্থিত।



10 নং চিত্র

ধরা যাক অর্ধগোলকের ভূমিতল আনত তলের সাথে θ কোণ করে। অর্ধগোলকটি যেহেতু আনত তলের উপর গড়াতে পারে, সুতরাং অর্ধগোলকের ভারকেন্দ্র G-এর উচ্চতা তলের C বিন্দু থেকে মাপলাম, যেখানে CA = চাপ AB

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)a$$ এবং a = গোলকের ব্যাসার্ধ।

অতএব zC থেকে G-এর উচ্চতা হলে, চিত্র থেকে পাই

$z = CA\sin\alpha + AO\cos\alpha - GO\cos(\theta + \alpha)$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)a\sin\alpha + a\cos\alpha - \frac{3}{8}a\cos(\theta + \alpha)$$

অতএব, স্থিতিশক্তি V = Mgz

$$\text{অতএব } \frac{dV}{d\theta} = Mg\left[-a\sin\alpha + \frac{3}{8}a\sin(\theta + \alpha)\right]$$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = Mg[\frac{3}{8}a\cos(\theta + \alpha)]$$

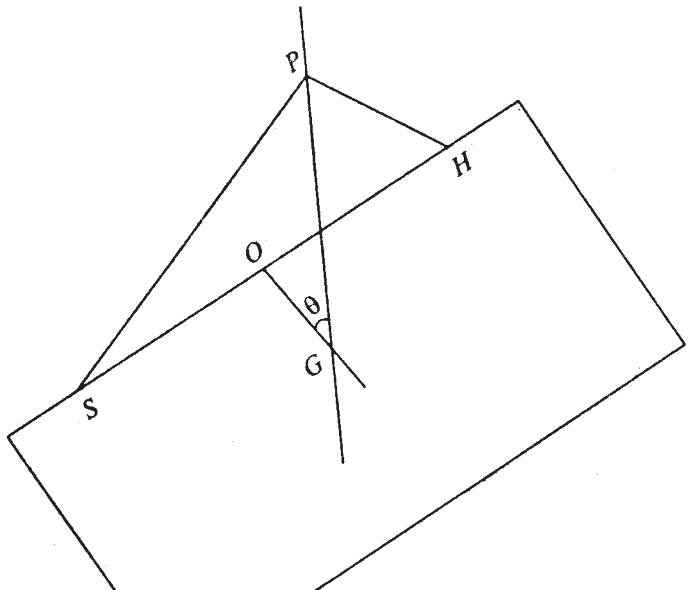
অতএব সাম্যাবস্থার জন্য $\dfrac{dV}{d\theta} = 0$ থেকে পাই

$$\sin(\theta + \alpha) = \frac{8}{3}\sin\alpha$$

অতএব, যদি $\frac{8}{3}\sin\alpha \le 1$ হয় তবেই সাম্যাবস্থা সম্ভব। সেক্ষেত্রে $\theta + \alpha$-এর মান $\sin^{-1}\left(\frac{8}{3}\sin\alpha\right)$।

অতএব $\alpha \le \sin^{-1}\left(\frac{3}{8}\right)$ হলে সাম্যাবস্থা সম্ভব। সেক্ষেত্রে যেহেতু $\frac{d^2V}{d\theta^2} > 0,$ অতএব V সর্বনিম্ন এবং সাম্যাবস্থা সুস্থিত।

9. একটি আয়তক্ষেত্রাকার ছবি একটি দড়ির সাহায্যে উল্লম্ব তলে আছে। দড়িটির দৈর্ঘ্য $= l$ এবং উহা একটি মসৃণ পেরেকের উপর দিয়ে গিয়ে উপরের ধারের উপর সুষমভাবে দুটি বিন্দুর (যাহাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব c) সহিত প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে সংযুক্ত হয়েছে। ছবির উচ্চতা a হলে, দেখান যে হেলানো অবস্থায় সাম্যাবস্থার জন্য $la < c\sqrt{c^2+a^2}$ হতে হবে এবং ঐ শর্ত সত্য হলে উভয় সাম্যাবস্থাই সুস্থিত হবে।



11 নং চিত্র

S H-এর সঙ্গে দড়িটি সংযুক্ত। P হল একটি পেরেক। অতএব $SP + PH =$ দড়ির দৈর্ঘ্য

$= l$ অতএব ছবিটির S, H-কে নাভিবিন্দুদ্বয় ধরে P-এর সঞ্চারপথ হল একটি উপবৃত্ত, যার কেন্দ্র হল SH-এর মধ্যবিন্দু, প্রধান অক্ষ $= l$, এবং $\frac{l}{2}e = \frac{c}{2} \therefore e = \frac{c}{l}$,

অতএব উপাক্ষ $= 2b = 2a\sqrt{1-e^2} = l\sqrt{1-\frac{c^2}{l^2}} = \sqrt{l^2 - c^2}$

অতএব SH-এর মধ্যবিন্দুকে মুলবিন্দু এবং SH-কে x-অক্ষ এবং উহার লম্ব অক্ষকে y-অক্ষ ধরে আমরা পাই যে $P(x, y)$ নিম্নের উপবৃত্তের উপর থাকবে।

$$\frac{x^2}{(l/2)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{l^2 - c^2}\right)^2} = 1$$

অর্থাৎ $$\frac{4x^2}{l^2} + \frac{4y^2}{l^2 - c^2} = 1 \qquad \text{(i)}$$

এখন ছবিটির ভারকেন্দ্র G-এর অবস্থান P হতে উল্লম্বভাবে z উল্লম্ব দূরত্ব নীচে আছে, আর ছবিটির ধার উল্লম্বের সহিত θ কোণ করে। এখানে PG উল্লম্ব হবে কেননা অন্যান্য বলগুলি P দিয়ে যায়। বলগুলি সমতলীয়, অতএব ওজন বলও P দিয়ে যাবে। অতএব $PG = z$.

এবং $x = z\cos\theta, \quad y = z\sin\theta - \frac{a}{2}(OG \perp SH)$

অতএব (i)-এ বসিয়ে

$$\frac{4z^2\cos^2\theta}{l^2} + \frac{4\left(z\sin\theta - \frac{a}{2}\right)^2}{l^2 - c^2} = 1$$

অতএব,

$$4c^2 \sin^2\theta \, z^2 - 4al^2 \, z\sin\theta + (4z^2 - l^2)(l^2 - c^2) + a^2l^2 = 0$$

অতএব $\sin\theta$ -এর জন্য সমাধান করে

$$2\sin\theta = \frac{al^2z \pm z\sqrt{l^2 - c^2}\sqrt{(a^2 + c^2)l^2 - 4c^2z^2}}{z^2c^2}$$

অতএব θ বাস্তব হতে হলে, z-এর মান $\dfrac{l}{2c}\sqrt{a^2+c^2}$ অপেক্ষা বেশী হতে পারে না, এবং তখন

$$\sin\theta = \frac{al}{c\sqrt{a^2+c^2}}$$

অতএব, যখন $al < c\sqrt{a^2+c^2}$

তখন দুটি অবস্থান আছে এবং ঐ দুটি অবস্থানে যেহেতু z-এর মান বৃহত্তম, অতএব স্থিতিশক্তি ক্ষুদ্রতম, অতএব সাম্যাবস্থা সুদৃঢ় হবে।

10. একটি মসৃণ ঘন বৃত্তাকার শঙ্কু, যাহার উচ্চতা h ও শীর্ষকোণ 2α একটি অনুভূমিক বৃত্তাকার (a-ব্যাসার্ধযুক্ত) গর্তে অক্ষটি উল্লম্ব অবস্থায় সাম্যে রহিয়াছে। দেখান যে যদি $16a > 3h\sin 2\alpha$ হয় তাহলে সাম্যাবস্থাটি সুস্থিত এবং আরও দুটি সুস্থিতিহীন সাম্যাবস্থা আছে।

10.6 পরিশিষ্ট : একঘাত স্বাতন্ত্র্য (one degree of freedom) যুক্ত বস্তুর সাম্যাবস্থার সুস্থিতি নির্ণয়

কোনও দৃঢ় বস্তুর অবস্থান নির্ণয় করতে কতকগুলি মান যেমন কোণ, দূরত্ব জানবার প্রয়োজন হয়। যদি বস্তুটির উপর বাধকসমূহ এমনভাবে থাকে যে একটিমাত্র মাপ জানলেই বস্তুটির অবস্থান নির্ণয় করা যায়, সেক্ষেত্রে বস্তুটির একঘাত স্বাতন্ত্র্য (one degree of freedom) আছে বলা হয়। যেমন একটি দণ্ডের এক প্রান্ত স্থির থাকলে এবং দণ্ডটি কেবলমাত্র একটি উল্লম্বতলে থাকলে আমরা দণ্ডটির অবস্থান জানতে কেবলমাত্র একটি কোণ অর্থাৎ দণ্ডটি উল্লম্বরেখার সহিত যে কোণ করে, তা জানলেই হবে।

এইরূপ একঘাত স্বাতন্ত্র্যযুক্ত একটি দৃঢ় বস্তু সংরক্ষী বলাধীন সাম্যাবস্থায় থাকলে ঐ সাম্যাবস্থার সুস্থিতি বিচার সহজেই করা যায় এবং দেখানো যায় যে বিভবশক্তি ঐ স্থানে (minimum) অবম মানের হলে সাম্যাবস্থা সুস্থিত হবে ও পরম মানের হলে সুস্থিতিহীন হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক একটি বস্তুর অবস্থান একটি প্রমাত্রা (parameter) θ দ্বারা চিহ্নিত হল। বস্তুটির উপর বাধকসমূহ এমন ধরা হল যে, বস্তুটির যে-কোনো বিন্দুর কার্তীয় স্থানাঙ্ক (x, y, z) জানবার জন্য θ জানলেই হবে।

বস্তুটির গতিশক্তি T হলে ও বিভবশক্তি V হলে T + V ধ্রুবক হবে (শক্তিসংরক্ষণ নীতি অনুযায়ী)। অর্থাৎ T + V = ধ্রুবক।

অতএব সময় t-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন নিয়ে পাই

$$\frac{dT}{dt}+\frac{dV}{dt}0 \tag{1}$$

একঘাত স্বাতন্ত্র্যযুক্ত বস্তুর ক্ষেত্রে

$$T=\frac{1}{2}\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2)$$

যেখানে সমস্ত কণার উপরে যোগ করা হল। এখন $x_\mathrm{i} = x_\mathrm{i}$ (θ) ইত্যাদি।

অতএব, $x_i=\dfrac{dx_i}{dt}=\dfrac{dx_i}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}$

অতএব আমরা পাই

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sum_i m_i\left[\left(\frac{dx_i}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{d\theta}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}a(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,\ \text{যেখানে}\ \ a(\theta)=\sum m_i\left[\left(\frac{dx_i}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dx_i}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{d\theta}\right)^2\right] \tag{2}$$

ধরা যাক বস্তুটির সাম্যাবস্থায় θ-এর মান শূন্য। অতএব সাম্যাবস্থার জন্য

$$\left(\frac{dV}{d\theta}\right)_{\theta=0}=0 \tag{3}$$

এখন সুস্থিতির শর্ত হল যে সাম্যাবস্থা হতে সামান্য বিচ্যুতির জন্য পরবর্তী গতি সাম্যাবস্থা হতে বেশী বিচ্যুত হবে না। অর্থাৎ θ -এর মান এক্ষেত্রে স্বল্পই থাকবে। θ-এর মান স্বল্প ধরে (2), (3) হতে পাই

$$T=\frac{1}{2}a(\theta)\theta'^2=\frac{1}{2}\left[a(0)+\theta a'(0)+\ldots\right]\theta^2$$

$$\approx\frac{1}{2}a(0)\theta^2 \tag{4}$$

$$V = V(\theta) = V(0) + \left(\frac{dV}{d\theta}\right)_0 \theta + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)_0 \theta^2 + \ldots$$

$$\approx V_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)_0 \theta^2 \quad (5)$$

(4) ও (5) হতে T ও V-এর মান (1)-এ বসিয়ে পাই

$$a(0)\dot{\theta}\ddot{\theta} + \left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)_0 \theta\theta = 0$$

কিন্তু যেহেতু $\dot{\theta}$ শূন্য নয়, অতএব

$$a(0)\ddot{\theta} + \left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)_0 \theta = 0 \quad (6)$$

যেহেতু গতিশক্তি ধনাত্মক, অতএব $a(0) > 0$ হবে। প্রথম ক্ষেত্রে V সাম্যাবস্থায় অবম মানযুক্ত হলে

$\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)_0 > 0$ হবে, অতএব (5) থেকে এক্ষেত্রে

$$\theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)_0} \Big/ a_0 t + \varepsilon\right) \text{ হবে}$$

অর্থাৎ θ-এর মান সীমিত থাকবে, অর্থাৎ সাম্যাবস্থা সুস্থিত হবে।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)_0 < 0$ হলে, $\theta = \theta_1 \exp\sqrt{-\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)} \Big/ a_0 t$

$$+\theta_3 \exp\left\{-\sqrt{-\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)} \Big/ a_0 t\right\}$$

অর্থাৎ $\theta \to \infty$ যদি $t \to \infty$ হয়। অর্থাৎ সাম্যাবস্থা সুস্থিতিহীন হবে।

10.7 সারাংশ

কোন বস্তুর বলসাপেক্ষে সাম্যাবস্থার স্থিতি থেকে সামান্য বিচ্যুতির ফলে বস্তুটির অবস্থান সাম্যের অবস্থানের নিকটে থাকলে সাম্যাবস্থাকে সুস্থিতি (stable) এবং বস্তুটির অবস্থান সাম্যাবস্থা থেকে ক্রমাগত দূরে অপসৃত হলে বস্তুটির সাম্যাবস্থাকে সুস্থিতিহীন (unstable) বলা হবে।

শক্তি পরীক্ষা দ্বারা সাম্য সুস্থিতি নির্ণয় (Energy Test of Stability) : সংরক্ষী বলাধীন কোন বস্তু সাম্যাবস্থায় থাকলে ঐ সাম্যাবস্থায় বস্তুটির স্থিতিশক্তি V ষ্টেশনারী (stationary) হয় অর্থাৎ স্থিতিশক্তির পরিবর্তন (বস্তুটির অবস্থান সামান্য পরিবর্তন হলে) $\delta V = 0$ যদি স্থিতিশক্তি সাম্যাবস্থানে নিম্নতম (minimum) হয় তাহলে বস্তুটির সাম্যাবস্থা সুস্থিত (stable) হবে। কিন্তু স্থিতিশক্তি সাম্যাবস্থানে যদি বৃহত্তম হয়, তবে সাম্যাবস্থাটি সুস্থিতিহীন (unstable) হবে।

একটি স্থির বস্তুর উপর একটি ভারী বস্তু সাম্যে অবস্থান করলে এবং উহাদের স্পর্শবিন্দুতে বস্তু দুটির তল বক্রের বক্রতা ব্যাসার্ধ যথাক্রমে R (স্থির বস্তু) $3r$ (ভারী বস্তু) হয়, এবং ভারী বস্তুর ভারকেন্দ্র যদি স্পর্শবিন্দুর উল্লম্বরেখায় h উচ্চতায় থাকে তবে যদি **(যেখানে তল দুটির বক্রতী বিপরীত দিকে)**

$$\frac{1}{h} > \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \text{ হয় তবে সাম্যাবস্থা সুস্থিত}$$

আর যদি $\frac{1}{h} \le \frac{1}{R} + \frac{1}{r}$ তবে সাম্যাবস্থা সুস্থিতিহীন

যদি তল দুটির বক্রতা একই দিকে হয়, সেক্ষেত্রে ভারী বস্তুটির সাম্যাবস্থা সুস্থিত হবে যদি

$$\frac{1}{h} > \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$$

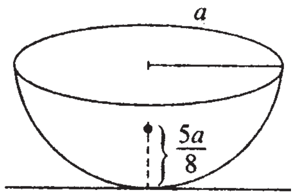
আর সুস্থিতিহীন হবে যদি $\frac{1}{h} < \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$

যদি $\frac{1}{h} = \frac{1}{r} = \frac{1}{R}$ হয় তবে সুস্থিতির শর্ত হল $R > 2r$ এবং সুস্থিতিহীন হবে যদি $R < 2r$

আর যদি $\frac{1}{h} = \frac{1}{r} = \frac{1}{R}$ এবং $R = 2r$ হয় তবে সাম্যাবস্থা নিরপেক্ষ সাম্যাবস্থা (neutral equilibrium) বলা হয়।

10.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. একটি অর্ধগোলাকার ভারী বস্তু উহার বক্রতল অনুভূমিক তলের উপর সাম্যে আছে। উহা সুস্থিত কি?



12 নং চিত্র

$$\text{ভারকেন্দ্রের উচ্চতা } = \frac{5a}{8}$$

$$\therefore h = \frac{5a}{8}, r = a, R = \infty$$

$$\text{অতএব } \frac{1}{r} + \frac{1}{R} = \frac{1}{a} < \frac{1}{h}$$

অতএব সুস্থিত।

2. একটি পূর্ণ গোলক একটি অনুভূমিক তলের উপর সাম্যাবস্থায় আছে। সাম্যটি কি ধরনের?

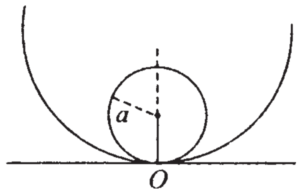
$$\text{এখানে } h = a,\ r = a,\ R = \infty\ \therefore \frac{1}{h} = \frac{1}{r} + \frac{1}{R}$$

এখানে সামান্য সরণজনিত অবস্থা যেহেতু আর একটি সাম্যাবস্থা অতএব এটি neutra*l* বা নিরপেক্ষ সাম্য হবে।

3. একটি বৃত্তাকার পাত একটি ফাঁপা বৃত্তাকার তলের উপর ভিতরে সাম্যাবস্থায় আছে। সাম্যটি সুস্থিত হবে কি?

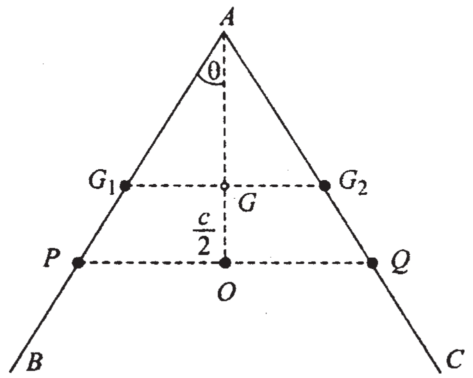
সাধারণ স্পর্শতল থেকে পাতের ভারকেন্দ্র a উচ্চতায় অতএব $h = a$, আর $r = a$, $R = b$

ধরা যাক এখন সুস্থিতির শর্ত হল $\frac{1}{h} > \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$ $i.e., \frac{1}{a} > \frac{1}{a} - \frac{1}{R}$ এটি সত্য। অতএব পাতের সাম্য সুস্থিত, R এর মান যা হোক।



13 নং চিত্র

4. দুটি সমান ওজনের দণ্ড এক প্রান্তে ঢিলেভাবে যুক্ত (freely jointed) আছে। দুটি স্থির অনুভূমিক রেখায় পেরেকের উপর দণ্ড দুটি সুসমঞ্জসভাবে সাম্য আছে। পেরেক দুটির মধ্যে দূরত্ব c হলে এবং দণ্ডগুলির দৈর্ঘ $2a$ হলে সাম্যাবস্থায় সুস্থিতি নির্ণয় করুন।



14 নং চিত্র

সমাধান : সুসমঞ্জসভাবে দণ্ড দুটির উল্লম্বরেখার সহিত θ কোণ করলে এবং দণ্ড দুটির সম্মিলিত ভারকেন্দ্রের PQ রেখা থেকে উচ্চতা h হলে

$$h = OG = OA - AG = \frac{c}{2}\cot\theta - a\cos\theta$$

সাম্যে স্থিতিশক্তি ষ্টেশনারী হওয়ার জন্য $\frac{dh}{d\theta} = 0$

কিন্তু $\frac{dh}{d\theta} = -\frac{c}{2}\cos ec^2\theta + a\sin\theta$

এবং $\frac{d^2h}{d\theta^2} = c\cos ec^2\theta\cot\theta + a\cos\theta$

অতএব $\frac{dh}{d\theta} = 0$ হয় যখন $2a\sin^3\theta = c$

অর্থাৎ সাম্যাবস্থায় $\sin^3\theta = \frac{c}{2a}$ ($\therefore$ c must be less than $2a$)

আবার $\left(\frac{d^2h}{d\theta^2}\right)_{\theta=\sin^{-1}\left(\frac{c}{2a}\right)^{1/3}} > 0$ অতএব সাম্যাবস্থায় স্থিতিশক্তি বৃহত্তম।

EMT-10
BLOCK-2

NOSU

একক 11 ❐ বিষয় পরিচিতি (মাধ্যমে ক্রিয়াশীল চাপ, বলসমূহ, পীড়ন ইত্যাদি), প্রবাহী পদার্থের বলাধীন স্থিতিসূত্র সমূহ ও বিভিন্ন ধর্ম

গঠন

11.1 প্রস্তাবনা

11.2 উদ্দেশ্য

11.3 বিষয় পরিচিতি

11.4 প্রযুক্ত বল এবং তার প্রভাব (পীড়ন এবং বিকৃতি)

11.5 বিভিন্ন প্রকারের প্রবাহ (তরল এবং বাষ্পীয় পদার্থ)

11.6 একক চাপ এবং তার ধর্ম (সংকোচন)

11.7 উদাহরণ

11.8 অনুশীলনী ও উত্তরমালা

11.9 সারাংশ

11.10 সহায়ক গ্রন্থ

11.1 প্রস্তাবনা

আমাদের চারপাশে যে সব বস্তু আমরা ইন্দ্রিয় দ্বারা উপলব্ধি করি তাদের পদার্থ বলা হয়। এই পদার্থসমূহকে মূলতঃ দুটি ভাগে ভাগ করা যায়।

(i) কঠিন পদার্থ (Solid)

(ii) তরল এবং বায়বীয় পদার্থ (Fluid)

আরও সঠিকভাবে উপলব্ধি করলে বুঝতে পারি, পদার্থসমূহ তিনটি পর্যায়ে অবস্থান করে।

(i) স্থিতিশীল অবস্থা।

(ii) গতিশীল অবস্থা।

(iii) আপেক্ষিক স্থিতিশীল বা গতিশীল অবস্থা

আলোচ্য গ্রন্থে আমরা তরল ও বায়বীয় পদার্থের স্থিতিশীল অবস্থা অথবা আপেক্ষিক স্থিতিশীল অবস্থা বিভিন্ন বিষয়ের বিচার বিশ্লেষণ ও বৈশিষ্ট্য নিরূপণ করব। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়,—একটি জলাশয়ে কিছু জল আছে বা একটি আবদ্ধ বোতলে কিছু বায়ু আছে, যে বোতলটি একটিলোক একস্থান থেকে অন্যস্থানে নিয়ে যাচ্ছে। এসমস্ত ক্ষেত্রে স্থিতির স্বরূপ ব্যাখ্যা করাই, প্রবাহ স্থিতিবিদ্যার উদ্দেশ্যে। ঝর্ণার প্রবাহধারা বা বায়ুপ্রবাহে সৃষ্ট ঝড়-এর আলোচনা এই বিদ্যার অন্তর্গত নয়।

11.2 উদ্দেশ্য

সকল প্রাণী জীবনযাপনের প্রয়োজনে, বিভিন্ন পদার্থের সংস্পর্শে আসে এবং এর ফলে উদ্ভূত পরিস্থিতির প্রভাব জীবনযাত্রাকে বহুলাংশে প্রভাবিত করে। সে কারণেই বিভিন্ন পদার্থের ধর্ম, বৈশিষ্ট্য এবং প্রয়োগ সম্বন্ধে সম্যক ধারণা থাকা বাঞ্ছনীয়। যেহেতু আমাদের চারপাশে অন্ততঃ তিন-চতুর্থাংশ বায়বীয় বা জলীয় পদার্থ দ্বারা আবৃত, সুতরাং এই পদার্থসমূহের ধর্ম এবং প্রযুক্তিমূলক আচরণ জানা সবিশেষ প্রয়োজন।

সে কারণেই প্রবাহবিদ্যা স্থিতি এবং গতি—বিষয় হিসাবে উপস্থাপন করা জরুরী। আপাততঃ এই গ্রন্থে তরল এবং বায়বীয় পদার্থের স্থিতিমূলক বৈশিষ্ট্যের আলোচনা করা হয়েছে। এই এককে কিছু প্রারম্ভিক সংজ্ঞা এবং তাদের সূত্রসমূহ উল্লেখ করা হয়েছে। একথা কোনমতেই বলা হচ্ছে না যে উল্লেখিত সূত্রসমূহ যথেষ্ট, কিন্তু শুধুমাত্র মৌলিক সূত্রসমূহ এই এককে উপস্থাপন করা হয়েছে।

11.3 বিষয় পরিচিতি

আলোচ্য এককে প্রবাহবিদ্যার স্থির অবস্থায় বিভিন্ন ধর্ম এবং সূত্র আলোচনা করা হবে। যে পদার্থ প্রবাহিত হতে পারে তাকে প্রবাহী বলা হয়। প্রবাহী পদার্থের দুটি রূপ। তরল পদার্থ ও বায়বীয় পদার্থ। তরল পদার্থের নির্দিষ্ট আয়তন আছে, কিন্তু কোন আকার নেই। বায়বীয় পদার্থের নির্দিষ্ট আকার বা আয়তন কোনটাই নেই। এছাড়াও তরল ও বায়বীয় পদার্থের আরেকটি গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য আছে। বায়বীয় পদার্থ যে কোন চাপের কাছে নত, কিন্তু তরল পদার্থ সহজে নত নয়। এছাড়াও আরেকটি বিশেষ ধর্ম লক্ষ্য করা যায়। যেহেতু প্রবাহী পদার্থের নির্দিষ্ট আকার নেই, অতএব এই পদার্থের কোন দৃঢ়তা থাকে না। ফলে প্রবাহী পদার্থ যে কোন কৃন্তন প্রয়োগ করলে স্থির থাকতে পারে না। সুতরাং প্রবাহী পদার্থের স্থিতাবস্থায় কৃন্তন-পীড়ন সবসময় অনুপস্থিত থাকবে।

আপাততঃ আমরা সামগ্রিক প্রবাহী পদার্থের স্থিতাবস্থা আলোচনায় না গিয়ে তরল পদার্থের স্থিতাবস্থার বিভিন্ন কার্যকারণ এবং প্রযুক্ত বল সংক্রান্ত আলোচনা করব।

11.4 প্রযুক্ত বল এবং তার প্রভাব (পীড়ন ও বিকৃতি)

পীড়ন (Stress) ঃ বাহ্যিক বল প্রয়োগ করে, কোন বস্তুকে বিকৃত করার চেষ্টা হলে, বস্তুর ভিতরে প্রতিক্রিয়া বলের সৃষ্টি হয়। এই প্রতিক্রিয়া বল বাহ্যিক বলকে প্রতিরোধ করে বস্তুর পূর্বেকার আকার বা আয়তন বজায় রাখতে চেষ্টা করে। বস্তুর প্রতি একক ক্ষেত্রফলে ক্রিয়ারত এই প্রতিক্রিয়া বলকে পীড়ন বলা হয়।

সুতরাং, $$\text{পীড়ন} = \frac{\text{বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল}}{\text{বস্তুর প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল}}$$

বিকৃতি (Strain) ঃ বাহ্যিক বলের ক্রিয়ার ফলে বস্তুর বিভিন্ন অংশের মধ্যে আপাতঃ আপেক্ষিক স্মরণ হয়। ফলে বস্তুর আকার বা আয়তনের পরিবর্তনের সম্ভাবনা থাকে। তাই অবস্থাটাকে বলা হয় বস্তুর বিকৃতি। স্বভাবতঃই বস্তুর বিকৃতির কোন একক বা মাত্রা নেই। এটি একটি সংখ্যামাত্র।

ঘনত্ব (Density) ঃ কোন পদার্থের একক আয়তনের ভরকে তার ঘনত্ব বলা হয়।

$$\text{ঘনত্ব}\,(\rho) = \frac{\text{ভর}}{\text{আয়তন}} = \frac{M}{V}$$

ঘনত্বের একক ঃ C.G.S. পদ্ধতিতে ঘনত্বের একক gm/c.c.

M.K.S. পদ্ধতিতে ঘনত্বের একক kg/M^3

F.P.S. পদ্ধতিতে ঘনত্বের একক lb/ft^3

আপেক্ষিক গুরুত্ব (Specific gravity)

কোন তরল পদার্থের আপেক্ষিক গুরুত্ব বলতে ঐ পদার্থের ঘনত্ব এবং $4°C$ উষ্মতায় বিশুদ্ধ জলের ঘনত্বের অনুপাত বোঝায়।

$$\text{আপেক্ষিক গুরুত্ব} = \frac{\text{পদার্থের ঘনত্ব}}{4°C\ \text{উষ্মতায় জলের ঘনত্ব}}$$

স্বভাবতঃই আপেক্ষিক গুরুত্ব-র কোন মাত্রা নেই। এবং এটি এককবিহীন।

স্পষ্টতঃ ঘনত্ব এবং আপেক্ষিক গুরুত্বের সাংখ্যমান একই, কিন্তু প্রয়োগ এবং ধারণার মধ্যে মৌলিক পার্থক্য আছে।

11.5 বিভিন্ন প্রকারের প্রবাহ (তরল এবং বায়বীয় পদার্থ)

ঘনত্বের পরিপ্রেক্ষিতে প্রবাহী বস্তুর প্রকারভেদ আছে। পূর্বেই বলা হয়েছে মূলতঃ দুই প্রকার প্রবাহী বস্তু আছে।

যথা—(1) তরল পদার্থ এবং (2) বায়বীয় পদার্থ।

যে তরল পদার্থের ঘনত্ব সর্বদা সমান, তাকে সমসত্ত্ব (homogeneus) তরল পদার্থ বলা হয়।

কোন সমস্যায় অন্য কিছু উল্লেখিত না থাকলে আমরা তরল পদার্থটিকে সবসময় সমসত্ত্ব ধরে নেব।

যে তরল পদার্থের বিভিন্ন পর্য্যায়ে ঘনত্বের মান বিভিন্ন, তাকে বলা হয় অসমসত্ত্ব (heterogeneous) তরল পদার্থ।

সাধারণতঃ, কম ঘনত্বের তরল পদার্থ বেশি ঘনত্বের তরলের উপরে থাকবে। অর্থাৎ গভীরতার সঙ্গে ঘনত্বের মান বৃদ্ধি পাবে।

11.6 একক চাপ এবং তার ধর্ম (সংকোচন)

তরল পদার্থ বা বায়বীয় পদার্থ অবশ্যই একটি নির্দিষ্ট পাত্রে স্থিতাবস্থায় থাকে। পাত্রে আবদ্ধ প্রবাহী পাত্রের তলের প্রত্যেকটা বিন্দুতে আবশ্যিকভাবে বল প্রয়োগ করে এবং এই প্রযুক্ত বল সবসময় স্পর্শতলের উপরলম্বভাবে ক্রিয়া করে। সামগ্রিক তলের উপর প্রযুক্ত বলের পরিমাণকে বলা হয় ঘাত (Thurst)। এবং একটা বিন্দুকে অন্তর্ভুক্ত রেখে অতি ক্ষুদ্র পরিমাণ তলকে একক ক্ষেত্র কল্পনা করে, ওই ক্ষেত্রের উপর ঘাতের পরিমাণকে বলা হয় চাপ (Pressure).

মনে করি তলের ক্ষেত্রফল A, ঘাতকের পরিমাণ F. সুতরাং চাপের পরিমাণ হবে $\dfrac{F}{A}$ আরও বিশেষভাবে বলতে গেলে চাপের প্রকৃতমান হবে $p = \underset{A \to 0}{Lt} \dfrac{F}{A}$ বা, $P = \underset{\delta A \to 0}{Lt} \dfrac{1}{\delta A} \int_0^{\Delta F} dF$

ঘাত এবং চাপের একক ঃ

স্পষ্টতঃই ঘাতের একক বলের এককের সমান বা ডাইন, নিউটন এবং পাউন্ড।

চাপের একক হবে 1 নিউটন / m^2 = 1 প্যাস্কাল,

বা, 1 পাউন্ড / ft^2 বা, 1 ডাইন / cm^2

তরলে চাপের বৈশিষ্ট্য ঃ

(a) কোন স্থির তরলের মধ্যে যে কোন বিন্দুতে চাপ সবদিকে সমান

ধরা যাক একটি পাত্রে কিছুটা তরল স্থির অবস্থায় আছে। তরলের মধ্যে *KL*, *LM* এবং *MK* তরলগুলি দিয়ে আবদ্ধ একটি অতিক্ষুদ্র আয়তনের তরলের সাম্যাবস্থা বিবেচনা করা হবে। এই তলগুলির উপর তরল যথাক্রমে P, P_x, P_y চাপ প্রয়োগ করে। প্রতিটি তলের উপর প্রযুক্ত চাপ সুষম এবং আবদ্ধ তরলের ওজন নগণ্য বলে ধরা হল।

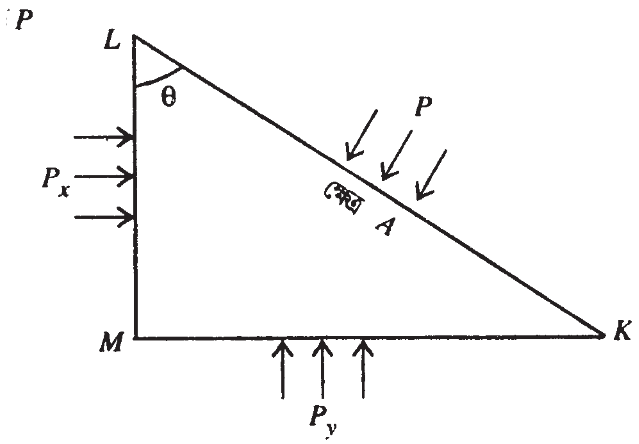
KL তলের ক্ষেত্রফল *A* এবং *LM* ও *MK* তল পরস্পর লম্ব। *LM* ও *KL* তল দুটির মধ্যে কোণ θ, সুতরাং *LM* তলের ক্ষেত্রফল $A \cos \theta$ এবং *MK*-এর হবে $A \sin \theta$।

এবার আবদ্ধ তরলের সাম্যাবস্থার জন্য আমরা পাই—

$PA \cos \theta = P_x \,.\, A \cos \theta$

এবং, $PA \,.\, \sin \theta = P_y . A \sin \theta$

সুতরাং $P_x = P_y = P$



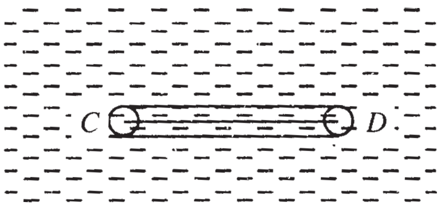
অতিক্ষুদ্র বলে আবদ্ধ আয়তনকে বিন্দুরূপে গণ্য করা যায়। *KL*, *LM* এবং *MK* তলগুলির অবস্থান যে কোন দিকে কল্পনা করা যায় বলে সিদ্ধান্ত করা যায় যে—স্থির তরলের মধ্যে যে কোন বিন্দুতে চাপ সবদিকে সমান।

(b) কোন স্থির তরলের মধ্যে একই অনুভূমিক তলে সকল বিন্দুতে চাপ সমান

ধরি কোন স্থির তরলের মধ্যে একই অনুভূমিক তলে দুটি বিন্দু *C* এবং *D* আছে। তরলের মধ্যে

CD রেখাকে অক্ষ ধরে একটি অনুভূমিক চোঙ কল্পনা করা হল। চোঙের দুই প্রান্ততল C ও D বিন্দুর মধ্য দিয়ে গেছে এবং এর প্রস্থচ্ছেদ A অতিক্ষুদ্র।

ধরি C ও D বিন্দুতে তরলের চাপ যথাক্রমে p ও p' ; আমরা প্রমাণ করতে চাই $p = p'$



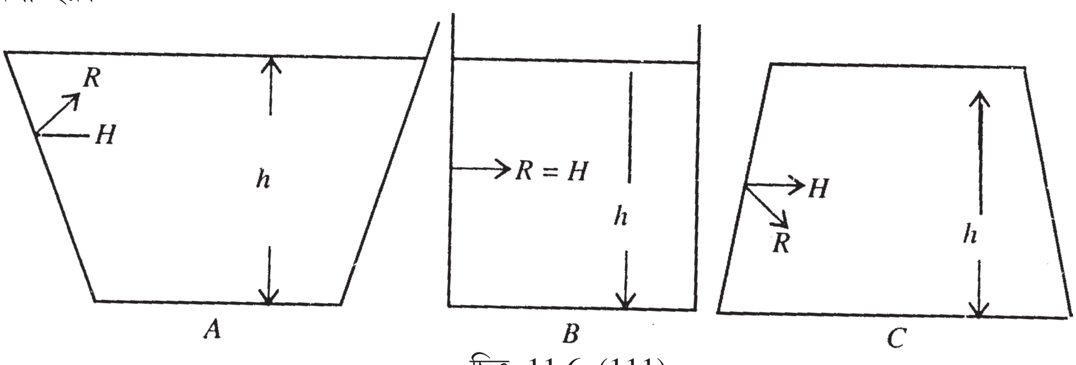
এই চাপ চোঙের প্রান্ততলের লম্বদিকে অর্থাৎ CD রেখা বরাবর ক্রিয়া করে। সুতরাং C ও D প্রান্তে চোঙের তলের উপর যথাক্রমে CD অভিমুখে PA ঘাত এবং DC অভিমুখে $P'A$ ঘাত ক্রিয়া করে। চোঙের উপর প্রযুক্ত ঘাত ঐ তলের লম্বদিকে ক্রিয়া করে। অতএব এই ঘাত CD রেখার সমকোণে ক্রিয়া করায় CD অভিমুখে ওর কোন উপাংশ থাকে না। চোঙের ভিতরের তরল সাম্যাবস্থায় আছে ; অতএব সাম্যাবস্থার শর্তানুযায়ী

$$p.A = p'.\mathrm{A} \text{ বা, } p = p'$$

একটা সাধারণ পরীক্ষার মাধ্যমে প্রমাণ করা যায় যে একই তলে দুটি বিন্দুতে তরলের চাপ সমান, কিন্তু এই দুটি বিন্দুর মধ্যেকার জলস্তর সব সময় একই অনুভূমিক তলে জলমাধ্যমে থাকতে হবে এমন কোনো কথা নেই, যে কোন বক্র নল দ্বারা যুক্ত থাকলেও একই চাপ হবে।

(c) উদস্থৈতিক কূট (Hydro-static paradox)

পাত্রের তলদেশে তলদ্বারা প্রযুক্ত ঘাত পাত্রের উপর নির্ভর করে না, কেবলমাত্র তরলের গভীরতা এবং পাত্রের ভূমির ক্ষেত্রফলের উপর নির্ভর করে। অবিশ্বাস্য মনে হয় বলে এই ঘটনাকে কূট (Paradox) বলা হয়।



চিত্র 11.6 (111)

A, *B*, *C* তিনটি পাত্র, তাদের আকার বিভিন্ন, কিন্তু ওদের ভূমির ক্ষেত্রফল সমান [চিত্র 16.6 (111)] পাত্র তিনটিকে একই উচ্চতা পর্যন্ত তরল দিয়ে পূর্ণ করলে ওদের ভূমির উপর একই পরিমাণ চাপ প্রযুক্ত হয়, যেহেতু প্রত্যেক পাত্রের ভূমির উপর ঘাতের মান সমান। মোট ঘাত প্রকৃতপক্ষে ভূমির ক্ষেত্রফল ও তরলের উচ্চতার উপর নির্ভরশীল, তরলের পরিমাণের উপর নয়, বাড়তি তরল বা কমতি তরল কোন পাত্রে থাকলে তা বক্রতলের ক্রিয়ার মাধ্যমে সাম্যাবস্থায় থাকে।

কয়েকটি সিদ্ধান্ত উল্লেখ করা যেতে পারে

1. স্থির তরলের মুক্ততল অনুভূমিক থাকে।

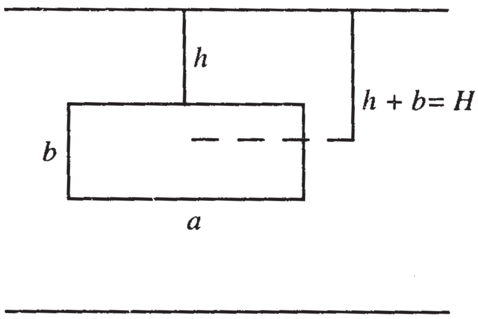
2. পরস্পর নল দ্বারা যুক্ত বিভিন্ন পাত্রের মুক্ততল সর্বদা সমউচ্চতায় অনুভূমিক।

3. স্থিতাবস্থায় তরলের মধ্যে একই তলে যে কোন বিন্দুতে তরলের চাপ সর্বদা সমান।

4. কোন তরলের কোন বিন্দুতে চাপ তা তরলের ঘনত্ব, পারিপার্শ্বিক প্রযুক্ত বল যথা মাধ্যাকর্ষ বল এবং মুক্ত তল ঐ বিন্দুর গভীরতার উপর নির্ভর করে অর্থাৎ,

$\rho k(ph)F$ k = সমানুপাতিক ধ্রুবক। F পারিপার্শ্বিক প্রযুক্ত বল, ρ = তরলের ঘনত্ব, h = ঐ বিন্দুর গভীরতা। তাই বলা চলে, ঐ বিন্দুর গভীরতা যত বাড়বে চাপ ততই বাড়বে।

5. উলম্বভাবে বা আনতভাবে তরলে নিমজ্জিত কোন তলের উপর প্রযুক্ত গড় চাপ ঐ তলের উপর ভারকেন্দ্রে প্রযুক্ত চাপের সমান।



তরলে নিমজ্জিত কোন তলের উপর প্রযুক্ত গড় চাপ কেবলমাত্র ওর ভরকেন্দ্রের গভীরতার উপর নির্ভর করে, ঐ তলের নতির উপর নির্ভর করে না। গড় চাপ বা প্রযুক্ত চাপ নির্ণয় করে ওকে ওদের ক্ষেত্রফল দিয়ে গুণ করলে প্রযুক্ত মোট ঘাত পাওয়া যায়, মনে করি তরলে নিমজ্জিত কোন তরলের ভারকেন্দ্রের গভীরতা H, অতএব ঐ তলের উপর প্রযুক্ত গড় চাপ = $H\rho g$ $p = g\rho$ ধরা হয়েছে,

উপরোক্ত ধর্মসমূহ থেকে প্রয়োগমূলক কিছু যান্ত্রিক সুবিধা পাওয়া যায়।

(1) ঘাত-বৃদ্ধির নীতি ঃ

আবদ্ধ তরলের যে কোন বিন্দুতে চাপের পরিবর্তন করা হলে, ঐ তরলে অন্য সকল বিন্দুতে চাপের সমান পরিবর্তন ঘটে।

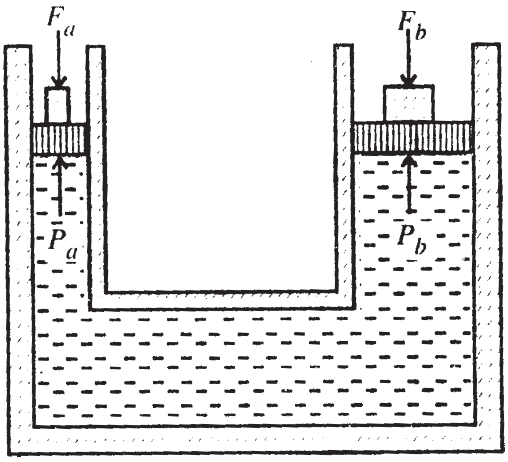
বিখ্যাত ফরাসী বিজ্ঞানী ও দার্শনিক রেইস্ পাস্কাল এই সূত্রটি প্রকাশ করেন। তাই একে পাস্কালের সূত্র বলা হয়।

সূত্রটির যথাযথভাবে উল্লেখ হল ঃ

আবদ্ধ তরলের যে কোন অংশে প্রযুক্ত চাপ সবদিকে অপরিবর্তিত মানে সঞ্চালিত হয় এবং তরলের সংলগ্ন যে কোন তলের উপর লম্বভাবে ক্রিয়া করে।

বিভিন্ন পরীক্ষার মাধ্যমে এই সূত্রটির যথার্থতা প্রমাণিত হয়েছে। এই সূত্রটি প্রয়োগের ফলে কোন বস্তুর উপর ঘাতবৃদ্ধি করা যায়। একটি পরীক্ষা দ্বারা তা আলোচনা করা যেতে পারে।

একটি মোটা ও একটি সরু চোঙকে একটি নল দিয়ে যুক্ত করে জল বা অন্য কোন তরল দিয়ে পূর্ণ করা হল। মোটা চোঙটির প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল b এবং সরু চোঙটির $a[b > a]$। দুটি ঘর্ষণহীন পিস্টন চোঙ দুটির সাথে যুক্ত আছে।



ঘাত বৃদ্ধির নীতি ঃ চিত্র 11.6 (v)

ছোট পিস্টনের উপর নীচের দিকে F_a বল প্রয়োগ করলে তরলের উপর প্রযুক্ত চাপ $= P = \frac{FA}{a}$ পাস্কালের সূত্রানুসারে এই চাপ অপরিবর্তিত মানে বড় পিস্টনের উপর $P.b$ বল প্রযুক্ত হবে। সাম্যাবস্থার জন্য বড় পিস্টনের F_b বল প্রয়োগ করলে $F_b = P.b$

$$= \frac{Fa}{a} \times bn.Fa \quad [\text{যেখানে, } n = \frac{b}{a} > 1]$$

অতএব বড় পিস্টনটির উপর n গুণ বেশি ঘাত প্রযুক্ত হয়। এভাবে তরলের চাপ সঞ্চালনের ধর্মকে কাজে লাগিয়ে আমরা ঘাত বৃদ্ধি করে অনেক কাজ সহজে করতে পারি।

ঘাত বৃদ্ধির নীতি ও শক্তির সংরক্ষণ নীতি ঃ

উপরিউক্ত ঘাত বৃদ্ধির নীতিতেও যে শক্তির সংরক্ষণ সূত্র লঙ্ঘিত হয় না, তা নিচে দেখানো হল।

ধরি, F_a বলের ক্রিয়ায় ছোট পিস্টন নিচের দিকে l_1 দূরত্ব নামে ও বড় পিস্টন উপরের দিকে l_2 দূরত্ব উঠে।

তরলের আয়তন বিচার করে বলতে পারি,—

$$bl_2 = al_1$$

এবার ছোট পিস্টনের উপর প্রযুক্ত বল Fa কর্তৃক কৃতকার্য $= F_a \times l$।
এবং, বড় পিস্টণের উপর প্রযুক্ত বল Fa কর্তৃক কৃতকার্য $= F_a \times l_2$।
কিন্তু

$$F_b \times l_2 = Fa.\ \frac{b}{a}\ .l_2 = F_a \times l_1$$

$\therefore$ প্রাপ্তকার্য = কৃতকার্য

অর্থাৎ, শক্তির সংরক্ষণসূত্র মান্য হচ্ছে।

এখানে $F_a >> F_a$, স্পষ্টতঃই $l_2 >> l$। অর্থাৎ বড় পিস্টনের সরণ ছোট পিস্টনের তুলনায় অনেক কম হবে। হাইড্রোলিক প্রেসের ক্ষেত্রে এই পাস্কালের সূত্র কাজে লাগিয়ে উক্ত যন্ত্রের কার্য নির্ধারণ করা হয়।

11.7 উদাহরণ

(a) 28 cm ব্যাসের একটি চোঙাকৃতি পাত্রের মধ্যে 30.8 লিটার পারদ ঢাললে পাত্রের তলদেশে প্রযুক্ত চাপ ও মোট ঘাত নির্ণয় কর। (পারদের আপেক্ষিক গুরুত্ব = 13.6)

সমাধান ঃ

পাত্রের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 = 3.14 \times 14^2 = 616\ \text{cm}^2$

$\therefore$ পারদস্তম্ভের উচ্চতা $= \dfrac{30.18 \times 10^3}{616}\,\text{cm} = 50\ \text{cm}$

$\therefore$ প্রযুক্ত চাপ $= hfg = 50 \times 13.6 \times 980 = 66.64 \times 10^4\ \text{dyne/cm}^2$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘাত = চাপ × ক্ষেত্রফল = $66.64 \times 10^4 \times 616$
$= 4.1 \times 10^8$ dyne.

(*b*) একটি উত্তোলক পাম্পের পিস্টনের ক্ষেত্রফল 40 cm^2। ঐ পাম্প দিয়ে 150 *m* উঁচুতে জল তুলতে কত বল প্রয়োগ করতে হবে।

সমাধান ঃ নির্ণেয় বল 150m উঁচু জলস্তম্ভের ভূমির প্রযুক্ত ঘাতের সমান হবে।

$\therefore \quad F = Ahg = 40 \times 150 \times 10^2 \times 1 \times 980$ dyne $= 5.88 \times 10^8$ dyne.

(*c*) প্রমাণ করো যে তরলের স্থিতিস্থাপকতার চাপের সাথে সমান হয়, তাহলে প্রযুক্ত চাপ আয়তনের সালে ব্যস্তানুপাতী হবে।

সমাধান ঃ $-v\dfrac{dp}{dv} = p,$

$\therefore \dfrac{dp}{p} + \dfrac{dv}{v} = 0$

সমাকলন করে পাই, $\log P + \log V = c = \log K$ (ধরি)

$\therefore \log PV = \log K \Rightarrow PV = K$ (ধ্রুবক)

$\therefore p \, \alpha \dfrac{1}{V}$ (প্রমাণিত)।

11.8 অনুশীলনী

(1) একটি জলভর্তি চোঙের উচ্চতা হল 50cm, আর ভূমির ক্ষেত্রফল হল 20 sq.cm. চোঙটির ভূমিটিকে টেবিলের উপর রাখা হল। তাহলে চোখের জল টেবিলের উপর কি ঘাত প্রয়োগ করবে।

[Hints : ঘাত = চাপ × ক্ষেত্রফল] (Ans : 9-8 × 10^5 dyne)

(2) একটি *U*-নল (সুষম প্রস্থচ্ছেদ বিশিষ্ট *U*-এর আকারে বাঁকানো নল)-এর এক বাহুতে প্যারাফিন এবং অন্যটিতে জল নিয়ে নলটিকে উল্লম্বভাবে একটি টেবিলে রাখা হল। যদি টেবিলের উপর থেকে প্যারাফিনের উপরিতল এবং নিম্নতল যথাক্রমে 32.2 cm এবং 8.2 cm উপরে থাকে এবং জলের উপরিতল 28.6 cm উপরে থাকে, তবে প্যারাফিনের আপেক্ষিক গুরুত্ব নির্ণয় কর।

[Hints : পাস্কালের সূত্র প্রয়োগ করুন] (Ans. 0.85)

(3) কোন খালে একটি 20m চওড়া লকগেট আছে। তার একদিকে জলের গভীরতা 50m এবং অপরদিকে 24m। লকগেটটির উপর লব্ধঘাত নির্ণয় কর।

[Hint : পাস্কালের সূত্র] (*Ans.* 19.24 × 10^9 gmut)

(4) একটি হাইড্রলিক প্রেসের বড় ও ছোট পিস্টনের ব্যাস যথাক্রমে 45cm এবং 5cm। ছোট পিস্টনে কি পরিমাণ বল প্রয়োগ করলে বড় পিস্টনে 40 50 kg m wt ঘাত উৎপন্ন হবে।

[Hint : পিস্টনের জন্য $F_b = n\ Fa$ সূত্র দ্রষ্টব্য] (Ans. 50 kgmwt.)

(5) একটি হাইড্রলিক প্রেসের ছোট পিস্টনের ব্যাসার্ধ 8cm এবং বড় পিস্টনের ব্যাসার্ধ 96cm। ছোট পিস্টনটির সাথে যুক্ত একটি হস্তচালিত লিভারের বাহুদ্বয়ের অনুপাত 3 : 28, লিভারটির হাতলে 27 kgwt বল প্রয়োগ করলে, বড় পিস্টনে উৎপন্ন ঘাত নির্ণয় কর।

[Hint : অনুশীলনী 4-এর অনুরূপ] [Ans. 36288 kgwt]

(6) সমসত্ত্ব তরলে একটি সামান্তরিক নিমজ্জিত আছে। প্রমাণ করো যে প্রত্যেক কর্ণের শীর্ষবিন্দুতে প্রযুক্ত চাপের সমষ্টির মান সমান হবে।

[Hint : ভারকেন্দ্রের ধারণার সাহায্য নিন]

11.9 সারাংশ

এই অধ্যায়ে প্রবাহী পদার্থের সাম্যাবস্থায় থাকাকালীন ঘাত এবং চাপের সংজ্ঞা এবং তাদের চরিত্র ও ধর্মবিষয়ে মূলত আলোকপাত করা হয়েছে। প্রবাহী পদার্থ সাম্যাবস্থায় থাকার বিশেষ শর্ত আছে। সেই শর্তসমূহ পরবর্তী কোন অধ্যায়ে আলোচিত হবে। তরলের চাপের কয়েকটি প্রয়োগ বিশেষভাবে উল্লেখ করা হয়েছে যেগুলো কলকারখানায় যন্ত্রাদিতে বিশেষ কাজে আসে। কয়েকটি উদাহরণ সাহায্যে এই বিষয়সমূহ ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

11.10 সহায়ক গ্রন্থ

(1) A. S. Ramsay : Hydrostatics

(2) M. Ray & H. S. Sharma : A Text book of hydrostatics. Premier Publishing Co., New Delhi, 1961.

(3) J. M. Kar : Hydrostatics : for degree classes. The Globe library, Calcutta, 1972.

একক 12 ❐ তরল পদার্থের চাপ

গঠন

12.1 প্রস্তাবনা

12.2 উদ্দেশ্য

12.3 বিষয় পরিচিতি

12.4 সমসত্ত্ব ও অসমসত্ত্ব প্রবাহী পদার্থের উপর চাপ, তরল পদার্থের উপর চাপ এবং বায়বীয় পদার্থের উপর চাপের পরিমাণ

12.5 মাধ্যাকর্ষণ বলের প্রভাবে স্থিতাবস্থায় আছে এমন তরলের উপর চাপের পরিমাণ।

12.6 সমচাপের তল, সমঘনত্বের তল এবং সমবিভবযুক্ত তলের অবস্থান নির্ণয় ঃ কয়েকটি অনুসিদ্ধান্ত।

12.7 ভারী তরলে নিমজ্জিত কোন তলের উপর ঘাতের পরিমাণ। সামগ্রিক চাপ।

12.8 উদাহরণ

12.9 অনুশীলনী ও উত্তরমালা

12.10 সারাংশ

12.11 সহায়ক গ্রন্থ

12.1 প্রস্তাবনা

প্রস্তাবনা ঃ পূর্ববর্তী অধ্যায়ে প্রবাহী পদার্থের বিভিন্ন প্রকারভেদ, তাদের ধর্ম এবং স্থিতিশীল অবস্থায় তার মধ্যে ক্রিয়া-বিক্রিয়ার বিষয়ে প্রাথমিক আলোচনা হয়েছে। ঘনত্ব, ঘাত এবং চাপের সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে সাধারণভাবে। বিশেষ করে তরল পদার্থের ক্ষেত্রে চাপের পরিমাণ নির্ধারণ করা হয়েছে।

এই অধ্যায়ে বিভিন্ন বল প্রযুক্ত হওয়ার ফলে স্থিতিশীল অবস্থায় তরল পদার্থের চাপ এর ব্যাপারে আরো বিশদ আলোচনা করা হয়েছে।

12.2 উদ্দেশ্য

উদ্দেশ্য ঃ তরল পদার্থের চাপ সম্বন্ধে ধারণা থাকা এই বিষয়ে গভীরতর অধ্যয়নের জন্য অত্যন্ত জরুরী। তরল পদার্থের চাপ বিভিন্ন উপাংশের উপর স্বভাবতই নির্ভরশীল। প্রকৃতপক্ষে তরলের ধর্ম বা তার প্রয়োগ ব্যাপকতর। বিশেষ করে তরলটি সমসত্বতা বা ঘনত্ব এই দুটি অবশ্যই প্রয়োজনীয় উপাংশ। বিশেষ করে তরলটি সন্ততা এবং অসন্ততা বিষয়ে চিন্তার প্রয়োজন আছে। এই অধ্যায়ে এই বিষয়টি আলোচিত হবে।

12.3 বিষয় পরিচিতি

বিষয় পরিচিতি ঃ এই অধ্যায়ে সমসত্ব ও অসমসত্ব প্রবাহী পদার্থের চাপ বিষয়ে সবিস্তারে আলোচনা করা হয়েছে। বিশেষ করে মাধ্যাকর্ষণ বলের প্রভাবে বিভিন্ন স্তরে তরলের ঘাত ও চাপ বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে, সমচাপ বিশিষ্ট তল। সমবিভব বা সম ঘনত্ব বিষয় আলোচনা করা হয়েছে। পদার্থে নিমজ্জমান তলের উপর বিভিন্ন বিন্দুতে তরল চাপ নির্ণয় করা হয়েছে। সামগ্রিকভাবে ঘাত বিষয়ে ধারণা দেওয়া আছে। ঘাতের পরিমাণ নির্ণয় করার পদ্ধতি নির্ণয় করা হয়েছে। পরিশেষে সামগ্রিক চাপ বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে।

12.4 সমসত্ব ও অসমসত্ব প্রবাহী পদার্থের উপর চাপ, তরল পদার্থের উপর চাপ এবং বায়বীয় পদার্থের উপর চাপের পরিমাণ

উপরোক্ত আলোচনা থেকে এটা স্পষ্ট যে দুই প্রকারের প্রবাহী পদার্থের উপর চাপ এবং অন্তঃচাপ থাকতে পারে। আগেই বলা হয়েছে, প্রবাহী পদার্থের চাপকে দুই পর্যায়ে ভাগ করা যায়—

তরল পদার্থের উপর চাপ ও বায়বীয় পদার্থের উপর চাপ। তরল এবং বায়বীয় উভয় পদার্থই তাদের ঘনত্ব অনুযায়ী দুই প্রকার হতে পারে—(i) সমসত্ব (Homogeneous) পদার্থ এবং (ii) অসমসত্ব (Heterogoneous) পদার্থ।

(i) সমসত্ব পদার্থ ঃ যে পদার্থের আকার এবং আয়তনের মধ্যে সর্বস্তরে ঘনত্বের পরিমাণ ধ্রুবক এবং প্রযুক্ত বল যা ঘাতের উপর নির্ভর করে না, তাকে সমসত্ব পদার্থ বলা হয়।

(ii) অসমসত্ব পদার্থ ঃ পক্ষান্তরে যে প্রবাহী পদার্থের ঘনত্ব বিভিন্ন স্তরে বিভিন্ন বা প্রযুক্ত বলের উপর নির্ভরশীল, তাকে অসমসত্ব পদার্থ বলা হয়।

সচরাচর তরল পদার্থের ঘনত্ব আপাতঃ ধ্রুবক থাকে, যদি না সেই তরল পদার্থটি কয়েকটি উপতরল পদার্থের মিশ্রণ না হয়। কিন্তু বায়বীয় পদার্থের ক্ষেত্রে ঘনত্ব অত্যন্ত পরিবর্তনশীল এবং যে কোন ঘাত বা বলের প্রভাবে পরিবর্তিত হয়।

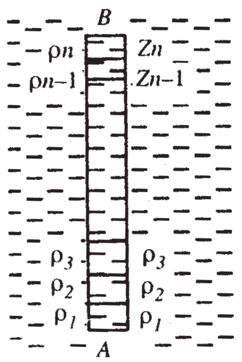
এই অধ্যায়ে আমরা, তরল পদার্থের (বিশেষ কিছু উল্লেখ ব্যতিরেকে সমসত্ত্ব ধরা হবে) উপর চাপ এবং চাপের প্রভাব ইত্যাদির বিষয়ে আলোচনা করব। বায়বীয় পদার্থের উপর চাপের পরিমাণ এবং প্রভাবের বিষয়ে পরবর্তী একটি আলাদা অধ্যায়ে আলোচনা করা হবে।

বিশেষ করে এই অধ্যায়ে, তরল পদার্থটিকে মাধ্যাকর্ষণ বলের প্রভাবে স্থিতাবস্থায় আছে ধরে নিতে হবে। প্রকৃতপক্ষে মাধ্যাকর্ষণ বল ব্যতিরেকে অন্যান্য বলের প্রভাবে তরল পদার্থের স্থিতাবস্থা নিয়ে আলোচনার সুযোগ এই পাঠক্রমের অন্তর্ভুক্ত নেই।

12.5 মাধ্যাকর্ষণ বলের প্রভাবে স্থিতাবস্থায় আছে এমন তরলের উপর চাপের পরিমাণ

12.5.1 সমসত্ত্ব প্রবাহী পদার্থের মত, অসমসত্ত্ব পদার্থের ক্ষেত্রেও প্রযুক্ত চাপের সূত্রটি প্রযোজ্য হয়।

ধরি উক্ত অসমসত্ত্ব পদার্থের A বিন্দুতে চাপ P' এবং B বিন্দুতে P



AB কে উল্লম্ব দিকে Z_1, Z_2, Z_3 ... গভীরতা বিশিষ্ট্য অঞ্চলে চিত্রের মত ভাগ করা হল যেখানে তাদের যথাক্রমে ঘনত্ব হল ρ_1, ρ_2, ρ_3 ...

তাহলে আমরা পাই—

$$\rho' - g\rho_1 Z_1 + g\rho_2 Z_2 + g\rho_3 Z_3 + \ldots = \sum g f_i z_i$$

ঘনত্ব ‘ρ’ যদি বিচ্ছিন্নভাবে না হয়ে সন্ততঃভাবে ‘Z’ এর সাপেক্ষে পরিবর্তিত হয় তাহলে আমরা লিখতে পারি—

$$P - P' = \int g\rho_1 dz$$

যেখানে সমাকলটি A থেকে B পর্যন্ত করা হয়েছে।

উপরের চিত্রে ‘B’ বিন্দুকে প্রবাহী তলে যদি নেওয়া হয় তাহলে, A বিন্দুতে চাপ হবে = $g\rho z$ [$Z = A$ বিন্দুর গভীরতা]

যদি এবার B বিন্দুর উপর একটি বায়ুমণ্ডলীয় চাপ ধরা হয় আছে এবং তার মান ধ্রুবক তাহলে ‘A’ বিন্দুতে চাপের পরিমাণ হবে = $\Lambda + g\rho z$

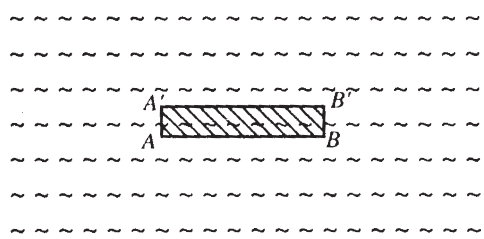
যদি বায়ুমণ্ডলের চাপের জন্য ওই তরলের কার্যকরী তল (effective surface) ‘h’ উচ্চতাবিশিষ্ট হয়, তাহলে আমরা বলতে পারি,

$$\Lambda = g\rho h$$

$$\therefore\ P = g\rho h + g\rho Z = g\rho\ (h + z)$$

সুতরাং তরলে কোন বিন্দুর চাপের পরিমাণ কার্যকরী তলের গভীরে বিন্দুটির গভীরতার সাথে পরিবর্তিত হয়।

12.5.2 মাধ্যাকর্ষণ বলের প্রভাবে কোন স্থির তরলের প্রত্যেক অনুভূমিক তলে তরলের ঘনত্ব সেই অনুভূমিক তলে প্রত্যেক বিন্দুতে সমান হবে।



একই অনুভূমিক রেখায় A, B দুটি বিন্দু। উল্লম্বভাবে তাদের উপর A', B' আরও দুটি বিন্দু এবং $AA' = BB'$ ‘A’ বিন্দুতে চাপ—A' বিন্দুতে চাপ = $g\rho AA'$ [$\rho = AA'$ স্তম্ভের গড় ঘনত্ব]

যদি ρ', BB' স্তম্ভের গড় ঘনত্ব হয়, তাহলে ‘B’ বিন্দুতে চাপ—B' বিন্দুতে চাপ = $g\rho' BB'$

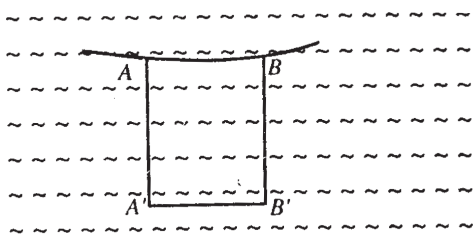
একই অনুভূমিক রেখায় থাকার জন্য, A বিন্দুতে চাপ = B বিন্দুতে চাপ। এবং $AA' = BB'$ [কল্পনানুসারে] এবং A' বিন্দুতে চাপ = B' বিন্দুতে চাপ।

সুতরাং $\rho = \rho'$

যদি $|AA'| = |BB'| \to 0$ হয় তাহলে গড় ঘনত্ব বিন্দুতে ঘনত্বের মানের সমান হবে, অর্থাৎ, A বিন্দুতে ঘনত্ব = B বিন্দুতে ঘনত্ব।

12.5.3 স্থির ও মাধ্যাকর্ষণের প্রভাবে থাকাকালীন সমসত্ত্ব প্রবাহী পদার্থের উপরিতল অনুভূমিক (horizontal) হবে।

A, B এবং A', B' একইভাবে চারটি বিন্দু পাশের চিত্রের ন্যায় ধরা হল।



A' বিন্দুতে চাপ = $\Lambda + g\rho AA'$ B' বিন্দুতে চাপ = $\Lambda + g\rho BB'$

কিন্তু A' বিন্দুতে চাপ = B' বিন্দুতে চাপ

সুতরাং $AA' = BB'$

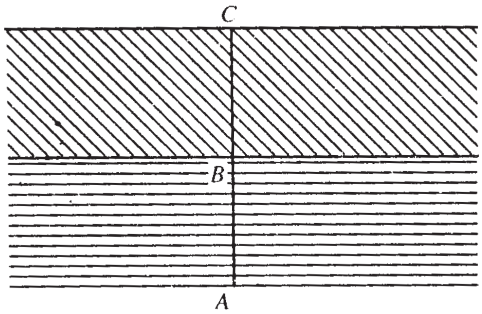
অতএব $AB \parallel A'B'$ এবং AB অনুভূমিক হবে।

কিন্তু A, B বিন্দুদ্বয় তরলের উপরিতলের যে কোন দুটি বিন্দু, সুতরাং তরলের উপরিতল অনুভূমিক হবে।

12.5.4 দুটি ভিন্ন এবং ভারী সমসত্ত্ব তরলের নিচের কোনও বিন্দুতে চাপের পরিমাণ নির্ণয় (তরল দুটি পরস্পর মিশ্রিত হয় না)

ρ এবং ρ' ধরা হল যথাক্রমে নীচের এবং উপরের তরলের ঘনত্ব। নীচের তরলের কোন বিন্দু ধরি A, ABC একটি উল্লম্ব রেখা কল্পনা করা হল। B বিন্দু দুটি তরলের স্পর্শতলে আছে এবং C উপরের তরলের উপরিতলে আছে।

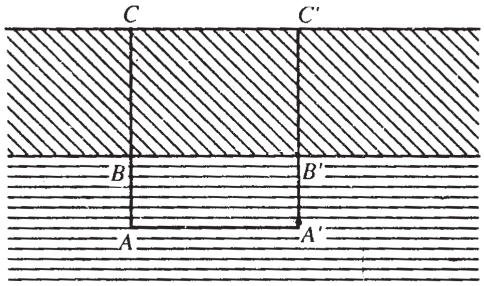
AC কে অক্ষ ধরে একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙ কল্পনা করা হল। যার প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল, α 'A' বিন্দুতে চাপ P হলে, চোঙটির সাম্যাবস্থা বিবেচনা করে পাই—



$P_\alpha = g\rho\alpha AB + g\rho'\alpha BC$

সুতরাং, $P = g\rho AB + g\rho' BC$

12.5.5 পরস্পর মিশ্রিত হয় না এরূপ ভিন্ন ঘনত্বের দুটি তরলের স্পর্শতল সবসময় অনুভূমিক হবে যদি তারা মাধ্যাকর্ষণ বলের প্রভাবে থাকে ও স্থির হয়।



ρ ও ρ' যথাক্রমে নীচের ও উপর-এর তরলের ঘনত্ব।

'A' বিন্দুতে চাপ $= g\rho AB + g\rho' BC$

A' বিন্দুতে চাপ $= g\rho A'B' + g\rho' B'C'$

সুতরাং, $g\rho AB + g\rho' BC = g\rho A'B' + g\rho B'C'$

$\Rightarrow \rho(AC - BC) + \rho' BC = \rho(A'C' - B'C') + \rho' B'C'$

$\Rightarrow \rho AC + (\rho' - \rho)\ BC = \rho A'C' + (\rho' - \rho')\ B'C'$

কিন্তু $AC = A'C'$ যেহেতু উপরিতল অনুভূমিক হবে।

$\therefore\ (\rho' - \rho)\ BC = (\rho' - \rho)\ B'C'$

$\Rightarrow BC = B'C'$

সুতরাং $BB' \parallel CC'$, সুতরাং BB' অনুভূমিক হবে।

12.6 সমচাপের তল, সমঘনত্বের তল এবং সমবিভবযুক্ত তলের অবস্থান নির্ণয় ঃ কয়েকটি অনুসিদ্ধান্ত

12.5.2 এর সুত্রানুযায়ী আমরা বলতে পারি যে মাধ্যাকর্ষণের বলের প্রভাবে স্থিরতরলের প্রত্যেক অনুভূমিক তলে তরলের ঘনত্ব সেই অনুভূমিক তলে প্রত্যেক বিন্দুতে সমান হবে। এই অনুভূমিক তলে প্রত্যেক বিন্দুতে সমান হবে। এই অনুভূমিক তলটিকে বলা হয় সমঘনত্বের তল। প্রকৃতপক্ষে মাধ্যাকর্ষণ বলের প্রভাবে একটি তরলের মধ্যে প্রত্যেকটি অনুভূমিক তল এক একটি সমঘনত্বের তল।

12.5.1-এর অনুচ্ছেদ থেকে পাই কোন তরলের কোন একটি বিন্দুতে চাপের পরিমাণ $P = g\rho (h + z) = g\rho z'$

যেখানে Z' হল ওই বিন্দুর কার্যকরী গভীরতা।

সুতরাং $Z' = C =$ ধ্রুবক, এই গভীরতায় $P \alpha \rho$, অর্থাৎ সমঘনত্ববিশিষ্ট যে অনুভূমিক তল পাওয়া যাবে, সেই অনুভূমিক তলে প্রত্যেকটি বিন্দুতে তরলের চাপ সমান। অর্থাৎ এই অনুভূমিক তলটিকে সমচাপের তল বলা যেতে পারে এবং সমচাপের তল অবশ্যই সমঘনত্বের তলের সাথে অভিন্ন হবে।

আরও একটি বিশদভাবে ব্যাখ্যা করলে আমরা বলতে পারি $Z' = C$ এই গভীরতায় কোন বিন্দুর স্থিতিশক্তি $g\rho Z'$ হবে। একে বলা হয় ওই বিন্দুর বিভব।

সুতরাং সমচাপের তল, সমঘনত্বের তল এবং সমবিভবের তল একই অনুভূমিক তলে অবস্থিত এবং পরস্পর অভিন্ন।

12.7 ভারী তরলে নিমজ্জিত কোন তলের উপর ঘাতের পরিমাণ। সামগ্রিক চাপ

12.7.1 ভারী সমসত্ত্ব তরলের একটি ক্ষেত্রের উপর প্রযুক্ত ঘাত ওই ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ও ঐ ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্রের উপর প্রযুক্ত গুণফলের সাথে সমান হবে।

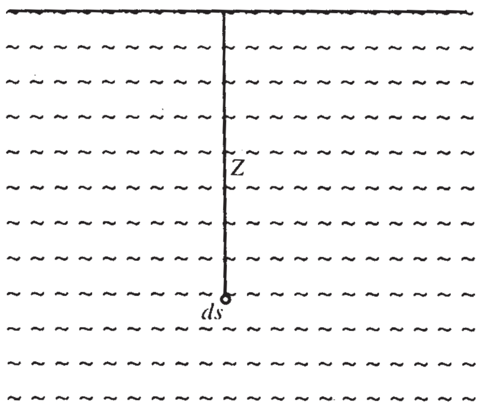
ধরি ds, 's' ক্ষেত্রের একটি অতিক্ষুদ্র অংশের ক্ষেত্রফল। কার্যকরী তলের গভীরে 'Z' বিন্দু আছে। তরলের ঘনত্ব ρ হলে 'Z' গভীরতায় চাপ হবে $g\rho z$

সুতরাং 'ds' এর উপর ঘাত হবে $= g\rho z ds$ সুতরাং মোট ঘাত (s ক্ষেত্রের উপর) $= g\sum g\rho z ds$ যেখানে 'S' কে আচ্ছাদিত করে এমন ক্ষুদ্রক্ষেত্রগুলির উপর যোগ প্রক্রিয়াটি করা হল।

অথবা, মোট ঘাত হবে $= \sum g\rho z ds$

স্থিতিবিদ্যা থেকে জানা যায়, যে যদি সমান্তরাল বলরেখাগুলি $\bar{Z}$ গভীরতায় কোন কেন্দ্র দিয়ে ক্রিয়া করে (অবশ্যই 'S' এর উপর) তাহলে তা 'S' ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্রের সাথে অভিন্ন হবে,

তখন, $\bar{z} = \dfrac{\sum g\rho z ds}{\sum g\rho ds}$, অথবা $\bar{z} = \dfrac{\int g\rho z ds}{\int g\rho ds}$



সুতরাং মোট ঘাতের পরিমাণ হবে $\bar{z} = \sum g\rho ds$ বা, $\bar{z} = \int g\rho ds$

তরলটি সমসত্ত্ব হবার জন্য ρ = ধ্রুবক।

$\therefore$ 'S' ক্ষেত্রের উপর প্রযুক্ত মোট ঘাত $= g\rho\bar{Z}s = ws\bar{Z}$

সুতরাং $= s$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\times$ ভারকেন্দ্রে প্রযুক্ত চাপ।

12.7.2 সামগ্রিক চাপ

যদি তরল পদার্থে নিমজ্জিত কোন অতি ক্ষুদ্র ক্ষেত্রের উপর লম্বভাবে যে ঘাত তরলপদার্থটি ক্রিয়া করে এবং এই সমস্ত ঘাতসমূহকে সংযুক্ত করে সমগ্র তলের উপর যে লব্ধিঘাত পাওয়া যায় তাকে বলা হয় সামগ্রিক চাপ।

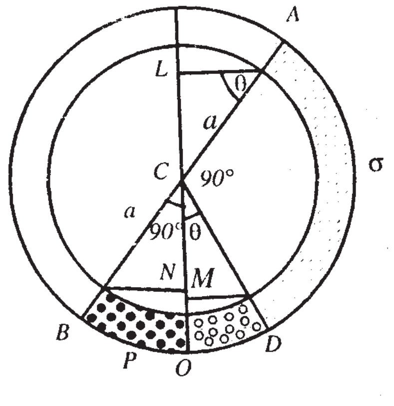
মনে করি, একটি তল 'S' এর একটি ক্ষুদ্র অংশ হল ds, এর উপর লম্বভাবে P পরিমাণ চাপ ক্রিয়া করে। তখন $\sum Pds$ বা $\int Pds$ কে বলা হয় সামগ্রিক চাপ। এক্ষেত্রে যোগ বা সমাকল প্রক্রিয়াটি সমগ্রতলের উপর নিতে হবে।

যদি তলটি একটি সমতল হয়, তখন প্রত্যেকটি বিন্দুতে যে চাপ পাওয়া যায়, সেই চাপসমূহ অবশ্যই সমান্তরাল বল এবং সামগ্রিক চাপের পরিমাণ ওই চাপসমূহের লব্ধির সমান। কিন্তু যদি তলটি সমতল না হয়, তাহলে সামগ্রিক চাপ নির্ণয় করার প্রক্রিয়াটি জটিল। সেক্ষেত্রে সামগ্রিক চাপ এবং লব্ধিঘাত বিভিন্ন মানের হতে পারে।

12.8 উদাহরণ

(1) একটি সমপ্রস্থচ্ছেদ বিশিষ্ট টিউবকে বাঁকিয়ে বৃত্তাকার করা হল যার তলটির উল্লম্ব রাখা হল। ρ এবং σ ঘনত্ব বিশিষ্ট দুটি সমপরিমাণের প্রবাহী দ্বারা টিউবটির অর্ধেক পূর্ণ করা হল। প্রমাণ করুন যে তাদের সাধারণ তলের মধ্য দিয়ে যাওয়া ব্যাসার্ধ উল্লম্বের সাথে 'θ' কোণ উৎপন্ন করে, যার মান $\tan\theta = \dfrac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma}$

সমাধান ঃ দুটি তরলের মুক্ত উপরিতল A ও B যাদের ঘনত্ব যথাক্রমে σ এবং ρ, AB বৃত্তটির ব্যাস ও 'C' তার কেন্দ্র। 'D' যদি তরলদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শতল হয়, তাহলে আমরা 'CD' উল্লম্বের সাথে যে কোণ 'θ' উৎপন্ন করে, তার মান বের করব।



তরল দুটি একই পরিমাণে আছে, এই চাপ AD = চাপ BD.

$\angle ACD = \angle BCD = \dfrac{\pi}{2}$

AL, BM এবং DM লম্ব উল্লম্বের উপর অঙ্কন করা হল, তাহলে,

$ON = OC - CM = (a - a\cos\theta)$ ...... (i)

$OM = OC - CM = (a - a\sin\theta)$ ...... (ii)

$NL = NC + CL = (a\cos 0 + a\sin\theta)$ ..... (iii)

'O' বিন্দুতে বাঁ দিক থেকে ডানদিকে চাপ সমান, P বিন্দুতে চাপ $P = hw$ অথবা $P = h_1 w_1$, h হল উল্লম্ব গভীরতা এবং w হল একক আয়তনের ওজন $= g$. তরলের ঘনত্ব।

'O' বিন্দুতে BO তরলের জন্য বাঁদিকে চাপ $= OMg.\rho = (a - a \sin \theta)g.\rho$ [(ii) থেকে পাই] .... (iv)

σ ঘনত্বের AD তরল এবং ρ ঘনত্বের DO তরলের জন্য 'O' বিন্দুতে মোট চাপ $= NL.g.\sigma + ON.g.\rho = (a \cos \theta + a \sin \theta)\ g.\sigma + (a - a \cos \theta)\ g.i.$ [(i) এবং (ii) থেকে]

'O' বিন্দুতে চাপ গণনা করে পাই,

$(a - a \sin \theta)\ g.\rho = (a \cos \theta + a \sin \theta)\ g.\sigma + (a - a \cos \theta)\ g.\rho$

$\therefore \cos \theta\ (\rho - \sigma) - \sigma \sin = (\rho + \sigma)$

অথবা, $\tan \theta = \dfrac{\rho - \sigma}{\rho + \sigma}$ (প্রমাণিত)

(2) সমসত্ত্ব তরলে নিমজ্জিত একটি ত্রিভুজের উপর সামগ্রিক চাপ নির্ণয় করুন, যেখানে তার শীর্ষবিন্দুগুলি যথাক্রমে h_1, h_2 ও h_3 গভীরতায় আছে।

সমাধান ঃ ত্রিভুজটির ভারকেন্দ্রের গভীরতা $\frac{1}{3}(h_1 + h_2 + h_3)$

সুতরাং সামগ্রিক চাপ $= \frac{1}{3} w(h_1 + h_2 + h_3)s$ যেখানে s হল ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল।

(3) একটি উল্লম্ব আয়তাকার ডকগেট 40 ফুট চওড়া। এর একদিকে লবণাক্ত জল (আঃ শুঃ 1.026) আছে যা 24 ফুট গভীর। ডকগেটের অন্যদিকে বিশুদ্ধ জল থাকলে, তার গভীরতা নির্ণয় করুন যখন বলা আছে যে দুদিকে ঘাতের পরিমাণ সমান।

সমাধান ঃ লবণাক্ত জলে ডুবন্ত ডকগেটের অংশের ক্ষেত্রফল $= 40 \times 24$ বর্গফুট।

$\therefore$ ভারকেন্দ্রের গভীরতা $= 12$ ফুট।

ডকগেটের একদিকে সামগ্রিক চাপ $= 40 \times 24 \times 12 \times g \times 1.026$ যদি 'h' বিশুদ্ধ জলের গভীরতা হয় তাহলে ডকগেটের অপরদিকের সামগ্রিক চাপ $= (40 \times h).\frac{h}{2} g$

$\because$ দুদিকের ঘাত সমান, আমরা পাই

$$\frac{1}{2} \times 40h^2 g = 40 \times 24 \times 12 \times g \times 1.026$$

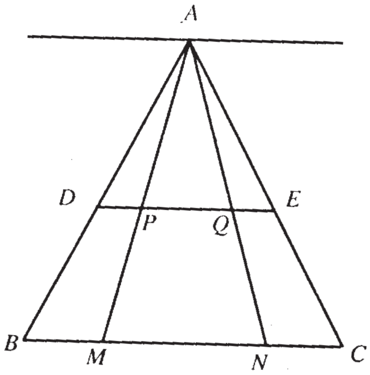
$\Rightarrow h_2 = 24 \times 24 \times 1.026$

$\Rightarrow h = 24 \times 1.0129$

$\Rightarrow h = 24.3096$ ফুট।

(4) তরলে নিমজ্জিত একটি ত্রিভুজের একটি শীর্ষবিন্দু উপরিতলে আছে এবং বিপরীত বাহুটি অনুভূমিক। বায়ুর চাপ নগণ্য হলে, একটি অনুভূমিক সরলরেখা কি অনুপাতে ওই শীর্ষবিন্দু দিয়ে যাওয়া মধ্যমাকে বিভক্ত করলে, ওই অনুভূমিক রেখা ত্রিভুজটিকে যে দুটি অংশে বিভক্ত করবে তাদের উপর সামগ্রিক চাপের মান পরস্পর সমান হবে, তা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ



ধরি, DE, ΔABC কে দুটিভাগে এমনভাবে বিভক্ত করে, যাতে ADE এর উপর চাপ = D ECD-র উপর চাপ $= \frac{1}{2} ABC$ উপর চাপ।

$AM \perp BC$ এবং AN, BC এর মধ্যমা। তারা যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে DE কে ছেদ করেছে।

ΔADE-এর উপর চাপ $= w.\frac{2}{3}AP.\frac{1}{2}AP.DE$

ΔABC-এর উপর চাপ $= w.\frac{2}{3}AM.\frac{1}{2}AM.BC$

$\therefore\ w.\frac{2}{3}AP.\frac{1}{2}AP.DE = \frac{1}{2}w\frac{2}{3}AM\frac{1}{2}AM.BC$

$\Rightarrow\ AP^2 = DE = \frac{1}{2}AM^2.BC$

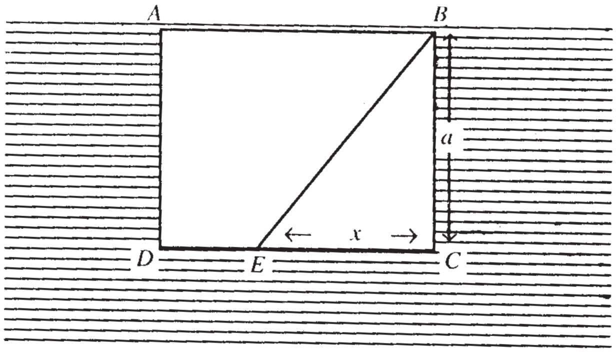
এখন, $\frac{DF}{BC} = \frac{AP}{AM} = \frac{AQ}{AN}$

$\therefore\ \frac{AQ^2.AM^2}{AN^2}.\frac{BC.AQ}{AM} = \frac{1}{2}AM^2.BC$

$\Rightarrow\ AQ^3 = \frac{1}{2}AN^3$

$\Rightarrow\ AQ = \frac{AN}{3\sqrt{2}}$

(5) জলে নিমজ্জিত $ABCD$ একটি বর্গাকার সামতলিক পাতের, AB বাহুটি জলতলে আছে। একটি রেখা BE এমনভাবে অঙ্কন করুন যাতে 'E' বিন্দুটি CD তার উপর থাকে এবং এই রেখাটি বর্গাকার ক্ষেত্রটিকে যে দুইভাগে বিভক্ত করল তাদের উপর সামগ্রিক চাপ সমান হতে পারে।



সমাধান ঃ

ধরি $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং $EC = x$ ΔBEC-এর উপর চাপ

$= \square$ $ABCD$ এর উপর চাপ

$= \frac{1}{2} \square$ $ABCD$ এর উপর চাপ।

এখন $\angle BEC$ এর উপর চাপ

$= w.\frac{2}{3}a\frac{1}{2}ax$

$= \frac{1}{3}a^2.xw$

$\square$ $ABCD$ এর উপর চাপ $= w.\frac{1}{2}a.a^2 = \frac{1}{2}a^3w$

সুতরাং, $\frac{1}{3}a^2xw = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}.a^3w$

$\Rightarrow x = \frac{3}{4}a$

$\therefore$ $EC : ED = 3 : 1$ (উত্তর)

12.9 অনুশীলনী ও উত্তরমালা

(1) একটি সমসত্ব তরলে একটি সামান্তরিক নিমজ্জিত আছে। প্রমাণ করুন যে কর্ণের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের উপর তরলের চাপের যোগফল প্রত্যেক কর্ণের জন্যই সমান।

[Hint : সামান্তরিকের ভারকেন্দ্রের সূত্র প্রয়োগ করুন]

(2) উল্লম্বতলে অবস্থিত একটি বৃত্তাকার টিউবে বিন্দুটা তরল আছে, যার ঘনত্ব ρ ; তরলটি বৃত্তের কেন্দ্রের সমকোণ উৎপন্ন করে। যদি অন্য একটি তরলের স্তম্ভ (σ ঘনত্ব যুক্ত) কেন্দ্রে α কোণ উৎপন্ন করে, তবে প্রমাণ করুন যে দুটি তরলের সাধারণস্তরের মধ্যে দিয়ে যে ব্যাসার্ধ যার তার সাথে উল্লম্ব যে কোণ উৎপন্ন করে তার মান $\tan^{-1}\left(\dfrac{\rho - \sigma + \sigma\cos\alpha}{\rho + \sigma\sin\alpha}\right)$

[Hint : উদাহরণ *I*-এর মত করে ভাবুন]

(3) সমবাহু ত্রিভুজের আকার বিশিষ্ট একটি বন্ধ টিউবে তিনটি বিভিন্ন প্রকারের তরল একই পরিমাণে আছে যারা পরস্পর মেশে না এবং সর্বনিম্নস্তরটি অনুভূমিক আছে। যদি ঘনত্বত্রয় সমান্তর প্রগতি (*A.P.*)-তে থাকে তাহলে প্রমাণ করুন যে তরলত্রয়ের বিভেদতলগুলি ওই ত্রিভুজের বাহুর সমত্রিখণ্ডকের সাথে এক হবে।

[Hint : আগের অনুশীলনী ও উদাহরণ 1 দ্রষ্টব্য]

(4) সম আয়তনের দুটি তরলের ρ ও 3ρ ঘনত্ববিশিষ্ট এবং তারা পরস্পর মেশে না। একইসাথে যদি তারা একটি শঙ্কুকে পূর্ণ করে, যেটির অক্ষটি উল্লম্ব এবং শীর্ষবিন্দুটি উপরদিকে আছে। শঙ্কুর ভূমিতে যে কোন বিন্দুতে চাপ ও সেই বিন্দুতেই চাপের অনুপাত নির্ণয় করুন যখন শঙ্কুটি লঘুতর তরল দ্বারা পূর্ণ থাকে।

[Hint : আগের অনুশীলনীর মত ও সমগ্রচাপের ধারণা দিয়ে ভাবুন] [*Ans.* $3 - 3\sqrt{4}$]

(5) তরলের নিমজ্জিত ত্রিভুজ *ABC* এর তলটি উল্লম্ব ও *AB* বাহু তরলের উপরিতলের সাথে একরেখায় আছে '*O*' যদি ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, ΔOCA-এর উপর প্রযুক্ত ঘাত ঃ ΔOCB-এর উপর প্রযুক্ত ঘাত $= \sin 2B : \sin 2A$.

[Hint : পরিকেন্দ্রের সাহায্যে ত্রিভুজটিকে ΔAOC, ΔOCB, ΔAOB এই তিনভাগে বিভক্ত করে তাদের ভারকেন্দ্রে ঘাত নির্ণয় করে ডাকুন]

(6) একটি চোঙে সমপরিমাণে '*n*' সংখ্যক বিভিন্ন তরল ভর্তি আছে যারা পরস্পর মেশে না। সবচেয়ে উপরের তরলটির ঘনত্ব ρ, তার নিচেরটি 2ρ, ... , সবচেয়ে নিচেরটির $n\rho$. প্রমাণ করুন যে চোঙের বক্রতলের বিভিন্ন অংশের উপর সমগ্রচাপ সমূহের অনুপাত হবে—

$$1^2 : 2^2 : 3^2 : - : n^2$$

[Hint : ভারকেন্দ্রের ধারণা দিন]

(7) একটি জলে নিমজ্জিত সামান্তরিকের একটি বাহু জলের উপরিতলে আছে। অনুভূমিক সরলরেখাংশের সাহায্যে সামান্তরিকটিকে এমনভাবে '*n*' অংশে বিভক্ত করা হল যাতে তাদের উপরঘাত সমান হয়। প্রমাণ করুন যে বিভক্তকারী রেখাংশগুলির উপরিতল থেকে গভীরতা স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গমূলের সাথে সমানুপাতী হবে।

[Hint : সামান্তরিকের ভারকেন্দ্রের ধারণার সাহয্য নিন]

(8) জলে নিমজ্জিত উপবৃত্তের পরাক্ষ জলের উপরিতলে এবংএর তলটি উল্লম্ব আছে, পরাক্ষকে ব্যাস করে একটি বৃত্ত আছে। এখন উপবৃত্ত ও বৃত্তটির দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রের উপর জলের ঘাত নির্ণয় করুন।

[Hint : উপবৃত্ত ও বৃত্তটির অর্ধাংশগুলির ভারকেন্দ্র বের করে চেষ্টা করুন] [Ans : $\frac{2}{3}wa(a^2 - b^2)$]

(9) একটি তরলে নিমজ্জিত অর্ধবৃত্তের ব্যাসটি জলের উপরিতলে আছে। কিভাবে একে বিভিন্নঅংশে বিভক্ত করলে, প্রত্যেক অংশে তরলের ঘাত পরস্পর সমান হবে।

[Hint : 'r' সংখ্যক অংশের ভারকেন্দ্র প্রধান ব্যাসার্ধের কেন্দ্র থেকে $\frac{2}{3}a\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ দূরে হবে এবং এর ক্ষেত্রফল হবে $a^2\alpha$ যেখানে, a = ব্যাসার্ধ]

[Ans : প্রত্যেক অংশ কেন্দ্রে একই কোণ উৎপন্ন করবে]

(10) একটি ত্রিভুজ ABC তরলে নিমজ্জিত আছে। এর তলটি উল্লম্ব এবং AB বাহু উপরিতলে অবস্থিত। 'O' যদি ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র হয়, প্রমাণ করুন যে,

ΔOCA এর উপর চাপ ঃ ΔOCB এর উপর চাপ = $\sin 2B : \sin 2A$

[Hint : একই রকমভাবে ভারকেন্দ্র-এর ধারণা দিয়ে ভাবুন]

12.10 সারাংশ

আলোচ্য অধ্যায়ে সমসত্ত্ব ও অসমত্ত্ব প্রবাহী পদার্থের সম্বন্ধে ধারণা দেওয়া হয়েছে এবং মূলতঃ তরল পদার্থের মধ্যে মাধ্যাকর্ষণ বলের প্রভাবে স্থিরাবস্থায় বিভিন্ন বিন্দুতে তার চাপের পরিমাণ নির্ণয় করার পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। এরজন্য যথাযথ সূত্রাবলী নির্ধারণ করা হয়েছে। এর থেকে সমচাপের তল, সমঘনত্বের তল এবং সমবিভবযুক্ত তলের অবস্থান নির্ণয় করা গেছে। এছাড়াও স্থিতাবস্থায় ভারী তরলের মধ্যে নিমজ্জিত কোন সমতলের উপর ঘাতের পরিমাণ নির্ধারণের সূত্র নির্ণয় করা হয়েছে। এছাড়া কোনও আধারের মধ্যে অবস্থিত তরলের সামগ্রিক চাপ বিষয়ে ধারণা দেওয়া হয়েছে। কয়েকটি উদাহরণ সহযোগে উরোক্ত বিষয়সমূহ আরও বিস্তারিতভাবে আলোচিত হয়েছে।

12.11 সহায়ক গ্রন্থাবলী

(1) A. S. Ramsay : Hydrostatics.

(2) M. Ray & H. S. Sharma : A Text book of horrostatics. Premier Publishing Co. New Delhi, 1961.

(3) J. M. Kar : Hydrostatics : for degree classes. The Globe Library, Calcutta, 1972.

একক 13 ❐ সমতলোপরি চাপকেন্দ্র। বিভিন্ন ধর্ম ও উদাহরণ

গঠন

13.1 প্রস্তাবনা

13.2 উদ্দেশ্য

13.3 বিষয় পরিচিতি

13.4 সামতলিক ক্ষেত্রে তরলের চাপ প্রয়োগের ফলে চাপকেন্দ্রের সংজ্ঞা এবং অবস্থান।

13.5 মাধ্যাকর্ষণ বলের প্রভাবে স্থিতাবস্থায় কোনও তরলের মধ্যে নিমজ্জিত কোনও সামতলিক ক্ষেত্রের চাপকেন্দ্রের গভীরতা নির্ণয় এবং কয়েকটি অনুসিদ্ধান্ত।

13.6 কোনও সমতলের বাড়তি গভীরতার জন্য চাপকেন্দ্রের অবস্থানের উপর প্রভাব। কয়েকটি অনুসিদ্ধান্ত।

13.7 কয়েকটি বিশেষ সামতলিক ক্ষেত্রের চাপকেন্দ্রের গভীরতা নির্ণয়।

13.8 একাধিক ঘনত্ব বিশিষ্ট তরল সমূহের মধ্যে নিমজ্জিত কোন সামতলিক ক্ষেত্রের চাপকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয়।

13.9 উদাহরণমালা

13.10 অনুশীলনী ও উত্তরমালা

13.11 সারাংশ

13.12 সহায়ক গ্রন্থ

13.1 প্রস্তাবনা

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে স্থিতিবস্থায় কোন তরল পদার্থের মধ্যে সম্পূর্ণ বা আংশিকভাবে নিমজ্জিত কোনও সমতলের উপর তরল পদার্থ সর্বদা চাপ সৃষ্টি করে যায়। মোট চাপের যে লব্ধি তাকে ঘাত (Thrust) হিসাবে চিহ্নিত করি। এই নিমজ্জিত তলটির প্রকৃত অবস্থান এবং স্থিতি বা গতি বিচার করার জন্য তরলপদার্থের দ্বারা সৃষ্ট ঘাতের প্রয়োগকেন্দ্রটি জানা আবশ্যিক। সে কারণেই তরল পদার্থের দ্বারা সৃষ্ট চাপসমূহের বিচার বিশ্লেষণ এবং প্রয়োগবিন্দুর অবস্থান নিয়ে এই অধ্যায়ে আলোচনা করা হয়েছে।

13.2 উদ্দেশ্য

তরল পদার্থের স্বাভাবিক স্থিতি এবং গতি এবং তার মধ্যে সম্পূর্ণ এবং আংশিকভাবে নিমজ্জিত বস্তুসমূহের স্থিতি ও গতি বিশ্লেষণ করার জন্য চাপবিন্দুর অবস্থান জানা অত্যন্ত জরুরী। এই চাপবিন্দুর গাণিতিক সূত্র প্রয়োগের ফলে অনেক জটিল গাণিতিক প্রক্রিয়া সহজ পদ্ধতিতে সমাধান করা সহজ। সে কারণেই চাপবিন্দুর অবস্থান বিষয়ে, এ অধ্যায়ে আলোচনা করা হয়েছে।

13.3 বিষয় পরিচিতি

একটি সামতলিক ক্ষেত্র তরলে নিমজ্জিত থাকাকালীন, তরলের চাপ তার তলের উপর উল্লম্বভাবে ক্রিয়াশীল হয়, এই উল্লম্ব বলরাশির লব্ধি যে বিন্দু দিয়ে গমন করে, তাকে ওই ক্ষেত্রের চাপকেন্দ্র বলে ধরা হয়।

আলোচ্য অধ্যায়ে চাপকেন্দ্রের সংজ্ঞা, অবস্থান, মাধ্যাকর্ষণ বলের প্রভাবে স্থিতাবস্থায় কোনও তরলের মধ্যে নিমজ্জিত সামতলিক ক্ষেত্রের চাপকেন্দ্র নির্ণয় করা হবে। তাছাড়াও একাধিক ঘনত্ব বিশিষ্ট তরলসমূহের মধ্যে নিমজ্জিত সামতলিক ক্ষেত্রের চাপকেন্দ্রও আমরা নির্ণয় করব।

13.4 সামতলিক ক্ষেত্রে তরলের চাপ প্রয়োগের ফলে চাপ কেন্দ্রের সংজ্ঞা ও অবস্থান

13.4.1

চাপকেন্দ্র ঃ একটি তরলে নিমজ্জিত সামতলিক ক্ষেত্রের উপর তরলের চাপ উল্লম্ব ভাবে ক্রিয়াশীল হয় এবং এই উল্লম্ব ও পরস্পরের সমান্তরাল বলরাশির লব্ধিবলের ক্ষেত্রটির যে বিন্দু দিয়ে ক্রিয়াশীল হয়, তাকে ওই ক্ষেত্রের চাপকেন্দ্র বলে।

13.4.2 চাপকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয়

ধরি OX এবং OY হল আয়ত অক্ষদ্বয় (তরলে নিমজ্জিত সামতলিক ক্ষেত্রের উপর)। (x, y) ঐ সামতলিক ক্ষেত্রের একটি বিন্দু এবং ঐ বিন্দু চাপ মনে করি þ. (x, y) বিন্দু নিয়ে একটি অতিক্ষুদ্র ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ধরি $\delta x \delta y$.

$\therefore$ $\delta x \delta y$ ক্ষেত্রফলযুক্ত ক্ষেত্রের উপর মৌলিক ঘাত = þ$\delta x \delta y$.

'Y' অক্ষের সাপেক্ষে এই ঘাতের ভ্রামক (moment) = þ$x \delta x \delta y$.

$\therefore$ লব্ধি ঘাত $\sum \rho\delta x\delta y$, যেখানে যোগপ্রক্রিয়াটি সামতলিক ক্ষেত্রের উপর ধরা হচ্ছে।

ধরি, $(\bar{x}, \bar{y})$ হল ঐ ক্ষেত্রের চাপকেন্দ্র।

যেহেতু, কোনও রেখা সাপেক্ষে ঘাতসমূহের ভ্রামক ও লব্ধিঘাতের ভ্রামক ও রেখা সাপেক্ষে পরস্পর সমান, সুতরাং y-অক্ষ সাপেক্ষে ভ্রামক গণনা করে পাই—

$$\bar{x}\sum \rho\delta x\delta y = \sum \rho x\delta x\delta y$$

$$\bar{x} = \frac{\sum \rho x\delta x\delta y}{\sum \rho x\delta x\delta y}$$

সীমাস্থ মানের ক্ষেত্রে, যখন $\delta x \to 0$ এবং $\delta y \to 0$ বা $\delta A = \delta x\delta y \to 0$ তখন,

$$\bar{x} = \frac{\iint \rho x dxdy}{\iint \rho dxdy},$$ [যেখানে সমাকল প্রক্রিয়াটি সমগ্র ক্ষেত্রের উপর করা হচ্ছে]

একইভাবে, x-অক্ষ সাপেক্ষে ভ্রামক গণনা করে পাই,—

$$\bar{y} = \frac{\iint \rho y dxdy}{\iint \rho dxdy}$$

মেরু স্থানাঙ্কের ক্ষেত্রে বিন্দুটি হবে (r, θ), $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$

এক্ষেত্রে ক্ষুদ্রক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হবে $r\delta\theta\delta r$

একইভাবে অগ্রসর হয়ে, আমরা পাব—

$$\bar{x} = \frac{\iint \rho r\cos\theta dr}{\iint \rho rd\theta dr} = \frac{\iint \rho r^2\cos\theta d\theta dr}{\iint \rho rd\theta dr}$$

এবং $$\bar{y} = \frac{\iint \rho r\sin\theta rd\theta dr}{\iint \rho rd\theta dr} = \frac{\iint \rho r^2\sin\theta d\theta dr}{\iint \rho rd\theta dr}$$

মাধ্যাকর্ষণের প্রভাবে আয়তন অপরিবর্তিত থাকে এমন প্রবাহীর ক্ষেত্রে $\rho = gfh$, [যেখানে h = কার্যকরী তলের নীচে বিন্দুটির গভীরতা]

তখন, $\bar{x} = \dfrac{\iint g\rho hxdxdy}{\iint g\rho hdxdy} = \dfrac{\iint \rho hxdxdy}{\iint \rho hdxdy}$

এবং $\bar{y} = \dfrac{\iint \rho hydxdy}{\iint \rho hdxdy}$ (একইভাবে)

যদি প্রবাহীটি সমসত্ত্ব হয়, তাহলে ρ = ধ্রুবক এবং সেক্ষেত্রে,

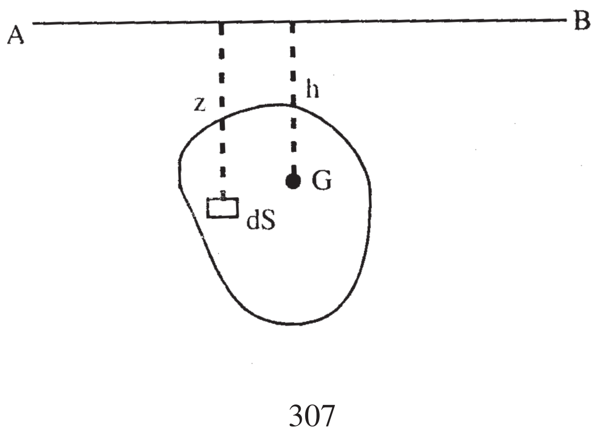
$$\bar{x} = \frac{\iint hxdxdy}{\iint hdxdy} \text{ এবং } \bar{y} = \frac{\iint hydxdy}{\iint hdxdy}$$

অনুভূমিকের সাথে তলটি যদি 'ϕ' কোণে আনত থাকে তাহলে গভীরতা 'h'-এর জায়গায় হবে $h \sin \phi$ কিন্তু $\sin \phi$ = ধ্রুবক বলে, $(\bar{x}, \bar{y})$-এর সূত্রে $\sin \phi$ থাকবে না। তাই সামান্যকরণের ক্ষেত্রে কোন হানি না করেও তলটিকে সর্বদা উল্লম্ব নেওয়া যেতে পারে।

13.5 মাধ্যাকর্ষণ বলের প্রভাবে স্থিতাবস্থায় কোন তরলের মধ্যে নিমজ্জিত কোনও সামতলিক ক্ষেত্রের চাপ কেন্দ্রের গভীরতা নির্ণয় এবং কয়েকটি অনুসিদ্ধান্ত

13.5.1

'S' ক্ষেত্রফলযুক্ত একটি ক্ষেত্র উল্লম্ব আছে এবং কার্যকরী তলের সাথে তা AB রেখায় স্পর্শ করে। এই ক্ষেত্রে dS একটি ক্ষুদ্র অংশ ধরা হল যার গভীরতা Z



এবার ধরা যায় 'G' হল ক্ষেত্রটির ভারকেন্দ্র যা 'h' গভীরতায় আছে। চাপকেন্দ্রের গভীরতা ধরলাম ζ 'AB'-এর স্বাপেক্ষে ভ্রামক গণনা করে পাই,—

$$\zeta = \frac{\sum gpz^2 dS}{\sum gpzdS}$$

যদি তরলটি অনমনীয় (incompressible) এবং সমসত্ত্ব হয় (অবশ্যই মাধ্যাকর্ষণের প্রভাবে) তাহলে g এবং ρ ধ্রুবক হবে।

$$\zeta = \frac{\sum z^2 dS}{\sum zdS} = \frac{\int z^2 dS}{\int zdS}$$

স্থিতিবিদ্যা থেকে বলতে পারি, Σzds হলে 'AB'-এর সাপেক্ষে ক্ষেত্রটির প্রথম ভ্রামক।

$\therefore \quad \Sigma Zds = Sh \; ; \; S =$ সমগ্রক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

গতিবিদ্যা থেকে জানতে পারি, $\Sigma z^2 ds$ হল 'AB' স্বাপেক্ষে ক্ষেত্রটির দ্বিতীয় ভ্রামক,

$\therefore \quad \Sigma Z^2 ds = Sk^2, \; K =$ আবর্তন ব্যাসার্ধ (AB সাপেক্ষে)

সুতরাং $\zeta = \dfrac{K^2}{h}$

যদি 'G'-এর মধ্য দিয়ে যাওয়া অক্ষ (AB-এর সমান্তরাল) স্বাপেক্ষে ক্ষেত্রটির আবর্তন ব্যাসার্ধ হয় K'. তাহলে **সমান্তরাল অক্ষ** উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই—

$$K^2 = K^2 + h^2$$

$$\therefore \quad \zeta = \frac{K^2}{h} + h$$

সুতরাং চাপকেন্দ্রের গভীরতা ভারকেন্দ্রের থেকে বেশি এবং এদের গভীরতার অন্তরের পরিমাণ $\dfrac{K^2}{h}$ 'h' বাড়ার সাথে সাথে এই অন্তরের মানও কমতে থাকে, এবং $\underset{h\to\infty}{\text{Lt}} \dfrac{k'^2}{h} = 0,$

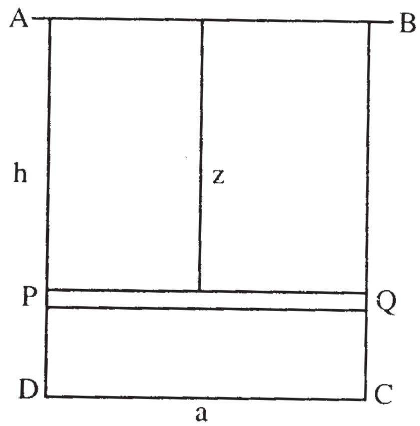
পুনরায় পাই, $\zeta - h = \dfrac{K'^2}{h}$

সুতরাং, $\frac{d\zeta}{dt} - \frac{dh}{dt} = \frac{-k'^2}{h^2}\frac{dh}{dt}$

অর্থাৎ, অনুভূমিকের দিকে চাপকেন্দ্রের সঞ্চরণ ভারকেন্দ্রের দিকে হয় এবং সেই সঞ্চরণের গতিবেগ ভারকেন্দ্রের গভীরতার বর্গের সাথে ব্যস্তানুপাতী।

13.5.2 কয়েকটি অনুসিদ্ধান্ত

(1) একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের চাপকেন্দ্র নির্ণয় কর যার একটি বাহু কার্যকরীতলে আছে।



ধরি, 'AB' বাহুটি $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের কার্যকরীতলে আছে। 'PQ' খুব পাতলা একটি আয়তাকার অংশ যা dZ পরিমাণ চওড়া এবং Z' গভীরতায় আছে। আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $= h$ প্রস্থ $= a$.

PQ পাতলা অংশটির ক্ষেত্রফল $= adz$ এবং এর উপর কোন বিন্দুতে চাপ $= g\rho z$

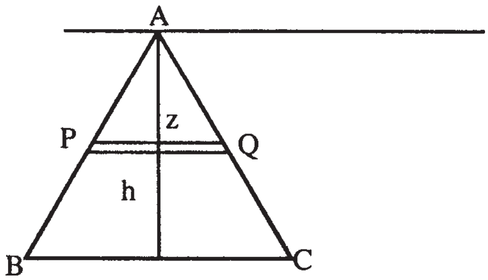
$\therefore$ এর উপর ঘাত $= g\rho zadz$

সুতরাং $\zeta = \dfrac{\int_o^h g\rho z.z.adz}{\int_o^h g\rho za.dz} = \dfrac{\int_o^h z^2dz}{\int_o^h zdz} = \dfrac{h^3/3}{h^2/2} = \dfrac{2}{3}h$

সাম্যের সাহায্যে বলা যায় চাপকেন্দ্রটি মধ্য উল্লম্বরেখা বলাবর $2/3$ অংশ নীচে অবস্থান করছে।

(2) একটি ত্রিভুজের চাপকেন্দ্র নির্ণয় কর শীর্ষবিন্দুটি কার্যকরী তলে এবং ভূমিটি অনুভূমিক।

ধরি উক্ত শীর্ষবিন্দুটি A এবং ভূমিটি BC. ত্রিভুজের উচ্চতা $= h$. PQ একটি পাতলা অংশ (ত্রিভুজটির) যা dz পরিমাণ চওড়া ও z গভীরতায় আছে। এবং $BC = a$.



সুতরাং, $\frac{BC}{h} = \frac{PQ}{z}$ .ie, $PQ = \frac{a}{h}z$

'PQ' অংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{a}{h}zdz$-এর কোন বিন্দুতে চাপ $= g\rho z$

$\therefore$ 'PQ'-এর উপর ঘাত $= g\rho z \frac{a}{h} zdz$

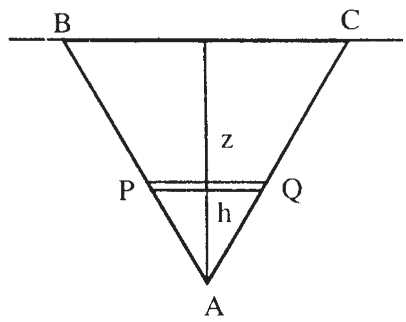
সুতরাং, $\zeta = \frac{\int_o^h g\rho z.z.\frac{a}{h}zdz}{\int_o^h g\rho z\frac{a}{h}zdz} = \frac{\int_o^h z^3 dz}{\int_o^h z^2 dz} = \frac{h^4/4}{h^3/3} = \frac{3}{4}h$

সাম্যের সাহায্যে বলা যায় চাপকেন্দ্রটি এক্ষেত্রে মধ্য উল্লম্ব রেখা বরাবর $\frac{3}{4}$ অংশ নীচে অবস্থান করছে।

(3) একটি ত্রিভুজের চাপকেন্দ্র নির্ণয় যখন তার একটি বাহু কার্যকরী তলে অবস্থানরত।

ধরি, BC হল সেই বাহু ও ত্রিভুজটি হল ABC শীর্ষবিন্দু 'A'-এর গভীরতা $= h$.

'PQ' খুব পাতলা একটি অংশ (এই ত্রিভুজে) যার প্রস্থ dz এবং গভীরতা z. ($BC = a$)



তাহলে, $\frac{BC}{h} = \frac{PQ}{h-z}$; $or,\ PQ = \frac{a}{h}(h-z)$

‘PQ’ অংশের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{a}{h}(h-z)dz$

যে-কোন বিন্দুতে চাপ $= g\rho z$

$\therefore$ এর উপর ঘাত $= g\rho z\dfrac{a}{h}(h-z)dz$

সুতরাং, $$\zeta = \frac{\int_o^h g\rho z.\, z.\, \frac{a}{h}(h-z)dz}{\int_o^h g\rho z.\, \frac{a}{h}(h-z)dz} = \frac{\int_o^h (z^2 h - z^3)dz}{\int_o^h (zh - z^2)dz}$$

$$= \frac{\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}} = \frac{1}{2}h$$

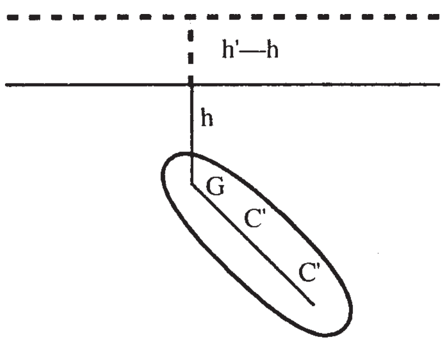
সুতরাং, সাম্য থেকে বলতে পারি চাপকেন্দ্রটি মধ্যউল্লম্ব রেখা বরাবর এক মধ্যবিন্দুতে অবস্থান করেছে।

13.6 কোনও সমতলের বাড়তি গভীরতার জন্য চাপকেন্দ্রের অবস্থানের উপর প্রভাব

13.6.1

তরলের গভীরতা দূভাবে বাড়তে পারে। প্রবাহী পদার্থের পরিমাণ বাড়িয়ে অথবা সামতলিক ক্ষেত্রটিকে স্থিরভাবে আরও গভীরে নামিয়ে দিয়ে।

ধরা যাক, ‘S’ ক্ষেত্রের চাপকেন্দ্র হল C যখন ‘h’ গভীরতায় তার ভারকেন্দ্র হল G. লব্ধি ঘাতের পরিমাণ তখন $= g\rho hS$ (C বিন্দুতে) এখন উপরিউক্ত প্রকারে যদি গভীরতা বাড়ানো যায়, তবে নূতন অবস্থানের জন্য ভারকেন্দ্র G-এর গভীরতা হবে ধরি h'। সুতরাং, এক্ষেত্রে লব্ধিঘাত হল $=$ $g\rho l'S$ এই নতুন অবস্থানের চাপকেন্দ্র নির্ণয় করাই আমাদের লক্ষ্য।



এই ক্ষেত্রের প্রতিটি বিন্দুই $(h' - h)$ পরিমাণ বেশি গভীরে চলে যাবার জন্য চাপ বেড়েছে = $g\rho(h' - h)$, এই বাড়তি চাপের মান সুষমভাবে ক্ষেত্রের উপর ক্রিয়া করে এবং বাড়তি লব্ধিঘাতের মান হবে = $g\rho(h' - h)S$, যা 'G'-এর নতুন অবস্থানের উপর ক্রিয়া করবে।

এখন সমদিকে দুটি সমান্তরাল বল C-এর উপর ক্রিয়া করছে, যথা $g\rho hs$ এবং $g\rho(h' - h)S$. এদের লব্ধি $g\rho h'S$, অন্য একটি বিন্দু C-এ, GC সরলরেখা বরাবর ক্রিয়া করে—

$$g\rho h'S.GC' = g\rho hs.GC$$

$$\Rightarrow \frac{GC'}{GC} = \frac{h}{h'}$$

13.6.2 কয়েকটি অনুসিদ্ধান্ত

1. Z এবং ζ যদি যথাক্রমে একটি মুক্ত ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র ও চাপকেন্দ্র হয় (তরলে নিমজ্জিত), তাহলে যদি তরলের গভীরতা আরও y বৃদ্ধি পায় তবে ভারকেন্দ্র ও চাপ কেন্দ্রের নতুন গভীরতা যথাক্রমে $z + y$ এবং $\zeta + y$ হবে।

$\bar{\zeta}$ যদি নতুন চাপকেন্দ্রের গভীরতা হয় (নতুন মুক্তক্ষেত্রের নীচে),

তাহলে, $$\bar{\zeta} = \frac{g\rho zS(S + y) + g\rho ys(z + y)}{g\rho zs + g\rho ys} = \frac{z(\zeta + y) + y(z + y)}{z + y}$$

$$= \frac{y^2 + 2yz + z\zeta}{z + y},$$ 'S' হল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

2. (C' বিন্দুর গভীরতা—নতুন অবস্থানে (গভীরতায়) C বিন্দুর অবস্থান)

$$= \frac{y^2 + 2yz + z\zeta}{z + y} - (\zeta + y)$$

$$= -\frac{\zeta - z}{z + y}y$$

উপরের সূত্রটির ফল সর্বদা ঋণাত্মক হবে [যেহেতু $\zeta > z$]

সুতরাং চাপকেন্দ্র $\left(\frac{\zeta - z}{z + y}\right)$ দূরত্ব পরিমাণ উত্তোলিত হয় যখন 'y' পরিমাণ তরলের গভীরতাবৃদ্ধি পায়।

3, [C' বিন্দুর গভীরতা—G বিন্দুর গভীরতা (নতুন অবস্থানে)]

$$= \frac{y^2 + 2yz + z\zeta}{z+y} - (z+y) = \frac{z(\zeta - z)}{z+y}$$

উপরের সূত্রের মান 'G'-এর গভীরতার নতুন অবস্থানের সাথে পরিবর্তিত হয়।

4. যদি এরপর আমরা বায়ুমণ্ডলীয় চাপ π-কে ধর্তব্যের মধ্যে আনি, তাহলে এর প্রভাবে তরলটির গভীরতা $\pi/g\rho$ পরিমাণ বৃদ্ধিপাবে, যেখানে f হল তরলটির ঘনত্ব,

সুতরাং $y = \pi/g\rho$

13.7 কয়েকটি বিশেষ সমস্যাবলী

1. যদি একটি ত্রিভুজাকৃতি ক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের গভীরতা দেওয়া থাকে, তাহলে তার চাপকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

ধরা যাক ক্ষেত্রটির তল উল্লম্বভাবে আছে এবং তাদের শীর্ষবিন্দুত্রয়-এর গভীরতা α, β, γ. বাহুগুলির মধ্যবিন্দুত্রয়ের গভীরতা হবে—

$$\frac{1}{2}(\beta+\gamma), \frac{1}{2}(\gamma+\alpha), \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

একটি 'm' ভর যুক্ত ত্রিভুজাকার পাত, একটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের যার শীর্ষবিন্দু তিনটিতে $m/3$ করে ভর রাখা আছে, তার সাথে সমভ্রামকযুক্ত হবে বা অন্যথায় তাদের একই ভারকেন্দ্র ও একই স্থিতিজাড্য হবে।

(এখানে 13.5.1 অধ্যায় দ্রষ্টব্য)

$$h = \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) + \left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right) + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right\} = \frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$$

এবং $$k^2 = \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{6}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)$$

সুতরাং, $$\zeta = \frac{k^2}{h} = \frac{1}{2}\ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$$

যখন, $\alpha = 0,\ \beta = \gamma = h$

সুতরাং, $\zeta = \frac{3}{4}h$

যখন, $\alpha = h$ এবং $\beta = \gamma = 0$ হবে,

তখন, $\zeta = \frac{1}{2}h$

2. একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের চাপকেন্দ্রের অবস্থান, যখন তার কেন্দ্রের গভীরতা দেওয়া আছে।

সমাধান ঃ

ধরা যাক বৃত্তটির তল উল্লম্বভাবে আছে এবং এর ব্যাসার্ধ = a এবং কেন্দ্রকের গভীরতা বা ভারকেন্দ্রের গভীরতা = h.

আগের অধ্যায়ের সাহায্যে বলা যায়।

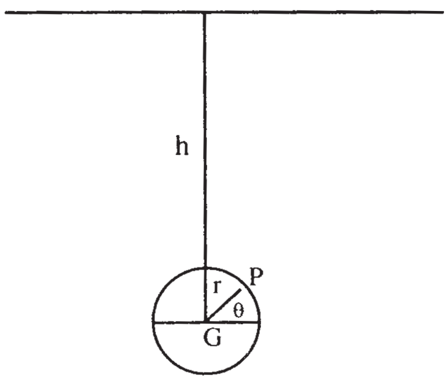
$$\zeta = \frac{k'^2}{h} + h$$

যেখানে K' হল অনুভূমিক ব্যাস স্বাপেক্ষে বৃত্তটির আবর্তন ব্যাসার্ধ (radius of gyration)

গতিবিদ্যার সাহায্যে বলা যায়, $K'^2 = \frac{a^2}{4}$

সুতরাং, $\zeta = \frac{a^2}{4h} + h$

আমরা জানি, ভারকেন্দ্রের থেকেও $a^2/_{4h}$ বেশি গভীরতায় আছে। এই ব্যাপারটি সমাকলন তত্ত্বের সাহায্যে প্রমাণ করা যায়। এখানে মেরু স্থানাঙ্ক ও দ্বিসমাকলন ব্যবহৃত হবে।



'P' বিন্দুতে ক্ষুদ্র ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $rd\theta dr$ এবং এখানে চাপ হল = $g\rho(h - r \sin \theta)$

$\therefore$ এই বিন্দুতে ঘাত $= g\rho(h - r \sin \theta)\ rd\theta dr.$

$$\text{সুতরাং, } \zeta = \frac{\int_o^a \int_o^{2\pi} g\rho(h - r\sin\theta) r\sin\theta . rd\theta dr}{\int_o^a \int_o^{2\pi} g\rho(h - r\sin\theta). rd\theta dr} = -\frac{a^2}{4h}$$

ie. চাপকেন্দ্র ভারকেন্দ্র 'G'-এর তুলনায় $a^2/_{4h}$ গভীরতায় আছে।

একইভাবে দেখানো যায়, $2a$, এবং $2b$ অক্ষদ্বয়যুক্ত উপবৃত্তের চাপকেন্দ্র যথাক্রমে $a^2/_{4h}$ বা $b^2/_{4h}$ গভীরতায় নীচে আছে (যখন তার কেন্দ্রের গভীরতা 'h') যখন $2a$ অথবা $2b$ অক্ষটি উল্লম্ব থাকে।

3. সংযোজক (composite) সামতলিক ক্ষেত্রের চাপকেন্দ্রে নির্ণয়।

সংযোজক ক্ষেত্রেরবিভিন্ন ক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফল ধরা যাক S_1, S_2, S_3, ... যে গুলির ভারকেন্দ্র যথাক্রমে h_1, h_2, h_3 ... গভীরতায় আছে। ক্ষেত্রগুলির উপর যথাক্রমে ঘাত হবে—$g\rho h_1 S_1$, $g\rho h_2 S_2$, $g\rho h_3 S_3$, ...

ক্ষেত্রগুলির চাপকেন্দ্রের গভীরতা ধরা যাক যথাক্রমে ξ_1, ξ_2, ξ_3 ......

$$\text{সুতরাং, } \xi_1 = \frac{k_1^2}{h_1}, \qquad \xi_2 = \frac{k_2^2}{h_2}, \qquad \xi_3 = \frac{k_3^2}{h_3},$$

সংযোজক ক্ষেত্রের চাপকেন্দ্রের গভীরতা যদি ζ হয়, তাহলে,—

$$\zeta = \frac{\frac{k_1^2}{h_1} . g\rho h_1 S_1 + \frac{k_2^2}{h_2} . g\rho h_2 S_2 + \cdots\cdots}{g\rho h_1 S_1 + g\rho h_2 S_2 + \cdots\cdots}$$

$$= \frac{\sum k_1^2 Si}{\sum hiSi}$$

13.8 একাধিক ঘনত্ব বিশিষ্ট তরল সমূহের মধ্যে নিমজ্জিত কোন সামতলিক ক্ষেত্রের চাপকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয়

ধরা যাক ρ_1, ρ_2, ρ_3 .... ρ_n প্রভৃতি ঘনত্বযুক্ত 'n' সংখ্যক তরল আছে এবং তাদের স্পর্শে আছে এমন ক্ষেত্রগুলি যথাক্রমে S_1, S_2, S_3, ... S_n (উপর থেকে নীচে)। সমগ্র ক্ষেত্রের উপর প্রযুক্ত

ঘাত একই থাকবে, যদি আমরা ধরে নেই ρ_1 ঘনত্বযুক্ত তরল $(S_1 + S_2 + ... + S_n)$ ক্ষেত্রের সংস্পর্শে আছে, $(\rho_2 - \rho_1)$ ঘনত্বযুক্ত তরল $(S_2 + S_3 + ... + S_n)$ ক্ষেত্রের সংস্পর্শে আছে, $(\rho_3 - \rho_2)$ ঘনত্বযুক্ত তরল $(S_3 + S_4 + ... + S_n)$ ক্ষেত্রের সংস্পর্শে আছে, ... শেষ পর্যায়ে $(S_n - S_{n-1})$ ঘনত্বযুক্ত তরল S_n ক্ষেত্রের সংস্পর্শে আছে।

যদি P_1, P_2, P_3 ......, P_n যথাক্রমে $(S_1 + S_2 + ... + S_n)$, $(S_2 + S_3 + ... + S_n)$, $(S_3 + S_4 + ... + S_n)$, ..., ক্ষেত্রগুলির উপর প্রযুক্ত ঘাত হয় এবং ζ_1, ζ_2, ..., ζ_n যথাক্রমে তাদের চাপকেন্দ্রের গভীরতা হয় এবং ζ যদি সমগ্র ক্ষেত্রটির চাপকেন্দ্রের গভীরতা হয়,

আমরা বলতে পারি, $\zeta = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_i S_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$

কয়েকটি উদাহরণ ঃ

1. তরলের উপরিতলের গভীরে একটি আয়তক্ষেত্রের চাপকেন্দ্রের অবস্থা হবে $\dfrac{2}{3}\,\dfrac{a^2 + ab + a^2}{a + b}$, যেখানে আয়তক্ষেত্রটির দুটি বাহু অনুভূমিক আছে এবং তাদের গভীরতা যথাক্রমে a এবং b.

ধরি 'l' হল আয়তাকার ক্ষেত্রটির প্রস্থ।

একটি পাতলা অংশ (dz প্রস্থবিশিষ্ট) ও 'z' গভীরে নিমজ্জিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= ldz$.

এর কোন বিন্দুতে চাপ $= g\rho z$

$\therefore$ এর উপর প্রযুক্ত ঘাত $= g\rho z.ldz$

সুতরাং, $\zeta = \dfrac{\int_a^b g\rho z.\,z.\,ldz}{\int_a^b g\rho z.\,ldz} = \dfrac{\int_a^b z^2 dz}{\int_a^b zdz} = \dfrac{\frac{b^3 - a^3}{3}}{\frac{b^2 - a^2}{2}} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$

2. উপর সমস্যায় দেখান যে যদি ঘনত্ব 'ρ' গভীরতা 'z'-এর সাথে পরিবর্তিত হয়, তাহলে চাপকেন্দ্রের গভীরতা হবে—

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

এখানে, $\rho \alpha\ z \Rightarrow \rho = kz \quad (k =$ ধ্রুবক$)$

চাপ সমীকরণটি হবে, $d\rho = g\rho dz = gkzdz$

সমাকলন করে পাব, $\rho = \frac{1}{2}gkz^2 + C$

বায়ুমণ্ডলীয় চাপ নগণ্য হলে, $p = 0$ যখন, $z = 0$, $\therefore \quad C = 0$

$\therefore$ 'z' গভীরতায় কোন বিন্দুতে চাপ $= \frac{1}{2}gkz^2 = gk'z^2 \quad [k' = k/2]$

$\therefore$ পাত্‌লা অংশটির উপর ঘাত $= gk'z^2.ldz$.

সুতরাং, $\zeta = \dfrac{\int_a^b gk'z^2 ldz}{\int_a^b gk'z^2 ldz} = \dfrac{\int_a^b z^3 dz}{\int_a^b z^2 dz} = \dfrac{\frac{b^4 - a^4}{4}}{\frac{b^3 - a^3}{3}}$

$$= \frac{3}{4}\,\frac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

13.9 উদাহরণমালা

1. পুরোপুরি তরলে নিমজ্জিত একটি ত্রিভুজের ভূমি তরলের উপরিতলে আছে, প্রমাণ করুন যে ত্রিভুজটির চাপকেন্দ্র দিয়ে যায় এমন অনুভূমিক রেখা ত্রিভুজটিকে এমন দুইভাগে বিভক্ত করে, যাতে প্রত্যেক ভাগের উপর ঘাত পরস্পর সমান হয়।

সমাধান ঃ

যদি ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুর গভীরতা h হয়, তাহলে চাপকেন্দ্রের গভীরতা $= \frac{1}{2}h$.

সুতরাং পুরো ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ হলে ছোট ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}\Delta$

পুরো ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রের গভীরতা $= \frac{1}{3}h$, এবং ছোট ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রের গভীরতা $= \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}h = \frac{2}{3}h$

$\therefore$ পুরো ত্রিভুজের উপর প্রযুক্ত ঘাত $= g\rho.\frac{1}{3}h.\Delta = \frac{1}{3}g\rho h\Delta$

এবং ছোট ত্রিভুজটির উপর প্রযুক্ত চাপ $= g\rho.\frac{2}{3}h.\frac{1}{4}\Delta = \frac{1}{6}g\rho h\Delta$

অতএব দুই অংশে প্রযুক্ত ঘাত পরস্পর সমান হবে।

2. একটি ট্রাপিজিয়ামের a দৈর্ঘ্যের বাহুটি তরলের উপরিতলে আছে। এর সমান্তরাল b দৈর্ঘ্যের অপর বাহুটি উপরিতল থেকে 'C' গভীরতায় আছে। প্রমাণ করুন এর চাপকেন্দ্রের গভীরতা হবে $\frac{a+3b}{a+2b}\cdot\frac{C}{2}$।

সমাধান ঃ একটি কর্ণদ্বারা ট্রাপিজিয়ামটিকে দুভাগে বিভক্ত করা হল।

এখানে, $S_1 = \frac{1}{2}ac, h_1 = \frac{1}{3}C, \zeta_1 = \frac{1}{2}C,$ এবং $S_2 = \frac{1}{2}bC, h_2 = \frac{2}{3}C, \zeta_2 = \frac{3}{4}C$

$$\therefore\ \zeta = \frac{\zeta_1 gfh_1S_1 + \zeta_2 gfh_2S_2}{gfh_1S_1 + gfh_2S_2} = \frac{\frac{1}{2}c\,\frac{1}{3}c.\frac{1}{2}ac + \frac{3}{4}c.\frac{2}{3}c.\frac{1}{2}bc}{\frac{1}{3}c.\frac{1}{2}ac + \frac{2}{3}c.\frac{1}{2}bc} = \frac{a+3b}{a+2b}\cdot\frac{c}{2}\ \text{(প্রমাণিত)}$$

3. ABCD চতুর্ভুজ পুরোপুরি হলে নিমজ্জিত আছে এবং এর শীর্ষবিন্দুগুলির গভীরতা যথাক্রমে $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ এটির ভারকেন্দ্রের গভীরতা h হলে দেখান যে এর চাপকেন্দ্রের গভীরতা হবে—

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) - \frac{1}{6h}\ (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta + \alpha\delta + \beta\delta + \gamma\delta)$$

সমাধান ঃ AC যুক্ত করে চতুর্ভুজটিকে দুই অংশে বিভক্ত করা হল।

এখানে,

$S_1 = ABC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $h_1 = \frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$,

এবং $k_1^2 = \frac{1}{6}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)$

$S_2 = ADC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $h_2 = \frac{1}{3}(\alpha+\gamma+\delta)$

এবং, $k_1^2 = \frac{1}{6}(\alpha^2+\gamma^2+\delta^2+\gamma\delta+\delta\alpha+\alpha\delta)$

$$\therefore\ h = \frac{S_1h_1 + S_2h_2}{S_1+S_2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(\alpha+\beta+\gamma)S_1 + (\alpha+\gamma+\delta)S_2}{S_1+S_2}$$

কিন্তু, $\zeta = \frac{k_1^2S_1 + k_2^2S_2}{h_1S_1 + h_2S_2}$

$$= \frac{\frac{1}{6}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)S_1+\frac{1}{6}(\alpha^2+\gamma^2+\delta^2+\gamma\delta+\delta\alpha+\alpha\gamma)S_2}{\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)S_1+\frac{1}{3}(\alpha+\gamma+\delta)S_2}$$

$\therefore\ \zeta = \frac{1}{2}\left(\sum\alpha\right) = \frac{1}{6h}\left(\sum\alpha\beta\right)$ [$\because$ S_1, S_2-কে অপনয়ন করে পাই]

4. একটি সামান্তরিকের তলটি উল্লম্ব আছে। এর কেন্দ্র 'h' গভীরতায় আছে। এটি যদি একটি সম্পূর্ণ সমসত্ত্ব তরলে নিমজ্জিত থাকে এবং a, b যদি উল্লম্বের উপর সামান্তরিকটির বাহুদ্বয়ের লম্ব অভিক্ষেপ হয়, তাহলে দেখান যে এর চাপ কেন্দ্রের গভীরতা হবে $h + (a^2 + b^2)/12h$

সমাধান ঃ আমরা জানি, $\zeta = \frac{k'^2}{h} + h$

এখানে $k'^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2}{3} = \frac{a^2+b^2}{12}$

সুতরাং, $\zeta = h + (a^2 + b^2)/12h$

5. তরলে নিমজ্জিত একটি বৃত্তপাদ-এর (quadrant of circle) সীমাস্থ একটি ব্যাসার্ধ যদি উপরিতলে থাকে, তাহলে বৃত্তপাদটির চাপকেন্দ্র-এর অবস্থান বের করুন।

সমাধান ঃ ধরা যাক, 'x' অক্ষ তরলের উপরিতল বরাবর আছে এবং 'y' অক্ষ নীচের দিকে উল্লম্বভাবে অবস্থান করছে।

(r, θ) যদি ক্ষেত্রটির কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক হয়, তাহলে, ক্ষুদ্র অংশের ক্ষেত্রফল $= rd\theta dr$.

ঐ বিন্দুতে চাপ $= g\rho r \sin\theta$

$$\therefore\quad \xi = \frac{\int_0^a\int_o^{\pi/2} g\rho r\sin\theta.\, r\cos\theta.\, rd\theta dr}{\int_0^a\int_o^{\pi/2} g\rho r\sin\theta.\, rd\theta dr} = \frac{\frac{a^4}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{a^3}{3}} = \frac{3}{8}a$$

$$\text{এবং}\quad \eta = \frac{\int_0^a\int_o^{\pi/2} g\rho r\sin\theta.\, r\sin\theta.\, rd\theta dr}{\int_0^a\int_o^{\pi/2} g\rho r\sin\theta.\, rd\theta dr} = \frac{\frac{a^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}{\frac{a^3}{3}} = \frac{3\pi}{16}a$$

যদি তরলটির ঘনত্ব গভীরতার সাথে পরিবর্তিত হয়, তাহলে $\rho = kr\sin\theta = kz$ (যেখানে k একটি ধ্রুবক)

একইভাবে $\rho = \frac{1}{2}kz^2 = k'z^2$ [যেখানে, $k' = \frac{1}{2}k$]

$$\therefore\ \xi = \frac{\int_0^a \int_o^{\pi/2} gk'r\sin\theta.\, r\sin\theta.\, r\cos\theta.\, rd\theta dr}{\int_0^a \int_o^{\pi/2} gk'r\sin\theta.\, r\sin\theta.\, rd\theta dr} = \frac{\frac{a^5}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{a^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi/2} = \frac{16}{15}\,\frac{a}{\pi}$$

$$\text{এবং}\ \eta = \frac{\int_0^a \int_o^{\pi/2} gk'r\sin\theta.\, r\sin\theta.\, r\sin\theta.\, rd\theta dr}{\int_0^a \int_o^{\pi/2} gk'r\sin\theta.\, r\sin\theta.\, rd\theta dr} = \frac{\frac{a^5}{5}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{a^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{15}\,\frac{a}{\pi}$$

13.10 অনুশীলনী ও উত্তরমালা

1. পাত্‌লা বর্গাকার একটি ক্ষেত্র একটি ভারী সমসত্ত্ব তরলে নিমজ্জিত আছে। বর্গাকার ক্ষেত্রের তলটি উল্লম্ব এবং একটি শীর্ষবিন্দু উপরিতলে আছে। এই শীর্ষবিন্দুর স্বাপেক্ষে ক্ষেত্রটি এর নিজের তল বরাবর ঘুরলে দেখান যে এর চাপকেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা হবে।

[**আভাস** ঃ চাপকেন্দ্রের সূত্র প্রয়োগ করে $\xi\eta$ বার করুন এবার দেখান $\xi + \eta = \frac{7a}{6}$]

2. একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্র উল্লম্বভাবে তরলে নিমজ্জিত আছে। এর কেন্দ্রের গভীরতা C যদি ক্ষেত্রটিকে ধীরে ধীরে আরও গভীরে নামানো হয় যেখানে তার কেন্দ্রের গভীরতা 't' সময়ে $f(t)$ হবে, তাহলে দেখান যে কোন এক মুহূর্তে চাপকেন্দ্রের গতিবেগ হবে $f'\left\{1 - \frac{a^2}{4f^2}\right\}$, যেখানে '$a$' হল বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

[**আভাস** ঃ চাপকেন্দ্রের গভীরতা $= C + \frac{a^2}{4c}$, এবার $C = f(t)$ ধরে উভয়পক্ষকে 't'-র সাপেক্ষে অন্তরকলন করুন।]

3. একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য $6\sqrt{3}$ ফুট। এটি উল্লম্বভাবে জলে নিমজ্জিত আছে এবং একটি বাহু জলতলে আছে। জলতল যদিবায়ুমণ্ডলের সংস্পর্শে থাকে এবং ব্যারোমিটার স্ট্যান্ড 34 ফুট হয়, ত্রিভুজটির চাপকেন্দ্রের গভীরতা বার করুন।

[**আভাস** ঃ $\frac{GC'}{GC} = \frac{h}{h'}$, এভাবে ভাবুন] [উত্তর ঃ $3\frac{9}{74}\,ft$]

4. একটি বর্গাকার পাতের উল্লম্বভাবে ঠিক জলতলের নিচে জলে নিমজ্জিত আছে এবং এরপর একে আরও 'b' গভীরতায় নিয়ে যাওয়া হল। যদি বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু 'a' হয়, তাহলে প্রমাণ করুন বর্গক্ষেত্রের চাপকেন্দ্র থেকে কেন্দ্রের দূরত্ব $\frac{a^2}{6(a+2b)}$ হবে।

[**আভাস ঃ** $h = \frac{1}{2}a, GC = \frac{1}{6}a, \frac{GC'}{GC} = \frac{h}{h'}$ এবার $GC' = x$, t সময়ে হলে $\frac{dx}{dt}$ বার করার চেষ্টা করুন]

5. ABC একটি ত্রিভুজাকার পাত উল্লম্বভাবে তরলে নিমজ্জিত আছে যার A বিন্দুটি উপরিতলে আছে আর BC বাহু অনুভূমিক। M ও N হল যথাক্রমে AB ও AC-এর মধ্যবিন্দু।

$MNCB$ ক্ষেত্রটির চাপকেন্দ্রের গভীরতা বের করুন।

[**আভাস ঃ** ত্রিভুজের উপর ঘাতের সূত্র প্রয়োগ করুন]

[**Ans** : $\frac{45}{56}d$, যেখানে 'd' হল 'B' বিন্দুর গভীরতা]

6. 'h' উচ্চতাবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ তরলে নিমজ্জিত আছে। এর ভূমি অনুভূমিক এবং শীর্ষবিন্দু তরলের উপরিতলে আছে। বায়ুমণ্ডলীয় চাপ যদি H ফুট তরলটির চাপের সমান হয়, তাহলে চাপকেন্দ্রটি (ত্রিভুজের) এর ফলে কত উচ্চতায় উঠে আসবে (ত্রিভুজটির তল বরাবর)?

[**আভাস ঃ** $\xi = \frac{k_1^2 S_1 + k_2^2 S_2}{h_1 S_1 + h_2 S_2}$ দ্রষ্টব্য] [**Ans.** $\frac{hH}{4(2h+3H)}$]

7. তরলে নিমজ্জিত বৃত্তের কেন্দ্রের গভীরতা h হলে তার চাপকেন্দ্রের অবস্থান বার করুন।

[বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= a$]

[**আভাস ঃ** $\xi = \frac{\int x\rho ds}{\int \rho ds}$ সূত্র দ্রষ্টব্য] [**Ans.** $h + \frac{a^2}{4h}$]

8. $ABCD$ রম্বস তরলে নিমজ্জিত আছে, 'A' শীর্ষবিন্দুটি উপরিতলে আছে এবং AD উল্লম্ব আছে। প্রমাণ করুণ চাপকেন্দ্র AD-কে $7 : 5$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

[**আভাস ঃ** চাপকেন্দ্রের গভীরতা ঃ $= \frac{a^2\cos^2\theta + 4a^2\cos^2\theta + 2a^2\cos^2\theta}{2(a\cos\theta + 2a\cos\theta)}$, $a =$ রম্বসের বাহু, $\theta = \angle BAD$]

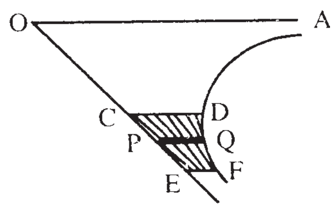
9. তরলের গভীরতা a পরিমাণ বাড়লে বস্তুর চাপকেন্দ্রে গভীরতা y বাড়ে, তরলের গভীরতা যদি b বাড়ানো হয় তাহলে চাপকেন্দ্রের গভীরতাও z পরিমাণ বৃদ্ধি পায়। প্রথমাবস্থায় ভারকেন্দ্রের গভীরতা নির্ণয় করুন।

[**আভাস** ঃ গভীরতা বৃদ্ধির সাথে চাপবৃদ্ধি ও চাপকেন্দ্রের অবস্থান পরিবর্তনের সূত্র প্রযোজ্য]

[**Ans.** $\dfrac{ab(b-a+y-z)}{az-by}$]

10. একটি পরাবৃত্তের এ্যাসিম্মটোট (Asymptote) তরলের উপরিতলে আছে। নিমজ্জিত asymptote, পরাবৃত্ত এবং দুটি অনুভূমিক রেখার মধ্যবর্তী ক্ষেত্রের (নিচের চিত্র দ্রষ্টব্য) চাপকেন্দ্রের গভীরতা বাহির করুন।

[**আভাস** ঃ



[**Ans.** *CDFE* ক্ষেত্রের চাপকেন্দ্রের অবস্থান হবে $\overline{CD}$ ও $\overline{EF}$-এর গভীরতার সমান্তরীয় মধ্যক (Arithmetic mean)]

PQ একটি ছোট স্ট্রিপ ধরে তার উপর চাপ বের করুন। এরপর চাপকেন্দ্র নির্ণয়ের জন্য সমাকলের সাহায্য নিন (সূত্র দ্রষ্টব্য)]

13.11 সারাংশ

এই অধ্যায়ে মূলতঃ স্থিতিশীল কোন তরল পদার্থে আংশিক বা সম্পূর্ণভাবে নিমজ্জিত কোন সামতলিক ক্ষেত্রের চাপবিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা হয়েছে। সাধারণ সূত্র ছাড়াও বিশেষ বিশেষ কিছু ক্ষেত্রের জন্য সূত্রগুলি নির্ধারণ করা হয়েছে। বিশেষ করে মাধ্যাকর্ষণ বলের প্রভাবে স্থিরাবস্থায় স্থিত তরলের জন্য কয়েকটি নির্দিষ্ট জ্যামিতিক সামতলিক ক্ষেত্রের চাপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক চিহ্নিত করা হয়েছে। ভারকেন্দ্র ও চাপকেন্দ্রের মধ্যে অবস্থানগত পার্থক্য ও অতিরিক্ত গভীরতার জন্য এদের। অবস্থানগতি পরিবর্তন আলোচনা করা হয়েছে।

13.12 সহায়ক গ্রন্থাবলী

1. A. S. Ramsay : Hydrostatics

2. J. M. Kar : Hydrostatics: For degree classes. The Globe Library, Calcutta.

3. M. Ray & H. S. Sharma : A Text book of hydrostatics Premier Publishing Co., New Delhi, 196

একক 14 ❐ তলোপরি ক্রিয়ারত বলগোষ্ঠী (Thrust on a curved surface)

গঠন

14.1 প্রস্তাবনা

14.2 উদ্দেশ্য

14.3 বিষয় পরিচিতি

14.4 স্থিতিশীল তরলে নিমজ্জিত ভারী বস্তুর উপর মোট চাপ

14.5 তরলের মধ্যে আংশিকভাবে নিমজ্জিত বিভিন্ন আকারের বক্রতলের উপর মোট উল্লম্ব ঘাত এবং একটি নির্দিষ্ট দিকে মোট অনুভূমিক ঘাত।

14.6 সমতল দ্বারা আবদ্ধ বক্রক্ষেত্রের উপর লব্ধিঘাত

14.7 উদাহরণমালা

14.8 অনুশীলনী ও উত্তরমালা

14.9 সারাংশ

14.10 সহায়ক গ্রন্থাবলী

14.1 প্রস্তাবনা

এই অধ্যায়ে আমরা একটি বিশেষ ধরনের তলের উপর ঘাত নির্ণয় ও তার ধর্মাবলী নিয়ে আলোচনা করব তা হল, যখন তরলে নিমজ্জিত থাকে, তখন তার উপর প্রযুক্ত ঘাতের বিভিন্ন দিক বিভিন্ন দিকে হয়। সুতরাং ক্ষুদ্রকোণ অংশের (বক্রতলের) উপর প্রযুক্ত ঘাতকে আমরা তিনটি উপাংশে বিভক্ত করতে পারি, যথা—অনুভূমিক OX, OY এবং উল্লম্ব OZ অংশ। সুতরাং পুরো বক্রতলের উপর প্রযুক্ত ঘাতকে আমরা X, Y ও Z অক্ষ বরাবর প্রকাশ করতে পারি তিনটি উপাংশের লব্ধি করে লব্ধি ঘাত নিম্নলিখিত উপায়ে প্রকাশ করা যায়।

R^2 (লব্ধি) $= X^2 + Y^2 + Z^2$ এবং উল্লম্বের সাথে R যদি θ কোণ করে থাকে, তাহলে $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{X^2+Y^2}}{Z}$.

14.2 উদ্দেশ্য

পূর্বেকার অধ্যায়ে বিভিন্ন প্রকারের সামতলিক ক্ষেত্রের উপর তরল পদার্থের চাপের বিভিন্ন সূত্র এবং মোট ঘাত পরিমাণের পরিমাপ বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। কিন্তু তরল পদার্থে অনেক ত্রিমাত্রিক বস্তু নিমজ্জিত থাকতে পারে। তাদের আকার আয়তন বিভিন্ন হতে পারে। এছাড়াও তরলপদার্থ বিভিন্ন আকারের আধানের মধ্যে সাম্যাবস্থায় থাকতে পারে। সেই আধানের উপর তরল পদার্থের চাপ বর্তমান। এই সব বিষয়ে বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে তরল পদার্থের চাপের বিশ্লেষণ মূলক আলোচনাই এই অধ্যায়ের আলোচনার উদ্দেশ্য যাতে শিক্ষার্থীরা এই বিষয়ে অবগত হন।

14.3 বিষয় পরিচিতি

শিরোনামে উল্লেখ করা আছে এই অধ্যায়ে বিভিন্ন আকারের বক্রতল দ্বারা সীমাবদ্ধ কোন কঠিন বস্তুর উপর তরলের ঘাত বা চাপ বিষয়ে এই অধ্যায়ে আলোচনা করা হবে। বিষয়টা আপাত স্বচ্ছ হলেও গাণিতিক সূত্র নিরূপণ ততটা সোজা নয়। যেভাবে সামতলিক ক্ষেত্রে চাপ নিরূপণ করা হয়েছে। যেহেতু চাপ বা ঘাত একটি ত্রিমাত্রিক বক্রতলে ক্রিয়াশীল। তাই তাদের অক্ষভিত্তিক উপাংশ নির্ণয় করে চাপ এবং মোট ঘাতের মান নির্ণয় করা হয়েছে। সাম্যবস্থায় এদের পরিমাপের জন্য বীজগাণিতিক সূত্রের সাহায্য নেওয়া হয়েছে। কয়েকটি উদাহরণ সহযোগে বিষয়টাকে শিক্ষার্থীদের কাছে তুলে ধরা গেছে।

14.4 স্থিতিশীল তরলে নিমজ্জিত ভারী বস্তুর উপর মোট চাপ

একটি তরলে নিমজ্জিত বস্তুকে তরল থেকে উঠিয়ে নিয়ে সেই ফাঁকা জায়গাটি ওই তরল দ্বারা পূর্ণ করলে ওই স্থানে চাপ একই থাকে। এই বাড়তি প্রযুক্ত তরলটিকে ‘অপসারিত তরল’ বলা হয়। তরলের এই অংশটি তরলটির ভারের চাপ ভারকেন্দ্র দিয়ে নিচের দিকে কার্য করে, ও তার উপর প্রযুক্ত ঘাতের, যা উল্টোদিকে ক্রিয়া করে ; সাম্যাবস্থায় থাকে।

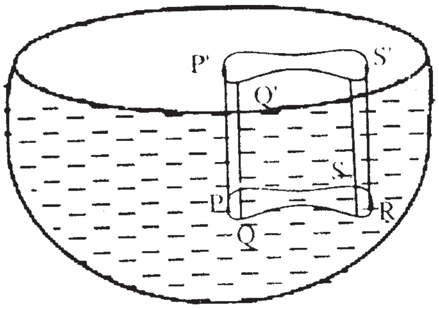
সুতরাং কোন নিমজ্জিত ঘনবস্তুর উপর প্রযুক্ত তরলের চাপের মান ওই ঘনবস্তু কর্তৃক অপসারিত তরলের ওজনের সাথে সমান ও এর দিক ওই ওজন যে দিকে ক্রিয়া করে তার বিপরীতমুখী। এই উপরদিকে ক্রিয়ারত উল্লম্ব বল ওই অপসারিত তরলের ভারকেন্দ্রের মধ্য দিয়ে ক্রিয়া করে। একেই আর্কিমিডিসের নীতি বলা হয়।

তরলে নিমজ্জিত ঘনবস্তুর উপর লব্ধিঘাতকে প্লবতা বলা হয়। এবং অপসারিত তরলের ভারকেন্দ্রকে প্লবতা কেন্দ্র বলা হয়।

14.5 তরলের মধ্যে আংশিকভাবে নিমজ্জিত বিভিন্ন আকারের বক্রতলের উপর মোট উল্লম্ব ঘাত একটি নির্দিষ্ট দিকে মোট অনুভূমিক ঘাত।

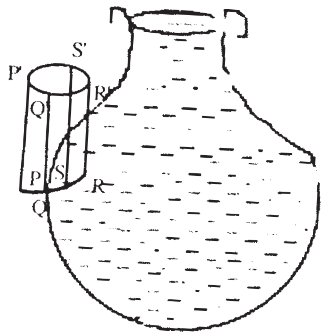
তরলের মধ্যে আংশিকভাবে নিমজ্জিত বিভিন্ন আকারের বক্রতলের উপর মোট উল্লম্ব ঘাত এবং একটি নির্দিষ্ট দিকে মোট অনুভূমিক ঘাত।

14.5.1 যে তলের উপর ঘাত বের করতে হবে, ধরা যাক, তা একটি বক্ররেখা *PQRS* দ্বারা সীমায়িত আছে, একে ভূমি ধরে একটি উল্লম্ব চোঙ আঁকা হয় যা কার্যকরী তলের সাথে *P′Q′R′S′* বক্ররেখায় মিলিত হয়।



PQRS—P′Q′R′S′ চোঙে অবস্থিত এই তরলকে আবদ্ধতরল (Superincumbent fluid) বলা হয়।

এই চোঙের ভিতর অবস্থিত তরলের উপর একমাত্র প্রযুক্ত উল্লম্ব বলটি হল *PQRS* তলের উপর আঘাতজনিত লব্ধি উল্লম্ব উপাংশ এবং ওজন। সাম্যবস্থার কারণে, এই দুটি বল পরস্পর সমান এবং বিপরীতমুখী এবং একই রেখা বরাবর ক্রিয়া করে।



যদি তরলটি নীচে চাপ দেবার বদলে চিত্রে প্রদর্শিত *PQRS* তলে চাপ দেয়, তাহলে *PQRS*-এর কোন বিন্দুতে চাপের মান কার্যকরী তলের নীচে বিন্দুর গভীরতার উপর নির্ভর করে। আগের মতই একটি চোঙ আঁকা হল। উপরদিকের ঘাতের উপাংশ (*PQRS*-এর উপর প্রযুক্ত) অবশ্যই *PQRS P′Q′R′S′* চোঙে আবদ্ধ তরলের ওজনের সমান হবে।

এস্থলে উল্লম্বঘাত নিম্নমুখী হলে এবং PQ-এর উপরে প্রকৃত তরলটি অবস্থিত হবে (i)-নং এর মত এবং ঊর্ধ্বমুখী হলে তা (ii)-নং চিত্রের মত হবে।

এস্থলে উল্লম্বঘাত নিম্নমুখী হলে এবং PQ-এর উপরে প্রকৃত তরলটি অবস্থিত হলে (i)-এর মত এবং ঊর্ধ্বমুখী হলে তা (ii)-নং চিত্রের মত হবে।

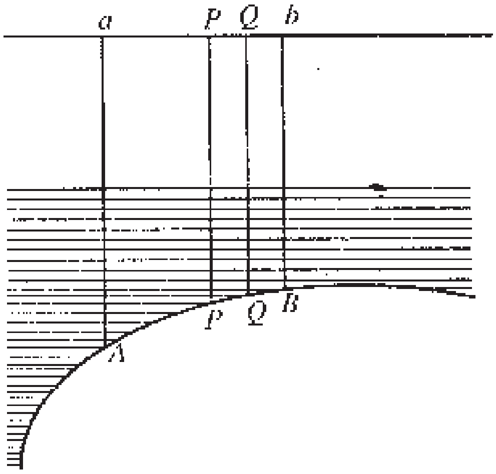


Fig (i)

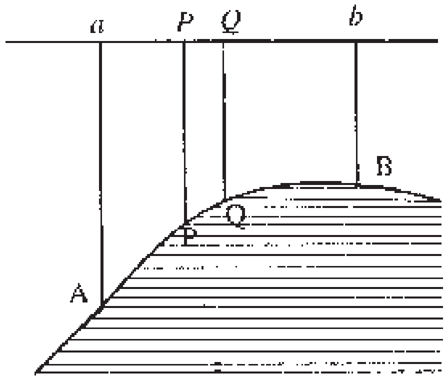
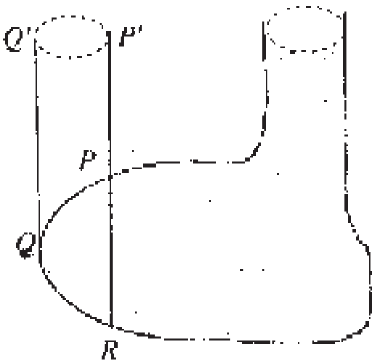


Fig (ii)

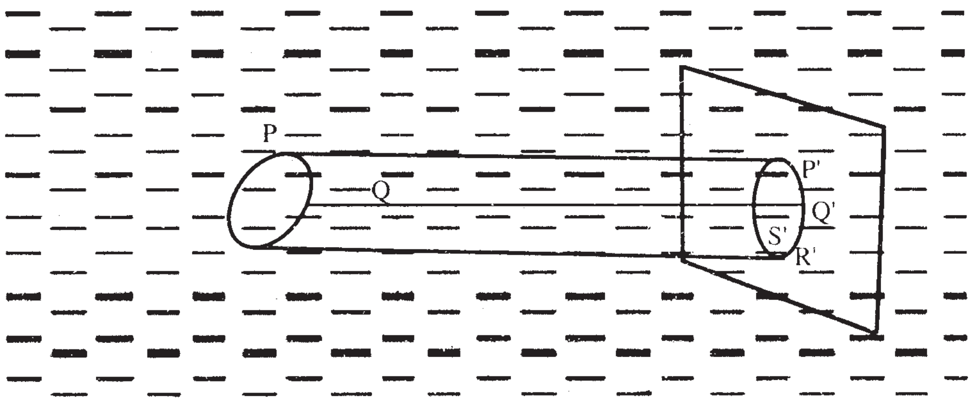


তলটি যদি সংলগ্ন চিত্রের ন্যায় হয়, তাহলে PQ-এর উপর লব্ধি ঊর্ধ্বমুখী ঘাত থাকবে, যেহেতু তরলটি এর নীচে আছে। এবং এর মান হবে $PQQ'P'$-এর মধ্যে আবদ্ধ তরলের ওজনের সমান।

QR অংশের উপর লব্ধি ঘাত নিম্নমুখী হবে। কারণ তরলটি এর উপরে আছে এবং এর মান হবে $QRP'Q'$-এর মধ্যে আবদ্ধ তরলের ওজনের সমান।

14.5.2 লব্ধি অনুভূমিক ঘাত

ধরা যাক $PQRS$ একটি তল আছে। PP', QQ', RR', SS' অঙ্কন করা হল যারা $P'Q'RS'$

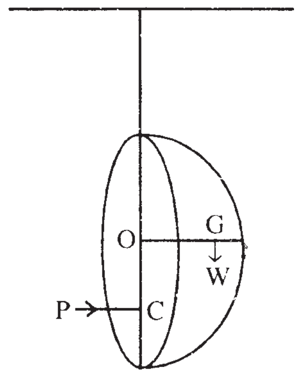


নামে একটি উল্লম্ব প্রস্থচ্ছেদ নির্মাণ করে ($P\ Q\ R\ S\ P'\ Q'\ R'\ S'$ চোঙের) একমাত্র অনুভূমিক ঘাত যা এর উপর ক্রিয়া করে, তা হল $PQRS$ এবং $P'Q'R'S'$-এর উপর ক্রিয়ারত ঘাতের অনুভূমিক উপাংশগুলি। সাম্যাবস্থার জন্য এই বলদুটি সমান হবে।

14.6 সমতল দ্বারা আবদ্ধ বক্রক্ষেত্রের উপর লব্ধি ঘাত

ধরা যাক S বক্রতলের ক্ষেত্রফল A তাহলে পারিপার্শ্বিক তরলের ঘাত এবং A-এর ধারের ঘাতের সাথে ওই বস্তুটি সাম্যাবস্থায় থাকবে। এজন্য বস্তুটিকে তরল থেকে অপসারিত করলে সেই স্থান নেবে যে পরিমাণ তরল তা S ও A দ্বারা আবদ্ধ থাকবে।

এখন আর্কিমিডিসের নীতি অনুযায়ী, যদি এই তরলের ওজন W হয়, তাহলে সেই প্রসঙ্গে তলটির উপর ঘাতও W-এর সাথে সমান কিন্তু ঊর্ধ্বমুখী হবে।



X ও Y যদি তলটির উপরে প্রযুক্ত ঘাতের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ হয় তাহলে বক্রতলের উপর (S) প্রযুক্ত ঘাত হবে যথাক্রমে $-X$ এবং $-Y$.

সুতরাং বক্রতলের উপর লব্ধি অনুভূমিক এবং উল্লম্ব ঘাত যথাক্রমে হবে $-X$ এবং $W-Y$

একটি, বৃত্তাকার ক্ষেত্রের চাপকেন্দ্র ধরা যাক বার করতে হবে।

ধরি, একটি অর্ধগোলক আছে, যার ভূমি হল উক্ত বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি এবং এটি তরলে পরিপূর্ণ। ধরা যাক এই ক্ষেত্রটি উল্লম্ব আছে এবং এর কেন্দ্র O, h গভীরতায় আছে।

তরলের ওজন $W = \frac{2}{3} g\rho\pi a^3$, ঊর্ধ্বদিকে উল্লম্বভাবে G বরাবর ক্রিয়া করে, যেখানে G হল অর্ধগোলকের ভারকেন্দ্র এবং $OG = \frac{3}{8} a$. গোলাকার তল $g\rho\pi a^2 h$-এর উপর ঘাত P, C ভূমির সাথে লম্বভাবে ক্রিয়া করে।

সাম্যাবস্থার জন্য, O-এর স্বাপেক্ষে ভ্রামক গণনা করে পাই,

$$P.OC = W.OG$$

$$\Rightarrow g\rho\pi a^2.h.OC = \frac{2}{3} g\rho\pi a^2 . \frac{3}{8} a$$

$$\therefore OC = \frac{a^2}{4h}$$

এটি ক্ষেত্রটির ভারকেন্দ্র থেকে তার চাপকেন্দ্রের গভীরতার পরিমাপ দিচ্ছে।

14.7 উদাহরণমালা

1. একটি a ব্যাসার্ধযুক্ত অর্ধগোলাকার ক্ষেত্র ρ ঘনত্বযুক্ত তরলে নিমজ্জিত আছে এবং এর কেন্দ্র h গভীরতায় আছে। অর্ধগোলকটির ভূমি অনুভূমিকের সাথে 'θ' কোণে আনত। বক্রতলের উপর লব্ধিঘাত নির্ণয় করুন। আরও প্রমাণ করুন যে $(W - V)^2 + H^2 =$ ধ্রুবক হবে ; V, H হল যথাক্রমে লব্ধি উল্লম্ব এবং অনুভূমিক ঘাত।

সমাধান ঃ

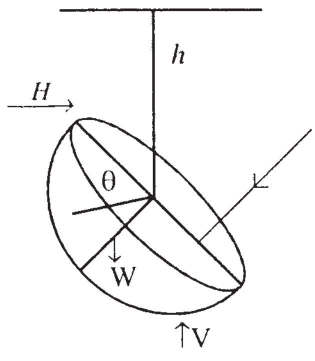


Fig (i)

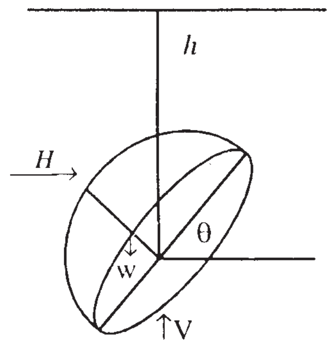


Fig. (ii)

ধরা যাক, H, V হল বক্রতলের উপর লব্ধিঘাতের অনুভূমিক এবং উল্লম্ব ঘাত।

তাহলে, বৃত্তাকার ক্ষেত্রের উপর ঘাত $= g\rho$, ক্ষেত্রফল $\times$ ভরকেন্দ্রের গভীরতা

$= g\rho\pi a^2 h$ ভূমির সাথে লম্বভাবে ক্রিয়া করে।

অপসারিত তরলের ওজন, $W = \frac{2}{3} g\rho\pi a^3$, যা উল্লম্বভাবে নিম্নমুখী ক্রিয়ারত এই চারটি বল সাম্যাবস্থায় থাকার জন্য—

(i) নং চিত্র থেকে পাই—

$H = g\rho\pi a^2 h \sin\theta$

$V = g\rho\pi a^2 h \cos\theta + \frac{2}{3} g\rho\pi a^3$

'R' যদি লব্ধিঘাত হয় তা অনুভূমিকের সাথে ϕ কোণে আনত,

তাহলে, $R = \sqrt{H^2 + V^2} = g\rho\pi a^2 \{h^2 + \left\{h^2 + \frac{4}{9} a^2 + \frac{4}{3} ah\cos\theta\right\}^{\frac{1}{2}}$

এবং $\tan\phi = \frac{V}{H} = \frac{2a + 3h\cos\theta}{3h\sin\theta}$

(ii) নং চিত্র থেকে পাই—

$H = g\rho\pi a^2 h \sin\theta$

$V = \frac{2}{3} g\rho\pi a^3 - g\rho\pi a^2 h\cos\theta$

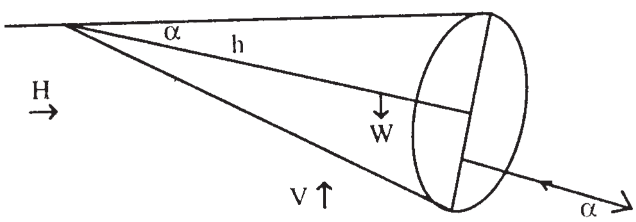
$\therefore\ R = g\rho\pi a^2 \left\{h^2 + \frac{4}{9} a^2 - \frac{4}{3} ah\cos\theta\right\}^{\frac{1}{2}}$

এবং $\tan\phi = \frac{2a - 3h\cos\theta}{3h\sin\theta}$

এছাড়া $(W - V)^2 + H^2 = (g\rho\pi a^2 h)^2$ = ধ্রুবক রাশি, যেহেতু এটি 'θ'-এর উপর নির্ভরশীল নয়।

2. শীর্ষকোণ 2α যুক্ত একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু ঠিক জলতলের নিচে নিমজ্জিত আছে। এর একটি জেনারেটর জলতলে আছে। প্রমাণ করুন বক্রতলের উপর লব্ধিঘাত এবং শঙ্কু কর্তৃক অপসারিত জলের ওজনের অনুপাত হল $\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha} : 1$, এবং তা শঙ্কুর অক্ষের সাথে cot^{-1} ($2 \tan\alpha$) কোণে আনত থাকে।

সমাধান ঃ ধরা যাক H এবং V হল যথাক্রমে অনুভূমিক এবং উল্লম্ব উপাংশ (বক্রতলের উপর লব্ধিঘাতের) শঙ্কুটির উচ্চতা = h



বৃত্তাকার তলের উপর ঘাতের পরিমাণ = $g\rho$. ক্ষেত্রফল × ভারকেন্দ্রের গভীরতা = $g\rho\pi h^2 \tan^2\alpha . h \sin\alpha$ ক্ষেত্রের (ভূমি) সাথে লম্বভাবে ক্রিয়া করে।

অসারিত তরলের ওজন, $W = \frac{1}{3} g\rho\pi r h^3 \tan^2\alpha$

এই চারটি বল সাম্যাবস্থায় থাকার জন্য ;

$$H = g\rho\pi h^3 \tan^2\alpha \sin\alpha . \cos\alpha$$

$$V = \frac{1}{3} g\rho\pi h^3 \tan^2\alpha - g\rho\pi h^3 \tan^2\alpha . \sin\alpha . \sin\alpha$$

$$= g\rho\pi h^3 \tan^2\alpha \left(\frac{1}{3} - \sin^2\alpha\right)$$

'R' যদি লব্ধিঘাত হয় যা অনুভূমিকের সাথে ϕ কোণে আনত আমরা পাই,—

$$R = \sqrt{H^2 + V^2} = g\rho\pi h^3 \tan^2\alpha \left\{\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \left(\frac{1}{3} - \sin^2\alpha\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} g\rho\pi h^3 \tan^2\alpha \sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}$$

$$\therefore \frac{R}{W} = \sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}$$

এবং, $$\tan\phi = \frac{V}{H} = \frac{g\rho\pi h^3 \tan^2\alpha\left(\frac{1}{3} - \sin^2\alpha\right)}{g\rho\pi h^3 \tan^2\alpha \sin\alpha \cos\alpha} = \frac{1 - 3\sin^2\alpha}{3\sin\alpha\cos\alpha}$$

সুতরাং R-এর সাথে শঙ্কুর অক্ষের $(\phi + \alpha)$ কোণে আনত হবে।

সুতরাং, $$\tan(\phi + \alpha) = \frac{\tan\phi + \tan\alpha}{1 - \tan\phi\tan\alpha}$$

$$= \frac{\frac{1 - 3\sin^2\alpha}{3\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \frac{1 - 3\sin^2\alpha}{3\sin\alpha\cos\alpha} . \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$= \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}$$

$$\therefore cot(\phi + \alpha) = 2 \tan\alpha$$

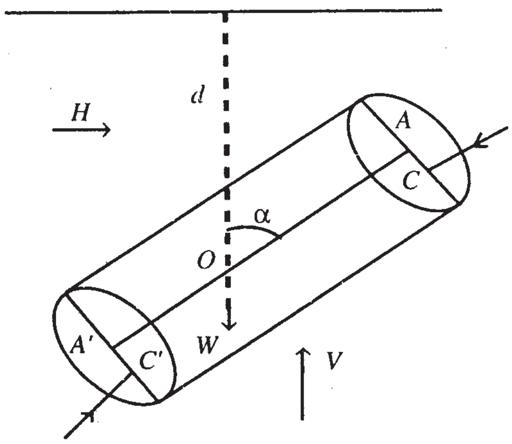
অথবা, $(\phi + \alpha) = cot^{-1}(2 \tan\alpha)$

3. একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙ সম্পূর্ণ নিমজ্জিত আছে। এর সমান্তরালতলদ্বয় অনুভূমিকের সাথে α কোণে নত আছে। চোঙাকৃতি ক্ষেত্রের উপর লব্ধিঘাত দেখান যে, $\sin\alpha\, x$ অপসারিত তরলের ওজন হবে এবং কোন রেখা বরাবর এই ঘাত ক্রিয়া করে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ বক্রতলের উপর ধরা যাক H ও V হল যথাক্রমে লব্ধিঘাতের অনুভূমিক এবং উল্লম্ব উপাংশ।

ধরি, h এবং a হল যথাক্রমে চোঙটির উচ্চতা এবং সমতল প্রান্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ। অক্ষ AA'-এর মধ্যবিন্দু 'O'-এর গভীরতা ধরা যাক 'd' উপরিপ্রান্ত ঘাত P হলে,

$P = g\rho$ ক্ষেত্রফল $\times$ ভারকেন্দ্রের গভীরতা



$$= g\rho\pi a^2\left(d - \frac{h}{2}\cos\alpha\right)$$

এটি এর তলের চাপকেন্দ্র C-এর উপর লম্বভাবে ক্রিয়া করে।

নিচের দিকে ঘাত P'-এর মান হবে,—

$P' = g\rho$. ক্ষেত্রফল $\times$ ভারকেন্দ্রের গভীরতা

$= g\rho\pi a^2\left(d + \frac{h}{2}\cos\alpha\right)$, এটি তলের চাপকেন্দ্র C'-এর উপর লম্বভাবে ক্রিয়া করে।

অপসারিত তরলের ওজন, $W = g\rho\pi a^2 h$ এই পাঁচটি বল সাম্যাবস্থায় আছে।

$\therefore\ H = (P' - P)\sin\alpha = g\rho\pi a^2 h \cos\alpha \sin\alpha$

$V = g\rho\pi a^2 h - (\rho' - \rho)\cos\alpha = g\rho\pi a^2 h \sin^2\alpha$

R যদি লব্ধি ঘাত হয়, যা অনুভূমিকের সাথে ϕ কোণে থাকে,

এবং $R^2 = \sqrt{H^2 + V^2} = g\rho\pi a^2 h \sin\alpha = W\sin\alpha$

এবং $\tan\phi = \frac{V}{H} = \tan\alpha$, বা, $\phi = \alpha$

এখন, $AC = \dfrac{a^2}{4\left(d - \frac{1}{2}d\cos\alpha\right)}\sin\alpha,$

এবং $\quad A'C' = \dfrac{a^2}{4\left(d + \frac{1}{2}h\cos\alpha\right)}\sin\alpha$

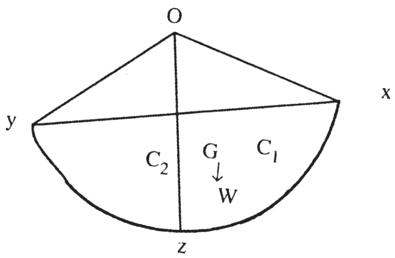
$\therefore \quad P.AC = P'.A'C'$

সুতরাং 'R'-এর বলরেখাটি 'O' বিন্দু দিয়ে যায় এবং অনুভূমিকের সাথে α কোণে থাকে।

4. একটি গোলকের অষ্টমাংশ তরলে নিমজ্জিত আছে যার একটি তল তরলের উপরিতলে আছে। প্রমাণ করুন যে বক্রতলের উপর লব্ধিঘাত $= \left(1+\dfrac{8}{\pi^2}\right)^{1/2} \times$ অষ্টমাংশ কর্তৃক অপসারিত তরলের ওজন।

এবং চাপকেন্দ্রের (বক্রতলের) গভীরতা $\dfrac{\pi a}{\sqrt{(\pi^2+8)}}$, যেখানে a হল গোলকের ব্যাসার্ধ।

সমাধান ঃ



ox, oy, oz হল অষ্টমাংশটির প্রান্তস্থ ব্যাসার্ধত্রয়। বৃত্তের xoy চতুর্থাংশ উপরিতলে আছে, যেখানে xoz এবং yoz চতুর্থাংশদ্বয় (অন্য দুটি বৃত্তাংশের) উল্লম্বভাবে আছে।

H = লব্ধি ঘাতের অনুভূমিক উপাংশ, V = লব্ধিঘাতের উল্লম্ব উপাংশ।

xoz এর উপর ঘাত $p_1 = \dfrac{1}{4}g\rho\pi a^2.\dfrac{4a}{3\pi} = \dfrac{1}{3}g\rho a^3$,

যা তলের সাথে লম্বভাবে ক্রিয়া করে, বা oy-এর সাথে সমান্তরাল, এবং চাপকেন্দ্রে C_1 (তলের) র উপর যার গভীরতা হল $\dfrac{3\pi}{16}a$।

yoz এর উপর ঘাত $P_2 = \dfrac{1}{4}g\rho\pi a^2.\dfrac{4a}{3\pi}g\rho a^3$

যা তলের সাথে লম্বভাবে ক্রিয়া করে, বা ox-এর সাথে সমান্তরাল, এবং চাপকেন্দ্র C_2 (তলের)-র উপর যার গভীরতা হল $\dfrac{3\pi}{16}a$

$\therefore \quad P_1$ এবং P_2 এর বলরেখাদ্বয় পরস্পর সমকোণে আছে।

অপসারিত তরলের ওজন $W = \dfrac{1}{8}g\rho.\dfrac{4}{3}\pi a^3 = \dfrac{1}{6}g\rho\pi a^3$ যা 'G' এর উপর ক্রিয়া করে (G $\equiv$ অষ্টমাংশটির চাপকেন্দ্র)

$\therefore\ H = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \frac{1}{3} g\rho a^3 \sqrt{2}$ এবং $V = \frac{1}{6} g\rho\pi a^3$

যেহেতু C_1, C_2, G-এর স্থানাঙ্ক ত্রয় যথাক্রমে হল—

$$\left(\frac{3}{8}a, o, \frac{3\pi}{16}a\right), \left(o, \frac{3}{8}a, \frac{3\pi}{16}a\right) \text{ এবং } \left(\frac{3}{8}a, \frac{3\pi}{8}a, \frac{3}{8}a\right)$$

সুতরাং, P_1, P_2 এবং W-এর বলরেখাত্রয় একটি বিন্দুতে মিলিত হয়। এই তিনটি বলকে একটি লব্ধিতে তাই প্রকাশ করা যায়—

R যদি লব্ধিঘাত হয় যা অনুভূমিকের সাথে ϕ কোণ উৎপন্ন করে,

$$R = \sqrt{H^2 + V^2} = \frac{1}{6} g\rho\pi a^3 \left(1 + \frac{8}{\pi^2}\right)^{1/2}$$

কিন্তু $W = \frac{1}{6} g\rho\pi a^3$,

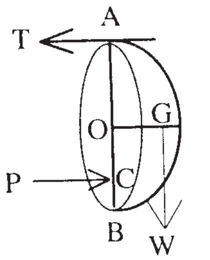
$$\therefore\ R = \left(1 + \frac{8}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} W,$$

এবং $\tan\phi = \frac{V}{H} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, সুতরাং $\sin\phi = \frac{\pi}{\sqrt{(\pi^2 + 8)}}$

সুতরাং বক্রতলের চাপকেন্দ্রের গভীরতা $= a\sin\phi = \frac{\pi}{\sqrt{(\pi^2 + 8)}}$

5. একটি জনবিহীন গোলককে উল্লম্ব তল দ্বারা দুভাগে ভাগ করা হল, যারা পরস্পর নিম্নতম বিন্দুতে পরস্পর আবদ্ধ এবং জল দ্বারা পুরোপুরি পরিপূর্ণ। প্রমাণ করুন, দুটি অর্ধের ঊর্ধতম বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে কোন সুতো বাঁধা থাকলে তাতে টানের (Tennsion) মান হবে গোলকটিতে যে পরিমাণ জল ধরে তার ওজনের $\frac{3}{8}$ ভাগ।

সমাধান ঃ সুতোর টান = T ধরা হল।



যে কোন একভাগে আছে এমন জলের ওজন $W = \frac{1}{2} gr\rho \frac{4}{3}\pi a^3$

যেখানে a হল গোলকের ব্যাসার্ধ।

(ii) $W = \frac{2}{3} gp\pi a^3$, যা '$G$' বিন্দু দিয়ে ক্রিয়া করে

(G = অর্ধগোলকের ভারকেন্দ্র) উল্লম্ব গোলাকৃতি তলের উপর ঘাত

$P = g\rho.\pi a^2.a = g\rho\pi a^3$ যা 'C' বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

'B'-এর সাপেক্ষে ভ্রামক গণনা করে পাই—

$T.AB = W.OG + P.CB$

$$\Rightarrow T.2a = \frac{2}{3} g\pi a^3 . \frac{3}{8} a + g\rho\pi a^3 \left(a - a^2/_{4a}\right)$$

$$= g\rho\pi a^3.a$$

$$\therefore \quad T = \frac{1}{2} g\rho\pi a^3$$

গোলক ধরে জলের ওজন = $g\rho.\frac{4}{3}\pi a^3$

$$\therefore \; T = \frac{3}{8} \cdot g\rho . \frac{4}{3} \pi a^3$$

14.8 অনুশীলনী ও উত্তরমালা

1. a ব্যাসার্ধযুক্ত একটি অর্ধগোলক ρ ঘনত্বযুক্ত তরলে সম্পূর্ণ নিমজ্জিত আছে। এর সমতলটি অনুভূমিকের সাথে θ কোণে আনত আছে এবং কেন্দ্রটির গভীরতা h বক্রতলের উপর লব্ধিঘাতের মান ও দিক নির্ণয় করুন।

[আভাস ঃ উদাহরণ 1-এর মত করে ভাবুন)

[**Ans.** $R = \pi a^2 w \left[\frac{4}{9} a^2 + \frac{4}{3} ah\cos\theta + h^2\right]^{1/2}$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2a + 3h\cos\theta}{3h\sin\theta}\right)$$

2. একটি অর্ধগোলক তরলে নিমজ্জিত আছে যার জমির ঊর্ধতম বিন্দুটি উপরিতলে আছে এবং ভূমিটি $\tan^{-1}2$ কোণে অনুভূমিকের সাথে আনত। বক্রতলের উপর লব্ধিঘাত নির্ণয় করুন।

[আভাস ঃ অনুশীলনী 1-এর উত্তর মান বসিয়ে করার চেষ্টা করুন]

[**Ans.** R = অপসারিত তরলের ওজনের দ্বিগুণ]

3. একটি ওজনবিহীন ফাঁকা শঙ্কু একটি তরল দ্বারা পূর্ণ করে তার ভূমির ধারের একটি কিছু দ্বারা ঝোলানো আছে। লব্ধি চাপ যদি উল্লম্বের সাথে ϕ কোণে আনত থাকে, তাহলে প্রমাণ করুন—

$$\cot\phi = \frac{28\cot\alpha + \cot^3\alpha}{48}$$

[আভাস ঃ উদাহরণ 2 এর মত করে ভাবুন]

4. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু জল দ্বারা পূর্ণ আছে। এটি আবদ্ধ করে এর একটি কারিকা রেখা (Generating line) বরাবর একে টেবিলে রাখা হল। প্রমাণ করুন লব্ধি উল্লম্ব এবং অনুভূমিক ঘাতের মান (বক্রতলের উপর) যথাক্রমে $W(1 + 3 \sin^2\alpha)$ এবং $3W \sin\alpha \cos\alpha$ যেখান W হল শঙ্কুকে যে পরিমাণ তরল ধরে তার ওজন।

[**আভাস ঃ** অনুশীলনী 3 এবং উদাহরণ 2 দ্রষ্টব্য]

5. একটি শঙ্কু তার অনুভূমিক অক্ষ বরাবর একটি তরলে ভাসছে যার ঘনত্ব শঙ্কুর ঘনত্বের দ্বিগুণ। এর ভূমির উপর চাপ বার করুন। প্রমাণ করুন θ যদি উল্লম্বের সাথে লব্ধি ঘাতের (বক্রতলে) আনতি কোণ হয় তাহলে $\tan\theta = \frac{4}{\pi}\tan\alpha$ (α হল অর্ধশীর্ষ কোণ)

[**আভাস ঃ** শঙ্কুর উপর অনুশীলনী ও উদাহরণমালা দ্রষ্টব্য] [**Ans.** $p = \frac{2}{3}a^3w$]

6. একটি $3''$ ব্যাসার্ধ যুক্ত অর্ধগোলকের বক্রতলের উপর লব্ধিঘাতের মান এবং দিক নির্ণয় করুন। দেওয়া আছে যে অর্ধগোলকটির ভূমি উল্লম্ব আছে এবং কেন্দ্র উপরিতলের থেকে $6''$ নীচে আছেও এর এক ঘন ইঞ্চির ওজন W গ্রাম।

[**আভাস ঃ** অর্ধগোলকের চাপকেন্দ্র ও তৎসংক্রান্ত উদাহরণমালা দ্রষ্টব্য]

[**Ans.** $R = 18\sqrt{10}\pi wgms.\ \phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$]

7. একটি জল দ্বারা পূর্ণ বন্ধ চোঙের উচ্চতা ও ব্যাস সমান। এটি একটি সুতোর সাহায্যে এর ভূমির প্রান্তদেশ থেকে ঝোলানো আছে। চোঙের ওজন নগণ্য হলে এর বক্রতলের উপর প্রযুক্ত ঘাতের অনুভূমির এবং উল্লম্ব উপাংশের মান বের করুন।

[**আভাস ঃ** ভূমির ব্যাস অনুভূমিকের সাথে 45^o কোণ করে অবস্থিত হবে। এবার উদাহরণে চোঙের উপর করা সমস্যা দেখুন]

[**Ans.** $R_x = E_y = \frac{W}{2}$ W = চোঙে যে পরিমাণ জল ধরে তার ওজন]

8. দুটি সমান ও ফাঁকা শঙ্কুর শীর্ষবিন্দুদ্বয় জুড়ে দিয়ে একটি ডবল ফানেল বানানো হল। এর সাধারণ অক্ষকে উল্লম্ব রেখে একটি ভূমির উপর সমতলে দাঁড় করানো হল। একটি তরলকে এই পাত্রটিতে ঢালা হল যাতে করে উপরের অক্ষটির ঠিক অর্ধেক অংশ নিমজ্জিত হয়। নীচের শঙ্কু ও টেবিলের মাঝে তরলটি যদি বন্ধ থাকে, প্রমাণ করুন একটি শঙ্কুর ঘাত ও একটির তরলের ওজনের অনুপাত 27 : 16 হবে।

[**আভাস ঃ** উল্লম্ব নিম্নমুখী ও ঊর্ধমুখী ঘাত বের করুন (প্রত্যেক শঙ্কুর জন্য) এবার এদের অন্তর করে লব্ধি ঊর্ধমুখী ঘাত বের করুন।

এবার একটির উপর ঘাত বের করুন ও বন্ধ তরলের ওজনের সাথে অনুপাত নিন]

9. অনুভূমিক একটি পাইপের মুখ একটি ব্যাসার্ধের (a) গোলক দ্বারা বন্ধ আছে। গোলকটি তার উর্ধতম বিন্দুতে সংযুক্ত আছে। পাইপটি ρ ঘনত্বযুক্ত তরল দ্বারা পরিপূর্ণ হলে প্রমাণ করুন সংযুক্তিটির স্বাপেক্ষে গোলকের উপর তরলের চাপের ভ্রামক $g\rho\pi a^4$.

[**আভাস ঃ** চোঙ সংক্রান্ত উদাহরণ ও প্রশ্নাবলী দ্রষ্টব্য। এছাড়াও ভ্রামক গণনার জন্য আবর্তগতিবিজ্ঞানের সাহায্য নিন]

10. অক্ষকে উল্লম্ব রেখে একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু জল দ্বারা পূর্ণ করা হল যার শীর্ষবিন্দু নিম্নমুখী। দুটি উল্লম্বতল দ্বারা 2θ কোণে পরস্পর আনত, যদি অক্ষ বরাবর থাকে তাহলে এই দুটি তলের মধ্যেকার জায়গার উপর লব্ধি ঘাতের দিক্ নির্ণয় করুন। যেখানে 2α হল শঙ্কুর শীর্ষ কোণ।

[**আভাস ঃ** শঙ্কুর সমস্যাবলী দ্রষ্টব্য এবং সমতল দুটি ও শঙ্কু দ্বারা আবদ্ধ তরলের আয়তন বের করে ভাবুন] [**Ans.** $\tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\theta\tan\alpha}\right)$]

14.9 সারাংশ

এই অধ্যায়ে বিভিন্ন প্রকারের বক্রতলের দ্বারা আবদ্ধ কঠিন বস্তুর উপর স্থিতাবস্থায় তরলের মধ্যে আংশিক বা পূর্ণবস্থায় নিমজ্জিত চাপ ও ঘাতের পরিমাণ নির্ণয় পদ্ধতি আলোচনা করা হয়েছে। মোট অনুভূমিক দিকে ঘাত এবং উল্লম্ব দিকে ঘাতের পরিমাণ নির্ণয় করে তার লব্ধি নির্ণয় করা হয়েছে। তবে সমস্যার সুবিধাজনক সমাধানের জন্য বস্তুটিকে সমতল দ্বারা ছেদন করে একদিকে সমতল দ্বারা আবদ্ধ বস্তু হিসাবে বিবেচনা করা হয়েছে। অধিকাংশ সমস্যা তরলপদার্থের সাম্যাবস্থায় প্রযুক্ত বলকে অভিকর্ষ জনিত বল ধরা হয়েছে। এছাড়াও বিভিন্ন আকারের আধানের মধ্যে অবস্থিত তরল পদার্থের আধানোপরি তলের যে কোন বিন্দুতে চাপ এবং সমগ্র আধানের বক্রতলের উপর ঘাতের পরিমাণ নির্ণয় করা হয়েছে। কয়েকটি উদাহরণ সহযোগে বিষয়টিকে আরো অর্থবহ করার চেষ্টা করা গেছে পরিশেষে সংকেত সহ কিছু অঙ্ক করার জন্য অনুশীলনী হিসাবে দেওয়া হয়েছে।

14.10 সহায়ক গ্রন্থাবলী

(1) M. Ray & H. S. Sharma. A Text Book of hydrostatics. (Premier Publishing Co. 1961)

(2) M. L. Khanna. Hydrostatics for B.A. & B.Sc. students (Jai Prakash Nath & Co. 1970).

একক 15 ❐ ঘূর্ণায়মান মাধ্যমের স্থিতি (Equilibrium of rotating fluid)

গঠন

15.1 প্রস্তাবনা

15.2 উদ্দেশ্য

15.3 বিষয় পরিচিতি

15.4 প্রযুক্ত বলের মাধ্যমে চাপের অবকলনাংক।

15.5 চাপ অপেক্ষক (pressure function)

15.6 সমচাপ, সমঘনত্ব এবং সমবিভবের তলসমূহের অবকল সমীকরণ ও তাৎপর্য।

15.7 ঘূর্ণায়মান মাধ্যমের স্থিতি

15.8 উদাহরণ

15.9 সংকেত সহ অনুশীলনী ও উত্তরমালা

15.10 সারাংশ

15.11 সহায়ক গ্রন্থ

15.1 প্রস্তাবনা

গত কয়েকটি অধ্যায়ে স্থিতিশীল অবস্থায় তরল পদার্থের মধ্যে নিমজ্জিত যে কোন ধরনের তলের উপর তরল পদার্থের চাপ এবং ঘাত বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। তাছাড়াও তরল পদার্থের আধারের উপরে যে সামগ্রিক চাপ তাও নির্ণয় করার পদ্ধতি দেখানো হয়েছে। কিন্তু একথা স্বীকার্য যে অধিকাংশ ক্ষেত্রে মাধ্যাকর্ষণ বলকেই প্রযুক্ত বল হিসাবে ধরা হয়েছে। তাই এইসব ধর্ম সাধারণীকরণের প্রয়োজন আছে। অর্থাৎ যে কোন বলগোষ্ঠী প্রয়োগ করার ফলে তরলপদার্থের সাম্যাবস্থায় চাপের বিভিন্ন পর্যায় এবং সেই হিসাবে বিভব বা ঘনত্বের স্তরের যে বিন্যাস তার বিস্তৃত আলোচনার প্রয়োজন আছে। এছাড়াও সমকৌণিক বেগে ঘূর্ণায়মান একটি আধারে স্থিত তরলপদার্থের বিশেষ একটি ধর্ম লক্ষ্য করা যায়। এই বিষয়ে যথেষ্ট আলোচনার অবকাশ আছে।

15.2 উদ্দেশ্য

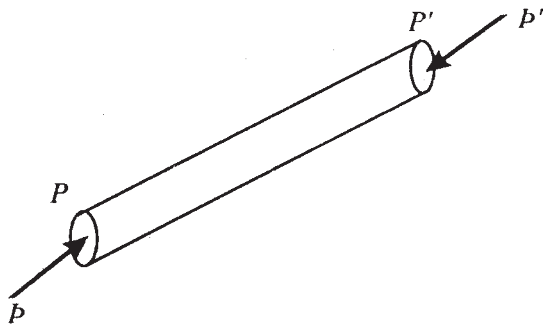
এই অধ্যায়ে সাধারণভাবে বলগোষ্ঠীর প্রভাবে স্থিতিশীল অবস্থায় তরল পদার্থের বিভিন্ন স্তরে চাপ এর মান নির্ণয় করা হয়েছে। এর ফলে উপস্থিতি বিদ্যায় সাধারণভাবে বল প্রয়োগের ফলে তরলের বিভিন্ন পর্য্যায়ে চাপের মান এবং স্তরভেদে চাপের তারতম্য বিষয়ে সম্যক ধারণা থাকা অবশ্যই প্রয়োজন। এছাড়া ঘূর্ণায়মান তরলের আপেক্ষিক স্থিতি বিষয়ে ধারণা থাকা কাম্য। এই অধ্যায়ে এসব বিষয়ে বিশদ আলোচনা করা হয়েছে।

15.3 বিষয় পরিচিতি

এই অধ্যায়ে সাধারণ বল প্রয়োগের তরল পদার্থের স্থিতাবস্থার থাকার শর্তাদি নিয়ে বিস্তারিত আলোচনা হয়েছে। এছাড়া কোন বিন্দুতে চাপের কারণ বিশ্লেষণ করে চাপ অপেক্ষককে সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে। স্থিতিশীলতার শর্তাবলী ও অন্তত তরলদের চাপ বিন্যাস নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। বিশেষ করে সমবেগে ঘূর্ণায়মান তরলের চাপ নির্ণয়ের সূত্র আলোচনা করা হয়েছে। এছাড়াও সমচাপের তলসমূহ এবং সম ঘনত্বের বা সমবিভবের ক্ষেত্র নিয়েও আলোচনা করা হয়েছে। কয়েকটি উদাহরণ সহযোগে বিষয়টিকে আরো ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

15.4 প্রযুক্ত বলের মাধ্যমে চাপের অবকলনাঙ্ক

বাহ্যিক বলসমূহের প্রভাবে ধরা যাক একটি প্রবাহী সাম্যাবস্থায় আছে। কোন নির্দিষ্ট দিকে PP' একটি দৈর্ঘ্য এবং $PP' = \delta S$ (খুব ছোট)



ধরা যাক P এবং P' বিন্দুতে যথাক্রমে চাপ হল Þ এবং Þ′

যদি, $\quad$ Þ $= f(s)$ হয়

তাহলে, $Ƥ' = f(s + \delta s)$

$$\rho(s) + \rho'(s)\delta s + \rho''(s)\frac{(\delta s)^2}{L^2} \ \ldots.$$

$\cong \quad f(s) + f'(s)\delta s$ [$\because$ $(\delta s)^2$ এবং উচ্চতর ঘাতসমূহকে অতিক্ষুদ্রতার দরুন উপেক্ষা করা যায়।]

সুতরাং, $Ƥ' = \rho + \frac{\delta p}{\delta s}\delta\delta$

এখন ধরি চোঙটির প্রস্থচ্ছেদ = α, প্রবাহীটির গড় ঘনত্ব = ρ. $\overrightarrow{PP'}$ দিকে বাহ্যিক বলের একক ভরের উপর ক্রিয়ার মান F।

সুতরাং, PP' দিকে বাহ্যিক বলের মান = $\rho\alpha F\ ds$

সাম্যবস্থার দরুন—

$$\left(\rho + \frac{\delta\rho}{\delta S}\delta S\right)\alpha - \rho\alpha = \rho\alpha F\delta S$$

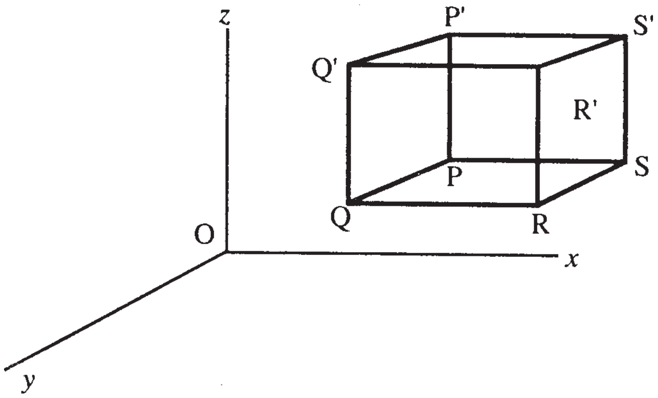
অথবা, $\frac{\delta P}{\delta S} = \rho F$

$\delta S \to o$ হবে p বিন্দুতে ঘনত্ব, F হবে বাহ্যিক বলের $\overrightarrow{PP'}$ দিকের উপাংশ।

সুতরাং, লিমিট নিয়ে পাই, $\frac{\delta\rho}{\delta S} = \rho F$

15.5 চাপ অপেক্ষক (Pressure function)

সাম্যাবস্থায় থাকা একটি প্রবাহী পদার্থের মধ্যে ধরা যাক P একটি বিন্দু যার স্থানাঙ্ক হল (x, y, z). স্থানাঙ্কতলের সাথে সমান্তরাল করে এবং P একটি শীর্ষবিন্দু করে একটি আয়তাকার আয়তন আঁকা হল (চিত্র দ্রষ্টব্য)



PS, PQ এবং PP' ধারগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে δx, δy, δz দেওয়া আছে এমন বল এবং এর উপর প্রযুক্ত চাপের প্রভাবে আয়তাকার আয়তনটি স্থির সাম্য আছে।

প্রতি একক প্রবাহীটির ভরের উপর প্রযুক্ত বলের স্থানাঙ্ক অক্ষত্রয়ের সাথে সমান্তরাল উপাংশগুলি হল যথাক্রমে X, Y, Z এবং ρ হল আয়তাকারটির ভিতর আবদ্ধ প্রবাহীটির (fluid) গড় ঘনত্ব।

$PP'Q'Q$ তলের উপর চাপ $Þ = \rho f(x, y, z)$ [ধরা হল]

তাহলে $SS'R'R$-এর উপর চাপ হবে

$$\rho(x+\delta x, y, z) = f(x, y, z) + \frac{\delta f}{\delta x}\delta x + \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\frac{(\delta x)^2}{L^2} + \ldots\ldots$$

$$= f(x, y, z) + \frac{\delta f}{\delta x}\delta x \qquad [(\delta x)^2\text{....কে উপেক্ষা করে পাই}]$$

$$= \rho + \frac{\delta p}{\delta x}\delta x$$

X অক্ষের সাথে বলরেখাসমূহ গণনা করে, সাম্যাবস্থার জন্য পাই—

$$P\delta y\delta z - \left(\rho + \frac{\delta P}{\delta x}\delta x\right)\delta y\delta z + \rho X\delta x\delta y\delta z = 0$$

অথবা, $\dfrac{\delta P}{\delta x} = \rho X$

একইভাবে পাই,

$$\frac{\delta Þ}{\delta y} = \rho Y, \text{ এবং } \frac{\delta \rho}{\delta z} = \rho Z$$

কিন্তু $dÞ = \dfrac{\delta Þ}{\delta x}dx + \dfrac{\delta Þ}{\delta y}dy + \dfrac{\delta Þ}{\delta z}dz:$

$\therefore \quad dÞ = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$

সাম্যবস্থার জন্য উপরিউক্ত সমীকরণের ডানপক্ষটি একটি সম্পূর্ণ অবকল হবে।

যেহেতু, $\dfrac{\delta Þ}{\delta x} = \rho X,\ \dfrac{\delta Þ}{\delta y} = \rho Y,\ \dfrac{\delta Þ}{\delta z} = PZ$

$$\therefore \frac{\delta}{\delta y}(PX) = \frac{\delta^2 P}{\delta y\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}(PY)$$

এবং একইরকম দুটি সমীকরণ পাব।

এই সমীকরণ থেকে পাই—

$$\rho\frac{\delta X}{\delta y}+\frac{X\delta\rho}{\delta y}=\rho\frac{\delta y}{\delta x}+Y\frac{\delta P}{\delta x}$$

অথবা, $$\rho\left(\frac{\delta X}{\delta y}-\frac{\delta X}{\delta x}\right)=Y\frac{\delta\rho}{\delta x}-X\frac{\delta\rho}{\delta y}$$

একইভাবে অন্য দুটি সম্পর্ক থেকে পাই—

$$\rho\left(\frac{\delta Y}{\delta z}-\frac{\delta Z}{\delta y}\right)=Z\frac{\delta\rho}{\delta y}-Y\frac{\delta\rho}{\delta z}$$

এবং $$\rho\left(\frac{\delta Z}{\delta x}-\frac{\delta X}{\delta z}\right)=X\frac{\delta\rho}{\delta z}-Z\frac{\delta\rho}{\delta x}$$

শেষ তিনটি সমীকরণকে যথাক্রমে Z, X, Y দ্বারা গুণ করে তারপর পরস্পর যোগ করে পাই—

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)+Z\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=0$$

একটি হল সেই সম্পর্ক যাকে সাম্যাবস্থায় দরুন X, Y, Z সিদ্ধ করবে।

15.6 সমচাপ, সমঘনত্ব এবং সমবিভবের তলসমূহের অবকল সমীকরণেরও তাৎপর্য

সমস্ত জায়গায় যেখানে তরলের সাম্যাবস্থা সম্ভব, আমরা সমাকলন করে পাই

$$Þ = \phi\,(x, y, z)$$

যদি Þ = ধ্রুবক হয় তাহলে, $\phi(x, y, z) = C$ (ধ্রুবকরাশি ধরা হল)

এই সমীকরণটি সেই তলের যেখানে সমবিন্দুতে চাপের মান ধ্রুবক হবে। 'C'-এর বিভিন্ন মানের জন্য আমরা একটি তলের শ্রেণী পাই যাকে সমচাপের তল বলে।

বিশেষ জায়গায়, যদি $C = 0$ হয়, তাহলে,

$$\phi(x, y, z) = 0$$

(x, y, z) বিন্দুতে নর্ম্যালের দিক কোসাইনের সাথে সমানুপাতী, $\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}$

রাশিগুলি $\phi(x, y, z) = Þ$ এর জন্য $\frac{\partial Þ}{\partial x}, \frac{\partial Þ}{\partial y}, \frac{\partial Þ}{\partial z}$ -এর সাথে সমান হবে।

বা, PX, PY, PZ-এর সাথে সমান হবে।

সুতরাং যথাক্রমে X, Y, Z-এর সাথে সমানুপাতী হবে।

$\therefore$ সমচাপের তলকে বলরেখাসমূহ লম্বভাবে ছেদ করে।

এখন $(Xdx + Ydy + Zdz)$ একক ভরের উপর বাহ্যিক বল প্রভাবে কার্যের পরিমাপ দেয়, সেখানে সরণ হল (x, y, z) থেকে খুব সামান্য পরিমাণ। এই কার্যকে সংরক্ষী বলক্ষেত্রের জন্য ক্ষয়কে $-dv$ দিয়ে চিহ্নিত করলে ; যেখানে V হল বিভব অপেক্ষক (একক ভরের জন্য) ; আমরা পাই, $dÞ = -\rho dv$

যেহেতু $dÞ$ হল পরিপূর্ণ অবকল, সুতরাং ρdv ও একটি পরিপূর্ণ অবকল (exact differential) হবে।

সুতরাং হয় ρ = ধ্রুবক হবে, বা ρ হবে V-এর একটি অপেক্ষক এবং সেক্ষেত্রে P ও V-এর অপেক্ষক হবে। সুতরাং, এই তিনটির মধ্যে একটি অন্ততঃ ধ্রুবক হলে, বাকী দুটিও তাই হবে।

সুতরাং সংরক্ষী বলক্ষেত্রের (Conservative field of forces) জন্য সমচাপের তল, সমঘনত্বের তল এবং সমবিভবের তল পরস্পর অভিন্ন হবে।

এখন সমঘনত্ব এবং সমচাপের অবকল সমীকরণটি নির্ণয় করতে হবে।

যেহেতু ρ = ধ্রুবক—

$$d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial x}dx + \frac{\partial\rho}{\partial y}dy + \frac{\partial\rho}{\partial z}\partial z = 0$$

এছাড়াও, $Þ$ = ধ্রুবক, $\quad \therefore\ dp = 0$

অথবা, $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ যেহেতু P = ধ্রুবক

বজ্রগুণন প্রক্রিয়ার সাহায্যে সমাধান করে পাই—

$$\frac{dx}{Z\frac{\partial\rho}{\partial y} - Y\frac{\partial\rho}{\partial z}} = \frac{dy}{X\frac{\partial\rho}{\partial z} - Z\frac{\partial\rho}{\partial x}} = \frac{dz}{Y\frac{\partial\rho}{\partial x} - X\frac{\partial\rho}{\partial y}}$$

আগের অধ্যায় থেকে পাই—

$$\frac{dx}{\rho\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial z}\right)}=\frac{dy}{\rho\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)}=\frac{dz}{\rho\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)}$$

এখন সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় শর্তটি নিম্নরূপ—

$$\frac{dx}{\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial z}}=\frac{dy}{\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}}=\frac{dz}{\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}}$$

এক্ষণে যদি P বিন্দুতে তরলের ত্বরণ f হয় তাহলে অক্ষত্রয় বরাবর তাদের উপাংশত্রয় হবে fx, fy এবং fz বাহ্যিক লব্ধি বল R এবং T যদি তরল কর্তৃক প্রযুক্ত ঘাত হয়, তাহলে R এবং T পরস্পরকে সাম্যাবস্থায় রাখবে। এখন যদি তরলটি গতিশীল হয় এবং প্রত্যেক ক্ষুদ্র অংশের ভর m এবং ত্বরণ f হয়, তাহলে কার্যকরী বল mf হবে সবরকম বলের লব্ধির সাথে সমান।

এক্ষণে চাপ অপেক্ষক থেকে পাই—

$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$, তরলটি গতিশীল হবার জন্য পাই,

$dp = \rho[(X - fx)dx + (Y - fy)dy + (Z - fz)dz\}$

শিষ্ট তরলের (perfect fluid) ক্ষেত্রে যদি হঠাৎ করে গতির পরিবর্তন হয়, তাহলে কোন বিন্দুতে সমঘাতবলের তল সেই বিন্দুতে গতির পরিবর্তনের দিকের সাথে লম্বভাবে থাকবে। কোন বিন্দুতে v যদি গতির পরিবর্তন সূচিত করে। (ধরা যাক x-অক্ষবরাবর) এবং ρ যদি শিষ্ট তলটির ঘনত্ব হয়, তাহলে—

$$\frac{\partial Þ}{\partial x}= Pv$$

যেখানে Þ হল সেই বিন্দুতে ঘাতবল।

এখন তরলটি যদি অভিকর্ষের প্রভাবে সাম্যাবস্থায় থাকে, তাহলে XY তলকে অনুভূমিক ধরে পাই—

$X = O$, $Y = O$, $Z = -g$, Z-অক্ষ হল উপরদিকে ধনাত্মক।

$\therefore\ dÞ = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$

$= -\rho g dz$

ρ যদি ধ্রুবক হয়, তরলটি সমসত্ত্ব,

সমাকলন করে পাই, Þ $= C - g\rho z$

সমুদ্রপৃষ্ঠে (z = 0) যদি বায়ুমণ্ডলীয় চাপ Π হয়, তাহলে $C = \Pi$

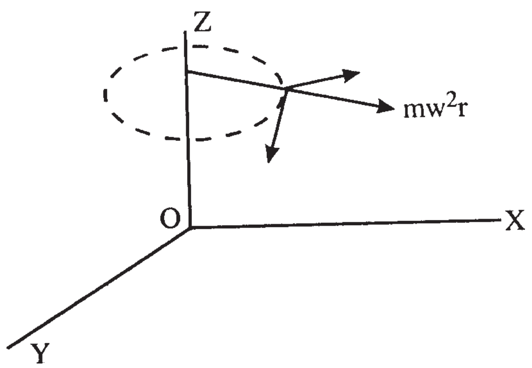
সুতরাং, $Þ = \Pi - g\rho z$

যদি বায়ুমণ্ডলকে ধর্তব্যের মধ্যে না আনা হয়, তাহলে $Þ = -gfz$ সমচাপের তলে $Þ$ = ধ্রুবক রাশি, সুতরাং Z = ধ্রুবক রাশি হবে। অর্থাৎ xy তলের সাথে একটি সমান্তরাল তল আমরা পাব।

সুতরাং অভিকর্ষের প্রভাবে সাম্যাবস্থায় থাকা কোন তরলের মুক্ততল হল একটি অনুভূমিক তল। একই রকম হবে সমচাপ ও সমঘনত্বের তলের বেলাতেও। এ থেকে বলা যায় যখন অভিকর্ষের প্রভাবে দুটি ভিন্ন তরল পরস্পর না মিশে স্থির থাকে, তখন তাদের বিভেদ তল অনুভূমিক হয়।

15.7 ঘূর্ণায়মান মাধ্যমে স্থিতি

ধরা যাক কিছু পরিমাণ প্রবাহী সমভাবে ঘূর্ণায়মান এবং তাদের কোন কণার পরস্পর আপেক্ষিক সরণ নেই (rigid)। ঘূর্ণনটি যদি একটি স্থির অক্ষের স্বাপেক্ষে হয়, তাহলে কোন বিন্দুতে চাপ এবং সমচাপের তল সম্বন্ধে চাপ অপেক্ষক আমাদের একটা ধারণা দেবে।



এখানে চিত্রের মত 'Z'-কে ঘূর্ণন অক্ষ ধরা হল। r দূরত্বে প্রবাহীর ভর m হলে, প্রবাহীর চাপ mw^2r-এর সাথে সমান হবে। ω হল ঘূর্ণন অক্ষের দিকে কৌণিক বেগ। স্থির সাম্যের জন্য প্রবাহীর চাপ, বাহ্যিক প্রযুক্ত বল এবং $m\omega^2 r$ সাম্যাবস্থায় থাকে।

$\therefore$ সাম্যাবস্থায় সাধারণ সূত্রটি হবে—

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz + w^2 r\cos\theta dx + w^2 r\sin\theta\, dy)$$

যদি 'm' কণার স্থানাঙ্ক (x, y, z) হয়, তাহলে $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$;

$$\therefore \quad dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz + w^2 xdx + w^2 ydy)$$

যদি অভিকর্ষই একমাত্র প্রযুক্ত বল হয়, তাহলে—

$dp = \rho(w^2xdx + w^2ydy - gdz) = \rho(w^2rdr - gdz)$

যদি প্রবাহীটি সমসত্ত্ব হয়, ρ = ধ্রুবক হবে, সমাকলনের সাহায্যে পাই—

$$P = C + \rho \left[\frac{1}{2}w^2(x^2 + y^2) - gz\right]$$

$$= C + \rho\left(\frac{1}{2}w^2r^2 - gz\right)$$

মুক্ততলের শীর্ষবিন্দুতে মূলবিন্দু ধরলে $p = \Pi$ যখন $r = 0, z = 0$

সুতরাং $C = \Pi$ এবং $Þ = \Pi + \rho\left(\frac{1}{2}w^2r^2 - gz\right)$

সুতরাং সমচাপের তলটি হল—

$$r^2 = \frac{2g}{w^2}Z + \text{ ধ্রুবকরাশি}$$

অর্থাৎ, এরা হল ঘূর্ণনের অধিবৃত্তক যাদের একই নাভিলম্ব $2g/w^2$

(Paraboloids of revolution having the same latus rectum $2g/w^2$)

যদি অসমসত্ত্ব প্রবাহী হয়, তাহলে ρ = চলরাশি, এখন dP হল পরিপূর্ণ অবকল, সুতরাং ρ হবে $\frac{1}{2}w^2r^2 - gz$-এর একটি অপেক্ষক। সুতরাং ঘূর্ণনের সেই একই অধিবৃত্তক সমঘনত্বের তলও বটে।

15.8 উদাহরণমালা

(1) Z গভীরতায় পৃথিবীর আকর্ষণ $a + bz$ হলে, প্রমাণ করুন যে সেই গভীরতায় জলের চাপ হবে $\rho\left(az + \frac{1}{2}bz^2\right)$, ρ = জলের ঘনত্ব।

সমাধান ঃ $dp = \rho(a + bz)dz$

$$\therefore\ p = \rho\left(az + \frac{1}{2}bz^2\right) + C \qquad [C = \text{সমাকলন ধ্রুবক}]$$

ধরি, $p = o$ যখন $z = o$ তলে, সুতরাং $c = o$,

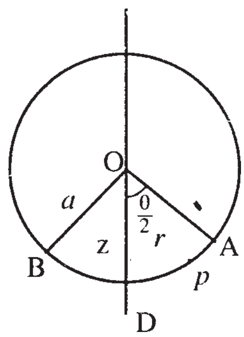
অতএব, $p = \rho\left(az + \frac{1}{2}bz^2\right)$ (প্রমাণিত)

2. a ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্তাকার টিউবে তরল পদার্থ আছে। উল্লম্বে তলে অবস্থানরত এই টিউবটি উল্লম্ব অক্ষকে ধরে ঘুরতে পারে। যদি তরলটি বৃত্তের কেন্দ্রে θ কোণ উৎপন্ন করে, তাহলে সর্বনিম্ন যে কৌণিক গতিবেগের জন্য তরলটি দুভাগে বিভক্ত হবে তার মান $\sqrt{(g/a)}$, $\sec\left(\frac{\theta}{4}\right)$ হবে।

সমাধান ঃ OD-কে Z অক্ষ ধরা হল (নিম্নমুখী)। কোন বিন্দু (P)-তে চাপ হল।

$dp = P(\omega^2 rdr + gdz)$

সমাকলন করে পাই, $p = C + P\left(\frac{1}{2}\omega^2 r^2 + gz\right)$.



প্রতিসাম্যের জন্য তরলটি টিউবের দুদিকেই সমানভাবে উঠবে, w যদি কৌণিক বেগ হয়, যখন তরলটি ঠিক দুভাগে বিভক্ত হয়, তখন নিম্নতমবিন্দু D-তে চাপ শূন্য হবে। অর্থাৎ D-তে, $p = o$ যখন $z = a$ এবং $r = 0$

$\therefore\ 0 = C + \rho ga$

পুনরায়, A বিন্দুতে, $p = o$ হল মুক্ত তল,

$$Z = a\cos\frac{\theta}{2},\ \text{এবং}\ r = a\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ O = C + P\left(\frac{1}{2}\omega^2 a^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + ga\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

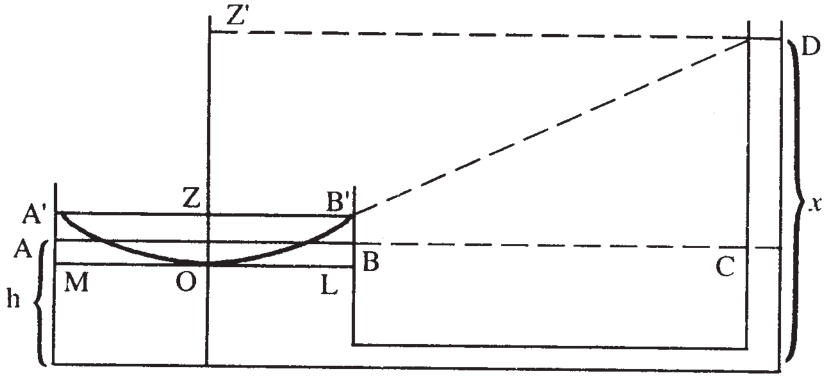
সুতরাং, $\frac{1}{2}\omega^2 a^2 \sin^2\frac{\theta}{2} = ga - ga\cos\frac{\theta}{2} = ga(1-\cos\frac{\theta}{2}) = 2ga\sin^2\frac{\theta}{4}$

$$\therefore\ w^2 = \frac{4g\sin^2\frac{\theta}{4}}{a.4\sin^2\frac{\theta}{4}\cos^2\frac{\theta}{4}} = {}^{g}\!/_{a}\sec^2\frac{\theta}{4} \Rightarrow w = \sqrt{\frac{g}{a}}.\sec\frac{\theta}{4}\ \text{(প্রমাণিত)}$$

3. a ব্যাসার্ধযুক্ত একটি চোঙ জলপূর্ণ অবস্থায় h গভীরতায় নিমজ্জিত আছে। একটি সূক্ষ্ম উল্লম্ব টিউব চোঙের অক্ষ থেকে $d(>a)$ দূরত্বে থেকে চোঙের নীচ অবধি স্পর্শ করে। চোঙের অক্ষ স্বাপেক্ষে ছিদ্রটিকে সমভাবে ঘুরতে দিলে, দেখান যে জলতলকে X উচ্চতায় তুলতে হলে (চোঙের নিচের তুলনায়) যে কৌণিক বেগ w দরকার তার মান হবে—

$$w^2\left(d - \frac{1}{2}a^2\right) = 2g(x - h)$$

সমাধান ঃ ABC-কে অনুভূমিক রাখার জন্য, প্রথমতঃ চোঙের এবং টিউবের জলতল সমান আছে। ঘূর্ণন শুরু হলে মুক্ততলটি হবে ঘূর্ণনের স্বাপেক্ষে $A'OB'$ অধিবৃত্তক (D চোঙেও অধিবৃত্তকের বৃদ্ধিজনিত কারণে)



ধরা যাক O হল অধিবৃত্তক (Paraboloid)-এর শীর্ষবিন্দু।

তাহলে $= \dfrac{B'Z^2}{OZ} =$ নাভিলম্ব $\dfrac{2g}{w^2}$

বা, $OZ = \dfrac{a^2w^2}{2g}$

এখন অধিবৃত্তক $A'OB'$-এর আয়তন $= \dfrac{1}{2} A'MLB'$ চোঙের আয়তন

$= AMLB$ চোঙের আয়তন।

চোঙের ভূমির উপর অধিবৃত্তকের শীর্ষবিন্দুর উচ্চতা C হলে,

$$\frac{1}{2}\pi a^2 OZ = \pi a^2 (h - C)$$

$$\therefore \quad OZ = 2(h - C)$$

সুতরাং, $\dfrac{a^2w^2}{2g} = 2(h - C)$

পুনরায়, যেহেতু 'D' অধিবৃত্তকের উপর একটি বিন্দু

$$\therefore \frac{DZ^2}{OZ'} = \text{নাভিলম্ব } \frac{2g}{w^2}$$

অথবা, $\dfrac{d^2}{x-C} = \dfrac{2g}{w^2}$

$$\Rightarrow \frac{d^2w^2}{g} = 2(x-C)$$

সুতরাং, $\dfrac{d^2w^2}{g} - \dfrac{a^2w^2}{2g} = 2(x - C) - 2(h - C) = 2(x - h)$,

বা, $w^2\left(d^2 - \frac{1}{2}a^2\right) = 2g(x-h)$ (প্রমাণিত)।

4. দূরত্বের সাথে পরিবর্তনশীল এমন বলের কোন একটি স্থির বিন্দুতে প্রয়োগের ফলে (তলের) কিছু পরিমাণ তরল ওই নির্দিষ্ট তলের উপর স্থির আছে। মুক্ত তলটি অর্ধগোলকাকার হলে তলটির উপর ঘাত বের করুন।

সমাধান ঃ

চাপ অপেক্ষকের সাহায্যে পাই—

$$dp = \rho\{-\mu x dx - \mu y dy - \mu m z dz\}$$

সমাকলন করে পাই,—

$$P = C - \mu p(x^2 + y^2 + z^2) = C - \frac{1}{2}\mu p r^2$$

r হল মূলবিন্দু থেকে (x, y, z) বিন্দুর দূরত্ব।

$\frac{2}{3}\pi a^3$ যদি আয়তন হয়, মুক্ত তলটি হবে অর্ধগোলক যার ব্যাসার্ধ a.

মুক্ততলে $p = o$ এবং $r = a$, $\quad \therefore O = C - \frac{1}{2}\mu p r^2$

সুতরাং, $P = \frac{1}{2}\mu p(a^2 - r^2)$

তরলের সাথে সংস্পর্শে আছে যে তলটি তা হল a ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্ত।

$\therefore$ এর উপর প্রযুক্ত ঘাত $= \int_o^{2\pi}\int_o^{a} p r d\theta dr$

$$= \frac{1}{2}\mu\rho\int_o^{2\pi}\int_o^{a}(a^2 - r^2) r d\theta dr$$

$$= \frac{1}{4}\pi\mu\rho a^4 \text{ (উত্তর)}$$

5. (x, y, z) বিন্দুতে ক্ষুদ্র অংশের উপর প্রযুক্ত বলসমূহের অক্ষত্রয় বরাবর উপাংশগুলি যদি যথাক্রমে $y^2 + 2\lambda yz + z^2 + z^2$, $z^2 + 2\mu zx + x^2$, $x^2 + 2vxy + y^2$-এর সাথে সমানুপাতী হয়, তাহলে দেখান যে যদি সাম্যাবস্থা সম্ভব হয় তাহলে $2\lambda = 2\mu = 2v = 1$

সমাধান ঃ

এখানে, $X = y^2 + 2\lambda yz + z^2$

$Y = z^2 + 2\mu zx + x^2$

$Z = x^2 + 2vxy + y^2$

এখন, সাম্যাবস্থায় জন্য—

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0$$

বা, $(y^2 + 2\lambda yz + z^2)\ [(2z + 2\mu x) - (2vx + 2y)]$

$+ (z^2 + 2\mu zx + x^2)\ [(2x + 2vy) - (2\lambda y + 2z)]$

$+ (x^2 + 2vxy + y^2)\ [(2y + 2\lambda z) - (2\mu z - 2x)] = O$

বা, $x^2y\ (1 - v - \lambda) + x^2z(\mu + \lambda - 1) + y^2z(1 - \lambda - \mu)$

$+ y^2x(v + \mu - 1) + z^2x\ (1 - \mu - v) + z^2y$

$(\lambda + v - 1) = O$

$\therefore\ v + \lambda = 1, \quad \mu + \lambda = 1, \quad v + \mu = 1$

অথবা, $\lambda = \mu = v = \dfrac{1}{2}$

সুতরাং, $2\lambda = 2\mu = 2v = 1$ (প্রমাণিত)

15.9 সংকেতসহ অনুশীলনী ও উত্তরমালা

1. a ব্যাসার্ধযুক্ত সমপ্রস্থচ্ছেদযুক্ত অর্ধবৃত্তাকার বদ্ধ টিউব সমান আয়তনের ρ এবং σ ঘনত্বযুক্ত দুটি তরল দ্বারা পরিপূর্ণ আছে। তরলদ্বয় পরস্পর না মিশে ω কৌণিক বেগে একটি উল্লম্ব ব্যাসার্ধকে, যা রৈখিক প্রতিসাম্যের সাথে α কোণে নত, অবলম্বন করে ঘোরে। প্রমাণ করুন দুই প্রান্তে চাপ সমান হবে যদি

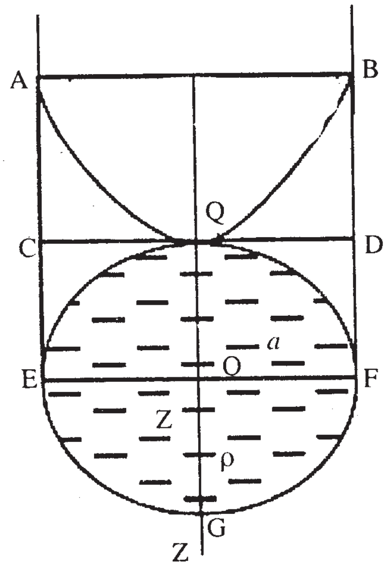
$$\frac{\omega^2 a}{2g}(\sigma - \rho) = \frac{\sigma}{\cos\alpha + \sin\alpha} - \frac{\rho}{\cos\alpha - \sin\alpha} \text{ হয়।}$$

σ ঘনত্বযুক্ত তরলটি নীচে আছে এবং টিউবের উত্তল দিকটি নীচের দিকে আনত।

[আভাস ঃ উদাহরণ 2-এর মত করে ভাবুন, এক্ষেত্রে বৃত্তের জায়গায় অর্ধবৃত্ত হবে ...ইত্যাদি]

2. a ব্যাসার্ধযুক্ত একটি গোলাকার শেলে ρ ঘনত্বযুক্ত একটি তরল দ্বারা পরিপূর্ণ আছে। উল্লম্ব ব্যাসের স্বাপেক্ষে ছিদ্রটি ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে। (i) শেলের কোন স্তরে চাপ সর্বোচ্চ এবং (ii) উপরের ও নীচের অর্ধগোলকের উপর প্রযুক্ত লব্ধি ঘাত বের করুন।

আভাস ঃ



[উপরের ছবির সাহায্য নিন এবং $dp = P(w^2rdr + gdz)$ সূত্র প্রযোজ্য]

[**Ans.** (i) কেন্দ্রের নীচে $Z = g/\omega^2$ স্তরে। (ii) নীচের অর্ধগোলকে প্রযুক্ত ঘাত

$= \frac{5}{3} g\rho\pi a^3 + \frac{1}{4}\rho\pi a^4\omega^2$ এবং উপরের অর্ধগোলকে প্রযুক্ত ঘাত $= \frac{1}{3} g\rho\pi a^3 + \frac{1}{4}\rho\pi a^4\omega^2$

(3) (x, y, z) বিন্দুতে যদি একক ভরের উপর প্রযুক্ত বলের অক্ষত্রয় বরাবর উপাংশ যথাক্রমে $y(a - z)$, $x(a - z)$, xy হয়, তাহলে সমচাপের তল হবে পরাবৃত্তাকার অধিবৃত্তক এবং সমচাপের ও সমঘনত্বের বক্ররেখা হবে সমপরাবৃত্ত।

[**আভাস ঃ** $X = y(a - z)$, $Y = x(a - z)$, $Z = xy$ এবার এই এককের বিভিন্ন সূত্রাবলী প্রয়োগ করুন]

(4) $X = \mu(y^2 + yz + z^2)$, $Y = \mu(z^2 + zx + x^2)$ এবং

$Z = \mu(x^2 + xy + y^2)$ যদি বলসমূহ হয়,

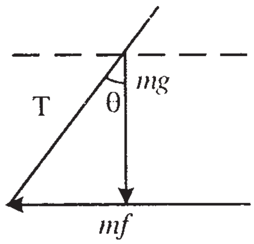
তাহলে তারা একটি তরলের ভরকে স্থির রাখবে, যদি

ঘনত্ব $\alpha \frac{1}{(\text{দূরত্ব})^2}$, $x + y + z = 0$ তল থেকে এবং সমচাপের এবং সমঘনত্বের বক্ররেখাগুলি বৃত্তাকার হবে।

(5) একটি খোলা ট্যাঙ্কের উল্লম্বচ্ছেদ যদি $ABCD$ হয় বা খুব ভারী সমসত্ত্ব তরল ধারণ করে আছে, এটি যদি অনুভূমিক দিকে সমত্বরণ f-এ গতিশীল হয়, তাহলে কোন বিন্দুতে চাপ বের করুন।

[**Ans.** $Þ = \Pi + \rho z \sqrt{f^2 + g^2}$]

[**আভাস ঃ**



T যদি ব্যালান্সিং বলা হয়, তাহলে

$T^2 = m^2(f^2 + g^2)$, $\theta = \tan^{-1}(f/g)$ ইত্যাদি ....]

6. অধিবৃত্তাকার একটি টিউবের শীর্ষবিন্দুটি নিম্নমুখী এবং অক্ষটি উল্লম্ব আছে। এটি δ এবং δ' ঘনত্বের দুটি তরল দ্বারা পূর্ণ আছে। নাভি থেকে দুটি তরলের মুক্ত তলের দূরত্ব যথাক্রমে r এবং r' হলে তাদের স্পর্শতলের থেকে নাভির দূরত্ব কত?   [উত্তর ঃ $\dfrac{r\delta - r'\delta'}{\delta - \delta'}$]

[**আভাস ঃ** অধিবৃত্তের সমীকরণ ঃ $\dfrac{1}{R} = 1 + \cos\theta$, এবারে শীর্ষবিন্দুর দুদিকে চাপের মান সমান ধরে ভাবুন ....]

7. একটি অসমসত্ত্ব তরলের Z গভীরতার ঘনত্ব $f(z) = f(z/a)$ হলে সেখানে চাপ $= \Pi + g\rho\, {z^2}/{2a}$, Π হল বায়ুমণ্ডলীয় চাপ।

[**আভাস ঃ** এই অধ্যায়ের সূত্র প্রযোজ্য]

8. একটি কুয়োর নিম্নতম অঞ্চলের চাপ = 3×6 ফুট গভীরতার চাপ। যদি কুয়োটি জল দিয়ে পরিপূর্ণ থাকে এবং জলীয় ব্যারোমিটারের উচ্চতা 30 ফুট হলে কুয়োর গভীরতা কত?

[**Ans.** 78 ফুট]

[**আভাস ঃ** $(30 + x)\omega = 3(30 + 6)\omega$]

9. একটি ঘন গোলাকার পাত্রের ব্যাসার্ধ a এবং ঘনত্ব ρ. এটি যদি সমকেন্দ্রীয় বৃত্তাকার অভিকর্ষের তরল দ্বারা পরিবৃত্ত থাকে যার বহিব্যাসার্ধ b এবং ঘনত্ব σ, তাহলে তরলটির কোনবিন্দুতে চাপ কত?

[**Ans.** $Þ = \dfrac{4}{3} v^{\pi\sigma}\left\{(\rho - \sigma)a^3\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{b}\right) - \dfrac{1}{2}\sigma(r^2 - b)\right\}$

[**আভাস ঃ** গোলাকার পাত্রের ভিতরে পদার্থটির আকর্ষণ (r দূরত্বে)

$$= v\left\{\frac{4}{3}\pi\rho a^3 - \frac{4}{3}\pi\sigma(r^3 - a^3)\right\}\Big/ r \quad]$$

10. প্রমাণ করুন যদি কোন তরলের ঘনত্ব চাপের বর্গমূলের সাথে সমানুপাতী হয় তাহলে ঘনত্ব গভীরতা বৃদ্ধির সাথে সমানভাবে বৃদ্ধি পাবে। (দেওয়া আছে ঃ তরলটি অভিকর্ষের প্রভাবে স্থির আছে)

[**আভাস ঃ** $P\alpha\sqrt{p}$ এবার সূত্রাবলী প্রযোজ্য ......]

15.10 সারাংশ

পূর্বেকার অধ্যায়ে মাধ্যাকর্ষণ জনিত বলের প্রভাবে স্থিতিশীল অবস্থায় কোন তরল পদার্থের মধ্যে কোন বিন্দুতে চাপ ঘাত ইত্যাদি বিষয়ে বিশদ আলোচনা করা হয়েছে। এই অধ্যায়ে যে কোন প্রযুক্ত বলের প্রভাবে স্থিতিশীল তরল পদার্থের যে কোন বিন্দুতে চাপ এবং তাদের উপাংশ বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। প্রথমতঃ প্রযুক্ত বল এবং তরলের ঘনত্বের মাধ্যমে যে কোন বিন্দুতে উদ্ভূত চাপের অবকলানঙ্ক এর সূত্র নির্ণয় করা হয়েছে। পরবর্তী পর্যায়ে এই চাপকে সাধারণীকরণ করে যে কোন বিন্দুতে চাপ অপেক্ষকের ধারণা দেওয়া হয়েছে এবং প্রযুক্ত বলের বিভিন্ন দিশায় চাপ অপেক্ষকের মান নির্দ্ধারণ করা হয়েছে। সাম্যাবস্থায় থাকার মত বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। এরপর সমচাপ, সমঘনত্ব এবং সমবিভব তলের অবকল সমীকরণ নির্ধারণ করা হয়েছে এরপর কোন অক্ষের চারিদিকে ঘূর্ণায়মান তরলের চাপ অপেক্ষকের অবকল সমীকরণ নির্ণয় করে হয়েছে। বিশেষ ক্ষেত্রে এই ঘূর্ণায়মান তরলের উপরিতল অধিবৃত্তককার হবে প্রমাণিত হয়েছে।

15.11 সহায়ক গ্রন্থাবলী

(1) A. S. Ramsay : Hydrostatics

(2) J. M. Kar : Hydrostatics

একক 16 ❑ আর্কিমিডিসের সূত্র, ভাসমান এবং নিমজ্জিত বস্তুর সাম্য

গঠন

16.1. প্রস্তাবনা

16.2 উদ্দেশ্য

16.3 বিষয় পরিচিতি

16.4 আর্কিমিডিসের নীতি

16.5 মুক্ত ভাসমান বস্তুর সাম্যের শর্ত

16.6 বাধা স্বাপেক্ষে বস্তুর ভেসে থাকার শর্ত

16.7 ভাসমান শঙ্কুর শর্তাবলী

16.8 তরলের স্থিতিশক্তি

16.9 উদাহরণমালা

16.10 সংকেত / উত্তরসহ অনুশীলনী

16.11 সারাংশ

16.12 সহায়ক গ্রন্থ

16.1 প্রস্তাবনা

পূর্বেকার অধ্যায়ে স্থিতিশীল অবস্থায় তরলের চাপ এবং ঘাত নিয়ে বিশদ আলোচনা হয়েছে, একটি সমতল বা একটি ঘনবস্তু তরলের মধ্যে সম্পূর্ণ বা আংশিকভাবে নিমজ্জিত হলে তার উপর বিভিন্ন বিন্দুতে চাপ এবং মোট ঘাত বিষয়ে বিভিন্ন সূত্র নির্ণয় করা হয়েছে। কিন্তু কোন বস্তু একটি তরলের মধ্যে কি অবস্থার পরিপ্রেক্ষিতে সম্পূর্ণভাবে নিমজ্জিত হয় বা আংশিকভাবে ডুবে বা সম্পূর্ণভাবে সেই বিষয়ে বোধ এবং জ্ঞান থাকা কাম্য। এই অধ্যায়ে এই বিষয়ে আলোচিত হবে।

16.2 উদ্দেশ্য

উপরের অনুচ্ছেদেই বলা হয়েছে ভাসমান বা সম্পূর্ণ বা আংশিকভাবে নিমজ্জিত কোন বস্তুর স্থিতি বা গতি বিষয়ে জানার আবশ্যকতা আছে। সেই সূত্রে বিভিন্ন তরলের মধ্যে কোন বস্তু নিমজ্জিত করলে তার সাম্যাবস্থা বা স্থিতিশীল অবস্থায় থাকার শর্ত জানা প্রয়োজন। এছাড়াও নিমজ্জিত কোন বস্তুর প্লবতার কারণ এবং প্লবতা কেন্দ্র ইত্যাদি বিষয়েও আলোচনা প্রয়োজন।

16.3 বিষয় পরিচিতি

উপরোক্ত আলোচনা থেকেই বিষয় পরিচিতির ধারণা করা যায়। এই অধ্যায়ে ভাসমান বস্তুর বিশ্লেষণ করতে হলে এই বিষয়ে আর্কিমিডিসের নীতি আলোচনা করতে হবে। ভাসমান বস্তুর স্থিতাবস্থার শর্ত নিরুপণ প্রয়োজন। শর্তসাপেক্ষে কোন বস্তু কোন অবস্থায় কতটুকু ভাসবে তা আলোচিত হবে। এছাড়া বিশেষ বিশেষ বস্তুর ক্ষেত্রে এই শর্তাবলী নির্ণয় করা হয়েছে। পরিশেষে তরলের স্থিতিশক্তি বিষয়ে ধারণা দেওয়া হয়েছে।

16.4 আর্কিমিডিসের নীতি

কোন তরলে নিমজ্জিত ঘনবস্তুর উপর প্রযুক্ত লব্ধি ঘাতের মান হবে ওই ঘনবস্তু কর্তৃক অপসারিত তরলের ওজনের সমান ও বিপরীতমুখী। অপসারিত তরলের ভারকেন্দ্র দিয়ে এই ঘাত উল্লম্বভাবে উর্দ্ধমুখী ক্রিয়া করে।

একেই আর্কিমিডিসের নীতি (Principle of Archimedes) বলা হয়।

তরলে নিমজ্জিত ঘনবস্তুর উপর এই লব্ধিঘাতকে প্লবতা (buoyancy) বলা হয়। অপসারিত তরলের ভারকেন্দ্রকে প্লবতা কেন্দ্র (Centre of buoyancy) বলা হয়।

কোন ঘনবস্তুর আংশিক নিমজ্জিত হওয়াকে এবং বিভিন্ন ঘনত্বের স্তরীভূত তরলে নিমজ্জিত হওয়াকেও এই নীতির সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়।

16.5 মুক্তভাসমান বস্তুর সাম্যের শর্ত

আংশিক বা পূর্ণভাবে নিমজ্জিত একটি বস্তু আছে। এর উপর প্রযুক্ত একমাত্র বলদ্বয় হচ্ছে উল্লম্বদিকে

নিম্নমুখী বস্তুর ওজন এবং **ঊর্ধ্বমুখী** প্লবতা। এর মধ্যে প্রথমটি বস্তুর ভারকেন্দ্র দিয়ে এবং দ্বিতীয়টি প্লবতাকেন্দ্র দিয়ে ক্রিয়া করে।

সুতরাং বস্তুটি তরলে সাম্যাবস্থার জন্য (ভাসমান অবস্থায়) শর্ত দুটি হল—

(a) বস্তুর ওজন অবশ্যই বস্তু কর্তৃক অপসারিত তরলের ওজনের সাথে সমান হবে।

(b) বস্তুটির ভারকেন্দ্র এবং বস্তু কর্তৃক অপসারিত তরলের ভারকেন্দ্র একই উল্লম্ব সরল রেখায় থাকবে। ধরা যাক, বস্তুটির আয়তন V এবং গড় ঘনত্ব P এবং অপসারিত তরলের আয়তন ও ঘনত্ব যথাক্রমে V ও ρ'

সুতরাং সাম্যাবস্থার জন্য পাব,

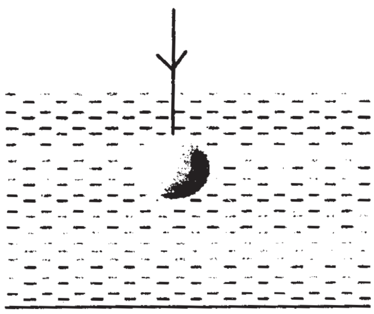
$$g\rho'V' = g\rho V$$

বা, $$V' = \frac{\rho}{\rho'}V$$

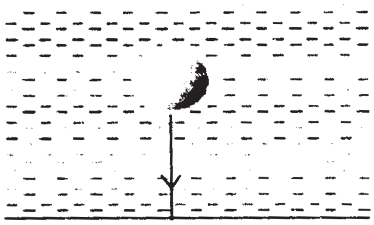
সুতরাং, পুরোবস্তুর $\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)$ অংশ তরলে নিমজ্জিত হয়।

কিন্তু $\rho > \rho'$ হলে বস্তুটি ভেসে থাকতে পারে না (কেন?)

[উপরের আলোচনায় বস্তুর গড় ঘনত্ব একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। কারণ একই ওজনের ঘন লোহার বল জলে ডুবে যায় কিন্তু ফাঁপা লোহা বল ভাসে। এর কারণ ফাঁপা বলটির গড় ঘনত্ব ঘন বলটির চেয়ে অনেক কম!]



চিত্র (i)



চিত্র (ii)

উপরের চিত্রে ধরা যাক w এবং w' যথাক্রমে বস্তুর ওজন এবং বস্তু কর্তৃক অপসারিত তরলের ওজন এবং T হল রজ্জুতে টান। ρ এবং ρ' যথাক্রমে বস্তুর এবং তরলের ঘনত্ব।

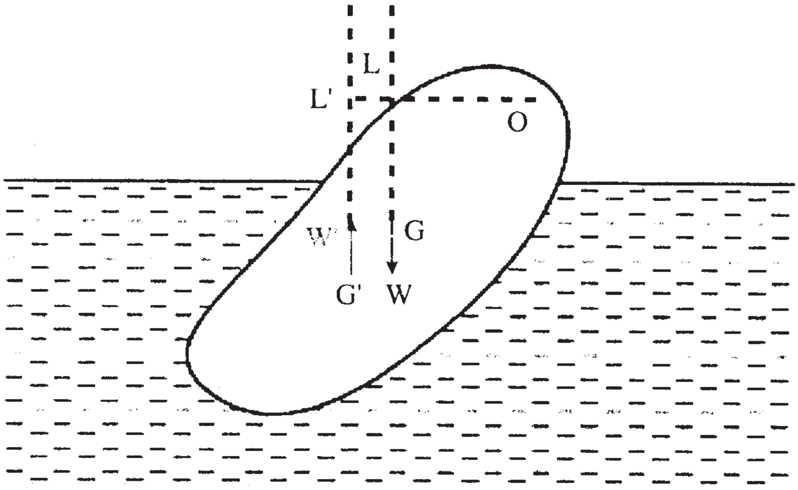
চিত্রে (i)-এ ঊর্ধ্বমুখী উল্লম্ব বলগুলি হল রজ্জুতে টান এবং অপসারিত তরলের ওজন। এবং নিম্নমুখী উল্লম্ব বল হল বস্তুর ওজন।

$\therefore$ সাম্যাবস্থার জন্য, $T = W - W'$, $(\rho > \rho')$।

একইভাবে চিত্র (ii)-এ হবে $T = W' - W$, $(\rho' > \rho)$।

16.6 বাধা স্বাপেক্ষে বস্তুর ভেসে থাকার শর্ত

(i) একটি স্থির বিন্দু ঃ



ধরা যাক O হল একটি স্থির বিন্দু যার স্বাপেক্ষে বস্তুটি মুক্তভাবে ঘুরতে পারে।

ধরা যাক W এবং W' হল যথাক্রমে বস্তুর এবং বস্তু কর্তৃক অপসারিত তরলের ওজন। G ও G' হল যথাক্রমে তাদের ভারকেন্দ্র। অনুভূমিক কোন তরলের ঘাত বস্তুটির উপর স্বাভাবিক কারণেই থাকবে না।

যে বলসমূহ বস্তুটির উপর কার্য করে তারা হল—এর ওজন W যা 'G' দিয়ে উল্লম্বভাবে নিম্নদিকে ক্রিয়া করে এবং অপসারিত তরলের ওজন W' যা G' দিয়ে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বদিকে ক্রিয়া করে। এছাড়া O বিন্দুর প্রতিক্রিয়া বল।

$\therefore$ সাম্যের জন্য—

(a) 'O' বিন্দুতে প্রতিক্রিয়াও উল্লম্ব হবে এবং W, W', O বিন্দুর প্রতিক্রিয়া তিনটি বলই একতলীয় হবে, বা G, G', O অবশ্যই একই উল্লম্ব তলে অবস্থানরত হবে।

(b) O স্বাপেক্ষে W এবং W'-এর ভ্রামক হবে। OLL' যদি 'O' বিন্দু থেকে W এবং W'-এর বলরেখার উপর লম্ব হয়, তাহলে $W.OL = W'.OL'$

δ বিন্দুতে প্রতিক্রিয়ার মান $= W \sim W'$

(ii) দুটি বিন্দু স্থির আছে

দুটি স্থির বিন্দু থাকলে তাদের সংযুক্তকারী সরলরেখাটিও বস্তুর ওপর স্থির হবে। সুতরাং বস্তুটির সাম্যে থাকার প্রয়োজনীয় শর্তটি হল—

W এবং W'-এর সেই স্থির সংযুক্তকারী রেখার স্বাপেক্ষে ভ্রামকের মান সমান এবং বিপরীতমুখী হবে।

16.7 ভাসমান শঙ্কুর শর্তাবলী

একটি সলিড শঙ্কুর অক্ষের দৈর্ঘ্য h এবং ঘনত্ব ρ ; যদি এটি σ)(> ρ) ঘনত্বের তরলে ভাসমান হয়, তাহলে এর অক্ষের কত পরিমাণ তরলের বাইরে আছে?

(i) **ধরা যাক শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু নিম্নমুখী ঃ**

যদি শঙ্কুর h' দৈর্ঘ্য তরলের বাইরে থাকে, তাহলে সাম্যাবস্থার জন্য—

$$\tfrac{1}{3}\pi h^3 \tan^{\alpha} \alpha . \rho g = \frac{1}{3}\pi(h - h')^3 \tan^2 \alpha . g . \sigma$$

$$\Rightarrow h' = h\left(1 - \sqrt[3]{\rho/\sigma}\right)$$

(ii) ধরা যাক শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু ঊর্ধ্বমুখী ঃ

যদি শঙ্কুর h' দৈর্ঘ্য তরলের বাইরে থাকে, তাহলে সাম্যের জন্য—

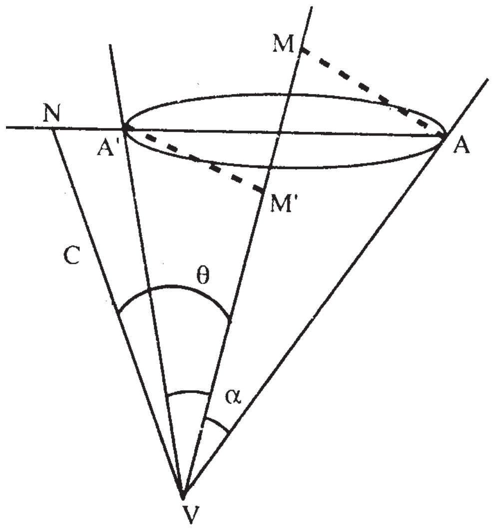
$$\frac{1}{3}\pi h^3 \tan^{\alpha} \alpha . g\rho = \left(\frac{1}{3}\pi h^3 \tan^2 \alpha - \frac{1}{3}\pi h'^3 \tan^2 \alpha\right) g\sigma$$

$$\Rightarrow \sigma h'^3 = h^3 (\sigma - \rho)$$

$$\therefore h' = h\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right)^{\frac{1}{3}}$$

উপরিউক্ত সমস্যায় লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুর ক্ষেত্রে, অক্ষটি উল্লম্বভাবে সর্বদা নাও থাকতে পারে। অক্ষের সাথে হেলেথাকা কোন তলের সাহায্যে আবদ্ধ আয়তনের নির্ণয় করা প্রয়োজন। প্রস্থচ্ছেদটি অবশ্যই উপবৃত্তাকার হবে।

ধরা যাক শীর্ষবিন্দুটি C গভীরতায় আছে (তলের প্রস্থচ্ছেদ থেকে) এবং উল্লম্ব VN-এর অক্ষটি θ কোণে নত।



ধরা যাক, শঙ্কুর উল্লম্ব কোণের মান 2α উপবৃত্তাকার প্রস্থচ্ছেদের AA' হল পরাক্ষ, AM, $A'M'$ হল অক্ষের উপর অঙ্কিত লম্ব। a, b হল উপবৃত্তের অর্ধঅক্ষ (semi – axes).

তাহলে, $a = \frac{1}{2}(AN - A'N)$

$$= \frac{1}{2}C\{\tan(\theta+\alpha) - \tan(\theta-\alpha)\}$$

$$= \frac{C\sin 2\alpha}{2\cos(\theta+\alpha)\cos(\theta-\alpha)};$$

এবং $b = \sqrt{(AM.A'M')}$

$$= \sqrt{(VA\sin\alpha . VA'\sin\alpha)}$$

$$= \frac{C\sin\alpha}{\sqrt{\{\cos(\theta+\alpha)\cos(\theta-\alpha)\}}}$$

$\therefore$ শঙ্কু থেকে কেটে নেওয়া অংশের আয়তন $= \frac{1}{3}\pi abc$

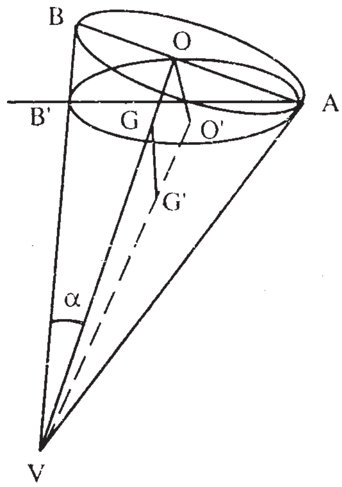
$$= \frac{1}{3}\pi . \frac{C\sin 2\alpha}{2\cos(\theta+\alpha)\cos(\theta-\alpha)} \cdot \frac{C\sin\alpha}{\sqrt{\{\cos(\theta+\alpha)\cos(\theta-\alpha)\}}} . C$$

$$= \frac{1}{3}\pi . \frac{C\sin^2\alpha\cos\alpha}{\{\cos(\theta+\alpha)\cos(\theta-\alpha)\}^{3/2}}$$

এবার ধরা যাক একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুর ঘনত্ব ρ এবং অর্ধশীর্ষকোণ α, এটি শীর্ষবিন্দু নিম্নমুখী অবস্থায় σ ঘনত্বের তরলে ভেসে থাকতে পারে। এর একটি জেনারেটর উল্লম্ব এবং ভূমিটি ঠিক জলতলের উপরে থাকলে দেখাতে হবে—

$$\rho = \sigma(\cos 2\alpha)^{3/2}$$

এই সমস্যায়, $\theta = \alpha$, $C = VA \cos 2\alpha$, এছাড়াও $VO = VA \cos\alpha$ শঙ্কুর ওজন এবং ভারকেন্দ্র 'G' দিয়ে ক্রিয়া করে।



$$\therefore \; VG' = \frac{3}{2} VO$$

অপসারিত তরলের ওজন 'G' দিয়ে ক্রিয়া করে,

$$\therefore \; VG' = \frac{3}{2} VO'$$

সুতরাং $GG' \parallel OO'$. সুতরাং O ও O' হল যথাক্রমে AB এবং AB'-এর মধ্যবিন্দু।

$$\therefore \; OO' \parallel BB' \text{ কিন্তু এটি উল্লম্ব।}$$

সুতরাং, G, G' একই উল্লম্ব সরলরেখায় আছে।

শঙ্কুর ওজন $= g\rho . \frac{1}{3}\pi(VA\cos\alpha)^3 \tan^2\alpha$; এবং অপসারিত তরলের ওজন;

$$= g\sigma . \frac{1}{3}\pi \frac{(VA\cos 2\alpha)^3 \sin^2\alpha\cos\alpha}{(\cos 2\alpha)^{3/2}}$$

∴ সাম্যাবস্থার জন্য,

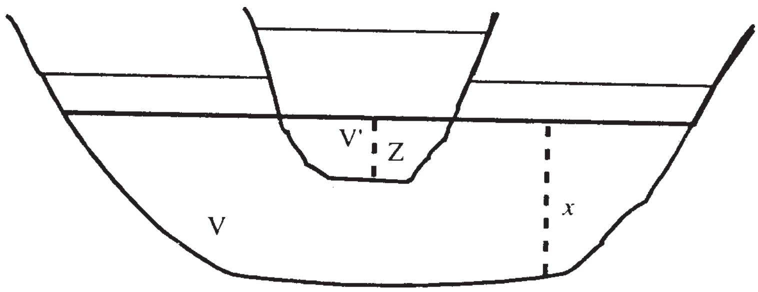
$$g\rho.\frac{1}{3}\pi(VA\cos\alpha)^3\tan^2\alpha = g\sigma.\frac{1}{3}\pi.\frac{(VA\cos 2\alpha)^3\sin^2\alpha\cos\alpha}{(\cos 2\alpha)^{3/2}}$$

সুতরাং, $\rho = \sigma(\cos\ 2\alpha)^{\frac{3}{2}}$

16.8 তরলের স্থিতিশক্তি

স্থিতিবিদ্যা থেকে আমরা জানি, যে কোন বস্তুর অভিকর্ষের প্রভাবে তার অবস্থানের জন্য বস্তুটিতে কিছু পরিমাণ শক্তি সঞ্চিত হয়। এই ব্যাপারটিকে কিছু পরিমাণ তরলের জন্যপ্রয়োগ করা যায়। সাম্যাবস্থার ক্ষেত্রে, স্থিতিশক্তির একটি নির্দিষ্ট মান আছে। অভিকর্ষের প্রভাবে কোন তরলপদার্থ সর্বদা তা সর্বনিম্ন স্থিতিশক্তি সঞ্চিত অবস্থায় যেতে চায়।

এবার কোন কঠিন ঘন বস্তু এক পাত্র তরলে নিমজ্জিত করা হল। এখানে প্লবতার বিরুদ্ধে কিছুটা কার্য করা হল. যা স্থিতিশক্তিত হিসাবে তরলটির ভারকেন্দ্র কিছুটা উত্তোলন হেতু জমা থাকবে।



ধরা যাক, x হল তরলের গভীরতা এবং z হল কঠিন বস্তুর ডুবে থাকার পরিমাণ। X, Z হল যথাক্রমে প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রেফল এবং V হল তরলের আয়তন ও V' হল বস্তুটির ডুবন্ত অংশের আয়তন।

এবরা ধরা যাক বস্তুটি δz পরিমাণ দূরত্ব তরলের মধ্যে চেপে ধরা হল এবং পাত্রে তরলের উচ্চতা তার ফলে δx বৃদ্ধি পেল।

এখন বস্তুটির বাড়তি আয়তন = যে পরিমাণ তরল উচ্চতায় বেড়েছে,

∴ $(X-Z)\delta x = Z\delta x$,

যেখানে উচ্চতর ঘাতের সূক্ষ্মাতিসূক্ষ্মরাশি (infinitesimal)-কে ধর্তব্যের মধ্যে আনা হয়নি।

আবার যেহেতু বস্তুটির ভারকেন্দ্রের $(\delta z - \delta x)$ পরিমাণ সরণ হয়েছে,

∴ স্থিতিশক্তির বৃদ্ধি ঘটেছে = $V'(\delta z - \delta x)$

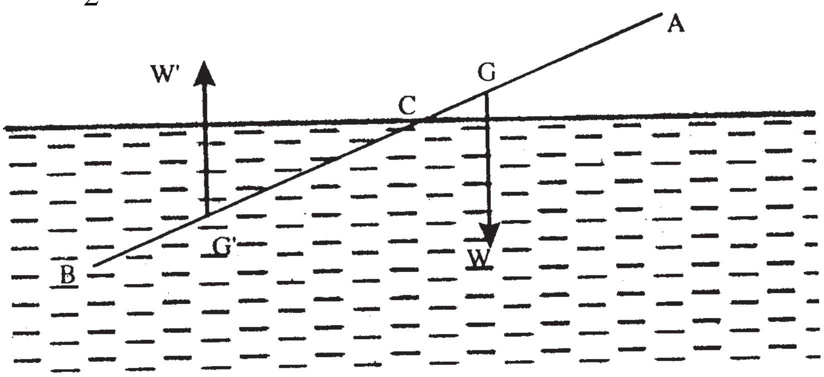
বস্তুটি প্রাথমিক এবং শেষ অবস্থান জানা থাকলে, উপরিউক্ত সমীকণদ্বয় থেকে আমরা স্থিতিশক্তি ও কতটা কার্য করা হল তা গণনা করতে পারি।

16.9 উদাহরণমালা

(1) একটি সমান প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট রড তার একপ্রান্ত বরাবর ঘুরতে পারে। এটি স্থির অবস্থায় জলের বাইরে উল্লম্বের সাথে নত হয়ে আছে। রডটির এক তৃতীয়াংশ দৈর্ঘ্য জলের মধ্যে থাকলে প্রমাণ করুন এর আপেক্ষিক গুরুত্ব $5/9$

সমাধান ঃ ধরা যাক AB হল রড যার দৈর্ঘ্য l, $BC = \frac{1}{3}l$

A হল স্থির প্রান্ত যার স্বাপেক্ষে রডটি মুক্তভাবে ঘুরতে পারে। 'G' দিয়ে রডের ওজন W নিম্নদিকে ক্রিয়া করে, $AG = \frac{1}{2}l.$



অপসারিত তরলের ওজন W', ঊর্ধ্বদিকে 'G'' দিয়ে ক্রিয়া করে।

যেখানে $AG' = AB - BG' = l - \frac{1}{6}l = \frac{5}{6}l$

রডটি সাম্যাবস্থায় থাকার জন্য, 'A'-র স্বাপেক্ষে ভ্রামক গণনা করে পাই,

$W.AG = W'.AG'$

অথবা, $\rho l.\frac{1}{2}l = \frac{1}{3}l.\frac{5}{6}l.$

$\Rightarrow \rho = \frac{5}{9}$ (প্রমাণিত)

2. একটি জাহাজ সমুদ্র থেকে নদীতে ঢোকার পর 1 ইঞ্চি বেশি ডুবে যায়। এরপর x টন মাল খালাস করে b ইঞ্চি উপরে ভেসে ওঠে। সমুদ্র জল নদী জলের তুলনায় $\frac{41}{40}$ গুণ ভারী হলে, জাহাজের ওজন $41\frac{a}{b}x$ টন।

সমাধান ঃ

ধরা যাক W হল জাহাজের ওজন এবং এর প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল A নদীর জলের ঘনত্ব = ρ হলে, সমুদ্রের জলের ঘনত্ব = $\frac{41}{40}\rho$. প্রথমতঃ জাহাজের l ইঞ্চি জলের তলায় ছিল ধরা যাক,

তাহলে, $W = lA.\frac{41}{40}\rho = (l+a)A\rho$

এবং $\quad W - x = (l + a - b)A\rho$

$$\therefore \ \frac{41}{40}l = l + a$$

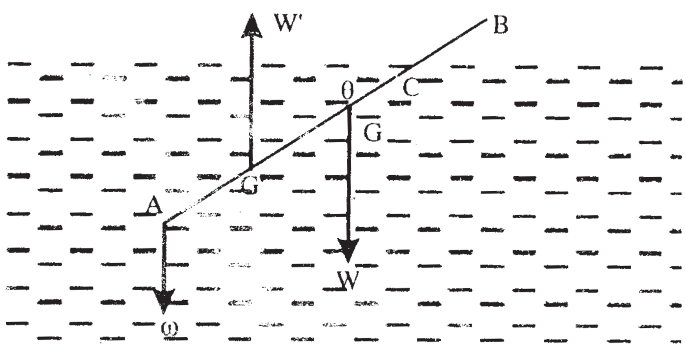
বা, $\quad l = 40a$ এবং $A\rho = \frac{W}{41a}$

সুতরাং, $W - x = (40a + a - b)\frac{W}{41a} = W - \frac{bW}{41a}$

$ie,\ W = 41\frac{a}{b}x$ টন। (প্রমাণিত)

3. একটি W ওজনের সরু দণ্ডের একপ্রান্তে w ওজনের একটি ছোটবস্তু যুক্ত আছে (particle). এটি অনুভূমিকের সাথে একটি কোণে নত হয়ে জলে ভাসছে, যে তার w ওজনের প্রান্তটি ডুবে আছে। প্রমাণ করুন জলের উপরে থাকা দণ্ডটির দৈর্ঘ্য তার পুরো দৈর্ঘ্যের তুলনায় $\frac{\omega}{\omega + W}$ গুণ এবং দণ্ডটির আপেক্ষিক গুরুত্ব = $\frac{W^2}{(\omega + W)^2}$

সমাধান ঃ ধরা যাক $AB(= 2a)$ দণ্ডটি θ কোণে অনুভূমিকের সাথে নত এবং $AC(= 2b)$ জলের তলায় আছে।



W দণ্ডটির ওজন, G দিয়ে যদি ক্রিয়া করে, $AG = GB = a$ এবং ω যদি A বিন্দুতে ক্রিয়া করে তাহলে উভয়েরই ক্রিয়ারেখা নিম্নমুখী হবে।

প্লবতা বল 'G' দিয়ে ক্রিয়া করে, যার মান = W' এবং $AG' = G'C = b$ জলের ঘনত্ব = ρ, দণ্ডটির আপেক্ষিক গুরুত্ব S হলে দণ্ডের ঘনত্ব = $S\rho$.

তাহলে, $W = 2a\alpha sg\rho$ এবং $W' = 2b\alpha g\rho$; α = দণ্ডের প্রস্থচ্ছেদ।

এছাড়াও $GG' = AG - AG' = a - b$

G'-এর সাপেক্ষে ভ্রামক গণনা করে পাই—

$$\omega AG'\cos\theta = W.GG' \cos\theta$$

$\Rightarrow$

$$\omega b = W(a - b) \Rightarrow b = \frac{aW}{\omega + W}$$

$\therefore$ জলের উপর দণ্ডের দৈর্ঘ্য

$$= 2a - 2b = 2a\left(1 - \frac{W}{\omega + W}\right) = \frac{\omega}{\omega + W} \times \text{ দন্ডের দৈর্ঘ্য।}$$

সাম্যাবস্থার জন্য,

$$W' = \omega + W, ie, \frac{W'}{W} = \frac{w + W}{W}$$

অথবা, $\dfrac{2b\alpha g\rho}{2a\alpha sg\rho} = \dfrac{\rho + W}{W}$

$\Rightarrow s = \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{w}{\omega + W} = \left(\dfrac{W}{\omega + W}\right)^2$ (প্রমাণিত)

4. জানা ওজন ও আয়তনের একটি শঙ্কু একটি তরলে শীর্ষবিন্দু নিম্নমুখী হয়ে ভেসে আছে; দেখান যে তরলের সাথে স্পর্শরত পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল সর্বনিম্ন হবে যখন শঙ্কুর উর্ধ্বকোণের মান $2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ হবে।

সমাধান ঃ ধরা যাক অর্ধউর্ধ্বকোণ = α এবং ওজন = W. 'h' উচ্চতা পর্যন্ত শঙ্কুটি ডুবে আছে।

$\therefore$ সাম্যের জন্য, $W = \dfrac{1}{3}\pi h^3 \tan^2 \alpha . \omega$

যেখানে ω হল একক আয়তনে জন্য তরলের ভর।

$\therefore$ $h = \left(\dfrac{2W}{\pi\omega}\right)^{1/3} \cot^{2/3} \alpha$

'S' যদি তরলের সংস্পর্শে থাকা পার্শ্বতল হয়, তাহলে—

'S' $= \pi(h \tan\alpha)(h\, sec\, \alpha) = \pi h^2 \tan\alpha\, sec\, \alpha$

$= \ \pi = \left(\frac{3W}{\pi\omega}\right)^{\frac{2}{3}} \times \cot^{\frac{1}{3}} \alpha \sec \alpha$

$= \ k \cot^{\frac{1}{3}} \alpha \sec \alpha,$ $\left[K = \pi\left(\frac{3w}{\pi w}\right)^{\frac{2}{3}} = \text{ ধ্রুবক} \right]$

'S'-কে সর্বনিম্ন হতে হলে, $\frac{dS}{d\alpha} = 0;$

$\therefore \ \frac{1}{3} k \sec^{\frac{2}{3}} \alpha \cos ec^{\frac{1}{3}} \alpha (2 \tan \alpha - \cot \alpha) = 0$

বা, $2\tan \alpha = \cot \alpha$, *ie*, $\tan \alpha = 1/\sqrt{2}$

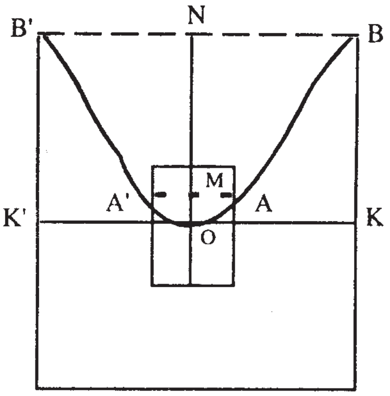
দেখানো যায় যে $\alpha = \tan^{-1}\left(1/\sqrt{2}\right)$ -এর জন্য $\frac{d^2S}{d\alpha^2} > 0.$

সুতাং, ঊর্ধকোণ $= 2\alpha = 2\tan^{-1}\left(1/\sqrt{2}\right)$ -এর জন্য পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল সর্বনিম্ন হবে। (প্রমাণিত)

5. একটি ঘন চোঙ চোঙাকৃতি পাত্রে ভাসছে। এই সিস্টেমটি এর সাধারণ অক্ষ স্বাপেক্ষে ω কৌণিক বেগে ঘুরছে। R ও r হল যথাক্রমে পাত্রের এবং চোঙের ব্যাসার্ধ। গতির জন্য স্থানে চোঙটি অবনমনের মান,

দেখান যে, $\frac{\omega^2}{4g}\left(R^2 - r^2\right)$

সমাধান ঃ



চিত্র থেকে পাই, $\frac{BN^2}{ON} = \frac{AM^2}{OM}$

= মুক্ততলের নাভিলম্ব = $2g/\omega^2$

$\therefore\ ON = \dfrac{R^2\omega^2}{2g}$ এবং $OM = \dfrac{r^2\omega^2}{2g}$

স্থির থাকার সময়ে, ধরা যাক 'O' বিন্দু x গভীরতায় ছিল, y হল চোঙটি 'O'-এর স্বাপেক্ষে কতটা উঠে এসেছে। তাহলে $(x - y)$ হল চোঙটি প্রকৃতপক্ষে কতটা ডুবে আছে তার পরিমাপ।

$\therefore$ জলের আয়তন = ধ্রুবক,

$\pi R^2 x$ = 'KK''-এর উপর জলের আয়তন $= \dfrac{1}{2} \times KBB'K'$ চোঙের আয়তন

$$= \frac{1}{2} \times \pi R^2 . ON = \frac{\pi R^4 \omega^2}{4g}$$

$$\therefore \quad x = \frac{R^2\omega^2}{4g}$$

একইভাবে, $\pi r^2 y = \dfrac{1}{2}\pi r^2 . OM = \dfrac{\pi r^4 \omega^2}{4g}$

$$\therefore\ y = \frac{r^2\omega^2}{4g}$$

সুতরাং, $x - y = \dfrac{\omega^2}{4g}(R^2 - r^2)$ (প্রমাণিত)

16.10 সংকেতসহ অনুশীলনী ও উত্তরমালা

1. একটি সমবাহু ত্রিভুজাকৃতি পাত A বিন্দু থেকে মুক্তভাবে ঝুলছে। AB বাহু উল্লম্ব আছে, এবং AC বাহু D বিন্দুতে ভারীতরলের উপরিতল দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়েছে।

প্রমাণ করুন পাতটির ঘনত্ব ঃ তরলটির ঘনত্ব = 15 : 16

[**আভাস ঃ** তরলে নিমজ্জিত অংশের ভারকেন্দ্র বের করুন, এবার ভ্রামক গণনা করুন]

2. একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা h এবং শীর্ষকোণ = 2α এটি উল্লম্বভাবে জলে ভেসে আছে এবং শীর্ষবিন্দু নিম্নমুখী ও h' পরিমাণ উচ্চতা এর জলে ডুবে আছে। একটি উল্লম্বতল দ্বারা শঙ্কুটি সমদ্বিখণ্ডিত হয়েছে যারা শীর্ষবিন্দুতে পরস্পর সংলগ্ন আছে। দেখান যে দুটি অংশ পরস্পর সংলগ্ন থাকবে, যদি $\tan^2 \alpha < h'/(h-h')$.

[**আভাস ঃ** শঙ্কুর আয়তনের উপর প্রযুক্ত ভ্রামক > এটির উফর ঘাতের ভ্রামক]

3. একটি $2a$ দৈর্ঘ্যযুক্ত দণ্ডের ঘনত্ব ρ, যেটি উল্লম্ব তল বরাবর গতিশীল, এ এখটি প্রান্ত ρ' ঘনত্বের তরলে $2h$ গভীরতায় স্থির আছে। একটি σ ঘনত্বের ($\sigma < P'$) তরল ওই তরলের উপরে ঢালা হল। যদি দণ্ডের বাকি অংশটুকু শুধুমাত্র এই তরলে চাপ পড়ে, তাহলে উল্লম্বের সাথে দণ্ডটির গতি বার করুন।

$$\left[Ans:\ \cos^{-1}\left[\frac{h}{a}\left(\frac{\rho'-\sigma}{\rho-\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right]$$

[**আভাস ঃ** দুটি আলাদা ঘনত্বের তরলের জন্য আলাদাভাবে গণনা করে তা যোগ করুন]

4. A, B, C তিনটি সমান ওজনের বল আছে। σ_1 ঘনত্বের তরলে A, B ও C-কে ব্যালান্স করে যখন তারা ঝুলন্ত থাকে। একইভাবে B, C ও A-কে σ_2 ঘনত্বের তরলে ব্যালান্স করে। C, A ও B-কে σ_3 ঘনত্বের তরলে ব্যালান্স করে।

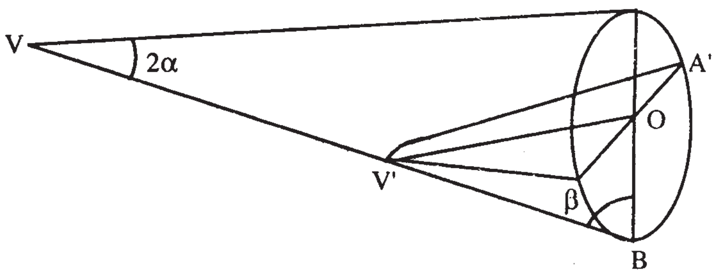
A, B এবং C-এর আপেক্ষিক গুরুত্বের মান বের করুন।

$$\left[Ans: S_1 = \frac{2\sigma_2\sigma_3}{\sigma_2+\sigma_3}, S_2 = \frac{2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3}. S_3 = \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} \right]$$

[**আভাস ঃ** A-এর আপাতঃ ওজন = B-এর আপাতঃ ওজন + C-এর আপাতঃ; ওজন (σ_1-এ)।

5. একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুর একটি উপবৃত্তাকার ভূমি আছে। এর সর্ববৃহৎ উৎপন্নকারী রেখাটিকে (generator) অনুভূমিক অবস্থায় শঙ্কুটি ভাসছে। 2α যদি শীর্ষকোণ এবং β যদি ভূমিতল ও ক্ষুদ্রতম উৎপন্নকারী রেখাটির মধ্যবর্তী কোণ হয়। তাহলে দেখান যে, $cot\beta = \frac{1}{2}\cos ec 4\alpha - \cot 4\alpha$.

[**আভাস ঃ** নিম্নে চিত্রটি লক্ষ্য করুন......]



6. একটি হাল্কাবৃত্তাকার চোঙ অক্ষকে উল্লম্ব করে জলে ভাসে। এর অর্ধেক পরিমান অক্ষ ডুবে থাকলে, চোঙটি আপেক্ষিকগুরুত্ব বের করুন। (দেওয়া আছে ঃ বাতাসের আপেক্ষিক গুরুত্ব = S)

[উত্তর ঃ $\frac{1}{2}(1+S)$

[**আভাস ঃ** আর্কিমিডিসের নীতি প্রযোজ্য, এছাড়া বায়ুমন্ডলীয় চাপ গ্রাহ্য করতে হবে।]

7. ρ ঘনত্বের ত্রিভুজাকৃতি পাত σ ঘনত্বের তরলে ভাসমান আছে। ত্রিভুজটির তলটি উল্লম্ব থাকলে এবং B বিন্দুটি জলের উপরিতলে আছে। যদি A বিন্দুটি জলে ডুবে না থাকে, তাহলে দেখান যে, $P : \sigma = \sin A \cos C : \sin B$

[**আভাস ঃ** আর্কিমিডিসের নীতি এবং ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র বের করে চেষ্টা করুন]

8. একটি বস্তু অর্ধনিমজ্জিত অবস্থায় তরলে অবস্থিত। কিন্তু এই তরল এবং সমান আয়তনের জল মিশিয়ে একটি তরল প্রস্তুত করলে তাতে বস্তুটি তিন-চতুর্থাংশ ডুবে থাকে। বায়ুমণ্ডলীয় চাপ নগণ্য হলে বস্তুটির আপেক্ষিক গুরুত্বে মান কত? [**আভাস ঃ** আর্কিমিডিসের নীতি প্রযোজ্য] [**উত্তর ঃ** 1·5]

9. বরফের আপেক্ষিক গুরুত্ব S এবং সমুদ্রজলের S' হলে, প্রমাণ করুন যে বরফখণ্ডে নিমজ্জিত অংশের আয়তন ও জলের উপরে অংশের আয়তনে অনুপাত $S/(S'-S)$ [**আভাস ঃ** আর্কিমিডিসের নীতি]

10. জলতলে অক্ষকে স্থির রেখে একটি অর্ধবৃত্তাকার চোঙ ভেসে আছে। চোঙটি যদি স্থির অক্ষের স্বাপেক্ষে ঘুরতে পারে এবং এর ঘনত্ব জলের ঘনত্বের অর্ধেক হয়, দেখান যে যেকোন অবস্থানে চোঙটি সাম্যাবস্থায় থাকবে।

[**আভাস ঃ** অর্ধবৃত্তাকার চোঙের ভরকেন্দ্র বের করার চেষ্টা করুন, এরপর আর্কিমিডিসের নীতি প্রযোজ্য]

16.11 সারাংশ

আলোচ্য অধ্যায়ে মূলতঃ সাম্যাবস্থায় স্থিত তরলের মধ্যে ভাসমান বা আংশিক নিমজ্জিত বা সম্পূর্ণভাবে নিমজ্জিত বস্তুর সাম্যের বিষয়ে বিশদ আলোচনা করা হয়েছে। প্রসঙ্গত এই বিষয়ে আর্কিমিডিসের সূত্রের প্রয়োগ অবশ্যম্ভাবী। আর্কিমিডিসের সূত্র অনুযায়ী ভাসমান বা নিমজ্জিত বস্তু স্থিতিবস্থা শর্ত নির্ধারণ করা যায়। সেই অনুযায়ী প্লবতা সংজ্ঞা, প্লবতা কেন্দ্র ইত্যাদি উল্লেখিত হয়েছে। কোন বস্তুর বাধা সাপেক্ষে সেই বস্তুর তরলের মধ্যে নিমজ্জিত হবার শর্তাবলী আলোচনা করা হয়েছে। বিশেষ কয়েকটি প্রকারের বস্তুর জন্য এই শর্তাবলী প্রয়োগ দেখানো হয়েছে। এছাড়াও তরলের স্থিতি শক্তি বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। কয়েকটি উদাহরণ সহযোগে সূত্র এবং শর্তাবলী ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

16.12 সহায়ক গ্রন্থাবলী

1. M Ray & H.S. Sharma : A Text book of hydrostatics (Premier Pub. Co.)
2. J. M. Kar : Hydrostatics for degree Classes. (Globe library, 1972).

একক 17 ❑ ভাসমান বস্তুর সাম্যের সুস্থিতি ও পারাকেন্দ্র (Metacentre) ঃ

গঠন

17.1. প্রস্তাবনা

17.2 উদ্দেশ্য

17.3 বিষয় পরিচিত।

17.4 ভাসমানবস্তুর স্থিতাবস্থার সাম্য

17.5 পরাকেন্দ্রের সংজ্ঞা, পরাকেন্দ্রীক উচ্চতা, ভাসমান বস্তুর সামতলিক অবস্থান, ভাসমান বস্তুর সমগ্রতলে অবস্থান এবং প্লবতার সমগ্রতলের অবস্থান

17.6 বিশেষ ভাবে নির্ধারিত অবস্থানে জন্য পরাকেন্দ্রের গভীরতার সূত্র নির্ণয় এবং পরাকেন্দ্রের অবস্থানের বিবিধ বৈশিষ্ট্য

17.7 সুস্থিতি সাম্য এবং অস্থিতি সাম্যের বিভিন্ন অবস্থানের কারণ নির্ণয়

17.8 উদাহরণমালা

17.9 সংকেতসহ অনুশীলনী ও উত্তরমালা

17.10 সারাংশ

17.11 সহায়ক গ্রন্থাবলী

17.1 প্রস্তাবনা

পূর্বোক্ত অধ্যায়ে স্থিতাবস্থায় থাকা কোন তরলের মধ্যে সম্পূর্ণরূপে বা আংশিক রূপে নিমজ্জিত কোন বস্তুর সাম্যাবস্থার শর্ত এবং প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী আলোচিত হয়েছে। এই সূত্রাবলী প্রয়োগমূলক কিছু সমস্যা এবং তা সমাধান উল্লেখিত হয়েছে। কিন্তু ভাসমান বা নিমজ্জিত বস্তু সাম্যাবস্থায় থাকাটা বড় কথা নয়। সাম্যাবস্থাকে ধরে রাখাটা জরুরী। সর্বক্ষেত্রে সাম্যাবস্থা ধরে রাখা যায় না। এই অধ্যায়ে সাম্যাবস্থা ধরে রাখার ব্যাপারে বিশদ আলোচনা হবে।

17.2 উদ্দেশ্য

উপরোক্ত অনুচ্ছেদেই উল্লেখ করা হয়েছে যে তরল পদার্থের মধ্যে কোনবস্তু ভাসমান, সম্পূর্ণভাবে

বা আংশিকভাবে নিমজ্জিত হবার কতকগুলো সর্ত আছে। এই সর্তাবলীপূরণ সাপেক্ষে বস্তুটির সাম্যবস্থায় থাকার এবং এই অবস্থা ধরে রাখারও কতকগুলো নীতি ও সর্ত আছে। সাম্য অবস্থা ধরে রাখা বলতে বোঝান হচ্ছে যে যেকোন কারণেই থাক, সাম্যাবস্থা থাকার অবস্থানটা যদি সামান্য পরিমাণে বিচ্যুতি ঘটে; তখন বস্তুটি আপাত গতিশক্তি দ্বারা চালিত হবে। যদি বস্তুটি গতিশক্তির প্রবণতাকে নিষ্ক্রিয় করে ফের পূর্বের সাম্যাবস্থায় চলে আসতে পারে তখন তাকে বলা হয় সুস্থিত সাম্যাবস্থা অধিকাংশ ক্ষেত্রে সাম্যাবস্থায় ধরে রাখতে পারে না। কিন্তু বিশেষ অবস্থায় বিশেষ কিছু সর্তসাপেক্ষে ভাসমান বস্তু সুস্থিত। সাম্যাস্থায় থাকে। আলোচ্য অধ্যায়ে কোন অবস্থায় বস্তুটি সুস্থিত সাম্যাবস্থায় থাকবে তা নিয়ে আলোচনা করা হবে।

17.3 বিষয় পরিচিতি

17.1 এবং 17.2 অনুচ্ছেদে বলা হয়েছে এই অধ্যায়ের বিষয় বস্তু কি? এই অধ্যায়ে সুস্থিত সাম্যাবস্থা, অস্থিত সাম্যাবস্থা বা নিরপেক্ষ সাম্যাবস্থা বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে উল্লম্বভাবে সামান্য গতি প্রাপ্তির জন্য সাম্যাবস্থায় ফিরে আসার বিষয়ে সামান্য আলোচনা করার আছে। সেটি আলোচনা করে ঘূর্ণায়মান গতি প্রাপ্তির জন্য সাম্যাবস্থার বিচ্যুতি এবং পূর্বেকার অবস্থায় ফিরে আসার বা না আসা বিষয়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। এই বিষয়ে পরাকেন্দ্র (Metacentre)-এর সংজ্ঞা এবং পরাকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয়ের পদ্ধতি আলোচিত হয়েছে সুস্থিত সাম্যাবস্থার জন্য পরাকেন্দ্র নির্দিষ্ট অবস্থান জানা জরুরী। অস্থিত সাম্যাবস্থার সূত্রাবলী নিয়েও আলোচনা করা হয়েছে। কয়েকটি উদাহরণ যোগে এই বিষয়ের প্রয়োগমূলক কিছু সমস্যা আলোচিত হয়েছে।

17.4 ভাসমানবস্তুর স্থিতাবস্থায় সাম্য

আংশিক নিমজ্জিত বস্তুর ক্ষেত্রে (i) বস্তুর ওজন ও অপসারিত তরলের ওজন সমান হয় এবং (ii) বস্তুর ভারকেন্দ্র ও অপসারিত তরলের ভারকেন্দ্র এই উল্লম্বরেখার উপর অবস্থিত হবে।

এক্ষণে বস্তুটির সরণকে মোট তিনটি ভাগে বিভক্ত করা যায়।

(2) **ঘূর্ণনবিহীন খুব ছোট উল্লম্ব সরণ ঃ**

এক্ষেত্রে বস্তুটিকে একটু নিচের দিকে চেপে ছেড়ে দিলে অপসারিত তরলের পরিমাণ বেড়ে যায়। ফলে প্লবতার মান বেড়ে যায় এবং বস্তুটি আবার উপরের দিকে একটু উঠে আসে। তার ফলে আবার প্লবতার মান কমে যায়। এভাবে খুব ছোট উল্লম্ব সরণের জন্য ভাসমান বস্তুর সাম্য সুস্থিত (stable) হবে।

(b) ঘূর্ণনবিহীন খুব ছোট অনুভূমিক সরণ ঃ

এক্ষেত্রে বস্তুর উপর কোন লব্ধি অনুভূমিক বল নেই। সুতরাং বস্তুর নিজস্বস্থান থেকে সরে যাবার প্রশ্নই ওঠে না। তাই এক্ষেত্রে সাম্যটি সুস্থিত (stable)-এ নয় অস্থির (unstable) ও নয়।

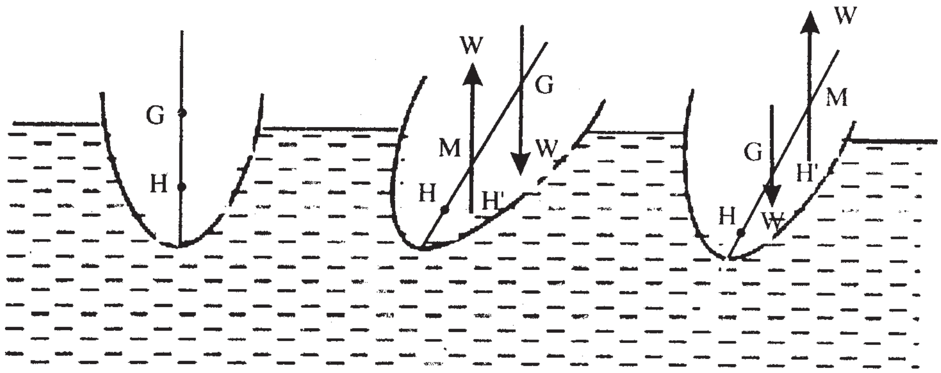
(c) ছোট ঘূর্ণন (Small rotational displacement) :

এক্ষেত্রে অপসারিত তরলের আয়তনের কোন পরিবর্তন হয় না। সুতরাং সবক্ষেত্রেই বস্তুর ওজন প্লবতার সমান হয়। G যদি বস্তুর ভারকেন্দ্র এবং H যদি প্রথম অবস্থায় প্লবতাকেন্দ্র হয় (যখন বস্তুটি সাম্যে ছিল) তাহলে H' কে বলা হবে ঘূর্ণনের পর নতুন অবস্থায় প্লবতা কেন্দ্রের অবস্থান। প্রথমতঃ GH একই উল্লম্বরেখায় অবস্থানরতঃ ঘূর্ণনের পর নতুন H' দিয়ে প্লবতাবল ঊর্ধ্বদিকে ক্রিয়া করবে। এই ক্রিয়ারেখা GH-কে ছেদ করতেও পারে নাও পারে।

17.5 পরাকেন্দ্রের সংজ্ঞা, পরাকেন্দ্রিক উচ্চতা, ভাসমান বস্তুর সামতলিক অবস্থান, ভাসমান বস্তুর সমগ্র তলের অবস্থান এবং প্লবতার সমগ্রতলের অবস্থান

17.5.1 পরাকেন্দ্র (সংজ্ঞা) ঃ

মুক্তভাবে ভাসমান কোন বস্তুর উপর একটি ছোট ঘূর্ণন প্রয়োগ করার পর যদি বস্তু কর্তৃক অপসারিত তরলের পরিমাণ অপরিবর্তিত থাকে, তাহলে পরিবর্তনে অবস্থার প্লবতাকেন্দ্রের মধ্য দিয়ে অঙ্কিত উল্লম্ব রেখা বস্তুটির ভারকেন্দ্র ও আগের অবস্থানের প্লবতাকেন্দ্রের সংযোগরেখাকে যে বিন্দুতে (যদি এরকম বিন্দুর অস্তিত্ব থাকে) ছেদ করে, তাকে ঐ বস্তুর পরাকেন্দ্র বলা হয়।



প্রথম ছবি দ্বিতীয় ছবি তৃতীয় ছবি

নিচের ছবিগুলি সাহায্যে ধারণাটি অধিকতর পরিষ্কার হয়ে এখানে প্রথম ছবিটি বস্তুটির সাম্যাবস্থায় প্রথম অবস্থানে অবস্থা নির্দেশ করছে। বাকিদুটি ছোট কৌণিক সরণের পর তাদের অবস্থান সূচিত করছে। ধরা যাক ভেসে থাকা শর্ত দুটি তারা পালন করছে। এক্ষনো বস্তুর উপর ক্রিয়ার বলদ্বয় হয়েছে

G ভারকেন্দ্র দিয়ে নিম্নমুখী ওজন W এবং H' দিয়ে (প্লবতাকেন্দ্র) ঊর্ধ্বমুখী প্লবতা বল। এই দুটি বল একটি দ্বন্দ্ব (Couple) তৈরি করবে। এখন দুটি স্থলে (case)-এর ব্যাখ্যা করা যায়। পরাকেন্দ্র M, 'G'-এর নীচে থাকতে পারে (দ্বিতীয় ছবি দ্রষ্টব্য), সেক্ষেত্রে দ্বন্দ্বটি HG-এর উল্লম্বের সাথে নতকে আরও বাড়তে সচেষ্ট হবে বা বস্তুটিকে প্রথম অবস্থানের তুলনায় আরও ঘোরাবার চেষ্টা করবে। দ্বিতীয় স্থলে (case) M, 'G'-এর উপরে অবস্থান করতে পারে (তৃতীয় ছবি প্রযোজ্য), সেক্ষেত্রে দ্বন্দ্বটি বস্তুটিকে প্রথমাবস্থায় (যেখানে HG উল্লম্বছিল) ফিরিয়ে নিয়ে যেতে চাইবে।

সুতরাং সাম্যাবস্থাটি সুস্থিত বা অস্থিত হবে যথাক্রমে M যদি G-এর উপরে বা নীচে থাকে।

উপরের আলোচনায় GM-কে ভাসমান বস্তুর পরাকেন্দ্রিক উচ্চতা (Metacentric height) বলা হয়। যদি 'θ' একটি ছোট ঘূর্ণন কোণ হয় তাহলে যে দ্বন্দ্বটি θ-কে বাড়াতে বা কমাতে চাইবে তার মান $W.GM.\theta$ যদি একটি বস্তু আংশিক নিমজ্জিত অবস্থায় তরলে ভাসমান হয় তাহলে তরলে মুক্ত উপরিতল বস্তুটির প্রস্থচ্ছেদ বরাবর যে তলে মিলিত হয় তাকে ভাসমান বস্তুর তল (Plane of flotation) বলা হয়।

ভাসমান তল যে পরিমাণ উপরিতলকে আচ্ছাদিত করে, তাকে ভাসমান বস্তুর সমগ্রতল (Surface of flotation) বলা হয়।

যদি সমসত্ত্ব তরলে ভাসমান কোন বস্তুকে একস্থান থেকে অন্যস্থানে সরাবার ফলে অপসারিত তরলের আয়তন অপরিবর্তিত থাকে, তাহলে বস্তুতে প্লবতা কেন্দ্রের সঞ্চারপথকে প্লবতার সমগ্রতল (surface of buoyancy) বলা হয়।

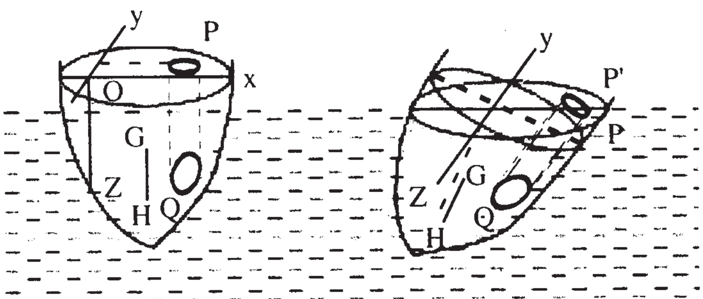
17.5.2

এই অধ্যায়ে নিম্নলিখিত বিষয়বস্তুগুলি আলোচিত হবে

(i) অপসারিত তরলের আয়তনের অপরিবর্তিতা এবং তার ফল।

(ii) পরাকেন্দ্রের অস্তিত্ব।

(iii) পরাকেন্দ্রের উচ্চতা নির্ণয় এবং প্রথমাবস্থায় ফিরিয়ে আনার দ্বন্দ্ব।



প্রথমচিত্র দ্বিতীয়চিত্র

উপরের চিত্রতে OY হল ভাসমান সমতল এবং OZ উল্লম্বভাবে নিম্নমুখী (প্রথম চিত্র)। A যদি

OY-এর ক্ষেত্রফল হয়, V হল বস্তুর নিমজ্জিত অংশের আয়তন এবং $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ হল প্লবতা কেন্দ্র H-এর স্থানাঙ্ক। এছাড়াও G-কে বস্তুর ভারকেন্দ্র হিসাবে চিহ্নিত করা হল।

এক্ষণে OY অক্ষ স্বাপেক্ষে বস্তুটি 'θ' কোণে (ছোট) আবর্তিত হল ; OX, OY অক্ষকে নিয়ে (চিত্র 2), যদি H নতুন প্লবতা কেন্দ্র হয় তাহলে তার স্থানাঙ্ক ধরা হল $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$

প্রথমাবস্থায় (প্রথমচিত্র), P বিন্দুর স্থানাঙ্ক ধরা হল (x, y) (ভাসমান সমতলে) এবং Q হল উল্লম্বভাবে P-এর নিচে একটি বিন্দু যার স্থানাঙ্ক (x, y, z). PQ-কে অক্ষ ধরে একটি ছোট চোঙ অঙ্কন করা হল যার প্রস্থচ্ছেদ dA, চোঙটির দৈর্ঘ্য Z হলে এর আয়তন ZdA.

$\therefore$ নিমজ্জিত অংশের আয়তন $V = \int ZdA$

যেখানে সমাকলটি ভাসমান সমতলের উপর করা হয়েছে। দ্বিতীয় চিত্রে ভাসমান সমতলটি পরিবর্তিত হয়েছে। ধরা যাক চোঙটির অক্ষকে বর্ধিত করলে নতুন তলটিকে P' বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু $OP = x$ এবং $\angle POP' = \theta$, সুতরাং $PP' = x\theta$, অর্থাৎ চোঙটির বর্তমান দৈর্ঘ্য $= Z + x\theta$ এবং এর আয়তন হবে $(Z + x\theta)dA$

$\therefore$ বর্তমান অবস্থায় নিমজ্জিত অংশের আয়তন $= \int (z + x\theta)dA$ নতুন ভাসমান সমতলের উপর সমাকলটি নেওয়া হয়েছে।

ধরা যাক, নিমজ্জিত অংশের আয়তন দুক্ষেত্রেই সমান তাহলে,

$$\int (Z + Z\theta)dA = \int ZdA$$

$$\Rightarrow \int xdA = 0$$

সুতরাং সেক্ষেত্রে সমগ্রতলের (Surface section) ভারকেন্দ্র (centroid) Oy-এর উপর অবস্থান করবে। এ থেকে যে শর্তটি পাওয়া যাচ্ছে তা উপপাদ্য রূপে প্রকাশ করা হল।

উপপাদ্য ঃ

কোন বস্তুকে সমান তল দ্বারা তার কিছুটা আয়তন কাটা হলে যদি সেই পরিমাণ অংশের আয়তন তলটির ছোট সরণের জন্য ধ্রুবক থাকে, তাহলে তলটি যে অক্ষ স্বাপেক্ষে আবর্তিত হয় সেটি ওই তলের অংশের ভরকেন্দ্র দিয়ে যাবে।

এক্ষণে ধরা যাক আয়তনের ধ্রুবক থাকার ব্যাপারটি উপরের চিত্রদ্বয় মেনে চলে। তাহলে PQ-এর ভারকেন্দ্র হবে (চিত্র প্রথম) $H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ যেখানে

$$V\bar{x} = \int xzdA, \ \ V\bar{y} = \int yzdA, \ V\bar{z} = \frac{1}{2}\int z^2 dA.$$

(চিত্র 2য়), $P'Q$-এর দৈর্ঘ্য $z + \theta x$ P থেকে এর ভারকেন্দ্রের দূরত্ব

$$= \frac{1}{2}(z + \theta x) - \theta x = \frac{1}{2}(z - \theta x),$$

$(z + x\theta)dA$ অংশের ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হবে—

x, y এবং $\frac{1}{2}(z-\theta x)$,

সুতরাং, $H' = (\bar{x}|\bar{y}|\bar{y})$ হবে।

$$V\bar{x} = \int x(z+x\theta)dA,\ V^{-\bar{y}} = \int y(z+x\theta)dA$$

$$V\bar{z} = \frac{1}{2}\int\left(z^2 - x^2\theta^2\right)dA$$

'θ' খুব ছোট বলে θ^2-কে ধর্তব্যের মধ্যে না আনলে, আমরা পাই বা $\bar{Z} = \vec{Z}\ HH'$; xOy তলের সাথে সমান্তরাল হবে (বা ভাসমান সমতলের সাথে)।

এ থেকে আমরা নিম্নরূপ সিদ্ধান্ত করতে পারি।

Note : প্লবতার সমগ্রতলের কোন বিন্দুতে স্পর্শতল সেই অবস্থানে ভাসমান বলের সাথে সমান্তরাল হবে। পরাকেন্দ্রের অস্তিত্বের জন্য, GH এবং H' দিয়ে অঙ্কিত উল্লম্বকে ছেদ করতে হবে, যা তাদেরকে একই তলে অবস্থিত হতে হবে। সেটি হবে একটি উল্লম্বতল যা xOZ তলের সমান্তরাল।

$$\therefore\ \bar{y} = \bar{y}'$$

$$\Rightarrow \int yzdA = \int y(Z+x\theta)dA$$

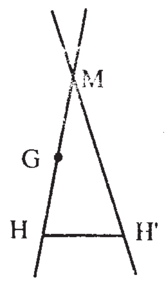
$$\Rightarrow \int xydA = 0$$

∴ 'A' ক্ষেত্রের ox এবং oy অক্ষ সাপেক্ষে জাড্যের গুণফল শূন্য হচ্ছে যা তখনই সম্ভব যখন Ox, Oy হবে ছেদিত সমগ্রতলের একটি বিন্দু 'O'-তে প্রধান অক্ষ (Principal axes)

উপরের সিদ্ধান্তটি অবশ্যই সিদ্ধ হয় যখন ঘূর্ণনের অক্ষ ছেদিত সমগ্রতলের প্রতিসাম্য অক্ষ হয়।

আমরা ধরব এই শর্তটি সিদ্ধ হয় এবং পরাকেন্দ্র (metacentre)-এর অস্তিত্ব আছে।

যেহেতু HG এবং H'-এর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত উল্লম্ব xoz তলের সমান্তরাল তলে থাকে এবং যেহেতু HH', xoy তলের সাথে সমান্তরাল,



$$\therefore\ HH' = \bar{x}' - \bar{x}$$

$$= \frac{1}{V}\left[\int x(z + x\theta)dA - \int xzdA\right]$$

$$= \frac{\theta}{V}\int x^2 dA$$

কিন্তু $\int x^2 dA$ হল ছেদিততল A-এর OY অক্ষস্বাপেক্ষে জাড্যভ্রামক।

$$\therefore \int x^2 dA = Ak^2$$

যেখানে k হল 'A' ক্ষেত্রের Oy অক্ষস্বাপেক্ষে আবর্তন ব্যাসার্ধ।

যেহেতু 'θ' খুব ছোট কোণ,

$$HH' = HM.\theta$$

$$\therefore\ HM = \frac{\int x^2 dA}{V} = \frac{Ak^2}{V}$$

সুতরাং, HM শুধুমাত্র A এবং আয়তন V-এর উপর নির্ভরশীল।

পরাকেন্দ্রিক উচ্চতা (GM) হল,—

$$GM = HM - HG = \frac{Ak^2}{V} - HG = (AK^2 - V.HG) / V$$

যে অঞ্চলে বস্তুটি ভাসমান তার ঘনত্ব f হলে,

$W = g\rho V$, সুতরাং দ্বন্দ্বের মান বা প্রথমাবস্থায় নিয়ে যেতে সাহায্য করে,

$= W.GM.\theta = g\rho\theta\ (Ak^2 - V.HG)$.

সুতরাং সাম্যাবস্থাটি সুস্থিত হবে, যদি $HG < Ak^2/V$ হয়।

Note : একটি ক্ষেত্রের দুটি প্রধান অক্ষ থাকার জন্য k_1 এবং k_2 দুটি আবর্তন ব্যাসার্ধ আছে। ফলতঃ সাম্যাবস্থাটি সুস্থিত এর যদি $HG < Ak^2/V$ এবং $HG < Ak_2{}^2/V$ হয়।

এক্ষণে যদি θ-কে বৃদ্ধি করে $\theta + \delta\theta$ করা হয়, তাহলে এক্ষেত্রে কাজ করা হল $= W.GM.\theta.\delta\theta$

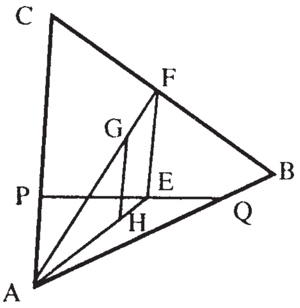
সুতরা কৌণিকসরণ 'θ' = এর জন্য মোট কাজ করা হল—

$$= \int_0^\theta w.GM.\theta d\theta = \frac{1}{2}W.GM.\theta^2 = \frac{1}{2}g\rho(Ak^2 - V.H.G)\theta^2$$

17.6 বিশেষভাবে নির্ধারিত অবস্থানের জন্য পরাকেন্দ্রের গভীরতার সূত্র নির্ণয় এবং পরাকেন্দ্রের অবস্থানের বিবিধ বৈশিষ্ট্য

ধরা যাক কোনো ভাসমান পাতের নিমজ্জিত অংশের (যার তলটি উল্লম্ব) আকার নিম্নরূপ।

(a) ত্রিভুজাকার ঃ



ধরা যাক PQ হল ভাসমান রেখা এবং H হল অপসারিত তরলের ভারকেন্দ্র।

সাম্যাবস্থার জন্য—

CAB ত্রিভুজের ওজন

$= PAQ$ ত্রিভুজ কর্তৃক অপসারিত তরলের ওজন

অথবা, $\dfrac{\text{CAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল}}{\text{PAQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{\text{তরলের ঘনত্ব}}{\text{পঞ্চটির ঘনত্ব}}$

$\therefore$ PQ-এর যে-কোনো অবস্থানের জন্য ΔPAQ-এর ক্ষেত্রফল ধ্রুবক।

সুতরাং PQ-এর মধ্যবিন্দু সবসময় একটি পরা বৃত্তকে স্পর্শ করবে যার AB, AC হলদুটি স্পর্শপ্রবণ রেখা (asymptotes)

HG এখানে PQ-এর উপর লম্ব হবে এবং।

যেহেতু, $AH : HE = AG : GF$,

$\therefore$ FE অবশ্যই PQ-এর উপর লম্ব হবে, *ie*, E বিন্দুতে পরাবৃত্তের উপর লম্ব (normal)।

ধরা যাক $xy = C^2$ ....(i)

হল প্লবতার বক্ররেখার সমীকরণে যার স্পর্শপ্রবণ রেখাদ্বয় AB ও AC।

$\angle BAC = \theta$, $AB = 2a$, $AC = 2b$.

'BC'-র মধ্যবিন্দু 'F'-এর স্থানাঙ্ক (a, b) হবে।

'E' বিন্দুর স্থানাঙ্ক ধরি (x, y) যা (i) সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

ξ, η-কে বর্তমান স্থানাঙ্ক (current co-ordinate) ধরে লম্বের (normal)-এর সমীকরণ 'E' বিন্দুতে পাই—

$$\eta - y = \frac{y\cos\theta - x}{x\cos\theta - y}(\xi - x)$$

নর্ম্যালটি $F(a, b)$ দিয়ে যায়,

$\therefore$ $(b - y)(x \cos\theta - y) = (a - x)(y \cos\theta - x)$

বা, $x^2 - (a + b \cos\theta)x = y^2 - (a \cos\theta + b)y$ ....(ii)

(i) এবং (ii)-কে সমাধান করে আমরা পরাবৃত্তের সেইসব বিন্দু পাই সেখানে স্পর্শকগুলি ভাসমানরেখা হতে পারে।

এই সব স্থানাঙ্কের 'x' অংশ নিম্নলিখিত সমীকরণ থেকে পাই—

$$x^2 - (a + b\cos\theta)x = \frac{C^4}{x^2} - (a\cos\theta + b)\frac{C^2}{x}$$

বা, $x^4 - (a + b \cos\theta)\, x^3 + (a \cos\theta + b)\, c^2x - c^4 = 0$

এর কেবল একটি ঋণাত্মক বীজ এবং একটি বা তিনটি ধনাত্মক বীজ আছে।

ঋণাত্মক বীজটিকে অগ্রাহ্য করলে, আমরা পাই, যে তিনটি বা একটি সাম্যাবস্থার জায়গা সম্ভব।

E এবং F যথাক্রমে PQ ও BC-এর মধ্যবিন্দু হবার জন্য, PAQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল—

$$= \frac{1}{2} AP.AQ.\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}.2x.2y.\sin\theta$$

$$= 2xy\sin\theta$$

$$= 2c^2 \sin\theta$$

এবং CAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল—

$$= \frac{1}{2} AB.AC.\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}.2a.2b.\sin\theta$$

$$= 2ab \sin\theta$$

সুতরাং সাম্যাবস্থার জন্য—

$$\frac{2ab\sin\theta}{2c^2\sin\theta}=\frac{\rho}{\sigma}$$

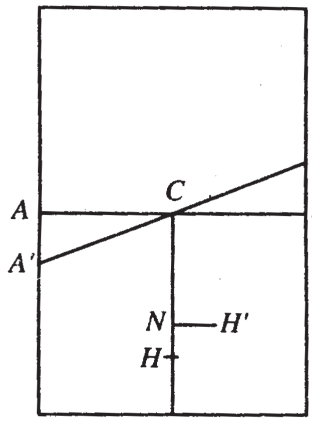
বা, $c^2=\frac{\rho}{\sigma}ab$

যেখানে ρ এবং σ হল যথাক্রমে তরল এবং পাতের ঘনত্ব। সুতরাং 'c' কে নিরুপণ করা গেল।

(b) আয়তাকার ঃ

$A'CB$ এবং ACB ভাসমান রেখার স্বাপেক্ষে ধরা যাক H ও H' হল ভরকেন্দ্র অবস্থান।

ধরা যাক $AC = CB = a$, $BB' = \xi$, $CH = C$ এবং ছেদিত ক্ষেত্রফল $= S$ H এর স্বাপেক্ষে H-এর স্বাপেক্ষে H' এর স্থানাঙ্ক (x, y), যাকে $HN = x$ এবং $NH' = y$, তাহলে—



$$Sx = S.HN = \frac{1}{2}a\xi\left(C+\frac{1}{3}\xi\right)-\frac{1}{2}a\xi\left(C-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}a\xi^2$$

$$Sy = S.NH' = \frac{1}{2}a\xi.\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}a\xi\left(-\frac{2}{3}a\right)=\frac{2}{3}a^2\xi$$

ξকে অপনয়ন করে আমরা H'-এর সঞ্চারপথ পাই—

$$Sy^2=\frac{3}{4}a^3x$$

এটি একটি অধিবৃত্ত এবং প্লবতার বক্ররেখাকে উপস্থাপিত করে। ভাসমান বক্ররেখা এক্ষেত্রে একটি মাত্র বিন্দু।

(c) অধিবৃত্তাকার ঃ

ভাসমান ও প্লবতার বক্ররেখা এখানে সমান অধিবৃত্তসমূহ।

(d) উপবৃত্তাকার ঃ

ভাসমান ও প্লবতার বক্ররেখা এক্ষেত্রে একই রকম অবস্থিত সমকেন্দ্রিক উপবৃত্তসমূহের চাপ (arcs)।

(e) পরাবৃত্তাকার ঃ

ভাসমান ও প্লবতার বক্ররেখা এক্ষেত্রে একইরকম পরাবৃত্তের চাপসমূহ।

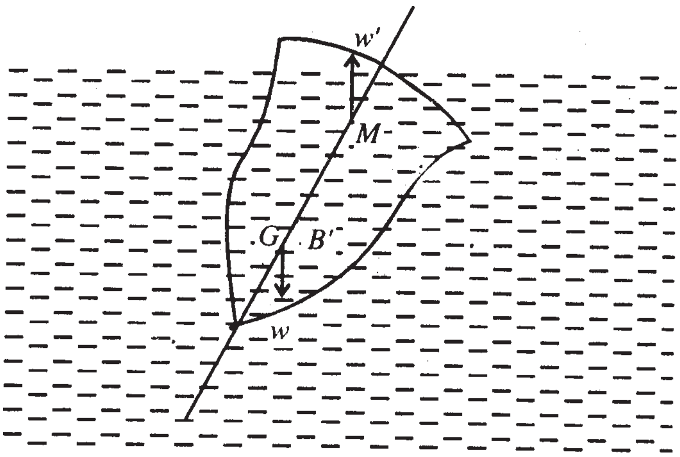
17.7 সুস্থিতি সাম্য এবং অস্থিতি বিভিন্ন অবস্থানের কারণ নির্ণয়

17.7.1

ভাসমান বস্তুর সাম্য তিন প্রকার হতে পারে,

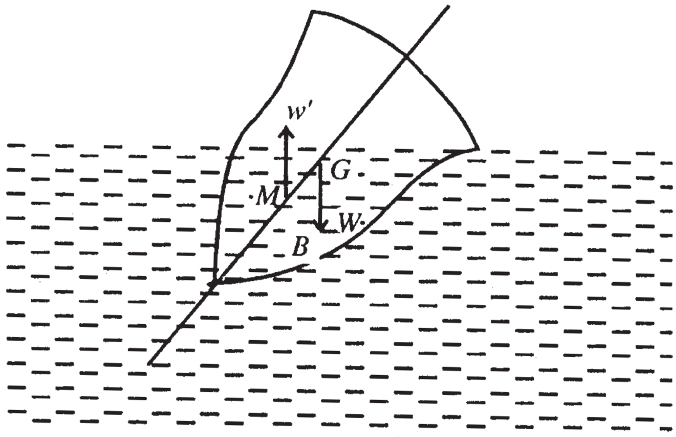
(i) নিরপেক্ষ সাম্য (Neutral equilibrium), (ii) সুস্থির সাম্য (stable euilibrium এবং (iii) অস্থির সাম্য (Unstable equilibrium)। সাম্যাবস্থান থেকে সামান্য বিচ্যুত করলে ভাসমান বস্তু কিরূপ সাম্যে আছে তা নির্ণয় করা যায়।

(i) নিরপেক্ষ সাম্য ঃ সাম্যাবস্থান থেকে সামান্য বিচ্যুত করলে যদি ভাসমান বস্তুর প্লবতা কেন্দ্রের অবস্থান অপরিবর্তিত থাকে, তবে ঐ বস্তু নিরপেক্ষ সাম্য অবস্থায় ভাসছে বলা যায়। এক্ষেত্রে বস্তুর ভারকেন্দ্র ও প্লবতা কেন্দ্র সব সময় একই উল্লম্ব রেখায় থাকে। ভাসমান গোলক এরূপ সাম্যের উদাহরণ।



(ii) সুস্থির ও (iii) অস্থির সাম্য ঃ ভাসমান বস্তুকে সাধারণতঃ সামান্য বিচ্যুত করলে ওর প্লবতা কেন্দ্রের অবস্থান পরিবর্তিত হয়। বস্তু যেদিকে বিচ্যুত হয়, সেদিকে বেশি পরিমাণ তরল অপসারিত

হয় বলে প্লবতা কেন্দ্র ঐ দিকে সরে যায়। মনে করি প্লবতা কেন্দ্রের পরিবর্তিত অবস্থান B' [চিত্র দ্রষ্টব্য] এখন আর বস্তুর ওজন (w) এবং প্লবতা (w') একই—উল্লম্ব রেখায় ক্রিয়া করে না, ফলে বল দুটি একটি দ্বন্দ্ব গঠন করে।



এই দ্বন্দ্ব যদি বিচ্যুত বস্তুকে আবার ওর প্রাথমিক অবস্থানে ফিরিয়ে আনতে চেষ্টা করে, তাহলে বস্তুর সাম্যকে সুস্থির সাম্য বলা হয় (চিত্র 1)। কিন্তু এই দ্বন্দ্ব যদি বিচ্যুত বস্তুকে আরও বেশি বিচ্যুত করে উল্টে দিতে চেষ্টা করে তাহলে বস্তুর সাম্যকে অস্থির সাম্য বলা হয় (চিত্র 2)।

17.7.2 ভাসমান বস্তুর বিষয়ে দুটি প্রয়োজনীয় সম্পর্ক

ধরি, V আয়তনের এবং ρ ঘনত্বের একটি বস্তু ρ' ঘনত্বের একটি তরলে ভাসছে। বস্তুটির তরলে নিমজ্জিত অংশের আয়তন v হলে অপসারিত তরলের আয়তন v হবে। সুতরাং ভাসনের শর্তানুসারে, বস্তুর ওজন = অপসারিত তরলের ওজন

অর্থাৎ, $$V\rho g = v\rho' g$$

বা, $$\frac{v}{V} = \frac{\rho}{\rho'}$$

$$\therefore \frac{\text{বস্তুর নিমজ্জিত অংশের আয়তন}}{\text{বস্তুর মোট আয়তন}} = \frac{\text{বস্তুর ঘনত্ব}}{\text{তরলের ঘনত্ব}}$$

এখন যদি বস্তুর আয়তনের 'n' ভগ্নাংশ তরলে নিমজ্জিত থাকে তবে,

$$\frac{v}{V} = n$$

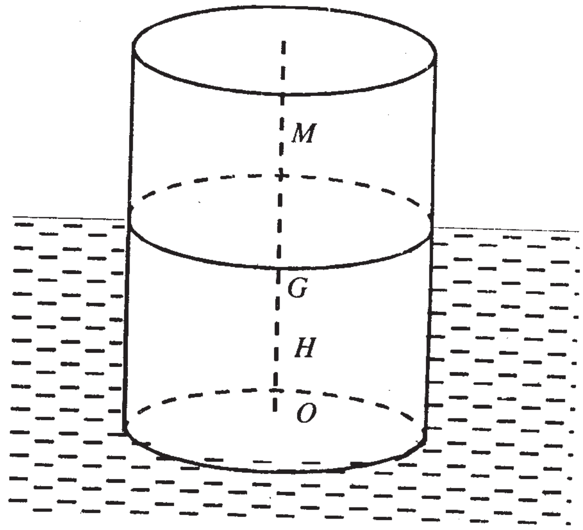
$$\therefore n = \frac{\rho}{\rho'}$$

বা, $\rho = n\rho'$

সুতরাং বস্তুর ঘনত্ব তরলের ঘনত্বের n গুণ হবে। বস্তু জলে ভাসলে $\rho = 1$; ঘনত্ব $\rho = n$, সুতরাং ভাসমান বস্তুর আয়তনের যে ভগ্নাংশ জলে নিমজ্জিত আছে তা বস্তুর ঘনত্বের সমান।

17.8 উদাহরণমালা

(1) h দৈর্ঘ্য ও a ব্যাসযুক্ত এবং a আপেক্ষিকগুরুত্ব বিশিষ্ট একটি সমসত্ত্ব বৃত্তাকার চোঙ জলে ভাসছে। প্রমাণ করুন যদি অক্ষটি উল্লম্ব অবস্থায় এটি সুস্থিত হয়, তাহলে $\frac{a^2}{h^2} > 2s(1-s)$ হবে।



সমাধান ঃ

ভাসমান হবার জন্য, $gs\pi a^2 h = g\pi s^2 h'$,

h' হল ডুবন্ত অংশের দৈর্ঘ্য, $\therefore\ h' = sh$

ভূমির কেন্দ্রকে 'O' ধরা হল,

তাহলে $OG = \frac{1}{2}h, OH = \frac{1}{2}h'$

$\therefore HG = \frac{1}{2}(h - h')$

$$HM = \frac{AK^2}{V} = \frac{\pi a^2 . \frac{1}{4}a^2}{\pi a^2 h'} = \frac{a^2}{4h'}$$

সাম্যটি সুস্থিত হবে, যদি $HM > HG$ হয়।

সেক্ষেত্রে, $\dfrac{a^2}{4h'} > \dfrac{1}{2}(h-h')$

$\Rightarrow a^2 > 2sh(h - sh)$

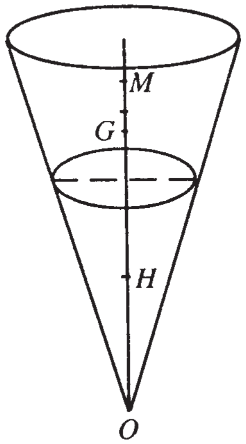
$\Rightarrow \dfrac{a^2}{h^2} > 2s(1-s)$ (প্রমাণিত)

(2) প্রমাণ করুন যে 2α শীর্ষকোণ বিশিষ্ট কোন সমসত্ত্ব লম্ববৃত্তাকার তার অক্ষকে উল্লম্ব রেখে এবং শীর্ষবিন্দুকে নিম্নমুখী অবস্থায় সুস্থিত অবস্থায় ভাসতে পারে না যদি না শঙ্কুর ঘনত্ব ও তরলের ঘনত্বের অনুপাত $\cos^6\alpha$ থেকে বড় হয়।

সমাধান ঃ

ধরা যাক h হল প্রচুর উচ্চতা এবং h' হল নিম্নজ্জিত অংশের দৈর্ঘ্য।

σ এবং ρ হল যথাক্রমে বস্তুর এবং তরলের ঘনত্ব।



ভাসবার জন্য,

$$\frac{1}{3}g\rho\pi h^2\tan^2\alpha = \frac{1}{3}g\rho\pi h'^3\tan^2\alpha$$

$\therefore\ \rho h^3 = \rho h'^3,$

বা, $\dfrac{h'^3}{h^2} = \dfrac{\sigma}{\rho}$

ধরা যাক O হল শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু তাহলে,

$$OG = \frac{3}{4}h,\quad OH = \frac{3}{4}h',$$

$$\therefore HG = \frac{3}{4}h(h-h')$$

$$HM = \frac{Ak^2}{V} = \frac{\pi h'^2 \tan^2 \alpha \frac{1}{4} h'^2 \tan^2 \alpha}{\frac{1}{3}\pi h'^3 \tan^2 \alpha}$$

$$= \frac{3}{4} h' \tan^2 \alpha$$

সাম্যবস্থাটি সুস্থিত হবার জন্য

$$HM > HG$$

বা, $\frac{3}{4} h' \tan^2 \alpha > \frac{3}{4}(h-h')$

বা, $h' sec^2 \alpha > h$

বা, $\frac{h'^3}{h^3} > \cos^6 \alpha$

$\therefore \frac{\sigma}{\rho} > \cos^6 \alpha$ (প্রমাণিত)

(3) 2নং সমস্যায় শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু ঊর্ধমুখী হলে সুস্থির সাম্যের শর্তটি কি হবে?

সমাধান ঃ দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ধরা যাক h' হল তরলের বাইরে অবস্থিত শঙ্কুর দৈর্ঘ্য। ভাসবার জন্য,

$$\frac{1}{3} g\sigma\pi h^3 \tan^2 \alpha = \frac{1}{3} g\rho\left(\pi h^3 - \pi h'^3 \tan^2 \alpha \tan^2 \alpha\right)$$

$$\therefore \sigma h^3 = \rho(h^3 - h'^3)$$

বা, $\frac{\dot{h}'^3}{h^3} = 1 - \frac{\sigma}{\rho}$

$$OG = \frac{3}{4} h$$

$$OH = \frac{\frac{3}{4}h.h^3 - \frac{3}{4}h'.h'^3}{h^3 - h^3} = \frac{3h^4 - h'^4}{4h^3 - h'^3}$$

$$\therefore HG = \frac{3}{4}\left[\frac{h^4 - h'^4}{h^3 - h'^3} - h\right]$$

$$HM = \frac{Ak^2}{V} = \frac{\pi h'^2 \tan^2 \alpha . \frac{1}{4} h'^2 \tan^2 \alpha}{\frac{1}{3}\pi \tan^2 \alpha \left(h^3 - h'^3\right)} = \frac{3}{4}\frac{h'^2 \tan^2 \alpha}{h^3 - h'^3}$$

সাম্যটি সুস্থিত হবার জন্য, $HM > GH$

$$\therefore \frac{3}{4} . \frac{h'^4 \tan^2 \alpha}{h^3 - h'^3} > \frac{3}{4}\left[\frac{h^4 - h'^4}{h^3 - h'^3} - h\right]$$

বা, $\tan^2 \alpha > \frac{h'}{h} - 1.$

বা, $\frac{h'^3}{h^3} > \cos^6 \alpha$

বা, $1 - \frac{\sigma}{\rho} > \cos^6 \alpha$

বা, $\frac{\sigma}{\rho} < 1 - \cos^6 \alpha$

এটিই প্রয়োজনীয় শর্ত। (উত্তর)

(4) একটি লেডেন জাহাজের সরল W টন এর এবং ভরকেন্দ্রে থেকে পরাকেন্দ্রের উচ্চতা a. এর ডেকের উপর থেকে w ওজনের মাল সরানোর জন্য জাহাজটি θ কোণে হেলে যায়। এবার মালটি উপরের ডেকের h উচ্চতা নীচে আরেকটি ডেকে স্থানান্তরিত করা হল এবং এর ঠিক প্রথম ডেকের দ্বিতীয় অবস্থানের নীচে রাখা হল। প্রমাণ করুন এক্ষণে জাহাজটি

$aw\theta/(aw + hw)$ কোণে হেলবে।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $GM = a$

প্রথম ক্ষেত্রে, $w.GM.\sin\theta' = wd \cos\theta$

বা, $W.a\theta' = wd$ [θ খুব ছোট]

দ্বিতীয়ক্ষেত্রে জাহাজটি যদি θ' কোণে হেলে যায়,

তাহলে, $W.GM.\ \sin\theta' = w\,(d\cos\theta' + h\sin\theta')$

বা, $W.a\theta' = wd - wh\theta'$

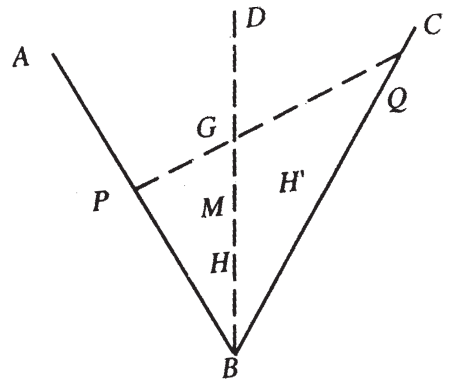
বা, $(Wa + wh)\ \theta' = wd$ [θ' খুব ছোট হবার জন্য]

$\therefore\ (aW + hw)\theta' = aw\theta$

বা, $\theta' = aW\theta/(aW + hw)$ (প্রমাণিত)

(5) ρ ঘনত্ব বিশিষ্ট ও সমপ্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট দুটি সমানদৈর্ঘ্যের দণ্ড 2α কোণে পরস্পর যুক্ত। কোণটিকে নিচের দিকে করে এদেরকে σ ঘনত্বের তরলে নিমজ্জিত করা হল। সাম্যের অবস্থান নির্ণয় করুন এবং প্রমাণ করুন যে প্লবতার বক্ররেখাটি অধিবৃত্ত হবে।

সমধান ঃ ধরা যাক $AB = BC = a$ হল দণ্ড দুটি এবং কৌণিক বিন্দু B তরলে নিমজ্জিত যেখানে $\angle ABC = 2\alpha$



ধরা যাক দুটি দণ্ডের যে পরিমাণ নিমজ্জিত আছে তার মোট দৈর্ঘ্য $= 2b$. এক্ষণে প্রতিসম (symmetrical) ক্ষেত্রের জন্য প্রত্যেকটি দণ্ড b পরিমাণ নিমজ্জিত হয় এবং অপ্রতিসম ক্ষেত্রের জন্য একটি $b + c$ এবং অন্যটি $B - C$ পরিমাণ নিমজ্জিত হয়।

BD কে $\angle ABC$ এর সমদ্বিখণ্ডক ধরা হল।

ভাসবার জন্য, $a\rho = b\sigma$ যদি 'G' ভারকেন্দ্র হয়, তাহলে $BG = \frac{1}{2}ba\cos\alpha$ (প্রথমাবস্থায়)

H যদি প্লবতাকেন্দ্র হয়, তাহলে $BH = \frac{1}{2} b\cos\alpha$.

$\therefore \frac{1}{2} HG = \frac{1}{2}(a-b)\cos\alpha$

বা, $HM = \frac{Ak^2}{V} = \frac{b\sin^3\alpha}{\cos\alpha}$

অপ্রতিসম অবস্থানের জন্য, H' যদি প্লবতা কেন্দ্র হয় যার স্থানাঙ্ক (x', y') যেখানে DB কে 'x' অক্ষ ধরা হয়।

তাহলে, $x' = \frac{\frac{1}{2}(b+c)^2\cos\alpha + \frac{1}{2}(b-c)^3\cos\alpha}{2b} = \frac{a^2+c^2}{2b}\cos\alpha$

এবং $y' = \frac{\frac{1}{2}(b+c)^2\sin\alpha - \frac{1}{2}(b-c)^2\sin\alpha}{2b} c\sin\alpha$

'c'-কে অপনয়ন করে পাই—

$$x' = \frac{b}{2}\cos\alpha + \frac{y'^2}{2b} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

সুতরাং, প্লবতার বক্ররেখাটি হল—

$$y^2 = \frac{2b\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\left(x - \frac{b}{2}\cos\alpha\right)$$

এটি একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ যার নাভিলম্ব $= \frac{2b\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$ এবং এর শীর্ষবিন্দু 'B' থেকে $\frac{b}{2}\cos\alpha$ দূরত্বে আছে, i,e, শীর্ষবিন্দুটি H.

প্লবতার বক্ররেখার উপর 'G' থেকে লম্ব (normal) অঙ্কন করে আমরা সাম্যাবস্থার অবস্থানগুলি পেতে পারি। 'G' থেকে শীর্ষবিন্দুর দূরত্ব অধনাভিলম্বের থেকে কম বা বেশি হবার জন্য যথাক্রমে একটি বা তিনটি এরকম নর্ম্যাল পাওয়া যাবে। (প্রমাণিত)

17.9 সংকেতসহ অনুশীলনী ও উত্তরমালা

(1) একটি কাঠের বল জলে ভাসছে। প্রমাণ করুন যে সাম্যাবস্থাটি অস্থির হবে যদি একটি ছোট (সে যত ছোটই হোক) ওজন বলটির সর্বোচ্চ বিন্দুতে রাখা হয়। (সংকেত ঃ অস্থির সাম্যের অধ্যায়ে দ্রষ্টব্য)

(2) একটি $2a$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট সমপ্রস্থচ্ছেদযুক্ত দণ্ড তরলের উপর h ($< 2a$) উচ্চতায় স্থির এর একপ্রান্ত স্বাপেক্ষে মুক্তভাবে ঘুরতে পারে। দণ্ড এবং তরলের ঘনত্ব যথাক্রমে P এবং σ হলে দেখান যে দণ্ডটি উল্লম্বভাবে অথবা উল্লম্বের সাথে θ কোণে স্থির থাকবে, যেখানে $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{h}{2a}\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma-\rho}}\right)$।

[**সংকেত ঃ** দণ্ডটিতে যতগুলি বল ক্রিয়া করছে তা স্থির করুন। এবার এর স্থির প্রান্তটির স্বাপেক্ষে বলগুলির ভ্রামক নিন।]

(3) $2l$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট কোন দণ্ডের (আঃ গুরুত্ব σ) একপ্রান্ত তরলের উপর h উচ্চতায় বাঁধা আছে। তরলটির আঃ গুরুত্ব $n\rho(n > 1)$ হলে এবং দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় কিছুটা নিমজ্জিত অবস্থায় আনত থাকলে, প্রমাণ করুন উল্লম্বের সাথে এটি $\cos^{-1}\left(\frac{h}{2l}\sqrt{\frac{n}{l-n}}\right)$ কোণে নত এবং নিমজ্জিত অংশের দৈর্ঘ্য $= 2l\left[1-\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right]$

[**আভাস ঃ** 2নং অনুশীলনীর, এখানে $\sigma = n\rho$ এবং নিমজ্জিত দণ্ডের দৈর্ঘ্য $=2l - h\ sec\theta$]

(4) অক্ষকে উল্লম্ব রেখে একটি চোঙ ভাসমান আছে। তরল স্বাপেক্ষে চোঙটির আপেক্ষিক গুরুত্ব σ হলে প্রমাণ করুন সাম্যাবস্থাটি সুস্থিত হবে যদি চোঙের ব্যাসার্ধ এবং উচ্চতার অনুপাত $[2\sigma(1-\sigma)]^{1/2}$-এর চেয়ে বেশি হয়। [**আভাস ঃ** উদাহরণমালা (i) নং দ্রষ্টব্য]

(5) একটি ফাঁপা শঙ্কু জলে ভাসছে যার ওজন এটিতে যতটা জল ধরে তার ওজনের অর্ধেক। শীর্ষবিন্দু নিম্নমুখী করে ও অক্ষকে উল্লম্ব রেখে এটি সুস্থির সাম্যে থাকলে প্রমাণ করুন α যদি এর অর্ধশীর্ষকোণ (semivertical angle) হয় তাহলে $\cos^6\alpha < \frac{729}{1024}$

[**আভাস ঃ** উদাহরণমালা (2) দ্রষ্টব্য]

(6) একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙের পরাকেন্দ্র বের করুন। দেওয়া আছে যে চোঙটির ব্যাসার্ধ α উচ্চতা h এবং এটি অক্ষকে উল্লম্বরেখে একটি তরলে ভাসমান যার ঘনত্ব চোঙের ঘনত্বের $\frac{4}{3}$ গুণ।

[**আভাস ঃ** সুস্থির সাম্যের শর্ত প্রযোজ্য] (উত্তর ঃ ভূমি থেকে $\frac{3}{8}h + \frac{1}{3}\frac{a^2}{h}$ উচ্চতায়)

(7) একটি শঙ্কু আকৃতির শেল শীর্ষবিন্দু নিম্নমুখী করে অস্থির সাম্যে ভাসমান। অস্থির সাম্যকে সুস্থির করতে হলে শঙ্কুটির ভেতর কি পরিমাণ জল ঢালতে হবে?

[**আভাস ঃ** শঙ্কু সংক্রান্ত উদাহরণমালা ও অস্থির সাম্য দ্রষ্টব্য]

(**উত্তর ঃ** x-এর সর্বনিম্ন মান যা সাম্যের সাথে যুক্ত হবে $9(h'^4 - x^4)\ sec^2\alpha = 8h(h'^3 - x^3)$ যেখানে h, h' এবং x হল যথাক্রমে শঙ্কুর উচ্চতা, তরলের বাইরে শঙ্কুর উচ্চতা এবং তরলে নিমজ্জিত অংশের দৈর্ঘ্য)

(8) A বিন্দু থেকে মুক্তভাবে একটি সমবাহু ত্রিভুজ। কৃতি পাত ঝোলানো আছে। এটির AB বাহুটি উল্লম্ব আছে এবং AC বাহু ঘন তরলের উপরিতল দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়েছে ও ত্রিভুজটি স্থির আছে। প্রমাণ করুন যে ত্রিভুজাকৃতিপাতটির ঘনত্ব ও তরলের ঘনত্বের অনুপাত = 15 : 16

[**আভাস ঃ** ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রটি নিরূপণ করে, সমস্ত বলের এই বিন্দুসাপেক্ষে ভ্রামক গণনা করুন]

(9) একটি অর্ধবৃত্তাকার চোঙ অক্ষকে জলতলে স্থির রেখে ভাসছে। যদি চোঙটিকে অক্ষ স্বাপেক্ষে সরানো যায় এবং এর ঘনত্ব জলের ঘনত্বের অর্ধেক হয়, দেখান যে এটি যেকোনো অবস্থায় সাম্য থাকবে। [**আভাস ঃ** কেন্দ্র থেকে ভরকেন্দ্রের দূরত্ব $= \dfrac{4a}{3\pi}, a$ হল এর ব্যাসার্ধ]

(10) একটি বর্গাকার পাতের ঘনত্ব ρ, এটি σ ঘনত্বের জলে ভাসছে। পাতটির তলটি উল্লম্ব এবং একটি কৌণিকবিন্দু জলতলের নীচে আছে। যদি $9\sigma > 32\rho$ হয় তবে প্রমাণ করুন যেমোট তিনটি জায়গায় সাম্যাবস্থা থাকবে যার দুটি ক্ষেত্রে কোনো কর্ণই উল্লম্ব হবে না।

[**আভাস ঃ** ত্রিভুজাকৃতি পাত সংক্রান্ত সমস্যাবলী এবং প্লবতা সংক্রান্ত ভাসমানবস্তুর প্রয়োজনীয় সম্পর্ক]

17.10 সারাংশ

এই অধ্যায়ে স্থিতাবস্থায় থাকা তরলপদার্থের মধ্যে নিমজ্জিত বা আংশিকভাবে নিমজ্জিত বস্তুর সাম্যাবস্থার বিভিন্ন পর্যায়ের অবস্থা নিয়ে এই অধ্যায়ে আলোচনা করা হয়েছে। মূলতঃ অস্থিতি স্থিতাবস্থা ও সুস্থিতি স্তিতাবস্থায় বিভক্ত করে বিষয়টি আলোচিত হয়েছে। স্থিতাবস্থার সাম্যের সংজ্ঞা ও স্থিতাবস্থার সাম্যের সর্তাবলী নিয়ে বিশদ আলোচনা করা হয়েছে। স্বাভাবিকভাবেই পরাকেন্দ্রের সংজ্ঞা ও অস্তিত্বের সর্তাবলী নির্ধারিত করা হয়েছে। প্রসঙ্গত ভাসমান বস্তুর সামতলিক অবস্থান, ভাসমান বস্তুর সমগ্রতলের অবস্থান ও প্লবতার সমগ্র তলের অবস্থান বিষয়ে ধারণা দেওয়া হয়েছে। পরাকেন্দ্রের গভীরতা বিষয়ক সূত্রটি প্রতিষ্ঠা করা হয়েছে। পরিশেষে কিছু উদাহরণ সহযোগে বিষয়টিকে আরো সহজবোধ্য করার প্রয়াস রাখা গেছে।

17.11 সহায়ক গ্রন্থাবলী

1. Bhudev Sharma : Hydrostatics (New Delhi)
2. J. M. Kar : Hydrostatics for degree classes (Globe library, Calcutta, 1972)

একক 18 ❑ বায়বীয় পদার্থের সাম্য

গঠন

18.1 প্রস্তাবনা

18.2 উদ্দেশ্য

18.3 বিষয় পরিচিতি

18.4 বায়বীয় পদার্থের সংজ্ঞা, সঙ্কোচন, আয়তন এবং ঘনত্বের উপর সংকোচনের প্রভাব

18.5 বায়ুমণ্ডলের চাপ

18.6 বায়বীয় পদার্থের চাপ, আয়তন এবং উচ্চতার মধ্যে সম্পর্ক

18.7 সমোষ্ণ (isothermal) বায়ুমণ্ডলের চাপ

18.8 কিছু বাস্তব গ্যাসের সমীকরণ (শুধুমাত্র বিবৃতি)

18.9 বায়বীয় পদার্থের সংকোচন প্রক্রিয়ায় কৃতকার্য্য

18.10 উদাহরণমালা

18.11 সংকেতসহ প্রশ্নাবলী ও উত্তরমালা

18.12 সারাংশ

18.13 সহায়ক গ্রন্থাবলী

18.1 প্রস্তাবনা

পূর্বেকার অধ্যায় সমূহে আমরা মূলতঃ তরল পদার্থের চাপ এবং ঘাত বিষয়ে বিস্তারিত আলোচনা এবং বিশ্লেষণ করেছি। কিন্তু প্রবাহ (fluid) বিদ্যায় শুধু তরলপদার্থের সাম্য বা অবস্থান-এর আলোচনা যথেষ্ট নয়। প্রবাহ বিদ্যার একটি আবশ্যিক অংশ হল বায়বীয় পদার্থের ধর্ম, তরল পদার্থ ও বায়বীয় পদার্থের মধ্যে মূল সম্পর্ক বা বৈষম্য সম্বন্ধে সম্যক ধারণা থাকা আবশ্যক। তরল পদার্থ বা বায়বীয় পদার্থের মূল সম্পর্ক হ'ল উভয় প্রকারের পদার্থ যে-কোনো চাপের কাছে নমনীয়। কিন্তু মূল বৈষম্য হ'ল তরল পদার্থ সবসময় তার আয়তন ধরে রাখতে পারে। কিন্তু বায়বীয় পদার্থ যে কোনো চাপের

কাছে আকার বা আয়তন এর ব্যাপারে নমনীয়, আয়তন পরিবর্তন হবার সঙ্গে সঙ্গে এটুকু বলা চলে যে বায়বীয় পদার্থসমূহে যে-কোনো চাপের জন্য ঘনত্ব পরিবর্তনশীল হয়। তাই মূলতঃ প্রযুক্ত বলের প্রভাবে সৃষ্ট চাপ বায়বীয় পদার্থের মধ্যে কতটা প্রভাব সৃষ্টি করে বিশেষ করে ঘনত্ব বা তাপমাত্রার পরিবর্তনের কথা চিন্তা করে কিছু সূত্র নির্ণয় করা আবশ্যক।

18.2. উদ্দেশ্য

উপরোক্ত অনুচ্ছেদে বলাই হয়েছে, যে আলোচ্য অধ্যায়ে আমরা প্রযুক্ত বলের প্রভাবে বায়বীয় পদার্থের চাপের বিষয়ে বিশ্লেষণ করব। বায়বীয় পদার্থের কিছু মৌলিক ধর্ম বিদ্যমান। সেই হিসাবে প্রযুক্ত বলের প্রভাবে বায়বীয় পদার্থের পরিবর্তন বিষয়ে আলোচনার প্রয়োজন। এই অনুচ্ছেদে প্রযুক্ত বলের সৃষ্ট চাপ বায়বীয় পদার্থের আকার, আয়তন, ঘনত্ব তথা তাপমাত্রার পরিবর্তন বিষয়ে আলোচনা করাটাই বায়ুমণ্ডল। এই মহাবিশ্বের একটা অংশ। বায়ুমণ্ডলের নিজস্ব প্রভাব আছে। প্রাকৃতিক নিয়মে তার প্রভাবে সৃষ্ট চাপ একটি গুরুত্বপূর্ণ ব্যাপার। আলোচ্য অনুচ্ছেদে এই বিষয়েও বিস্তারিত আলোচনা করা প্রয়োজন। এই অনুচ্ছেদে এই বিষয়সমূহ আলোচিত হবে।

18.3. বিষয় পরিচিতি

এই অধ্যায়ে বায়বীয় পদার্থের সংজ্ঞা ও তার মৌলধর্মগুলি আলোচনা করা হয়েছে। প্রথমতঃ চাপের প্রভাবে আয়তন বা ঘনত্বের পরিবর্তনের কারণে সংকোচন-এর সংজ্ঞা এবং সূত্র নিরূপিত হয়েছে। পরবর্তী অনুচ্ছেদে বায়ুমণ্ডলের চাপ, বায়বীয় পদার্থের চাপ, আয়তন, ঘনত্ব এবং উষ্ণতার মধ্যে সম্পর্কের সূত্র নির্ধারণ করা হয়েছে। সমোষ্ণ অবস্থায় বায়ুমণ্ডলের চাপ-এর সূত্র এবং কিছু বাস্তব গ্যাসের সমীকরণ উল্লেখ করা হয়েছে। বায়বীয় পদার্থের সঙ্কোচন প্রক্রিয়ার কৃতকার্য্য এর সূত্র নির্ধারণ করা হয়েছে। কিছু উদাহরণ সহযোগে উপরের আলোচনাটা আরো আকর্ষণীয় করার চেষ্টা হয়েছে।

18.4. বায়বীয় পদার্থের সংজ্ঞা, সঙ্কোচন, আয়তন এবং ঘনত্বের উপর সঙ্কোচনের প্রভাব

বায়বীয় পদার্থের সংজ্ঞা ঃ

যে প্রবাহী (Fluid পদার্থকে সহজেই সঙ্কুচিত করা যায় এবং আয়তন বাড়িয়ে অনির্দিষ্ট পরিমাণে প্রসারিত হতে দেওয়া যায় তাকে বায়বীয় পদার্থ বলা হয়।

সংকোচন, আয়তন এবং ঘনত্বের উপর এর প্রভাব ঃ

সংকোচন হল আয়তনের ঘাটতির (reduction)-এর সাথে পূর্ববর্তী আয়তনের অনুপাত। গাণিতিকভাবে

$$\text{সংকোচন} = -\frac{dv}{v} \qquad [\ v = \text{আয়তন}\ ]$$

এক্ষণে চাপবৃদ্ধির সাথে সংকোচনের অনুপাতকে আমরা স্থিতিস্থাপকতা (Elasticity) বলতে পারি।

$$\therefore\ \text{স্থিতিস্থাপকতা} = -dp\Big/\frac{dv}{v} \qquad [dp = \text{চাপের বৃদ্ধি}]$$

$$= -v\frac{dp}{dv}$$

এখন আমরা জানি $v = \frac{m}{\rho}$ [m = বায়বীয় পদার্থর ভর p = উহার ঘনত্ব]

$$\text{স্থিতিস্থাপকতা} = -v\frac{dp}{dv} = -v\frac{dp}{d\rho}\cdot\frac{d\rho}{dv} \qquad (\text{ভরকে ধ্রুবক ধরা হল})$$

$$= -\frac{m}{\rho}\cdot\frac{dp}{d\rho}\left[\frac{d}{dv}\left(\frac{m}{v}\right)\right] = \frac{m^2}{\rho}\cdot\frac{1}{v^2}\cdot\frac{dp}{d\rho}\cdot\frac{m^2}{\rho}\,\frac{\rho^2}{m^2}\cdot\frac{dp}{d\rho} = \rho\frac{dp}{d\rho}$$

অনুরূপভাবে বলতে পারি,

$$\text{সংকোচন} = \frac{dp}{\rho}$$

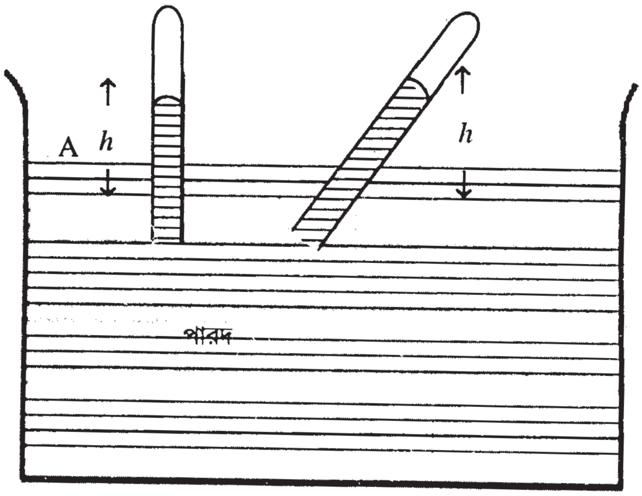
18.5. বায়ুমণ্ডলের চাপ

বায়ুমণ্ডল যেহেতু বায়বীয় পদার্থ বা গ্যাস, অতএব এর ওজন আছে এবং তা চাপ দেয়।

18.5.1. ব্যারোমিটার ও তৎসংক্রান্ত বিষয়াবলী ঃ

যে যন্ত্রের সাহায্যে বায়ুমণ্ডলের চাপ মাপা হয় তাকে ব্যারোমিটার (Barometer) বলা হয়।

একটি সমপ্রস্থচ্ছেদযুক্ত ও প্রায় তিনফুট লম্বা কাচের নল নেওয়া হল যার একটি দিক মুক্ত এবং অন্যদিক বন্ধ। এবার একে পারদপূর্ণ করে একটি পারদপূর্ণ পাত্রের ভেতর এর মুক্তদিকটি প্রবেশ করিয়ে উল্লম্ব করে ধরা হল। (চিত্র দ্রষ্টব্য)



চিত্র

দেখা যাবে যে অবধি নির্দিষ্ট উচ্চতা একটি পারদস্তম্ভ আছে ও তার উপরটি বায়ুশূন্য ও ফাঁকা। এবার নলটি একটু কাত করলে দেখা যাবে এই ফাঁকা স্থানে পারদ ঢুকে পড়ছে। কিন্তু উল্লম্ব দৈর্ঘ্য (পারদের) একই আছে। পারদে স্তম্ভের এই উচ্চতাকে তরলের ব্যারোমিটারের উচ্চতা বলে। আর উপরের শূন্যস্থানকে টরিসেলির শূন্যস্থান বলা হয় (Torricellian vacumm)।

চিত্রের h = 29 থেকে 30 ইঞ্চি (পারদের জন্য)

সাম্যাবস্থার জন্য বায়ুমণ্ডলীয় চাপ পারদস্তম্ভকে ধরে রাখে।

$\therefore$ A বিন্দুতে চাপ = B বিন্দুতে চাপ (চিত্র দ্রষ্টব্য)

সুতরাং, বায়ুমণ্ডলীয় চাপ $\prod$ = gph. যেখানে ρ হল পারদের ঘনত্ব, h হল পারদস্তম্ভের উচ্চতা এবং A, B একই অনুভূমিক তলে আছে।

পারদের বদলে জল ব্যবহার করলে h=33 থেকে 34 ফুটের মত হবে।

18.5.2 ব্যারোমিটারের সাহায্যে পর্যবেক্ষণের ত্রুটিমুক্তকরণ (Corrections)

(1) ধারণ ক্ষমতার ত্রুটিমুক্তকরণ (Correction for capacity)

এখন, পারদস্তম্ভের উচ্চতার পরিবর্তনের জন্য কিছু পারদ নলে ঢুকছে বা নল থেকে বেরিয়ে যাচ্ছে। ফলতঃ পাত্রের পারদতলের পরিবর্তন হচ্ছে।

এই ব্যাপারটিকে ঠিক রাখার জন্য আমাদের উচ্চতাকে ত্রুটিমুক্ত করতে হবে। প্রথমে ধরা যাক পারদস্তম্ভের উচ্চতা h ছিল, এবার ধরা যাক নলের মধ্যে পারদের উচ্চতা x বৃদ্ধি পেয়েছে। a, A হল যথাক্রমে নল ও পাত্রের প্রস্থচ্ছেদ। যেহেতু মোট পারদের পরিমাণ ধ্রুবক, ফলতঃ ax পরিমাণ পারদ পাত্র থেকে যাবার জন্য পাত্রের পারদের তল x' পরিমাণ কমে গেছে,

যেখানে, $x'A = ax, i.e. x' = \frac{a}{A}x.$

সুতরাং, নলের পারদস্তম্ভের নতুন ত্রুটিমুক্ত উচ্চতা $= h + x + x' = h + x + \frac{a}{A}x$

$\therefore$ ত্রুটিমুক্তকরণ $= +\frac{a}{A}x$

(2) উষ্ণতার জন্য ত্রুটিমুক্তকরণ ঃ

পারদ উষ্ণতা বৃদ্ধির সাথে আয়তনে বাড়ে। সুতরাং ব্যারোমিটারের উচ্চতাও বাড়ে, কিন্তু বায়মণ্ডলীয় চাপ ধ্রুবক থাকে। 0^oC-এ উচ্চতা h_0 এবং t^oC-এ তা h হলে যদি ρ_0, ρ_t যথাক্রমে সেই উষ্ণতার ঘনত্ব হয়।

তাহলে, $\Pi = g\rho oho = g\rho_t h$

কিন্তু $Po = Pt(1 + \gamma t)$

γ হল পারদের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক।

$\therefore h_0 = h/(1+\gamma t) \cong h(1-\gamma t)$

$\therefore$ **ত্রুটিমুক্তকরণ** $= -\gamma ht$

এবার নলটিও আয়তনে বাড়বে উষ্ণতা বৃদ্ধির সাথে। x যদি পর্যবেক্ষিত উচ্চতা হয়, তাহলে t^oC-এর প্রকৃত উচ্চতা হবে $= x(1 + \alpha t)$ [α = পরিমাপ নলের প্রসারণ গুণাঙ্ক]

$\therefore$ এ স্থলে ত্রুটিমুক্তকরণ $= +x\alpha t.$

(3) ক্যাপিলারিটির জন্য ত্রুটিমুক্তকরণ ঃ

এই ত্রুটিমুক্তকরণের জন্য একটি ধনাত্মক সংখ্যা যোগ করতে হবে এবং যা প্রত্যেক ব্যারোমিটারের ক্ষেত্রে পর্যবেক্ষণ করে নির্ণয় করতে হবে।

(4) সমুদ্রপৃষ্ঠ থেকে অধিক উচ্চতার জন্য ত্রুটিমুক্তকরণ ঃ

সমুদ্রপৃষ্ঠ থেকে অধিক উচ্চতায় যেহেতু বায়ুমণ্ডলের চাপ কম, সুতরাং, ব্যারোমিটারের উচ্চতায় কম হবে।

(5) অভিকর্ষহেতু ত্রুটিমুক্তকরণ ঃ

পৃথিবীর বিভিন্ন স্থানে ও উচ্চতায় অভিকর্ষের মানের তারতম্যের জন্য পারদস্তম্ভের ওজনের তারতম্য হবে। ফলতঃ ব্যারোমিটারে উচ্চতাও পরিবর্তিত হবে।

18.6 বায়বীয় পদার্থের চাপ, আয়তন এবং উষ্ণতার মধ্যে সম্পর্ক

(1) স্থির ভরের বিন্দুটা বায়বীয় পদার্থের উচ্চতা স্থির থাকলে তার চাপ আয়তনের সাথে ব্যস্তানুপাতী হবে। একেই বয়েলের সূত্র (Boyle's law) বলা হয়।

অর্থাৎ p যদি চাপ এবং v যদি আয়তন হয় সেক্ষেত্রে pv = ধ্রুবক হবে।

এখন ভর যেহেতু ধ্রবক সেহেতু $v = \dfrac{m}{\rho}$ [ρ ঘনত্ব] থেকে পাই $\dfrac{p}{\rho} =$ ধ্রুবক।

(2) স্থিরভরের কিছুটা বায়বীয় পদার্থের চাপ স্থির থাকলে একই উষ্ণতা বৃদ্ধির জন্য সমআয়তনের সকল বায়বীয় পদার্থের সাধারণতঃ সমপরিমাণ প্রসারিত হয়। একেই চার্লসের সূত্র বলে (Charles' law)

1842 খ্রিঃ বিজ্ঞানী রেঁনো (Regnault) পরীক্ষা করে দেখান যে, 0^oC উষ্ণতাবিশিষ্ট কোনো গ্যাসের প্রতি ডিগ্রী সেলসিয়াস উষ্ণতা বৃদ্ধির জন্য একক আয়তনের আয়তন প্রসারণ প্রায় $\dfrac{1}{273}$ হয়।

অর্থাৎ v_0 যদি 0^oC উষ্ণতায় আয়তন ও v_{t-} যদি t^oC উষ্ণতায় আয়তন হয় তাহলে,

$$v_t = v_0\left(1+\frac{1}{273}t\right)$$

অর্থাৎ, $t = -273^oC$-এর জন্য তাত্ত্বীকভাবে বায়বীয় পদার্থের আয়তন শূন্য হয়ে যায়।

এই বয়েল ও চার্লসের সূত্র মান্য করে চলা বায়বীয় পদার্থদের আদর্শ গ্যাস (perfect gas) বলা হয়।

এক্ষণে, $v_t = v_0\left(1+\dfrac{1}{273}t\right)$

$$\Rightarrow v_t = v_0\left(\frac{273+t}{273}\right) = \frac{v_0 T}{273}$$

$\therefore\ v \propto T$ যখন p ধ্রুবক।

আবার $v \alpha \frac{1}{p}$ যখন T ধ্রুবক (বয়েলের সূত্র) দুটি সূত্রকে এক করে পাই—

$v \alpha \frac{T}{p}$ যখন p, T দুটিই পরিবর্তিত হয়।

সুতরাং, $\frac{pv}{T} =$ ধ্রুবক

সচরাচর এই ধ্রুবক R দিয়ে চিহ্নিত করা হয়।

$$\therefore\ pv = RT$$

এটিই আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ নামে চিহ্নিত।

18.7 সমোষ্ণ (isothermal) বায়ুমণ্ডলের চাপ

(1) অভিকর্ষকে ধ্রুবক ধরে—

সমুদ্রপৃষ্ঠ থেকে Z উচ্চতায় যদি p এবং ρ যথাক্রমে চাপ এবং ঘনত্ব হয় (বায়বীয় পদার্থের) তাহলে চাপ সমীকরণটি হবে।

$$dp = -g\rho dz,$$

'z'-কে ঊর্ধ্ব দিকে মাপা হয়েছে।

বয়েলের সূত্র থেকে পাই—

$$p = k\rho$$

$$\therefore \frac{dp}{p} = -g/k\, dz$$

সমাকলন করে পাই—

$$\log p = C - \frac{g}{k} Z$$

ধরা যাক, $p = \rho_0$, $\rho = \rho_0$ যখন $Z = 0$ (সমুদ্রপৃষ্ঠে)

তাহলে, $log\ p_0 = C$

$$\therefore\ \log p/p_0 = -g/k\, z$$

এখন, $p = p_0 e^{-g/kz}$

এছাড়াও $\rho = \rho_0 e^{-g/kz}$

সমসত্ত্ব বায়ুমণ্ডলের ঘনত্ব ρ এবং কোনো বিন্দুতে চাপ p হলে

$$p = k\rho = g\rho H$$

বা, $H = \frac{k}{g} = (\text{ধ্রুবক})$

সুতরাং একই উষ্ণতায় সমসত্ত্ব বায়ুমণ্ডলের উচ্চতা সর্বত্র সমান।

$p = p_0 e^{-g/kz} = p_0 e^{-z/H}$

(2) অভিকর্ষকে চলরাশি ধরে ঃ

ধরাযাক, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ r এবং সমুদ্রপৃষ্ঠে অভিকর্ষের মান g.

তাহলে সমুদ্রপৃষ্ঠ থেকে z উচ্চতায় অভিকর্ষের মান $= \frac{r^2}{(r+z)^2} g$

$\therefore$ চাপ সমীকরণটি হবে ঃ $dp = -\frac{r^2}{(r+z)^2} gfdz$

বয়েলের সূত্র থেকে পাই— $P = k\rho$

$$\therefore \frac{dp}{p} = -\frac{r^2}{(r+z)^2} \cdot \frac{g}{K} dz$$

সমাকল করে পাই— $\log p = C + \frac{gr^2}{k(r+z)}$

সমুদ্রপৃষ্ঠ, $p = p_0$ যখন $Z = 0$

তাহলে, $\log p_o = C + \frac{g}{k} r$;

$$\therefore \log \frac{\rho}{\rho_0} = -{}^{g}\!/\!{}_{k} \cdot \frac{rz}{r+z}$$

বা, $p = \ p = p_0 e \times p\left(-\frac{g}{k} \cdot \frac{rz}{(r+z)}\right)$

18.8 কিছু বাস্তব (Real) গ্যাসের সমীকরণ (শুধুমাত্র বিবৃতি)

(i) ক্যামারলিং ওন্‌স্‌-এর সমীকরণ (Kammerling Onne's equation)

ক্যামারলিং ওন্‌সের মতে বাস্তব গ্যাসের আচরণ যথাযথ প্রকাশ করতে গেলে বদ্ধ সমীকরণের বদলে বহুসংখ্যক গুণাঙ্কযুক্ত শ্রেণিপ্রসারণ ধরনের সমীকরণ যথাযথ ঃ

$$pv = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$A, B, C,$ .... কে ভাইরাল গুনাঙ্ক বলে।

(ii) ভ্যান্‌ডার ওয়াল্‌সের সমীকরণ ঃ

ভ্যান্‌ডার ওয়াল্‌সের সমীকরণটি নিম্নরূপ ঃ

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

যেখানে R, a, b হল ধ্রুবক সংখ্যা।

(iii) ক্লসিয়াসের সমীকরণ (Clausius' equation) :

আন্তরাণবিক আকর্ষণ বল গ্যাসের পরম তাপমাত্রার ব্যস্তানুপাতিক ধরে ক্লসিয়াস ভ্যানডার ওয়াল্‌সের সমীকরণ সংশোধন করেছিলেন, তাঁর সমীকরণটি নিম্নরূপ—

$$\left\{p + \frac{a}{T(v+c)^2}\right\}(v - b) = RT$$

এতে a, c, b, R হল ধ্রুবক সংখ্যা।

(iv) সাহা ও বোস সমীকরণ (Saha & Bose equation) :

তাপগতি বিদ্যাকে ভিত্তি করে প্রখ্যাত বিজ্ঞানী ডঃ মেঘনাদ সাহা এবং অধ্যাপক শ্রীসত্যেন বোস যে সমীকরণ প্রস্তাব করেন তা হল ঃ

$$p = -\frac{RT}{2b} \cdot e^{\frac{a}{RTv}} \log e\left(\frac{v - 2b}{v}\right)$$

এই সমীকরণ থেকে সংকট গুণাঙ্কের মান পাওয়া যায় 3.53 যা পরীক্ষালব্ধ ফলের সাথে অনেকাংশে মিলে যায়।

18.9 বায়বীয় পদার্থের সঙ্কোচন প্রক্রিয়ার কৃতকার্য

বায়বীয় পদার্থের p চাপে আয়তন ধরা যাক v, এবং বাহ্যিক বায়ুমণ্ডলীয় চাপ $\prod$ তাহলে আয়তন হ্রাস $= -dv$

এ ক্ষেত্রে কৃতকার্যের পরিমাণ $= -(P - \prod)dv$

সুতরাং, আয়তনকে v থেকে v'-এ কমানো হলে মোট কৃতকার্য

$$= -\int_{v}^{V'} (p - \prod) dv$$

(i) সমোষ্ণ পরিবর্তন (Isothermal Change)

এই ক্ষেত্রে $pv = k$, সুতরাং কৃতকার্য

$$= -\int_{V}^{V'} \left(\frac{k}{v} - \prod \right) dv$$

$$= k \log \frac{V}{V'} - \prod (V - V')$$

$$= PV \log \frac{V}{V'} - \prod (V - V')$$

P হল প্রাথমিক চাপ

(ii) রুদ্ধতাপ পরিবর্তন (Adiabatic change) :

এক্ষেত্রে $pv^{\gamma} = k$, তাহলে কৃতকার্য

$$= -\int_{V}^{V'} \left(\frac{k}{v^{\gamma}} - \prod \right) dv$$

$$= \frac{k}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{V'^{\gamma-1}} - \frac{1}{V^{\gamma-1}} \right) - \prod (V - V')$$

$$= \frac{PV^{\gamma}}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{V'^{\gamma-1}} - \frac{1}{V^{\gamma-1}} \right) - \prod (V - V')$$

‘p’ হল প্রাথমিক চাপ।

যদি চূড়ান্ত চাপ p' হয় তাহলে— $p'V'^{\gamma} = pV^{\gamma}$

$$\therefore \text{ কৃতকার্য } = \frac{P'V' - PV}{\gamma - 1} - \prod(V - V')$$

যদি T এবং T' প্রাথমিক এবং চূড়ান্ত পরম উষ্মতা হয়,

$$\text{তাহলে, } \frac{PV}{T'} = \frac{P'V'}{T'} = R = \frac{P'V' - PV}{T' - T}$$

$$\therefore \text{ কৃতকার্য } = R\frac{T' - T}{\gamma - 1} - \Pi(V - V')$$

18.10 উদাহরণমালা

(1) একটি পারদ ব্যারোমিটার টিউবের ব্যাস 1cm. এবং সিস্টার্নের ব্যাস 4·5 cm. টিউবের পারদতল 2·5 cm বৃদ্ধি পেলে ব্যারোমিটারের প্রকৃত উচ্চতার পরিবর্তন নির্ণয় করুন।

উত্তর ঃ সিস্টার্নে x পরিমাণ গভীরতায় পারদ থাকলে,

$$(4{\cdot}5)^2 x = 1^2 \times 2{\cdot}5$$

$$\therefore x = \frac{10}{81} = 0{\cdot}123\ldots\ldots\ldots$$

সুতরাং ব্যারোমিটার উচ্চতার প্রকৃত পরিমাণ—

$$= 2{\cdot}5 + 0{\cdot}123 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 2{\cdot}623 \text{ cm} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

(2) বায়ুপূর্ণ ত্রুটিযুক্ত একটি ব্যারোমিটারের পাঠ (reading) a এবং b যেখানে সঠিক পাঠ যথাক্রমে α এবং β ; যখন ত্রুটিপূর্ণ ব্যারোমিটারের পাঠ C হয় তখন তার সঠিক পাঠ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরা যাক ব্যারোমিটারের ভেতরে h পারদস্তম্ভে পরিমাণ বায়ুমণ্ডলীয় চাপে x দৈর্ঘ্যের বায়ু আছে।

প্রথম ক্ষেত্রে টিউবের ভেতরে বায়ুর চাপ = $\alpha - a$

বয়েলের সূত্রানুসারে, এটি যে দৈর্ঘ্য অধিকার করে থাকবে $= \dfrac{hx}{\alpha - a}$

$$\therefore \text{ টিউবের পুরো দৈর্ঘ্য } = a + \frac{hx}{\alpha - a}$$

দ্বিতীয়ক্ষেত্রে টিউবের ভেতরে বায়ুর চাপ = $\beta - b$ এবং একইভাবে যে দৈর্ঘ্য অধিকার করে তার পরিমাণ $= a + \frac{hx}{\alpha - a} - b$।

এবার বয়েলের সূত্রের সাহায্যে পাই,

$$(\beta - b)\left(a + \frac{hx}{\alpha - a} - b\right) = hx$$

$$\therefore \quad hx = \frac{(\alpha - a)(\beta - b)(a - b)}{(\alpha - a) - (\beta - b)}$$

একইভাবে সর্বশেষ ক্ষেত্রে, যখন সঠিক পাঠ $= \gamma$, তখন

$$hx = \frac{(\alpha - a)(\gamma - c)(a - c)}{(\alpha - a) - (\gamma - c)}$$

hx-এর দুটি মানের তুলনা করে পাই—

$$\gamma = c + \frac{(\alpha - a)(\beta - b)(a - b)}{(a - c)(\alpha - a) - (b - c)(\beta - b)}$$

(3) ভারী বায়বীয় পদার্থ (গ্যাস) একটি বাক্স সমতাপমাত্রায় (uniform temperature) আছে। সর্বনিম্ন বিন্দু থেকে বাক্সের সর্বোচ্চ বিন্দুর উচ্চতা 'a' এবং P ও P' হল যথাক্রমে উচ্চতম এবং নিম্নতম বিন্দুতে চাপ। প্রমাণ করুন যেকোনো বিন্দুতে চাপ ও ঘনত্বের অনুপাত হবে। $ag/log(P'/P)$

সমাধান ঃ

ধরা যাক বাক্সের Z উচ্চতায় কোনো বিন্দুতে চাপ $= p$ এবং ঘনত্ব ρ। (z উচ্চতাটি সমুদ্রপৃষ্ঠের স্বাপেক্ষে মাপা হয়েছে) এবার ধরা যাক p' এবং ρ' হল $z - a$ উচ্চতায় যথাক্রমে চাপ ও ঘনত্বের পরিমাণ।

তাহলে, $dp = -g\rho dz$ এবং $p = k\rho$

$$\therefore \frac{dp}{p} = -\frac{g}{k}dz.$$

সমাকলন করে পাই,

$$\log p = C - \frac{g}{k}z$$

এবং $\log p' = C - \frac{g}{k}(z-a)$

$$\therefore \log \frac{P'}{P} = \frac{g}{k} a$$

সুতরাং, $k = ag/\log p'/p$ (প্রমাণিত)

(4) ভূপৃষ্ঠের কাছে অভিকর্ষের মান ধ্রুবক এবং বায়ুমণ্ডলের উষ্ণতা $t = t_o\left(1 - \frac{z}{nH}\right)$ হয় যেখানে H হল সমসত্ত্ব বায়ুমণ্ডলের উচ্চতা এবং t হল পরম উষ্ণতা। দেখান যে বায়ুমণ্ডলের চাপসংক্রান্ত সমীকরণটি হবে $p = p_o\left(1 - \frac{z}{nH}\right)^n$

সমাধান ঃ

$p = R\rho t$, এবং $p_0 = R\rho_0 H$

$\therefore$ চাপ সংক্রান্ত সমীকরণটি হবে ঃ

$dp = -g\rho dz$

$$\therefore \frac{dp}{p} = -\frac{g}{Rt_0\left(1 - \frac{z}{nH}\right)} dz$$

সমাকলন করে পাই,—

$$\log p = \frac{g}{R} \cdot \frac{nH}{t_0} \log\left(1 - \frac{z}{nH}\right) + C$$

$$= \log\left(1 - \frac{z}{nH}\right)^n + C$$

$Z = 0$ উচ্চতায়, $p = p_0$ হলে,

$\therefore \log \rho_0 = C$

সুতরাং $\log \frac{\rho}{\rho_0} = \log\left(1 - \frac{z}{nH}\right)^n$

বা, $p = p_0\left(1 - \frac{z}{nH}\right)^n$ (প্রমাণিত)

(5) একটি উল্লম্ব চোঙের ভেতর কিছু গ্যাস আছে এবং একটি W ওজনের পিস্টন একটি ছিপির কাজ করে। চোঙের ভূমির থেকে সাম্যাবস্থায় পিস্টনটির ভূমি h উচ্চতায় আছে। পিস্টনটি খুব আস্তে অল্প দূরত্ব x স্থানান্তরিত হলে দেখান যে সিস্টেমটির উপর কৃতকার্য $= \frac{Wx^2}{2h}$ (আসন্ন মান) যখন আবদ্ধ গ্যাসের তাপমাত্রার কোনো পরিবর্তন ঘটে না।

সমাধান ঃ যদি নতুন অবস্থানে চাপ p হয় তাহলে বয়েলের সূত্র থেকে পাই,

$$pA(h-x) = = \frac{W}{A}.hA$$

বা, $p = \frac{Wh}{A(h-x)}$

যদি পিস্টনটি dx দূরত্ব নিচে নামানো হয় তাহলে চাপের বিরুদ্ধে কৃতকার্য হল $pAdx$, এবং পিস্টনের ওজনে কর্তৃক কৃতকার্য $= Wdx$

$\therefore$ মোট কৃতকার্য $= \int_0^x (pA - W)dx$

$$= \int_0^x \left[\frac{Wh}{h-x} - W\right]dx$$

$$= -Wh\log\frac{h-x}{h} - Wx$$

$$= -Wh\log\left(1 - \frac{x}{h}\right) - Wx$$

$$= Wh\left[\frac{x}{h} + \frac{1}{2}.\frac{x^2}{h^2} + \ldots\ldots\right] - Wx\left\{\frac{x}{h} < 1\right\}$$

$\cong \frac{1}{2}.\frac{Wx^2}{h}$ (আসন্ন মান) (প্রমাণিত)

18.10 সংকেতসহ প্রশ্নাবলী ও উত্তরমালা

(1) $2a$ উচ্চতাবিশিষ্ট একটি বায়ুনিরুদ্ধ চোঙে অর্ধেক জল এবং বায়ুমণ্ডলীয় চাপে অর্ধেক বায়ু দ্বারা পরিপূর্ণ। বায়ুমণ্ডলীয় চাপ h উচ্চতায় জলের চাপের সমান। বায়ুকে বেরোতে না দিয়ে আরও k উচ্চতা পর্যন্ত জল ঢেলে জলতল বাড়ানো হল এবং ভূমির চাপ তার ফলে দ্বিগুণিত হল।

প্রমাণ করুন $k = a + h - \sqrt{ah + h^2}$ [**সংকেত** ঃ বয়েলের সূত্র প্রযোজ্য]

(2) একটি ব্যারোমিটারের উচ্চতা 30 ইঞ্চি। টিউবের প্রস্থচ্ছেদ $\frac{1}{4}$ ইঞ্চি এবং পারদের উপরে শূন্যস্থানটি প্রকৃত শূন্য। এক্ষণে $\frac{1}{4}$ ঘন ইঞ্চি বাইরের বাতাস ব্যারোমিটারে ঢুকতে দিলে পারদস্তম্ভ যদি 4 ইঞ্চি নিচে নেমে যায় তাহলে পূর্ববর্তী শূন্যস্থানের আয়তন কত ছিল।

[**Ans.** $\frac{7}{8}$ ঘন ইঞ্চি]

(3) একটি চোঙ দু'প্রকার গ্যাস একটি পিস্টন দ্বারা আলাদা করা আছে। 0^oC উষ্ণতায় দুটি গ্যাসের একটির আয়তন অপরটির দ্বিগুণ। প্রথম গ্যাসটির তাপমাত্রা t^oC বাড়লে প্রমাণ করুন পিস্টনটি $\frac{2l\alpha t}{9+6\alpha t}$ দূরত্ব সরবে।

যেখানে l হল চোঙের দৈর্ঘ্য এবং α হল প্রতি 1^oC-এর জন্য প্রসারণ গুণাঙ্ক।

[**সংকেত** বয়েলের সূত্র প্রযোজ্য]

(4) 7^oC-এ সমুদ্রপৃষ্ঠে ব্যারোমিটারের উচ্চতা 750 mm একটি পর্বতের উপরে 13^oC-এ এই উচ্চতা 400 mm। দুটি জায়গার এক ঘন মিটার পরিমাণ বাতাসের ওজনের তুলনা করুন। [উত্তর ঃ $\frac{429}{224}$]

[**সংকেত** ঃ $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$ সূত্র প্রযোজ্য]

(5) a ব্যাসার্ধযুক্ত একটি বৃত্তকার টিউবে বাতাস দ্বারা পূর্ণ আছে। টিউবটির তলে অবস্থিত একটি অক্ষ (কেন্দ্র থেকে C দূরত্বে অবস্থিত) স্বাপেক্ষে একটি সুষম কৌণিক বেগ ω-তে ঘুরছে। বাতাসের ওজন নগণ্য ও $C < a$ এবং P ও P' সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন চাপ হলে প্রমাণ করুন—

$$\log\frac{P}{P'} = \frac{\omega^2}{2k}(a+c)^2$$

[**সংকেত ঃ** এখানে $dp = \rho w^2 rdr$ এবং $p. = kp$, অর্থাৎ $\frac{dp}{p} = \frac{\omega^2}{k} rdr$, এবার সমাকলনের সাহায্য নিন]

(6) একটি বায়বীয় পদার্থের বায়ুমণ্ডল সাম্যাবস্থায় আছে, যেখানে—

$$p = k\rho^{\gamma} = R\rho T,$$

যেখানে, p, ρ T হল যথাক্রমে চাপ, ঘনত্ব এবং উষ্ণতা এবং k, γ, R হল ধ্রুবক রাশি। প্রমাণ করুন উষ্ণতা উচ্চতা বৃদ্ধির সাথে α (একটি ধ্রুবক রাশি) হারে হ্রাসপ্রাপ্ত হয় এবং $\frac{dT}{dz} = -\alpha = -\frac{g}{R} \cdot \frac{\gamma - 1}{\gamma}$

[**সংকেত ঃ** $p = k\rho^{\gamma}$ সমীকরণ থেকে অন্তরকলন ও সমাকলন প্রক্রিয়ার সাহায্য নিন]

(7) উষ্ণতাকে ধ্রুবক ধরে একটি বেলুনের গতি প্রকৃতি (motion) নির্ণয় করুন। দেওয়া আছে যে, যেকোনো স্থানে বেলুন কর্তৃক অপসারিত বাতাসের ভর সমসত্ত্ব (homogeneous)

[**সংকেত ঃ** বেলুনের ভরকেন্দ্রের উচ্চতা z ভর m এবং V আয়তন ρ বায়ুর ঘনত্ব (z উচ্চতায় হলে) গতিসংক্রান্ত অবকল সমীকরণটি হবে $\frac{md^2z}{dt^2} = g'\rho v - mg'$

যেখানে $g' = g\frac{r^2}{(r+z)^2}$, r হল পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, এবার এখান থেকে $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ বের করুন।]

(8) স্থির উষ্ণতায় বায়ুমণ্ডলে অবস্থিত উল্লম্ব আয়তক্ষেত্রের চাপকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় করুন।

[সংকেত ঃ চাপকেন্দ্র সংক্রান্ত অধ্যায় দ্রষ্টব্য]

[**Ans.** $\frac{k}{g} - \frac{a}{e^{g/k^{a}-1}}$ উচ্চতায়, যেখানে k, g, a প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত]

(9) $10^{o}C$ উষ্ণতায় কিছু পরিমাণ বাতাসের আয়তন 300 $c.\ c.$ 20^{o} উষ্ণতায় এর আয়তন কত যখন চাপ স্থির আছে? [**সংকেত ঃ** চার্লসের সূত্র] [**Ans.** $310\frac{170}{283}c.c$]

(10) যে-কোনো পরিমাণের কিছু আয়তনের বাতাস কোনো রকম বল বা পরিবর্তনশীল উষ্ণতা থেকে মুক্ত। বাতাসটি স্থিরভাবে আছে। একটি বিন্দুর শ্রেণিতে উষ্ণতা যদি সমান্তরীয় প্রগতি ($A.\ P.$)-তে থাকে তাহলে ওই বিন্দুগুলিতে ঘনত্ব বিপরীত প্রগতি ($H.P.$)-তে থাকবে।

18.11 সারাংশ

আলোচ্য অধ্যায়ে বায়বীয় পদার্থের মৌলিক ধর্ম সমূহের ভিত্তিতে চাপ নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। চাপ প্রয়োগের ফলে বায়ুপ্রবাহের সংকোচন বা প্রসারণ এর সূত্র নির্দ্ধারিত হয়েছে। বায়ুমণ্ডলের চাপ বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। বিভিন্ন স্তরে বায়ুমণ্ডলের চাপের প্রকরণ কিরূপ তাও উল্লেখ করা হয়েছে। কিছু বাস্তব গ্যাসের সমীকরণ বিবৃত করা হয়েছে। কয়েকটি উদাহরণ সহযোগে বিষয়টিকে বিশদভাবে বোঝানো হয়েছে।

18.12 সহায়ক গ্রন্থাবলী

(1) চিত্তরঞ্জন দাশগুপ্ত ঃ দ্বিবার্ষিক পদার্থবিজ্ঞান (প্রথম খণ্ড) (বুক সিন্ডিকেট, কলকাতা, ১৯৮৯)
(2) J. M. Kar : Hydrostatics for degree classes (The Globe library, Kolkata, 1972)

পরিভাষা (I)

অধিবৃত্ত	Parabola
অনুভূমিক	Horizontal
অবকলন	Differertiation
অভিকর্ষ	Gravity
অভিকর্ষজ ত্বরণ	Acceleration due to gravity
অর্ধগোলক	Hemisphere
অক্ষ	Axis
অসীমপথ	Asymptote
অনুভূমিক তল	Horizontal plane
আবর্তন	Revolution
অধিবৃত্তক	Paraboloid
উপবৃত্ত	Ellipse
অষ্টমাংশ	Octant
উপাংশ	Component
উল্লম্ব	Vertical
আবর্তন ব্যাসার্ধ	Radius of Gyration

আদর্শ গ্যাস	Ideal gas, perfect gas
কার্য	Work
ক্রিয়ারেখা	Line of action
কৌণিক রেখা	Angular velocity
গোলক	Sphere
গতি	Motion
গতিশক্তি	Kinetic energy
ঘন	Cube
ঘাতবল	Thrust
ঘূর্ণি	Vortex
চাপ কেন্দ্র	Centre of Pressure
চোঙ	Cylinder
ছেদ	Section
জাড্য	Inertia
তল	Plane/surface
দ্বন্দ্ব	Couple
নতিকোণ	Angle of inclination
নিয়ামক	Directrix
নল	Tube
পরাকেন্দ্র	Metacentre
পরমমান	Absolute value
পাত	Lamina
প্লবতা কেন্দ্র	Centre of byoancy
পীড়ন	Stress
প্রতিসম	Symmetrical
ব্যস্তানুপাতী	Inversely proportional
বক্র/বক্রতা	Curve/Curvature
বল	Force
বিভবশক্তি/স্থিতিশক্তি	Potential energy
বায়ুমণ্ডল	Atmosphere

ভারকেন্দ্র	Centre of gravity
ভাইরাল	Virial
ভ্রামক	Moment
রুদ্ধতাপ	Adiabetic
লব্ধি	Resultant
লম্ববৃত্তীয় শঙ্কু	Right circular cone
শীর্ষ বিন্দু	Vertex
সরণ	Displacement
সমাকল	Integral
সমানুপাতী	Proportional
সাম্য, স্থিতি	Equilibrium
সুস্থিতি সাম্য	Stable equilibrium
(অস্থির) সাম্য	(Unstable) equilibrium
সূত্র/সুতো	String
স্থানাঙ্ক	Co-ordinate
স্থিতিবিদ্যা	Statics
স্পর্শতল	Tangent plane
সমোয়	Isothermal