প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমতো কোন বিষয়ে সাম্মানিক (Honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এ-ক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে— যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয় সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধীতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন ; যখনই কোন শিক্ষার্থীও এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণ-ক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশকিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার

উপাচার্য

তৃতীয় পুনর্মুদ্রণ ঃ জুন, 2017

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী ও অর্থানুকূল্যে মুদ্রিত।

Printed in accordance with the regulations and financial assistance of the Distance Education Bureau of the University Grants Commission.

পরিচিতি

বিষয় ঃ পদার্থ বিদ্যা **সাম্মানিক স্তর**

পাঠক্রম : পর্যায় : EPH 02 : 01 & 02

	রচনা	সম্পাদনা
একক 1	ড. অমল কুমার রায়চৌধুরী	ড. প্রতীপ কুমার চৌধুরী
একক 2	ড. প্রতীপ কুমার চৌধুরী	ড. অমল কুমার রায় চৌধুরী
একক 3	ড. অনল ক্রান্তি ঘোষ	ঐ
একক 4	ঐ	ঐ
একক 5	ড. স্বপন কুমার সুর	ঐ
একক 6	ঐ	ঐ
একক 7	অধ্যাপক শৈলেন্দ্রনারায়ণ রায়চৌধুরী	ঐ
একক 8	ঐ	ঐ
একক 9	কমল নন্দী	ড. প্রতীপ কুমার চৌধুরী
একক 10	অধ্যাপক প্রিয়ব্রত মিত্র	ড. অমল কুমার রায়চৌধুরী
একক 11	ড. প্রতীপ কুমার চৌধুরী	ঐ
একক 12	ড. স্বপন দাস	ঐ
একক 13	অধ্যাপক অশোক কুমার মজুমদার	ঐ
একক 14	ঐ	ঐ
একক 15	ঐ	ঐ
একক 16	ঐ	ঐ

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

EPH - 02

বলবিদ্যা ও পদার্থের ধর্ম

(স্নাতক স্তর)

পর্যায়
1

পর্যায়
2

একক 1 □ গতি — দ্রুতি, বেগ ও ত্বরণ

গঠন

1.1 প্রস্তাবনা

বিশ্বপ্রকৃতির চরিত্রই হল পরিবর্তন। আবার পরিবর্তন অনেক সময়ই দেখা দেয় নানাবিধ গতির মধ্য দিয়ে। সূর্য, চন্দ্র, তারার কথাই ভাবুন অথবা আশেপাশের মানুষজন, পশূপাখী, এমনকি গাছপালা কোন কিছুই একেবারে স্থির হয়ে থাকছে না—তাদের নানারকম গতি সবসময়ই চোখে পড়ে। বিজ্ঞান মূলত দৃশ্যমান বিশ্বের পর্যবেক্ষণ এবং তার বিশ্লেষণ; কাজেই গতির আলোচনা বিজ্ঞানে অপরিহার্য এই এককে আমাদের গতির আলোচনার শুরু।

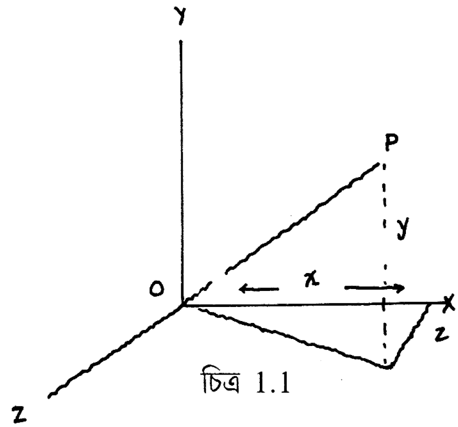
1.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়লে আপনি গতিবিদ্যা সংক্রান্ত যে মৌলিক ধারণর লাভ করবেন তার সাহায্যে

- গতিবিদ্যায় ব্যবহৃত কতকগুলি সাধারণ ব্যবহার্য শব্দ যথা সরণ, দ্রুতি, বেগ, ত্বরণ এগুলি বৈজ্ঞানিক সংজ্ঞা দিতে পারবেন এবং এই রাশিগুলি গাণিতিকভাবে প্রকাশ করতে পারবেন।
- সরণ,বেগ ও ত্বরণের মধ্যে কোন একটি সময়ের অপেক্ষক হিসাবে দেওয়া থাকলে গাণিতিক পদ্ধতিতে অন্য দুটি নির্ণয় করতে পারবেন।
- সরলরৈখিক গতি, পৃথিবীর অভিকর্ষের অধীনে প্রাসের গতি, প্রভৃতি গুরুত্বপূর্ণ ক্ষেত্রে গাণিতিক বিশ্লেষণ প্রয়োগ করতে পারবেন এবং সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারবেন।

1.3 গতিশীল কণার বেগ, দ্রুতি ও ত্বরণ

কোন বস্তুর গতির আলোচনা করতে প্রথমেই তার অবস্থান নির্দেশ করতে হয়। সেজন্য একটি নির্দেশতন্ত্র বা কাঠামোর প্রয়োজন। আলোচনার শুরুতে আমরা একটি সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র ধরে নেব। নির্দেশতন্ত্রের মূল বিন্দু থেকে বস্তুকণার অবস্থান বিন্দু সংযোগকারী রেখাকে বলা হয় অবস্থান ভেক্টর এবং এই ভেক্টরের উপাংশ গুলি হল অবস্থান বিন্দুর তিনটি নির্দেশাঙ্ক। (চিত্র 1.1)



চিত্র 1.1

অতএব $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ যদি তিনটি মৌলিক একক ভেক্টর হয়, তাহলে

অবস্থান ভেক্টর $\hat{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ (1.1)

অবস্থান ভেক্টরের পরিবর্তনকে বলা হয় সরণ। কাজেই সরণকে লেখাযায় $\Delta\bar{r}$ এবং

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y.\vec{j} + \Delta z\vec{k} \tag{1.2}$$

সরণের সময়ের সঙ্গে পরিবর্তনর হারকে বলা হয় গতিবেগ বা শুধু বেগ। বেগ ভেক্টরটিকে আমরা লিখব $\vec{\nu}$, সুতরাং

$$\vec{\nu} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \tag{1.3}$$

দৃশ্যতই বেগ ভেক্টর $\vec{\nu}$ এর উপাংশ $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ ও $\frac{dz}{dt}$ এবং ভেক্টরটির মান

$$|\vec{\nu}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \tag{1.4}$$

আপনি EPH 01 এ ভেক্টরের আলোচনায় দেখেছেন যে ভেক্টরের মান একটি স্কেলার। অতএব $|\vec{v}|$ একটি স্কেলার। এই স্কেলারটিকেই বলা হয় দ্রুতি। অর্থাৎ গতিবেগে যেখানে একটি ভেক্টর, তার মান দ্রুতি একটি স্কেলার। এর কোনও দিক্ নেই, উপাংশও নেই।

সাধারণভাবে বলবিদ্যায় দ্রুতি শব্দ খুব একটা ব্যবহৃত হয় না, বেগের মানই বলা হয়ে থাকে বাংলাভাষায় দ্রুতি শব্দটি সুপ্রচলিতও নয়, এর ইংরেজি প্রতিশব্দ 'speed' বরং সুপরিচিত। ব্যবহারিক ক্ষেত্রে দ্রুতিমাপক যন্ত্র বা speedometer এর ব্যবহার আছে ঐ যন্ত্রে দিক্ নিরপেক্ষ ভাবে কেবল বেগের মান (বা দ্রুতি) মাপা হয়।

সময়ের সঙ্গে গতিবেগের পরিবর্ত্তনের হারকে বলা হয় ত্বরণ। অর্থাৎ ত্বরণ ভেক্টর $\vec{a}$ হল

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} \tag{1.5}$$

যেহেতু $\vec{v}$ একটি ভেক্টর $\vec{a}$ ও অবশ্যই একটি ভেক্টর এবং (1.3) ও (1.5) থেকে দেখা যায়

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \tag{1.6}$$

ত্বরণের মান একটি স্কেলার, কিন্তু এর কোনও আলাদা নাম দেওয়া হয়নি। (আপনি দেখেছেন গতিবেগের মানকে আলাদাভাবে দ্রুতি বলা হয়।

আমরা অবকলন গুণাংক দিয়ে $\vec{v}$ ও $\vec{a}$ র যে সংজ্ঞা দিয়েছি যাতে আমরা গতিবেগ ও ত্বরণের তাৎক্ষণিক মান ও দিক্ পাব। যদি পরিমিত সময়ে আমরা সরণের পরিবর্তন দেখি, তবে আমরা যে গতিবেগ পাব, সেটিকে বলা হবে ঐ সময়ের জন্য গড় গতিবেগ। ধরা যাক দেওয়া আছে

সময় $t = t_1$ এ $\vec{r} = 5\vec{i} + 10\vec{j} + 7\vec{k}$

এবং $t = t_2$ তে $\vec{r} = 7\vec{i} + 5\vec{j} + 0\vec{k}$

তাহলে গড় গতিবেগ হবে

$$\frac{(t_2 - t_1) \text{ সময়ে লব্ধি সরণ}}{(t_2 - t_1)}$$

$$= \frac{2\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k}}{(t_2 - t_1)}$$

যদি $(t_2 - t_1) = 2s$ হয়, তবে

গড় গতিবেগ $= 1.\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j} - \frac{7}{2}\vec{k}$

এবং গড় গতিবেগের মান হবে $\sqrt{1+\frac{25}{4}+\frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{75}{4}}$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{3}\ \text{m.s}^{-1}$$

গতিবেগ ও ত্বরণের সংজ্ঞা থেকে বোঝা যাচ্ছে, গতিবেগের একক হবে ms^{-1} (metre per second) এবং ত্বরণের একক ms^{-2} (metre per second per second)। এবার আগের অনুচ্ছেদের উপর একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

1.3.1 অনুশীলনী -1

1. ত্বরণের মান এবং দ্রুতি পরিবর্তনের হারের মান -এ দুয়েরই একক ms^{-1}। এই দুটি মানের পার্থক্য বিশ্লেষণ করুন।
2. একটি বস্তুর গতিবেগ পরিবর্ত্তনশীল কিন্তু তার দ্রুতি ধ্রুবক। প্রমাণ করুন যে বস্তুটির ত্বরণ সম সময়ই গতিবেগের লম্বমুখী।
3. যদি একটি নির্দিষ্ট মূলবিন্দু থেকে অপর একটি বিন্দুর দূরত্ব সর্বদা একই থাকে কিন্তু অবস্থান ভেক্টরের দিক পরিবর্তিত হয়, তবে অবস্থান ভেক্টর এবং গতিবেগের মধ্যে কি সম্পর্ক থাকবে?
4. সমত্বরণে গতিশীল কণার প্রাথমিক বেগ শূণ্য হলে, ওর গড় গতিবেগের সঙ্গে তাৎক্ষনিক গতিবেগের সর্ম্পক কি হবে?

1.4 গতি, দ্রুতি ও ত্বরণ নির্ণয়

এবার কয়েকটি উদাহরণ দিয়ে দেখা যাক সময়ের অপেক্ষক হিসেবে অবস্থান ভেক্টর দেওয়া থাকলে গতি, দ্রুতি এবং ত্বরণ কীভাবে নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ -1

একটি চলমান কণার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ সময়ের নিম্নরূপ অপেক্ষক

$\vec{r} = \alpha t^2\vec{i} + 2\beta t\vec{j} + o\vec{k}$ যেখানে α ও β ধ্রুব রাশি।

সময়ের সাপেক্ষে অবকলন করে পাওয়া যায়

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\alpha t\vec{i} + 2\beta\vec{j} + o\vec{k}$$

এবং আরও একবার অবকলন করে ত্বরণ ভেক্টর পাওয়া যায়

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\alpha\vec{i} + o\vec{j} + o\vec{k}$$

অর্থাৎ ত্বরণ ভেক্টরটি ধ্রুবক - সব সময়ই x অক্ষ অভিমুখী এবং তার মান 2α।

অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ এর উপাংশ যথাক্রমে

$$x = \alpha t^2$$
$$y = 2\beta t$$
$$z = 0$$

উপরের প্রথম দুটি সম্পর্ক থেকে t কে অপনয়ন করে পাওয়া যায় -

$$x = \alpha.\left(\frac{y}{2\beta}\right)^2$$

অর্থাৎ কণাটির গতিপথ $z = 0$ সমতলে একটি অধিবৃত্ত।

এই উদাহরণ থেকে আপনি দেখলেন যে একদিকে সমত্বরণ এবং তার লম্ব অভিমুখী একটি বেগ থাকলে কণার গতিপথ হয় একটি অধিবৃত্ত। এর বিপরীত মন্তব্য যে গতিপথ অধিবৃত্ত হলেই একদিকে সমত্বরণ এবং তার লম্বঅভিমুখী একটি সমবেগ থাকতে হবে কিন্তু সঠিক নয়।

আপনি মনে করুন।

$$x = pt^4$$
$$y = qt^2 \qquad \text{p, q ধ্রুব সংখ্যা}$$
$$z = 0$$

এই পদও একটি অধিবৃত্ত কারণ $x = p\left(\frac{y}{q}\right)^2$ কিন্তু ত্বরণের উপাংশগুলি হবে

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 12pt^2$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2q$$

দৃশ্যতই ত্বরণের মান ও দিক উভয়ই পরিবর্তনশীল।

উদাহরণ - 2

দেওয়া আছে

$$\vec{r} = a\cos\omega t\ \vec{i} + b\sin\omega t\ \vec{j}$$; a, b এবং ω ধ্রুব রাশি।

$\vec{r}$ এর তিনটি উপাংশ যথাক্রমে

$$x = a\cos\omega t$$
$$y = b\sin\omega t$$
$$z = 0$$

এগুলি থেকে t অপনয়ন করে পাওয়া যায়

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

সুতরাং গতিপথ $z = 0$ সমতলে একটি উপবৃত্ত। অবশ্য a = b হলে উপবৃত্তটি একটি a ব্যাসার্ধের বৃত্তে পরিণত হবে।

$\vec{r}$'র ব্যঞ্জককে t'এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাওয়া যায়

$$\nu_x = -\omega a\sin\omega t$$
$$\nu_z = b\omega\ \omega swt$$

এবং $\vec{\nu}$ মান বা দ্রুতি হবে

$$|\vec{\nu}| = \sqrt{\nu_x{}^2 + \nu_y{}^2} = \sqrt{\omega^2\left(a^2\sin\omega t + b^2\cos^2\omega t\right)}$$

বিশেষ ক্ষেত্রে a = b হলে, $\vec{\nu}$ এর মান হবে $a\omega$ যেটি একটি ধ্রুবক। ত্বরণ ভেক্টরের উপাংশ দুটি

$$a_x = \frac{d\nu_x}{dt} = -\omega^2 a\cos\omega t = -\omega^2 x$$

$$a_y = \frac{d\nu_y}{dt} = -\omega^2 b\sin\omega t = -\omega^2 y$$

অর্থাৎ $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$ আবার যদি বৃত্তাকার পথ হয়, তাহলে

$$\vec{a}.\vec{\nu} = a_x \nu_x + a_y \nu_y$$

$$= \omega^3 a^2 \cos\omega t \sin\omega t - \omega^3 b^2 \cos\omega t \sin\omega t$$

$= 0$ (কারণ বৃত্তের ক্ষেত্রে $a = b$)

কাজেই ত্বরণ এবং গতিবেগ সর্বদাই পরস্পরের লম্ব অভিমুখী। অবশ্য বৃত্তাকার পথ হলেই যে ত্বরণ এবং গতিবেগ পরস্পরের লম্ব অভিমুখী হবে,একথা কিন্তু ঠিক নয়—কেবলমাত্র দ্রুতি যখন পরিবর্তনহীন, তখনই ত্বরণ এবং গতিবেগের ভিতরে এই সম্পর্ক আসে।

বৃত্তাকার পথে বেগ প্রত্যেক বিন্দুতেই স্পর্শক বরাবর, কাজেই ত্বরণ তার লম্বদিকে হলে, সেটি হবে কেন্দ্র অভিমুখী, ব্যাসার্ধ বরাবর।

এবার অনুশীলনী হতে কয়েকটি গাণিতিক প্রশ্নের সমাধান করুন।

1.4.1 অনুশীলনী - 2

1. সরণ ভেক্টর $\vec{r} = a \sin\omega t\, \hat{i} + o\hat{j} + o\hat{k}$ হলে প্রমাণ করুন যে ত্বরণ সর্বদাই সরণের সমানুপাতিক এবং সরণের বিপরীতমুখী।

2. একটি বস্তু সরলরেখায় গতিশীল এবং তার সরণ $x = P - Qe^{-\alpha t}$ যেখানে P, Q ও α ধ্রুবসংখ্যা বস্তুটির গতিবেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় করুন। বস্তুটির অন্তিম অবস্থান কি হবে?

3. (x - y) সমতলে গতিশীল কণার অবস্থান দেওয়া আছে

   $$x = ut + r\sin\alpha t$$

   $$y = r(\cos\alpha t - 1)$$

   এখানে u, r এবং α ধ্রুবসংখ্যা। কণাটির ত্বরণ নির্ণয় করুন এবং দেখান যে ত্বরণের মান ধ্রুবক।

4. একটি কণা সরলরেখা বরাবর গতিশীল। এবং অবস্থান নিম্নরূপ

   $x = ut \quad (t > 0$ হলে $)$

   $= -ut \quad (t < 0$ হলে $)$

   কণাটির ত্বরণ ও গতিবেগ নির্ণয় করুন। $t = 0$ তে অবস্থার আলোচনা করুন।

1.5 একই সরলরেখায় গতির আলোচনা - ত্বরণ এবং বেগ সর্বদাই একইদিকে

সহজেই বুঝতে পারবেন যে গতি একটি সরলরেখায় সীমাবদ্ধ থাকার শর্ত গতিবেগ ও ত্বরণ সবসময়ই ঐ সরলরেখা বরাবর হবে। এক্ষেত্রে ভেক্টরের ব্যবহারের কোনও সার্থকতা নেই। ধরা যাক গতিরেখার মধ্যস্থ কোনও বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে কণাটির t সময়ে দূরত্ব x তাহলে গতিবেগ ও ত্বরণ হবে

$$\nu = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

অথবা $\nu = \int adt +$ ধ্রুবক

যদি ত্বরণ ধ্রুবক হয় তবে

$$\nu = at + u \tag{1.7}$$

সমাকলন ধ্রুবক u হল $t = 0$ তে বেগের মান। আরও একবার সমাকলন করে পাওয়া যায় (ত্বরণকে ধ্রুবক ধরে)

$$x = ut + \frac{1}{2}at^2 + x_0 \tag{1.8}$$

এখানে সমাকলন ধ্রুবক x_0 দিচ্ছে $t = 0$ তে অবস্থান।

এরূপ সমত্বরণে গতির গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণ পৃথিবীর অভিকর্ষজ ক্ষেত্রে উল্লম্বরেখা বরাবর গতি। অভিকর্ষজ ত্বরণকে সাধারণভাবে g অক্ষরটি দিয়ে নির্দেশ করা হয় এবং একটি উল্লম্বরেখা বরাবর নিচের দিকে কাজ করে। যদি উল্লম্বরেখার উপরদিককে ধনাত্মক ধরা হয়, তবে অভিকর্ষজ ত্বরণকে লেখা হবে - g। ধরুন ভূপৃষ্ঠে $x = 0$ নেওয়া হল এবং সেখান থেকে u গতিবেগ দিয়ে একটি বস্তুকে সোজা উপর দিকে নিক্ষেপ করা হল। তাহলে উচ্চতা h ও সময় t'র সম্পর্ক হবে

$$h = ut - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.9}$$

এবং গতিবেগ (উপর দিকে) ν হবে

$$\nu = u - gt \tag{1.10}$$

সমীকরণ (1.9) ও (1.10) সরাসরি (1.7) ও (1.8) থেকে পাওয়া যায় ($x_0 = 0$ ধরে, $a = -g$)।

সমীকরণ (1.10) থেকে বোঝা যাচ্ছে $t = u/g$ সময়ে $v = 0$ হবে এবং পরবর্তী সময়ে v ধণাত্মক অর্থাৎ u/g সময় পর্যন্ত কণাটি উপরদিকে যাবে এবং তারপরে নিচের দিকে নেমে আসবে। চরম উচ্চতার মান পাওয়া যাবে (1.9) এ $t = u/g$ বসিয়ে অর্থাৎ (চরম উচ্চতাকে h_0 লিখে)

$$h_0 = u.\frac{u}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{u}{g}\right)^2 = \frac{u^2}{2g}$$

উপরেরর আলোচনায় অভিকর্ষজ ত্বরণ gকে ধ্রুবক ধরে নেয়া হয়েছে। প্রকৃতপক্ষে h উল্লম্ব উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ g'র মান

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} \tag{1.12}$$

যেখানে R পৃথিবীর ব্যাসার্ধ। সমীকরণ (1.12) থেকে দেখা যাচ্ছে যে যদি h, ব্যাসার্ধ R এর তুলনায় খুবই ছোট হয়, (h<<R) তাহলে g'র মান g_0 (ষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ) এর সঙ্গে সমান বলা চলে। যদি তা না হয় তবে ,কটি নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিসমীকরণ লেখা যায়

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -\frac{g_0R^2}{(R+h)^2} \tag{1.13}$$

(1.13) সমীকরণটি সমাকলন করার জন্য উভয়দিকে $\frac{dh}{dt}$ দিয়ে গুণ করে পাওয়া যায়।

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)\left(\frac{d^2h}{dt^2}\right) = -\frac{g_0R^2}{(R+h)^2}\frac{dh}{dt}$$

অথবা

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dh}{dt}\right)^2\right] = -\frac{g_0R^2}{(R+h)^2}\frac{d(R+h)}{dt} \qquad \text{(কারণ R ধ্রুবক)}$$

$$= g_0R^2\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{(R+h)}\right]$$

সমাকলনের ফল হবে (যেহেতু g_0R^2 ধ্রুবক) :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = \frac{g_0R^2}{R+h} + E \tag{1.14}$$

এখানে E সমাকলন ধ্রুবক। আপনারা পরে দেখবেন যে সমীকরণ (1.14) কে শক্তি সংরক্ষণ সমীকরণ বলা হয় এবং $\frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2$ বস্তুটির একক ভরের গতিশক্তি, $-\frac{g_0R^2}{R+h}$ একক ভরের স্থিতিশক্তি এবং E' কে একক ভর পিছু মোট যান্ত্রিক শক্তি বলা হয়।

লক্ষ্য করুন $\frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2$ পদটি কখনই ঋণাত্মক হতে পারে না এবং $\left({dh}/{dt}\right)$ মান শূণ্য হলেই এটি শূণ্য, অন্যথায় এটি ধনাত্মক। কাজেই (1.14) সমীকরণ থেকে বলা যায়

$$\frac{g_0R^2}{R+h} + E \geq 0$$

যদি E ধনাত্মক হয়, তাহলে উপরের সম্পর্ক থেকে h'র মান যা কিছু হতে কোনও বাধা নেই। আমরা কল্পনা করেতে পারি যে বস্তুটি অসীম দূরত্বে চলে যেতে পারে (অর্থাৎ $h \to \alpha$ হতে কোনও বাধা নেই। কিন্তু E যদি ঋণাত্মক হয়, তবে $h \to \alpha$ বসান চলবে না, h এর একটি চূড়ান্ত উচ্চমান আছে। অর্থাৎ প্রথম ক্ষেত্রে বস্তুটি পৃথিবীর আকর্ষণ অতিক্রম করে অনন্ত দূরত্বে চলে যেতে পারবে আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রে একটি সীমিত দূরত্ব পর্যন্ত গিয়ে বস্তুটিকে পৃথিবীতে ফিরে আসতে হবে।

কাজেই পৃথিবী থেকে পলায়নে সামর্থ্যের শর্ত $E \geq 0$, অথবা সমীকরণ (1.14) থেকে

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 \geq \frac{g_0R^2}{R+h}$$

যদি পৃথিবীপৃষ্ঠ থেকে বস্তুটি নিক্ষিপ্ত হয় যেখানে $h = 0$ এবং নিক্ষেপের বেগ $\left(\frac{dh}{dt}\right)$ কে বলা হয় তবে পলায়নের জন্য

$$\nu^2 \geq 2g_0R$$

সুতরাং পলায়নের জন্য ন্যূনতম বেগ

$$\nu = \sqrt{2g_0R} \tag{1.15}$$

এই বেগকে পৃথিবী বা অন্য কোন গ্রহের মুক্তিবেগ (escape velocity) বলা হয়।

1.5.1 অনুশীলনী - 3

1. পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে পলায়নের জন্য প্রয়োজনীয় ন্যূনতম বেগ $1.1\times10^4\,ms^{-1}$ হলে পৃথিবীর ব্যাসার্ধ কত? (ধরে নিন পৃথিবী পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ $9.8ms^{-2}$)

2. চন্দ্রের ব্যাসার্ধ 1738km এবং চন্দ্রের আকর্ষনজনিত চন্দ্রপৃষ্ঠে ত্বরণ $1.6ms^{-2}$ হলে চন্দ্র থেকে পলায়নের ন্যূনতম বেগ কত হবে?

3. উপরে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু 2 সেকেন্ড উঠে নিচের দিকে আসতে শুরু করল। প্রমাণ করুন যে সময় $2+\tau$ এবং $2-\tau$ সেকেন্ডে বস্তুটির ভূমি থেকে উচ্চতা একই ছিল এবং বেগের মান এক এবং দিক বিপরীত ছিল। বস্তুটি কি বেগে উপরে নিক্ষিপ্ত হয়েছিল?

4. একটি ক্রিকেট বলকে মাটি থেকে h উচ্চতায় স্থিরাবস্থা থেকে ছাড়া হল। একই সঙ্গে প্রথম বলটির সরাসরি নীচে মাটি থেকে আর একটি বল উপরের দিকে u প্রাথমিক বেগে উৎক্ষিপ্ত হল। বল দুটি যদি $\frac{h}{2}$ উচ্চতায় পরস্পরকে অতিক্রম করে তবে u এর মান কত?

1.6 ত্বরণ সর্বদাই তাৎক্ষণিক গতিবেগের লম্বমুখী

এক্ষেত্রে ত্বরণ ভেক্টর ও গতিবেগের ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ $\pi/2$, অতএব তাদের স্কেলার গুণফল শূণ্য:

$$\vec{a}\cdot\vec{\nu}=0 \tag{1.16}$$

এর সঙ্গে $\vec{a}=\frac{d\vec{\nu}}{dt}$ ব্যবহার করে পাওয়া যায়

$$\frac{d\vec{\nu}}{dt}.\vec{\nu}=0$$

অথবা $$\frac{d}{dt}\left(\nu^2\right)=0 \tag{1.17}$$

অর্থাৎ গতিবেগ ভেক্টরের মান (বা দ্রুতি) এর কোন পরিবর্তন হবে না।

পদার্থবিদ্যায় চুম্বকক্ষেত্রে আহিতকণার গতি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। যেখানে আহিত কণার ত্বরণ গতিবেগের লম্বমুখী - ত্বরণের ব্যঞ্জক নিম্নরূপ

$$\vec{a} = \frac{e}{me}\left(\vec{v} \times \vec{\beta}\right) \tag{1.18}$$

এখানে e ও m আহিত কণার আধান ও ভর, c শূণ্য আলোকের গতিবেগ এবং $\vec{\beta}$ চুম্বক ক্ষেত্রের প্রাবল্য। লক্ষ্যণীয় যে ত্বরণ শুধু গতি বেগের লম্বমুখী হয়, চুম্বকক্ষেত্রের সঙ্গেও সমকোণী।

বারে বারে $e/_{me}$ লেখার বদলে আমরা এই ধ্রুবসংখ্যাকে α লিখে, ত্বরণের ব্যঞ্জকটিকে লিখতে পারি :

$$\vec{a} = \alpha\left(\vec{v} \times \vec{\beta}\right) \tag{1.19}$$

সমীকরণ (1.19)কে $\vec{\beta}$ দিয়ে স্কেলার গুণ করে পাওয়া যায়

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$$

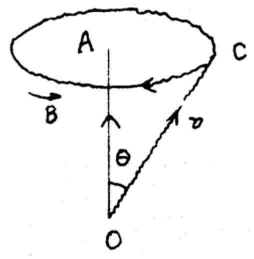
অথবা

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{\beta} = 0 \tag{1.20}$$

আমরা ধরে নেব $\vec{\beta}$ সময় নিরপেক্ষ (প্রকৃতপক্ষে $\vec{\beta}$ সময়ের উপর নির্ভরশীল হলে একটি তড়িৎক্ষেত্রের উদ্ভব হয়, ফলে আহিত কণার অতিরিক্ত একটি ত্বরণ হয়।) - তাহলে সমীকরণ (1.20) থেকে পাওয়া যায়।

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v} \cdot \vec{\beta}\right) = 0 \tag{1.21}$$

অথবা $\vec{v} \cdot \vec{\beta}$ একটি ধ্রুবক। আমরা আগেই দেখেছি যে $\vec{v}$ র মান সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয় না এবং আমাদের আলোচনায় $\vec{\beta}$ একটি সময় নিরপেক্ষ ভেক্টর, সুতরাং (1.21) থেকে বোঝা যাচ্ছে $\vec{v}$ ও $\vec{\beta}$'র অন্তর্গত কোণ সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয় না এ পর্যন্ত দেখা গেল $\vec{v}$ ধ্রুব মানের একটি ভেক্টর, $\vec{\beta}$ র মান ও দিক উভয়ই ধ্রুবক এবং $\vec{\beta}$ ও $\vec{v}$'র অন্তর্গত কোণটিও ধ্রুবক। এই অবস্থা নিচের চিত্র 1.2 থেকে বুঝতে



চিত্র 1.2

সুবিধে হবে। ভেক্টর $\vec{\beta}$ ও $\vec{\nu}$ কে যথাক্রমে OA ও OC-র দিকে দেখান হয়েছে। অন্তবর্তী কোণ θ ধ্রুবক থেকে বোঝা যাচ্ছে OC (অর্থাৎ $\vec{\nu}$) OA কে শঙ্কুর অক্ষ করে একটি শঙ্কু বরাবর আবর্তিত হচ্ছে।-

অবশ্য বিশেষ ক্ষেত্রে শঙ্কুর রূপ বিভিন্ন রূপ হবে - যদি $\vec{\nu}$ ও $\vec{\beta}$ একই দিকে হয় তবে শঙ্কুটি তার অর্ধ শীর্ষ কোণশূণ্য হয়ে একটি সরলরেখায় পরিণতহবে - অর্থাৎ $\vec{\nu}$'র কোণই পরিবর্তন হবে না। আবার $\vec{\nu}$ ও $\vec{\beta}$'র মধ্যবর্তী কোণ যদি $\pi/2$ হয় তবে শঙ্কুটি একটি সমতলে পরিণত হবে-অর্থাৎ $\vec{\nu}$ সবসময়ই একই সমতলে থাকবে।

গতির আরও আলোচনার জন্য আমরা একটি কার্টেজীয় নির্দেশাঙ্ক নিয়ে গতি সমীকরণের উপাংশগুলি আলাদা করে লিখব। মনে করুন আমরা z অক্ষ $\vec{\beta}$ এর দিকে নিয়েছি,তাহলে সমীকরণ (1.19) এর উপাংশগুলি হবে (যেহেতু $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{\nu}$)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha \frac{dy}{dt} B \tag{1.22}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\alpha \frac{dx}{dt} B \tag{1.23}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \tag{1.24}$$

সমীকরণ (1.24)কে দুবার সমাকলন করে পাওয়া যায়

$$z = z_0 + Vt \tag{1.25}$$

উপরের z_0 এবং v সমাকলন ধ্রুবক এবং (1.25) সূত্রের অর্থ এই যে কণাটি z অক্ষ বরাবর সমবেগে v বেগে চলতে থাকবে। (1.23) সমীকরণকে $i(=\sqrt{-1})$ দিয়ে গুণ করে এবং তারপর (1.22) সমীকরণের সঙ্গে যোগ করে পাওয়া যায়

$$\frac{d}{dt}(x+iy) = \alpha B\left(\frac{dy}{dt} - i\frac{dx}{dt}\right) = -i\alpha B\frac{d}{dt}(x+iy)$$

একবার সমাকলন করে লেখা যায়

$$\frac{d}{dt}(x+iy) = -i\,\alpha\, B\frac{d}{dt}(x+iy) + Q$$

এখানে Q সমাকলন ধ্রুবক এবং সাধারণভাবে এটি একটি জটিল সংখ্যা হবে। উপরের সমীকরণটিকে লেখা যায়

$$\frac{d}{dt}\left[x+iy+R\right]=-i\alpha B\left(x+iy+R\right)$$

যেখানে $R=-\frac{Q}{i\alpha\beta}=\frac{iQ}{\alpha\beta}$, যা একটি ধ্রুবক।-

সমাকলন করে পাই

$$\left(x+iy+R\right)=Ae^{-i\alpha\beta t} \qquad (1.26)$$

A′ ও একটি সমাকলন ধ্রুবক। যেহেতু সাধারণভাবে R ও A উভয়ই জটিল, আসলে সমাকলন ধ্রুবকের সংখ্যাা 41। সমীকরণ (1.26) এর বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ আলাদা করে লেখা যায় ($\alpha\beta$ 'র বদলে ω লিখে) $x=x_0+r_0\cos(\omega t-\theta)$ (1.27)

$$y=y_0-r_0\sin(\omega t-\theta) \qquad (1.28)$$

সমীকরণ (1.27) ও (1.28) এ x_0, y_0, $r_0\theta$ সমাকলন ধ্রুবক এবং গতির বিষয়ে আরও কিছু না জানা থাকলে নির্ণয় করা যাবে না। ধরা যাক, যদি t = 0 সময়ে অবস্থান (x,y) এবং গতিবেগ $(\dot{x},\dot{y})$ দেওয়া থাকে তাহলে x_0, y_0, r_0,θ এর মান নির্ণয় করা যাবে। উপরের দুটি সমীকরণে $\alpha\beta$ বদলে ω লেখা হয়েছে। সমীকরণ (1.27) ও (1.28) থেকে t'কে অপনয়ন করে গতিপথ পাওয়া যায়— সেটি নিম্নরূপ

$$(x-x_0)^2 0+(y-y_0)^2=r_0^2$$

অর্থাৎ x,y সমতলে গতি বৃত্তাকার এবং বৃত্তের কেন্দ্রের অবস্থান (x_0,y_0) এবং ব্যাসার্ধ r_0 এ তিনটিই অনির্দিষ্ট রয়ে গেছে কিন্তু বৃত্তাকার পথে কৌণিক বেগটির মান নির্দিষ্ট।

এই বৃত্তাকার গতির সঙ্গে z দিকে গতিযুক্ত করলে, সাধারণ গতি হবে একটি কুণ্ডলী বরাবর (helical)। অবশ্য বিশেষ ক্ষেত্রে যেখানে z দিকে কোনও গতি নেই, যেখানে গতি শুধু একটি সমতলে বৃত্তাকার পথেই আবদ্ধ থাকবে।

1.6.1 অনুশীলনী - 4

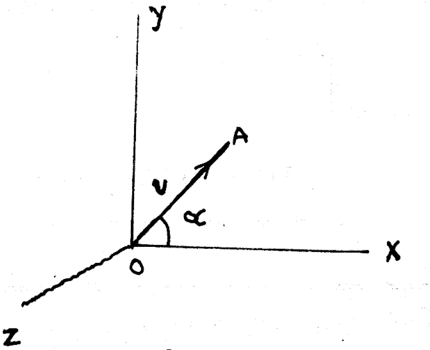
1. "একটি নির্দিষ্ট চৌম্বকক্ষেত্র একটি নির্দিষ্ট আহিতকণার বৃত্তাকার গতিপথের বক্রতা কণাটির গতিবেগের ব্যস্তানুপাতিক।" এই উক্তিটির সত্যতা পরীক্ষা করুন। (বক্রতা $= {}^{1}/_{r}$, যেখানে r ব্যাসার্ধ।)

2. প্রোটন ও ইলেকট্রনের আধানের পরিমাণ সমান কিন্তু বিপরীতধর্মী এবং প্রোটনের পর ইলেকট্রনের ভরের 1836 গুণ।- একই চৌম্বকক্ষেত্র উভয়ের বেগ এক হলে, তাদের গতিপথে কী পার্থক্য লক্ষ্য করা যাবে?

3. "চুম্বকক্ষেত্রের প্রভাবে আহিত কণার বেগের পরিবর্তন হয় কিন্তু দ্রুতির পরিবর্তন হয় না"। এই উক্তিটি কি সঠিক?

1.6.2 পৃথিবীর অভিকর্ষজ ক্ষেত্রে প্রাসের গতি

পৃথিবীর অভিকর্ষজ ক্ষেত্রে উল্লম্বরেখা বরাবর গতির আলোচনা আগেই করা হয়েছে। এবার মনে করুন একটি বস্তুকে ভূমি থেকে v বেগে উল্লম্বরেখার সঙ্গে একটি কোণে নিক্ষেপ করাহল। 1.3 চিত্রে



চিত্র 1.3

y অক্ষটি উল্লম্ব দিকে, OA প্রাথমিক নিক্ষেপের বেগ অনুভূমিক রেখা OX এবং OY এর সমতলে অবস্থিত। OA অনুভূমিক OX রেখার সঙ্গে α কোণে অবস্থিত সুতরাং OA উল্লম্ব OY 'এর সঙ্গে $\pi/2-\alpha$ কোণে আনত।- OZ অক্ষ XOY সমতলের লম্বদিক।- সুতরাং Y দিকে ত্বরণ - g এবং x বা z দিকে কোনও ত্বরণ নেই। কাজেই

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g \tag{1.29}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=0$$

এদের সমকলন করে এবং সীমান্তশর্ত ($\frac{dx}{dt} = \nu\cos\alpha$, $\frac{dy}{dt} = \nu\sin\alpha$, $\frac{dz}{dt} = 0$ এবং t = 0 সময়ে x = y = z = 0) ব্যবহার করে পাওয়া যায়

$$
\begin{aligned}
&x = (\nu\cos\alpha)t. \\
&y = (\nu\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (1.30) \\
&z = 0
\end{aligned}
$$

দেখা যাচ্ছে যে গতি x - y সমতলে সীমাবদ্ধ থাকবে এবং t অপনয়ন করে পাওয়া যায়—

$$y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{\nu\cos\alpha}\right)^2 \qquad (1.31)$$

যেহেতু x এবং x^2 সহগগুলি ধ্রুবক, (1.31) একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।-

1.6.3 অনুশীলনী - 5

1. প্রাসের গতিপথ একটি অধিবৃত্ত, এটি প্রমাণ করতে ধরা হয়েছে যে অভিকর্ষজ ত্বরণ g একটি ধ্রুবক। এর জন্য ν ও α এর উপরে কি শর্ত আরোপ করা দরকার?
2. একটি প্রাস কত দূর গিয়ে আবার অনুভূমিক রেখা OX কে স্পর্শ করবে? এর জন্য সময়ই বা কত লাগবে?
3. সর্বাধিক উচ্চতা প্রাসের ক্ষেত্রে কত হবে? প্রাসের ক্ষেত্রে সঠিক সমীকরণগুলি ব্যবহার করে প্রাসটি অনন্তদূরত্বে চলে যাওয়ার জন্য প্রয়োজনীয় বেগ ও পূর্বে যে পলায়ন বেগ নির্ণয় করা হয়েছে, উভয়ই কি অভিন্ন? যদি না হয় তাহলে কারণ কি?

1.7 নির্দেশাংকের রূপান্তর ও আপেক্ষিক বেগ

আপনি দেখেছেন যে অবস্থান নির্দেশ করবার জন্য আমরা একটি সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রের অবতারণা করেছিলাম। এই নির্দেশতন্ত্রে তিনটি পরস্পরের সমকোণী অক্ষ একটি বিন্দুতে মিলিত হয়েছে— ঐ বিন্দুটিকে বলা হয়েছিল মূলবিন্দু । যে কোনও বিন্দুর নির্দেশাংক তিনটি হল ঐ বিন্দু থেকে অক্ষতিনটির উপর অভিক্ষেপ। সাধারণভাবে কিন্তু একটি বিন্দুর অবস্থান বোঝাতে এটি একটি অদ্বিতীয় পদ্ধতি নয়, এমন কি অনেক সময় অন্য পদ্ধতি ব্যবহার করা সুবিধাজনক। একটি কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র ব্যবহার মরে আমরা যে তিনটি নির্দেশাংক পাই তার নিরপেক্ষ যে কোন তিনটি আপেক্ষক দিয়েই বিন্দুটির অবস্থান পরস্পর

নির্দেশ করা যায়—অর্থাৎ x, y, z যদি বিন্দুটির কার্টেজীয় নির্দেশাংক হয় তবে তিনটি (x, y, z) এর অপেক্ষক

$$x' = f_1(x, y, z)$$
$$y' = f_2(x, y, z)$$
$$z' = f_3(x, y, z)$$

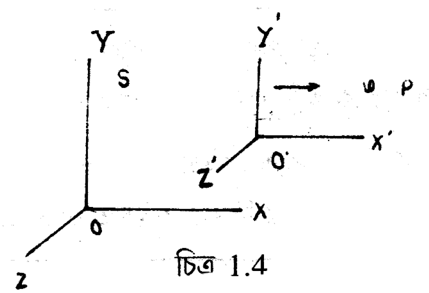
পরস্পর নিরপেক্ষ হলেই, (x', y', z') কে ঐ বিন্দুটির নির্দেশাংক হিসেবে ব্যবহার করা চলে।

এরূপ বিমূর্ত , সম্পূর্ণ গাণিতিক আলোচনার ব্যাপ্তি খুব বিরাট এবং বেশ কিছুটা জটিল। এখানে আমরা তার ভেতরে যাব না।

কেবলমাত্র প্রাথমিক গতিবিদ্যার আলোচনার জন্য আপনাদের নির্দেশাংকের রূপান্তর বিষয়ে যেটুকু জানা দরকার, তাই এখানে পরিবেশন করব।

1.7.1 দুটি সমকোণী কাটেজীয় ফ্রেম পরস্পরের সাপেক্ষে সমবেগে গতিশীল।

ধরা যাক XYZ ও X′Y′Z′ দুটি সমকোণী কার্টেজীয় ফ্রেম D যেগুলি পরস্পরের সাপেক্ষে সমবেগে গতিশীল (চিত্র 1.4) অথাৎ s ফ্রেমের দৃষ্টিতে s′ ফ্রেমটির বেগ $\vec{v}$ এবং s′ ফ্রেমের দৃষ্টিতে s ফ্রেমের বেগ $-\vec{v}-$ অর্থাৎ s উল্টোদিকে ঐ একই বেগে যাচ্ছে। আমরা ধরে নেব যে সময় $t = 0$, তে দুটি মূলবিন্দু একই অবস্থানে ছিল। তাহলে দৃশ্যতই s এর সাপেক্ষে s′ ফ্রেমের মূলবিন্দু O এর নির্দেশাঙ্ক হবে $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ যেখানে



চিত্র 1.4

$$\vec{r}_0 = \vec{v}t$$

(উপাংশ $x_0 = v_x t,\ y_0 = v_y t,\ z_0 = v_z t$)।

আবার P বিন্দুর নির্দেশাঙ্ক যদি s′ ফ্রেমে $\vec{r}(x', y', z')$ হয় তবে s ফ্রেমে তার নির্দেশাঙ্ক $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,' = \vec{v}t + \vec{x}\,'$ যার উপরাংশ গুলি হল

$$x = v_x t + x'$$
$$y = v_y t + y'$$

ও

$$z = v_z t + z'$$

P-র গতিবেগ ভেক্টর দুটি ফ্রেমে $\vec{u}$ এবং $\vec{\nu}$ লিখলে

$$\vec{u} = \vec{\nu} + \vec{u} \tag{1.32}$$

অথবা $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{\nu}$ (1.33)

এই সমীকরণের প্রতিপাদ্য এ ভাবে প্রকাশ করা যায় যদি s′ এবং P (দুটি বস্তু বা ফ্রেম) একটি নির্দিষ্ট ফ্রেম (এখানে s) এর সাপেক্ষে যথাক্রমে $\vec{u}$ এবং $\vec{\nu}$ বেগে গতিশীল হয় তবে s′ এর সাপেক্ষে P’র গতিবেগ হবে $\vec{u} - \vec{\nu}$ । এই গতিবেগটিকে বলা হয় P′ ’র s′ ’এর তুলনায় আপেক্ষিক গতিবেগ। আসলে u, v ও আপেক্ষিক বেগ (s এর সাপেক্ষে) কিন্তু অবস্থা বিশেষে sকে একটু বিশিষ্ট মর্যাদা দেওয়া হয়। নিচের উদাহরণে ব্যাপারটি পরিষ্কার হবে।

উদাহরণ 1 — একটি মানুষ $\vec{\upsilon}$ বেগে যাচ্ছে। বৃষ্টির ফোঁটা মাটিতে পড়ছে $\vec{u}$ বেগে ($\vec{u}$ উল্লম্বদিকের সঙ্গে একটি সূক্ষ্মকোণ করে)। এখানে s ফ্রেম হল স্থানীয় ভূমিতল, সেটি উল্লেখ করা হয় নি। আমরা মানুষটিকে s′ ফ্রেম এবং বৃষ্টির ফোঁটাকে P বলে ধরে নিয়ে বলব যে মানুষটির সাপেক্ষে ফোঁটার আপেক্ষিক বেগ $= \vec{u} - \vec{\nu}$ ।

1.7.2 অনুশীলনী - 6

1. দুটি রেলগাড়ী পরস্পরের দিকে এগিয়ে আসছে। তাদের গতিবেগ ঘন্টায় 40 এবং 60km হলে, পরস্পরকে অতিক্রম করতে কত সময় লাগবে? রেলগাড়ী দুটিই 250 লম্বা।
2. একটি বিন্দু থেকে বিভিন্নদিকে ঢিল ছোড়া হল। ঢিলগুলির বেগের মান সমান—ধরুণ v তা তাহলে দুটি ঢিলের গতির দিকের অন্তর্গত কোণ θ হলে, তাদের আপেক্ষিক বেগের মান ও দিক নির্ণয় করুন।

1.7.3 বেলনীয় নিদেশতন্ত্র

1.5 চিত্রে OXYZ একটি কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র। P বিন্দুর কাটেজীয় নির্দেশাংক যথাক্রমে

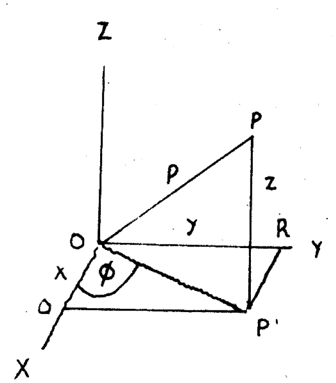
x = OQ

y = OR

z = PP′

এখানে PP′ , XY সমতলের উপর লম্ব, P′Q, P′R যথাক্রমে OX , OY অক্ষের উপর লম্ব।

বেলনীয় তন্ত্রে নির্দেশাংক, $-z, \rho(= DP')$ এবং $\phi(= \angle P'OX)$ । দুই তন্ত্রের নির্দেশাংক সহজেই লেখা যায়



চিত্র 1.5

$$z = z \qquad\qquad x = \rho\cos\phi$$

$$\rho = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2} \quad (1.34a) \text{ অথবা } \quad y = \rho\sin\varphi \quad (1.34b)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad\qquad z = z$$

সময়ের সাপেক্ষে অবকলন করে পাওয়া যায়

$$\dot{z} = \dot{z} \qquad\qquad \dot{x} = \dot{\rho}\cos\phi - \rho\sin\phi\dot{\phi}$$

$$\dot{\rho} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}} \quad (1.35a) \text{ এবং } \quad \dot{y} = \dot{\rho}\sin\phi + \rho\cos\phi\dot{\phi} \quad (1.35b)$$

$$\dot{\phi} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2} \qquad\qquad \dot{z} = \dot{z}$$

উপরের দুটি সমীকরণে মাথায় ডট্ চিহ্ন সময় t 'এর সাপেক্ষে অবকলন নির্দেশ করে। (1.35 a বা b) থেকে সহজেই পাওয়া যায়

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{z}^2 + \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 \qquad (1.37)$$

সমীকরণ (1.37)'এর দুদিক গতিবেগের মানের বর্গের সমান। $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ তিনটি সমকোণী দিকে গতিবেগের উপাংশ আবার $\dot{z}, \dot{\rho}$, $\rho\dot{\phi}$ ও সেইরূপ তিনটি সমকোণী দিকে গতিবেগের উপাংশ ρ এবং z উভয়েরই সমকোণী দিকে সরণের মান $\rho d\phi$, সুতরাং $\rho\dot{\phi}$, গতিবেগের একটি উপাংশ ।

ত্বরণের বিভিন্ন উপাংশ নির্ণয় করবার জন্য (1.35b) কে t'এর সাপেক্ষে আর একবার অবকলন করে পাই —

$$\ddot{x} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\cos\phi - 2\dot{\rho}\dot{\phi}\sin\phi \qquad (1.36a)$$

$$\ddot{y} = 2\dot{\rho}\dot{\phi}\cos\phi + \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\sin\phi \qquad (1.36b)$$

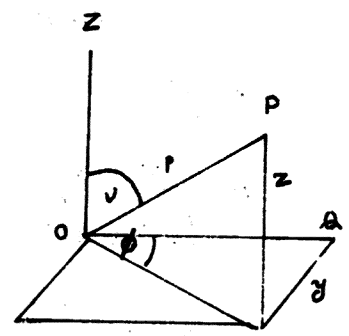
$$\ddot{z} = \ddot{z}$$

(1.36a) এবং (1.36b) থেকে বোঝা যাচ্ছে যে ρ'র দিকে ত্বরণ $\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2$ এবং তার লম্বদিকে ত্বরণ $2\dot{\rho}\dot{\phi}$ এই সিদ্ধান্ত থেকে অথবা সরাসরি (1.36 a, b, c) থেকে পাওয়া যায়

$$\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2$$

$$=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2\right)^2+4\dot{\rho}^2\dot{\phi}^2+\ddot{z}^2$$

1.7.4 গোলীয় নির্দেশতন্ত্র



চিত্র 1.6

এই নির্দেশতন্ত্রে P'এর নির্দেশাঙ্ক r, θ (OP এবং Z অক্ষের অন্তর্গত কোণ), ϕ (OP 'র XY সমতলে অভিক্ষেপ P OP' সঙ্গে X অক্ষের কোণ) (চিত্র 1.6) লক্ষ্য করুন।

$0\le r<+\alpha;\ 0\le\theta\le\pi$ এবং $0\le\phi\le 2\pi$ অর্থাৎ r এর মান শূন্য থেকে ধনাত্মক অসীম যা কিছু হতে পারে, সেখানে কোণ θ'র মান শূন্য থেকে π এবং কোণ ϕ শূন্য থেকে 2π 'র মধ্যে থাকবে। সহজেই দেখা যায়

$$z=r\cos\theta \qquad r=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}$$

$$x=r\sin\theta\cos\phi \quad \text{অথবা} \quad \theta=\tan^{-1}\left[\frac{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}{z}\right]$$

$$y=r\sin\theta\sin\phi \qquad \phi=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

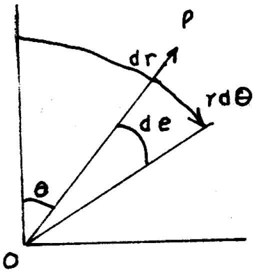
সময় t'র সাপেক্ষে অবকলন করে পাওয়া যায়।

$$\dot{z}=\dot{r}\cos\theta-r\sin\theta\dot{\theta} \tag{1.37a}$$

$$\dot{x}=\dot{r}\sin\theta\cos\phi+r\cos\theta\cos\phi\,\dot{\theta}-r\sin\theta\sin\phi\,\dot{\phi} \tag{1.37b}$$

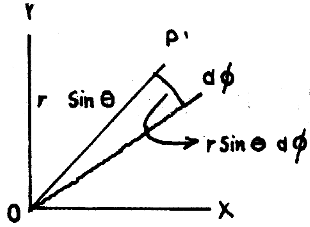
$$\dot{y}=\dot{r}\sin\theta\sin\phi+r\cos\theta\sin\phi\,\dot{\theta}+r\sin\theta\cos\phi\,\dot{\phi} \tag{1.37c}$$

সমীকরণ (1.37a, b, c)'র তাৎপর্য বুঝবার জন্য নিচে আলাদা করে POZ সমতল এবং XOY সমতলের চিত্র 1.7(a) ও (b) এবং সেই সঙ্গে অণুপরিমান পরিবর্তন dr, $d\theta$, $d\phi$ এর ফলশ্রুতি রৈখিক সরণ dr, $rd\theta$, $r\sin\theta d\phi$ ও দেখানো হল।



চিত্র 1.7 (a)

POZ বা r - z সমতল।



চিত্র 1.7 (b)

OXY সমতল

দৃশ্যতই z দিকে কেবল dr ও $rd\theta$ 'র উপাংশ আছে—তারা যথাক্রমে $dr\cdot\cos\theta$ এবং $rd\theta\cos\left(90^\circ+\theta\right)$ এথেকেই (1.37a)'র ডানদিকের দুটি পদ এসেছে। dr ও p $d\theta$ 'র z'র লম্ব উপাংশ OP' দিকে এবং তাদের x,y উপাংশ থেকে (1.37b) ও (1.37c) 'র ডানদিকের প্রথম দুটি পদ এসেছে। $r\sin\theta d\phi$ সরণ XOY সমতলে OP' র লম্ব অভিমুখী-এর x, y উপাংশ (1.37b) ও (1.37c) 'র তৃতীয় পদ দুটি দিচ্ছে।

(1.37 a, b, c) তিনটি সমীকরণের বর্গ নিয়ে যোগ করে পাওয়া যায়—

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2$$

$$=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2$$

এটি গতিবেগের বর্গের রাশিমালা এবং এটি আমাদের চিত্রানুযায়ী বিশ্লেষণের সঙ্গেমিলে যাচ্ছে।

এবার দেখা যাক, ত্বরণের রাশিমালা কি হবে।

1.37 (a, b, c) সমীকরণগুলি থেকে

$$\ddot{z}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\cos\theta-\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\sin\theta \qquad (1.38a)$$

$$=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)\cos\theta-\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}-r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right)\sin\theta$$

$$\ddot{x} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\right)\sin\theta\cos\phi + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\cos\theta\cos\phi - \left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right)\sin\theta\sin\phi - 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\sin\phi$$

(1.38b)

$$\ddot{y} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\right)\sin\theta\sin\phi + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\cos\theta\sin\phi + \left(2\dot{r}\dot{\phi} + \ddot{\phi}\right)\sin\theta\cos\phi + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi$$

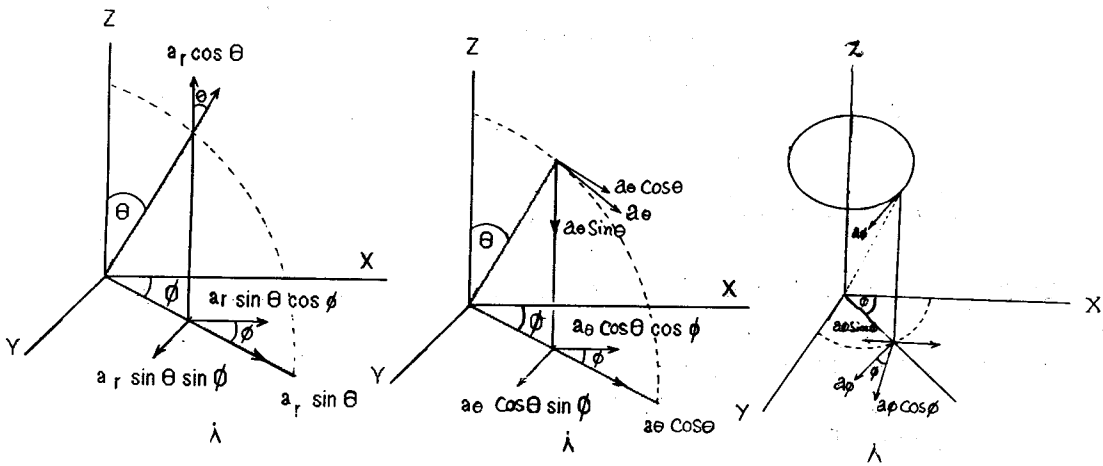
(1.38c)

একই ত্বরণ ভেক্টরের উপাংশ $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ ও অন্যদিকে গোলীয় নির্দেশতন্ত্র বলা যাক a_r, a_θ, a_ϕ । অতএব তাদের মধ্যে সম্পর্ক হবে—

$$\ddot{z} = a_r\cos\theta - a_\theta\sin\theta \quad (1.39a)$$

$$\ddot{x} = a_r\sin\theta\cos\varphi + a_\theta\cos\theta\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi \quad (1.39b)$$

$$\ddot{y} = a_r\sin\theta\sin\varphi + a_\theta\cos\theta\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi \quad (1.39c)$$



চিত্র 1.8

(a) (b) (c)

1.8 (a), (b), (c) চিত্র থেকে এই সম্পর্কগুলি বুঝতে পারবেন। a_r, a_θ, a_ϕ 'র সহগগুলি dr, $rd\theta$, $r\sin\theta d\phi$ দিকগুলির সঙ্গে কার্টেজীয় অক্ষগুলির দিককোসাইন।

সমীকরণ (1.38 a, b, c) ও (1.39 a, b, c) 'র তুলনাটা করে পাওয়া যায়

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \tag{1.40a}$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 \tag{1.40b}$$

$$a_\phi = 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\cos\theta\dot{\phi}\dot{\theta} + r\sin\theta\ddot{\phi} \tag{1.40c}$$

সাধারণত আমাদের গোলীয় তন্ত্রে ত্রিমাত্রিক ত্বরণের ব্যঞ্জকগুলির ব্যবহার দরকার হবে না । মনে করুন গতি একটি সমতলে সীমাবদ্ধ। তাহলে গোলীয় তন্ত্রটির z-র অক্ষ এই সমতলের লম্বমুখী নেওয়া হয়। ফলে গতির প্রত্যেক বিন্দুতেই $\theta = \pi/2$ এবং $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ । এমতাবস্থায়

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2$$

$$a_\theta = 0$$

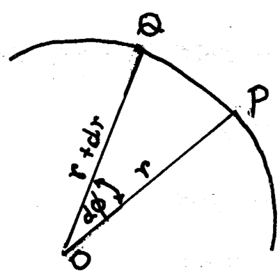
$$a_\phi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + p\ddot{\phi}$$

প্রকৃতিতে একটি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ সমস্যা হল গ্রহ উপগ্রহের গতি। এইসব ক্ষেত্রে প্রায়শই ত্বরণ একটি নির্দিষ্টে বিন্দুর দিকে । ঐ বিন্দুটি মূলবিন্দু নিলে, ত্বরণের একমাত্র a_r উপাংশটি বর্তমান। $a_\theta = a_\phi = 0$ কাজেই

$$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0$$

অথবা $$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\right) = 0 \tag{1.41}$$

1.9 চিত্রে P ও Q বস্তুটির গতিপথে দুটি অতি নিকট বিন্দু, তাদের মধ্যে নির্দেশাংকের প্রভেদ dr ও $d\phi$ ফলত OPQ'র ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}r(r+dr)\sin d\phi \approx \frac{1}{2}r^2 \cdot d\phi$ । সুতরাং (1.41) থেকে দেখা যাচ্ছে যে ক্ষেত্রফলের পরিবর্তনের হার একটি ধ্রুবক। অর্থাৎ ত্বরণ যদি কেন্দ্রগ হয়, অর্থাৎ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর অভিমুখী হয়, তাহলে ক্ষেত্রপরিক্রমার গতি ধ্রুবক।



চিত্র 1.9

1.8 সারাংশ

এককের শেষে এসে আপনি কি কি আলোচনা পড়লেন, তা একবার দেখে নিন।

1. আপনি কতকগুলি সংজ্ঞা এবং সরণ, গতিবেগ ও ত্বরণের সম্পর্ক জেনে নিয়েছেন।

2. সরণ, গতিবেগ, ত্বরণের যে কোনও একটি সময়ের অপেক্ষক হিসাবে দেওয়া থাকলে, অন্যগুলি নির্ণয় করবার পদ্ধতি আলোচিত হয়েছে। এভাবে উপবৃত্ত, বৃত্ত বা অধিবৃত্ত পক্ষের ক্ষেত্রে গতি ও ত্বরণ নির্ণয় করা হয়েছে।

3. অভিকর্ষজ ত্বরণের ক্ষেত্রে উল্লম্ব গতি ও অধিবৃত্ত গতির আলোচনা হয়েছে। বিশেষ করে অভিকর্ষ থেকে মুক্ত হতে হলে কণার গতি যে একটি সংকট মানের অপেক্ষা বড় হতে হবে, তা দেখান হয়েছে।

4. গতিবেগ নির্দেশ কাঠামোর উপর নির্ভরশীল। একটি নির্দেশতন্ত্রে গতির হিসাবে অন্য নির্দেশতন্ত্রে আপেক্ষিক গতির মান নির্ণয় করা হয়েছে। এভাবে গতিমাত্রই আপেক্ষিক ।

5. বেলনীয় ও গোলীয় তন্ত্রে বেগ ও ত্বরণের ব্যঞ্জক আলোচিত হয়েছে এবং কেন্দ্রগ ত্বরণের ক্ষেত্রে ক্ষেত্রফল পরিক্রমার বেগের ধ্রুবতা প্রমাণ করা হয়েছে।

6. একটি আহিত কণার গতিপথ চুম্বকক্ষেত্রে কুন্ডলী এবং বিশেষ ক্ষেত্রে বৃত্তাকার — এই তথ্যও আপনি জেনেছেন।

1.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় করবার সময় আমরা ধরে নিয়েছি যে দুটি বেগই সমবেগ। যদি বেগ দুটি ত্বরান্বিত হয়, তবে আপেক্ষিক বেগ এবং আপেক্ষিক ত্বরণ কি হবে?

2. একটি কণা সমদ্রুতিতে একটি বৃত্তাকার পথ পরিক্রমা করছে। অন্য একটি সমবেগ চলমান কণার সাপেক্ষে প্রথম কণার গতিপথ এবং গতিবেগ কি রকম হবে?

3. গোলীয় তন্ত্রে নিচের সমীকরণ কি নির্দেশ করে?

(a) $\theta =$ ধ্রুবক $\theta_0 \neq \pi/2$ অথবা 0

(b) $\theta = \pi/2$

(c) $\phi =$ ধ্রুবক

(d) $r =$ ধ্রুবক

4. গ্রহদের গতিপথের সমীকরণ গোলীয় নির্দেশতন্ত্রে নিম্নরূপ:

$\theta = \pi/2$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{\ell}(1 + e\cos\phi)$ যেখানে ℓ এবং e ধ্রুবক। কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রে রূপান্তর করে দেখান যে গ্রহদের গতিপথ উপবৃত্তাকার।

1.10 উত্তরমালা

অনুশীলনী -1

ত্বরণের মান $|\vec{a}| = \sqrt{\dot{\vec{v}}.\dot{\vec{v}}} = |\dot{\vec{v}}|$

এবং দ্রুতির পরিবর্তনের হার $\frac{d}{dt}\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \frac{\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}}{\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}}$

$|\dot{\vec{v}}|\cdot\cos\theta$ $\therefore$ দুটির মান সমান নয়।

2. $\frac{d\vec{v}}{dt} \neq 0,\ v^2 =$ ধ্রুবক।

$v^2 (= \vec{v}.\vec{v})$ কে সময়ের সাপেক্ষে অবকলন করে পাওয়া যায়

$\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$

অর্থাৎ $\vec{v}$ এবং $\frac{d\vec{v}}{dt}$ সবসময় পরস্পরের লম্বমুখী।

3. $r^2 =$ ধ্রুবক হলে $\frac{d}{dt}(r^2) = 0$

বা $\vec{r}.\dot{\vec{r}} = 0$

অর্থাৎ অবস্থান ভেক্টর $(\vec{r})$ এবং গতিবেগ $\dot{\vec{r}}$ পরস্পরের লম্ব অভিমুখী

4. সংজ্ঞা অনুযায়ী গড় গতিবেগ $\langle\vec{v}\rangle$

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\int_0^t \vec{v}.dt}{\int_0^t dt}$$

$\vec{v} = \vec{a}\cdot t$ (কারণ সমত্বরণ এবং $t = 0$ তে $\vec{v} = 0$)

অতএব

$$\langle\vec{\nu}\rangle = \frac{\int_0^t \vec{a}.t\,dt}{t} = \frac{1}{2}\vec{a}t = \frac{1}{2}\vec{\nu}$$

অর্থাৎ গড় গতিবেগ তাৎক্ষনিক গতিবেগের অর্ধেক হবে।

অনুশীলনী -2

1. ত্বরণ $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -a\omega^2 \sin\omega t\vec{i}$

$= -\omega^2\vec{r}$ যা $\vec{r}$ এর সমানুপাতী ও বিপরীতমুখীর

অর্থাৎ প্রমান্য প্রমানিত হল

2. $\nu = \frac{dx}{dt} = \alpha Q e^{-\alpha t}$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha^2 Q e^{-\alpha t}$$

অন্তিম অবস্থান ($t \to \alpha$ বসিয়ে)

3. $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha^2 r \sin\alpha t$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\alpha^2 r \cos\alpha t$$

$\therefore$ কণাটির ত্বরণ $= -\alpha^2 r\left(\vec{i}\sin\alpha t + \vec{j}\cos\alpha t\right)$

এবং ত্বরণের মানের বর্গ $= a_x^2 + a_y^2 = \alpha^4 r^2$

$\therefore$ ত্বরণের মান $= \alpha^2 r =$ ধ্রুবক

4. গতিবেগ $\nu = \frac{dx}{dt} = u$ ($t > 0$ হলে)

$= -\nu$ ($t < 0$ হলে)

$$a = \frac{d\nu}{dt} = u \quad (t \neq 0 \text{ হলে})$$

t = 0 তে গতিবেগ এবং ত্বরণ অসংজ্ঞাত (undefined)।

অনুশীলনী -3

1. $\upsilon = \sqrt{2g_0R}$ থেকে পাই

$$1.1 \times 10^4 = \sqrt{2 \times 9.8 \times R}$$

অথবা

$$1.21 \times 10^8 = 19.6 \times R$$

$$R = \frac{1.21}{19.6} \times 10^8 \text{m} = 6.4 \times 10^6 \text{m} \quad (\text{প্রায়})$$

2. $\nu = \sqrt{2g_mR}$ (g_m = চন্দ্রের ভর)

$$= \sqrt{2 \times 1.6 \times 1738 \times 10^3}$$

$$= 2.4 \times 10^3 \text{ms}^{-1}$$

3. উচ্চতম বিন্দুতে সময় t - 2s এবং গতিবেগ শূন্য।

সুতরাং $(2+T)$ সেকেন্ডে গতিবেগ T.g নিচের দিকে আবার $(2-T)$ সেকেন্ডে গতিবেগ T.g উপরেরদিকে। উভয়ের ক্ষেত্রেই ভূমি থেকে উচ্চতা $= h - \frac{1}{2}gT^2$, যেখানে h উচ্চতর ঊর্দ্ধতম স্থান।

উপরে নিক্ষেপের বেগ v = 2g সরণ 2s পরে বেগ শূণ্যে পরিণত হয়েছিল।

4. এখানে নিম্নগামী বলের জন্য

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{2}gt^2 \text{ অথবা } t = \sqrt{h/g}$$

এবং ঊর্ধ্বগামী বলের জন্য $\frac{h}{2} = ut - \frac{1}{2}gt^2$

$$= u\sqrt{h/g} - \frac{h}{2}$$

অর্থাৎ $h = u\sqrt{\frac{h}{g}}$

অথবা $u = \sqrt{gh}$

অনুশীলনী -4

1. সমীকরণ (1.27) ও (1.28) থেকে পাওয়া যায়

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r_0{}^2\omega^2$$

সমীকরণ (1.18) ও তার পরের মন্তব্য থেকে এবং সমীকরণ (1.27) বা এর ঠিক পূর্বের মন্তব্য থেকে দেখা যায় :

$$\omega = \alpha\beta = \frac{\beta e}{mc}$$

দৃশ্যতই ω একটি নির্দিষ্ট কণা ও নির্দিষ্ট চুম্বকক্ষেত্রের জন্য একটি ধ্রুব সংখ্যা। অতএব $v^2 \alpha r^2$ এবং বক্রতা $1/r \; \alpha \frac{1}{v}$

2. β এক কিন্তু আধান e বিপরীতধর্মী, কাজেই ω ও দুটি ক্ষেত্রে বিপরীত চিহ্নের হবে—অর্থাৎ একটি ধণাত্মক হলে অপরটি হবে ঋনাত্মক। আবার যেহেতু প্রোটনের ভর ইলেকট্রনের ভরের 1836 গুণ প্রোটনের জন্য ω র মান

$$\omega_p = \frac{\beta e}{m_p c} = \frac{\beta e}{1836 m_e c} = \frac{\omega_e}{1836} \left(\omega_e = \frac{\beta e}{m_e c}\right)$$

$v = r\omega$ সূত্র থেকে দেখা যায়, v সমান হলে r হবে ω র ব্যস্তানুপাতিক অর্থাৎ প্রোটনের ক্ষেত্রে r এর মান ইলেকট্রনের তুলনায় 1836 গুণ। সুতরাং পার্থক্য হবে এই যে ইলেকট্রনের পথের বক্রতা ব্যাসার্ধ অনেক বড় হবে (1836 গুণ) এবং বক্রতার দিক ও হবে বিপরীত।

3. সমীকরণ (1.18) থেকে দেখা যাচ্ছে

$$\overline{v} \cdot \overline{a} = 0$$

অথবা $\vec{v} \cdot \frac{d\overline{v}}{dt} = 0$

সুতরাং $\frac{d}{dt}\left(v^2\right)=0$ কিন্তু (1.18) থেকে দেখা যাচ্ছে

সাধারণভাবে $\vec{a}\neq 0$ কাজেই উক্তিটি সঠিক।

অনুশীলনী -5

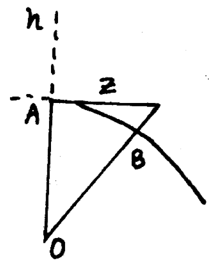
1. O পৃথিবীর কেন্দ্র OA, OB পৃথিবীর ব্যাসার্ধ = R h উচ্চতায় g' র মান হবে

$$g=g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}=g_0\left(1-\frac{2h}{R}.....\right)$$

সুতরাং $g=g_0$ ধরার শর্ত $\frac{2h}{R}<<1$

আবার অনুভূমিক দূরত্ব x হলে g' র দিক পরিবর্তন হবে। θ কোণ এই পরিবর্তন হলে

$\theta\cong\tan\theta=\frac{x}{R}$ । সুতরাং θ উপেক্ষনীয় হবার শর্ত $\frac{x}{R}<<1$ ।



চিত্র 1.10

প্রাথমিক উল্লম্ব বেগ $=v\sin\alpha$, অতএব চূড়ান্ত উচ্চতা

$$h=\frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}$$

আবার সমীকরণ (1.30) থেকে কণাটি আবার ভূমিকে স্পর্শ করবে (y = 0 হবে) যখন

$t=\frac{2v\sin\alpha}{g}$, সুতরাং চূড়ান্ত অনুভূমিক দূরত্ব $v\cos\alpha\cdot\frac{2v\sin\alpha}{g}=\frac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$,

সুতরাং শর্ত $\frac{2h}{R}<<1$ এবং $\frac{x}{R}<<1$ থেকে পাওয়া যায়

$\frac{v^2\sin^2\alpha}{gR}<<1$ এবং $\frac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{gR}<<1$ উভয় শর্ত প্রতিপালিত হবে যদি $v^2<<gR$ হয়।

2. উপরের আলোচনা মধ্যেই উত্তর দেওয়া আছে। প্রাসের পাল্লা এবং উড়ানকাল যথাক্রমে

$\dfrac{2v^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$ এবং $\dfrac{2v \sin\alpha}{g}$

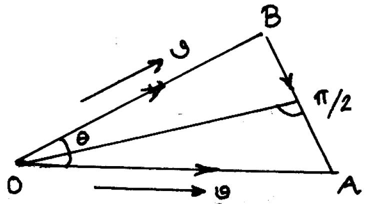
3. সর্বাধিক উচ্চতা উপরে নির্ণীত হয়েছে $\dfrac{v^2 \sin^2\alpha}{2g}$ এবং অনন্ত দূরত্বে যেতে হলে $v \to \infty$। দুটি ফল পৃথক হবার কারণ প্রাসের ক্ষেত্রে উচ্চতার সঙ্গে পরিবর্তন উপেক্ষা করা হয়েছে।

অনুশীলনী -6

1. আপেক্ষিক বেগ $= (40+60)\text{km}(\text{hour})^{-1} = 100\text{km per hour}$ পরস্পরকে অতিক্রম করতে এই আপেক্ষিক বেগ $2 \times 250 = 500\text{m}$ যেতে হবে। অর্থাৎ প্রয়োজনীয় সময়

$$= \frac{\cdot 5\text{km}}{100\text{km/hr}} = \cdot 005\text{hr.} = \cdot 3\,\text{min.} = 18\text{s.}$$

2. $\vec{OA}, \vec{OB}$ দুটি গতিবেগ ভেক্টর। আপেক্ষিক গতিবেগ $\vec{OA} - \vec{OB}$। অতএব ভেক্টরের ত্রিভুজ সূত্র অনুযায়ী আপেক্ষিক গতিবেগ $\vec{BA}$ এর মান $2v \sin\theta/2$।



চিত্র 1.11

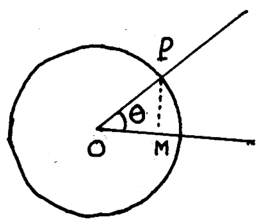
সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. তাৎক্ষনিক আপেক্ষিক বেগ একই থাকবে। আপেক্ষিক ত্বরণ হবে $\dfrac{d\vec{v}}{dt} - \dfrac{d\vec{u}}{dt} =$ দুটি ত্বরণের ভেক্টর বিয়োগ ফল।

2. ধরা যাক বৃত্তটির সমতল $x-y$ সমতল। কেন্দ্রে মূলবিন্দু নিয়ে গতিপথের নির্দেশাঙ্ক হবে

$x = OM = OP\cos\theta = \alpha\cos\omega t$

$y = PM = OP\sin\theta = a\sin\omega t$



চিত্র 1.12

$z = 0$

গতিবেগ হবে

$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t$

$\dot{y} = a\omega \cos \omega t$

$\dot{z} = 0$

সমবেগে চলমান কণার অবস্থানের নির্দেশাঙ্ক ($\vec{v}$ গতিবেগ হলে)

$x' = v_x t$
$y' = v_y t$
$z' = v_z t$

সুতরাং গড় সাপেক্ষে বৃত্তে চলমান কণার নির্দেশাঙ্ক

$x'' = a \cos \omega t - v_x t$
$y'' = a \sin \omega t - v_y t$
$z'' = -v_z t$

অতএব গতিপথের সমীকরণ

$$(x'' + v_x t)^2 + (y'' + v_y t)^2 = a^2$$

$z'' = -v_z t$

অর্থাৎ আপেক্ষিক গতিপথ বৃত্ত, তবে তার কেন্দ্র সমবেগ $-\vec{v}$ গতিশীল।

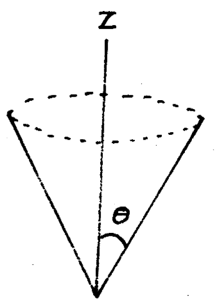
আপেক্ষিক গতিপথের উপাংশ যথাক্রমে

$\nu_x'' = a\omega \sin \omega t - v_x$

$\nu_y'' = a\omega \cos \omega t - v_y$

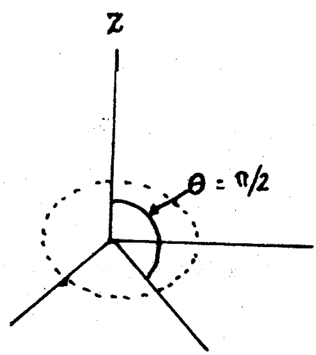
ও $\nu_z'' = -v_z$

3. নিচের চিত্রগুলি থেকেই উত্তর পাওয়া যাবে



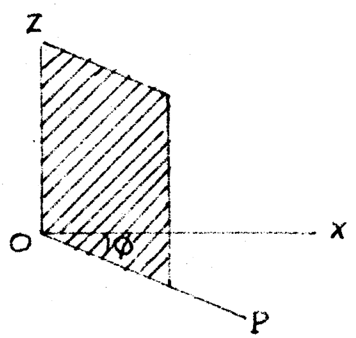
চিত্র 1.13 (a)

z অক্ষকে অক্ষ করে একটি শঙ্কু



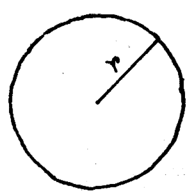
চিত্র 1.12 (b)

একটি সমতল (x,y)



চিত্র 1.13 (c)

z অক্ষ ও OP রেখা নিয়ে একটি সমতল



চিত্র 1.12 (d)

একটি গোলক

4. এক্ষেত্রে কার্টেজীয় নির্দেশাংক

$z = r\cos\theta = 0,\ x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$ এবং $r^2 = x^2 + y^2$

অতএব গতিপথের সমীকরণ (কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রে)

$$\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}=\frac{1}{\ell}\left[1+e.\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\right]$$

সমীকরণটিকে বর্গমূল মুক্ত করে ও কিছু সরলীকরণ করে পাওয়া যায়

$\frac{(x+ea)^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2\left(1-e^2\right)}=1$, যেখানে $a=\frac{\ell}{1-e^2}1$। দৃশ্যতই $e<1$ হলে এটি একটি উপবৃত্ত।

একক 2 □ বল ও ভরবেগ

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা

পূর্ববর্তী এককে আপনি কোন বস্তুর দ্রুতি, বেগ ও ত্বরণ সম্বন্ধে পড়েছেন। বিভিন্ন নির্দেশাংকে এই রাশিগুলি কীভাবে প্রকাশিত হয় তা ঐ এককে আলোচিত হয়েছে। কিন্তু স্থির অবস্থা থেকে কোন বস্তু কীভাবে গতিবেগ লাভ করে। কখন তার ত্বরণ ঘটে এবং ঐ ত্বরণের মান কত হয়, এসব প্রশ্ন সেখানে তোলা হয়নি। এই প্রশ্নগুলির উত্তর নিউটনের গতিসূত্রে। এই এককে আমরা ঐ গতিসূত্রগুলির পর্যালোচনা করব এবং সেগুলির নানা প্রয়োগ বর্ণনা করব। আপনি দেখতে পাবেন যে নিউটনের গতিসূত্র থেকেই বলের ধারণা জন্ম নেয়।

বস্তুর ভরবেগের ধারণার সঙ্গে আপনি নিশ্চয়ই পরিচিত। আপনি নিশ্চয় এও জানেন যে উপযুক্ত এককে প্রকাশ করলে প্রযুক্ত বল বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হারের সমান হয়। এই এককে আপনি বস্তু সমষ্টির রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ এবং কিছু সময় ধরে ক্রিয়াশীল বলের ঘাত (impulse) সম্বন্ধেও অনেকটা জানতে পারবেন।

বলের প্রভাবে যখন বস্তুর গতিবেগের পরিবর্তন ঘটে তখন ঐ বলের দ্বারা বা বলের বিরুদ্ধে কিছু কাজ করা হয়। এতে বস্তুটির গতিশক্তি বা স্থিতি শক্তির পরিবর্তন ঘটতে পারে। পরবর্তী এককে এ বিষয়গুলির বিশদ আলোচনা করা হবে। ঐ এককটি পড়লে বর্তমান এককটির আলোচনা আপনার খুবই কাজে লাগবে।

উদ্দেশ্য : এই এককটি পড়লে আপনি

- নিউটনের গতিসূত্রগুলি প্রয়োগ করে গতিসম্বন্ধীয় অনেক ঘটনার ব্যাখ্যা দিতে পারবেন ও সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।
- একাধিক বলের সাম্যের বিশ্লেষণ করতে পারবেন এবং সাম্যসম্বন্ধীয় উদাহরণগুলির সমাধান করতে পারবেন।
- রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রটি ব্যাখ্যা করতে পারবেন এবং ঐ সূত্রের প্রয়োগ করতে পারবেন।
- বলের ঘাত কাকে বলে তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন এবং
- পরিবর্তনশীল ভরের বস্তুর ক্ষেত্রে নিউটনের গতিসূত্র প্রয়োগ করতে পারবেন।

2.2 নিউটনের গতিসূত্রাবলী

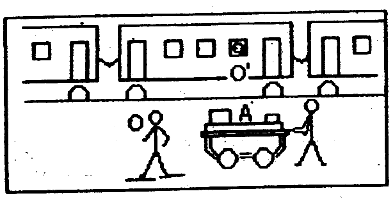
কোন বস্তু স্থির অবস্থা থেকে কীভাবে গতিপ্রাপ্ত হয় এবং কোন গতিশীল বস্তুর কীভাবে গতিপরিবর্তন ঘটে তা বহুদিন বিজ্ঞানী ও দার্শনিকদের কৌতুহল সৃষ্টি করেছে। এক সময়ে তাঁরা মনে করতেন যে কোন বস্তুকে সচল রাখতে তার উপর বলপ্রয়োগ প্রয়োজন, কেননা সাধারণভাবে গতিশীল বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলটি সরিয়ে নিলে কিছু সময়ের মধ্যে সেটিকে থেমে যেতে দেখা যায়। এই ধারণার সত্যতা যাচাই করার জন্য ইতালীয় বিজ্ঞানী গ্যালিলীও অনেক পরীক্ষা নিরীক্ষা করেন। তিনি শেষ অবধি এই সিদ্ধান্তে আসেন যে কোন বস্তুর সমগতি বজায় রাখতে বাইরে থেকে বল প্রয়োগের কোন প্রয়োজন নেই। বরং বাইরে থেকে কোন রকম প্রভাব না থাকলে স্থির বস্তু স্থির অবস্থাতেই থাকবে আর গতিশীল বস্তু সমবেগে সরলরেখায় চলতে থাকবে। বস্তুর এই ধর্মকে আমরা তার জাড্য (inertia) বলি। যে বছর গ্যালিলীওর মৃত্যু হয় সেই 1642 খৃষ্টাব্দেই জন্মালেন আইজ্যাক নিউটন। ইংরাজ বিজ্ঞানী নিউটন গ্যালিলিওর সিদ্ধান্তকে গ্রহণ ও প্রসারিত করে তাঁর গতিসূত্রগুলির মাধ্যমে প্রকাশ করেন। নিউটনের গতিসূত্রগুলি সনাতন গতিবিজ্ঞানের ভিত্তিস্বরূপ। এখন আমরা এই গতিসূত্রগুলি সম্বন্ধে বিশদ আলোচনা করব।

2.2.1 প্রথম গতিসূত্র

নিউটন তাঁর প্রথম গতিসূত্রটি এইভাবে বিবৃত করেছিলেন—'বাইরে থেকে প্রযুক্ত কোন বলের প্রভাবে অবস্থা পরিবর্তনে বাধ্য না হলে কোন বস্তু স্থির অথবা সরলরেখায় সমগতিতে চলমান অবস্থায় অবিচল থাকে।'

লক্ষ্য করুন, এই সূত্র থেকে আমরা তিনটি বিষয়ে ধারণা লাভ করি। এগুলি হল (i) স্থিতি জাড্য, অর্থাৎ স্থির বস্তু বাইরের প্রভাব না থাকলে স্থির অবস্থাতেই থাকে, (ii) গতিজাড্য, অর্থাৎ চলমান বস্তু বাইরের প্রভাবের অনুপস্থিতিতে সরলরেখায় সমবেগে চলতে থাকে এবং (iii) বল, যা বাইরে থেকে প্রযুক্ত এমন একটি প্রভাব যা বস্তুকে স্থির অথবা সরলরেখায় সমবেগে চলার অবস্থা থেকে বিচ্যুত করতে পারে। নিউটনের গতিসূত্রকে 'জাড্যের সূত্র' বলা হয় কিন্তু কোন্ ধরনের প্রভাবকে বল নমে অভিহিত করা যাবে তাও এই সূত্র থেকে প্রতীত হয়।

আপনি প্রশ্ন করতে পারেন, এই গতিসূত্রটি কি যে কোন পর্যবেক্ষকের কাছেই সত্য হবে? এবং যদি তা না হয়, তবে কী ধরনের পর্যবেক্ষকের কাছে জাড্যের সূত্রটি সত্য বলে প্রতিপন্ন হবে? ধরুন, রেলের প্লাটফর্মে A একটি দাঁড়িয়ে থাকা খাবারের ট্রলি, O প্লাটফর্মে স্থির থাকা একজন পর্যবেক্ষক এবং O′ অপর এক পর্যবেক্ষক যিনি সদ্য ছেড়ে যাওয়া ক্রমবর্ধমান বেগে চলমান ট্রেনের কামরায় আছেন (চিত্র 2.1)। O পর্যবেক্ষকের কাছে A ট্রলিটি স্থির। তাঁর কাছে A ট্রলির স্থির অবস্থা প্রথম গতিসূত্রকে সমর্থন করে কেননা ট্রলির উপর কোন অনুভূমিক বল কাজ করছে না। কিন্তু O′ পর্যবেক্ষক ট্রলিটিকে ট্রেনের গতির বিপরীত দিকে ক্রমশঃ দ্রুততর বেগে ধাবিত হতে দেখবেন যা নিউটনের গতিসূত্র থেকে মোটেই প্রত্যাশিত নয়। এক্ষেত্রে O পর্যবেক্ষকের পর্যবেক্ষণের নির্দেশতন্ত্র বা ফ্রেমটি জড়ত্বীয় (inertial)। তিনি যদি প্ল্যাটফর্মে সমবেগে হাঁটতেন তাহলেও তিনি Pকে সমবেগে চলতে দেখতেন। সুতরাং প্রথম গতিসূত্র লঙ্ঘিত হত না এবং তাঁর ফ্রেমটি জড়ত্বীয় থাকত। কিন্তু O′ পর্যবেক্ষকের ফ্রেমটি O-এর ফ্রেমের সাপেক্ষে ত্বরিত হওয়ায় O′ এর ফ্রেমটি অ-জড়ত্বীয় (non-inertial)। অজড়ত্বীয় ফ্রেমে জাড্যের সূত্র লঙ্ঘিত হয়। সাধারণভাবে আমরা পৃথিবীর সঙ্গে আবদ্ধ (যেমন রেলের প্ল্যাটফর্ম) অথবা পৃথিবীর সাপেক্ষে সমবেগে চলমান কোন নির্দেশতন্ত্রকে জড়ত্বীয় ফ্রেম মনে করি। অবশ্য সূক্ষ্মভাবে দেখলে পৃথিবীর আহ্নিক বা বার্ষিক গতির ফলে ঐ নির্দেশতন্ত্রকেও জড়ত্বীয় বলা চলে না। যে সব বিশেষ ক্ষেত্রে পৃথিবীর ঘূর্ণনের প্রভাব দেখা যায় সেগুলি বাদ দিয়ে অন্যান্য ক্ষেত্রে আমরা ঐ গতিকে উপেক্ষা করব।



চিত্র 2.1

প্রথম গতিসূত্রটি বলের ধারণা উপস্থাপিত করলেও নির্দিষ্ট বলের প্রভাবে বস্তুর গতির কী পরিবর্তন হয় তার পরিমাণগত ধারণা এই সূত্রটি থেকে পাওয়া যায় না। তার জন্য আমাদের নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রটির উপর নির্ভর করতে হবে।

2.2.2 দ্বিতীয় গতিসূত্র

দ্বিতীয় গতিসূত্র সম্বন্ধে আলোচনায় ভরবেগ রাশিটি খুবই গুরুত্বপূর্ণ। আপনি নিশ্চয়ই দেখেছেন যে অত্যন্ত দ্রুতবেগে আসা বৃষ্টির জলবিন্দুকে সহজেই থামানো যায় আবার ধীরগতিতে আসা ক্রিকেট বলকে থামানোও শক্ত নয়। কিন্তু দ্রুতবেগে আসা ক্রিকেট বলকে থামানো বেশ শক্ত। অর্থাৎ কোন বস্তুর ত্বরণ বা মন্দন সৃষ্টি করা কত সহজ বা কঠিন তা বস্তুটির ভর ও বেগের গুণফলের উপর নির্ভর করে, শুধু বেগের উপর নয়। এই গুণফলকেই আপনি ভরবেগ বলে থাকেন।

নিউটন দ্বিতীয় গতিসূত্রের যে বিবৃতি দিয়েছিলেন তা হল ‘কোন বস্তুর গতির (motion) পরিবর্তন প্রযুক্ত বলের সঙ্গে সমানুপাতী হয় এবং বল যে সরলরেখায় ক্রিয়া করে সেই দিকেই এই পরিবর্তন ঘটে।’ ‘গতির পরিবর্তন’ বলতে নিউটন বুঝিয়েছিলেন ‘সময়ের সঙ্গে ভরবেগের পরিবর্তনের হার’। অর্থাৎ $\vec{F}$ যদি প্রযুক্ত বল হয় এবং **p** হয় বস্তুর ভরবেগ, দ্বিতীয় গতিসূত্রটিকে সহজেই একটি ভেক্টর সমীকরণ হিসাবে লেখা যায় :

$$\vec{F} \alpha \frac{d}{dt}(\vec{p})$$

বা
$$\vec{F} = k\frac{d}{dt}(\vec{p}) \qquad 2.1$$

যেখানে k একটি সমানুপাত ধ্রুবক। এই ধ্রুবকটির মান স্বভাবতই বল, সময় এবং ভরবেগের কোন্ কোন্ একক আপনি ব্যবহার করবেন তার উপর নির্ভর করবে। এম. কে. এস (MKS) বা আন্তর্জাতিক (S.I.) পদ্ধতিতে আমরা সময়ের একক সেকেণ্ড, বলের একক নিউটন এবং ভরবেগের একক কিলোগ্রাম মিটার/সেকেণ্ড $\left(\mathrm{kg\,ms^{-1}}\right)$ ব্যবহার করি। প্রতি সেকেণ্ডে এক কিলোগ্রাম মিটার / সেকেন্ডে ভরবেগের পরিবর্তন ঘটাতে $\mathrm{kg\,ms^{-2}} = 1\mathrm{N}$ পরিমাণ বল লাগে। সুতরাং এই পদ্ধতিতে k ধ্রুবকের মান 1। পুরাতন সি. জি. এস (CGS) একক সেকেন্ডে, ডাইন এবং গ্র্যাম.সেমি/সেকেন্ড একক ব্যবহার করলেও আপনি k ধ্রুবকের মান '1' ই পাবেন। যে কোন ক্ষেত্রেই 2.1 সমীকরণটি লেখা যাবে : $\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{p})$ 2.2

আমরা আগেই জানি $\vec{p} = m\vec{v}$, যেখানে m ও $\vec{v}$ যথাক্রমে বস্তুর ভর ও বেগ।

সুতরাং, $\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{p}) = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{a}$ 2.3

যদি বস্তুর ভরকে ধ্রুবক ধরা যায়। এখানে $\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \dot{\vec{p}}$ বস্তুর ত্বরণ।

2.3 সমীকরণটিকে আপনি অন্যরূপেও লিখতে পারেন। আমরা জানি বস্তুর অবস্থান ভেক্টর যদি $\vec{r}$ হয় তবে $\vec{v} = \frac{d}{dt}(r)$ এবং $\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r})$ অর্থাৎ 2.3 সমীকরণটি দাঁড়ায় :

$$\vec{F} = m\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}) \tag{2.4}$$

$\vec{F}$ বলটি যদি জানা থাকে তবে আমরা এই-দ্বিতীয় ক্রমের অবকল সমীকরণটির সমাধান করতে পারি। এই সমাধানে স্বভাবতই দুটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক থাকবে এবং দুটি সীমান্ত শর্তের সাহায্যে সেগুলির মান নির্ণয় করা যাবে। আবার যদি সময়ের অপেক্ষক হিসেবে কোন বস্তুর অবস্থান ভেক্টর অথবা বেগ জানা থাকে তবে 2.4 বা 2.3 সূত্রের সাহায্যে সহজেই বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলের হিসাব করে ফেলতে পারবেন।

বলগোষ্ঠীর সাম্য: কোন বস্তুর উপর যদি একাধিক বল কাজ করে তখন তার ত্বরণ কীভাবে নির্ণয় করা যাবে? এক্ষেত্রে আপনি সবকটি বলের ভেক্টর যোগফল বার করে সেটিকেই 2.3 বা 2.4 সমীকরণে $\vec{F}$ হিসাবে ব্যবহার করবেন। ঐ যোগফল যদি শূন্য হয় তবে আমরা বলি যে বলগুলি সাম্যবস্থায় (equilibrium) আছে। সেক্ষেত্রে বস্তুর ত্বরণ শূণ্য হবে এবং বস্তুটি স্থির বা সমবেগে চলনশীল অবস্থায় থাকবে। আমরা আগে রেলের প্ল্যাটফর্মে দাঁড়ানো যে ট্রলিটির কথা উল্লেখ করেছি সেটির ভার এবং প্ল্যাটফর্মের প্রতিক্রিয়া বল সমমানের এবং পরস্পরের বিপরীতমুখী। এগুলির ভেক্টর যোগফল শূন্য হওয়ায় ট্রলিটি সাম্যে আছে। তখন যদি ট্রলিটিকে বলপ্রয়োগ করে টানা হয় তবে সেটি প্রথমে ত্বরিত হলেও ক্রমে ঘর্ষণবল ও প্রযুক্ত টান (বল) সমমান ও বিপরীতমুখী হওয়া সাম্য প্রতিষ্ঠিত হবে এবং ট্রলিটি সমবেগে চলতে থাকবে।

2.2.3 তৃতীয় গতিসূত্র

এ পর্যন্ত আমরা বলের প্রভাব নিয়ে আলোচনা করলেও কোন বস্তুর উপর কীভাবে বলপ্রয়োগ করা হয় তার অনুসন্ধান করিনি। আপনি বলপ্রয়োগের অজস্র উদাহরণ দিতে পারবেন। হাত দিয়ে ঠেলা, দড়ি দিয়ে টানা, হাতুড়ি দিয়ে আঘাত করা, ভূমির উপর রাখা যে কোন বস্তুর ভূমির উপর চাপ দেওয়া। প্রভৃতি সাধারণ উদাহরণ ছাড়াও পৃথিবীর উপর সূর্যের মহাকর্ষীয় আকর্ষন, দুই চৌম্বক মেরু বা দুই তড়িৎ আধানের মধ্যে আকর্ষণ বা বিকষর্ণের সঙ্গেও আপনি পরিচিত। লক্ষ্য করে দেখুন, প্রতি ক্ষেত্রেই কোন একটি বস্তু

অপর এক বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করে। আবার প্রথম বস্তুটি কোন দ্বিতীয় বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করে, দ্বিতীয় বস্তুটি তেমনই প্রথম বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করে। আপনি যখন দড়িকে টানেন দড়িও তখন আপনাকে টানে, হাতুড়ি যখন পেরেকের উপর আঘাত করে পেরেকও তেমনই হাতুড়ির উপর আঘাত করে।

নিউটনের তৃতীয় গতিসুত্রটি হল 'প্রতিটি ক্রিয়ার (action) সমমানের ও বিপরীতমুখী প্রতিক্রিয়া (reaction) বিদ্যমান। এখানে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া বলতে দুই বস্তুর মধ্যে ক্রিয়াশীল, পরস্পরের উপর প্রযুক্ত বলগুলিকেই বোঝানো হয়েছে। ধরুন কোন বস্তু A অপর একটি বস্তু B এর উপর $\vec{f}_{BA}$ বল প্রয়োগ করে। সেক্ষেত্রে B বস্তুটি A বস্তুর উপর $\vec{f}_{BA}$ বল প্রয়োগ করবে যেখানে

$$\vec{f}_{BA} = -\vec{f}_{AB} \qquad 2.5$$

2.5 সমীকরণটিকেই তৃতীয় গতিসুত্রের গাণিতিক রূপ বলা যায়। লক্ষ্য করুন ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া বলগুলি, অর্থাৎ $\vec{f}_{BA}$ এবং $\vec{f}_{BA}$ সর্বদাই দুই ভিন্ন বস্তুর উপর ক্রিয়া করে।

এবার নিউটনের গতিসূত্র সংক্রান্ত কয়েকটি প্রশ্নের উত্তর দিতে আপনার ভালই লাগবে।

অনুশীলনী 1

(i) একটি 160 gm ভরের ক্রিকেট বল মাঠের উপর দিয়ে সীমানার দিকে ছুটে চলেছে। পরপর তিনটি এক সেকেন্ড সময়ের মধ্যে বলটি যথাক্রমে 3.2m, 3.0m ও 2.8m, অতিক্রম করল। বলটির উপর কী পরিমাণ ঘর্ষণ বল কাজ করছিল?

(ii) w ওজনের একটি নারকেল গাছ থেকে মাটিতে পড়ার সময় পৃথিবীকে কী পরিমান বলে আকর্ষন করে? এর জন্য পৃথিবীর কোন ত্বরণ হয় কি?

2.3 নিউটনের গতিসূত্রের প্রয়োগ

যদি কোন বস্তুর ভর, সেটির উপর ক্রিয়াশীল সবগুলি বল এবং কোন প্রারম্ভিক মুহূর্তে সেটির অবস্থান ও বেগ আপনার জানা থাকে তবে নিউটনের গতিসূত্র প্রয়োগ করে আপনি পরবর্তী যে কোনও সময়ে সেটির বেগ ও অবস্থান নির্ণয় করতে পারেন। এখানে আমরা কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে পদ্ধতিটি ব্যাখ্যা করব।

2.3.1 প্রাসের গতি (Motion of projectile)

প্রাস বলতে সজোরে উৎক্ষিপ্ত কোন বস্তুকে বোঝায়। ধরা যাক কোন এক নির্দেশতন্ত্রে m ভরের একটি বস্তুকে প্রাথমিক অবস্থান $\mathbf{r}_0$ থেকে υ_0 বেগে উৎক্ষিপ্ত করা হল। বস্তুটির উপর অভিকর্ষজ ত্বরণ g সর্বদা নীচের দিকে কাজ করবে। t সময় পরে বস্তুটির বেগ ও অবস্থান কী হবে সেটি আমাদের নির্ণয় করতে হবে।

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র (2.4 সমীকরণ) অনুযায়ী

$$m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = m\mathbf{g}$$

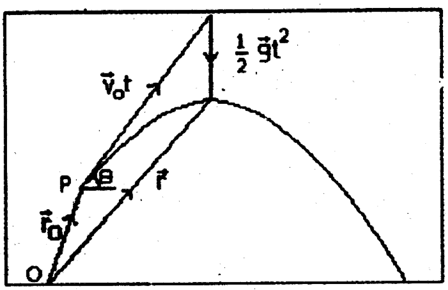
সমাকলন করে $\upsilon = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \int \mathbf{g}dt = \mathbf{g}t + c$

এখানে **c** সমাকলন ধ্রুবক। যখন t = 0, তখন যদি $\upsilon = \upsilon_0$ হয় তবে $\mathbf{c} = \upsilon_0$ ।

সুতরাং $\upsilon = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{g}t + \upsilon_0$ 2.6

পুনরায় সমাকলন করে বস্তুটির t সময়ে অবস্থান ভেক্টর পাওয়া যেতে পারে :

$$\mathbf{r} = \int(\mathbf{g}t + \upsilon_0)dt = \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + \upsilon_0 t + \mathbf{c}'$$



চিত্র 2.2

সমাকলন ধ্রুবক c′ এবং মান জানতে t = 0 সময়ে বস্তুর অবস্থান ভেক্টরটি জানতে হবে। t = 0 সময়ে যদি $\mathbf{r} = \mathbf{r_0}$ হয় তবে $\mathbf{c}' = \mathbf{r_0}$, অর্থাৎ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \nu_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 \qquad 2.7$$

2.2 চিত্রে **r** অবস্থান ভেক্টরের বিভিন্ন অংশগুলি দেখানো হয়েছে। নির্দেশ তন্ত্রের মূলবিন্দুটি যদি প্রাসের উৎক্ষেপন বিন্দুতে ধরা যায় তবে $r_0 = 0$ ধরা যাবে এবং 2.7 সমীকরণটি লেখা যাবে

$$\mathbf{r} = \nu_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 \qquad 2.8$$

আপনি ইচ্ছা করলে এই সমীকরণটির অনুভূমিক (x) ও উল্লম্ব (y) উপাংশ গুলি লিখতে পারেন। **g** ভেক্টরটি সরাসরি নিম্নমুখী হওয়ায় এটির অনুভূমিক উপাংশ শূণ্য এবং উল্লম্ব উপাংশ -g। অনুভূমিক দিক থেকে উৎক্ষেপণের দিকের উন্নতিকোণ θ হলে 2.8 সমীকরণের

অনুভূমিক উপাংশ $x = \upsilon_0 \cos\theta . t$

এবং উল্লম্ব উপাংশ $y = \upsilon_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2$

প্রাসের গতির আলোচনায় আমরা ধরে নিয়েছি যে সেটির উপর ক্রিয়াশীল একমাত্র বল তার ভার **mg**। কিন্তু বায়ুর মধ্যে গতিশীল কোন বস্তুর উপর বায়ুর বাধাও কাজ করে যেটি আমরা উপেক্ষা করেছি। এবার আমরা রোধের বিরুদ্ধে বস্তুর গতির একটি উদাহরণ আলোচনা করব।

2.3.2 রোধের বিরুদ্ধে বস্তুর গতি

ধরা যাক m ভরের একটি বস্তু x অক্ষ বরাবর সরলরেখায় গতিশীল এবং তার উপর ঐ দিকে F বল কাজ করছে। এছাড়াও বস্তুটির বেগ v হলে সেটির উপর গতির দিকের বিপরীতে $Av+Bv^2$ বল ক্রিয়া করে। শেষোক্ত বলটিই মাধ্যমের রোধ। বস্তুর গতি সমীকরণ এইভাবে লেখা যায় :

$$m\frac{dv}{dt} = F - Av - Bv^2 \qquad 2.9$$

এখানে A ও B দুটি ধনাত্মক ধ্রুবক।

2.9 সমীকরণটির সরাসরি সমাধান দুরূহ। কিন্তু আপনি সহজেই বুঝতে পারছেন যে বেগ v যখন শূন্য বা অত্যন্ত অল্প মানের, তখন বস্তুটি ত্বরণ $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$। ক্রমশঃ বেগ বৃদ্ধি পেলে ত্বরণের মান কমতে থাকবে এবং অবশেষে যখন $F = Av + Bv^2$ হবে, তখন $\frac{dv}{dt}$ বা ত্বরণ শূন্য হবে এবং বেগ এমন এক স্থির মান লাভ করবে যাতে $Bv^2 + Av - F = 0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

B ধ্রুবকটির মান যদি এমন ছোট হয় যে Bv^2 রাশিটি Av এর তুলনায় নগন্য ধরা যায় তবে 2.9 সমীকরণটি দাঁড়ায় :

$$m\frac{dv}{dt} = F - Av \qquad 2.10$$

এই সমীকরণটির সমাধান শক্ত নয় :

$$m\int \frac{dv}{F - Av} = \int dt$$

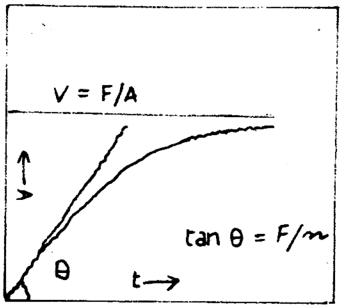
বা সমাকলন করে, $\frac{m}{A}\log_e(F - Av) = -t + c$ (c = সমাকলন ধ্রুবক)

যদি t = 0 সময়ে বস্তুর বেগ v = 0 হয় তবে

$$\frac{m}{A}\log_e F = c$$

অর্থাৎ $\frac{m}{A}\log_e \frac{F - Av}{F} = -t$

সমীকরণটি সাজিয়ে লিখলে, $\upsilon = \upsilon_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)$, (যেখানে $\upsilon_0 = F/A$ এবং $\tau = \frac{m}{A}$) 2.11



চিত্র 2.3

2.11 সূত্র থেকে এটি স্পষ্ট যে বস্তুটির বেগ শূন্য থেকে বেড়ে শেষে পর্যন্ত $\frac{F}{A}$ মানে পৌছায়। τ সময়টি যত লম্বা হয় বেগ ঐ প্রান্তিক মানের কাছাকাছি পৌঁছাতে তত বেশী সময় নেয়। এই সময়টিকে অনেক সময় শ্লথন কাল (relaxation time) বলা হয়। বেগের পরিবর্তনটি 2.3 চিত্রে দেখানো হয়েছে। এখানে $\upsilon - t$ লেখচিত্রের নতি বস্তুটির ত্বরণের সমান। এবার একটি অনুশীলনীর সাহায্যে নিউটনের গতিসূত্র প্রয়োগের অভ্যাস করে নিন। এরপর আমরা একই বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল একাধিক বস্তুর সাম্য বিবেচনা করব।

অনুশীলনী -2

(i) m ভরের একটি স্থির বস্তুর উপর এক নির্দিষ্ট দিকে $Fe^{-\alpha t}$ বল প্রয়োগ করা হল (F ও α ধ্রুবক, t = সময়)। প্রমাণ করুন যে বস্তুটি শেষ পর্যন্ত $\frac{F}{\alpha m}$ বেগে চলতে থাকবে।

(ii) 10 kg ভরের একটি বস্তুর সঙ্গে দড়ি বেঁধে সেটিকে মাটির উপর দিয়ে সমবেগে টেনে নিয়ে যাওয়া হচ্ছে। দড়িটি অনুভূমিক দিকের সঙ্গে 30^o কোণে আনত এবং বস্তু ও মাটির মধ্যে বিসর্প ঘর্ষন গুণাঙ্ক 0.3। দড়ির টান কত?

2.4 বলগোষ্ঠীর সাম্য

কোন বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল একাধিক বলের ভেক্টর যোগফল যখন শূন্য হয় তখন বলগুলি সাম্যে থাকে। এই অবস্থায় বস্তুটির উপর বলগুলির কোন মিলিত প্রভাব থাকে না এবং বস্তুটির স্থির বা সমবেগে গতিশীল অবস্থায় অবিচল থাকে। কিছু সংখ্যক বল সাম্যে থাকবে কী না তা কীভাবে স্থির করবেন?

ধরা যাক কোন একটি বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বলগুলি হল $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$..... এই বলগুলি যদি সাম্যে থাকে তবে $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots + \mathbf{F}_n = 0$ বলের x, y ও z উপাংশগুলিকে যদি x, y ও z পদচিহ্ন দিয়ে নির্দেশ করা হয় তবে $\mathbf{F}_1 = \mathbf{i}F_{1x} + \mathbf{j}F_{1y} + \mathbf{k}F_{1z}$, যেখানে **i, j** ও **k** যথাক্রমে x, y ও z অক্ষ অভিমুখে একক ভেক্টর। সাম্যের শর্তটি এবার আপনি লিখতে পারেন :

$$\left(iF_{1x} + jF_{1y} + kF_{1z}\right) + \left(iF_{2x} + jF_{2y} + kF_{2z}\right) + \cdots + \left(iF_{nx} + jF_{ny} + kF_{nz}\right) = 0$$

বা $$i\sum_{\ell} F_{lx} + j\sum_{\ell} F_{ly} + k\sum_{\ell} F_{\ell z} = 0 \qquad ....2.12$$

যেহেতু **i, j** ও **k** একক ভেক্টরগুলি পরস্পর সমকোণে আছে, 2.12 সমীকরণটি সিদ্ধ হতে হলে এগুলির প্রতিটির সহগ শূন্য হতে হবে। অর্থাৎ সাম্যের শর্ত হল

$$\sum_{\ell} F_{\ell x} = 0, \sum_{\ell} F_{\ell y} = 0, \ \sum_{\ell} F_{\ell z} = 0$$

একটি উদাহরণ আপনাকে বিষয়টি বুঝতে সাহায্য করবে। ধরা যাক একটি বিন্দুভরের উপর তিনটি বল ক্রিয়া করছে,যেগুলি হল :

$$\mathbf{F}_1 = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}; \ \mathbf{F}_2 = -8\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}; \ \mathbf{F}_3 = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

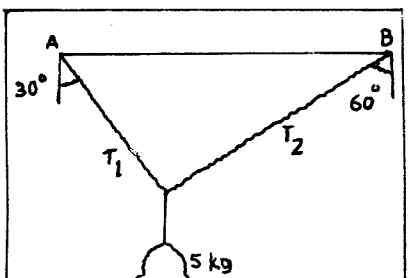
এই বলগুলি কি সাম্যে থাকবে? তিনটি বলের ভেক্টর যোগফল নেওয়া যাক।

$$\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3} = (5-8+3)\mathbf{i} + (-2-3+5)\mathbf{j} + (3+2-5)\mathbf{k}$$

$$= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

সুতরাং বল তিনটি সাম্যে থাকবে।

নীচের অনুশীলনীটি আপনি সহজেই করতে পারবেন।



চিত্র 2.4

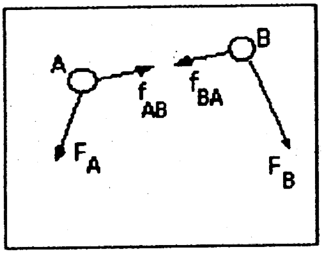
অনুশীলনী - 3

5 kg ভরের একটি ঝাড়লণ্ঠন ছাদের সঙ্গে আটকানো দুটি ভারহীন দড়ি দিয়ে ঝোলানো আছে (চিত্র 2.4)। দড়ি দুটি উল্লম্ব দিকের সঙ্গে 60° ও 30° কোণ রচনা করে। দড়ি দুটির টান কত?

দুটি দড়ির যদি অনুভূমিক দিকের সঙ্গে 5° কোণে থাকত তাহলে সেগুলির টান কত হত?

2.5 রৈখিক ভরবেগ

নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রের আলোচনায় আমরা রৈখিক ভরবেগের সঙ্গে পরিচিত হয়েছি। এবার আমরা দুটি মিথস্ক্রিয় (interacting) বস্তুর মোট ভরবেগের পরিবর্তন সম্বন্ধে আলোচনা করব।



চিত্র 2.5

ধরুন A ও B দুটি বস্তু যেগুলির উপর বাইরে থেকে প্রযুক্ত বল, যথাক্রমে $\mathbf{F}_A$ ও $\mathbf{F}_B$ ক্রিয়া করছে। এছাড়া A বস্তুটি B বিন্দুর উপর $\mathbf{f}_{BA}$ বল এবং B বস্তু A এর উপর $\mathbf{f}_{AB}$ বল প্রয়োগ করছে। A ও B এর রৈখিক ভরবেগকে আমরা যথাক্রমে $\mathbf{p}_A$ ও $\mathbf{p}_B$ দিয়ে নির্দেশ করব। বস্তুটির মোট ভরবেগ $\mathbf{p} = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B$

দ্বিতীয় গতিসূত্র অনুসারে $\dfrac{d\mathbf{p}_A}{dt} = \mathbf{F}_A + \mathbf{f}_{AB}$ এবং $\dfrac{d\mathbf{p}_B}{dt} = \mathbf{F}_B + \mathbf{f}_{BA}$

যোগ করে $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B) = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{f}_{AB} + \mathbf{f}_{BA}$ 2.13

কিন্তু তৃতীয় গতিসূত্র অনুসারে (সূত্র 2.5) $\mathbf{f}_{AB} + \mathbf{f}_{BA} = 0$

$\therefore$ 2.13 সূত্রটি দাঁড়ায় $\dfrac{\mathbf{dp}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B$ 2.14

অর্থাৎ বস্তুদ্বয়ের মোট রৈখিক ভরবেগের পরিবর্তন হার বাইরে থেকে প্রযুক্ত বলগুলির ভেক্টর যোগফলের সমান, তাদের পারস্পরিক বলগুলি মোট রৈখিক ভরবেগের উপর কোন প্রভাব বিস্তার করে না। এ বিষয়ে এই পর্যায়ের সপ্তম এককে আপনি আরও বিশদ্ভাবে পড়ার সুযোগ পাবেন।

2.5.1 রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ (Conservation of linear momentum)

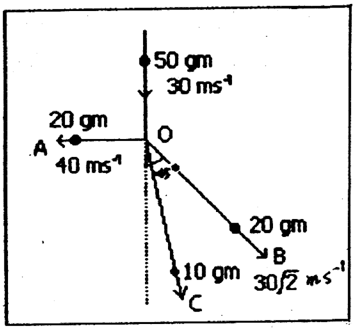
2.14 সমীকরণ থেকে আপনি একটি গুরুত্বপূর্ণ সিদ্ধান্তে পৌঁছাতে পারেন। ধরুন A ও B বস্তুর উপর বাইরে থেকে প্রযুক্ত মোট বল শূন্য অর্থাৎ $\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = 0$ সেক্ষেত্রে $\dfrac{\mathbf{dr}}{dt} = 0$

অর্থাৎ $\mathbf{p} = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B$ একটি পরিবর্তনহীন ধ্রুবক ভেক্টর। এটিকে আমরা রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র বলি। সপ্তম এককে আপনি যে কোন সংখ্যক মিথষ্ক্রিয় কণার জন্য এই সূত্রটির প্রমাণ দেখতে পাবেন। এটি আপনি ভাষায় লিখতে পারেন :

'কোন বস্তুর সমষ্টির উপর বাইরে থেকে প্রযুক্ত মোট বল শূন্য হলে সেটির মোট রৈখিক ভরবেগ অপরিবর্তিত থাকবে।'

রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রটি ব্যবহার করে আপনি অনেক বাস্তব সমস্যার সমাধান করতে পারেন। এখানে তার একটি উদাহরণ আলোচনা করা যাক।

উদাহরণ : 50gm ভরের একটি পটকা উল্লম্বভাবে পড়ার সময় O মিন্দুতে বিষ্ফোরিত হয়ে 20gm, 20gm এ 10gm ভরের তিনটি টুকরোয় খন্ডিত হল (চিত্র 2.6)। বিষ্ফোরণের আগর মুহূর্তে পটকার বেগ ছিল $30 ms^{-1}$। বিষ্ফোরণের ঠিক পরে প্রথম টুকরাটি অনুভমূমিকভাবে OA অভিমুখে $40 ms^{-1}$ বেগে এবং দ্বিতীয় টুকরাটি OB অভিমুখে $30\sqrt{2} ms^{-1}$ বেগে ধাবিত হল। তৃতীয় টুকরাটি কোন দিকে কত বেগে চলতে থাকবে?



চিত্র 2.6

ধরুন পটকার রৈখিক ভরবেগ **p** এবং তিনটি টুকরার রৈখিক ভরবেগ যথাক্রমে $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ এবং $\mathbf{p}_3$। রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র থেকে লেখা যায়

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$$

বা $\mathbf{p}_3 = \mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$। এখানে **p**, $\mathbf{p}_1$ ও $\mathbf{p}_2$ তিনটিই একই সমতলে আছে, সুতরাং $\mathbf{p}_3$ ও ভেক্টর যোগবিয়োগের নিয়ম অনুযায়ী ঐ সমতলেই থাকবে। এখন যদি চিত্র অনুযায়ী x ও z অক্ষ বরাবর উপাংশ লেখা যায় তবে MKS এককে

$$p_{3x} = p_x - P_{1x} - p_{2x} = 0 - \left(\cdot 02 \times 30\sqrt{2} \times \cos 45^\circ\right) - (-\cdot 02 \times 40)$$

$$= -0\cdot 6 + 0\cdot 8 = 0\cdot 2 \text{kg ms}^{-1}$$

এবং $$p_{3z} = p_z - p_{1z} - p_{2z} = (\cdot 05 \times 30) - \left(\cdot 02 \times 30\sqrt{2} \times \cos 45^\circ\right) - 0$$

$$= 1\cdot 5 - 0\cdot 6 = 0\cdot 9 \text{kg ms}^{-1}$$

সুতরাং তৃতীয় ভরবেগের মান $\left(p_{3x}^2 + p_{3z}^2\right)^{1/2} = \left(0\cdot 2^2 + 0\cdot 9^2\right)^{1/2} = \cdot 92 \text{kgm} 5^{-1}$

$\therefore$ বেগ $0\cdot 92 / \cdot 10 = 92 ms^{-1}$

এবং দিক OC অভিমুখে, উল্লম্ব দিকের সঙ্গে $\tan^{-1} P_{3x} / P_{3z}$ বা $\tan\frac{-12}{3}$ কোণে ।

এবার দেখা যাক কোন বস্তুর উপর বাইরে থেকে কিছুক্ষণের জন্য বল প্রয়োগ করলে তার গতিবেগের কী পরিবর্তন ঘটে।

2.5.2 বলের আবেগ (Impulse of a force)

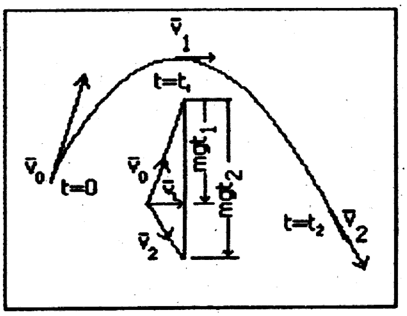
2.2 সমীকরণে যে বল $\mathbf{F}$ এর উল্লেখ রয়েছে সেটির মান ও দিক সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হতে পারে। এজন্য এ টিকে আমরা t এর অপেক্ষক হিসাবে $\mathbf{F}(t)$ লিখব। অবশ্য সরলীকরণের জন্য বলের দিক একই থাকে বলে ধরে নেওয়া যেতে পারে।

এখন 2.2 সমীকরণ থেকে লেখা যায়

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \qquad 2.15$$

এখানে $\mathbf{p}_1$ ও $\mathbf{p}_2$ যথাক্রমে t_1 ও t_2 সময়ে বস্তুর রৈখিক ভরবেগ। $\mathbf{F}(t)$ সময়ের সঙ্গে কীভাবে পরিবর্তিত হয় তা জানা থাকলে $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)dt$ এর মান নির্ণয় করা সম্ভব হতে পারে। যদি ধরা যায় $\mathbf{F}(t)$ এর গড় মান $\overline{\mathbf{F}}$ তবে সমাকলনটির মান হবে $\overline{\mathbf{F}}(t_2 - t_1)$ বা $\overline{\mathbf{F}}\Delta t$।

$\int \mathbf{F}(t)dt$ সমাকলনটিকে বলের আবেগ (impulse) বা ঘাত বলা হয়। এটি একটি ভেক্টর রাশি এবং বলটি যে বস্তুর উপর ক্রিয়া করে, তার রৈখিক ভরবেগ পরিবর্তনের সমান।



চিত্র 2.7

আমরা ইতিপূর্বে 2.3.1 অংশে প্রাসের গতি সম্বন্ধে আলোচনা করেছি। $t = 0$ সময়ে উৎক্ষিপ্ত বস্তুটির ভরবেগ ছিল $\mathbf{p}_0 = m\boldsymbol{v}_0$। ধরুন এর পরের $t = t_1$ সময়ে ভরবেগ $\mathbf{p}_1 = m\boldsymbol{v}_1$। t_1 সময়ে ভরবেগের পরিবর্তন $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$. এবং এটি বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল বল mg এর আবেগ অর্থাৎ mgt_1, এর সমান। 2.7 চিত্র থেকে আপনি ভরবেগের পরিবর্তন ও আবেগের সমতাটি বুঝতে পারবেন।

ঘাতবল (Impulsive force) : আপনি নিশ্চয়ই মাটির উপর রবারের বল লাফাতে দেখেছেন। মাটি স্পর্শ করার আগের মুহূর্তে বলটির বেগ নিম্নমুখী কিন্তু পরমুহূর্তেই সেটি উপরের দিকে উঠতে থাকে। বলটির রৈখিক ভরবেগের যে পরিবর্তন ঘটে তা মাটি বলের উপর যে বল প্রয়োগ করে তার আবেগের সমান। যেহেতু রবারের বলটি অত্যন্ত অল্প সময় মাটির সংস্পর্শে থাকে অথচ রৈখিক ভরবেগের অনেকটাই পরিবর্তন ঘটে,অতএব আমরা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে মাটির দ্বারা প্রযুক্ত বলটির গড় মান খুবই বেশী। এ ধরণের বলকে আমরা ঘাত বল বলি। একটি সাংখ্যিক উদাহরণ থেকে বিষয়টি আরও স্পষ্ট হবে।

ধরুন রবারের বলটি 0.9 মিটার উচ্চতা থেকে খাড়াভাবে মাটিতে পড়ল এবং প্রতিক্ষিপ্ত হয়ে পুনরায় 0.9 মিটার উচ্চতায় উঠল। মাটি স্পর্শ করার ঠিক আগে ও ঠিক পরে বলটির বেগ $=\sqrt{2gh}=\sqrt{(2\times 9\cdot 8\times 0\cdot 9)}=4\cdot 2ms^{-1}$। বলটির ভর যদি 100gm হয় তবে রৈখিক ভরবেগের পরিবর্তন $=2\times 0\cdot 1kg\times 4\cdot 2ms^{-1}=0\cdot 84kg\ ms^{-1}$। বলটি যদি 0.02 সেকেন্ডে মাটির সংস্পর্শে থাকে তবে মাটির গড় প্রতিক্রিয়া বল

$$\overline{F}=0\cdot 84/\cdot 02=42N$$

এটি রবারের বলের নিজস্ব ওজনের প্রায় 43 গুণ। সুতরাং এটিকে বেশ উচ্চমানের বল বলা যায়। মাটির প্রতিক্রিয়া বলটি ঘাতবলের এক প্রকৃষ্ট উদাহরণ।

এবার আপনি নিজেই অনুশীলনীর উত্তর দিন।

অনুশীলনী -4

60 gm ভরের একটি টেনিস বল ঘন্টায় 60 km বেগে র‍্যাকেটে লাগার পর ঘন্টায় 90 km বেগে সরাসরি বিপরীত দিকে ফিরে গেল। র‍্যাকেট ও বলের স্পর্শকাল 0.15 হলে বলের উপর ক্রিয়াশীল গড় ঘাতবল নির্ণয় করুন।

2.6 পরিবর্তনশীল ভরের গতি

আমরা এ পর্যন্ত বস্তুর ভর m অপরিবর্তিত থাকে বলে ধরে নিয়েছি। কিন্তু বস্তুর ভর m যদি সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হতে থাকে তবে 2.3 সমীকরণটি আমাদের অন্যভাবে লিখতে হবে :

$$F=\frac{d}{dt}(p)=\frac{d}{dt}(m\upsilon)=m\frac{d\upsilon}{dt}+\upsilon\frac{dm}{dt} \qquad \text{..... 2.16}$$

এর থেকে আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে বস্তুটির বেগ যদি পরিবর্তিত নাও হয়। তবু তার উপর একটি বল প্রয়োগ করতে হবে কেননা এক্ষেত্রে $\frac{d\upsilon}{dt}=0$ এবং $F=\upsilon\frac{dm}{dt}$ 2.17

উদাহরণ :

একটি উদাহরণ দিলে বিষয়টি আপনার বুঝতে সুবিধা হবে। ধরুন ঘর্ষণহীন রেল লাইনের উপর দিয়ে M ভরের একটি ট্রলি v বেগে গড়িয়ে চলেছে। এমন সময় প্রবল বৃষ্টি সুরু হওয়ায় ট্রলির উপর রাখা পাত্রে প্রতি সকেন্ডে m_0 ভরের জল জমা হতে লাগল। এতে কি ট্রলির বেগের পরিবর্তন ঘটবে?

এক্ষেত্রে আমরা ধরে নেব যে বৃষ্টির জলের ভরবেগ সম্পূর্ণ উল্লম্ব এবং ট্রলির উপর কোন বল ক্রিয়া করছে না। 2.16 সমীকরণ অনুযায়ী

$$O = M\frac{dv}{dt} + v.m_0$$

অথবা $$\frac{dv}{dt} = -\frac{m_0}{M}\cdot v$$

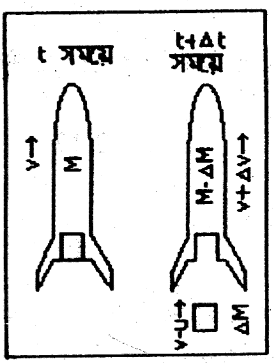
অর্থাৎ ট্রলিটির $\frac{m_0}{M}\cdot v$ পরিমাণ মন্দন ঘটবে। এখন যদি বল প্রয়োগ করে ট্রলির বেগ অপরিবর্তিত রাখতে হয় তবে 2.16 সমীকরণে $\frac{dv}{dt} = 0$ লিখে, পাওয়া যাবে $F = v\cdot m_0$

অর্থাৎ ট্রলির উপর তার অনুভূমিক বেগের দিক বরাবর $m_0 v$ বল প্রয়োগ করতে হবে।

এবার আমরা পরিবর্তনশীল ভরের বস্তুর গতির এমন একটি উদাহরণ আলোচনা করব যা একই সঙ্গে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ ও কৌতুহলোদ্দীপক।

2.6.1 রকেটের গতি

রকেট কীভাবে মহাকাশে গতিলাভ করে তা হয়ত আপনার জানা আছে। রকেটের মধ্যে তার নিজস্ব জ্বালানী (fuel) ও জারক (oxidant) জমা থাকে। জ্বালানীটিকে জারকের সঙ্গে মিশ্রিত করে নির্দিষ্ট হারে জ্বালানো হয় এবং দহনের ফলে উৎপন্ন তপ্ত গ্যাস প্রচন্ড বেগে রকেটের তলার নির্গম নল দিয়ে নির্গত হয়। এর ফলে রকেটের ভর ক্রমশ হ্রাস পায়, আবার অন্যদিকে তপ্ত গ্যাসের চাপ প্রতিক্রিয়া বল হিসাবে কাজ করে রকেটের ঊর্ধ্বমুখী ত্বরণ ঘটায়। এখানে আমরা রকেটের এই গতির গাণিতিক বিশ্লেষণ করব।



চিত্র 2.8

ধরে নিন t সময়ে একটি রকেট v বেগে সোজাসুজি ঊর্ধ্বমুখে উঠছে। জ্বালানী সমত রকেটটির মোট ভর এই সময়ে M। পরবর্তী Δt সময়ের মধ্যে Δm ভর। রকেট থেকে নিম্নাভিমুখে রকেটের সাপেক্ষে u নিম্নমুখী বেগে নির্গত হল। $t+\Delta t$ সময়ে রকেটের ভর কমে $M-\Delta m$ এবং সেটির বেগ বেড়ে $v+\Delta v$ হল। 2.8 চিত্রে t ও $t+\Delta t$ সময়ের অবস্থা দেখানো হয়েছে। লক্ষ্য করুন, $t+\Delta t$ সময়ে Δm ভরের প্রকৃত বেগ ঊর্ধ্বমুখে $v-u$।

t সময়ে রকেটের ভরবেগ = Mv

$t+\Delta t$ সময়ে রকেট ও নির্গত Δm ভরের ভরবেগ $=(M-\Delta m)(v+\Delta v)+\Delta m(v-u)t$

Δt সময়ে ভরবেগের বৃদ্ধি রকেটের উপর ক্রিয়াশীল অভিকর্ষ বলের আবেগের সমান। এই অভিকর্ষ বল — Mg, যেখানে নেগেটিভ চিহ্নটি বলের নিম্নমুখী দিক বোঝাচ্ছে। এখন আমরা 2.15 সূত্র অনুসরণ করে লিখতে পারি :

$$(M-\Delta m)(v+\Delta v)+\Delta m(v-u)-Mv=-Mg\Delta t$$

বা, সরল করে লিখলে, $M\Delta v-u\Delta m=-Mg\Delta t$ ($\Delta m.\Delta v$ রাশিটি উপেক্ষা করে) যখন Δt, Δm এবং Δv অণুপরিমান (infiniteimal), তখন এগুলিকে যথাক্রমে dt, dm এবং dv লেখা যেতে পারে। সেক্ষেত্রে উপরের সমীকরণটি লেখা যাবে :

$$g\,dt=-u\frac{dM}{M}-dv$$ (কেননা রকেটের ভর dm পরিমাণ হ্রাস পায়, এবং dM = - dm)

বা সমাকলন করে $$gt=-u\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M}-\int_{v_0}^{v}dv$$

অর্থাৎ $$v-v_0=-u\ln\frac{M}{M_0}-gt \qquad \text{..... 2.18}$$

এখানে v_0 এবং M_0 রকেটের প্রারম্ভিক, অর্থাৎ t = 0 সময়ে বেগ ও ভর নির্দেশ করছে।

2.18 সমীকরণের প্রয়োগের একটি উদাহরণ দেওয়া যাক। একটি রকেট স্থির অবস্থা থেকে যাত্রা শুরু করল এবং ও 10 সেকেন্ড সময়ে সেটির ভর 500 kg থেকে কমে 200 kg তে দাঁড়াল। নির্গত গ্যাসের রকেটের সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ যদি $1k\ ms^{-1}$ হয় তবে ঐ 10 সেকেন্ড সময়ে রকেটটি কত বেগ লাভ করবে।

2.18 সমীকরণে $v_0=0$ লিখলে, $g=9\cdot 8ms^{-2}$ ধরে,

$$v=-1000\ln\frac{200}{500}-9\cdot 8\times 10$$

$=916-98$ বা $818ms^{-1}$

এবার আপনি নিজেই রকেটের গতি সম্বন্ধীয় একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

অনুশীলনী 5

একটি দ্বিস্তর (two stage) রকেটের প্রথম স্তরের রকেটের ভর 50 kg এবং সেটিতে 450 kg জ্বালানী ও জারক ভরা আছে। দ্বিতীয় স্তরের রকেটটিতে 30 kg জ্বালানী ও জারক আছে এবং সেটির ভর 10 kg। দুই রকেটেই নির্গত গ্যাসের বেগ রকেটের সাপেক্ষে $1\cdot 5k\ ms^{-1}$ । প্রথম স্তরের রকেটটির জ্বালানী

শেষ হলে সেটি দ্বিতীয় স্তর থেকে বিচ্ছিন্ন হয় এবং দ্বিতীয় স্তরের রকেটটি চালু হয়ে যাত্রা শুরু করে। প্রথম স্তরের রকেটের অন্তিম বেগ দ্বিতীয় স্তরের প্রারম্ভিক বেগ ধরে নিয়ে দ্বিতীয় স্তরের অন্তিম বেগ নির্ণয় করুন। অভিকর্ষের প্রভাব উপেক্ষণীয়।

2.7 সারাংশ

এই এককে আমরা বল ও ভরবেগ সম্বন্ধীয় নিউটনের গতিসূত্রগুলি সম্বন্ধে আলোচনা করেছি। বলবিদ্যার ভিত্তিস্বরূপ এই গতিসূত্রগুলি হল :

প্রথম গতিসূত্র : বাইরে থেকে প্রযুক্ত কোন বলের প্রভাবে অবস্থার পরিবর্তনে বাধ্য না হলে কোন বস্তু স্থির অথবা সমগতিতে চলমান অবস্থায় অবিচল থাকে।

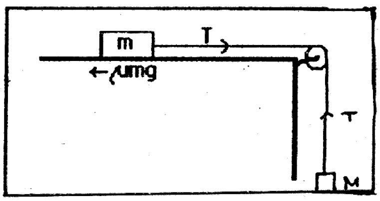
দ্বিতীয় গতিসূত্র : সময়ের সঙ্গে কোন বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার সেটির উপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতী হয় এবং বল যেদিকে ক্রিয়া করে, ভরবেগের পরিবর্তনও সেই দিকে হয়।

তৃতীয় গতিসূত্র : যে কোন বস্তু অন্য একটি বস্তুর ওপর যে বল প্রয়োগ করে, তার সমমাসের ও বিপরীতমুখী প্রতিক্রিয়া বল দ্বিতীয় বস্তুটি প্রথম বস্তুর উপর প্রয়োগ করে। সংক্ষেপে এই সূত্রটিকে বিবৃত করা যায়— 'প্রতিটি ক্রিয়ার সমমানের ও বিপরীতমুখী প্রতিক্রিয়া বিদ্যমান।'

প্রথম গতিসূত্রটি বাইরের প্রভাবের অনুপস্থিতিতে বস্তুর গতি বর্ণনা করে এবং বল কাকে বলে তার ধারণা দেয়। দ্বিতীয় গতিসূত্র থেকে আমরা বলের পরিমাণ ও দিক নির্ধারণের উপায় জানতে পারি এবং ভরবেগের সংরক্ষণের ধারণা পাই। তৃতীয় গতিসূত্রটি দুই বস্তুর মধ্যে ক্রিয়াশীল পারস্পরিক বলের সম্পর্ক ব্যক্ত করে।

এই এককে আমরা বলের সময়সাপেক্ষ সমাকল (time - integral) বা বলের আবেগ এবং পরিবর্তনশীল ভরের গতি সম্বন্ধেও আলোচনা করেছি। পরিবর্তশীল ভরের বস্তুর উদাহরণ হিসাবে আপনি রকেটের গতি সম্বন্ধে কিছুটা ধারণা লাভ করেছেন।

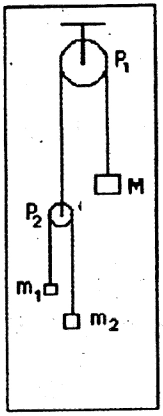
2.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী



চিত্র 2.9

1. (i) 2.9 চিত্রে 2 kg ভরের একটি বই অনুভূমিক টেবিলের উপর রাখা আছে। বইটির সঙ্গে সংলগ্ন একটি হাল্কা দড়ি টেবিলের প্রান্তে একটি মসৃণ পুলীর উপর দিয়ে গেছে এবং দড়ির অন্য প্রান্তে 5 kg ভর ঝোলানো আছে। বইটির ত্বরণ কত হবে, যদি (a) টেবিলের তল সম্পূর্ণ মসৃণ হয় (b) যদি টেবিল ও বইটির মধ্যে বিসর্প-ঘর্ষণ গুণাঙ্ক 0.5 হয়।

(ii) P_1 পুলীর উপর দিয়ে ঝোলানো দড়ির একপ্রান্তে ভর M এবং অন্যপ্রান্তে P_2 পুলী আটকানো আছে। আবার P_2 পুলীর উপর দিয়ে ঝোলানো দড়ির দুই প্রান্তে m_1 ও m_2 ভরদুটি আটকানো আছে (চিত্র 2.10)। পুলীগুলি সম্পূর্ণ ঘর্ষণহীন এবং পুলী ও দড়ির ভর নগন্য ধরে নিয়ে ভরগুলির ত্বরণ নির্ণয় করুন।



চিত্র 2.10

(iii) 240kg ভরের একটি ট্রলি রেললাইনের উপর দিয়ে ঘন্টায় 15kmবেগে গড়িয়ে চলেছে। ট্রলিটির উপর বাইরে থেকে 60kg ভরের একটি বস্তা রেখে দেওয়া হল। বস্তাটির প্রাথমিক বেগ উপেক্ষণীয় হলে ট্রলির বেগ এখন কত হবে? এখন যদি বস্তাটি ট্রলি থেকে ট্রলির সাপেক্ষে ঘন্টায় 7km বেগে পিছন দিকে ছুঁড়ে দেওয়া হয় ট্রলির বেগ কত দাঁড়াবে?

(iv) কনভেয়ার বেল্ট (conveyar belt) একটি চলমান চওড়া রবারের ফিতা যার সাহায্যে কয়লা, বালি, নানা ধরণের প্যাকেট বা মালপত্র এক স্থান থেকে অন্যস্থানে অবিচ্ছিন্নভাবে স্থানান্তরিত করা যায়। একটি কনভেয়ার বেল্ট প্রতি মিনিটে 30 মিটার বেগে চলছে এবং সেটির উপর 3 সেকেন্ড অন্তর একটি করে 500 gm ভরের দুধের প্যাকেট রাখা হচ্ছে। বেল্টটি চালু রাখতে কত বলের প্রয়োজন হবে?

2. নিউটনের প্রথম গতিসূত্রটি বিবৃত করুন। জড়ত্বীয় ও অজড়ত্ব ফ্রেম কাকে বলে উদাহরণসহ ব্যাখ্যা করুন।

3. নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রটি বিবৃতি দিন। আপনি যদি বল, সময় ও রৈখিক ভরবেগের একক হিসাবে যথাক্রমে নিউটন (N), ঘন্টা (hr) এবং কিলোগ্রাম, কিলোমিটার/ঘন্টা $\left(\text{kg.km.hr}^{-1}\right)$ ব্যবহার করেন তবে 2.1 সূত্রের k ধ্রুবকের মান কত হবে?

4. নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্রটি লিখুন এবং ব্যাখ্যা করুন।

দুই দলের খেলোয়াড়ের মধ্যে টাগ-অফ্-ওয়ার (tug-of-war) খেলার সময় এক দল অন্য দলের ওপর যে দড়ির টান প্রয়োগ করে তা সমমান ও বিপরীতমুখী। তা সত্ত্বেও যখন একদল অন্যদলকে টেনে নেয় তখন কি তৃতীয় গতিসূত্রটি লঙ্ঘিত হয়?

5. একটি বলগোষ্ঠী কখন সাম্যে আছে বলা যায়?

চারটি বলের প্রথমটি ব্যতীত বাকি তিনটি সমতলীয় (coplanar)। প্রমাণ করুন যে বলগুলি সাম্যে থাকতে পারে না।

6. রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ বলতে কী বোঝায়? ধরুন আপনি সম্পূর্ণ ঘর্ষণহীন বরফের উপর স্থিরভাবে দাঁড়িয়ে বন্দুক থেকে সরাসরি উত্তর দিকে গুলি ছুঁড়লেন। এতে আপনার গতির উপর কোন প্রভাব পড়বে কি?

7. বলের আবেগ কাকে বলে? ঘাতবলের বৈশিষ্ট্য কি?

8. প্রমাণ করুন যে কোন বস্তুর ভর যদি বৃদ্ধি পেতে থাকে তবে সেটির সমবেগ বজায় রাখতেও তার উপর বল প্রয়োগ করতে হবে।

2.9 উত্তরমালা

অনুশীলনী 1

(i) বলটির বেগ প্রতি সেকেন্ডে $0.2\mathrm{ms^{-1}}$ হ্রাস পেয়েছে, অর্থাৎ সেটির ত্বরণ $= -0.2\mathrm{ms^{-2}}$ ।
অতএব ঘর্ষণ বল $= \cdot 16\mathrm{kg} \times \left(-0 \cdot 2\mathrm{ms^{-2}}\right) = -\cdot 032\mathrm{N}$ নেগেটিভ চিহ্নটি বেগের বিপরীতে ক্রিয়াশীল বল নির্দেশ করেছে।

(ii) নারকেলটি পৃথিবীকেও সেটির নিজের দিকে W বলে আকর্ষণ করে। তবে পৃথিবীর ভর বহুগুণ (প্রায় 10^{24}) বেশী হওয়ায় তার ত্বরণ একেবারেই নগণ্য হয়।

অনুশীলনী 2

(i) নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী, বস্তুটির বেগ υ হলে,

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = Fe^{-\alpha t}$$

সমাকলন করে $m\int_0^{\upsilon} d\upsilon = \int_0^t Fe^{-\alpha t} = -\frac{F}{\alpha}\left(e^{-\alpha t} - 1\right)$

অর্থাৎ $\upsilon = \frac{F}{\alpha m}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$

যখন $t \to \infty$, $\upsilon \to \frac{F}{\alpha m}$। সুতরাং বস্তুটির বেগ শেষ পর্যন্ত দাঁড়াবে $\frac{F}{\alpha m}$

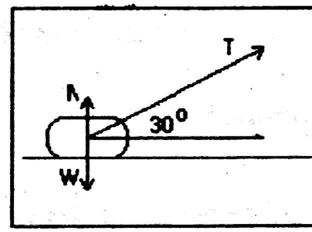
(ii) ধরুন মাটির প্রতিক্রিয়া বল = N , দড়ির টান = T , বস্তুর ওজন = W , ঘর্ষণ গুণাঙ্ক = μ

উল্লম্বদিকে সাম্য হেতু, $N + T\sin 30^\circ = W$

অনুভূমিক দিকে সাম্য হেতু, $T\cos 30^\circ = \mu N$

N অপনয়ন করে, $T\cos 30^\circ = \mu\left(W - T\sin 30^\circ\right)$

বা $T = \dfrac{\mu W}{\cos 30^\circ + \mu \sin 30^\circ}$ ।



চিত্র 2.11

এখানে $W = 10 \times 9\cdot 8 = 98N, \mu = 0\cdot 3$

সুতরাং $T = \dfrac{0\cdot 3 \times 98 \times 2}{\sqrt{3} + 0\cdot 3} = 29N$

অনুশীলনী 3

যেহেতু ঝাড় লণ্ঠনটি সাম্যে আছে, এটির উপর ক্রিয়াশীল বলগুলির উল্লম্ব ও অনুভূমিক উপাংশগুলি শূন্য হবে। দড়ি দুটির টান T_1 এবং T_2, ঝাড়লণ্ঠনের ভার W হলে,

$T_1 \cos 30^\circ + T_2 \cos 60^\circ = W = 5kg \times 9\cdot 8$ বা 49N

$T_1 \sin 30^\circ = T_2 \sin 60^\circ$

সমীকরণ দুটির সমাধান করলে : $T_1 = T_2\sqrt{3}$

$T_2\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} + T_2 \cdot \dfrac{1}{2} = 49N$

বা $T_2 = 24\cdot 5N$ এবং $T_1 = 42\cdot 4N$

যদি দুটি দড়িই অনুভূমিক দিকের সঙ্গে 5° কোণে থাকত, তা হলে উভয়ের টান সমান, ধরুন T হত। এগুলির উল্লম্ব উপাংশ দুটির যোগফল হত

$2T\sin 5^\circ = W$

হিসাব করলে পাবেন $T = \dfrac{49N}{2 \times 0\cdot 087} = 280N$ (প্রায়)। লক্ষ্য করুন, এই টান আগের তুলনায় অনেক বেশী।

অনুশীলনী 4

বলের প্রাথমিক বেগ $60{,}000/3600 = 16\cdot 7\mathrm{ms}^{-1}$, অন্তিম বেগ $90{,}000/3600 = 25\mathrm{ms}^{-1}$

বলের ভর বেগের পরিবর্তন $= 60\mathrm{gm} \times [16\cdot 7 - (-25)] = 2\cdot 5\mathrm{kg\ ms}^{-1}$

অনুশীলনী 5

অভিকর্ষের প্রভাব উপেক্ষা করলে 2.18 সমীকরণটি দাঁড়ায় $v - v_0 = u \ln \frac{M_0}{M}$ ।

প্রথম স্তরের রকেটের ক্ষেত্রে $M_0 = 50 + 450 = 500\mathrm{kg},\ M = 50\mathrm{kg},\ u = 1\cdot 5\mathrm{kms}^{-1},\ v_0 = 0$

$$\therefore\ v = 1\cdot 5 \ln \frac{500}{50} = 1\cdot 5 \ln 10 = 3\cdot 45\mathrm{km\ s}^{-1}$$

দ্বিতীয় স্তরের রকেটের ক্ষেত্রে $M_0 = 10 + 30 = 40\mathrm{kg},\ M = 10\mathrm{kg},\ v_0 = 3\cdot 45\mathrm{km\ s}^{-1}$

$$\therefore\ v = 1\cdot 5 \ln \frac{40}{10} + 3\cdot 45 = 1\cdot 5 \ln 4 + 3\cdot 45 = 5\cdot 53\mathrm{km\ s}^{-1}$$

(লক্ষ্য করুন, যদি রকেটটি দ্বিস্তর না হয়ে একস্তর হত এবং মোট প্রাথমিক ভর 500kg এর মধ্যে $450 + 30 = 480\mathrm{kg}$ জ্বালানী ও জারক হত তবে সেটির অন্তিম বেগ তুলনামূলকভাবে কম হত।)

সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. (i) (a) ধরুন দড়ির টান T, বই এবং ভরের ত্বরণ f।

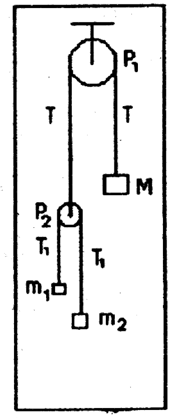
$\therefore$ ভরটির জন্য $5f = 5g - T$, বই এর জন্য $2f = T$।

T অপনয়ন ক'রে, $7f = 5g$ বা $f = \frac{5}{7} \times 9\cdot 8$ বা $7\cdot 0\ \mathrm{ms}^{-2}$ ।

(b) এক্ষেত্রে ভরটির জন্য $5f=5g-T$, বই এর জন্য $2f = T - 2g \times 0\cdot 5 = T - g$

T অপনয়ন ক'রে, $7f = 5g - T + T - g = 49$, অর্থাৎ $f = \frac{4}{7} \times 9\cdot 8$ বা $5\cdot 6\mathrm{ms}^{-2}$ ।

(ii) যেহেতু পুলী দুটি ঘর্ষণহীন, পুলীর দুদিকে দড়ির টান একই হবে।



চিত্র 2.12

ধরুন দড়ির টান চিত্র 2.12 অনুযায়ী T ও T_1; M, m_1 ও m_2 ভরগুলির নিম্নমুখী ত্বরণ যথাক্রমে f, f_1 ও f_2। P_2 পুলীর সাপেক্ষে m_1 ও m_2 ভরের ত্বরণ সমমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নের হবে। ধরুন এগুলি যথাক্রমে f', ও $-f'$।

আবার পুলীটির ত্বরণ M ভরের ত্বরণের বিপরীত, সুতরাং এটি $-f$ এর সমান।

সুতরাং m_1 ও m_2 এর প্রকৃত ত্বরণ যথাক্রমে $f_1 = -f + f'$ ও $f_2 = -f - f'$। এখন আমরা M, m_1 ও m_2 এর গতি সমীকরণ লিখতে পারি :

M এর জন্য $Mf = Mg - T = Mg - 2T_1$ (P_2 ভরহীন হওয়ায় $T = 2T_1$) .... (1)

m_1 এর জন্য $m_1 f_1 = m_1(-f + f') = m_1 g - T_1$ .... (2)

m_2 এর জন্য $m_2 f_2 = m_2(-f - f') = m_2 g - T_1$ .... (3)

(2) ও (3) থেকে $-f(m_1 + m_2) = (m_1 + m_2)g - 2T_1$

$$= (m_1 + m_2)g + Mf - Mg$$

বা $f = g\dfrac{M - m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2}$

$$T_1 = \frac{1}{2}M(g - f) = \frac{1}{2}Mg\left(1 - \frac{M - m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2}\right) = Mg \cdot \frac{m_1 + m_2}{M + m_1 + m_2}$$

$$\therefore\ f_1 = g - \frac{T_1}{m_1} = g\left(1 - \frac{M}{m_1} \cdot \frac{m_1 + m_2}{M + m_1 + m_2}\right) = g \cdot \frac{m_1(m_1 + m_2) - m_2 M}{m_1(M + m_1 + m_2)}$$

অনুরূপভাবে $f_2 = g\dfrac{m_2(m_1 + m_2) - m_1 M}{m_2(M + m_1 + m_2)}$

(iii) ট্রলির প্রাথমিক বেগ ঘন্টায় 15 km। সুতরাং প্রাথমিক ভরবেগ $240 \times 15 = 3600\ \mathrm{kg.km.hr^{-1}}$ যেহেতু ট্রলির ভরবেগের কোন পরিবর্তন ঘটবে না, ট্রলির ভর পরিবর্তিত হয়ে $240 + 60 = 300\ \mathrm{kg}$ হলে সেটির বেগ হবে $3600/300 = 12\ \mathrm{km\ hr^{-1}}$।

দ্বিতীয় অংশ : ধরুন নির্ণেয় বেগ v। ছুঁড়ে দেওয়া বস্তার প্রকৃত বেগ $12 - 7 = 5\ \mathrm{km\ hr^{-1}}$। ট্রলি ও বস্তার মোট ভরবেগ রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ হেতু $3600\ \mathrm{kg\,.\,km\,.hr^{-1}}$ এর সমান।

$$\therefore\ 240v + 60 \cdot 5 = 3600$$

$$\text{বা}\ \ v = \frac{3600 - 300}{240} = 13 \cdot 75\ \mathrm{km\ hr^{-1}}$$

2. এই এককের 2.2.1 অংশে প্রশ্নটির উত্তর পাবেন।

3. প্রশ্নের প্রথম অংশের উত্তর 2.2.2 অংশে পাবেন।

দ্বিতীয় অংশের উত্তর : ধরুন 2.1 সূত্রে

$$\frac{dp}{dt} = (1\mathrm{kg.km/hr})\ /\ \mathrm{hr} = 1\mathrm{kg}.10^3\mathrm{m}.(3600\mathrm{s})^{-2}$$

$$= 7 \cdot 716 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg.m.s^{-2}} = 7 \cdot 716 \times 10^{-5}\mathrm{N}$$

সুতরাং প্রশ্নের এককে $\frac{dp}{dt} =$ ভরবেগের পরিবর্তনের একক হার হল $F = 7 \cdot 716 \times 10^{-5}$ একক অর্থাৎ $k = 7 \cdot 716 \times 10^{-5}$।

4. প্রশ্নের প্রথম অংশের উত্তর 2.2.3 অংশে দেওয়া আছে।

দ্বিতীয় অংশের উত্তর : দুই দলের উপর দড়ির টান সমান হলেও তাদের উপর মাটির যে প্রতিক্রিয়াবল ক্রিয়া করে সেগুলির অনুভূমিক উপাংশ ভিন্ন হয়। যে দলের ক্ষেত্রে দড়ির টানের বিপরীতে ক্রিয়াশীল ঐ উপাংশ অপেক্ষাকৃত বড় হয় সেই দলই অন্য দলকে টেনে নিয়ে জয়ী হয়।

5. প্রশ্নের প্রথম অংশের উত্তর 2.4 অনুচ্ছেদে পাবেন।

দ্বিতীয় অংশের উত্তর : তিনটি সমতলীয় বল যে সমতলে আছে, তাদের লব্ধিও সেই সমতলেই

থাকবে। সুতরাং ঐ লব্ধি কখনই প্রথম বলটির সমমান ও বিপরীত হবে না। কাজেই বলগুলি সাম্যে থাকবে না।

2.5.1 অংশে রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণের ব্যাখ্যাটি পড়ে নিন।

দ্বিতীয় অংশের উত্তর : আপনার ভরবেগ বন্দুকের গুলির ভরবেগের সমমান ও বিপরীত হবে যাতে রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষিত হয়। সুতরাং আপনি ঐ ভরবেগ নিয়ে সরাসরি দক্ষিণ দিকে যেতে থাকবেন।

প্রশ্নটির উত্তর 2.5.2 অংশে পাবেন।

প্রশ্নটির উত্তর 2.6 অনুচ্ছেদে পাওয়া যাবে।

একক 3 ▫ কার্য, শক্তি ও ক্ষমতা

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা

আগের একক আলোচনা থেকে আপনারা জানেন যে গতিবিজ্ঞানের প্রধান কাজ হলো বল দেওয়া থাকলে গতি নির্ণয় করা বা গতি দেওয়া থাকলে বল নির্ণয় করা। এর জন্য বল ও গতির মধ্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা করা হয়েছে। আপনারা দেখেছেন যে গতিবিজ্ঞানে ভরবেগের বিশেষ গুরুত্ব আছে - এর কারণ দুটি— প্রথমতঃ বল সরাসরি ভরবেগের পরিবর্তন করে; দ্বিতীয়তঃ আপনারা দেখেছেন যে ভরবেগ সংরক্ষিত হয়। গতিবিজ্ঞানে বহু সমস্যার সমাধানে এরূপ সংরক্ষণ সূত্র খুবই সহায়ক। বর্তমান এককে আমরা আর একটি সংরক্ষণ সূত্র প্রতিষ্ঠা করব। সেজন্য কতকগুলি নূতন সংজ্ঞার অবতারণা করতে হবে। এর জন্য সর্বপ্রথম আমরা কার্য (work) বলে একটি শব্দ নিয়ে আসব। সাধারণ কথাবার্তায় কার্য বলতে যা বোঝানো হয় গতিবিজ্ঞানে কার্যের ধারণা সম্পূর্ণ ভিন্ন। বলবিদ্যার দৃষ্টিকোণে বলের প্রয়োগবিন্দুর সরণ না হলে কোনও কার্য হয় না। বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণের সঙ্গে বলের স্কেলার গুণফলকে কৃতকার্যের পরিমাপ বলা হয়। কার্যের সঙ্গে ঘনিষ্ঠভাবে যুক্ত আর একটি ধারণা যাকে বলা হয় শক্তি। আপনারা দেখবেন যে বহু ক্ষেত্রে এই শক্তি একটি সংরক্ষণ সূত্র মেনে চলে।

3.2 উদ্দেশ্য

বলবিদ্যার একটি প্রধান প্রয়োগক্ষেত্র যন্ত্রবিদ্যা — সরলভাষায় যন্ত্রের কার্যপ্রণালী, তার সাফল্য ও সীমাবদ্ধতা ইত্যাদির আলোচনা এই এককের উদ্দেশ্য। এটি পাঠ করে আপনি —

- যন্ত্রের কার্যকারিতা নিরূপন করবার জন্য কতকগুলি ধারণা ও সংজ্ঞা যেমন কার্য, শক্তি ও ক্ষমতা সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- আপনি জানবেন যে শক্তি সৃষ্টি করা যায় না — ফলত এমন একটি যন্ত্র প্রস্তুত করা যায় না, যাতে কোন পরিশ্রম না করেও, প্রয়োজনীয় কাজ পাওয়া যাবে।
- আপনি দেখবেন যে বল দুরকমের — সংরক্ষী ও অসংরক্ষী এবং অসংরক্ষী বলের উপস্থিতিতে যান্ত্রিক শক্তির অবক্ষয় ঘটে।
- উপলব্ধি করবেন যে ভরবেগ ও শক্তির সংরক্ষণ সূত্র ব্যবহার করে গতিবিদ্যার বহু সমস্যার সমাধান সম্ভব — তারজন্য সরাসরি নিউটনের গতিসূত্র ব্যবহার করার প্রয়োজন হয় না।

3.3 কার্য

বল (Force) একটি ভেক্টর এবং এর মান, দিক ছাড়াও এর একটি প্রয়োগবিন্দু থাকে। যদি প্রয়োগবিন্দুর কোন সরণ হয়, তাহলে বলা হয় যে বল কর্তৃক কার্য করা হয়েছে। কার্যের পরিমাপের সংজ্ঞা বল এবং প্রয়োগবিন্দুর সরণের গুণফল। অর্থাৎ যদি প্রযুক্ত বল $\vec{F}$ হয় এবং প্রয়োগ বিন্দুর সরণ $d\vec{r}$ হয় তবে কার্য

$$\delta w = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} \tag{3.1}$$

(এখানে সরণ $d\vec{r}$ লেখা হয়েছে, আমরা অনুপরিমাণ সরণের কথা ধরে নিচ্ছি)।

দেখাই যাচ্ছে যে কার্য δw একটি স্কেলার, এর মান কিন্তু ঋণাত্মক বা ধনাত্মক দুইই হতে পারে — যখন $\vec{F}$ ও $d\vec{r}$ এর মধ্যের কোনটি সূক্ষ্ম কোণ, তখন কার্য ধনাত্মক এবং যখন মধ্যবর্তী কোনটি স্থূলকোন তখন কার্যের পরিমাণ ঋণাত্মক।

সরণ অনুপরিমাণ না হলে কার্যের মান পেতে হলে আমাদের সমীকরণ (3.1) কে সমাকলন করতে হবে — অর্থাৎ

$$w = \int_1^2 \vec{F}.\delta\vec{r} \tag{3.2}$$

সমাকলনের দুই সীমান্তকে 1 ও 2 দিয়ে নির্দেশ করা হয়েছে। লক্ষ্য করুন, $\vec{F}$ ও $d\vec{r}$ এর মধ্যবর্তী কোন সমকোণ হলে কৃতকার্য $\delta w = 0$, যদিও $\vec{F}$ বা $d\vec{r}$ কোনটির মানই শূন্য নয়।

যদি বলটি সুষম হয়, অর্থাৎ $\vec{F}$ এর মান ও দিক সর্বস্থানেই এক হয়, তাহলে উপরের (3.2) সমাকলনটিতে লেখা যায়,

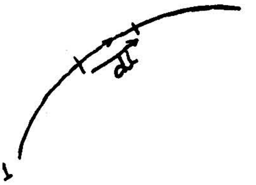
$$w = \vec{F}\int_1^2 d\vec{r} \tag{3.3}$$

এবং এর মান হয় $|\vec{F}||\vec{r}|\cos\theta$, যেখান $|\vec{F}|$ বলের মান, $|\vec{r}|$ লব্ধি সরণ এবং θ, হল $\vec{F}$ ও লব্ধি সরণের মধ্যবর্তী কোন্।

সাধারণভাবে $\vec{F}$ সুষম হোক বা না হোক, যদি $d\vec{l}$ কোনও একটি অনুপরিমাণ সরণ হয়, তবে মোট কার্যের পরিমাণ

$$\int_1^2 \vec{F}.d\vec{l}$$

এই সমাকলনটিকে $\vec{F}$ এর রেখা সমাকল (Line integral) বলা হয়। (চিত্র 3.1)।



চিত্র 3.1

SI একক পদ্ধতিতে কার্যর একক হিসাবে জুল ব্যবহার করা হয়। এক নিউটন বলের প্রয়োগে সরণ একমিটার হলে কৃতকার্য এক জুল বলা হয়।

3.4 শক্তি

কার্যের ধারণার সঙ্গে গতিবিজ্ঞানের সম্পর্ক কিছুটা অস্পষ্ট। সরণ কেন, কার প্রভাবে হচ্ছে, তার কোনও কথা নেই। এমনকি নিউটনের গতিসূত্রও কোথাও ব্যবহার হচ্ছে না। লক্ষ্য করুন গতিসূত্র অনুযায়ী বলের প্রভাবে প্রত্যক্ষভাবে ভরবেগের পরিবর্তন ঘটে, সরণ নয়। এই কারণে কার্যের ধারণার সরাসরি প্রত্যক্ষভাবে গতিবিজ্ঞানে বিশেষ কোন প্রয়োগ নাই। এই ত্রুটি এড়াতে 'শক্তি' বলে একটি ধারণা গতিবিজ্ঞানে নিয়ে আসা হয়। এটির সঙ্গে কার্যের ধারণার খুব ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক, কিন্তু দুটি ধারণা অভিন্ন নয়।

শক্তির সংজ্ঞা হল কার্য করবার সামর্থ্য। শক্তি শব্দটির প্রয়োগ খুব ব্যাপক। গতিবিজ্ঞানে এর ব্যবহারের শুরু, কিন্তু আজ পদার্থবিজ্ঞানের যে কোনও আলোচনায় শব্দটির ব্যবহার অপরিহার্য এবং কোন কোন ক্ষেত্রে 'বল' শব্দটির বদলে 'শক্তি'ই স্থান করে নিয়েছে।

3.4.1 গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি

শক্তির সংজ্ঞা বুঝবার জন্য কয়েকটি উদাহরণ খুব সহায়ক। মনে করুন একটি m ভরের বস্তুকণা $\vec{v}$ বেগে গতিশীল। ওর গতির বিপরীত দিকে ধরা যাক একটি বল $\vec{F}$ প্রয়োগ করা হল (চিত্র 3.2)। তাহলে কণাটির 'dt' অনুসময়ে যদি $\overrightarrow{dl}$ অনুপরিমাণ সরণ হয়, তবে কার্যের সংজ্ঞা অনুসারে কার্যের পরিমাণ

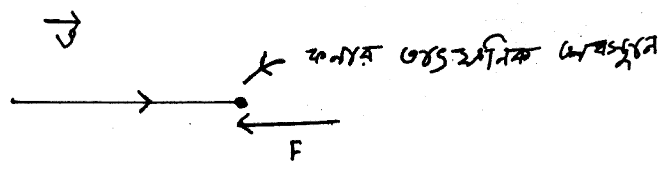
$$dw = \vec{F}.\overrightarrow{dl} \tag{3.4}$$

যেহেতু $\overrightarrow{dl} = \vec{v}dt$ এবং $\vec{F}$ এর বিপরীতমুখী, এই কার্যটি বলের বিরুদ্ধে করা হয়েছে এবং বস্তুকণার এই কার্য করবার সামর্থ এসেছে তার গতির জন্য। এরপর নিউটনের সূত্র প্রয়োগ করে লেখা যায় —

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

অর্থাৎ
$$dw = \frac{d}{dt}(m\vec{v})\cdot\overrightarrow{dl} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})\vec{v}\cdot dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(mv^2\right)dt \tag{3.5}$$



চিত্র 3.2

বস্তুকণার অন্তিম বেগ শূন্য হলে (3.5) সমীকরণ সমাকলন করে পাই,

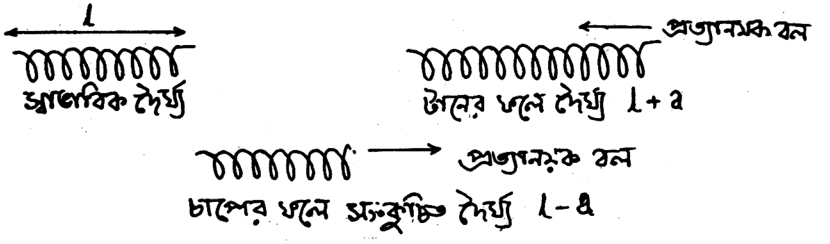
মোট কৃতকার্য $W = \int_{v}^{0}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(mv^2\right)\cdot dt$

$$= \frac{1}{2}\int_{v}^{0}d\left(mv^2\right) = -\frac{1}{2}mv^2 \tag{3.6}$$

ঋণাত্মক চিহ্নটি বোঝাচ্ছে যে, v বল $\vec{F}$ এর বিরুদ্ধে গতিশীল বস্তুটি কার্য করেছে। এজন্য

$\frac{1}{2}mv^2$ কে আমরা বলব কণাটির গতিজনিত শক্তি অথবা কেবল গতিশক্তি। উপরের (3.6) সমীকরণ বোঝাচ্ছে যে $\frac{1}{2}mv^2$ এর বা গতিশক্তির হ্রাসের পরিমাণ বলের বিরুদ্ধে কৃতকার্যের সমান।

এবার ধরা যাক একটি স্প্রিং, তার একটি স্বাভাবিক দৈর্ঘ্য আছে ℓ, একটি টান বা চাপ দিয়ে এর দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন করা হয়েছে $\ell^1 = \ell \pm a$।



চিত্র·3.3

স্প্রিংটি ছেড়ে দিলে সে তার স্বাভাবিক দৈর্ঘ্যে ফিরে যাবে। প্রত্যানয়ক বল দৈর্ঘ্যের বিচ্যুতির সমানুপাতিক এবং বিচ্যুতির বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল। কাজেই প্রত্যানয়ক বলকে লেখা যায় $-k\vec{a}$ এবং কৃতকার্যের পরিমাণ

$$w = -\int_a^0 k\vec{a}.d\vec{a} = \frac{1}{2}ka^2 \tag{3.7}$$

আমরা বলব যে এই কার্য করবার সামর্থ্য স্প্রিংটির হল তার আকারের বিকৃতির জন্য। এই শক্তিকে বলা হয় স্থিতিশক্তি (Potential energy)।

স্থিতিশক্তির উদ্ভব আরও অন্যভাবে হতে পারে। যখন কোনও বস্তু একটি বলক্ষেত্রে অবস্থিত হয়, যেমন পৃথিবীর অভিকর্ষ ক্ষেত্রে অবস্থিত যে কোনও বস্তু অথবা তড়িৎক্ষেত্রে অবস্থিত একটি আহিত কণা। আপাততঃ এসব ক্ষেত্রে শক্তির পরিমাণের গণনা স্থগিত রেখে, আমরা শক্তির সংরক্ষণ সূত্রটি উপস্থাপন করব।

গতি সমীকরণ সাধারণভাবে,

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \tag{3.8}$$

উভয়দিক $\vec{v}$ এর সঙ্গে স্কেলার গুণন করে পাই,

$$\vec{v}\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}.\vec{v}$$

অথবা $$\frac{1}{2}\int \frac{d}{dt}\left(mv^2\right)dt = \int \vec{F}\cdot\vec{v}dt = \int \vec{F}.d\vec{r} \tag{3.9}$$

উপরে $\vec{v}.dt$ অর্থাৎ dt সময়ে সরণকে আমরা লিখেছি $d\vec{r}$

শক্তির সংরক্ষণ সূত্র $\vec{F}$ এর একটি বিশেষ রূপের উপর নির্ভর করে $\vec{F}$ একটি গ্রেডিয়েন্ট ভেক্টর হতে হবে। ($\vec{F}$ এর এই গুণের বিষয়ে আমরা পরে আরও আলোচনা করব)। $\vec{F}$ গ্রেডিয়েন্ট ভেক্টর হলে আমরা লিখতে পারি,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \tag{3.10}$$

যেখানে U একটি স্কেলার, এরূপ বলকে বলা হয় সংরক্ষী বল। ডানদিকের ঋণাত্মক চিহ্নটিকে আপাততঃ প্রচলিত প্রথা হিসাবে ধরে নিন, পরে এর সার্থকতা পরিষ্কার হবে। এখন সমীকরণ (3.9) টি দাঁড়ায়

$$\frac{1}{2}\int \frac{d}{dt}\left(mv^2\right)dt = -\int \vec{\nabla}.U.d\vec{r} = -\int dU$$

সমাকলন করে পাই, $$\frac{1}{2}mv^2 + U = \text{ ধ্রুবক} \tag{3.11}$$

এটিই যান্ত্রিক শক্তির সংরক্ষণ সূত্রের গাণিতিক রূপ। প্রথম রাশি $\frac{1}{2}mv^2$ আমাদের পূর্বপরিচিত গতিশক্তি। U কে আমরা বলব স্থিতিশক্তি, লক্ষ্য করুন আমাদের পূর্ব আলোচিত স্থিতিশক্তির সঙ্গে এই সংজ্ঞা সঙ্গতিপূর্ণ এবং দেখা যাচ্ছে গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির যোগফল অপরিবর্তিত থাকে (বিজ্ঞানের ভাষায় সংরক্ষিত হয়)। প্রশ্ন উঠবে $\vec{F}$ একটি গ্রেডিয়েন্ট ভেক্টর এই ধারণা কতটা সঠিক। বলা যায় সাধারণভাবে দুটি কণার 'মৌলিক আন্তঃক্রিয়াগুলি' (fundamental interactions) সবই এই নিয়ম মেনে চলে। মৌলিক আন্তঃক্রিয়া $\vec{F}$ এর সাধারণরূপ $f(r).\hat{r}$, কাজেই $\vec{F}$ একটি গ্রেডিয়েন্ট ভেক্টর। কিন্তু মৌলিক আন্তঃক্রিয়া ছাড়া বহুকণার মিলিত আন্তঃক্রিয়ার ফলে অনেক সময় যে বলের উদ্ভব হয়, তা কিন্তু গ্রেডিয়েন্ট ভেক্টর নয়। এর সবচেয়ে সুপরিচিত উদাহরণ ঘর্ষণবল এবং ঘর্ষণবলের উপস্থিতিতে আমরা এতক্ষণ যে শক্তির সংরক্ষণসূত্র আলোচনা করেছি, সেটি শুদ্ধ নয় অর্থাৎ গতিশক্তি + স্থিতিশক্তি আর অপরিবর্তিত থাকে না। $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ সম্পর্কটিতে $\vec{F}$ সুনির্দিষ্ট হলেও U র মানে অনিশ্চয়তা আছে, U র

সঙ্গে একটি ধ্রুবরাশি যোগ দিলেও একই $\vec{F}$ পাওয়া যাবে। এজন্য বলা হয় যে, স্থিতিশক্তির কোনও চরম মান (absolute value) নেই। আমরা কেবলমাত্র দুটি অবস্থার ভিতরে স্থিতিশক্তির পার্থক্যকেই নির্দিষ্ট করতে পারি। পরে এই বিষয়টি আরও পরিষ্কার হবে যখন আমরা অভিকর্ষক্ষেত্রে স্থিতিশক্তির মান নির্ণয় করব। ভূপৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতায় অবস্থিত m ভরের বস্তুকণার স্থিতিশক্তি,

$$U = mgh \tag{3.12}$$

(ভূপৃষ্ঠের সাপেক্ষে, অর্থাৎ ভূপৃষ্ঠে স্থিতিশক্তি শূন্য ধরে)

আবার $$U = -\frac{GM}{R+h} = -\frac{gR^2m}{R+h} \tag{3.13}$$

(পৃথিবী থেকে অসীম দূরত্বে স্থিতিশক্তির মান শূন্য ধরে)

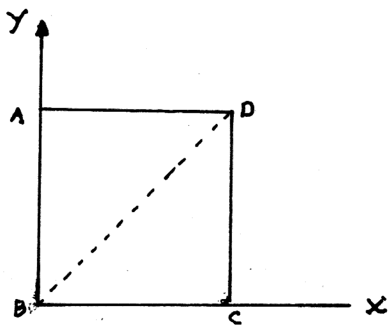
এখানে G, M এবং R যথাক্রমে মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, পৃথিবীর ভর এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ।

3.4.2 সংরক্ষীবল এবং স্থিতিশক্তির উদাহরণ ও বিস্তৃত আলোচনা

একটি মসৃণ খাড়া দেওয়ালের উপর একটি বর্গক্ষেত্র ABCD কল্পনা করুন। (চিত্র 3.4) বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য L. দ্বিমাত্রিক কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রে BC বাহুর দিকে X অক্ষ ও BA বাহুর দিকে Y অক্ষ ধরুন। এখন m ভরের একটি কণাকে A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে আমরা দু'ভাবে আনতে পারি।

(a) সোজাসুজি AB রেখা বরাবর

(b) ABCD পথ বরাবর



চিত্র 3.4

আমরা দুক্ষেত্রেই অভিকর্ষ বল কর্তৃক কৃতকার্য নির্ণয় করব। উল্লম্ব দিকে একক ভেক্টরকে $\hat{j}$ লিখি, অভিকর্ষজ বল $\vec{F}$ কে লেখা যায়

$$\vec{F} = -mg\hat{j} \tag{3.14}$$

প্রথমে (a) ক্ষেত্রে কৃতকার্য

$$Wa = W_{AB} = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = \int_A^B -mg\hat{j}.\left(dy\hat{j}\right)$$

$$= \int_A^B mgdy$$

অথবা $$W_{AB} = mg\left(y_B - y_A\right) = -mgL \tag{3.15}$$

একইভাবে (b) ক্ষেত্রে কৃতকার্য (অনুভূমিক BC দিকে একক ভেক্টর $\hat{i}$)

$$W_\pi = W_{ADCB} + W_{AD} + W_{DC} + W_{CB}$$

$$= \int_A^D \vec{F}\cdot\vec{dl} + \int_D^C \vec{F}.\ \vec{dl} + \int_C^B \vec{F}\cdot\vec{dl}$$

$$= \int_A^D -mg\,\hat{j}\cdot dx\hat{i} + \int_D^C -mg\,\hat{j}\cdot\left(-dy\hat{j}\right) + \int_C^B -mg\,\hat{j}\cdot\left(-dx\hat{i}\right)$$

$$= O + \int_D^C mg\,dy + O$$

$$= mg\left(y_e - y_D\right) = -mgL \tag{3.16}$$

সুতরাং $Wa = W\bar{b}$, এর অর্থ একটি কণাকে A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে ভিন্ন পথে নিয়ে যেতে যে পরিমাণ কার্য করতে হয় তা উভয়ক্ষেত্রে সমান। অর্থাৎ কণাকে A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে নিয়ে যাবার জন্য $\vec{F}$ বল মোট যে কাজ করে তার মান A ও B যোগকারী রেখার উপর নির্ভর করবে না। এই প্রকার বলকে সংরক্ষী বল (Conservative force) বলে। অন্যভাবে কোন বলের পথ সমাকল দুটি বিন্দুর যোগকারী রেখার উপর নির্ভর না করে কেবলমাত্র বিন্দু দুটির প্রাথমিক ও চূড়ান্ত অবস্থানের উপর নির্ভর করলে ঐ বলকে সংরক্ষী বল বলে। উদাহরণস্বরূপ - অভিকর্ষ বল, স্থিরতড়িৎবল (Electrosatic force) ইত্যাদি।

অপরপক্ষে কিছু বল আছে যা বলক্ষেত্রের একবিন্দু থেকে অন্যবিন্দুতে কোন কণাকে সরাতে যে 'কার্য' করে তা বিন্দু দুটির যোগাযোগকারী রেখার (অর্থাৎ সরণপথের) উপর নির্ভর করে। এই প্রকার বলকে অসংরক্ষী বল বলে। অসংরক্ষী বলের ক্ষেত্রে একটি বদ্ধপথে বলের দ্বারা করা 'মোট কার্যের'

পরিমাণ শূন্য হয় না। এরূপ ক্ষেত্রে কণা যদি C_1 পথে A থেকে B তে যায় এবং অন্যকোন C_2 পথে B থেকে A তে ফিরে আসে তাহলে যাতায়াতের এই পূর্ণচক্রে বলের দ্বারা মোট 'কৃতকার্যের' মান শূন্য হয় না। যেমন ঘর্ষণবল একটি অসংরক্ষী বল। C_1 ও C_2 দ্বারা গঠিত বদ্ধপথকে (Closed curve) আমরা C_0 বলব। অতএব বলা যায় কোন সংরক্ষী বলের ক্ষেত্রে যে কোন বদ্ধপথে বল দ্বারা কৃতকার্যের মান শূন্য। সংকেতে লেখা যায়

$$\oint_{c_0} \vec{F}.\overrightarrow{dl} = 0 \tag{3.17}$$

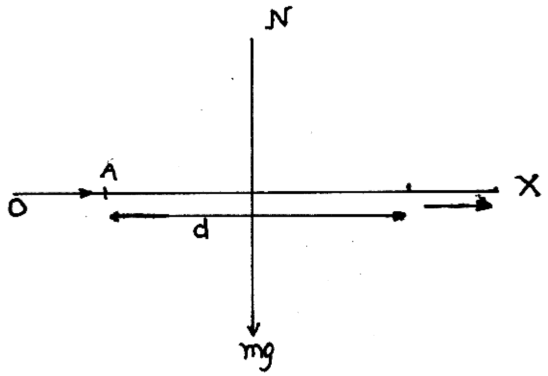
এবং অসংরক্ষী বলের ক্ষেত্রে

$$\oint_{c_0} \vec{F}.\overrightarrow{dl} \neq 0 \tag{3.18}$$

$\oint_{c_0}$ চিহ্নটি বদ্ধপথে C_0 তে নেয়া সমাকল বুঝায় অর্থাৎ উহা C_1 পথে A থেকে B পর্যন্ত নিশ্চিত সমাকল এবং C_2 পথে B থেকে A পর্য্যন্ত নিশ্চিত সমাকলের যোগফল।

$$\oint_{C_0} \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \underset{C_1}{\int_A^B} \vec{F}.\overrightarrow{dl} + \underset{C_2}{\int_B^A} \vec{F}.\overrightarrow{dl} \tag{3.19}$$

ধরুন একটি কণা AB অনুভূমিক পথে A হতে B তে যায় এবং ঐ একই পথে A বিন্দুতে ফিরে আসে। সুতরাং কণার গতিপথটি বদ্ধ। ঘর্ষণবল গতির বিরুদ্ধে কাজ করে এবং যে কারণে ঘর্ষণের কৃতকার্য ঋণাত্মক। ঘর্ষণবলের মান $\mu_k N$ এবং এটি গতির বিরুদ্ধে। X অক্ষের দিকে গতির অভিমুখ ধরলে, (চিত্র 3.5)



চিত্র 3.5

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = \int_A^B -(\mu\bar{k}\ mg)\hat{i}.dx\hat{i} = -\mu\bar{k}\ mg\ d \tag{3.20}$$

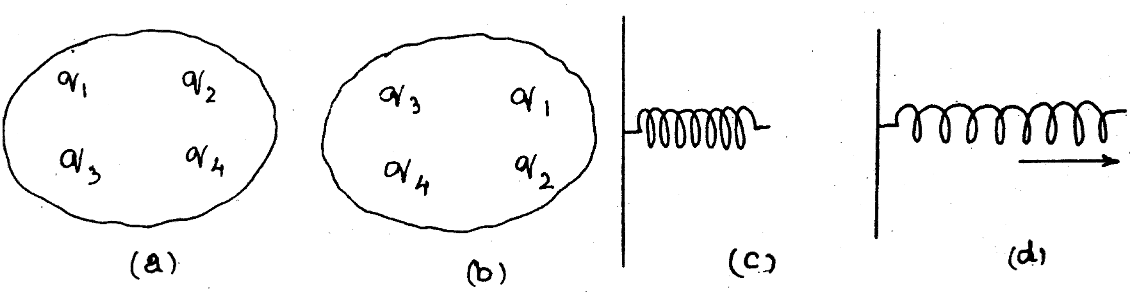
এবং $$W_{AB} = \int_B^A (\mu\bar{k}\ mg)\hat{i}\cdot(-dx\ \hat{i}) = -\mu_k\ mg\ d \tag{3.21}$$

সুতরাং বদ্ধপথে ABA তে মোট কৃতকার্য শূন্য নয় এবং এর মান $-2\mu_k mgd$ ।

সংরক্ষী অভিকর্ষবলের ক্ষেত্রে (চিত্র 3.4) একটি m ভরের কণাকে A বিন্দু হতে B বিন্দুতে নিয়ে যেতে কৃতকার্যর পরিমাপ সমীকরণ 3.15 থেকে লিখতে পারি,

$$W = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = -(U_B - U_A) \tag{3.22}$$

যেখানে U = mgy, এই U রাশিটির ঋণাত্মক পরিবর্তনই কৃতকার্যর সমান এবং U রাশিটি কণাটির অবস্থান Y এর অপেক্ষক। আবার কতকগুলি আধান এর q_1, q_2, q_3, q_4 একটি নির্দিষ্ট বিন্যাস থেকে [(a)] অন্য একটি বিন্যাস [(b)] - এ তাদের পারস্পরিক অবদান পরিবর্তন করলে বা একটি স্প্রিংকে 'দৈর্ঘ্য' [(c)] থেকে 'দৈর্ঘ্য' [(d)] তে পরিবর্তিত করলে, উভয় ক্ষেত্রেই তাদের প্রাথমিক অবস্থান থেকে পরিবর্তন সমগ্র তন্ত্রটির (system) বিন্যাস - এর পরিবর্তন সূচিত করে। (চিত্র 3.6) ।



চিত্র 3.6

প্রতি ক্ষেত্রেই বল বা বলসমূহ কর্তৃক তন্ত্রকে এক অবস্থাতে থেকে অন্য অবস্থাতে নিয়ে যেতে 'সম্পন্ন কার্য'কে 3.22 সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। U রাশিটি সমগ্র তন্ত্রের (system) বিন্যাস এর উপর নির্ভর করে। U কে বলা হয় বস্তুর স্থিতিশক্তি। সংরক্ষী বলক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে স্থিতিশক্তি U বলতে ঐ বিন্দু থেকে কোন নির্দিষ্ট স্থির বিন্দু পর্য্যন্ত কোন কণাকে নিয়ে যেতে ক্ষেত্রস্থ বল যে কার্য করে তাই

বুঝায়। অনেক ক্ষেত্রেই নির্দিষ্ট স্থির বিন্দুটি অনন্ত দূরত্বে ধরে নেওয়া হয়। স্থিতিশক্তি পরিমাপের জন্য সমীকরণ 3.22 এর সাহায্যে লেখা যায়

$$U_B = -\int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_B^A \vec{F} \cdot \vec{dl} \qquad \text{যখন} \qquad U_A = 0 \tag{3.23}$$

সুতরাং কোন অবস্থানে বস্তুর স্থিতিশক্তি বলতে বস্তুকে সেই অবস্থান বা বিন্যাস থেকে কোন প্রামান্য অবস্থান বা বিন্যাসে নিয়ে যেতে বল যে পরিমাণ কাজ করে তাই বুঝায়। যেমন সমীকরণ 3.23 তে প্রামান্য অবস্থান Aতে স্থিতিশক্তি শূন্য ($U_A = 0$) ধরা হয়েছে এবং A এর প্রামান্য অবস্থান সাপেক্ষে U_B, B বিন্দুর স্থিতিশক্তি।

অনুরূপভাবে সমীকরণ 3.15 থেকে আমরা জানি

$$W_{AB} = -mgL$$

অর্থাৎ একটি কণাকে B থেকে A তে নিয়ে যেতে কৃতকার্যর পরিমাণ mgL। এখানে A কে প্রামান্য অবস্থান ধরলে B বিন্দুতে কণার স্থিতিশক্তি mgL। সুতরাং স্থিতিশক্তি সবসময়েই কোন প্রামান্য অবস্থান বা বিন্যাস এর সাপেক্ষে নির্ধারিত হয় কখনও মাপন চরম (absolute) নয়। সংরক্ষী বল ও স্থিতিশক্তির মধ্যে সম্পর্ক বের করতে হলে সমীকরণ 3.22 অনুসারে স্থিতিশক্তির অত্যনু (infinitesimal) পরিবর্তন

$$dU = -\vec{F} \cdot \vec{dl} \tag{3.24}$$

$$dU = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

$$F_x = -\frac{\partial u}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial u}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial u}{\partial z} \tag{3.25}$$

দেখা যাচ্ছে সংরক্ষীবল স্থিতিশক্তির অবস্থান এর সাপেক্ষে ঋণাত্মক পরিবর্তনের হার এর সঙ্গে সমান।

স্টোক্‌সের সূত্র থেকে জানা আছে বদ্ধপথে কোন ভেক্টরের পথ সমাকল এবং ঐ পথ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রে S ভেদ করে ঐ ভেক্টরের Curl - এর যে ফ্লাক্স্ (flux) যায় তারা সমান। অতএব সমীকরণ 3.19 কে স্টোকস এর সূত্র এর সাহায্যে লেখা যায় —

$$\oint_{C_0} \vec{F}.\vec{dl} = \iint_s \text{Curl}\, \vec{F}.d\vec{s} = 0 \tag{3.26}$$

বদ্ধপথ C_0 যেভাবে ইচ্ছা নেওয়া যায়। এর অর্থ, S আমরা ইচ্ছামত নিতে পারি। এমন অবস্থায় সমাকলের মান যদৃচ্ছ হতে পারে, অথচ 3.26 অনুসারে সমাকলের মান শূন্য হবে। সমাকল্যের মান সর্বত্র

শূন্য হলে অর্থাৎ Curl $\vec{F} = 0$ হলেই তা সম্ভব। অতএব সংরক্ষী বলের ক্ষেত্রের সর্বত্র

$$\text{Curl}\,\vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \text{ হবে।} \tag{3.27}$$

অতএব $\vec{F}$ কে আমরা একটি স্কেলারের গ্রেডিয়েন্ট বলে ধরতে পারি। সাধারণত লেখা হয়

$$\vec{F} = -\text{grad} \quad U \equiv -\vec{\nabla}U \tag{3.28}$$

আমাদের পরিচিত গতীয় কোন রাশির সঙ্গে - U কে সমার্থক করার উদ্দেশ্যে এই বিয়োগচিহ্নটি রাখা হয়। এখানে বলা যেতে পারে 3.17, 3.27 বা 3.28 সমীকরণ তিনটির যে কোনটিকে সংরক্ষী বলের সংজ্ঞা হিসাবে নেওয়া যায় এবং তাদের যে কোন একটি থেকে অন্য দুটি পাওয়া যায়। কিন্তু যেহেতু U স্কেলার রাশি সংরক্ষী ক্ষেত্রের বর্ণনা $\vec{F}$ এর তুলনায় U এর সাহায্যে অনেক সহজভাবে করা যায়।

3.4.3 শক্তির সংরক্ষণ সূত্র

সমীকরণ 3.22 থেকে আমরা লিখতে পারি,

$W = -(U_B - U_A)$ যেখানে U হলো কণার স্থিতিশক্তি

আবার আমরা জানি বল কর্তৃক কৃতকার্য কণার গতিশক্তির বৃদ্ধি হিসাবে প্রকাশ করা যায় —

$$W = (T_B - T_A) = \Delta T$$

যেখানে $T = \frac{1}{2} m\nu^2$ কণার গতিশক্তি।

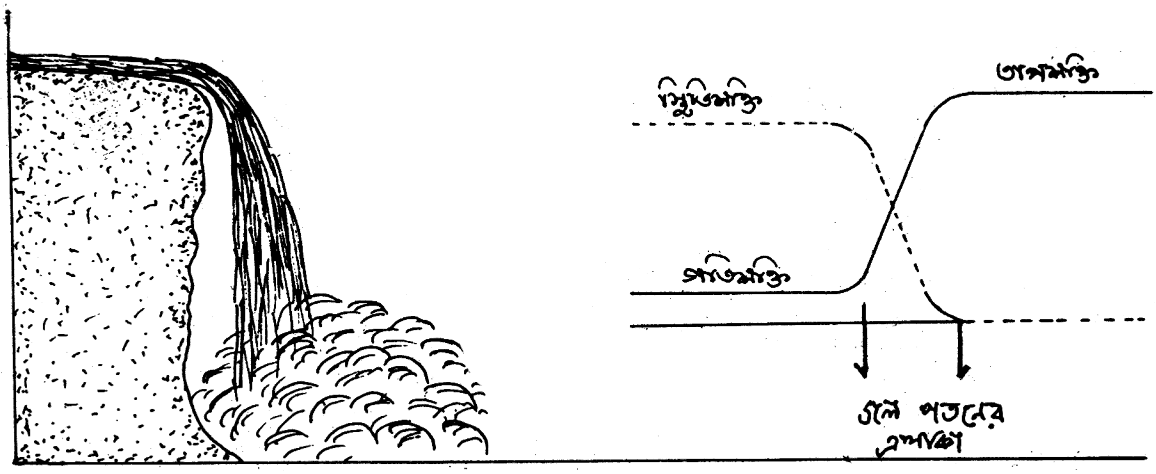
$$\text{অতএব } U_A - U_B = T_B - T_A \quad \text{বা,} \qquad T_A + U_A = T_B + U_B \tag{3.30}$$

এখানে A ও B বিন্দুগুলি স্বৈচ্ছিক (arbitrary), সমীকরণ (3.30) থেকে দেখা যাচ্ছে সংরক্ষী বলক্ষেত্রে কোন কণার গতিপথে গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির যোগফল স্থির থাকে। গতিবিজ্ঞানে শক্তির সংরক্ষণ বলতে এই তথ্য বুঝায়। সংরক্ষী বল এর ক্রিয়াধীন গতিতে মোটশক্তি

$E = T + U$ গতির একটি অচর রাশি।

যদি কোন ক্ষেত্রে সংরক্ষী বল ছাড়াও বস্তুর উপর অসংরক্ষী বল ক্রিয়া করে, উদাহরণ স্বরূপ, ঘর্ষণবল ক্রিয়া করে, সেক্ষেত্রে ঘর্ষণ গতির বিরুদ্ধে কাজ করে। এর ফলে যান্ত্রিক শক্তির (E) অপচয় অবশ্যম্ভাবী। এই অপচিত যান্ত্রিক শক্তি তাপশক্তিতে (কোন ক্ষেত্রে কিছুটা শব্দশক্তিতে) রূপান্তরিত হয়। সেক্ষেত্রে মোট যান্ত্রিক শক্তি আর ধ্রুব রাশি থাকে না।

গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির বিনিময়ের উদাহরণস্বরূপ আমরা জলপ্রপাতের ক্ষেত্রে শক্তির রূপান্তর পর্যালোচনা করব। 3.7 চিত্রে জলপ্রপাতের ক্ষেত্রে স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তির রূপান্তর চিত্র দিয়ে ব্যাখ্যা করা হল। জলপ্রপাতের উপরিভাগে জলের অভিকর্ষজ স্থিতিশক্তি, জল যখন নীচে পড়ে তখন স্থিতিশক্তি গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হয়। M ভরের জল h উচ্চতা থেকে নীচে পড়লে Mgh পরিমাণ স্থিতিশক্তির হ্রাস ঘটে



চিত্র 3.7

এবং গতিশক্তির বৃদ্ধির পরিমাণ

$$\frac{1}{2}M\left(v^2 - v_0^2\right) = Mgh \tag{3.31}$$

জলের প্রাথমিক গতিবেগ v_0 এবং অন্তিম গতিবেগ v। এই পড়ন্ত জলের গতিশক্তিকে 'পাওয়ার হাউসে' টারবাইন এর ঘূর্ণন গতিশক্তিতে (Rotational Kinetic Energy) রূপান্তরিত করা যায়, অন্যথায় এই পড়ন্ত জলের গতিশক্তির কিছুটা জলপ্রপাতের নীচে তাপশক্তিতে রূপান্তরিত হবে।

3.4.4 শক্তির পরিলেখ (Energy Diagram)

3.8 চিত্রে OPQTRS একটি গাড়ীর গতিপথ দেখানো হয়েছে, দৃশ্যতই গতিপথ অনুভূমিক নয়। আলোচ্য বিষয় P বিন্দুতে গাড়ীর ন্যূনতম গতিবেগ কি হলে গাড়ীটি ঐ পথ দিয়ে R বিন্দুতে যেতে পারবে? ঘর্ষণজাত বল উপেক্ষনীয় হলে শক্তির সংরক্ষণ সূত্রের সাহায্যে সমাধান বার করা সম্ভব। গতিপথের সর্বনিম্ন বিন্দুকে স্থিতিশক্তির প্রামান্য অবস্থান ধরলে, P বিন্দুতে মোটশক্তির পরিমাণ E হবে

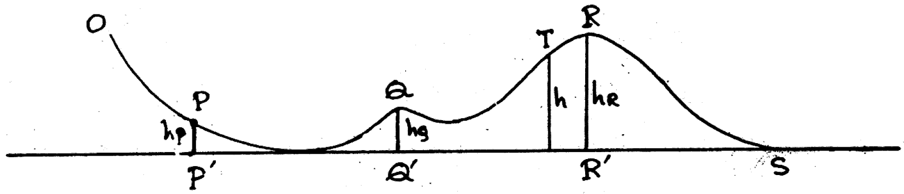
$$E = \frac{1}{2}m\nu_P^2 + mgh_p$$

P বিন্দু থেকে গাড়ীটিকে S বিন্দুতে পৌছিতে হলে সর্বোচ্চ বিন্দু R অতিক্রম করতে হবে যেখানে স্থিতিশক্তির পরিমাণ mgh_R সংরক্ষণ সূত্র অনুসারে আমরা লিখতে পারি — যদি R বিন্দুতে গতিবেগ ν_R হয়

$$\frac{1}{2}m\nu_R^2 + mgh_R = \frac{1}{2}m\upsilon_P^2 + mgh_P = E \quad \text{(ধ্রুবক)} \tag{3.32a}$$

যেহেতু $\frac{1}{2}m\nu_R^2$ কখনই ঋণাত্মক হতে পারে না, উপরের সমীকরণ থেকে পাই,

$$E - mgh_R \geq 0 \tag{3.32b}$$



চিত্র 3.8

অর্থাৎ R- এ পৌঁছাতে হলে ওর মোট শক্তি অবশ্যই R এ স্থিতিশক্তির চেয়ে বেশী হতে হবে। একবার R পর্য্যন্ত যেতে পারলে S বিন্দুতে পৌঁছাতে কোন অসুবিধা হবে না। স্থিতিশক্তির উচ্চতম বিন্দু R অতিক্রম করার জন্য P তে ন্যূনতম প্রয়োজনীয় বেগ ν_p হলে (3.32a) এবং (3.32b) থেকে আমরা পাই.

$$\frac{1}{2}m\nu_p^2 = mgh_R - mgh_p \tag{3.33}$$

এ পর্য্যন্ত আমরা স্থিতিশক্তির উৎস অভিকর্ষ বলে ধরে নিয়েছি। সাধারণভাবে যান্ত্রিক শক্তির সংরক্ষণ সূত্র থেকে লেখা যায়,

$$\frac{1}{2}m\nu^2 + U = E$$

যেখানে E মোট যান্ত্রিক শক্তি এবং ν স্থিতিশক্তি, অর্থাৎ

$$\nu = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)} \tag{3.34}$$

সমীকরণ 3.34 থেকে দেখা যাচ্ছে যদি U>E হয়, ν অবাস্তব হবে সেক্ষেত্রে ঐ অংশে গতি সম্ভব নয়।

3.5 স্থিতিস্থাপক ও অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ

পদার্থবিদ্যায় সংঘর্ষ বলতে কেবলমাত্র দুটি বস্তু একেবারে পরস্পরের সংস্পর্শে এসেছে তা বোঝায় না। দুটি আন্তঃক্রিয়াশীল বস্তু প্রাথমিকভাবে অসীম দূরত্ব থেকে কিছুটা কাছাকাছি এসে আবার অসীম দূরত্বে চলে গেল, এ ব্যাপারটিও পদার্থবিজ্ঞানের ভাষায় সংঘর্ষ। এই ব্যাপারটিকে অনেক সময় বিচ্ছুরণ (Scattering) আখ্যাও দেওয়া হয়ে থাকে।

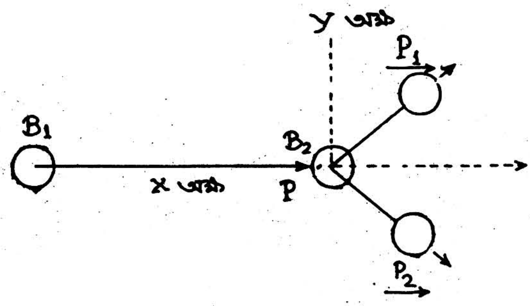
সংঘর্ষে দুরকম ঘটনা ঘটতে পারে — বস্তুদুটির অসীম দূরত্বে প্রাথমিক ও প্রান্তিক দুই অবস্থার গতিশক্তির মান অপরিবর্তিত রইল। একে আমরা স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলব। এক্ষেত্রে মধ্যবর্তী অবস্থায় কিন্তু গতিশক্তির পরিবর্তন ঘটে, তবে যান্ত্রিক শক্তি সর্ব অবস্থায়ই এক থাকে। আবার যদি সংঘর্ষের ফলে কোন আভ্যন্তরিণ পরিবর্তন হয় — যেমন একটি বস্তুর ভেতরে কোন একটি ইলেকট্রন তার কক্ষ পরিবর্তন করল, তাহলে প্রাথমিক ও প্রান্তিক গতিশক্তি এক থাকবে না। এরূপক্ষেত্রে আমরা সংঘর্ষকে অস্থিতিস্থাপক বলে থাকি। যান্ত্রিক শক্তি এক্ষেত্রে অযান্ত্রিকশক্তিতে রূপান্তরিত হয়েছে। এখানে তৃতীয় একটি অবস্থার কল্পনা করা হয়েছে যেখানে সংঘর্ষকারী বস্তু দুটি কেবলমাত্র পরস্পরের সঙ্গে আন্তঃক্রিয়াশীল নয়, একটি বাইরের বলক্ষেত্রও আছে। ফলে প্রাথমিক ও প্রান্তিক অবস্থার মধ্যে কিছু স্থিতিশক্তির পরিবর্তন হয়েছে — কিন্তু কোন অযান্ত্রিক শক্তির উদ্ভব হয়নি। এরূপ অবস্থা সাধারণভাবে মূল পদার্থবিদ্যায় প্রায় দেখাই যায় না — সেখানে আণবিক বা পারমাণবিক সংঘর্ষই বেশী গুরুত্ব পেয়ে থাকে। সংঘর্ষের আরও দুটি শ্রেণীবিভাগ অনেক সময় করা হয় — পূর্ণস্থিতিস্থাপক ও পূর্ণঅস্থিতিস্থাপক। পূর্ণস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে সংঘর্ষকারী বস্তু দুটির আপেক্ষিক বেগ সংঘর্ষের আগে ও পরে একই থাকে —

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)_i = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)_f \tag{3.35}$$

অন্যদিকে পূর্ণ অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে সংঘর্ষকারী বস্তু দুটি সংঘর্ষের পরে পরস্পরের সঙ্গে মিশে যায়, অর্থাৎ সংঘর্ষের পরে আপেক্ষিক গতি শূন্য হয় —

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)_f = 0 \tag{3.36}$$

দুটি বস্তুর সংঘর্ষের আলোচনার জন্য ধরুন দুটি বিভিন্ন ভরের বল পরস্পরকে আঘাত করে। ধরা যাক দ্বিতীয় বলটি সংঘর্ষের পূর্বে স্থির অবস্থায় ছিল। প্রথম বল B_1 নির্দিষ্ট গতিতে এসে দ্বিতীয় বল B_2 এর সঙ্গে সংঘর্ষ করল এবং সংঘর্ষের পর তাদের গতির অভিমুখে চিত্র 3.9 এ দেখানো হয়েছে।



চিত্র 3.9

ধরুন আঘাতের পূর্বে B_1 বলের ভরবেগ $\vec{P}$ এবং সংঘর্ষের পর প্রথম ও দ্বিতীয় বলের ভরবেগ $\vec{P}_1$ ও $\vec{P}_2$। বাইরের কোন বল (Force) বলদুটির উপর ক্রিয়াশীল না হলে ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র থেকে পাই।

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \tag{3.37}$$

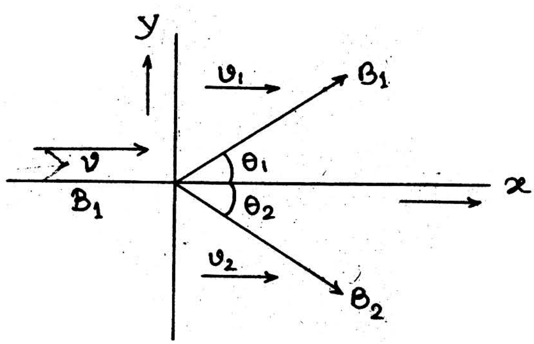
স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে

$$T = T_1 + T_2 \tag{3.38}$$

যেখানে $T \to B_1$ বলের সংঘর্ষের আগে গতিশক্তি T_1, $T_2 \to B_1$ ও B_2 বলের সংঘর্ষের পর গতিশক্তি

স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ ঃ

এখন স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের শর্ত 3.37 ও 3.38 প্রয়োগ করে দ্বিমাত্রিক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে সংঘর্ষাধীন বলগুলির গতির বিশ্লেষণ করব। B_1 বলের প্রাথমিক গতির অভিমুখ x অক্ষের দিকে এবং অভিলম্ব y অক্ষের দিকে উপাংশ গুলি ব্যবহার করে সমীকরণ 3.37 থেকে আমরা পাই,



চিত্র 3.10

$$m_1\nu = m_1\nu_1\cos\theta_1 + m_2\nu_2\cos\theta_2 \tag{3.39}$$

এবং $$0 = m_1\nu_1\sin\theta_1 - m_2\nu_2\sin\theta_2 \tag{3.40}$$

B_1 ও B_2 বলের ভর যথাক্রমে m_1 এবং m_2

সমীকরণ 3.38 এর সাহায্যে $\frac{1}{2}m_1\nu^2 = \frac{1}{2}m_1\nu_1^2 + \frac{1}{2}m_2\nu_2^2$

বা $$m_1\nu^2 = m_1\nu_1^2 + m_2\nu_2^2 \tag{3.41}$$

সমীকরণ 3.39 ও 3.40 বর্গ করে ও যোগ করে পাই

$$(m_1\nu_1)^2 = (m_2\nu_2\sin\theta_2)^2 + (m_1\nu - m_2\nu_2\cos\theta_2)^2$$

$$m_1^2\nu_1^2 = m_2^2\nu_2^2 + m_1^2\nu^2 - 2m_1m_2\nu\,\nu_2\cos\theta_2$$

সমীকরণ 3.41 ব্যবহার করে উপরোক্ত সমীকরণ লেখা যায় —

$$0 = m_2^2\nu_2^2 + m_1m_2\nu_2^2 - 2m_1m_2\nu\,\nu_2\cos\theta_2$$

এই ν_2 দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ $\nu_2 = 0$

যেটি গুরুত্বহীন, অপর বীজ

$$\nu_2 = \frac{2m_1m_2\nu\cos\theta_2}{m_2^2 + m_1m_2} = \frac{2\alpha\nu\cos\theta_2}{1+\alpha} \tag{3.42}$$

যেখানে $\alpha = \frac{m_1}{m_2}$

আবার সমীকরণ 3.40 কে 3.39 দিয়ে ভাগ করে

$$\frac{m_1\nu_1\sin\theta_1}{m_1\nu_1\cos\theta_1} = \frac{m_2\nu_2\sin\theta_2}{m_1\nu - m_2\nu_2\cos\theta_2} \tag{3.43}$$

সমীকরণ 3.43 এর ডানপক্ষের লব এবং হরকে $2\cos\theta_2$ দিয়ে গুণ করে পাই,

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2\nu_2\sin 2\theta_2}{(m_1+m_2)\nu_2 - 2m_2\nu_2\cos^2\theta_2} \tag{3.44}$$

সমীকরণ 3.42 এর সাহায্যে

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2\nu_2 \sin 2\theta_2}{(m_1+m_2)\nu_2 - 2m_2\nu_2\cos^2\theta_2} = \frac{\sin 2\theta_2}{\alpha - \cos 2\theta_2} \tag{3.45}$$

3.45 থেকে দেখা যায় θ_1 এবং θ_2 এর মধ্যে সম্পর্ক α এর উপরে নির্ভরশীল। আমরা যখন $\alpha >> 1$ অর্থাৎ $m_1 >> m_2$ প্রান্তবর্তী বিষয়টি এখন আলোচনা করব।

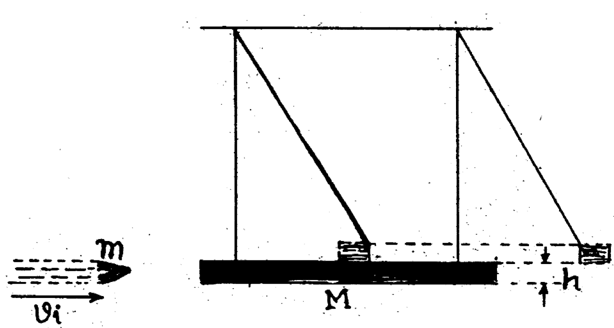
যেহেতু $\sin 2\theta_2$ এবং $\cos 2\theta_2$ এর মান -1 এবং +1 এর মধ্যে থাকে, এক্ষেত্রে $\tan\theta_1 \to 0$ অথবা $\theta_1 \to 0$ এবং যেহেতু $\theta_1 \to 0$ আমরা 3.40 থেকে পাই $\theta_2 \to 0$। সুতরাং অভিক্ষিপ্ত বস্তু (Projectile) নিশানার (Target) এর চেয়ে অনেক বেশী ভারী $(m_1 >> m_2)$ হলে উভয় বলই সংঘর্ষের দিকে গতিশীল হবে।

যদি $\theta_1 = \theta_2 = 0$ হয়, তাহলে $m_1(\nu - \nu_1) = m_2\nu_2$, এবার (3.41) এর সাহায্যে ν_2 কে অপনয়ন করে পাওয়া যায়। $\nu = \nu_1$ অথবা $\nu_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\nu$ (3.46)

$\nu = \nu_1$ হলে $\nu_2 = 0$, অন্যথায় $m_1 < m_2$ হলে স্থির বলের সঙ্গে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ফলে বিপরীত দিকে গতিশীল হবে (ν_1 ঋণাত্মক)। বল দুটির ভর সমান হলে সমীকরণ (3.46) অনুযায়ী $\nu_1 = 0$ সুতরাং $\nu_2 = \nu_1$ ফলে সংঘাতকারী বলটি থেমে যায় এবং দ্বিতীয় বলটি প্রথম বলটির বেগে গতি শুরু করে। মনে হয় বলদুটি যেন পরস্পর বেগ বিনিময় করল।

পূর্ণ অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ ঃ— ক্ষেপন (নিক্ষিপ্ত) দোলক (Ballistic pendulum)

এই দোলক সাধারণতঃ বুলেটের বেগ নির্ণয়ের জন্য ব্যবহার করা হয়। দোলকাটি একটি কাঠের বড় আয়তাকার বস্তু তার ভর M এবং দুটি সুতো দিয়ে ঝোলানো থাকে। (চিত্র 3.11)।



চিত্র 3.11

একটি m ভরের বুলেট v_i গতিবেগে অনুভূমিক ভাবে এসে দোলকের আয়তাকার কাঠে আঘাত করে এবং ভিতরে ঢুকে আটকে যায়।

দোলকের বিক্ষেপের সময়ের তুলনায় যদি সংঘাতের সময় খুব কম হয় তাহলে সংঘাতের সময় সুতাদুটি উলম্বই থাকিবে। সেক্ষেত্রে বাইরের কোন অনুভূমিক বল বস্তুসংহতির (বুলেট + দোলক) উপর সংঘাতকালে ক্রিয়া করে না এবং ভরবেগের অনুভূমিক উপাংশ সংরক্ষিত থাকবে। সংঘাতের পর বস্তু সংহতির গতিবেগ v_f, বুলেটের প্রাথমিক বেগ v_i এর তুলনায় অনেক কম হয়। বুলেটের প্রাথমিক ভরবেগ mv_i এবং বস্তুসংহতির সংঘাতের পর ভরবেগ $(m+M)v_f$, সুতরাং

$$mv_i = (m+M)v_f$$

সংঘাতের পর বস্তু সংহতির (দোলক + বুলেট) সর্বোচ্চ উচ্চতা - বিক্ষেপ y ধরলে, সংঘাত এর পরে অবশিষ্ট গতিশক্তি অভিকর্ষজ স্থিতিশক্তিতে রূপান্তরিত হবে। এই পর্বের গতিতে যান্ত্রিক শক্তি সংরক্ষণ সূত্র অনুসারে

$$\frac{1}{2}(m+M)v_f^2 = (m+M)gy \tag{3.48}$$

সমীকরণ 3.47 ও 3.48 এর সাহায্যে

$$v_i = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gy} \tag{3.49}$$

সুতরাং সমীকরণ 3.49 থেকে বুলেটের প্রাথমিক বেগ ক্রিয়া নির্ণয় করা যায়।

3.6 ক্ষমতা

একক সময়ে কৃতকার্য বা কার্য সম্পাদনের হারকে ক্ষমতা বলে।

যদি Δt সময়ে Δw পরিমাণ কার্য সম্পাদন করা হয় তাহলে গড় ক্ষমতা $\overline{P}$

$$\overline{P} = \frac{\Delta w}{\Delta t} \tag{3.50}$$

তাৎক্ষণিক ক্ষমতা $P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{dw}{dt}$ (3.51)

ক্ষমতার একক হল জুল সেকেন্ড $^{-1}$ (Js^{-1}) বা ওয়াট। ক্ষমতার অন্য একক হর্সপাওয়ার অনেক ক্ষেত্রে ব্যবহার করা হয়।

1 হর্সপাওয়ার =746 ওয়াট

1 হর্সপাওয়ার = 550 ফুট - পাউন্ড সেকেন্ড $^{-1}$

ফুট-পাউন্ড সেকেন্ড $^{-1}$ ক্ষমতার একক এফ পি এস পদ্ধতিতে ক্ষমতা ও কার্যকরী বল এর সম্পর্ক বের করার জন্য কার্যের সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি —

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{l}$$

সুতরাং $P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{F} . \Delta\vec{l}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{l}}{\Delta t}$

বা $P = \vec{F} \cdot \dfrac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}$ (3.52)

এখানে আমরা ক্ষমতার রাশি (expression) স্কেলার গুণণ-এর আকারে পাচ্ছি।

3.7 সারাংশ

- একটি কণাকে A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে নিয়ে যেতে $\vec{F}$ বল মোট যে পরিমাণ কার্য করে তার মান —

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$$

- একটি কণার গতিবেগের জন্য কার্য করার সামর্থ্যকে তার গতিশক্তি বলা হয় এবং এর মান $\frac{1}{2} m\nu^2$ ।
- যদি কোন বল কর্তৃক কৃতকার্য কেবলমাত্র সরণের প্রান্তিক দুটি বিন্দুর উপর নির্ভর করে — অর্থাৎ ঐ দুটি বিন্দু সংযোজক বিভিন্ন রেখার জন্য কার্যের মান বিভিন্ন না হয়, তাহলে সেরূপ বলকে সংরক্ষী বল বলা হয়।
- সংরক্ষী বল একটি স্কেলারের গ্রেডিয়েন্ট এবং ঐ স্কেলারটি স্থিতিশক্তির পরিমান নির্ণয় করে। তবে যেহেতু স্কেলারটির সঙ্গে একটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক যোগ দেওয়া যায়, দুটি অবস্থানের স্থিতিশক্তির প্রভেদ কেবলমাত্র নির্ণয় করা চলে।
- সংরক্ষী বলের ক্ষেত্রে মোট যান্ত্রিক শক্তি সংরক্ষিত থাকে।
- স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে যান্ত্রিকশক্তি সংরক্ষিত থাকে, কিন্তু অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে যান্ত্রিকশক্তি সংরক্ষিত থাকে না।
- ক্ষমতার সংজ্ঞা $P = \dfrac{dw}{dt}$ । তাৎক্ষণিক বল $\vec{F}$ এর জন্য ক্ষমতা $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, যেখানে $\vec{v}$ তাৎক্ষণিক প্রয়োগ বিন্দুর গতিবেগ।

3.8 সর্বশেষ প্রশ্নবালী

1. 5kg ভরের একটি মুক্ত বস্তুর উপর 0.5N বল 1 মিনিট ধরে ক্রিয়া করলে বল কর্তৃক কৃতকার্য কত? (বস্তুটির, প্রাথমিক বেগ শূন্য)

2. এক ব্যক্তি অনুভূমিক তলের উপর দিয়ে একটি 10kg ভরের গ্যেট দড়ির সাহায্যে সমবেগে 30m টেনে নিয়ে যায়। দড়ির টান অনুভূমিক তলের সঙ্গে 45° কোন সৃষ্টি করলে এবং গতীয় ঘর্ষণ গুণাঙ্ক 0.20 হলে ব্যক্তিটি কি পরিমাণ কাজ করবে।

3. BC অনুভূমিক তলের সঙ্গে 1.3m দৈর্ঘ্যের অমসৃণ তল AB, $\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$ নতিকোণ সৃষ্টি করে। 2kg ভরের একটি ঘনক নত তলের উচ্চতম বিন্দু A হতে ছেড়ে দেওয়া হল (i) তলের নিম্নতম বিন্দু Bতে গতিশক্তি কত হবে $(\mu = 0.25)$ (ii) যদি ঘনকটি B নিম্নতম বিন্দুতে রেখে তার ভার এর সমান সুষম বল নততলের সমান্তরালভাবে উপরের দিকে প্রয়োগ করা হয় তাহলে A বিন্দুতে ঘনকের গতিশক্তি কত?

4. 1m দৈর্ঘের সরল দোলকের বিন্ডটিকে একপাশে টেনে আনা হল যতক্ষণ না দড়িটি অনুভূমিক হয়। এরপর পিন্ডটি ছেড়ে দেওয়া হল। পিন্ডটি যখন নিম্নতম অবস্থানে তখন তার বেগ কত?

5. একটি 6cm ব্যাসার্ধের ইস্পাতের বল অনুভূমিক মসৃন তলের উপর স্থির অবস্থায় আছে। অপর একটি 3cm ব্যাসার্ধের বল $450\text{cm}\,\text{sec}^{-1}$ গতিবেগে এসে মুখোমুখি সংঘর্ষ করল। সংঘর্ষের পর দুটি গোলকের গতিবেগ কি হবে? (সংঘর্ষ আদর্শ স্থিতিস্থাপক)

6. একটি 20gm ভরের বুলেট অনুভূমিক সরলরেখাতে $10\text{cm}\,\text{sec}^{-1}$ বেগে গিয়ে কাঠের ব্লকে (ভর 1kg) আঘাত করে ভিতরে প্রবেশ করে। কাঠের ব্লকটি একটি 1m দৈর্ঘ্যের সুতা দিয়ে ঝুলানো আছে। উলম্ব সুতাটির কৌণিক বিচ্যুতি কত হবে?

7. একজন সাইকেল আরোহী ও তার সাইকেলের মোট ভর 80kg। সাইকেল আরোহী একটি পাহাড় যার নতি $\sin^{-1}\left(\frac{1}{30}\right)$ থেকে প্যাডেল না করে (free wheel down) সুষম বেগে নামতে পারে। যদি নীচে থেকে সে উপরে $9\text{km}\,\text{hour}^{-1}$ বেগে উঠতে চায়, তাকে কি ক্ষমতা প্রয়োগ করতে হবে (গতির বাধা পূর্বের মতই থাকবে)

8. একটি পাম্প 8ft উচ্চতায় 1500 গ্যালন জল প্রতি মিনিটে তুলতে পারে এবং জল একটি নলের ছোট ছিদ্রের ভিতর দিয়ে 48ft sec^{-1} বেগে বেরিয়ে আসে। পাম্পটির হর্সপাওয়ার কত? (ধরুন 1 গ্যালন জলের ওজন = 10 পাউন্ড)।

3.9 উত্তরমালা

1. প্রাথমিক বেগ u = 0

$$\text{ত্বরণ} = \frac{\text{বল}}{\text{ভর}}, a = \frac{0 \cdot 5}{5} = 0 \cdot 1 \text{ms}^{-2}$$

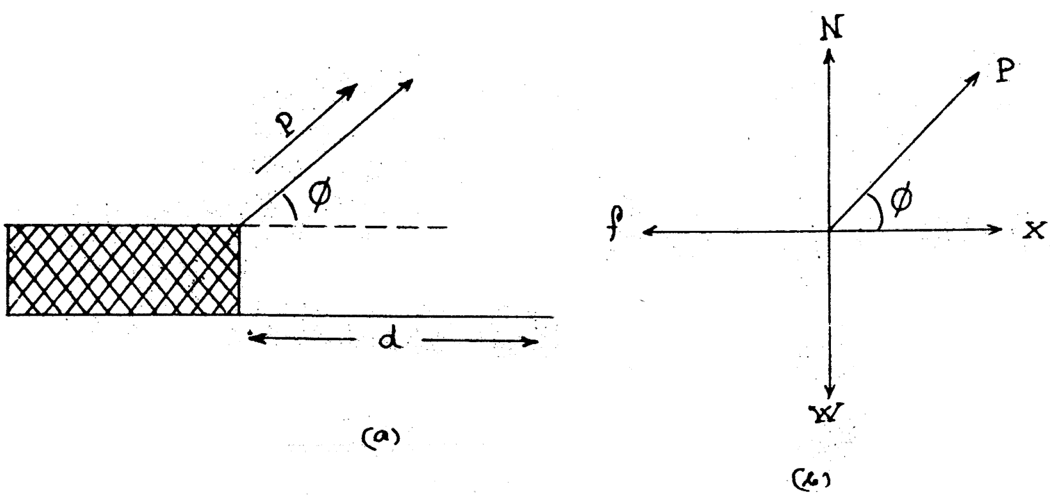
বলের ক্রিয়ার সময় 1 মিনিট = 60 সেকেন্ড

$$\text{সুতরাং সরণ } S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$= \frac{1}{2}(0.1)(60)^2 = 180\text{m}$$

$$\text{কৃতকার্য} \quad w = F.S = (0.5\text{N})(180\text{m}) = 90\text{Joule}$$

2.



চিত্র 3.12

চিত্রে গ্যেটের উপর কার্যকরী বলগুলি দেখানো হয়েছে, $\vec{p}$ ব্যক্তির টান (বল), w গ্যেটের ভার, f ঘর্ষণ বল এবং N গ্যেটের উপর প্রতিক্রিয়া, ব্যক্তিটি যে পরিমাণ কাজ করে,

$$w = \vec{P} \cdot \vec{d} = Pd\cos\phi \qquad (1)$$

গ্যেটের কোন ত্বরণ নাই, সুতরাং নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে

$$P\cos\phi - f = 0 \qquad (2)$$

$$P\sin\phi + N - W = 0 \qquad (3)$$

ঘর্ষণসূত্র থেকে আমরা জানি,

$$f = \mu_k N \qquad (4)$$

এখন (2), (3), (4) সমীকরণ ব্যবহার করে পাই

$$P = \frac{\mu_k N}{\cos\phi + \mu_k \sin\phi}$$

$$\mu_k = 0.20,\ w = 10\text{kgwt},\ \phi = 45^\circ$$

$$P = \frac{(0.20)(10\text{kg}) \times \left(9.80\,\text{m}\sec^{-2}\right)}{0.707 + 0.141}$$

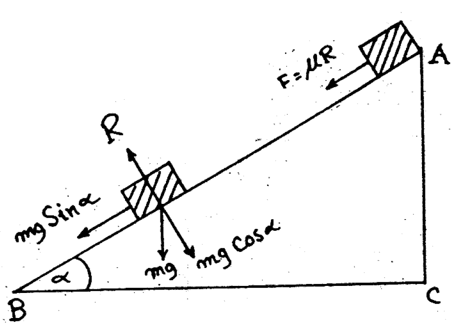
$$= 23.52\ \text{N}$$

যেহেতু d = 30 metre

কৃতকার্য $= Pd\cos\phi = (23.52\text{N})(30\text{m})(0.707)$

$$= 499.8\text{J}$$

3.



চিত্র 3.13

Case (i)

AB অমসৃন নততল, নতিকোণ $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$, $\tan\alpha = \frac{5}{12}$

$\therefore \sin\alpha = \frac{5}{13}$ এবং $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

যখন ঘনকটি নীচে নামে ক্রিয়াশীল বলগুলি,

i) $mg\sin\alpha$ নততলের সমান্তরাল নীচের দিকে

ii) উল্লম্ব প্রতিক্রিয়া $R = mg\cos\alpha$

iii) ঘর্ষনবল $F = \mu mg\cos\alpha$

$mg\sin\alpha$ গতির অভিমুখে এবং ঘর্ষণবল F গতির বিরুদ্ধে ধরে গতিশক্তির সমীকরণ —

$$\frac{1}{2}mu^2 + (mg\sin\alpha)AB - (\mu mg\cos\alpha)AB = \frac{1}{2}mv^2$$

যেহেতু u = 0

অন্তিম গতিশক্তি $\frac{1}{2}mv^2 = mg\sin\alpha(AB) - \mu mg\cos\alpha(AB)$

$$= mg[\sin\alpha - \mu\cos\alpha]AB$$

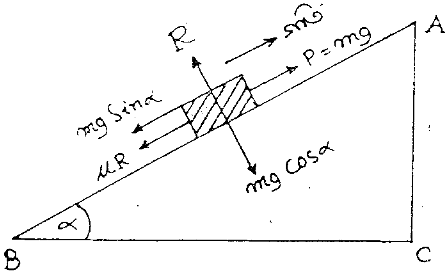
$$= 2\times9\cdot8\times1\cdot3\left(\frac{5}{13} - \cdot25\times\frac{12}{13}\right)$$

$$= 19\cdot6\times1\cdot3\times\frac{2}{13}$$

$$= 3\cdot92$$

B বিন্দুতে ঘনকের গতিশক্তি $= 3\cdot92\,J$

Case (ii)



চিত্র 3.14

ঘনকটিকে p = mg বলে নততলের উপরের দিকে তোলা হলে, গতির বিরুদ্ধে বলগুলি হল $mg\sin\alpha$ এবং $\mu R = \mu mg\cos\alpha$ ।

সুতরাং গতিশক্তির সমীকরণ

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu^2 + mg \times 1\cdot 3 - (mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha)1\cdot 3$$

যেহেতু u = 0

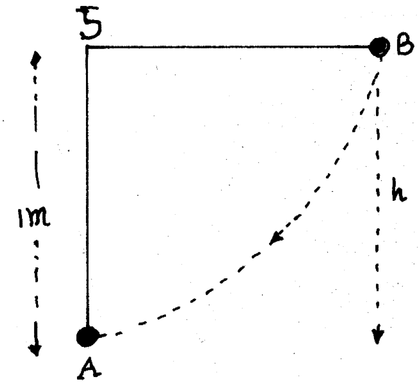
$$\frac{1}{2}mv^2 = 0 + 2 \times 9\cdot 8 \times 1\cdot 3(1 - \sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$= 19\cdot 6 \times 1\cdot 3\left(1 - \frac{5}{13} - \frac{\cdot 25 \times 12}{13}\right)$$

$$= 19\cdot 6 \times 1\cdot 3 \times \left(1 - \frac{8}{13}\right)$$

$$= 9\cdot 8$$

A বিন্দুতে ঘনকের গতিশক্তি = 9·8J



চিত্র 3.15

যখন পিন্ডটি A থেকে B তে তোলা হল তখন আসলে দোলকের দৈর্ঘ্যের সমান উচ্চতায় তোলা হয়েছে অর্থাৎ

$$h = 1m$$

Aকে প্রামান্য অবস্থান ধরে —

B বিন্দুতে স্থিতিশক্তি $= mgh = m \times 9 \cdot 8 \times 1$

$$= 9{\cdot}8 mJ$$

পিন্ডের ভর m ধরা হয়েছে। B বিন্দুতে পিন্ডটি স্থির থাকে, সুতরাং গতিশক্তি শূন্য। B বিন্দুতে মোটশক্তি = 9·8 mJ যখন পিন্ডটি A বিন্দুতে এল তখন এর স্থিতিশক্তি শূন্য কিন্তু গতিশক্তি আছে।

A বিন্দুতে গতিবেগ যদি v হয়, সংরক্ষণ সূত্র অনুসারে, $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$

$$v^2 = 2gh$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9 \cdot 8 \times 1} = 4 \cdot 427 ms^{-1}$$

ধরুন স্থির বলের ভর $= K \times 6^3$

গতিশীল বলের ভর $= K \times 3^3$ যেখানে K একটি অচর রাশি

সংঘর্ষের আগে

$\overrightarrow{u_1}$ m_1 $\qquad$ $\overrightarrow{u_2}$ m_2 এখানে $u_2 = 0$

সংঘর্ষের পর

$\overrightarrow{v_1}$ m_1 $\qquad$ $\overrightarrow{v_2}$ m_2

ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র থেকে

$$K \times 3^3 \times 450 = K \times 3^3 \times v_1 + K \times 6^3 \times v_2 \qquad (1)$$

আবার স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1$$

যেহেতু $u = 0$ সুতরাং $u_1 = v_2 - v_1$

বা $450 = v_2 - v_1 \qquad (2)$

সমীকরণ (1) থেকে

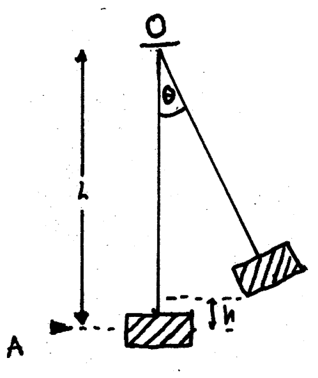
$$v_1 + 8v_2 = 450 \qquad (3)$$

(2) ও (3) এর সাহায্যে

$$v_2 = 100 \text{cm sec}^{-1} \qquad v_1 = -350 \text{cm sec}^{-1}$$

সুতরাং গতিশীল বলটি ধাক্কা খেয়ে ফিরে আসবে এবং স্থির বলটি গতি শুরু করবে।

মনে করুন A একটি বুলেট, B ব্লকটি O বিন্দু হইতে ঝুলানো আছে। সংঘাতের পর সুতাটি θ কোণে বিচ্যুত হয়।



চিত্র 3.15

যখন বুলেট কাঠের মধ্যে ঢুকে স্থির হয় উহাদের সাধারণ গতিবেগ $v\,\mathrm{m\,sec^{-1}}$। ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রানুসারে, যেহেতু $20\mathrm{gm} = \cdot 02\mathrm{kg}$

$$(1+\cdot 02)\nu = \cdot 02 \times 100$$

$$v = \frac{2}{1\cdot 02} = \frac{100}{51}\,\mathrm{m\,sec^{-1}}$$

ব্লকটি আগের অবস্থার থেকে h উচ্চতার উঠেছে সুতরাং

$$v^2 = 2gh$$

আবার $h = \ell(1-\cos\theta)$

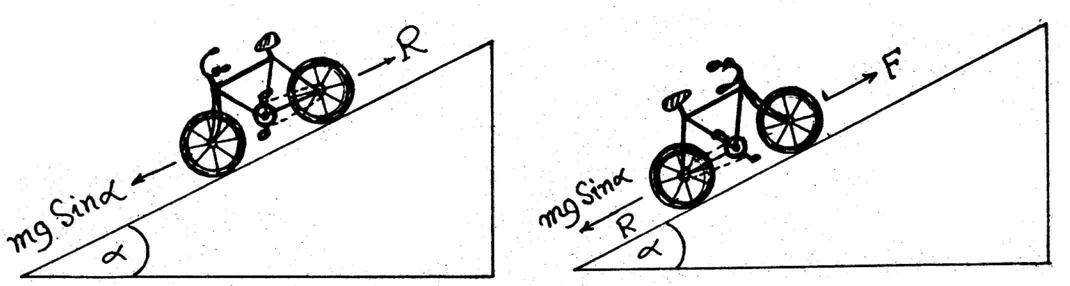
সুতরাং $\nu^2 = 2g\ell(1-\cos\theta) = 2\times 9\cdot 8\times 1(1-\cos\theta)$

$$\left(\frac{100}{51}\right)^2 = 2\times 9\cdot 8\times 1(1-\cos\theta)$$

$$(1-\cos\theta) = \left(\frac{100}{51}\right)^2 \times \frac{1}{2\times 9\cdot 8} = \cdot 1962$$

সুতরাং $\cos\theta = \cdot 8038,\ \theta = 37^\circ$ (প্রায়)।

7.



চিত্র 3.17

ধরুন আরোহী ও সাইকেলের ভর m, যখন আরোহী প্যাডেল না করে নীচে সুষমবেগে নামে তখন কোন অপ্রতিমিত (unbalance) বল থাকে না, সুতরাং

$mg\sin\alpha =$ গতির বিরুদ্ধে ঘর্ষণ বাধা = R

তাহলে $R = (80kg) \times (9 \cdot 8m\sec^{-2}) \times \left(\frac{1}{30}\right) = 26 \cdot 13N$

যখন সাইকেল উপরের দিকে ওঠে গতির বিপক্ষে মোট বাধা

$$F = mg\sin\alpha + R = 26 \cdot 13 + 26 \cdot 13$$

$$= 52.26N$$

আরোহীর বেগ $9km/hour = \frac{5}{2} m\sec^{-1}$ আরোহী কর্তৃক উৎপাদিত ক্ষমতা —

$= FV = 52 \cdot 26 \times \frac{5}{2} = 130 \cdot 65$ ওয়াট

8. প্রতি সেকেন্ডে পাম্প যে পরিমাণ জল তোলে —

$= (1500 \times 10)/60 = 250$ পাউন্ড

250 পাউন্ড জল 8 ফুট উচ্চতায় তুলতে পাম্প যে পরিমাণ কাজ করে —

$250 \times 8 = 2000$ ফুট - পাউন্ড

250 পাউন্ড জল 48 ফুট সেকেন্ডে $^{-1}$ বেগে বের হলে জলের গতিশক্তি $= \frac{1}{2} \times \frac{250 \times 48^2}{32}$ ফুট -পউন্ড

$= 9000$ ফুট - পাউন্ড

সুতরাং পাম্পের ক্ষমতা $= (2000 + 9000)$ ফুট - পাউন্ড সেকেন্ড

$$= \frac{11000}{550} \text{ হর্স পাওয়ার}$$

$$= 20 \text{ হর্স পাওয়ার।}$$

একক 4 ▢ কৌণিক গতি ও অজড়ত্বীয় নির্দেশতন্ত্র

গঠন

4.1 প্রস্তাবনা

কোন গতিপথ বক্র হলে, গতির দিক্ পরিবর্তন ঘটে এবং এই দিক পরিবর্তনের মান নির্দিষ্ট করতে একটি কোণের পরিবর্তন আলোচনা করতে হয়। এভাবেই কৌণিক সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদি শব্দ গতিবিজ্ঞানে প্রবেশ করে। আবার বক্র গতির একটি বিশিষ্ট রূপ বিশুদ্ধ ঘূর্ণন। ঘূর্ণনের আলোচনা করতে গিয়ে গতিবেগ ও ত্বরণের উপাংশ অকাটেজীয় নির্দেশতন্ত্রে (বিশেষ করে ধ্রুবীয় সমতলীয় নির্দেশতন্ত্রে) নির্ণয় করা প্রয়োজন। বক্রগতির আলোচনায় দেখা যায় যে কেবলমাত্র ভর বা ভরবেগ নয় অন্য দুটি সত্ত্বা যাদের বলা হয় ভরের ভ্রামক এবং কৌণিক ভরবেগ অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। এ সবের আলোচনাই এই এককের বিষয়বস্তু।

আবার দেখা যায় যে নিউটনের গতিসূত্র সরাসরি অপরিবর্তিত ভাবে কেবলমাত্র কতগুলি বিশেষ ফ্রেমে প্রয়োগ করা যায়। ঐ ফ্রেমের সাপেক্ষে ত্বরণশীল গতিযুক্ত ফ্রেমে সরাসরি নিউটনের সূত্র শুদ্ধ নয়। সূত্রগুলির শুদ্ধতা বজায় রাখবার জন্য কতকগুলি কৃত্রিম বল (যাদের বলা হয় অলীক বল) এর অস্তিত্ব ধরে নিতে হয়। এই বলগুলি ঘুরন্ত ফ্রেমের ক্ষেত্রে নানারকম ঘটনার ব্যাখ্যা দিতে সক্ষম এবং বস্তুত পক্ষে পৃথিবীর আহ্নিক ঘূর্ণনের প্রত্যক্ষ প্রমাণ এই অলীক বলের সাহায্যে দেওয়া সম্ভব হয়েছে। এ সবই এই এককে আলোচিত হবে।

4.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি অধ্যয়নের পর —

1. সাধারণভাবে বক্রগতির আলোচনা কি ভাবে করতে হয় আপনি দেখবেন। এই প্রসঙ্গে কতগুলি শব্দ যেমন কৌণিক বেগ, কৌণিক ভরবেগ ইত্যাদির সঙ্গে পরিচিত হবেন
2. কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র নামে একটি সূত্রের অর্থ এবং তার ব্যবহার জানতে পারবেন
3. জাড্য ও অজাড্য ফ্রেমের পার্থক্য জানতে পারবেন এবং অলীক বলের প্রবর্তনের প্রয়োজন দেখবেন
4. ঘুরন্ত ফ্রেমে উদ্ভুত তাপকেন্দ্রীক বল ও কোরিয়েলি বলের ব্যঞ্জুকদের সঙ্গে পরিচিত হবেন
5. আকাশের দিকে না তাকিয়েও কি করে ফুকো (Foucaulh) পৃথিবীর আহ্নিক ঘূর্ণনের প্রত্যক্ষ প্রমাণ দিয়েছিলেন সেকথা বুঝবেন

4.3 কৌণিক গতি ধ্রুবীয় সমতল নির্দেশতন্ত্রে গতিবেগ ও ত্বরণের উপাংশ

গতিপথ বক্র হলে গতির অর্থাৎ গতিরেখার স্পর্শকের দিক্ পরিবর্তন দিক্ পরিবর্তন হয়। এই পরিবর্তন পরিমাপ করা যায় একটি নির্দিষ্ট দিকের সঙ্গে কোণের কিরূপ পরিবর্তন হচ্ছে তাই দিয়ে। কাজেই স্বাভাবিকভাবেই কোণের পরিবর্তনের হার বিবেচনা করতে হয়। এভাবে কৌণিক গতি, কৌণিক ত্বরণ ইত্যাদি শব্দ গতিবিজ্ঞানে অন্তর্ভুক্ত হয়েছে।

মনে করুন একটি কণার গতি একটি সমতলে সীমিত। তাহলে তার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ দুটি কার্টেজীয় নির্দেশাংক x, y দিয়ে প্রকাশ করা যাবে। এবার সমতলীয় ধ্রুবীয় (Plane polar) নির্দেশাংক r, θ প্রবর্তন করা হলে, তাদের ভিতর রূপান্তর সমীকরণ হবে। (চিত্র 4.1 দেখুন)

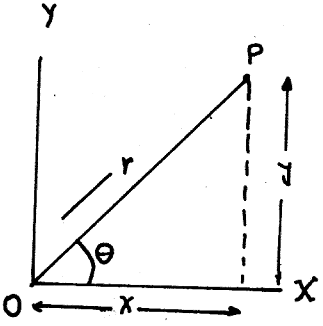
$$x = r \cos\theta$$

$$y = r\ \sin\theta \tag{4.1}$$

গতিবেগের উপাংশ $\dot{x}$, $\dot{y}$ উপরের সমীকরণ দুটি সময়ের সাপেক্ষে অবকলন করে পাওয়া যাবে —

$$\dot{x} = \dot{r}\ \cos\theta - r\ \sin\theta\,\dot{\theta}$$

$$\dot{y} = \dot{r}\ \sin\theta + r\ \cos\theta\,\dot{\theta} \tag{4.2}$$



চিত্র 4.1

আপনি সম্ভবত আগে থেকেই জানেন যে $\vec{r}$ এবং $\vec{r}$ এর অভিলম্ব দিকে গতিবেগের উপাংশ যথাক্রমে $\dot{r}$ এবং $r\,\dot{\theta}$। যাই হোক আমরা এখানে সেটা নতুন করে প্রতিষ্ঠা করব। গতিবেগ ভেক্টর ν র দুটি উপাংশ হবে

$$\nu_r = \frac{\vec{r}\cdot\vec{\nu}}{r} = \frac{x\,\dot{x} + y\,\dot{y}}{r} = \dot{r}$$

$$\nu_\perp = \frac{\vec{r}\times\vec{\nu}}{r} = \frac{x\,\dot{y} - y\,\dot{x}}{r} = r\,\dot{\theta} \tag{4.3}$$

সমীকরণ 4.3 এর শেষ পদক্ষেপে আমরা সমীকরণ (4.1) ও (4.2) ব্যবহার করেছি। $\dot{\theta}$ বলা হয় কৌণিক বেগ এবং তার দিক z-অক্ষ অর্থাৎ $(x - y)$ সমতলের অভিলম্ব দিকে। এবার দেখা যাক ত্বরণের উপাংশ $\ddot{x}$, $\ddot{y}$। সমীকরণ 4.2 কে t'র সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\ddot{x} = \ddot{r}\ \cos\theta - 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\ \sin\theta - r\ \sin\theta\,\ddot{\theta} - r\ \cos\theta\,\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{y} = \ddot{r}\ \sin\theta + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\ \cos\theta + r\ \sin\theta\,\ddot{\theta} - r\ \sin\theta\,\dot{\theta}^2 \tag{4.4}$$

সমীকরণ (4.4) ব্যবহার করে সহজেই ত্বরণের $\vec{r}$ এবং তার অভিলম্ব দিকে উপাংশ পাওয়া যায় - (ত্বরণ ভেক্টরকে $\vec{a}$ লিখে)

$$a_r = \frac{\vec{r}\cdot\vec{a}}{r} = \frac{x\,\ddot{x} + y\,\ddot{y}}{r} = \cos\theta\,\ddot{x} + \sin\theta\,\ddot{y}$$

$$a_\perp = \frac{\vec{r}\times\vec{a}}{r} = \frac{x\,\ddot{y} - y\,\ddot{x}}{r} = \cos\theta\,\ddot{y} - \sin\theta\,\ddot{x} \tag{4.5}$$

সমীকরণ (4.4) থেকে $\ddot{x}$ এবং $\ddot{y}$ এর জন্য ডানদিকের ব্যঞ্জুকগুলি বসিয়ে পাই,

$$a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2$$

$$a_\perp = 2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\,\dot{\theta}\right) \tag{4.6}$$

লক্ষ্য করুন, ν_r, $\nu_\perp$ কে t' সাপেক্ষে অবকলন করে a_r, $a_\perp$ পাওয়া যায় না।

a_r কে বলা যায় ত্বরণের অরীয় উপাংশ এবং $a_\perp$ কে বলা হয় ত্বরণের অনুপ্রস্থ উপাংশ।

4.3.1 উদাহরণ

1. একটি কণার ত্বরণের অনুপ্রস্থ উপাংশ শূন্য কিন্তু $\dot{\theta}$ শূন্য নয়। চররাশি t'কে অপনয়ণ করে ত্বরণের অরীয় উপাংশ প্রকাশ করতে হবে।

সমীকরণ (4.6) থেকে অনুপ্রস্থ উপাংশ শূন্য হওয়ার জন্য পাই,

$r^2\,\dot{\theta} =$ ধ্রুবক $= h$ (মনে করুন)

তাহলে $$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}\,\frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

আবার $\frac{d\theta}{dt}$ -র বদলে $\frac{h}{r^2}$ লিখে পাই,

$$a_r = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - r\,\dot{\theta}^2 = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{h^2}{r^3}$$

চররাশি dকে অপনয়ণ করা হয়েছে। a_r র ব্যঞ্জুকটি আরও দেখতে পরিচ্ছন্ন হয় যদি আমরা একটি নতুন চররাশি $u = {}^{1}\!/_{r}$ নিয়ে আসি। তাহলে $\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{du}{d\theta}$ এবং

$$a_r = -hu^2 \frac{d}{d\theta}\left(h\frac{du}{d\theta}\right) - h^2u^3$$

$$= -h^2u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - h^2u^3$$

অনুশীলনী — 1

1. উপরের উদাহরণে যদি $a_r = \frac{k}{r^2}$ হয় তবে সমাকলন করে দেখান যে θ'র সাপেক্ষে u'র পরিবর্তন সরল দোলগতি।,
2. একটি বৃত্তাকার পথে কৌণিক সরণ 2π হলে, রৈখিক সরণ কত?
3. 'রৈখিক বেগ' v = ব্যাসাধ- x কৌণিক বেগ $=rw$, এখানে w- র একক কি?

4.4 ঘূর্ণন, কৌণিক ভরবেগ ও ভরের ভ্রামক (জাড্য ভ্রামক)

যদি গতিশীল কণার একটি নির্দিষ্ট অক্ষ থেকে দূরত্ব অপরিবর্তিত থাকে, তবে সেই গতিকে বলা হয় বিশুদ্ধ ঘূর্ণন। মনে করুন ঐ নির্দিষ্ট অক্ষকে আমরা একটি কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রে z অক্ষ বলে ধরে নিচ্ছি। তাহলে কণাটির গতিপথ হবে একটি বৃত্ত এবং ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে মূলবিন্দু নিলে, কণাটির অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ এর উপাংশ হবে x, y, o যেখানে $x^2 + y^2 = a^2$ (ধ্রুবক)। এখানে a হল বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ।

কার্টেজীয় নির্দেশাংক x, y, z-র সঙ্গে বেলনীয় নির্দেশাংকর z, r, θ সম্পর্ক নিম্নরূপ (বর্তমান ক্ষেত্রে বৃত্তাকার পথের জন্য)

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta \\ y &= a\sin\theta \\ z &= 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

এবার t-র সাপেক্ষে অবকলন করে গতিবেগ ভেক্টরের **উপাংশদের** ভিতরে নিম্নের সম্পর্কগুলি পাই,

$$\begin{aligned} \nu_x &= \dot{x} = -a\sin\theta\,\dot{\theta} = -y\,\dot{\theta} \\ \nu_y &= \dot{y} = a\cos\theta\,\dot{\theta} = +x\,\dot{\theta} \\ \nu_z &= \dot{z} = 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

কৌণিক বেগ $\dot{\theta}$ ঘূর্ণন অক্ষ z দিকে একটি ভেক্টর, কাজেই $\vec{\dot{\theta}}$ এর উপাংশ 0, 0, $\dot{\theta}$। এবার সমীকরণ (4.8) এর তিনটি উপাংশকে একটি মাত্র ভেক্টর সমীকরণ হিসেবে লিখতে পারি,

$$\vec{\nu} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{4.9}$$

যেখানে $\vec{\omega} = \dot{\vec{\theta}}$ । লক্ষ্যনীয়, θ কিন্তু একটি ভেক্টর নয় কারণ দুটি বিভিন্ন অক্ষের সাপেক্ষে পরিমিত (অর্থাৎ অনুপরিমাণ নয়) ঘূর্ণনের মিলিত ফল ভেক্টরের সমান্তরাল সূত্র মেনে চলে না। অথবা লক্ষ্য করুন θ যদি z দিকে একটি ভেক্টর হয় তবে আমরা আশা করব সমীকরণ (4.9) এর মত,

$$\Delta\vec{r} = (\vec{\theta} \times \vec{r})$$

অর্থাৎ
$$\begin{aligned} \Delta x &= -y\,\theta = -a\sin\theta\cdot\theta \\ \Delta y &= x\,\theta = a\cos\theta\cdot\theta \\ \Delta z &= 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

(4.10) যে ভুল, তা (4.7) এর সঙ্গে তুলনা করলেই বুঝতে পারবেন। এবার বিশেষ ঘূর্ণনের ক্ষেত্রে গতিবেগ ও ত্বরণের উপাংশগুলি দেখা যাক। এর জন্য নতুন করে হিসেবের প্রয়োজন নেই $-r = a =$ ধ্রুবক, অতএব $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ সমীকরণ (4.3) ও (4.4) এ বসিয়ে পাওয়া যায় ($\dot{\theta} = \omega$ লিখে)

$$\nu_r = 0, \nu_1 = r\,\dot{\theta} = a\omega \tag{4.11}$$

অর্থাৎ গতিবেগ পুরোপুরিই ব্যাসার্ধের অভিলম্ব দিকে অর্থাৎ স্পর্শক বরাবর। এবার ত্বরণের উপাংশ

$$\begin{aligned} a_r &= -r\,\dot{\theta}^2 = -a\omega^2 = -\frac{\nu^2}{a} \\ a_\perp &= r\,\ddot{\theta} = a\dot{\omega} \end{aligned} \tag{4.12}$$

দেখুন, যদিও গতিবেগ স্পর্শকের দিকে, ত্বরণের অরীয় উপাংশ অর্থাৎ ব্যাসার্ধ বরাবর অংশ কিন্তু শূন্য নয় — এটি সবসময়ই কেন্দ্রাভিমুখী। আবার অনুপ্রস্থ অংশ কেবল কৌণিক বেগের মান পরিবর্তনশীল হলেই অশূন্য হবে। উপরের সিদ্ধান্তগুলি আমরা একটি উপপাদ্য হিসেবে উপস্থিত করতে পারি।

সমকৌণিক বেগে বৃত্তাকার পথে গতিশীল কণার ত্বরণ সর্বদাই কেন্দ্রাভিমুখী এবং তার মান $a\,\omega^2$ বা ν^2/a । যেখানে a, ω এবং ν যথাক্রমে বৃত্তের ব্যাসার্ধ, কণার কৌণিক বেগ এবং 'রৈখিক গতিবেগ।'

নিউটনের গতি সমীকরণ

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{\nu})$$

উপরের সমীকরণটিকে $\vec{r}$ দিয়ে ভেক্টর গুণ করে পাওয়া যায়,

$$\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v})=m\,\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$=m\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v})\ \text{(কারণ}\ \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}=\vec{v}\times\vec{v}=0\text{)}$$

$$=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) \tag{4.13}$$

উপরে শেষ পদক্ষেপে আমরা ভরবেগ $m\vec{v}$ কে $\vec{p}$ লিখেছি। বাঁদিকের $\vec{r}\times\vec{F}$ কে বলা হয় মূলবিন্দুর সাপেক্ষে বলের ভ্রামক বা টর্ক (torque), ডানদিকের $\vec{r}\times\vec{p}$ কে বলা হয় ভরবেগের ভ্রামক বা কৌণিক ভরবেগ। উপরের (4.13) সমীকরণের সিদ্ধান্তকে বাক্যে নিম্নরূপে প্রকাশ করা হয়।

কোনও কণার কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার তার উপর প্রযুক্ত টর্কের সমান এবং টর্কের দিকে কার্য্যকরী হয়। লক্ষ্য করুন কৌণিক ভরবেগ এবং টর্ক উভয়ই ভেক্টর।

বিচ্ছিন্ন কণার ক্ষেত্রে উপরের সিদ্ধান্তের খুব বেশী গুরুত্ব নেই। কিন্তু বহু কণার সমাবেশ বিশেষত দৃঢ়বস্তুর গতিবিদ্যায় উপরের সিদ্ধান্তের অনুরূপ যে ব্যাপক সিদ্ধান্ত করা যায় তার বিভিন্ন গুরুত্বপূর্ণ প্রয়োগ আছে। আমরা শুধু এখানে কণাসমাবেশের কথা আলোচনা করব।

আলোচ্য কণাগুলির ভিতরে যে আন্তঃক্রিয়া থাকতে পারে তার কোনও বিশদ্ আলোচনা আমরা করব না। কেবলমাত্র ধরে নেব যে আন্তঃক্রিয়া তাদের সংযোগকারী রেখা বরাবর ক্রিয়াশীল এবং আন্তঃক্রিয়া নিউটনের তৃতীয় সূত্র মেনে চলে। এভাবে 'i' তম কণার উপরে 'k' তম কণার জন্য বলকে যদি লিখি $\vec{F}_{ik}$, তবে 'k' তম কণায় উপরে 'i' তম কণার জন্য বলকে লিখব $\vec{F}_{ki}$ এবং নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী $\vec{F}_{ik}=-\vec{F}_{ki}$। সব কণাদ্বয়ের কথা মনে করে পারস্পরিক আন্তঃক্রিয়ার জন্য 'i' তম কণার উপরে ক্রিয়াশীল লব্ধি বলকে লিখতে পারি $\sum_k{}'\vec{F}_{ik}$ উপরের প্রাইম চিহ্নটি বোঝাচ্ছে যে সমষ্টিতে $i = k$ পদটি নেই কারণ $\vec{F}_{ii}$ অর্থাৎ 'i' তম কণার সঙ্গে তার নিজের আন্তঃক্রিয়া অর্থহীন। এ ছাড়া বাইরে থেকে প্রযুক্ত বলকে $\vec{F}_i$ লিখে আমরা 'i' তম কণার গতি সমীকরণ লিখতে পারি,

$$\vec{F}_i+\sum_k{}'\vec{F}_{ik}=m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \tag{4.14}$$

আপনারা বুঝতেই পারছেন m_i হল 'i' তম কণার ভর এবার $\vec{r}_i$ তার অবস্থান ভেক্টর। এবার সব কণার উপরে সমষ্টি নিয়ে পাই

$$\sum_i \vec{F}_i + \sum_k \sum_i{}' \vec{F}_{ik} = \sum m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \qquad (4.15)$$

যেহেতু $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, বাঁদিকের দ্বিতীয় পদটির মান শূন্য এবং বাইরে থেকে প্রযুক্ত বলের লব্ধিকে $\vec{F}\left(=\sum_i \vec{F}_i\right)$ লিখে আমরা পাই

$$\vec{F} = \sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_i \vec{v}_i\right)$$

অর্থাৎ বাইরে থেকে ক্রিয়াশীল লব্ধি বল এবং লব্ধি ভরবেগের পরিবর্তনের হার সমান। এবার যদি ধরা হয় কণাদের সমষ্টি বাইরে থেকে বিচ্ছিন্ন যাতে বাইরের লব্ধি বল $\vec{F} = 0$, তাহলে

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\sum m_i \vec{v}_i\right) \qquad \frac{d}{dt}\vec{p} \qquad (4.16)$$

অর্থাৎ বিচ্ছিন্ন একটি তন্ত্রের মোট ভরবেগ সংরক্ষিত হয়। এই ভরবেগ সংরক্ষণ নীতি সম্ভবত আপনাদের পূর্ব পরিচিত। এবার একটি নতুন সংরক্ষণ সূত্র প্রতিষ্ঠা করব।

সমীকরণ (4.14) কে $\vec{r}_i$ দিয়ে ভেক্টর গুণ করে তারপরে সব কণার (অর্থাৎ সব 'i' র) জন্য সমষ্টি করে লিখতে পারি

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \sum_k{}' \vec{r}_i \times \vec{F}_{ik} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \qquad (4.17)$$

সমীকরণ (4.17)র বাঁদিকের দ্বিতীয় পদটি একটু বিশ্লেষণ করা যাক,

$$\sum_i \sum_k{}' \vec{r}_i \times \vec{F}_{ik} = \sum_k \sum_i \vec{r}_k \times \vec{F}_{ki} \text{ (সমষ্টিকৃত সূচক i এবং k বদলাবদলি করে)}$$

$$= -\sum_k \sum_i{}' \vec{r}_k \times \vec{F}_{ik} \text{ (কারণ } \vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik}\text{)}$$

এবার প্রথম এবং শেষ রাশি দুটি সমান বলে, প্রথম রাশিকে দুটি রাশির যোগফলের অর্ধেক হতে হবে। অর্থাৎ

$$\sum_i \sum_k \vec{r}_i \times \vec{F}_{ik} = \frac{1}{2}\sum_k \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{ik} \tag{4.18}$$

কারণ আমাদের ধারণা অনুযায়ী $\vec{F}_{ik}$ হবে i এবং k তম কণার সংযোগকারী রেখা বরাবর। এই রেখাটি $(\vec{r}_i - \vec{r}_k)$ ভেক্টর, সুতরাং $(\vec{\gamma}_i - \vec{\gamma}_k)$ এবং $\vec{F}_{ik}$ একই দিকে, অতএব তাদের ভেক্টর গুণফল শূন্য। এবার সমীকরণ (4.17) দাঁড়াল,

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i)$$

অর্থাৎ লব্ধি বাহ্য টর্ক $\vec{T}_e$ ও লব্ধি কৌণিক ভরবেগ $\vec{L}$ হলে

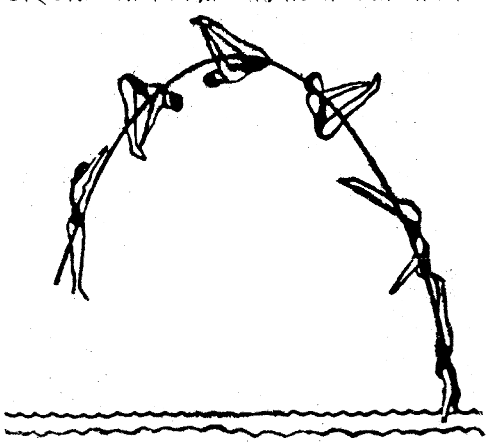
$$\vec{T}_e = \frac{d}{dt}\vec{L} \tag{4.19}$$

যদি বাহ্য লব্ধি টর্ক শূন্য হয়, তাহলে

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = 0 \tag{4.20}$$

অর্থাৎ বাহ্য টর্ক না থাকলে একটি তন্ত্রের মোট কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত হয়। এটিকেই বলা হয় কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র। এবার আমরা এই সংরক্ষণ সূত্রের কিছু ব্যবহারিক প্রয়োগ আলোচনা করব।

এক্রোবাট, ডাইভার, যৌথনৃত্যে নর্তকী, বরফের উপর স্কেটার রা এই কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রকে সুন্দরভাবে কাজে লাগায়। যেহেতু জাড্য ভ্রামক I, ঘূর্ণন অক্ষ থেকে শরীরের বিভিন্ন অংশের দূরত্বের বর্গের উপর নির্ভর করে সেজন্য শরীরের বিভিন্ন অংশ প্রসারিত বা সংকুচিত করে I এর মান এর অনেক তারতম্য করা সম্ভব। 4.2 চিত্রের ডাইভার এর বিষয়ে আলোচনা করা যাক।



চিত্র 4.2

যখন ডাইভার ডাইভিং বোর্ড এর সাহায্যে উপরে ওঠে তার হাত ও পা সোজাসুজি প্রসারিত থাকে এবং তার ভরকেন্দ্রের মধ্যে দিয়ে অনুভূমিক অক্ষের সাপেক্ষে তার নির্দিষ্ট কৌণিক বেগ ω_0 থাকে যার ফলে আধ পাক ঘুরে সে জলে পড়তে পারে। যদি একই সময়ে সে পুরো এক ও আরও আধ পাক ঘুরে জলে পড়তে চায় তার কৌণিক বেগ আগের তিনগুণ বেশী করতে হবে। কোন বাহ্যবল বা টর্ক তার উপরে ভর কেন্দ্রের সাপেক্ষে ক্রিয়া করে না, সুতরাং কৌণিক ভরবেগ স্থির থাকে। যখন ডাইভার শূন্যে অবস্থান করে কৌণিক ভরবেগ স্থির থাকে। অর্থাৎ $L = I_0\omega_0 = I\,\omega =$ স্থিররাশি ছাড়। যেহেতু $\omega = 3\omega_0$ হতে হবে সেজন্য ডাইভারকে তার জাড্যভ্রামক প্রাথমিক মান I_0 থেকে I এ এমনভাবে পরিবর্তন করতে হবে যাতে

$$I = \frac{1}{3}I_0$$

হয় সেজন্য ডাইভার তার হাত, পা শরীর এর ভরকেন্দ্রের দিকে গুটিয়ে নেয় যার ফলে ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ কমে যায়। আরো বেশী সংখ্যায় পাক খেতে হলে জাড্যভ্রামক সেই অনুপাতে আরো কম করতে হবে। কিন্তু যেহেতু $\frac{1}{2}I\,\omega^2 > \frac{1}{2}I_0\omega_0^2$, সুতরাং ডাইভার এর ঘূর্ণন গতিশক্তি বৃদ্ধি পায়। এই শক্তির বৃদ্ধি ডাইভার তার শরীর এর বিভিন্ন অংশকে টেনে আনার কাজে লাগায়।

একটি ঘূর্ণায়িমান টেবিলের ওপর বসুন। হাতে ভারী ওজন তুলে নিন। হাত প্রসারিত অবস্থায় কাউকে টেবিলটি ধীরে ঘুরিয়ে দিতে বলুন। হঠাৎ হাত দুটি বুকের কাছে গুটিয়ে নিয়ে আসুন - দেখবেন টেবিলটি জোরে ঘুরতে সুরু করেছে। এবার হাত ছড়িয়ে দিন - বেগ কমে যাবে। ঘর্ষণের জন্য টেবিলটি না থামা পর্যন্ত আপনি আপনার গতিবেগ কয়েকগুণ পাল্টে ফেলতে পারেন। হাতের সঙ্গে ওজনগুলি যখন অক্ষের কাছাকাছি আসে তখন ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ কমে যায় সুতরাং জাড্য ভ্রামক কম হয়, সেক্ষেত্রে অন্য বাহ্য টর্ক ক্রিয়া না করলে, কৌণিক ভরবেগ $L = I\,\omega$ কে স্থির থাকতে হলে ω এর মান বাড়বে অর্থাৎ কৌণিক বেগ বৃদ্ধি পাবে।

ব্যায়ামবিদ্ কলাকৌশল প্রদর্শনের জন্য কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্রকে কাজে লাগায়। ব্যায়ামবিদ্ শূন্যে ডিগবাজী খায় কেমন করে? প্রথমত সে স্থিতিস্থাপক মেঝে বা সহযোগী হাতের সাহায্য নিয়ে ধাক্কায় উপরে ওঠে। এই অবস্থায় তার শরীর সমানের দিকে ঝুঁকে পড়ে এবং তার ওজন ও ধাক্কার বলে একটি তাৎক্ষণিক টর্কের সৃষ্টি হয়। ধাক্কার জন্য সম্মুখগতি উৎপন্ন হয় এবং টর্ক আবর্তগতির সৃষ্টি করে। অবশ্য শুধু এভাবে যে আবর্তন ঘটে তা বেশ ধীর গতি এবং দর্শকদের প্রত্যাশা তাতে পূর্ণ হয় না। বাজিকর তার হাঁটুও মুড়ে নেয় এবং এভাবে তার সারা শরীরকে ঘূর্ণাক্ষের যতটা সম্ভব 'কাছাকাছি জড়' করে। এতে হঠাৎ কৌণিক বেগ বৃদ্ধি পায় এবং তখন দ্রুত ঘুরে যাওয়া যায়।

যৌথ নৃত্যে নর্তকীদের দ্রুত ঘুরে যাওয়ার ব্যাপারটিও এই নীতির সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়। সাধারণভাবে একজন নর্তকী তার প্রাথমিক কৌণিক ভরবেগ সঙ্গিনীর কাছ থেকে পায়। সেই মুহূর্তে

নর্তকীর শরীর গুটিয়ে আসে, এতে ধীর আবর্তন শুরু হয় এবং তারপর যখন নর্তকী সোজা হয়ে দাঁড়ায় তখন এই ঘূর্ণন দ্রুত বৃদ্ধি পায়। কারণ এ সময় তার শরীরের প্রায় সব অংশই ঘূর্ণাক্ষের কাছাকাছি এসে পড়ে। কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী তখন কৌণিক বেগ হঠাৎ বৃদ্ধি পায়।

ঘূর্ণনের জন্য গতিশক্তি ও জাড্য ভ্রামক

মনে করুন একটি তন্ত্রে বহু সংখ্যক কণা আছে। প্রত্যেক কণাই z অক্ষের সাপেক্ষে একই কৌণিক বেগে ঘুরছে। তাই তাদের পথ বৃত্তাকার কিন্তু বৃত্তের ব্যাসার্ধ- বিভিন্ন এবং বৃত্তের সমতল পরস্পরের সমান্তরাল কিন্তু অভিন্ন নয়।

মনে করুন m_i, $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i$ যথাক্রমে i তম কণায় ভর, অবস্থান ভেক্টর ও গতিবেগ। কৌণিক বেগ $\vec{\omega}$ কণা নিরপেক্ষ সুতরাং এর সঙ্গে সূচক i ব্যবহার করা হবে না।

সমীকরণ (4.4) থেকে পাই,

$$|\vec{v}_i|^2 = |\vec{\omega}\times\vec{r}_i|^2 = \omega^2 (r_i)_\perp$$

এখানে $(r_i)_\perp$ নির্দেশ করছে $\vec{r}_i$, 'র z অক্ষের অভিলম্ব উপাংশ অর্থাৎ i' তম কণার বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ এবং z অক্ষ থেকে লম্ব দূরত্ব। সুতরাং সব কণাকে ধরে মোট গতিশক্তি T হবে

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i (r_i)_\perp^2 \omega^2$$

এবার $\sum_i m_i (r_i)_\perp^2$ কে I_z লিখে আমরা পাই,

$$T = \frac{1}{2} I_2 \omega^2 \qquad (4.21)$$

I_2 কে বলা হয় z অক্ষ সাপেক্ষে তন্ত্রের ভরের ভ্রামক বা জাড্য ভ্রামক। এবার কৌণিক ভরবেগের একটি ব্যঞ্জক প্রতিষ্ঠা করতে চেষ্টা করব। কৌণিক ভরবেগের সংজ্ঞা অনুযায়ী

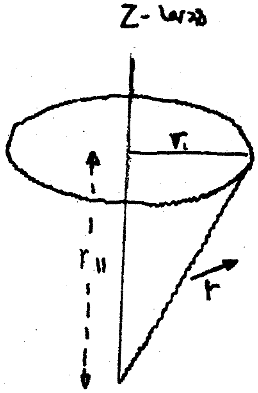
$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m\vec{v}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$$

$$= \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega}\times\vec{r}_i)$$

ভেক্টর বীজগণিতের সূত্র $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$ ব্যবহার করে পাওয়া যায়,

$$\vec{L}=\sum_i m_i\left[r_i^2\vec{\omega}-(\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})\vec{r}_i\right] \tag{4.22}$$

এবার $\vec{r}_i$ ভেক্টরটিকে দুটি উপাংশ $(r_i)_{11}$ এবং $(r_i)_{\perp}$ ভেঙ্গে ফেলব। $(r_i)_{11}$ ঘূর্ণন অক্ষ $\vec{\omega}$ বা z অক্ষের দিকে এবং $(r_i)_{\perp}$ তার অভিলম্ব (xy) সমতলে। (চিত্র 4.3) অবশ্য $(r_i)_{\perp}$ র দিক সম্পূর্ণ নির্দিষ্ট হল না। এভাবে সমীকরণ (4.22)-র ডান দিকের বন্ধনীর মধ্যস্থ দ্বিতীয় পদটি দাঁড়ায়



চিত্র 4.3 কে $\vec{r}$ উপাংশ r_{11} ও r_1 - এ বিভাজন।

$$-(\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})\vec{r}_i=-(r_i)_{11}\omega\left[(r_i)_{11}+(r_i)_{\perp}\right]$$

অর্থাৎ $-(\vec{r}_0\cdot\vec{\omega})\vec{r}_i=(r_i)_{11}^2\vec{\omega}-(r_i)_{11}\omega(\vec{r}_i)_{\perp}$

ডানদিকের দ্বিতীয় পদটি $\vec{\omega}$ 'র লম্ব অভিমূখী এবং এর উপস্থিতির জন্য অনেক ক্ষেত্র $\vec{L}$ অভিমুখ $\vec{\omega}$ অভিমুখ থেকে বিভিন্ন হয়। তবে ঘূর্ণন অক্ষটি তন্ত্রের একটি প্রতিসম অক্ষ (symmetric axis) হলে $\vec{\omega}$ 'র লম্ব অভিমুখী পদটি শূন্য হয়। আমাদের বর্তমান আলোচনা এরূপ অপেক্ষাকৃত সরলক্ষেত্রে সীমিত থাকবে এবং সেক্ষেত্রে সমীকরণ (4.22) থেকে পাই ,

$$\vec{L}=\sum_i m(r)_{\perp}^2\vec{\omega}=I_z\vec{\omega}$$

যেখানে আপনারা আগেই দেখেছেন যে I_z অক্ষ সাপেক্ষে তন্ত্রের ভরের ভ্রামক। এবার সমীকরণ (4.19) থেকে পাই,

$$\vec{T}_e=\frac{d}{dt}(I_z\vec{\omega}) \tag{4.23}$$

এবং কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রটি লেখা যায়

$$\frac{d}{dt}(I_z\vec{\omega})=0 \tag{4.24}$$

1. একটি কেন্দ্রবিন্দু থেকে r দূরত্বে অবস্থিত m ভরের কণার উপর $\frac{km}{r^2}$ (k একটি ধ্রবক) মানের একটি কেন্দ্রাভিমুখী বল ক্রিয়াশীল। বিভিন্ন দূরত্বে বিভিন্ন ভরের কণা ঐ কেন্দ্রের চারিদিকে বৃত্তাকার পথে গতিশীল। কণাদের কৌণিক বেগ এবং রৈখিক বেগ দূরত্ব r এর উপরে কিরূপ নির্ভর করে?

2. একটি বস্তুকণাপূর্ণ গোলক তার একটি ব্যাসকে অক্ষ করে ঘুরছে। গোলকটি সংকুচিত হয়ে তার আয়তন পূর্বের $1/8$ ভাগে হ্রাসপ্রাপ্ত হল। যদি ধরা হয় যে, এই হ্রাসপ্রাপ্তিতে প্রত্যেক কণার ঘূর্ণাক্ষ থেকে দূরত্ব একই অনুপাতে হ্রাস পেয়েছে, তাহলে কৌণিক বেগ কি অনুপাতে বেড়েছে? ঘূর্ণন গতিশক্তির পরিবর্তনই বা কি অনুপাতে হয়েছে?

4.5 জাড্য ও অজাড্য ফ্রেম — অলীক বল

নিউটনের গতিসূত্রের বিবৃতিতে নির্দেশতন্ত্রের বিষয়ে কোনও উল্লেখ নেই। প্রথম সূত্রে বলা হয়েছে যে কোনও বস্তু যদি স্থিরাবস্থায় বা সরলরেখা বরাবর সমবেগে গতিশীল থাকে, তবে বাহ্য বলের ক্রিয়া ছাড়া সেই অবস্থার কোনও পরিবর্তন হবে না। অর্থাৎ বাইরে থেকে বল না প্রয়োগ করলে ত্বরণ হবে শূন্য।

দেখা যাক এই সূত্রের ভিতরের নির্দেশতন্ত্রের কোনও গুরুত্ব আছে কিনা। ধরা যাক s ফ্রেমে সূত্রটি শুদ্ধ। অন্য একটি ফ্রেম s′ এর কথা ভাবুন যেটি s ফ্রেমের সাপেক্ষে $\vec{u}$ বেগে গতিশীল। একটি কণার অবসথান ভেক্টর s ফ্রেমে $\vec{r}$, তাহলে s′ ফ্রেমে অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ হলে,

$$\vec{r} = \vec{r}' + \int_0^t \vec{u}dt$$

এখানে ধরে নেওয়া হয়েছে যে $t = 0$ সময়ে s ও s′ ফ্রেম পরস্পরের সঙ্গে মিলে ছিল + উপরের সমীকরণটি t র সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{u}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} + \frac{d\vec{u}}{dt} \qquad (4.25)$$

সমীকরণ (4.25) দেখাচ্ছে যে যদি $\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$ হয় অর্থাৎ যদি দুটি ফ্রেমের ভিতরে কোনও ত্বরণ না থাকে তাহলে দুই ফ্রেমের সাপেক্ষেই ত্বরণ অভিন্ন। কাজেই s′ ফ্রেমেও সূত্রটি শুদ্ধ। কিন্তু যদি $\frac{d\vec{u}}{dt}$ শূন্য

না হয়, তাহলে দুটি ফ্রেমে ত্বরণ বিভিন্ন — বিশেষ করে s ফ্রেমে যদিও বাহ্য বলের অনুপস্থিতিতে ত্বরণ নেই কিন্তু s′ ফ্রেমে সে অবস্থায়ও ত্বরণ আছে। কাজেই s′ ফ্রেমে সূত্রটি শুদ্ধ নয়। s ফ্রেমে নিউটনের গতিসূত্র $\vec{F} = m\vec{a}$ প্রযোজ্য, কিন্তু s′ ফ্রেমে সমীকরণ (4.25) ব্যবহার করে পাই,

$$\vec{F} = m\left(\vec{a}' + \frac{d\vec{u}}{dt}\right)$$

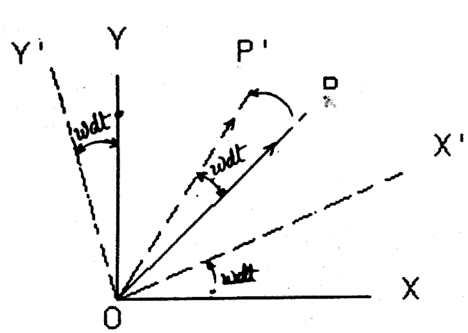
অথবা $$\vec{F} - m\frac{d\vec{u}}{dt} = m\vec{a}'$$

সমীকরণ (4.26) থেকে মনে হয় যে s′ ফ্রেমেও নিউটনের শুদ্ধতা বজায় রাখা যায় যদি আমরা প্রস্তাব করি যে S^1 ফ্রেমে একটি আলাদা বল $\left(-m\frac{du}{dt}\right)$ সক্রিয়। এই বলটি গতিশীল কণার ভরের সমানুপাতিক কিন্তু তা ছাড়া কণাটির উপর নির্ভরশীল নয়। বলটির উৎসও কোনও আন্তঃক্রিয়া নয়। বলটি কেবলমাত্র s ফ্রেমের সাপেক্ষে s′ -র ত্বরণের উপর নির্ভর করে। এইরূপ বলকে বলা হয় অলীক বা ছদ্ম বল (Fictitious force বা psundo force)।

s ফ্রেমে বা তার সাপেক্ষে সমবেগে গতিশীল সব ফ্রেমে নিউটনের সূত্র সরাসরি প্রয়োগ করা যায় এই সব ফ্রেমকে বলা হয় জাড্য বা জড়ত্বীয় ফ্রেম (inertial frame)। এদের সাপেক্ষে ত্বরণশীল যে কোনও ফ্রেম যেখানে নিউটনের সূত্র বজায় রাখতে অলীক বলের অবতারণা করতে হয়। তাদের বলা হয় অজাড্য বা অজড়ত্বীয় ফ্রেম।

যদি অজাড্য ফ্রেমের গতি একটি সরলরেখা বরাবর হয়, তবে অলীক বলের মান $-m\frac{d\vec{u}}{dt}$ কিন্তু যদি ঘূর্ণন থাকে, তবে আপেক্ষিক ত্বরণের গণনা কিছুটা জটিল এবং অলীক বলের ব্যঞ্জকও অপেক্ষাকৃত জটিল।

4.5.1 ঘুরন্ত ফ্রেমে অলীক বল



চিত্র 4.4

দুটি ফ্রেম s এবং s′ এর কথা চিন্তা করুন। s একটি জাড্য ফ্রেম এবং s′ অজাড্য ফ্রেম কারণ s এর সাপেক্ষে s′ $\vec{\omega}$ কৌণিক বেগে ঘুরন্ত। গণনায় সুবিধার জন্য মনে করুন যে $t = 0$ তে উভয় ফ্রেম সম্পূর্ণ মিলে ছিল — মূলবিন্দু অভিন্ন। কৌণিক বেগ ভেক্টর z অক্ষ অভিমুখে। এবার একটি ভেক্টর $\vec{A}$ নেওয়া যাক —

চিত্র 4.4 এ $\overrightarrow{OP}$ দিয়ে ভেক্টরটিকে দেখান হয়েছে। ভেক্টরটি s' ফ্রেমের সঙ্গে ঘুরন্ত।

অনুপরিমাণ সময় dt তে s' ফ্রেম এবং তার সঙ্গে OP ভেক্টরটি $\omega\,dt$ কোণ ঘুরে গেছে। চিত্র 4.4 এ পরিবর্তিত অবস্থা বিচ্ছিন্ন ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র রেখা দিয়ে দেখান হয়েছে। এই ঘূর্ণনের জন্য $\vec{A}$ ভেক্টরটির উপাংশদের s' ফ্রেমে কোনও পরিবর্তন হয়নি। কিন্তু S ফ্রেমে উপাংশদের পরিবর্তন হয়েছে। পরিবর্তনের সূচক $\overrightarrow{PP^1}$ ভেক্টর।

অতএব এই পরিবর্তন $\vec{\omega}\,dt \times \overrightarrow{OP}$ অর্থাৎ S ফ্রেমে $\vec{A}$ র ঘূর্ণনের জন্য পরিবর্তন

$$\delta\vec{A}_r = \left(\vec{\omega} \times \vec{A}\right)dt$$

এ ছাড়া সময়ের সঙ্গে ভেক্টরটির একটি নিজস্ব পরিবর্তন হতে পারে। এই পরিবর্তন লেখা যায় $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{s'} dt$

সুতরাং s ফ্রেমে মোট পরিবর্তন

$$\delta\vec{A} = \left(\vec{\omega} \times \vec{A}\right)dt + \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{s'} dt$$

অথবা $$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{s} = \left(\vec{\omega} \times \vec{A}\right) + \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{s'} \tag{4.27}$$

পাদসূচক s ও s' বোঝাচ্ছে যে দুটি ফ্রেমে $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)$ বিভিন্ন। প্রথমে সমীকরণ (4.27) এ $\vec{A}$ র জায়গায় অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ লিখে আমরা পাই,

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{s} = \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{s'}$$

s ফ্রেমে গতিবেগ $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{s}$ কে $\vec{u}$ লিখে এবং s' ফ্রেমে গতিবেগ $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{s'}$ কে $\vec{v}$ লিখে উপরের সম্পর্কটি দাঁড়ায়

$$\vec{u} = \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) + \vec{v} \tag{4.28}$$

এই সমীকরণটি আপনাদের অপরিচিত নয়, এটি আপেক্ষিক বেগের সূত্র। s' ফ্রেমে কণাটির বেগ $\vec{v}$, আর s' ফ্রেমের $\vec{r}$ বিন্দুতে অবস্থিত কণার বেগ $(\vec{\omega}\times\vec{r})$।

এবার ত্বরণ অর্থাৎ $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_s$ নির্ণয়ের জন্য আমরা (4.27) এ $\vec{A}$ জায়গায় $\vec{u}$ বসাই এবং (4.27) তখন দাঁড়ায়

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_s = (\vec{\omega}\times\vec{u}) + \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{s'}$$

উপরের ডানদিকে (4.28) ব্যবহার করে পাওয়া যায়,

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_s = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{\omega}\times\vec{v} + \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{s'} + \left[\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})\right]_{s'}$$

$$= \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{s'} + 2(\vec{\omega}\times\vec{v}) + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \tag{4.29}$$

একটি পদ $\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}$ অবহেলা করা হয়েছে। কারণ এই আলোচনা প্রধানত পৃথিবীর আহ্নিক ঘূর্ণনের জন্য উদ্ভুত অলীক বলের বিষয়। তবে মনে রাখা ভাল যে $\vec{\omega}$ সময়ের উপর নির্ভরশীল হলে আর একটি পদ আসে।

এবার জাড্য ফ্রেম s এর জন্য $\vec{F} = m\vec{a}$ ব্যবহার করে সমীকরণ (4.29) থেকে পাই,

$$\vec{F} = m\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_s = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{s'} + 2m(\vec{\omega}\times\vec{v}) + m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \tag{4.30}$$

ডানদিকের দুটি পদ বাঁদিকে নিয়ে এসে লেখা যায়

$$\vec{F} - 2m(\vec{\omega}\times\vec{v}) - m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{s'} \tag{4.31}$$

দেখা যাচ্ছে s' ফ্রেমে অলীক বল দুটি পদে বিভক্ত। প্রথম পদটি

$$-2m(\vec{\omega}\times\vec{v}) = 2m(\vec{v}\times\vec{\omega})$$

কেবলমাত্র $\vec{v} \neq 0$ এবং $\vec{\omega}$ র সঙ্গে বিভিন্ন দিকে হলেই এই পদটি অশূন্য হবে। এটিকে বলা হয় করিয়োলি বল (Corioli force)। করিয়োলি বল কোন কাজ করে না কারণ $(\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$, অলীক বলের দ্বিতীয় পদটি

$$-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m(\vec{w} \cdot \vec{r})\vec{w} + m(\vec{w} \cdot \vec{w})\vec{r}$$

$$= -m\omega^2 \vec{r}_{11} + m\omega^2 (\vec{r}_{11} + \vec{r}_{\perp})$$

$$= +m\omega^2 \vec{r}_{\perp} \tag{4.32}$$

এই বলটিকে বলা হয় অপকেন্দ্রিক বল (Centrifugal force)। দেখা যাচ্ছে $\vec{\omega}$ 'র অভিলম্ব সমতলে 'a' ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে গতিশীল কণার উপর অপকেন্দ্রিক বলের মান $m\omega^2 a$ এবং বলের দিক ব্যাসার্ধ-বরাবর কেন্দ্রের বিপরীতমুখী — সরল ভাষায় এটি একটি বর্হিমুখী বল।

4.5.2 অলীক বলের আলোকে গ্রহ বা উপগ্রহদের গতির আলোচনা

গ্রহ উপগ্রহদের গতির ব্যাখ্যা সাধারণভাবে একটি জাড্য ফ্রেমের সাপেক্ষে করা হয়। অরীয় ও অনুপ্রস্থ ত্বরণের ব্যঞ্জুক ব্যবহার করে গতি সমীকরণ লেখা যায় (সমীকরণ 4.12 দেখুন)।

$$\vec{F} = m\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + m\left(2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

ডানদিক থেকে বাঁদিকে কতকগুলি পদ সরিয়ে লেখা যায়

$$\vec{F} + mr\dot{\theta}^2\hat{r} - 2m\dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} - mr\ddot{\theta}\,\hat{\theta} = m\,\ddot{r}\,\hat{r}$$

ঘুরন্ত ফ্রেমের কথা মনে রেখে বলা যায় যে আমরা তিনটি অলীকবল নির্দেশক পদ পাচ্ছি। প্রথম পদটি ($\dot{\theta} = \omega$ লিখে) $m\,r\,\omega^2\hat{r}$ আমাদের পরিচিত অপকেন্দ্রিক বল। দ্বিতীয় পদটি

$$-2m\dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} = 2m\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{\omega}\right)$$

দৃশ্যতই করিয়োলি বল। তৃতীয় পদটি $-mr\,\ddot{\theta}\,\hat{\theta} = m\left(\dot{\vec{w}} \times \vec{r}\right)$ কৌণিক বেগের পরিবর্তন থেকে উদ্ভূত।

এটি আমরা অবহেলা করেছিলাম - (4.29) সমীকরণের পরের মন্তব্য দেখুন। কাজেই বলা যায় অরীয় ও অনুপ্রস্থ ত্বরণের ব্যঞ্জুকের মধ্যেই অলীক বলের উৎস প্রকাশ পেয়েছে।

অলীক বল যেহেতু কোনও আন্তঃক্রিয়া থেকে উদ্ভূত নয়, সেজন্য অলীক বলের কোনও প্রতিক্রিয়া বলও থাকে না। এজন্য নিউটনের তৃতীয় সূত্র অলীক বলের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা চলে না।

অনুশীলনী — 3

1. একটি সুতার একপ্রান্ত দৃঢ়ভাবে আটকানো আছে, অন্যপ্রান্তে একটি অতি ক্ষুদ্র বল আছে। বলটি অনুভূমিক তলে একটি বৃত্তাকার পথ পরিক্রমা করে। সুতার সঙ্গে উল্লম্ব রেখার কোণের কোনও পরিবর্তন হয় না অর্থাৎ সুতাটি একটি শঙ্কুপথ পরিক্রমা করে। সুতাটির টান নির্ণয় করুন — প্রথম একটি জাড্য ফ্রেম নিয়ে এবং পরে বলের সঙ্গে সমবেগে ঘুরন্ত অজাড্য ফ্রেম নিয়ে।
2. পৃথিবীর ঘোরার দরুন ভূপৃষ্ঠের যে কোনও বিন্দু পূর্বে সরে যাচ্ছে — কাজেই মনে হতে পারে যে উপর থেকে মুক্তভাবে পড়া ঢিল খানিকটা পশ্চিমে এসে পড়বে, কিন্তু দেখা যায় যে ঢিলের বিচ্যুতি পূর্বদিকে। অঙ্ক না কষে সাধারণভাবে এর ব্যাখ্যা দিন।
3. করিয়োলির বলের ব্যঞ্জক ব্যবহার করে দেখান যে মুক্তভাবে পড়া ঢিল শুরুতে h উচ্চতায় থাকলে ভূমিতে পড়ে তার বিচ্যুতি হবে $\frac{\omega}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}$ । (এখানে g ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ। ঐ স্থানের অক্ষাংশ শূন্য ধরে নিন)।

4.6 চলমান লিফটে ওজনের হ্রাস বৃদ্ধি

ত্বরিত নির্দেশতন্ত্রে উদ্ভুত অলীকবলের সঙ্গে বাস্তব বলের সংযোগ ঘটিয়ে অনেক প্রশ্নের উত্তর সহজেই খুঁজে পাওয়া যায়। লিফ্টকে আমাদের উদাহরণ হিসাবে নেওয়া যাক। স্প্রিং তুলাদণ্ডে কিছু ওজন ঝুলিয়ে লিফটে তোলা হল। মনে করুন এক কিলোগ্রাম সবজি স্প্রিং তুলায় টাঙানো হয়েছে। এবারে স্প্রিং এর সূচকটি পর্যবেক্ষণ করে যাব। লিফ্ট উপরে উঠতে শুরু করল। সূচক ক্রমশ বেশী পাঠ নির্দেশ করছে। অর্থাৎ আপাত ওজন এক কিলোগ্রামের বেশী হয়েছে। $\vec{a}$ ত্বরণের জন্য লিফ্ট একটি অজাড্য ফ্রেম এবং অলীক বল $-m\vec{a}$ ক্রিয়া করছে। সুতরাং মোট নিম্নদিকে বল হবে অভিকর্ষ বল $m\vec{g}+$ অলীক বল $m\vec{a}$ এবং ওজনের পাঠ পাওয়া যাচ্ছে $\vec{F} = m\vec{g} + m\vec{a}$ । ত্বরণ শেষ হল, এবার লিফ্ট সমবেগে উপরে উঠছে। ত্বরণ নেই কাজেই অলীক বলও নেই এবং সূচকটি তার প্রাথমিক অবস্থানে ফিরে আসল অর্থাৎ এক কিলোগ্রাম ওজন নির্দেশ করল। আমরা এতক্ষণে সর্বোচ্চ তলের কাছাকাছি এসে পড়েছি। লিফ্টের গতি কমে আসছে (মন্দন)। y স্প্রিং তুলাতে ওজন এক কিলোগ্রামের থেকে কম দেখাচ্ছে। লিফ্টের গতি যখন কমতে শুরু করে ত্বরণ ভেক্টরের অভিমুখ তখন নীচের দিকে হয়। ফলে অলীক বল এর অভিমুখ খাড়া উপর দিকে, অভিকর্ষের বিপরীতে। এক্ষেত্রে $\vec{a}$ এর মান ঋণাত্মক, সুতরাং স্কেলে $m\vec{g}$ এর থেকে কম মান পাওয়া যাবে। লিফ্টটি থেমে গেল, সূচকটিও প্রাথমিক অবস্থানে ফিরে এল। এবার নামার পালা, লিফ্টের বেগ বাড়ছে। ত্বরণ ভেক্টরের অভিমুখ নীচের দিকে। ফলে অলীক বল উর্দ্ধমুখী। $\vec{F} = m\vec{g} - m\vec{a}$ 4.42 বোঝার ওজন এক কিলোগ্রাম থেকে কমে যাচ্ছে। লিফ্টের গতি আবার সুষম হয়ে এল, অতিরিক্ত ওজনও আর থাকল না। যাত্রাপথের শেষভাগে লিফ্টের গতি কমতে লাগল। বোঝার ওজন আবার এক কিলোগ্রামের বেশী হয়ে পড়ল। নির্দেশতন্ত্র অর্থাৎ লিফ্ট অবাধে পড়তে থাকলে কি হবে? অবাধে পতনশীল নির্দেশতন্ত্রের ক্ষেত্রে $\vec{a} = \vec{g}$, তাহলে সমীকরণ থেকে মোট বল $\vec{F} = 0$ । সুতরাং বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বল

শূন্য এবং $\vec{F}$ শূন্য হওয়ার দরুণ বস্তুর ওজন স্প্রিং তুলা দণ্ডে শূন্য দেখাবে — বস্তুটির ভারহীন অবস্থা। কৃত্রিম উপগ্রহে ভারহীনতার কারণ একই যদিও গণনা একটু অন্যরূপ।

4.7 অক্ষাংশের সঙ্গে অভিকর্ষজ ত্বরণ g এর পরিবর্তন

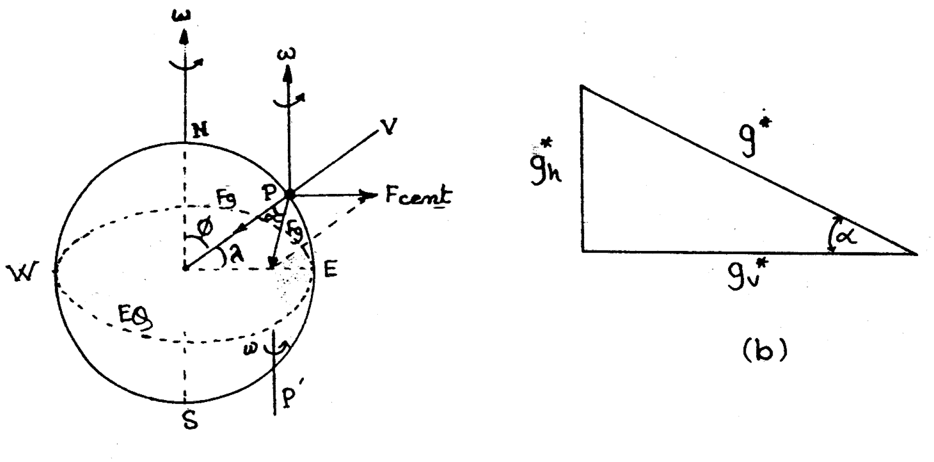
পৃথিবী নিজ উত্তর - দক্ষিণ অক্ষে পশ্চিম থেকে পূর্বে দৈনিক এক পাক ঘোরে। আবর্তনের কৌণিক বেগ সেকেন্ডে $2\pi/86164 = 7\cdot 292\times 10^{-5}$ রেডিয়ান। মনে করি ভূপৃষ্ঠের কাছে কোন বিন্দুতে P একটি কণা পৃথিবী সাপেক্ষে স্থির আছে। P বিন্দুর অক্ষাংশ λ। সুতরাং পৃথিবীর নির্দেশতন্ত্রে কণার উপর অভিকর্ষজ বল $\vec{F}_g = mg$ এবং অপকেন্দ্রিক বল $\vec{F}cent$ (চিত্র 4.5)। কণার উপর করিওলিবল এর মান শূন্য কারণ ঘুরন্ত তন্ত্র সাপেক্ষে কণাটি স্থির। (4.32) সমীকরণ থেকে পাই $Fcent = m\omega^2 R\sin\phi = m\omega^2 R\cos\lambda[\phi = 90-\lambda]$, যেখানে R পৃথিবীর ব্যাসার্ধ। $\vec{F}_g$ এবং $\vec{F}cent$ লব্ধি বল $\vec{F}_g{}^*$। এই বলগুলির অরীয় ও অনুপ্রস্থ উপাংশে বিশ্লেষ এর সময় আমাদের মনে রাখতে হবে অরীয় উপাংশ এবং অনুপ্রস্থ উপাংশ যথাক্রমে পৃথিবী পৃষ্ঠের উলম্ব ও অনুভূমিক দিকে থাকে। g* এর উলম্ব এবং অনুভূমিক উপাংশ $g_v{}^*$ এবং $g_h{}^*$ হলে [চিত্র 4.5 (a) (b)]

$$mg_v^* = F_g - Fcent^{\cos\lambda} = mg - m\omega^2 R\cos^2\lambda \qquad (4.33)$$

$$g_v^* = g - \omega^2 R\cos^2\lambda$$

$$mg_h^* = Fcent^{\sin\lambda} = m\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda \qquad (4.34)$$

$$g_h^* = \omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda$$



(a) (b)

চিত্র 4.5

অপকেন্দ্র ত্বরণের সর্বোচ্চ মান $\overrightarrow{Fcent}/m = \omega^2\vec{R}$

$$\omega^2\vec{R} = \left(\frac{2\pi \text{ রেডিয়ান}}{24\times60\times60}\right)^2 \times\left(6\cdot37\times10^6\,m\right) = 3\cdot4\times10^{-2}\,ms^{-2}$$

তাহলে দেখা যাচ্ছে $\omega^2\vec{R} << g$ এবং $g_v^* \approx g$ অর্থাৎ g_v^* (আপাত উলম্ব) এবং g (যথার্থ উলম্ব) এর মধ্যবর্তি কোণ খুব ছোট। চিত্র 4.5 (b) থেকে $\tan\alpha \approx \alpha = \frac{g_h^*}{g_v^*} = \frac{\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda}{g}$

$$\text{বা} \qquad \tan\alpha \approx \alpha = \frac{\omega^2 R\sin 2\lambda}{2g}$$

$\tan\alpha$ এর মান সর্বোচ্চ হবে যখন $\lambda = 45^\circ$

$$\alpha_{max} = \frac{\left(3.4\times10^{-2}\,ms^{-2}\right)}{2\times9.8ms^{-2}} = .0017 \text{ রেডিয়ান } = 0^\circ 6'$$

সুতরাং কার্যত $g_h^* = 0,\ g_v^* = g^*$

সমীকরণ (4.33) কে লেখা যায়

$$g^* = g - \omega^2 R\cos^2\lambda \tag{4.35}$$

মেরুতে $\lambda = 90^\circ$, $g^* = g$ অর্থাৎ $g_{Pole}\left(g_{\text{মেরু}}\right) = g$

নিরক্ষ অঞ্চলে $\lambda = 0$ $g_h^* = 0$ $g_v^* = g - \omega^2 R$

অতএব $g_e\left(g_{\text{বিষুব}}\right) = g - \omega^2 R$

(4.35) সমীকরণের সাহায্যে

$$g^* = g - \omega^2 R\left(1-\sin^2\lambda\right) = \left(g-\omega^2 R\right) + \omega^2 R\sin^2\lambda$$

তাহলে পৃথিবীর আবর্তনের জন্য মেরুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ নিরক্ষ অঞ্চলের চেয়ে $3.4\times10^{-2}\,ms^{-2}$ বেশী হয়। এই মান পরীক্ষালব্ধ মানের চেয়ে কিছু কম।

4.8 প্রাকৃতিক ঘটনায় করিয়োলি বলের প্রভাব

আবার একবার চিত্র (4.5a) দেখুন। P এবং P′ উত্তর ও দক্ষিণ গোলার্ধে অবস্থিত। যদিও পৃথিবীর ঘূর্ণণ দিক সর্বত্রই এক কিন্তু আপাত দৃষ্টিতে P বিন্দুতে যেখানে $\vec{\omega}$ উর্ধ্বমুখী, P′ এ সেটি মনে হবে নিম্নমুখী। P বিন্দুতে এজন্য উল্লম্ব দিকে $\vec{\omega}$ র উপাংশ উপরের দিকে কিন্তু P′ বিন্দুতে উল্লম্ব উপাংশ নিচের দিকে। এবার মনে করুন একটি নদী বয়ে যাচ্ছে। তার গতিমুখ অনুভূমিক ধরে নিন। করিয়োলি বল $2m(\vec{v}\times\vec{\omega})$ গতিবেগ ও $\vec{\omega}$ উভয়ের সঙ্গেই লম্বদিকে বলে এর দুটি উপাংশ থাকবে একটি অনুভূমিক তার মান $2m\,v\,\omega\sin\lambda$ এবং নদীর গতির লম্বদিকে। লক্ষনীয় যে $\vec{\omega}$ 'র উল্লম্ব উপাংশ বিপরীতমুখী হওয়ার জন্য এই বলটি উত্তর ও দক্ষিণ গোলার্ধে বিপরীতমুখী হবে। ফলে উত্তর গোলার্ধে নদীর গতির ডানদিকে ও দক্ষিণ গোলার্ধে নদীর গতির বাঁদিকে অনুভূমিক করিয়োলি বল কার্যকর হবে। এজন্য উত্তর গোলার্ধে নদীর ডান পার অপেক্ষাকৃত বেশী ভাঙ্গবে আর দক্ষিণ গোলার্ধে ভাঙন বেশী হবে বাঁদিকে। বাস্তবে এরূপ পার্থক্য দেখা গেছে।

সাইক্লোনেও করিয়োলি বলের গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা আছে। মনে করুন কোনও এক স্থানে বায়ুর একটি নিম্নচাপ অঞ্চল সৃষ্ট হয়েছে। যদি কেবলমাত্র চাপের গতির জন্য উদ্ভুত বল থাকত, তবে আশেপাশের বাতাস সরাসরি ঐ নিম্নচাপ অঞ্চলে ঢুকে পড়ত। কিন্তু যেমন নদীর বেলা, তেমনি এখানেও বায়ু গতিশীল হলে এবং তার $\vec{\omega}$ 'র অভিলম্ব দিকে গতির উপাংশ থাকলেই করিয়োলি বল সক্রিয় হয়। ফলে বাতাস ঐ নিম্নচাপ অঞ্চলে না ঢুকে ওর চারিদিকে ঘুরতে থাকে। অবশ্য এখানেও উত্তর ও দক্ষিণ গোলার্ধে করিয়োলি বল বিপরীতমুখী হবার জন্য সাইক্লোনের ক্ষেত্রেও বাতাসের আবর্তনের দিক দুই গোলার্ধে বিপরীতমুখী হয়।

করিয়োলি বলের প্রভাবে পতনশীল বস্তুরও উল্লম্বরেখা থেকে কিছু বিচ্যুতি হয়। প্রশ্নমালা 3 এর 3 নং প্রশ্নটিতে এই ব্যাপারটি স্থান পেয়েছে এবং উত্তরমালায় সমাধান আলোচিত হয়েছে।

4.9 ফুঁকোর দোলক পরীক্ষা — পৃথিবীর আহ্নিক ঘূর্ণনেরর প্রত্যক্ষ প্রমাণ

ফুঁকোর দোলক একটি সাধারণ গোলক কিন্তু তার দোলন একটি সরলরেখায় সীমিত নয়। দোলন অনুভূমিক তলে ঘটে এবং উল্লম্ব দিকে সরণ অবহেলা করা চলে।

ধরা যাক অনুভূমিক তলটি $x-y$ সমতল। সাধারণ দরল দোলকের ক্ষেত্রে একটি মাত্র সরলরেখা বরাবর দোলন হয় এবং গতি সমীকরণ লেখা যায়।

$$\ddot{x}+\frac{gx}{\ell}=0$$

যেখানে P অভিকর্ষজ ত্বরণ এবং ℓ দোলকের সুতোর দৈর্ঘ্য (আসলে লম্বন বিন্দু থেকে দোলকের

ভরকেন্দ্রর দূরত্ব) ফুকোর দোলকে x'র মত y দিকেও দোলন হচ্ছে, আর করিয়োলি বল $2m(\vec{v}\times\vec{\omega})$ ক্রিয়াশীল বলে আমরা ধরব। এভাবে দোলকের সীকরণ হবে দুটি

$$\ddot{x}+\frac{gx}{\ell}-2\omega_z\dot{y}=0 \tag{4.36}$$

$$\ddot{y}+\frac{gy}{\ell}-2\omega_z\dot{x}=0 \tag{4.37}$$

$2m(\vec{v}\times\vec{\omega})$ র x এবং y উপাংশ যথাক্রমে $2m\omega_z\dot{y}$ এবং $-2m\omega_z\dot{x}$ সমীকরণ (4.36) ও (4.37) এ ব্যবহার করা হয়েছে।

সমীকরণ (4.37) কে $i\left(=\sqrt{-1}\right)$ দিয়ে গুণ করের (4.36)র সঙ্গে যোগ করে পাওয়া যায়,

$$\ddot{\xi}+\frac{g}{\ell}\xi+2\,i\,\omega\,\dot{\xi}=0 \tag{4.38}$$

পরীক্ষামূলক ভাবে সমাধান $\xi=Ae^{ipt}$ ধরে সমীকরণ (4.38) এ বসিয়ে আমরা পাই,

$$\left(-p^2+\frac{g}{\ell}-2\omega_z p\right)A=0$$

কাজেই সার্থক সমাধানের শর্ত

$$p^2+2\omega_z p-\frac{g}{\ell}=0$$

অর্থাৎ $p=-\omega_z\pm\sqrt{\omega_z^2+\frac{g}{\ell}}$

অতএব সাধারণ সামাধান হবে,

$$\xi=e^{-i\omega_z t}\left[Ae^{i\left(\sqrt{\omega_z^2+\frac{g}{\ell}}\right)t}+Be^{-i\left(\sqrt{\omega_z^2+\frac{g}{\ell}}\right)t}\right]$$

পরীক্ষার ℓ এর মান এরূপ ছিল যে $\frac{g}{\ell}\sim 1\sec^{-2}$ (অর্থাৎ $\ell\sim 10m$) আর ω_z যদি পৃথিবীর আহ্নিক

কৌণিক বেগের উল্লম্ব উপাংশ হয়, তবে $\omega_z = \omega \sin\lambda \le 0\cdot25 \text{ hours}^{-1}$; সুতরাং $\omega_z << \frac{g}{\ell}$ । সুতরাং সমীকরণ (4.39)র বন্ধনীর ভিতরের রাশি একটি সরল দোলন নির্দেশ করছে যার পর্যায়কাল কয়েক সেকেন্ড মাত্র। বন্ধনীর বাইরের $e^{-i\omega_z t}$ পদটিও সরল দোলন বোঝাচ্ছে কিন্তু তার দোলনকাল 24 ঘন্টার সঙ্গে তুলনীয়। সুতরাং আমরা যদি পর্যবেক্ষণ কয়েক মিনিটে সীমিত রাখি তাহলে $e^{-i\omega_z t}$ পদটির কোনও প্রভাব দেখতে পাব না - শুধু মাত্র বন্ধনীর অন্তর্গত পদের জন্য একটি সরল দোলন দেখব। কিন্তু যদি আমরা প্রথম পর্যবেক্ষনের কয়েক ঘন্টা পরে আবার পর্য্যবেক্ষণ করি, তাহলে $e^{-i\omega_z t}$ পদটির জন্য দোলনতল বা দোলনরেখার দিক্ পরিবর্তন দেখব।

গাণিতিক বিশ্লেষণের জন্য ধরুন $t = 0$ তে $y = \dot{y} = 0$ অর্থাৎ তখন দোলন পুরোপুরি কেবল x -অক্ষ বরাবর। সমীকরণ (4.39)এ এই শর্ত প্রয়োগ করে পাই, (t শূন্যর কাছাকাছি অবস্থায়)

$$\xi = a\cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}.t \quad (\ x_0 = a,\ \dot{x}_0 = 0 \text{ ধরে})$$

কয়েক ঘন্টা পরে $t = T$ তে সমীকরণ (4.39) দেবে ($t \cong T$ ধরে)

$$\xi = a\cos\sqrt{\frac{g}{l}}.t\left(\cos\omega_z T - i\sin\omega_z T\right)$$

অর্থাৎ

$$x = a\cos\omega_z T\cos\sqrt{\frac{g}{l}}.t$$

$$y = -a\sin\omega_z T\cos\sqrt{\frac{g}{l}}.t$$

এখন মনে হবে যে দোলন আর x অক্ষে সীমিত নয় — দোলনের দিক ঘুরে গেছে, এখন তার দিক x অক্ষের সঙ্গে $(-\omega_z T)$ কোণ করে আছে। অর্থাৎ আমরা বলতে পারি যে সত্যই যদি পৃথিবী একটি অজাড্য s ফ্রেম যার কৌণিক গতি ω হয়, তবে অলীক বল (করিয়োলি বল) এর জন্য আমরা দেখব যে দোলনরেখা বা দোলনতল ঘুরে যাচ্ছে, এই ঘোরার কৌণিক বেগ লক্ষ্য করে আমরা $\omega_z = \omega\sin\lambda$ মান নির্ণয় করতে পারব। এভাবে ফুকো $\omega\sin\lambda$ র মান নির্ণয় করে, স্থানীয় অক্ষাংশ λ র মান বসিয়ে ω র মান বের করেছিলেন। তিনি দেখলেন যে ω র প্রতিসঙ্গী পর্যায়কাল $\left(2\pi/\omega\right)$র মান 24 ঘন্টা, অর্থাৎ তিনি আহ্নিক ঘুর্ণনের বেগ আকাশের দিকে না তাকিয়েও নির্ণয় করতে পারলেন।

এই পরীক্ষার গুরুত্ব কি? আপাতদৃষ্টিতে চন্দ্র, সূর্য্য, তারা ইত্যাদি সব জ্যোতিষ্কই দিনে একবার পৃথিবীর চারদিকে ঘুরে আসছে। এই ঘটনায় দুটি বিকল্প ব্যাখ্যা হতে পারে — প্রথমত যে সত্যই জ্যোতিষ্করা ঘুরন্ত, পৃথিবী স্থির। বিকল্প অনুমাণ হতে পারে যে পৃথিবীই ঘুরন্ত, জ্যোতিষ্করা স্থির। ফুকো তার পরীক্ষা দিয়ে প্রমাণ করলেন যে জাড্য ফ্রেমের সাপেক্ষে পৃথিবী ঘুরছে, জ্যোতিষ্করা জাড্য ফ্রেমের সাপেক্ষে ঘুরছে না।

4.10 সারাংশ

- বক্রগতির বিশ্লেষণে অনেক সময়েই কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্র ব্যবহার না করে সমতলীয় ধ্রুবীয় নির্দেশতন্ত্র ব্যবহার করা সুবিধাজনক। আপনি ঐরূপ নির্দেশতন্ত্রে গতিবেগ ও ত্বরণ ভেক্টরদের উপাংশের ব্যঞ্জক জেনেছেন।
- বিশুদ্ধ ঘূর্ণন, কৌণিক ভরবেগ ইত্যাদি শব্দের সংজ্ঞা আপনি জেনেছেন। আপনি একটি নতুন সংরক্ষণ সূত্র কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রের সঙ্গে পরিচিত হয়েছেন এবং ঐ সূত্রের কিছু প্রয়োগের কথা জেনেছেন।
- বিশুদ্ধ ঘূর্ণনের ক্ষেত্রে গতিশক্তি ও কৌণিক ভরবেগের মান নির্ণায়ক ব্যঞ্জুকের সঙ্গে আপনি পরিচিত হয়েছেন এবং সেই প্রসঙ্গে জাড্য ভ্রামক কথাটির গুরুত্ব বুঝেছেন।
- জাড্য এবং অজাড্য ফ্রেমের পার্থক্য আপনি দেখেছেন এবং কিভাবে অজাড্য ফ্রেমে অলীক বলের অবতারণা করে গতিসূত্রের শুদ্ধতা বজায় রাখা যায় তা দেখেছেন।
- বিভিন্ন অলীক বলের বহু ঘটনার গুরুত্বপূর্ণ ঘটনার প্রভাব আপনি উপলব্ধি করেছেন।
- ফুকোর সরল পরীক্ষার সাহায্যে পৃথিবীর আহ্নিক ঘূর্ণনের প্রমাণ ও মান নির্ণয়ের কথা আপনি জেনেছেন।

4.11 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. একটি কণার কৌণিক বেগ মিনিটে 30°। কণাটির বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ 1m হলে তার রৈখিক বেগ কত?
2. যদি অরীয় ও অনুপ্রস্থ ত্বরণ উভয়ই শূন্য হয়, তবে পথরেখা কি হবে? সমতল ধ্রুবীয় নির্দেশতন্ত্র ব্যবহার করে গাণিতিক বিশ্লেষণ করে পথরেখার $(r\,;\,\theta)$ সমীকরণ নির্ণয় করুন।
3. আহ্নিক আবর্তন ছাড়াও পৃথিবীর সূর্যের চারিদিকে যে বাৎসরিক গতি আছে, সেজন্য 1kg ভরের উপর অপকেন্দ্রিক বলের মান নির্ণয় করুন।

4. নিরক্ষরেখায় পৃথিবীর ঘূর্ণন ভেক্টরের সঙ্গে উল্লম্ব রেখায় কোণ কত? একটি কণার গতি নিরক্ষরেখা অঞ্চলে ঘূর্ণন ভেক্টরের অনুভূমিক লম্বদিকে। কণাটির বেগ কত হলে করিয়োলির বল বলটির ওজনের সমান হবে? (এ থেকে আপনি ধারণা করতে পারবেন যে সাধারণত করিয়োলি বলের মান কত ক্ষুদ্র!)

5. যদি পৃথিবী একটি জাড্য ফ্রেম হত, তাহলে ফুকোর পরীক্ষায় কি দেখা যেত? আকাশের জ্যোতিষ্কদের গতির বিষয়েই বা কি সিদ্ধান্ত হত?

6. কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রে ত্বরণের উপাংশ যদি ধ্রুবক হয়, তবে ত্বরণের অরীয় ও অনুপ্রস্থ উপাংশও কি ধ্রুবক হবে? যদি না হয় তবে তার ব্যাখ্যা কি?

4.12 উত্তরমালা

অনুশীলনী —1

1. শর্ত অনুযায়ী

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}-h^2u^3=\frac{k}{r^2}=ku^2$$

$u\neq 0$ সুতরাং

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{k}{h^2}$$

অথবা $\dfrac{d^2}{d\theta^2}\left(u+{}^{k}\!/_{h^2}\right)+\left(u+\dfrac{k}{h^2}\right)=0$

এর সমাকলন করে পাওয়া যায়,

$$\left(u+{}^{k}\!/_{h^2}\right)=a\cos(\theta+\theta_0)-[a,\ \theta_0\ \text{সমাকলন ধ্রুবক}]$$

2. কৌণিক সরণ 2π হলে বৃত্তের পূর্বের বিন্দুতে কণাটি ফিরে এসেছে, অতএব রৈখিক সরণ শূন্য।

3. $v=r\,\omega$ সম্পর্কটিতে ধরা হয়েছে অণুপরিমান চাপের দৈর্ঘ্য $r\,d\theta$ সেটি শুদ্ধ হবে যদি θ রেডিয়ানে প্রকাশিত হয়। অতএব ω র একক রেডিয়ান সেকেন্ড$^{-1}$।

অনুশীলনী — 2

1. বৃত্তকার পথে গতির শর্ত

$$m\,\omega^2 r = \frac{m\nu^2}{r} = \frac{km}{r^2}$$

অতএব $\omega = \dfrac{\sqrt{k}}{r^{3/2}}$ এবং $\nu = \dfrac{\sqrt{k}}{r^{1/2}}$

2. আয়তন $\frac{1}{8}$ হলে দূরত্ব $\frac{1}{2}$ হয়েছে। যেহেতু জাড্য ভ্রামক $\alpha\, r^2$, জাড্য ভ্রামক $\frac{1}{4}$ হয়েছে এবং কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি থেকে w, 4 গুণ বৃদ্ধি পেয়েছে। গতিশক্তি $\frac{1}{2}I\,\omega^2$র পরিবর্তন হয়েছে $\frac{1}{4}\times 4^2$ অর্থাৎ 4 গুণ বৃদ্ধি পেয়েছে।

অনুশীলনী — 3

1. চিত্র (4.6) দেখুন। জাড্য ফ্রেমে অভিকেন্দ্রিক বল $-m\,\omega^2\vec{r}$ কেন্দ্রাভিমুখী (সেজন্য ঋণাত্মক চিহ্ন) এবং গতি সমীকরণ হবে,

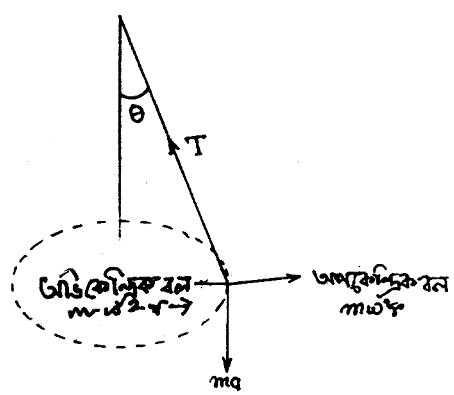
$$T\cos\theta = -m\omega^2 r$$

বল = ভর $\times$ ত্বরণ

ঘুরন্ত ফ্রেমে অলীক বল $m\omega^2 r$ অপকেন্দ্রিক কিন্তু কোনও ত্বরণ নেই কাজেই,

$$T\cos\theta + m\omega^2 r = 0$$

কাজেই দুভাবেই সমীকরণ একই কিন্তু দৃষ্টিভঙ্গী আলাদা।



চিত্র 4.6

2. ধরা যাক ঢিলটি h উচ্চতায় প্রথমে ছিল। ঢিলটি পৃথিবীর সঙ্গে একই কৌণিক বেগে ঘুরছে — সুতরাং ওর প্রাথমিক পূর্ব দিকে গতিবেগ ছিল $(R+h)\omega$ (R পৃথিবীর ব্যাসার্ধ) আর ভূপৃষ্ঠের বেগ হল $R\,\omega$। এজন্যই ঢিলটি কিছুটা পূর্বে পড়ে।

3. অক্ষাংশ শূন্য হওয়ার দরুন উল্লম্ব দিক ও পৃথিবীর ঘূর্ণন ভেক্টরের দিক পরস্পরের লম্ব এবং পড়ন্ত বস্তুর উল্লম্ব বেগ ν হলে করিয়োলি বল হবে $2m(\vec{\nu}\times\vec{\omega})$ পূর্বদিকে। সুতরাং গতি সমীকরণের পূর্বদিকের উপাংশ হবে (পূর্ব দিকে x অক্ষ নিয়ে)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 2m(\vec{\nu}\times\vec{\omega})$$
$$= 2\,m\,\nu\,W$$

উল্লম্ব দিকে করিয়োলি বল অবহেলিত কাজেই $\nu = gt$ এবং $h = \frac{1}{2}gt^2$ এবার এগুলি ব্যবহার করে উপরের সমীকরণটি দাঁড়ায়,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 2m\omega gt$$

এবং সমাকলন করে,

$$\frac{dx}{dt} = \omega gt^2 \text{ এবং } x = \frac{1}{3}\omega gt^3 = \frac{\omega}{3}g\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^3 = \frac{w}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}$$

সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

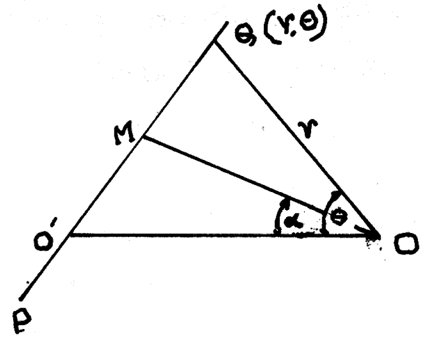
1. $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান। সুতরাং কৌণিক বেগ সেকেন্ডে $\frac{\pi}{6\times 60}$ রেডিয়ান রৈখিক বেগ

$$1\times\frac{\pi}{360}\,ms^{-1}$$

2. শর্ত অনুযায়ী ত্বরণ একেবারেই নেই। সুতরাং গতি হবে একটি সরলরেখা বরাবর সমবেগে। ত্বরণ শূন্য, এটি সমীকরণ (4.6)এ ব্যবহার করে পাওয়া যায় $r^2\dot{\theta} = h$ (ধ্রুবক) এবং

$$a_r = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - h^2u^3 = 0$$

4.3 অনুচ্ছেদের উদাহরণ দেখুন)



চিত্র 4.7

অথবা $\dfrac{d^2u}{d\theta^2}+u=0 \to u=a\cos(\theta-\alpha)$ (a, α সমাকলন ধ্রুবক)

PQ রেখার উপর মূলবিন্দু থেকে লম্ব $OM = r\cos(\theta-\alpha)$। (চিত্র 4.7 দেখুন)।

অথবা $u=\dfrac{1}{r}$

লিখে $u=\dfrac{1}{OM}\cos(\theta-\alpha)=a\cos(\theta-\alpha)$ (OM ধ্রুবককে a^{-1} লিখে)

অর্থাৎ আমাদের (u, θ) বা (r, θ) সমীকরণ একটি সরলরেখা নির্দেশ করছে।

3. অপকেন্দ্রিক বলের মান $\omega^2 r$। এখানে যেহেতু পর্যায় কাল 1 বৎসর, সুতরাং $\omega \approx \dfrac{2\pi}{3\times 10^7}s^{-1}$ এবং r সূর্য থেকে পৃথিবীর দূরত্ব $\sim 1\cdot 5\times 10^{11}$m, কাজেই 1 kg ভরের উপর বলের মান $\left(\dfrac{2\pi}{3\times 10^7}\right)^2 1\cdot 5\times 10^{11}$ নিউটন $\cong 6\times 10^{-3}$N (আসন্ন মান)।

4. ঘূর্ণন ভেক্টরটি অনুভূমিক উত্তর দক্ষিণ দিকে। পূর্ব পশ্চিম দিকে গতিবেগ হলে করিয়োলি বেগ হবে উল্লম্ব দিকে। করিয়োলি বলের মান ওজনের সমান হলে $2m\nu\,\omega = mg$ অথবা

$$\nu = \frac{g}{2\omega} = \frac{9\cdot 8\times 86400}{2.2\pi}$$
$$\cong 6800 ms^{-1}$$

5. যদি পৃথিবী জাড্য ফ্রেম হত, তাহলে করিয়োলি বল থাকত না এবং ফুকো দোলকের দোলনরেখা বা দোলনতলের কোনও পরিবর্তন হত না। তখন বলা হত যে পৃথিবী নয়, দূরের জ্যোতিষ্কগুলিই ঘুরছে এবং তাদের স্থিরাবস্থা ফ্রেম একটি অজাড্য ফ্রেম।

6. সমীকরণ (4.6) দেখুন — $\ddot{x}, \ddot{y}$ ধ্রুবরাশি হলেও a_r এবং $a_\perp$ ধ্রবক হবে না যদি r, θ সময়ের উপর নির্ভরশীল হয়। কাজেই ব্যাখ্যা এই যে যদিও ত্বরণ ভেক্টরটি সময়ের উপর নির্ভরশীল নয়, অরীয় ও অনুপ্রস্থ উপাংশ দুটি পরিবর্তনশীল দিকে নেওয়া হয়েছে — তাই তারা ধ্রুবক নয়।

একক 5 □ দৃঢ় বস্তুর গতিবিদ্যা

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা

বলবিদ্যার প্রাথমিক যে বিষয়গুলি পূর্ববর্তী এককগুলিতে আলোচিত হয়েছে, সেখানে প্রধানতঃ বস্তুকণা ও তার গতির উপর বলের প্রভাবের কথাই ভাবা হয়েছে। কিন্তু প্রাত্যহিক জীবনে আমরা চারপাশের প্রকৃতিতে আদর্শ বস্তুকণা বা বিন্দুভরের সাক্ষাৎ প্রায় পাই না বললেই চলে। একটি ঘুরন্ত লাটিম অথবা ইয়ো ইয়ো, স্পিন বা সুইং করা ক্রিকেটবল, চলন্ত সাইকেল, গড়াতে থাকা একটি বোল্ডার, সূর্যপরিক্রমারত পাক

খাওয়া পৃথিবী, আবর্তনরত গ্যাসদানব সূর্য, এমনকি একজন নৃত্যরত ব্যালেরিনা বা পড়ন্ত ডাইভার — গতিশীল সব কিছুই বিস্তৃত আকারের এবং অসংখ্য বিন্দুভরের সমন্বয়ে গঠিত বলে মনে করা যায়। তাই নির্দিষ্ট মাত্রা বিশিষ্ট বিস্তৃত বস্তুর গতি আলোচনার পদ্ধতি আমাদের জানা দরকার।

বিস্তৃত আকারের বস্তুর মধ্যে আবার বিশেষ একটি আদর্শ শ্রেণী হল দৃঢ়বস্তু (Rigid body)। উপরের উদাহরণে লাটিম বা ইয়ো ইয়ো হল এর কাছাকাছি উদাহরণ। এ ধরনের বস্তুর আকার কখনও পরিবর্তিত হয় না বলে এদের গতি আলোচনার পক্ষে সুবিধাজনক। তাই আমরা প্রথমে দৃঢ়বস্তু কাকে বলা হয় তা শিখব। এদের সরলতম গতি আবার দুই প্রকার হতে পারে ঃ রৈখিক (Translational) গতি এবং ঘূর্ণন (Rotational) গতি। দৃঢ়বস্তুর সাধারণ গতি সরণ এবং ঘূর্ণনের সমন্বয়ে গঠিত হয়, তা আমরা দেখব। দৃঢ়বস্তুর রৈখিক গতির ক্ষেত্রে ভরকেন্দ্রের (Cente of mass) ধারণা খুবই কার্যকরী। কারণ, এ ধরনের গতিকে শুধুমাত্র ভরকেন্দ্রে অবস্থিত একটি বিন্দুভরের গতির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। বস্তুকণার গতি বিষয়ে অন্যান্য এককে আমরা যা শিখেছি তা এক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যেতে পারে।

বর্তমান এককে তাই আমরা প্রধানতঃ দৃঢ়বস্তুর ঘূর্ণনগতির উপর মনোনিবেশ করব। একটি বস্তুকণার ঘূর্ণন বা কৌণিক গতি সম্বন্ধে পর্যায় 1 এর একক 4 -এ আলোচনা করেছি আমরা। আপনারা কৌণিক সরণ, কৌণিক গতিবেগ, কৌণিক ত্বরণ, জড়তা ভ্রামক, ঘূর্ণন গতিশক্তি, কৌণিক ভরবেগ, টর্ক বা বলের ভ্রামক ইত্যাদি বিষয়গুলি একটি বিন্দুভরের জন্য শিখেছেন। এখন আমরা এই ধারণাগুলি দৃঢ় বস্তুর ক্ষেত্রে বিস্তৃত করব। এর ফলে ঘূর্ণনরত বিভিন্ন বস্তুর গতি আমরা আলোচনা করতে পারব।

এছাড়া আমরা বর্তমান এককে আলোচনা করব কৌণিক ভরবেগের সূত্র, যা আপনারা একক 4-এ শিখেছেন। এই সূত্রটি শুধু দৃঢ়বস্তু নয়, অন্যান্য বিস্তৃত আকারের বস্তুর ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য। এর সাহায্যে আমরা যেমন একজন ব্যালেরিনা বা ডাইভারের গতি ব্যাখ্যা করতে পারব, তেমনি আবার মহাকাশের নিউটন নক্ষত্র (Neuton star) বা পালসার (Pulsar) এর অবিশ্বাস্য রকমের দ্রুত ঘূর্ণনের কারণও বুঝতে পারব।

উদ্দেশ্য

এই এককটি অধ্যয়ন করলে নীচের বিষয়গুলি আয়ত্ত করতে পারবেন ঃ

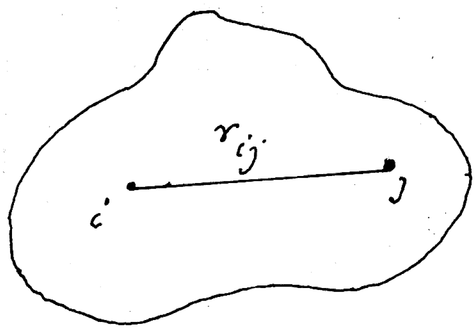
- একটি দৃঢ়বস্তুর সংজ্ঞা
- একটি দৃঢ়বস্তুর রৈখিক ও ঘূর্ণন গতির বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য
- একটি দৃঢ়বস্তুর সাধারণ গতির বৈশিষ্ট্য
- একটি বিশেষ পক্ষের সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুর জড়তা ভ্রামকের তাৎপর্য
- দৃঢ়বস্তুর ঘূর্ণন সংক্রান্ত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান

5.2 দৃঢ়বস্তু ও তার গতি

কণাগতিবিদ্যার যে কোন সমস্যা সমাধানের জন্য আমরা নিউটনের গতিসূত্রগুলিকে ব্যবহার করতে পারি। একটি বিস্তৃত বস্তু যে কক্ষগুলি দিয়ে গঠিত তার প্রতিটির ক্ষেত্রে নিউটনের সূত্র প্রয়োগ করে নীতিগতভাবে বস্তুটির গতি ব্যাখ্যা করা যায়। কিন্তু যে কোন ক্ষুদ্র বস্তুর ক্ষেত্রেও এরকম কণার সংখ্যা এত বেশি হবে যে এই পদ্ধতি ব্যবহারিক ক্ষেত্রে কাজে লাগানো অসম্ভব। তাই বিস্তৃত বস্তুর সাধারণ গতি সংক্রান্ত সমস্যা সমাধানের জন্য আমাদের কোন সহজতর পদ্ধতি বার করা দরকার। এটা করা যেতে পারে আমরা যদি বিস্তৃত বস্তুর একটি আদর্শ রূপ কল্পনা করি। যাকে বলা হয় দৃঢ়বস্তু।

5.2.1 দৃঢ়বস্তু কাকে বলে

দৃঢ়বস্তু বলতে আমরা বিন্দু ভরের সমন্বয়ে গঠিত একটি বিস্তৃত বস্তুকে বোঝাই, যার যে কোন দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব সর্বদা অপরিবর্তিত থাকে। পাশের চিত্রে (চিত্র 5.1) দুটি বিন্দু i ও j -এর মধ্যে দূরত্ব r_{ij} = ধ্রুবক। এটি একটি দৃঢ়বস্তু।



চিত্র 5.1 দৃঢ়বস্তুর যে কোন অবস্থানে r_{ij} = ধ্রুবক

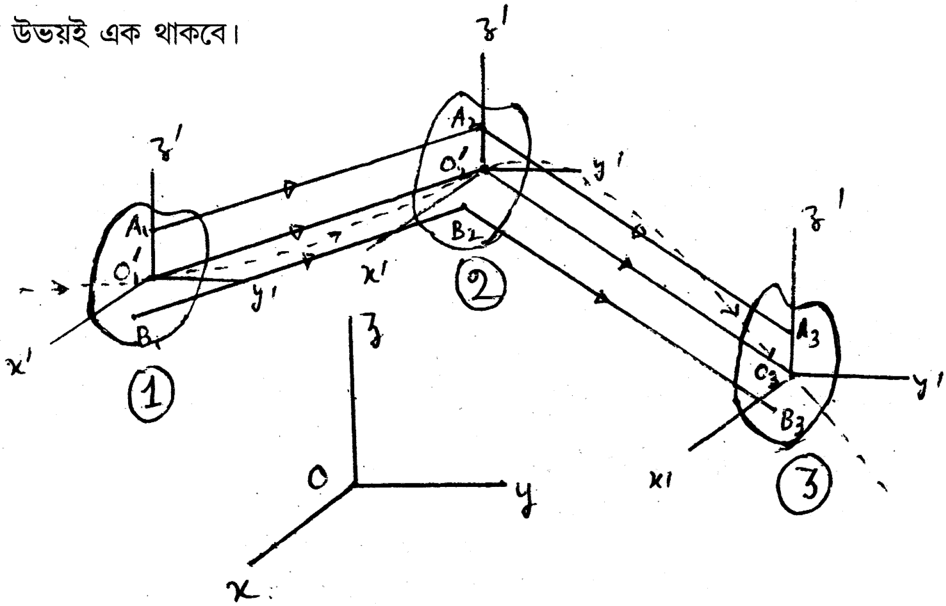
আপনারা উপরের সংজ্ঞা থেকে সহজেই বুঝতে পারবেন যে দৃঢ়বস্তুর যে কোন দুটি বিন্দু বা অংশের মধ্যে দূরত্ব সর্বদা অপরিবর্তিত থাকার ফলে বস্তুটির একটি নির্দিষ্ট আয়তন ও আকৃতি থাকবে, যে কোন রকম অবস্থায়ই যার কোন পরিবর্তন হবে না। বোঝাই যাচ্ছে, যে দৃঢ়বস্তু একটি আদর্শ ধারণা, কারণ প্রকৃতিতে যে কোন বস্তুই বলপ্রয়োগে কিছু না কিছু বিকৃতি দেখায়। তবু দৃঢ়বস্তুর এই ধারণা আমরা অনেক সময়েই বাস্তবে ব্যবহার করতে পারি, যদি বিকৃতির পরিমাণ নগণ্য হয়। একটি টেবিলটেনিস বল যখন টেবিলে ধাক্কা খায় তখন আমরা তার বিকৃতি উপেক্ষা করতে পারি। এটিকে দৃঢ়বস্তু ধরা যায়। কিন্তু একজন পোলভল্টার যে দন্ডের সাহায্য নিয়ে লাফ দেয় সেটির বিকৃতি উপেক্ষনীয় হতে পারে না। তাই সেটি দৃঢ়বস্তু নয়।

দৃঢ়বস্তুর আরও কয়েকটি উদাহরণ হল ঃ একটি লাটিম, একটি বুলেট, একটি নিউটন নক্ষত্র বা পালসার। প্রবাহী (Fluid) পদার্থ, অর্থাৎ তরল বা গ্যাসের গতির ক্ষেত্রে তার বিভিন্ন অংশের মধ্যে দূরত্ব অপরিবর্তিত থাকে না। তাই এগুলি দৃঢ় বস্তু নয়।

আবার গড় আহ্নিক গতি বা বার্ষিক গতির ক্ষেত্রে পৃথিবীকে কার্যকরীভাবে একটি দৃঢ়বস্তু ধরা যেতে পারে। কিন্তু তার উপরে সমুদ্রস্রোত বা বায়ুর গতি বিবেচনা করার জন্য নয়।

5.2.2 দৃঢ় বস্তুর বিশুদ্ধ রৈখিক গতি

কোন দৃঢ়বস্তুর বিশুদ্ধ রৈখিক বৈশিষ্ট্য হল, একটি নির্দিষ্ট অবকাশে তার প্রতিটি বিন্দুর একই সরণ ঘটবে। আপনারা জানেন, সরণ একটি ভেক্টর। সুতরাং বস্তুর প্রতিটি বিন্দুর অবস্থান পরিবর্তনের মান এবং দিক উভয়ই এক থাকবে।



চিত্র 5.2 — একটি দৃঢ় বস্তুর বিশুদ্ধ রৈখিক গতি

চিত্র 5.2 - এ একটি গতিশীল দৃঢ়বস্তুর বিশুদ্ধ রৈখিক গতি দেখানো হয়েছে। একটি বক্রপথে গতিশীল বস্তুটির তিনটি বিভিন্ন অবস্থান 1, 2 ও 3। বস্তুর তিনটি বিন্দু O', A এবং B -র সরণ প্রতিক্ষেত্রেই সমান ঃ

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{0_1'\,0_2'}$$

$$\overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{B_2B_3} = \overrightarrow{0_2'\,0_3'}$$

লক্ষ্য করে দেখুন, চিত্র 5.2-এ দেখানো হয়েছে যে, বস্তুর গতির সময়ে শূন্যে অবস্থিত নির্দেশতন্ত্র বা অক্ষ (space set of axes) Oxyz-এর সাপেক্ষে বস্তুর মধ্যে অবস্থিত নির্দেশতন্ত্র বা অক্ষ (Body set of axes) O'x'y'z' -এর কোন ঘূর্ণন বা দিক-পরিবর্তন (change of orientation) ঘটছে না। এটি বিশুদ্ধ রৈখিক গতির বৈশিষ্ট্য।

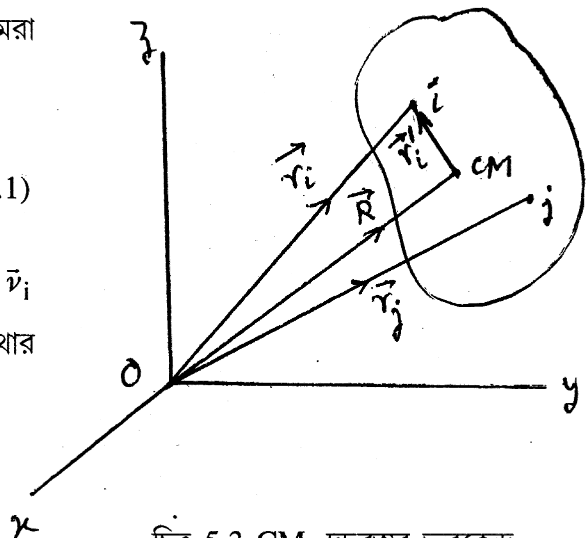
5.2.3 রৈখিক গতির ক্ষেত্রে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র

অসংখ্য বস্তুকণা বা বিন্দুভরের সমাবেশে গঠিত একটি দৃঢ়বস্তুর প্রতিটি কণার (চিত্র 5.3) উপর আমরা নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র প্রয়োগ করে লিখতে পারি।

$$\vec{F}_i^{\,tot} = \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = \frac{d^2}{dt^2}(m_i\vec{r}_i) \qquad (5.1)$$

যেখানে $\vec{r}_i$ হল, i তম কণার অবস্থান ভেক্টর, $\vec{v}_i$ তার গতিবেগ এবং m_i ভর। $\vec{F}_i^{\,tot}$ হল i-তম কথার উপর প্রযুক্ত মোট বল ঃ

$$\vec{F}_i^{\,tot} = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j{}' F_{ij} \qquad (5.2)$$



চিত্র 5.3 CM: দৃঢ়বস্তুর ভরকেন্দ্র

যেখানে $\vec{F}_i^{(e)}$ হল i-তম কণার উপর প্রযুক্ত বাহ্যিক বল এবং $\vec{F}_{ij}$ হল j-তম কণার দ্বারা i-তম কণার উপর প্রযুক্ত আভ্যন্তরীন বল। ডানদিকে যোগফলটি i-তম কণা ছাড়া অন্য প্রতিটি কণার উপর করতে হবে।

সমীকরণ (5.1)কে সমস্ত কণার উপর প্রয়োগ করে যোগফল নির্ণয় করলে পাই,

$$\sum_i \vec{F}^{tot} = \frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i\vec{r}_i$$

$$= M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \qquad (5.3)$$

এখানে আমরা ধরেছি,

$$M\vec{R} = \sum_i m_i\vec{r}_i \qquad (5.4)$$

$M = \sum_i m_i =$ বস্তুর মোট ভর।

$\vec{R}$ ভেক্টরটি বস্তুর ভরকেন্দ্রকে (centre of Mass) নির্দেশ করে ঃ

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{5.5}$$

আবার সমস্ত কণার উপর সমীকরণ (5.2) কে যোগফল করলে পাই,

$$\sum_i \vec{F}_i^{\,tot} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} + \sum_i \sum_j{}' \vec{F}_{ij} \tag{5.6}$$

যেখানে,

$$\sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}^{(e)}$$

হল দৃঢ়বস্তুটির সমস্ত কণার উপর প্রযুক্ত মোট বাহ্যিক বল এবং ডানদিকের দ্বিতীয় যুগ্ম যোগফলটি প্রতি জোড়া কণার উপর করতে হবে। " ' " চিহ্নটি বোঝাচ্ছে যে কোন কণার নিজের উপর প্রযুক্ত বল (F_{ii}) উপেক্ষা করা হচ্ছে। এখন শুধুমাত্রা দুটি কণা i ও j - এর জন্য এখানে যে দুটি পদ পাই সেগুলি হল কণাদুটির পরস্পরের উপর প্রযুক্ত মোট আভ্যন্তরীন বল ঃ

$$\vec{F}_{ij}^{(int)} = \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}$$

কিন্তু নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া পরপর সমান ও বিপরীতমুখী ঃ

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

সুতরাং $\vec{F}_{ij}^{(int)} = \vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij} = 0$

এবং প্রতিটি জোড়া কণার উপর যোগফল করলে মোট আভ্যন্তরীন বল হয় শূন্য ঃ

$$\vec{F}_{ij}^{(int)} = \sum_i \sum_j{}' \vec{F}_{ij} = 0$$

অর্থাৎ $\sum_i \vec{F}_i^{\,tot} = \sum \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}^{(e)}$

বং (5.3) থেকে পাই,

$$\vec{F}^{(e)} = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \tag{5.7}$$

$\vec{F}^{(e)}$ বাহ্যিক বলের প্রভাবে $\vec{R}$ ভেক্টর নির্দেশিত বিন্দুতে অবস্থিত M ভরের একটি বস্তুকণার ক্ষেত্রে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের সমীকরণের সঙ্গে সমীকরণ (5.7) অভিন্ন।

সুতরাং দৃঢ়বস্তুর বিশুদ্ধ রৈখিক গতির ক্ষেত্রে, আমরা বস্তুটির সমস্ত ভর $M, \vec{R}$ ভেক্টর নির্দেশিত বস্তুর ভরকেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত আছে বলে ধরে নিতে পারি ঃ

প্রযুক্ত মোট বাহ্যিক বল = মোট ভর $\times$ ভরকেন্দ্রের ত্বরণ ।

ভরকেন্দ্র

আমরা আগেই বলেছি দৃঢ়বস্তুর বিশুদ্ধ রৈখিক গতির ক্ষেত্রে প্রতিটি বিন্দুর সরণ একই হয়। তাই বস্তুটির মধ্যে একটিমাত্র বস্তুকণা বা বিন্দুভরের গতি জানলেই সমগ্র বস্তুটির গতি বর্ণনা করা যায়। আবার আগের অনুচ্ছেদেই আমরা দেখলাম, এ ধরনের গতির ক্ষেত্রে সমগ্র বস্তুটির ভর তার ভরকেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত আছে ধরে নেওয়া যায়। সুতরাং আমরা বলতে পারি, দৃঢ়বস্তুর বিশুদ্ধ রৈখিক গতি তার ভরকেন্দ্রে অবস্থিত একটি মাত্র বস্তুকণার গতির মাধ্যমেই প্রকাশ করা যায়, যার ভর বস্তুর ভরের সঙ্গে সমান। এক্ষেত্রে তাই কণাগতিবিদ্যার সমস্ত নিয়মগুলিই প্রয়োগ করা যেতে পারে।

কোন বস্তুর ভরকেন্দ্র (5.5) সমীকরণ প্রয়োগ করে নির্ণয় করা যেতে পারে। অনিয়মিত আকৃতির বস্তুর ক্ষেত্রে এটা জটিল হলেও জেনে রাখা ভাল, প্রতিসম (Symmetric) আকৃতির যে কোন বস্তুর জ্যামিতিক কেন্দ্রই তার ভরকেন্দ্র।

লক্ষ্যনীয়, চিত্র 5.3 -এ ভরকেন্দ্র (CM)কে মূলবিন্দু ধরলে $\vec{R} = 0$ এবং সমীকরণ (5.4) থেকে পাই,

$$\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,\prime} = 0$$

যেখানে $\vec{r}_i^{\,\prime}$ হল i তম কণার ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে অবস্থান ভেক্টর।

5.2.4 দৃঢ়বস্তুর বিশুদ্ধ ঘূর্ণন গতি

মেঝের উপর ঘুরন্ত একটি লাটিম এবং মাথার উপর ঘুরতে থাকা পাখা — এগুলি বিশুদ্ধ ঘূর্ণন গতির দুটি পরিচিত উদাহরণ। কিন্তু দুটির মধ্যে কিছু পার্থক্য আছে। এগুলি দৃঢ়বস্তুর যথাক্রমে দু ধরনের আবর্তন বোঝায় ঃ

(A) <u>**স্থির বিন্দু সাপেক্ষে আবর্তন**</u> — এক্ষেত্রে দৃঢ় বস্তুর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু সর্বদা স্থির থাকে এবং বস্তুটি ঐ বিন্দুগামী যে কোন অক্ষে আবর্তিত হতে পারে। ঐ অক্ষ সময়ের সঙ্গে বদলাতে পারে। যে কোন মুহূর্তে তাৎক্ষণিক অক্ষের দিক নির্ণয় করার জন্য তিনটি কোণ জানা দরকার। এগুলিকে অয়েলারিয় কোণ (Eulerian angles) বলে, যা আমাদের বর্তমান আলোচনার পরিধির বাইরে। তাই এধরনের ঘূর্ণন গতিতে স্বাধীনতার মাত্রা (Degree of freedom) হল তিন।

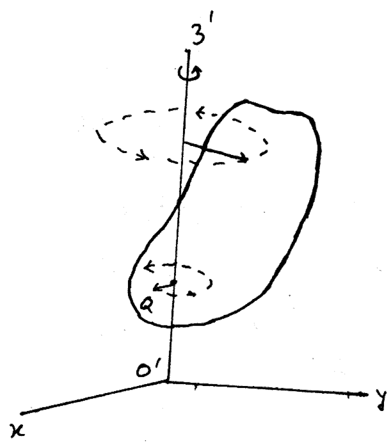
লাটিমের ক্ষেত্রে তার আলটি মেঝের যে বিন্দুর উপর দাঁড়িয়ে ঘোরে। সেটি স্থির। কিন্তু ঐ বিন্দুগামী লাটিমের ঘূর্ণনপক্ষ পরিবর্তিত হয়। এরকম গতির আর একটি উদাহরণ হল জাইরোস্কোপ (Gyroscope), যেক্ষেত্রে স্থির বিন্দু হল জাইরোস্কোপের ভরকেন্দ্র।

(B) <u>**স্থির অক্ষে আবর্তন**</u> — দৃঢ়বস্তুর দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু সর্বদা স্থির থাকলে ঐ দুই বিন্দুগামী সরলরেখাই ঘূর্ণণ অক্ষকে সূচিত করে। এটি একটি স্থির অক্ষ, যা সময়ের সঙ্গে বদলাতে পারে না। অক্ষ স্থির হওয়ায় ঘূর্ণণের তাৎক্ষণিক অবস্থা জানার জন্য একটিমাত্র কোণই যথেষ্ট। অর্থাৎ এক্ষেত্রে স্বাধীনতার মাত্রা এক।

দৃঢ়বস্তুর আবর্তনের এই সরলতম ক্ষেত্রেই কেবল রৈখিক গতি ও ঘূর্ণণগতির সূত্রগুলির আকারগত সাদৃশ্য দেখা যায়।

ঘুরন্ত একটি পাখা বা নাগরদোলা এ ধরনের আবর্তন গতির উদাহরণ। দুটি ক্ষেত্রেই ঘূর্ণণ অক্ষ সময়ের সঙ্গে স্থির।

নির্দিষ্ট স্থির অক্ষের সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুর ঘূর্ণণ গতির ক্ষেত্রে তার প্রতিটি বস্তুকণা এক একটি বৃত্তাকার পথে ঘোরে (চিত্র 5.4)। বিভিন্ন বিন্দুর জন্য এই বৃত্তের কেন্দ্রগুলি ঘূর্ণণ অক্ষের উপর অবস্থিত হয়। অক্ষ থেকে প্রতিটি বিন্দুর দূরত্ব সর্বদা স্থির থাকে এবং সমস্ত বিন্দুর কৌণিক গতিবেগও হয় সমান। চিত্র 5.4-এ ঘূর্ণণ অক্ষ O'z' থেকে P ও Q বিন্দুর দূরত্ব সর্বদা নির্দিষ্ট থাকে এবং দুটি কণারই কৌণিক গতিবেগ হল $\vec{\omega}$ ।



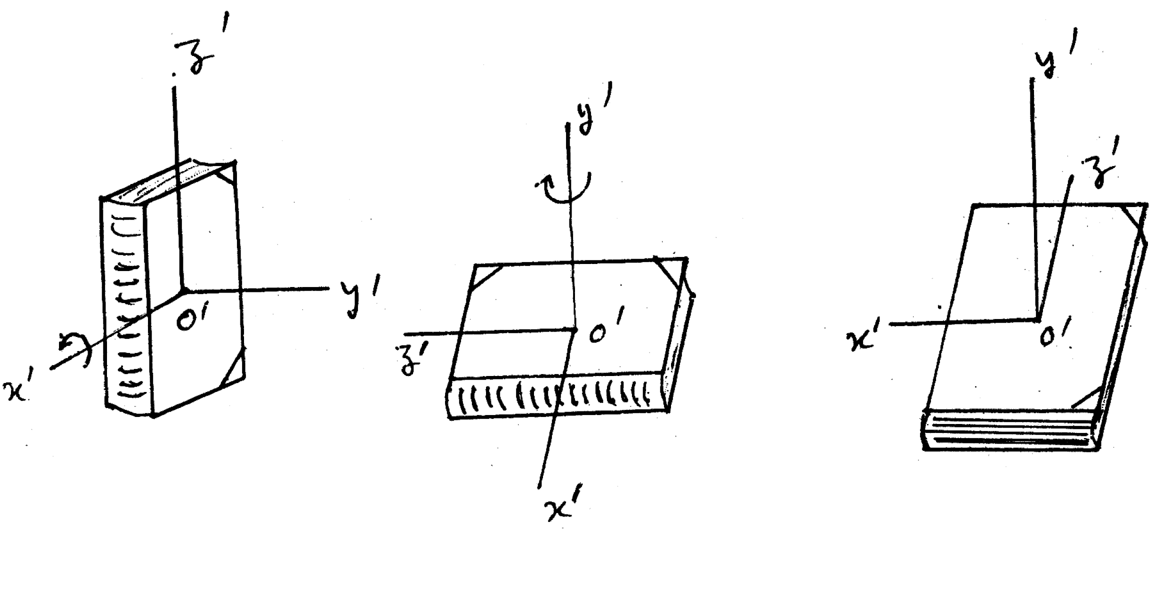
চিত্র 5.4 দৃঢ়বস্তুর স্থির অক্ষে আবর্তন

5.2.5 দৃঢ়বস্তুর সাধারণ গতি

স্পিন বা সুইং করা একটি ক্রিকেট বল পাক খেতে খেতে এগিয়ে চলে, পাহাড়ি রেলপথে একটি ট্রেন বাঁক নেওয়ার সঙ্গে ওপরে ওঠে অথবা পৃথিবী নিজের অক্ষের চারপাশে ঘুরতে ঘুরতে সূর্যকে ঘিরেও আবর্তিত হয়।

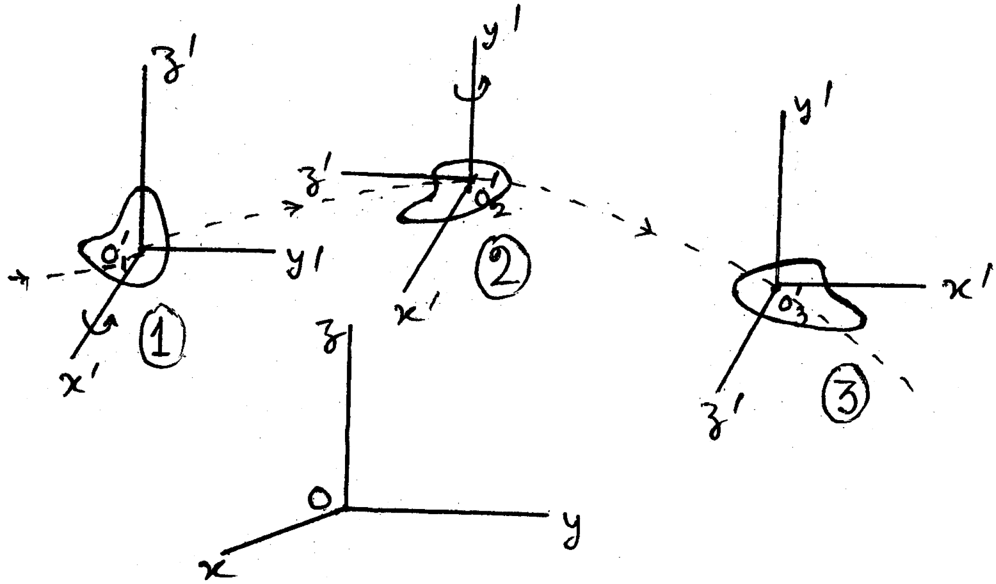
এগুলি হল দৃঢ়বস্তুর সাধারণ গতির উদাহরণ। লক্ষ্য করে দেখুন প্রতিটি ক্ষেত্রেই ভরকেন্দ্রের রৈখিক গতির সঙ্গে বস্তুটির একটি ঘূর্ণণ গতিও রয়েছে। অর্থাৎ দৃঢ় বস্তুর সাধারণ গতিতে সরণ ও ঘূর্ণণ — উভয়েরই সমন্বয় ঘটে।

র‍্যাকে দাঁড় করানো একটি বইকে টেবিলে নামিয়ে এনে আপনি যখন পড়তে বসেন (চিত্র 5.5) তখন বইটির ভরকেন্দ্রের যেমন সরণ ঘটে তেমনি ভরকেন্দ্রগামী উপযুক্ত অক্ষের চারপাশে তাকে ঘোরাতেও হয়।



চিত্র 5.5 বইয়ের ভরকেন্দ্র O′ এর সরণ ও ঘূর্ণণ

সাধারণভাবে একটি দৃঢ়বস্তুর সরণ ও ঘূর্ণণ গতির সমন্বয় চিত্র 5.6 -এ আমরা দেখিয়েছি। এটিকে চিত্র 5.2-এর পরিবর্ধন বলা যেতে পারে। এখানে বস্তুটির ভরকেন্দ্র O′ -এর একটি রৈখিক গতি তো



চিত্র 5.6 একটি দৃঢ়বস্তুর রৈখিকগতি ও ঘূর্ণণ গতির সমন্বয়

আছেই। তার সঙ্গে শূন্যে অবস্থিত নির্দেশতন্ত্র (space frame) Oxyz - এর সাপেক্ষে বস্তুর মধ্যে অবস্থিত নির্দেশতন্ত্র (body frame) O′x′y′z′ -এর দিক পরিবর্তন বা ঘূর্ণণও ঘটেছে। চিত্র 5.2 -এ বস্তুটির যে কোন মুহূর্তের অবস্থানে জানতে ভরকেন্দ্র O′ - এর অবস্থান জানাই যথেষ্ট ছিল। কিন্তু চিত্র 5.6-এ ভরকেন্দ্রের অবস্থানের সঙ্গে xyz অক্ষগুলির সাপেক্ষে x′y′z′ অক্ষগুলির দিকও (Orientation) জানা দরকার।

দৃঢ়বস্তুর উপরোক্ত সাধারণ গতির ক্ষেত্রে তার যে কোন একটি বিন্দুর গতিবেগ সম্পর্কিত **অয়েলারের উপপাদ্যটি** (Euler's theorem) হল ঃ

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{5.8}$$

এখানে $\vec{u}$ হল শূন্যে অবস্থিত জড়ত্বীয় নির্দেশতন্ত্র Oxyz -এর সাপেক্ষে বস্তুটির যে কোন বিন্দুর রৈখিক গতিবেগ যা সমগ্র বস্তুর ক্ষেত্রেই এক; এবং $\vec{\omega}$ হল $\vec{r}$ বিন্দুতে অবস্থিত কণাটির জড়ত্বীয় নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে কৌণিক গতিবেগ এবং এটিও সমগ্র বস্তুর ক্ষেত্রেই এক। যে কোন মুহূর্তে $\vec{u}$ এবং $\vec{\omega}$ সমগ্র দৃঢ়বস্তুর ক্ষেত্রে এক হলেও বিভিন্ন কণার ক্ষেত্রে $\vec{r}$ বিভিন্ন হওয়ায় গতিবেগ $\vec{v}$ বিভিন্ন হবে।

একক 4-এ আপনারা শিখেছেন, m ভরের কোন বস্তুকণার তাৎক্ষণিক অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ এবং রৈখিক গতিবেগ $\vec{v}$ হলে তার কৌণিক ভরবেগ $\vec{L} = m\,\vec{r}\times\vec{v}$। কোন দৃঢ়বস্তুর ক্ষেত্রে প্রতিটি কণার উপর এটি প্রয়োগ করে ভেক্টর যোগ করে আমরা শূন্যে অবস্থিত জড়ত্বীয় নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে বস্তুটির মোট কৌণিক ভরবেগ পাই ঃ

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \tag{5.9}$$

যেখানে $\vec{r}_i$ হল i-তম কণার অবস্থান ভেক্টর, m_i তার ভর এবং $\vec{v}_i$ তার গতিবেগ। এখানে যোগফলটি দৃঢ়বস্তুর সমস্ত বস্তুকণার উপর করতে হবে।

দৃঢ়বস্তুর সাধারণ গতির ক্ষেত্রে সমীকরণ (5.8) প্রয়োগ করে লিখতে পারি,

$$\vec{L} = \sum_i m_i \quad \vec{r}_i \times (\vec{u} + \vec{\omega}\times\vec{r}_i)$$

যেখানে $\vec{u}$ হল জড়ত্বীয় নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুটির রৈখিক গতিবেগ এবং $\vec{\omega}$ কৌণিক গতিবেগ, অর্থাৎ

$$\vec{L} = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right)\times\vec{u} + \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega}\times\vec{r}_i)$$

বা $$\vec{L} = M\,\vec{R}\times\vec{u} + \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega}\times\vec{r}_i) \tag{5.10}$$

যেখানে আমরা সমীকরণ (5.4) ব্যবহার করেছি।

সমীকরণ (5.10) - এর ডানদিকে প্রথম পদটি হল দৃঢ়বস্তুটির রৈখিক ভরবেগের ভ্রামক, যদি বস্তুটির সমগ্র ভর তার ভরকেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত আছে ধরা যায়। বস্তুটির কেবলমাত্র ঘূর্ণনগতি থাকলে, রৈখিক গতিবেগ $\vec{u} = 0$ এবং এই পদটি থাকে না।

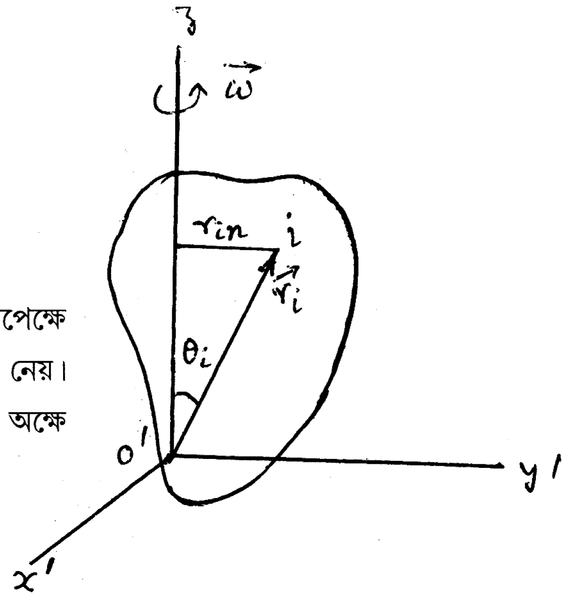
সুতরাং বিশুদ্ধ ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে শূন্যে অবস্থিত জড়ত্বীয় নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ হয় ঃ

$$\vec{L} = \sum_i m_i \; \vec{r}_i \times (\vec{\omega}\times\vec{r}_i) \tag{5.11}$$

ভেক্টর গুণনের সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\vec{L} = \sum_i m_i(\vec{r}_i.\vec{r}_i)\vec{\omega} - \sum_i m_i(\vec{r}_i.\vec{\omega})\vec{r}_i$$

$$= \sum_i m_i r_i^2\vec{\omega} - \sum_i m_i(\vec{r}_i.\vec{\omega})\,\vec{r}_i$$



চিত্র 5.7 o′z′ অক্ষের সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ নির্ণয়

এখন বস্তুটির আবর্তন যদি একটি স্থির বিন্দু সাপেক্ষে হয়, তাহলে ডানদিকের রাশিমালাগুলি জটিল আকার নেয়। আমরা তাই সরলতার জন্য ধরে নেব, বস্তুটি স্থির অক্ষে আবর্তন করে। এই অক্ষটিকে o'z' অক্ষ ধরলে

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega$$

এবং $\vec{L}$ -এর z′ উপাংশের মান হয়,

$$L_{z'} = \sum_i m_i\vec{r}_i^{\,2}\omega - \sum_i m_i\vec{r}_i^{\,2}\omega\cos^2\theta_i$$

যেখানে θ_i হল $\vec{r}_i$ এবং z′ অক্ষের মধ্যে কোণ (চিত্র 5.7)।

অর্থাৎ

$$L_{z'} = \sum_i m_i\omega\,\vec{r}_i^{\,2}\sin^2\theta_i$$

$$= \sum_i m_i\omega\, r_{in}^{\,2}$$

যেখানে r_{in} হল o'z' অক্ষের উপর $\vec{r}_i$ এর লম্ব উপাংশ।

সুতরাং লেখা যায়,

$$L_{z'} = I\,\omega \tag{5.12}$$

যেখানে $$I = \sum_i m_i r_{in}^{\,2} \tag{5.13}$$

সমীকরণ (5.13) এর ডানদিকে $m_i r_{in}{}^2$ পদটি হল i -তম কণাটির ভর এবং o'z' অক্ষ থেকে তার লম্ব দূরত্বের বর্গের গুণফল। একক 4 - এ আপনারা শিখেছেন এটি হল o'z' অক্ষের সাপেক্ষে I-তম কণার জড়তা ভ্রামক। সুতরাং প্রতিটি কণার উপর এটির যোগফল নির্ণয় করলে আমরা সমীকরণ (5.13) থেকে o'z' অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র দৃঢ় বস্তুটির জড়তা ভ্রামক I পাই।

কৌণিক ভরবেগের রাশিমালা (5.12) রৈখিক ভরবেগের রাশিমালা $p_z = Mv_z$ এর সঙ্গে তুলনীয়। লক্ষ্য করে দেখবেন, ঘূর্ণনগতির ক্ষেত্রে জড়তা ভ্রামক, রৈখিক গতির ক্ষেত্রে ভরের সদৃশ।

ঘূর্ণণ গতিশক্তি

দৃঢ়বস্তুর মোট গতিশক্তির রাশিমালা,

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i{}^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \qquad \text{[(5.8) রাশিমালা অনুযায়ী]}$$

$$= \frac{1}{2}Mu^2 + \sum_i m_i \vec{u}.(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\cdot(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

ভেক্টর গুণনের সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$T = \frac{1}{2}Mu^2 + \left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right)\cdot(\vec{u} \times \vec{\omega}) + \frac{1}{2}\sum_i m_i\left[\omega^2 r_i^2 - \left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i{}^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}M\,u^2 + M\,R\cdot(\vec{u} \times \vec{\omega}) + \frac{1}{2}\sum_i m_i\left[\omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)^2\right]$$

[(5.4) সমীকরণ ব্যবহার করে]

বা $T = T_t + T_m + T_r$ (5.14)

যেখানে $T_t = \frac{1}{2}Mu^2$ (5.15)

$$T_m = \frac{1}{2}M R^2.(\vec{u} \times \vec{\omega})$$

$$T_r = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left[\omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)^2\right] \qquad (5.16)$$

আমরা দেখতে পাচ্ছি, দৃঢ়বস্তুটির মোট গতিশক্তির তিনটি অংশ ঃ

(1) $T_t = \frac{1}{2}Mu^2$ হল সমগ্র দৃঢ়বস্তুর রৈখিক গতিশক্তি। রৈখিক গতি $\vec{u} = 0$ হলে $T_t = 0$ হয়।

(2) $T_m = M\vec{R}\cdot(\vec{u}\times\vec{\omega})$ হল একটি মিশ্র পদ, যেখানে রৈখিক ও ঘূর্ণন সংক্রান্ত পদগুলির মিশ্রণ ঘটেছে। যদি দৃঢ়বস্তুর ভরকেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরা হয় $(\vec{R} = 0)$ অথবা যদি বস্তুর রৈখিক গতিবেগ $\vec{u}$ ঘূর্ণন অক্ষের সমান্তরাল ($\vec{u}$ ও $\vec{\omega}$ সমান্তরাল $\vec{u}\times\vec{\omega} = 0$) হয়, তবে $T_m = 0$ হয়।

(3) $T_r = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left[\omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)^2\right]$ হল বিশুদ্ধ ঘূর্ণণ গতিশক্তি। চিত্র 5.7 অনুযায়ী $o'z'$ অক্ষটিকে ঘূর্ণন অক্ষ ধরে নিলে পাই,

$$\omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)^2$$

$$= \omega^2\vec{r}_i^{\,2} - \omega^2\vec{r}_i^{\,2}\cos^2\theta_i$$

$$= \omega^2\vec{r}_i\sin^2\theta_i$$

$$= \omega^2 r_{in}$$

সুতরাং ঘূর্ণণ গতিশক্তি হয়,

$$T_r = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_{in}\right)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}I\,\omega^2 \qquad (5.17)$$

যেখানে I হল $o'z'$ অক্ষের সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুটির জড়তা ভ্রামক (সমীকরণ 5.13)।

5.3 জড়তা ভ্রামক

নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুর ঘূর্ণণ গতির ক্ষেত্রে আমরা সমীকরণ (5.13) দ্বারা জড়তাভ্রামকের রাশিমালা প্রকাশ করেছি, যা বিন্দুভরের জড়তাভ্রামকের রাশিমালাকে সমস্ত বস্তুকণার উপর যোগফল করে পাওয়া গেছে। এই ধরনের গতির ক্ষেত্রে আমরা দুটি রাশিমালাকেই এক আকারের করতে পারি এইভাবে লিখলে ঃ

$$I = \sum_i m_i \, r_{in}^2 = M K^2 \tag{5.18}$$

যেখানে $$K^2 = \frac{I}{M} = \frac{\sum_i m_i \gamma_{in}^2}{\sum_i m_i} \tag{5.19}$$

এবং $M = \sum_i m_i =$ বস্তুর মোট ভর।

সমীকরণ (5.19) দ্বারা সংজ্ঞায়িত রাশি K কে বলা হয় ঐ নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুটির **ঘূর্ণণ ব্যাসার্ধ** (Radius of Gyration)। লক্ষ্য করুন, K হল ঘূর্ণাক্ষ থেকে এমন একটি বিন্দুর দূরত্ব যেখানে দৃঢ়বস্তুটির সমস্ত ভর M কেন্দ্রীভূত আছে মনে করলে জড়তা ভ্রামকের একই রাশিমালা পাওয়া যায়।

উপরের আলোচনা প্রসঙ্গে কয়েকটি কথা মনে রাখা দরকার ঃ

1. নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুর ঘূর্ণণ গতির ক্ষেত্রে জড়তাভ্রামক রৈখিক গতির ক্ষেত্রে বস্তুটির ভরের সঙ্গে তুলনীয়।

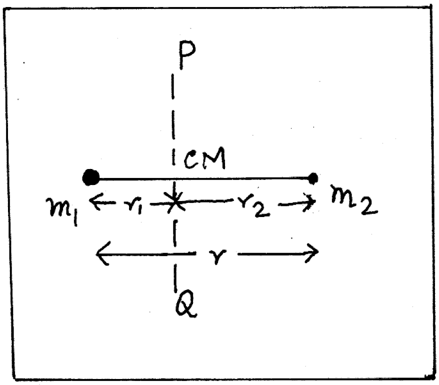
2. কিন্তু বস্তুর ভর যেখানে একটি নিত্যসংখ্যা এবং গতির উপর নির্ভরশীল নয়, বস্তুর গতি (v) আলোকের গতির (c) কাছাকাছি হলে আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী ভর গতির উপর নির্ভর করে। কিন্তু এখানে $v<<c$। সেখানে জড়তা ভ্রামক অক্ষের উপর নির্ভরশীল। ঘূর্ণণের সময় ঘূর্ণাক্ষের পরিবর্তন হলে জড়তাভ্রামকও পরিবর্তিত হবে।

3. জড়তাভ্রামকের রাশিমালা (5.13) দৃঢ়বস্তুর সরলতম ঘূর্ণণগতির ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য, অর্থাৎ যখন একটি নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণণগতি হয় এবং স্বাধীনতার মাত্রা এক, তখনই কেবল এটি প্রযোজ্য। সাধারণভাবে নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে ঘূর্ণণগতির ক্ষেত্রে জড়তাভ্রামকের রাশিমালাটি জটিল এবং তার প্রকৃতিও ভিন্ন। সেক্ষেত্রে জড়তাভ্রামক একটি দ্বিতীয় শ্রেণীর টেন্সর (Tensor of second rule)।

5.3.1 বিভিন্ন দৃঢ়বস্তুর জড়তা ভ্রামক নির্ণয়

নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরন্ত বস্তুর জড়তা ভ্রামক আমরা (5.13) রাশিমালা প্রয়োগ করে বার করতে পারি।

প্রথমেই একটি ডাম্বেলের কথা ধরা যাক ঃ দুটি বিন্দুভর m_1 ও m_2 পরস্পর থেকে r দূরত্বে একটি সরু রড দিয়ে আবদ্ধ (চিত্র 5.8)। রডটির ভর নগণ্য। এই ডাম্বেলের মডেলটি দ্বিপরমাণুক অণুর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।



চিত্র 5.8 একটি আদর্শ ডাম্বেল বা দ্বিপরমানুক অণুর মডেল

জড়তা ভ্রামকের 5.13 রাশিমালা এক্ষেত্রে প্রয়োগ করে পাই,

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

এখন ধরা যাক, m_1 ও m_2 ভরদুটির ভরকেন্দ্র (CM) থেকে উভয়ের দূরত্ব যথাক্রমে r_1 ও r_2। ভরকেন্দ্রের সংজ্ঞা থেকে

$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

বা $$\frac{r_1}{m_2} = \frac{r_2}{m_1} = \frac{r_1 + r_2}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore \quad r_1 = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2} \text{ এবং } r_2 = \frac{m_1 r}{m_1 + m_2} \qquad [\because \quad r = r_1 + r_2]$$

r_1 ও r_2 -এর এই রাশিমালা উপরে বসিয়ে পাই,

$$I = \frac{r^2}{(m_1 + m_2)^2} \left[m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2 \right]$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2$$

বা $$I = \mu r^2 \qquad (5.20)$$

যেখানে $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ হল m_1 ও m_2 ভরদ্বয়ের সমানীত ভর (reduced mass)।

উপরের উদাহরণে আমরা দুটি মাত্র পরস্পর বিচ্ছিন্ন বস্তুকণার জড়তা ভ্রামক নির্ণয় করেছি। কিন্তু বাস্তবে কোন দৃঢ়বস্তু - সেটি একটি রড বা গোলক বা চোঙ বা শঙ্কু যাই হোক না কোন — অসংখ্য অবিচ্ছিন্নভাবে বিন্যস্ত (Continuously distributed) বস্তুকণার সমন্বয়ে গঠিত। এরকম ক্ষেত্রে জড়তা ভ্রামক নিম্নলিখিত রাশিমালার সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

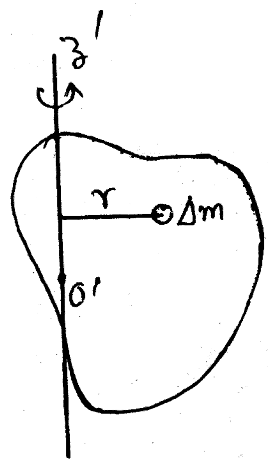
মনে করি দৃঢ়বস্তুর এক অতিক্ষুদ্র (infinitesimal) আয়তনের ভর Δm ঘূর্ণাক্ষ থেকে r লম্বদূরত্বে অবস্থিত (চিত্র 5.9)।

সেক্ষেত্রে (5.13) রাশিমালা অনুযায়ী বস্তুটির জড়তাভ্রামক

$$I = \lim_{\Delta m \to 0} \sum r^2 \Delta m$$

$$I = \int r^2 dm$$

যেখানে dm হল ভরের অবকল (differential) এবং সমাকলটি সমস্ত বস্তুর উপর করতে হবে। রাশিমালা (5.21) ব্যবহার করে কোন দৃঢ়বস্তুর নিদিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক নির্ণয় করা যায়।



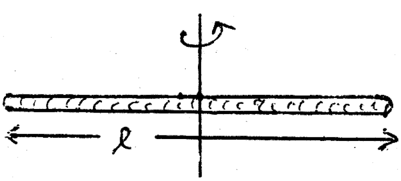
চিত্র 5.9 দৃঢ়বস্তুর জড়তাভ্রামক নির্ণয়

টেবিল 5.1 -এ আমরা কয়েকটি প্রতিসম বস্তুর জড়তাভ্রামকের রাশিমালা দিয়েছি। সবক্ষেত্রেই M হল দৃঢ়বস্তুটির ভর এবং ঘূর্ণাক্ষ বস্তুর ভরকেন্দ্রগামী।

টেবিল 5.1

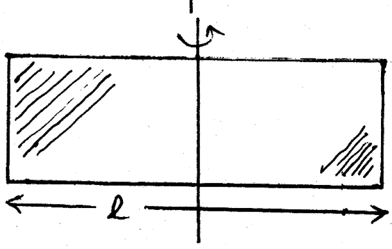
কয়েকটি প্রতিসম বস্তুর জড়তাভ্রামক

(ঘূর্ণাক্ষ ভরকেন্দ্রগামী, ভর M)



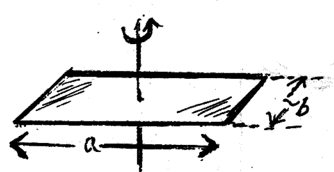
সোজা সরু দন্ড — অক্ষ দন্ডের অভিলম্ব এবং কেন্দ্রগামী

এবং



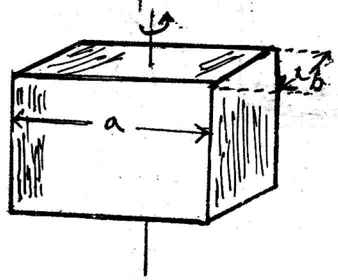
আয়তপাত — অক্ষ পাতের তলে এবং কেন্দ্রগামী ও দৈর্ঘ্যের অভিলম্ব

$I = M\, e^2 / 12$



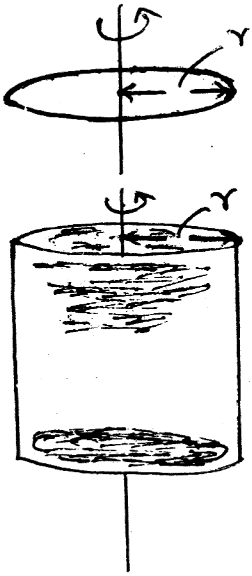
আয়তপাত — অক্ষ পাতের তলের অভিলম্ব ও কেন্দ্রগামী

এবং



আয়তবস্তু — অক্ষ একটি তলের অভিলম্ব ও কেন্দ্রগামী

$I = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right)$

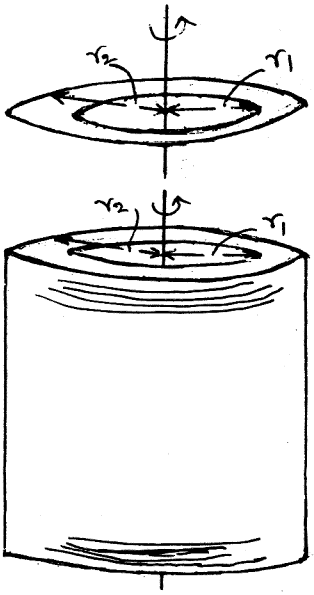


সরু বলয় —
অক্ষ বলয়তলের
অভিলম্ব এবং কেন্দ্রগামী

এবং

সরু ফাঁপা চোঙ
অক্ষ চোঙের পক্ষ

$I = Mr^2$

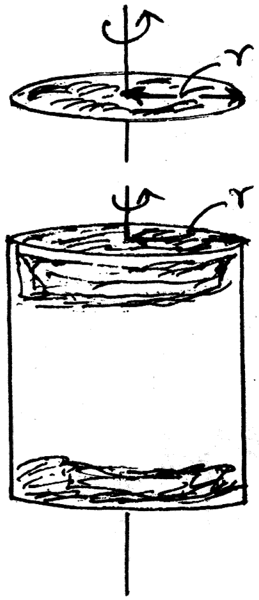


চওড়া বলয়—
অক্ষ বলয়তলের
অভিলম্ব ও কেন্দ্রগামী

এবং

ফাঁপা চোঙ—
অক্ষ চোঙের অক্ষ

$I = \frac{M}{2}\left(r_1{}^2 + r_2{}^2\right)$

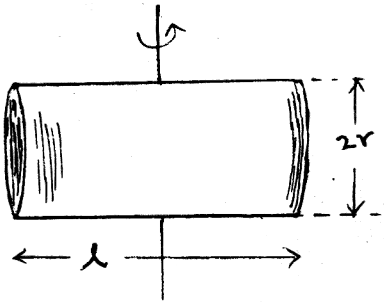


গোল পাত —
অক্ষ কেন্দ্রগামী
ও পাতের তলের
অভিলম্ব

এবং

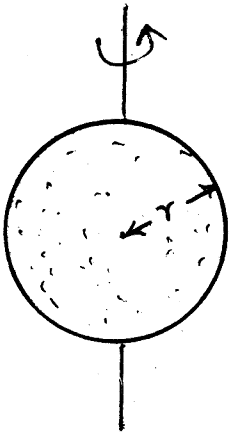
নিরেট চোঙ —
অক্ষ চোঙের অক্ষ

$I = \frac{M}{2} r^2$



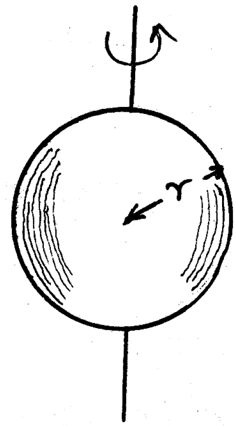
নিরেট চোঙ—
অক্ষ চোঙের অক্ষের
অভিলম্ব

$I = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{\ell^2}{12}\right)$



ঘোলক বা গোলীয় পাত —
অক্ষ যে কোন ব্যাস

$I = \frac{2}{3}Mr^2$



নিরেট গোলক —
অক্ষ যে কোন ব্যাস

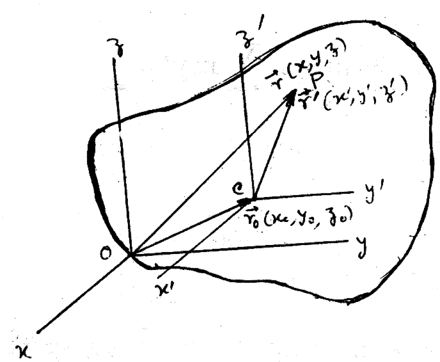
$I = \frac{2}{5}Mr^2$

5.3.2 জড়তাভ্রামক সংক্রান্ত দুটি উপপাদ্য

টেবিল 5.1 -এ আমরা ধরেছি, ঘূর্ণাক্ষ সব ক্ষেত্রেই প্রতিসম বস্তুগুলির ভরকেন্দ্র দিয়ে গেছে। কিন্তু সাধারণভাবে ঘূর্ণাক্ষ বস্তুর ভরকেন্দ্র দিয়ে নাও যেতে পারে। সেক্ষেত্রে জড়তাভ্রামক নির্ণয়ের জন্য দুটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য আছে। আমরা এবার এই উপপাদ্য দুটি আলোচনা করব।

A. সমান্তরাল অক্ষসমূহের উপপাদ্য (Theorem of Parallel Axes)

মনে করি, Oxyz নির্দেশতন্ত্রে M ভরের কোন দৃঢ়বস্তুর ভরকেন্দ্র C-র অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ এবং m ভরের একটি বিন্দু P-র অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}'(x, y, z)$ (চিত্র 5.10)। ভরকেন্দ্র CD থেকে মূলবিন্দু ধরে আগের নির্দেশতন্ত্রের অক্ষগুলির সমান্তরাল অক্ষবিশিষ্ট আর একটি



চিত্র 5.10 জড়তাভ্রামকের সমান্তরাল অক্ষসমূহের উপপাদ্য প্রমাণ

নির্দেশতন্ত্র ধরা যাক $Cx'y'z'$ এবং এই নির্দেশতন্ত্রে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}'(x', y', z')$।

সুতরাং,

$$x = x_0 + x', y = y_0 + y', z = z_0 + z'$$

O বিন্দুগামী z অক্ষে বস্তুটির জড়তাভ্রামক,

$$I_z = \sum m(x^2 + y^2)$$

যেখানে যোগফলটি সমস্ত বস্তুকণার উপর করা হয়েছে।

কিন্তু $x^2 + y^2$

$$= (x_0 + x')^2 + (y_0 + y')^2$$

$$= (x_0{}^2 + y_0{}^2) + (x'^2 + y'^2) + 2x_0x' + 2y_0y'$$

সুতরাং

$$I_z = \left(\sum m\right)(x_0{}^2 + y_0{}^2) + \sum m(x'^2 + y'^2) + 2x_0\sum mx' + 2y_0\sum my'$$

$$= M(x_0{}^2 + y_0{}^2) + I_c + 2x_0\sum mx' + 2y_0\sum my' \qquad (5.22)$$

আবার $Cx'y'z'$ নির্দেশতন্ত্রে ভরকেন্দ্রই মূলবিন্দু হওয়ায় ভরকেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর $\vec{R} = 0$। সুতরাং সমীকরণ (5.4) থেকে পাই (5.2.3 অনুচ্ছেদে ভরকেন্দ্রের আলোচনায় দেখুন)

$$M\vec{R} = \sum m\vec{r}' = 0$$

বা $\sum mx' = \sum my' = \sum mz' = 0$

সেক্ষেত্রে সমীকরণ (5.22) হয়

$$I_z = I_c + Ma^2 \qquad (5.23)$$

যেখানে $a = (x_0{}^2 + y_0{}^2)^{1/2}$ হল ঘূর্ণাক্ষ Oz থেকে ভরকেন্দ্র c-র লম্ব দূরত্ব।

সমীকরণ (5.23) থেকে আপনারা দেখতে পাচ্ছেন ঃ যে কোন অক্ষ (Oz) সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুর জড়তা ভ্রামক (Iz) বস্তুর ভরকেন্দ্রগামী সমান্তরাল (Cz') অক্ষে তার জড়তাভ্রামক (I_c) এবং দুই অক্ষের দূরত্বের বর্গ (a^2) ও বস্তুর ভরের গুণফলের $(M a^2)$ যোগফলের সমান। এটিকে সমান্তরাল অক্ষসমূহের উপপাদ্য বলে।

B. লম্ব অক্ষসমূহের উপপাদ্য (Theorem of Perpendicular Axes)

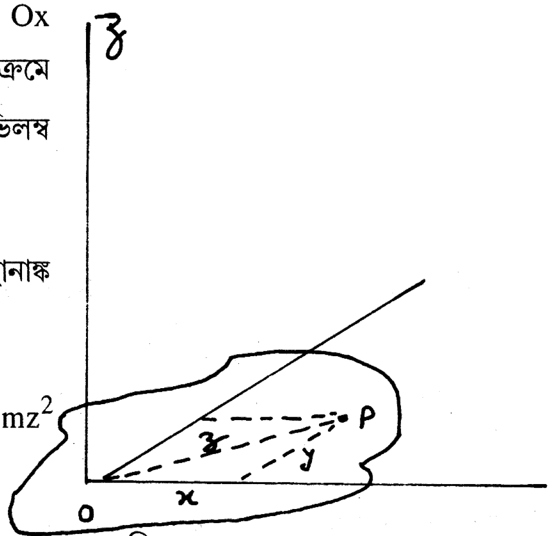
ধরা যাক, বস্তুটি একটি সমতল পাত (চিত্র 5.11)। পাতের তলে অবস্থিত দুটি সমকোণী অক্ষ Ox এবং Oy -এর সাপেক্ষে বস্তুটির জড়তা ভ্রামক যথাক্রমে I_x এবং I_y। O বিন্দুগামী পাতের তলের অভিলম্ব অক্ষ Oz -এর সাপেক্ষে জড়তাভ্রামক I_z।

পাতের P বিন্দুতে m ভরের একটি কণার স্থানাঙ্ক (x, y, z) হলে,

$$I_x = \sum m x^2,\ I_y = \sum m y^2 \text{ এবং } I_z = \sum m z^2$$

যেহেতু $z^2 = x^2 + y^2$

$$I_z = I_x + I_y$$



চিত্র 5.11 জড়তাভ্রামকের লম্ব সমূহের উপপাদ্য প্রমাণ

সুতরাং, পাতের সমতলে দুটি সমকোণী অক্ষের (x, y) সাপেক্ষে পাতের জড়তা ভ্রামকের যোগফল $(I_x + I_y)$ ঐ দুই অক্ষের ছেদবিন্দুগামী অভিলম্ব অক্ষে (z) পাতের জড়তা ভ্রামকের সমান। এটিকে লম্ব অক্ষসমূহের উপপাদ্য বলে।

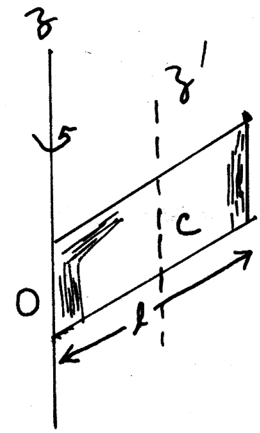
আমরা এবার উপরের দুটি উপপাদ্য কয়েকটি ক্ষেত্রে প্রয়োগ করব।

জড়তাভ্রামক সংক্রান্ত উপপাদ্যের প্রয়োগ

(1) টেবল 5.1 থেকে দেখতে পাই, কোন আয়তপাতের অক্ষ (cz') ভরকেন্দ্রগামী পাতের তলে ও দৈর্ঘ্যের অভিলম্ব হলে তার জড়তাভ্রামক

$$I_c = \frac{M\ell^2}{12}$$

পাতের একপ্রান্তে এবং পাতের তলে অক্ষ (oz) অবস্থিত হলে জড়তাভ্রামক (সমান্তরাল অক্ষসমূহের উপপাদ্য প্রয়োগ করে)



$$I_z = I_c + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{M\ell^2}{3}$$

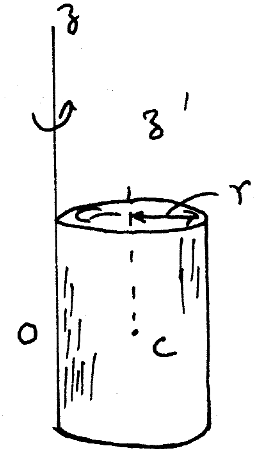
চিত্র 5.12 a - Oz অক্ষের সাপেক্ষে আয়তপাতের জড়তাভ্রামক নির্ণয়

(2) নিরেট চোঙের অক্ষ (cz') ভরকেন্দ্রগামী ও চোঙের অক্ষ বরাবর হলে জড়তাভ্রামক

$$I_c = \frac{Mr^2}{2}$$

অক্ষ চোঙের অক্ষের সমান্তরাল এবং চোঙের স্পর্শক (oz) হলে জড়তাভ্রামক (সমান্তরাল অক্ষসমূহের উপপাদ্য প্রয়োগ করে)

$$I_z = I_c + Mr^2 = \frac{3Mr^2}{2}$$



চিত্র 5.12 b Oz অক্ষের সাপেক্ষে আয়তপাতের জড়তাভ্রামক নির্ণয়

(3) চাকতির অক্ষ কেন্দ্রগামী ও চাকতির তলের অভিলম্ব (cz) হলে জড়তাভ্রামক

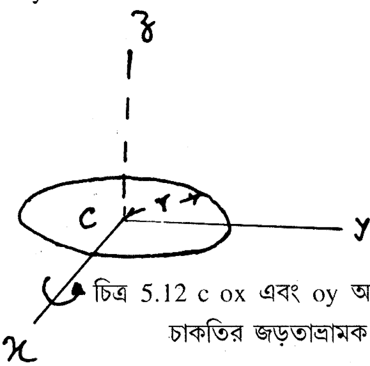
$$I_z = \frac{Mr^2}{2}$$

যে কোন ব্যাসের সাপেক্ষে জড়তাভ্রামক $I_x = I_y$ হলে,

(লম্ব অক্ষ সমূহের উপপাদ্য প্রয়োগ করে

$$I_z = I_x + I_y = 2I_x = 2I_y = Mr^2/2$$

বা $I_x = I_y = Mr^2/4$



চিত্র 5.12 c ox এবং oy অক্ষের সাপেক্ষে চাকতির জড়তাভ্রামক নির্ণয়

5.4 দৃঢ়বস্তুর ঘূর্ণণ গতিবিদ্যা

দৃঢ়বস্তুর বিশুদ্ধ রৈখিক গতির ক্ষেত্রে আমরা 5.2.3 অনুচ্ছেদে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের প্রয়োগ করেছি। এখানে আমরা ঐ সূত্র প্রয়োগ করে প্রধানতঃ দৃঢ়বস্তুর ঘূর্ণন গতিবিদ্যা আলোচনা করব।

5.4.1 ঘূর্ণণ গতির ক্ষেত্রে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র

দৃঢ়বস্তুর i-তম কণার উপর প্রযুক্ত বল $\vec{F}_i^{\,tot}$ হলে, নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী লিখতে পারি,

$$\vec{F}_i^{\,tot} = \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) \tag{5.1}$$

যেখানে m_i, হল i-তম কণার ভর এবং $\vec{v}_i$ হল শূন্যে অবস্থিত জড়ত্বীয় নির্দেশতন্ত্র সাপেক্ষে কণাটির গতিবেগ।

সুতরাং i-তম কণার উপর প্রযুক্ত টর্ক হবে,

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,tot} = \vec{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i)$$

$$= \frac{d}{dt}[\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i] - \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i\vec{v}_i$$

এখন $d\vec{r}_i/dt = \vec{v}_i$ হওয়ায় দ্বিতীয় পদটি শূন্য। তাই আমরা লিখতে পারি,

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,tot} = \frac{d}{dt}[\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i]$$

আবার আমরা জানি,

$$\vec{v}_i = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i \tag{5.8}$$

যেখানে $\vec{u}$ হল জড়ত্বীয় নির্দেশতন্ত্র সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুটির রৈখিক গতিবেগ এবং $\vec{\omega}$ হল দৃঢ়বস্তুটির কৌণিক গতিবেগ। সুতরাং

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{tot} = \frac{d}{dt}\left[m_i \vec{r}_i \times \left(\vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)\right]$$

$$= m_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d}{dt}\left[m_i \vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)\right]$$

দৃঢ়বস্তুর সমস্ত কণার উপর যোগফল নিলে

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{tot} = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) \times \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d}{dt}\sum_i \left[m_i \vec{r}_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\right]$$

$$= M\vec{R} \times \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d}{dt}\sum_i \left[\ m_i \vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)\ \right]$$

যেখানে আমরা ব্যবহার করেছি $\sum_i m_i \vec{r}_i = M\vec{R}$ (সমীকরণ (5.4)।

অর্থাৎ $$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{tot} = \frac{d}{dt}\left[M\vec{R} \times \vec{u} + \sum m_i \vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)\right]$$

$$= \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{5.25}$$

যেখানে সমীকরণ (5.10) অনুযায়ী $\vec{L}$ হল জড়ত্বীয় নির্দেশতন্ত্রের সাপেক্ষে দৃঢ়বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ। আবার কৌণিক গতিবেগ সংক্রান্ত আলোচনায় আমরা দেখিয়েছি বস্তুটির রৈখিক গতিবেগ $\vec{u} = 0$ হলে এবং সেটি একটি নির্দিষ্ট অক্ষে (z অক্ষ) আবর্তন করলে লেখা যায় (সমীকরণ 5.12)

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

যেখানে I হল z —অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুটির জড়তাভ্রামক। সুতরাং আমরা পাই,

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{tot} = \frac{d}{dt}(I\omega) \tag{5.26}$$

এখন সমীকরণ 5.26 এর বামদিককে লিখতে পারি,

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,tot} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} + \sum_i \sum_j{}' \vec{\gamma}_i \times \vec{F}_{ij} \tag{5.27}$$

যেখানে আমরা সমীকরণ (5.2) ব্যবহার করেছি। $\vec{F}_i^{(e)}$ হল i-তম কণার উপর প্রযুক্ত বাহ্যিক বল এবং $\vec{F}_{ij}$ হল j -তম কণার দ্বারা i-তম কণার উপর প্রযুক্ত আভ্যন্তরীন বল। ডানদিকের দ্বিতীয় যুগ্ম যোগফলটি প্রতি জোড়া কণার উপর করতে হবে এবং " ' " চিহ্নটি বোঝাচ্ছে যে কোন কণার নিজের উপর প্রযুক্ত বল $\vec{F}_{ii}$ উপেক্ষা করা হচ্ছে। এখন শুধুমাত্র i ও j কণাদুটির জন্য এখানে যে দুটি পদ পাই, সেগুলি হল কণাদুটির পরস্পরের উপর প্রযুক্ত মোট আভ্যন্তরীন টর্ক ঃ

$$\vec{\Gamma}_{ij}^{\,int} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times F_{ji}$$

$$= \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) \times \vec{F}_{ij}$$

বা $\quad \vec{\Gamma}_{ij}^{\,int} = \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij}$

যেখানে আমরা নিউটনের তৃতীয় সূত্র $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ প্রয়োগ করেছি। $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ হল j-কণার সাপেক্ষে i-কণার অবস্থান ভেক্টর। অল্প কিছু ব্যতিক্রম ছাড়া দুটি কণার আভ্যন্তরীন বল $\vec{F}_{ij}$ কণাদুটির সংযোজন $\vec{r}_{ij}$ ভেক্টর বরাবর হল। সেক্ষেত্রে

$$\vec{\Gamma}_{ij}^{\,int} = \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij} = 0 \tag{5.28}$$

অর্থাৎ দৃঢ়বস্তুটির প্রতি-জোড়া কণার জন্যই আভ্যন্তরীণ টর্ক শূন্য হবে। সেক্ষেত্রে (5.27) সমীকরণের ডানদিকের দ্বিতীয় পদটির অস্তিত্ব থাকে না এবং লেখা যায়,

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,tot} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \sum_i \vec{\Gamma}_i^{(e)} = \vec{\Gamma}^{(e)} \tag{5.29}$$

যেখানে $\vec{\Gamma}_i^{(e)}$ হল i-তম কণার উপর প্রযুক্ত বাহ্যিক টর্ক এবং $\vec{\Gamma}^{(e)}$, দৃঢ়বস্তুর উপর প্রযুক্ত মোট বাহ্যিক টর্ক।

সমীকরণ (5.25), (5.26) এবং (5.29) থেকে লিখতে পারি,

$$\vec{\Gamma}^{(e)} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) \tag{5.30}$$

যেখানে আমরা ধরে নিয়েছি বস্তুর রৈখিক গতিবেগ শূন্য এবং সেটি একটি নির্দিষ্ট অক্ষে আবর্তিত হয়।

ঘূর্ণণের সঙ্গে I অপরিবর্তিত থাকলে লেখা যায়,

$$\vec{\Gamma}^{(e)} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} \tag{5.31}$$

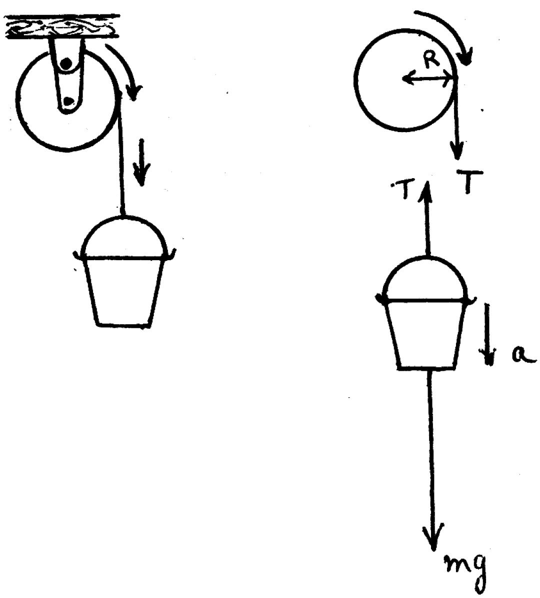
যেখানে $\vec{\alpha} = d\vec{w}/dt$ হল বস্তুটির কৌণিক ত্বরণ।

এখানে উল্লেখ করা দরকার; (5.30) সমীকরণ শুধু দৃঢ়বস্তু নয়। সাধারণভাবে কণাসমষ্টির (system of particles) ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য। সেক্ষেত্রেও মোট আভ্যন্তরীন টর্ক $\vec{\Gamma}_{ij}^{int} = 0$ হবে। তবে কণাগুলির মধ্যে দূরত্ব ধ্রুবক না হওয়ায় জড়তাভ্রামক I শুধু ঘূর্ণক্ষি পরিবর্তনের জন্যই নয়, কণাগুলির আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তনের জন্যও সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হতে পারবে। তাই সমীকরণ (5.31) প্রয়োগ করা যাবে না।

একজন ব্যালেরিনা, বরফ স্কেটার বা ডাইভার যখন যথাক্রমে মেঝেতে, বরফের উপর বা শূন্যে পাক খান তখন তাঁর দেহের বিভিন্ন অংশের মধ্যে দূরত্ব পরিবর্তিত হয়। একটি রকেট যখন গতিশীল থাকে প্রতিমুহূর্ত সে তার কিছু পরিমাণ ভর বিচ্ছিন্ন করে দেয়। আবার একটি নক্ষত্র যখন তার নিউক্লীয় জ্বালানী শেষ করে ফেলে তখন সেটি অভিকর্ষজ সঙ্কোচনের (qravitational contraction) ফলে সাদা বামন (white dwarf) নক্ষত্র, নিউট্রন নক্ষত্র বা পালসার (neutron star or polar) অথবা কালো গহ্বরে (black hole) পরিণত হয়। প্রতিটি ক্ষেত্রেই I সময়ের সঙ্গে পরিবর্তনশীল। কিন্তু সমীকরণ (5.30) প্রয়োগ করা যাবে। আমরা অনুচ্ছেদ 5.4.4-এ কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র প্রসগে এগুলিআলোচনা করব।

উদাহরণ —1

M ভরসম্পন্ন অনুভূমিক অক্ষদণ্ডে আটকানো (একটি কপিকল বা পুলি (pully) তে দড়ি জড়ানো আছে। দড়ির শেষপ্রান্তে m ভরের একটি বালতি ঝোলানো আছে। বালতিটির নীচে নামার ত্বরণ এবং দড়ির টান বার করুন। দড়ির ভর এবং অক্ষদন্ড ও কপিকলের মধ্যে ঘর্ষণ উপেক্ষা করুন এবং ধরে নিন দড়িটি খোলার সময় কপিকলের উপর দিয়ে পিছলে যাচ্ছে না।



চিত্র 5.13 উদাহরণ 1

দড়ি বরাবর একটি উর্ধ্বমুখী টান T বালতিটিকে অবাধ অবতরণে অর্থাৎ g অভিকর্ষজ ত্বরণে পড়তে বাধা দেবে। ফলে বালতির উপর মোট নিম্নমুখী বল

$$F = mg - T = ma$$

যেখানে a হল বালতির নিম্নমুখী ত্বরণ।

আবার দড়ি বরাবর একই পরিমাণ নিম্নমুখী টান T কপিকলের চাকতির ওপর একটি টর্ক প্রয়োগ করবে যার মান

$$\Gamma = T R$$

যেখানে R হল কপিকলের ব্যাসার্ধ। এর প্রভাবে চাকতির কৌণিক ত্বরণ α হলে

$$\Gamma = I\alpha, \text{ বা } \alpha = \frac{TR}{I}$$

যেখানে I হল কেন্দ্রীয় অনুভূমিক অক্ষের চারপাশে চাকতিটির জড়তা ভ্রামক। আবার যেহেতু দড়িটি খোলার সময় পিছলে যাচ্ছে না দড়ির নিম্নমুখী ত্বরণ

$$a = \alpha R = \frac{TR^2}{I}$$

যা বালতির নিম্নমুখী ত্বরণের সঙ্গে সমান। অর্থাৎ

$$T = \frac{I a}{R^2}$$

সুতরাং আমরা লিখতে পারি,

$$mg - \frac{Ia}{R^2} = ma$$

$$\text{or}, a = \frac{mg}{m + I/R^2}$$

যেহেতু চাকতির, $I = MR^2/2$

$$a = \frac{2m}{2m+M}.g$$

আবার $T = \frac{Ma}{2} = \frac{M}{2m+M} mg$

লক্ষ্যনীয় যদি m>>M হয় তবে M/m<<1 এবং

$$a = \frac{2}{2+M/m} g \cong g$$

এবং $T = 0$

অর্থাৎ কপিকলের ভর বালতির ভরের তুলনায় উপেক্ষনীয় হলে বালতিটি অভিকর্ষজ ত্বরণ g নিয়েই নীচে নামবে এবং দড়িতে টান হবে শূন্য।

এখানে বালতির উপর অভিকর্ষজ বল কপিকলের কৌণিক ত্বরণ সৃষ্টি করার জন্য কিছুটা ব্যয় হওয়ায় বালতিটি অবাধ অবতরণ করতে পারছে না, তার ত্বরণ কমে যাচ্ছে।

5.4.2 দৃঢ়বস্তুর সাম্য (Equilibrium of a rigid body)

একটি দৃঢ়বস্তু কোন জড়ত্বীয় নির্দেশতন্ত্রে সাম্যে থাকবে যদি,

(i) তার ভরকেন্দ্রের রৈখিক বেগ শূন্য হয় এবং

(ii) ঐ নির্দেশতন্ত্রে স্থির কোন অক্ষের সাপেক্ষে তার কৌণিক বেগ শূন্য হয়।

বেগ শূন্য না হয়ে অপরিবর্তিত থাকলে বলা যায় বস্তুটি একটি গতিশীল সাম্য (dynamical equilibrium) অবস্থায় আছে।

রৈখিক গতির ক্ষেত্রে কোন দৃঢ়বস্তুর উপর $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ ইত্যাদি বাহ্যিক বল প্রযুক্ত হলে নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র অনুযায়ী,

$$\vec{F}^{(e)} = \sum_k \vec{F}_k = M\,\vec{f}_c$$

যেখানে $\vec{F}^{(e)}$ হল বস্তুটির উপর প্রযুক্ত মোট বাহ্যিক বল এবং $\vec{f}_c$ হল তার ভরকেন্দ্রের ত্বরণ। সুতরাং সাম্যাবস্থার প্রথম শর্ত অনুযায়ী,

$$\vec{F}(e) = \sum_k \vec{F}_k = 0 \tag{5.32}$$

অর্থাৎ প্রযুক্ত বাহ্যিক বলগুলির ভেক্টর যোগফল শূন্য।

আবার বিশুদ্ধ ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে (5.31) সমীকরণ থেকে আমরা জানি, দৃঢ়বস্তুর উপর বাহ্যিক টর্ক $\vec{\Gamma}_1, \vec{\Gamma}_2$ ...... ইত্যাদি প্রযুক্ত হলে মোট বাহ্যিক টর্ক

$$\vec{\Gamma}^{(e)} = \sum_k \vec{\Gamma}_k = I\,\vec{\alpha}$$

যেখানে $\vec{\alpha}$ হল বস্তুটির কৌণিক ত্বরণ,

সম্যাবাস্থায় দ্বিতীয় শর্তানুযায়ী লিখতে পারি,

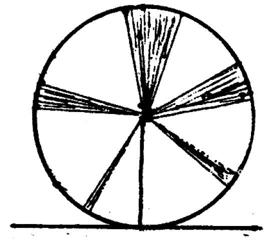
$$\vec{\Gamma}^{(e)} = \sum \vec{\Gamma}_k = 0 \tag{5.33}$$

দৃঢ়বস্তুর সাম্যাবস্থার শর্তগুলি প্রয়োগ করে আপনারা নিম্নলিখিত প্রশ্নটি সমাধান করতে পারবেন।

5.4.3 না পিছলে গড়ানো

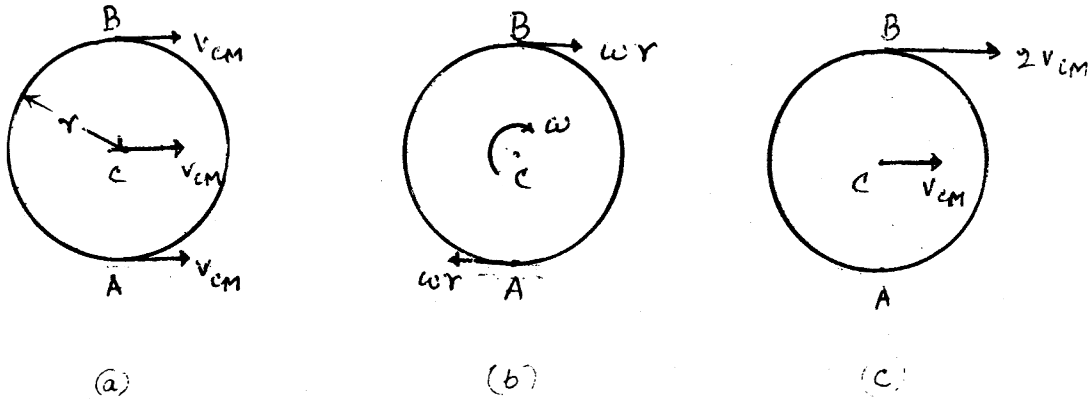
বরফ ঢাকা কোন রাস্তায় একটি গাড়ির ইঞ্জিন চালু করলে প্রথমে তার চাকাগুলি ঘুরতে শুরু করবে। কিন্তু গাড়ি এগোবে না। কারণ চাকাগুলি বরফের উপর পিছলে যাচ্ছে এবং নিজেদের জায়গায় দাঁড়িয়েই ঘুরছে। বরফের উপর ঘর্ষণ বল প্রায় শূন্য বলেই এটা হচ্ছে। আবার সমুদ্রের ধারে বালির উপর একই

ব্যাপার করতে চাইলে আমরা দেখব যদিও চাকা পিছলে যাচ্ছে অনেকটাই তবু গাড়ি সামান্য হলেও এগোচ্ছে। বালির উপর ঘর্ষণ বল কম হলেও বরফের চেয়ে বেশি। সেই ঘর্ষণ বল চাকাটিকে থামাতে চেষ্টা করছে এবং তার ফলে চাকা কিছুটা গড়িয়ে গাড়ি এগোচ্ছে। সাধারণ রাস্তায় গাড়ির চাকা কিভাবে গড়ায় এবং গাড়ি সহজে এগোয় তা আমরা এবার বুঝতে পারছি। চাকা এবং রাস্তার সংযোগস্থলে যথেষ্ট ঘর্ষণবলের জন্য চাকার ঐ অংশ মুহূর্তের জন্য গতিহীন হচ্ছে এবং পরমুহূর্তেই না পিছলে গড়িয়ে যাচ্ছে। একটি চলন্ত সাইকেলের চাকাকে ভালভাবে লক্ষ্য করলে এটা বোঝা যাবে।



চিত্র 5.14 ঘুরন্ত সাইকেল চাকার উপরের অংশ নীচের চেয়ে দ্রুত গতিশীল

মাটি ছুঁয়ে থাকা অংশের স্পোকগুলি অনেকটা পরিষ্কার দেখতে পাওয়া যাবে। কিন্তু ক্রমশঃ উপরের অংশের স্পোকগুলি দ্রুততর গতির জন্য আবছাভাবে বোঝা যাবে। (চিত্র 5.14) অর্থাৎ চাকার উপরের অংশ নীচের চেয়ে দ্রুত গতিশীল। কিভাবে এটা ঘটছে তা চিত্র 5.15 দেখলে পরিষ্কার হবে। চাকার ভরকেন্দ্র c-এর V_{CM} গতিবেগ বিশুদ্ধ সরণী d [চিত্র 5.15 (a)] এবং ভরকেন্দ্রের চারপাশে w কৌণিক গতিবেগে চাকার বিশুদ্ধ ঘূর্ণণ [চিত্র 5.15 (b)]। এই দুই গতির সমন্বয়ে চাকার যে সাধারণ গতি [চিত্র 5.15 (c)] সেখানে মাটির



চিত্র 5.15 চলন্ত সাইকেল চাকার গতি - A ভূমির স্পর্শবিন্দু; C, ভরকেন্দ্র; B,সর্বোচ্চ বিন্দু।
(a) বিশুদ্ধ রৈখিক গতি; (b) বিশুদ্ধ ঘূর্ণণ; (c) রৈখিক ও ঘূর্ণণ গতির সমন্বয়

সাথে চাকার স্পর্শবিন্দু A -র তাৎক্ষণিক গতিবেগ শূন্য, কিন্তু সর্বোচ্চ বিন্দু B-র গতিবেগ $2V_{CM} = 2\omega r$, যেখানে r হল চাকার ব্যাসার্ধ।

এখানে লক্ষ্যনীয় ব্যাপার হল, মাটি ও চাকার স্পর্শবিন্দুতে ঘর্ষণের ফলেই চাকাটি না পিছলে গড়াচ্ছে, কিন্তু ঐ বিন্দুতে দুটি তলের কোন আপেক্ষিক গতি না থাকায় এটি স্থিতীয় (static) ঘর্ষণের ক্ষেত্রে — ঘর্ষণবলের জন্য কোন কার্য বা শক্তির অপচয় ঘটছে না।

সাধারণভাবে যখন চাকাটি কিছুটা পিছলে গিয়ে গড়াবে তখন $2V_{CM} < \omega r$ এবং স্পর্শবিন্দুতে গতীয় (kinetic) ঘর্ষণ বলের বিরুদ্ধে চাকাটি কাজ করবে এবং শক্তির অপচয়ের জন্য যথেষ্ট তাপ উৎপন্ন হবে।

সুতরাং আমরা দেখলাম, না পিছলে গড়ানোর জন্য ঘূর্ণণ এবং সরণ গতির মধ্যে সম্পর্ক হবে

$$V_{CM} = \omega r$$

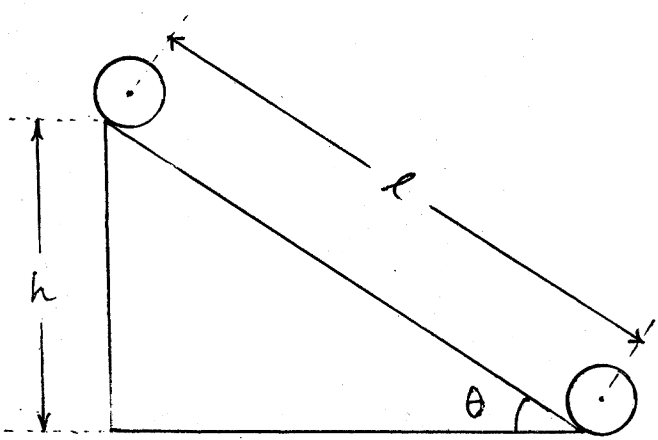
এবং (5.15) এবং (5.17) সমীকরণ থেকে চাকার মোট গতিশক্তি হবে

$$T = \frac{1}{2}MV^2{}_{cm} + \frac{1}{2}I_{CM}V^2{}_{CM}/r^2$$

$$\text{বা}\ \ T = \frac{1}{2}\left(M + I_{CM}/r^2\right)V^2{}_{CM}$$

উদাহরণ

একটি ফাঁকা চোঙ, একটি নিরেট চোঙ এবং একটি নিরেট গোলককে ℓ দৈর্ঘ্যের একটি নত তলের উপর থেকে ছেড়ে দেওয়া হল। তল বরাবর প্রতিটির ভরকেন্দ্রের ত্বরণ নির্ণয় করুন এবং কোনটি সবচেয়ে দ্রুত নীচে পৌঁছাবে বলুন। অনুভূমিকের সঙ্গে তলটি θ কোণে আনত।



চিত্র 5.16 নত তল বরাবর গতি

বস্তু তিনটির সঙ্গে যে কোনটির ভর M এবং ব্যাসার্ধ r ধরলে পতনের জন্য স্থিতিশক্তি বৃদ্ধি পায় —Mgh, যেখানে $h = \ell \sin\theta$ হল তলটির উল্লম্ব উচ্চতা। আবার পতনের জন্য গতিশক্তি বৃদ্ধি পায়

$$\frac{1}{2}\left(M + I_{CM} / r^2\right)V^2{}_{CM}$$

যেখানে V_{CM} হল তলটির নীচে পৌঁছানোর পর বস্তুটির ভরকেন্দ্রের গতি।

শক্তির নিত্যতা সূত্র অনুযায়ী,

$$-Mgh + \frac{1}{2}\left[M + I_{CM} / r^2\right]V^2{}_{CM}$$

বা $$V^2{}_{CM} = \frac{2gh}{1 + \frac{I_{cm}}{Mr^2}}$$

এখন নততল বরাবর বস্তুটির ত্বরণ a হলে

$$V^2{}_{CM} = 2\,a\,b$$

সুতরাং তুলনা করে পাই,

$$a = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I_{CM}}{Mr^2}} \qquad (5.36)$$

টেবিল 5.1 থেকে বিভিন্ন বস্তুর জড়তা ভ্রামকের রাশিমালা ব্যবহার করে এখন আমরা প্রতিটি বস্তুর ত্বরণ বার করতে পারি ঃ

ফাঁপা চোঙ ঃ $I_{CM} = Mr^2,\qquad a = \frac{1}{2}g\sin\theta = 0\cdot 5g\sin\theta$

নিরেট চোঙ ঃ $I_{CM} = \frac{1}{2}Mr^2,\qquad a = \frac{2}{3}g\sin\theta = 0\cdot 67g\sin\theta$

নিরেট গোল ঃ $I_{CM} = \frac{2}{5}Mr^2,\qquad a = \frac{5}{7}g\sin\theta = 0\cdot 71g\sin\theta$

সুতরাং গোলকের ত্বরণ সবচেয়ে বেশি এবং সেটি সবচেয়ে দ্রুত, নিরেট চোঙটি তারপর এবং ফাঁপা চোঙ সবশেষে নীচে পৌঁছাবে।

5.4.4 কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র

আমরা (5.30) সমীকরণে দেখেছি, কোন দৃঢ়বস্তু বা সাধারণভাবে কোন কণাসমষ্টির ক্ষেত্রে প্রযুক্ত মোট বাহ্যিক টর্ক

$$\vec{\Gamma}^{(e)} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{5.37}$$

যেখানে $\vec{L}$ হল কণাসমষ্টির মোট কৌণিক ভরবেগ।

মোট বাহ্যিক টর্ক $\vec{\Gamma}^{(e)} = 0$ হলে, $d\vec{L}/dt = 0$ বা

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega} = \text{ধ্রুবক} \tag{5.38}$$

একটি কণা সমষ্টির উপর মোট বাহ্যিক টর্ক শূন্য হলে অর্থাৎ একটি বিচ্ছিন্ন কণা সমষ্টির জন্য, মোট কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত হয়। এটাই কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র।

এর আগে আপনারা শক্তি সংরক্ষণ সূত্র ও রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্রের সঙ্গে পরিচিত হয়েছেন। কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্রও পদার্থবিজ্ঞানের ক্ষেত্রে অন্যতম একটি গুরুত্বপূর্ণ সূত্র। এটি কণাবলবিদ্যার (quantum mechanics) ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। আবার আপেক্ষিকতাবাদে (theory of relativity) যেখানে আলোর কাছাকাছি গতির ক্ষেত্রে বলের নিউটনীয় দ্বিতীয় সূত্র প্রয়োগ করতে সমস্যা দেখা দেয়, সেখানেও কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র প্রয়োগ করা যায়।

কণা সমষ্টির জড়তাভ্রামক I হলে আমরা জানি $\vec{L} = I\vec{\omega}$ (সমীকরণ 5.12)। সুতরাং একটি বিচ্ছিন্ন বস্তুর (দৃঢ়বস্তু নয়) ক্ষেত্রে যদি জড়তাভ্রামকের মান পরিবর্তনীয় $(I_1, I_2, \ldots.)$ হয়, তবে কৌণিক বেগও যথাক্রমে $(w_1, w_2, \ldots.)$ পরিবর্তিত হবে। কিন্তু কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত থাকবে।

$$I_1\vec{w}_1 = I_2 w_2 = \ldots\ldots = \text{ধ্রুবক।} \tag{5.39}$$

কৌণিক ভরবেগ ভেক্টর রাশি হওয়ায় সমীকরণ (5.38) বা (5.39) থেকে আসলে তিনটি স্কেলার সমীকরণ পাওয়া যাবে। এর প্রতিটি এক একেকটি কার্টেজীয় অক্ষের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। টর্কের তিনটি

উপাংশের মধ্যে যদি কেবলমাত্র একটি শূন্য হয়, (z উপাংশ ধরা যাক)। তবে কৌণিক ভরবেগের একই উপাংশটিই শুধু ধ্রুবক হবে, অন্যগুলি নয় ঃ

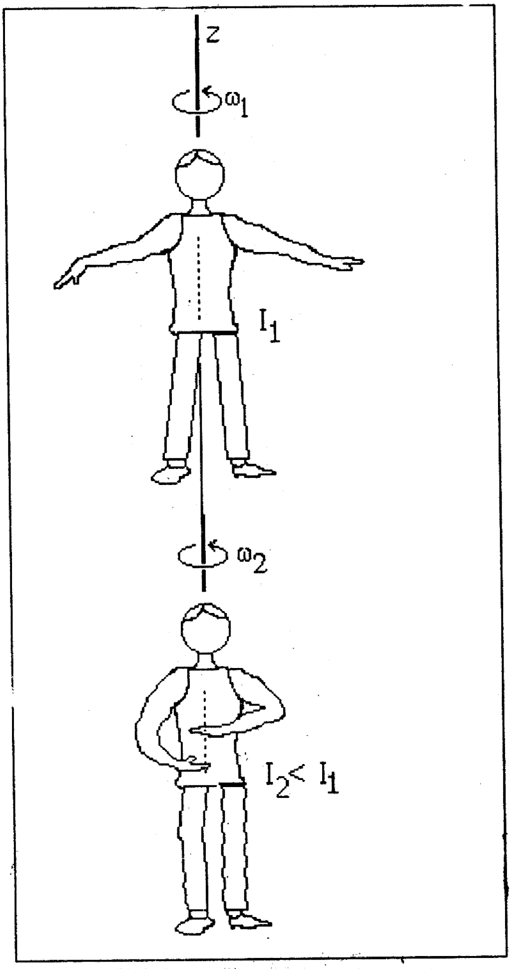
$$L_z = 0$$

$$I_z\omega_z = \text{ধ্রুবক} \qquad (5.40)$$

কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র এখন আমরা দুটি ক্ষেত্রে প্রয়োগ করে দেখাব।

(1) পাক-খাওয়া স্কেটার

একজন বরফ স্কেটার বা ব্যালেরিনা যখন ঘুরতে ঘুরতে নিজের ছড়িয়ে রাখা হাত দুটি দেহ সংলগ্ন করেন এবং দ্রুততর বেগে পাক খান, তখন তিনি আসলে 5.40 সমীকরণ প্রয়োগ করছেন (চিত্র 5.17)। ছড়ানো অবস্থায় ঘূর্ণন অক্ষের (z অক্ষ) চারপাশে তাঁর জড়তা ভ্রামক (I_1) যা হয়, হাতদুটি দেহের কাছে আনলে তা (I_2) কমে যাবে, কারণ তার ভরের আপেক্ষিক বিন্যাস ঘূর্ণাক্ষের আরও কাছাকাছি চলে আসছে। অন্যভাবে বললে, $I = \sum m\, r^2$ রাশিমালায় অক্ষ থেকে কণাদের দূরত্ব r কমে যাচ্ছে। কৌণিক গতিবেগের পরিবর্তন ω_1 থেকে ω_2 হলে



চিত্র 5.17

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

বা $\omega_2 = \dfrac{I_1}{I_2}\omega_1 > \omega_1$ কারণ $I_1 > I_2$

(2) নিউট্রন নক্ষত্র বা পালসার

একজন স্কেটার যেখানে স্বেচ্ছায় নিজেকে গুটিয়ে এনে পাক খাওয়ার বেগ বাড়ান, অনেক নক্ষত্র সেখানে প্রাকৃতিক নিয়মে সঙ্কুচিত হয়ে কৌণিক গতিবেগ অবিশ্বাস্য রকমভাবে বাড়িয়ে তোলে।

সূর্যের মত বেশিরভাগ নক্ষত্রই নিজের অক্ষের চারপাশে ঘোরে। এই ঘূর্ণন ঠিক দৃঢ়বস্তুর ঘূর্ণণ নয়, এক ধরনের অসমঞ্জস ঘূর্ণণ (differential rotation)। এই ধরনের ঘূর্ণণের গ্যাসীয় পদার্থে গড়া নক্ষত্রের

বিভিন্ন অংশ বিভিন্ন কৌণিক গতিবেগে ঘোরে। যেমন, সূর্যের মেরু অঞ্চল 37 দিনে একপাক এবং নিরক্ষীয় অঞ্চল 26 দিনে এক পাক ঘোরে। এখন, যে কোন নক্ষত্রের কেন্দ্রে নিউক্লীয় বিক্রিয়ায় উৎপন্ন বর্হিমুখী বিকিরণ চাপ (radiation pressure) অভিকর্ষজনিত অন্তর্মুখী চাপের সমান ও বিপরীত হওয়ার নক্ষত্রটি সাম্যাবস্থায় থাকে। নিউক্লীয় জ্বালানী শেষ হয়ে গেলে বিকিরণ চাপ না থাকায় নক্ষত্র অভিকর্ষের প্রভাবে সঙ্কুচিত হতে থাকে। 1.4 সৌরভরের (চন্দ্রশেখর সীমা) বেশি ভরের নক্ষত্রের জন্য এই অভিকর্ষীয় অন্তর্মুখী বল এত শক্তিশালী হয় যে নক্ষত্রের সমস্ত পরমাণুর গঠন ধ্বংস হয়ে গিয়ে ইলেক্ট্রন-নিউক্লীয়াস সব একত্রিত হয় এবং নক্ষত্রটি কার্যকরীভাবে একটি বড়সড় নিউক্লীয়াসের রূপ নেয় — যা শুধুমাত্র নিউট্রন দিয়ে গড়া। 1.5 সৌরভরের একটি নিউট্রন নক্ষত্রের ব্যাসার্ধ দাঁড়ায় মাত্র 10km!

নক্ষত্রের প্রাথমিক ব্যাসার্ধ সূর্যের সমান, অর্থাৎ 7×10^5km ধরলে জড়তা ভ্রামকের পরিবর্তন

$$\frac{I_2}{I_1}=\left(\frac{10}{7\times10^5}\right)^2\sim\frac{1}{4\times10^9}$$

যেহেতু গোলকের জড়তাভ্রামক $I\propto r^2$। নক্ষত্রটির কৌণিক গতিবেগের পরিবর্তন

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{I_1}{I_2}=4\times10^9$$

অর্থাৎ তার ঘূর্ণনবেগ 1 মাসে 1 বার (সূর্যের ঘূর্ণনবেগ) থেকে বেড়ে দাঁড়াবে 1 মাসে 4×10^9 বার বা 1 সেকেন্ডে $\dfrac{4\times10^9}{30\times24\times3600}=543$ বার !

আবর্তনজনিত সুস্থিরতা

দ্রুতবেগে আবর্তন কোন বস্তুকে এক ধরনের সুস্থিরতা (stability) দেয় — সহজে তার দিক পরিবর্তন করা যায় না। $\vec{L}$ কৌণিক ভরবেগে আবর্তিত কোন বস্তুর উপর $\vec{L}$ - এর লম্বদিকে যদি একটি টর্ক $\vec{\Gamma}$ ক্রিয়া করে এবং কৌণিক ভরবেগের $\Delta\vec{L}$ পরিবর্তন ঘটায়, তাহলে ঘূর্ণাক্ষ যে কোণে ঘুরবে তা হল $\Delta\theta=\tan^{-1}\left(\Delta L/L\right)$। $\vec{L}$ -এর মান যত বেশি হবে $\Delta\theta$ তত কম হবে। অর্থাৎ টর্ক $\vec{\Gamma}$ -এর পক্ষে বস্তুটির ঘূর্ণাক্ষ পরিবর্তন করা ততই শক্ত হবে। দ্রুতগামী আরোহীবিহীন একটি সাইকেল না টলে গিয়ে অনেকটা দূরত্ব চলে যেতে পারে, গতি কম হলে শীঘ্রই পড়ে যায়। কক্ষপথে বসানোর আগে একটি কৃত্রিম উপগ্রহকে একই কারণে নিজের চারপাশে ঘূর্ণণগতি দেওয়া হয়।

5.5 সারাংশ

- দৃঢ়বস্তু হল বিন্দুভরের সমন্বয়ে গঠিত একটি বিস্তৃত বস্তু, যার যে কোন দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব সর্বদা অপরিবর্তিত থাকে।

- দৃঢ়বস্তুর বিশুদ্ধ রৈখিক গতির সময়ে তার প্রতিটি বস্তুকণার নির্দিষ্ট সময়ে একই সরণ ঘটে।

- দৃঢ়বস্তুর বিশুদ্ধ ঘূর্ণন গতির সময় তার প্রতিটি বস্তুকণা একটি বৃত্তাকার পথে ঘোরে। সমস্ত বস্তুকণার জন্য এই কেন্দ্রগুলি একটি সরলরেখায় থাকে — যাকে বস্তুটির ঘূর্ণাক্ষ বলা হয়।

  দৃঢ়বস্তুর সাধারণ গতি ভরকেন্দ্রের সরণ গতি ও ভরকেন্দ্রগামী অক্ষের চারপাশে ঘূর্ণণ গতি — এই দুয়ের সমন্বয়ে গঠিত হয়।

- ঘূর্ণণের ক্ষেত্রে ভরের সদৃশ রাশি হল জড়তা ভ্রামক। একে ঘূর্ণণ জাড্যতা বলা হয়। বিচ্ছিন্ন বস্তুকণায় গঠিত দৃঢ়বস্তুর ক্ষেত্রে জড়তাভ্রামক

  $$I = \sum_i m_i r_i^2$$

  এবং বস্তুকণার অবিচ্ছিন্ন বিন্যাসের ক্ষেত্রে

  $$I = \int r^2 dm$$

- ঘূর্ণণের ক্ষেত্রে বলের সদৃশ রাশি টর্ক (T)। জড়তাভ্রামক (I) ও কৌণিক ত্বরণের (α) সঙ্গে টর্কের সম্পর্ক

  $$T = I\alpha$$

  এটি ঘূর্ণণ গতির ক্ষেত্রে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের সদৃশ।

- দৃঢ়বস্তুর সাম্যাবস্থার শর্ত দুটি

  $$\sum_i F_i = 0, \ \sum_i T_i = 0$$

- দৃঢ়বস্তুর কৌণিক ভরবেগ

  $$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

- ঘূর্ণণ গতির ক্ষেত্রে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের আরেকটি সদৃশ ঃ

$$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী, একটি বস্তু তন্ত্রের (বা কণাসমষ্টির) উপর বহিঃস্থ টর্ক শূন্য হলে তার মোট কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত হয়।

5.6 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. অক্সিজেন অণুর মধ্যে পরমাণুগুলির দূরত্ব $1\cdot 2\,\mathring{A}$। STP তে একটি অক্সিজেন অণুর দ্রুতি 460 m/s। অণুটির ঘূর্ণণ গতিশক্তি রৈখিক গতিশক্তির $\frac{2}{3}$ হলে STP তে এটির কৌণিক গতিবেগ নির্ণয় করুন। অণুর ঘূর্ণাক্ষ পরমাণু-সংযোজক সরলরেখার অভিলম্ব ও ভরকেন্দ্রগামী ধরে নিন।
2. দেওয়ালে হেলানো একটি মই বেয়ে একজন লোক উঠছে। a দূরত্ব ওঠার পর সে বুঝতে পারল যে, মইটি পিছলে যাওয়ার ঠিক পূর্বমুহূর্তে সাম্যাবস্থায় আছে। লোকটির ওজন ω, মই এর ওজন w এবং মইএর দৈর্ঘ্য 2ℓ হলে ভূমির সাথে মইটির নতিকোণ নির্ণয় করুন।

5.7 উত্তরমালা

প্রশ্ন — 1

প্রতিটি অক্সিজেন পরমাণুর ভর m kg ধরলে সমীকরণ 5.20 থেকে পাই, অণুটির জড়তা ভ্রামক

$$I = \mu r^2 = \left[\frac{m}{2}\text{kg}\right]\left(1\cdot 2\times 10^{-10}\text{m}\right)^2$$

এবং ঘূর্ণণ গতিশক্তি (সমীকরণ 5.17)

$$T_r = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{m}{4}\times\left(1\cdot 2\times 10^{-10}\right)^2\omega^2\text{kg}\,\text{m}^2$$

আবার অণুটির চলন গতিশক্তি (সমীকরণ 5.14)

$$T_t = \frac{1}{2}Mu^2 = \frac{1}{2}(2m\,\text{kg})\times\left(460\text{ms}^{-1}\right)^2$$

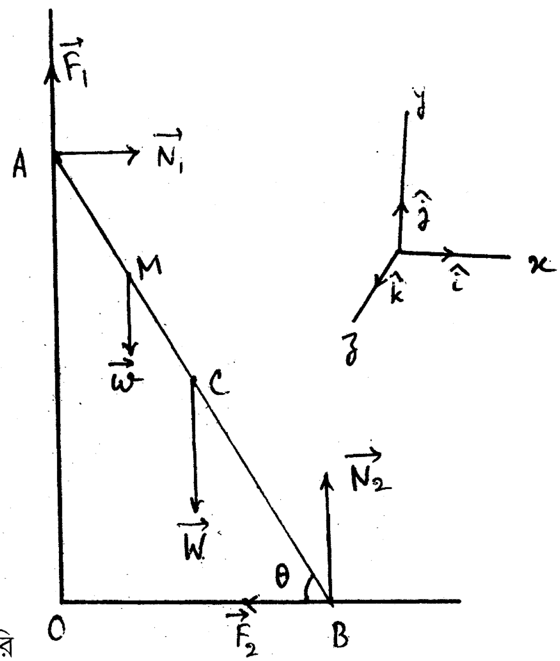
যেহেতু $T_r = \frac{2}{3} T_t$

$$\frac{m}{4} \times \left(1 \cdot 2 \times 10^{-10}\right)^2 \omega^2 \text{kg}\,\text{m}^2 = \frac{2}{3} \times \text{m} \times (460)^2 \,\text{kg}\,\text{m}^2 \text{s}^{-2}$$

or, $\omega = 6 \cdot 3 \times 10^{12} \,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$

প্রশ্ন — 2

লোকটির ওজন $\vec{\omega}$, M বিন্দু দিয়ে খাড়াভাবে নীচের দিকে এবং মই-এর ওজন $\vec{w}$ তার ভরকেন্দ্র বা মধ্যবিন্দু C দিয়ে খাড়াভাবে নীচের দিকে কাজ করছে। $\vec{N}_1$ এবং $\vec{N}_2$ যথাক্রমে স্পর্শবিন্দু A এবং B তে লম্ব প্রতিক্রিয়া। এখন A বিন্দু AO বরাবর এবং B বিন্দু OB বরাবরপিছলে যাওয়ার প্রবণতা দেখায় বলে ঐ দুটি বিন্দুতে ঘর্ষণ বল যথাক্রমে $\vec{F}_1$ ও $\vec{F}_2$ চিত্রে যেভাবে দেখানো হয়েছে সেভাবে কাজ করবে।



চিত্র 5.18 $2 - AB = 2\ell, AC = CB = \ell, BM = a$

এখন বলের সাম্যাবস্থা (সমীকরণ 5.15 থেকে পাই,)

$$\vec{\omega} + \vec{w} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

এখন চিত্রে দেখানো কার্টেজীয় তন্ত্র x, y, z ও সেই অনুযায়ী একক ভেক্টর $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ধরলে আমরা লিখতে পারি

$$-\omega\hat{j} - W\hat{j} + N_1\hat{i} + N_2\hat{j} + F_1\hat{j} - F_2\hat{i} = 0$$

বা $\quad (N_1 - F_2)\hat{i} + (N_2 + F_1 - \omega - W)\hat{j} = 0$

বা, $\quad N_1 - F_2 = 0$

এবং $\quad N_2 + F_1 - \omega - W = 0$

সুতরাং $N_1 = F_2$

এবং $N_2 + F_1 = \omega + W$

এখন টর্কের সাম্যাবস্থা (সমীকরণ 5.16) প্রয়োগ করার জন্য আমরা B বিন্দুকে বেছে নিলে $\vec{F}_2$ এবং $\vec{N}_2$ বলদুটির জন্য টর্ক শূন্য হয়ে যায়। সেক্ষেত্রে B বিন্দুর চারপাশে অন্য বলগুলির টর্ক নিয়ে আমরা পাই,

$$\overrightarrow{AB}\times \vec{F}_1 + \overrightarrow{AB}\times \vec{N}_1 + \overrightarrow{MB}\times \vec{\omega} + \overrightarrow{GB}\times \vec{w} = 0$$

বা $$2\ell F_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\hat{k} + 2\ell N_1 \sin\theta\hat{k} - a\omega \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\hat{k} - \ell W \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\hat{k} = 0$$

এখানে θ হল ভূমিকর সাথে মই-এর নতিকোণ। সুতরাং

$$2\ell\, F_1 \cos\theta + 2\ell\, N \sin\theta - a\omega\cos\theta - \ell\, W\cos\theta = 0$$

বা $$\cot\theta = \frac{2\ell\, N_1}{a\omega + \ell W - 2\ell\, F_1}$$

একক 6 □ কেন্দ্রীয় সংরক্ষী বল (Central Conservative Forces)

গঠন

6.1 প্রস্তাবনা

নিউটন তাঁর গতিসূত্রের প্রথম প্রয়োগ করেছিলেন গ্রহদের গতির ব্যাখ্যায়। তাঁর মহাকর্ষ সূত্র অনুযায়ী সূর্যের জন্য গ্রহদের উপর ক্রিয়াশীল বল সবসময়ই সূর্য অভিমুখী। যদি সূর্যের গতি অবহেলা করা হয়, তাহলে যে কোন গ্রহের উপর বল সব সময়ই একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখী। এরূপ বলকেই বলা হয় কেন্দ্রীয় বল। পরে দেখা গেল যে দুটি স্থির আহিত কণার ভিতরে আন্তঃক্রিয়া তাদের সংযোগকারী রেখা বরাবর কাজ করে। সুতরাং এটিও একটি কেন্দ্রীয় বল।

পরমাণু ও কেন্দ্রীয় জগতের কথা বাদ দিলে মৌলিক আন্তঃক্রিয়া কেবল মাত্র দুটি — মহাকর্ষ এবং তড়িৎ চুম্বকীয় আন্তঃক্রিয়া। উভয়ই মূলত কেন্দ্রীয় বল। সুতরাং সাধারণ দৃশ্যমান গতির ব্যাখ্যায় কেন্দ্রীয় বলের আলোচনা অপরিহার্য। লক্ষ্য করুন যে উভয় ক্ষেত্রেই বলের উৎস যথাক্রমে ভর এবং আধান স্কেলার রাশি দিয়ে চিহ্নিত। তাদের কোনও দিক্ নেই। কেন্দ্রীয় বলের সঙ্গে উৎসের স্কেলার রূপের যোগ মৌলিক। যদি উৎসের গতি থাকে যেমন বিদ্যুৎ প্রবাহে গতিশীল ইলেকট্রন বা অন্য কোনও আহিত কণা — তাহলে উৎসকে আর স্কেলার বলা চলে না এবং আন্তঃক্রিয়াও সাধারণভাবে কেন্দ্রীয় হয় না। আবার নিউক্লীয় কণাদের ভিতর বল সাধারণভাবে তাদের স্বকীয় ঘূর্ণণ (বা স্পিন — Spin) এর উপরও নির্ভর ও করে — সেজন্য এই বলকেও পুরোপুরি কেন্দ্রীয় বলা চলে না। তবে ঘূর্ণণজনিত আন্তঃক্রিয়া অনেক সময়ই অপেক্ষাকৃত দুর্বল এবং এজন্য বিশেষ ক্ষেত্রে নিউক্লীয় আন্তঃক্রিয়াকে কেন্দ্রীয় বল বলা চলে।

আপনারা লক্ষ্য করবেন ,এই এককের শিরোনামে বলের আরও একটি বিশেষণ ব্যবহার করা হয়েছে — 'সংরক্ষী'। এই শব্দটি আপনাদের পূর্ব পরিচিত। আপনারা দেখবেন যে কেন্দ্রীয় এবং সংরক্ষী এই দুটি গুণযুক্ত বলের প্রভাবে গতির আলোচনা শুধু গুরুত্বপূর্ণই নয় বেশ সরস এবং অপেক্ষাকৃত সরল।

6.2 উদ্দেশ্য :

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন —

- কেন্দ্রীয় সংরক্ষী বলের সংজ্ঞা
- কেন্দ্রীয় সংরক্ষী বলের ক্ষেত্রে দুটি সংরক্ষণ সূত্র
- সংরক্ষণ সূত্র দুটি ব্যবহার করে গতিপথের সাধারণ অবকল সমীকরণ
- বিশেষ ক্ষেত্রে ঐ অবকল সমীকরণের সমাধান ও তার কিছু প্রয়োগ।

6.3 কেন্দ্রীয় সংরক্ষী বল সংজ্ঞা ও গাণিতিক রূপ

কেন্দ্রীয় বল সবসময়ই একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখী। এটিই কেন্দ্রীয় বলের সংজ্ঞা ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরলে কেন্দ্রীয় বল হবে বস্তুকণার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ এর সঙ্গে একই (বা বিপরীত) দিকে। সুতরাং বল $\vec{F}$ কে লেখা যাবে,

$$\vec{F}=f(\vec{r})\vec{r} \tag{6.1}$$

এখানে $\vec{r}$ হল $\vec{r}$ এর দিকে একক ভেক্টর। f একটি স্কেলার ওর মান ভেক্টর $\vec{r}$ এর ওপরে নির্ভর করবে f এর .... $\vec{r}$ এর তিনটি উপাংশই আলাদাভাবে থাকতে পারে। এবার মনে করুন বলটি সংরক্ষী আপনারা জানেন এর শর্ত $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$। সেহেতু $\vec{F}$ সর্বদাই $\vec{r}$ এর দিকে, এক্ষেত্রে গোলীয় নির্দেশাংক (spherical polar coordinates) ব্যবহার করা সুবিধাজনক কারণ এই নির্দেশংকে $\vec{F}$ এর θ,ϕ উপাংশ শূন্য। গোলীয় নির্দেশাংকে $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ তিনটি উপাংশ নিম্নরূপ (PHE 01 একক 3 দেখুন)।

$$\text{r উপাংশ — } \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta F_\phi\right)-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}$$

$$\theta \text{ উপাংশ — } \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial Fr}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rF_\phi\right) \tag{6.2}$$

$$\phi \text{ উপাংশ — } \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rF_\theta\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial\theta}$$

বর্তমান ক্ষেত্রে $F_\theta = F_\phi = 0$, সুতরাং $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ ব্যবহার করে সমীকরণ (6.2) থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{\partial F_r}{\partial \theta} = \frac{\partial F_r}{\partial \theta} = 0$$

অর্থাৎ F_r কেবলমাত্র r এর অপেক্ষক। সুতরাং কেন্দ্রীয় সংরক্ষী বলের ক্ষেত্রে আমরা (6.1)কে লিখতে পারি,

$$\vec{F} = f(r)\hat{r} \tag{6.3}$$

অর্থাৎ বলের মান কেবলমাত্র অবস্থান দূরত্ব r এর মানের উপর নির্ভর করবে। এ অবস্থায় (6.3)কে একটি গ্রেডিয়েন্ট ভাবে লেখা যাবে,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \tag{6.4}$$

যেখানে স্কেলার V কেবলমাত্র স্কেলার r এর অপেক্ষক।

একটি কথা বলা ভাল। অনেক লেখকই কেন্দ্রীয় বলের সংজ্ঞা হিসেবে সমীকরণ (6.4) কে ধরে নেন। তাঁদের লেখায় ''সংরক্ষী'' গুণটি ''কেন্দ্রীয়'' শব্দটির ভিতরেই নিহিত, আলাদা করে ''সংরক্ষী'' বিশেষণটি ব্যবহার করা নিষ্প্রয়োজন।

অনুশীলনী — 1

1. একটি বৈদ্যুতিক দ্বিমেরুর জন্য আহিত কণার উপরে ক্রিয়াশীল বল $\vec{F} = -\vec{\nabla}\left(\frac{\mu\cos\theta}{r^2}\right)$ (μ একটি ধ্রুবক)। এই বলটি কি কেন্দ্রীয় সংরক্ষী?

2. একটি বলক্ষেত্র নিম্নরূপ

   $\vec{F} = -ax\vec{i} - by\vec{j} - cz\vec{k}$ (a, b, c ধ্রুব সংখ্যা)

   a, b, c ভিতরে কি সম্পর্ক থাকলে বলটি কেন্দ্রীয় সংরক্ষী হবে?

3. কার্টেজীয় নির্দেশাংক ব্যবহার করে প্রমাণ করুন যে (6.1) এ $\vec{F}$ সংরক্ষী হলে (6.3) সঠিক।

6.4 কেন্দ্রীয় সংরক্ষী বলক্ষেত্রে দুটি সংরক্ষণ সূত্র।

যদি একটি বস্তুকণা কেন্দ্রীয় সংরক্ষী বলের প্রভাবে গতিশীল হয় তার বৈশিষ্ট্যগুলি হল ঃ

1) বলের উৎস বিন্দুর সাপেক্ষে কণাটির কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত হবে।

2) কণাটির গতিপথ একই সমতলে থাকবে।

3) কণাটির ক্ষেত্রীয় গতিবেগ (areal velocity) ধ্রুবক হবে অর্থাৎ কণাটির সমান সময়ে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করবে।

কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ

আমরা জানি (একক 4 দেখুন) বলের কেন্দ্রের সাপেক্ষে বস্তুকণার উপর টর্ক

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

সমীকরণ (6.1) থেকে $\vec{F}$ এর রাশিমালা বসিয়ে পাই,

$$\vec{N} = \vec{r} \times F\vec{r} = 0$$

কারণ $\vec{r} \times \vec{r}$ । আবার আপনারা জানেন যে

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

যেখানে $\vec{L}$ হল বলের কেন্দ্রের সাপেক্ষে বস্তুকণার কৌণিক ভরবেগ। সুতরাং

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

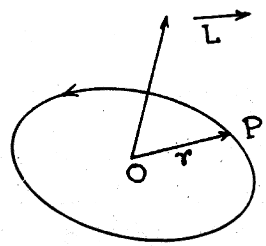
বা কৌণিক ভরবেগ $\vec{L}$ একটি ধ্রুবক ঃ

$$\vec{L} = \text{ধ্রুবক}$$

$\vec{L}$ একটি ভেক্টর রাশি হওয়ায় আমরা বলতে পারি কেন্দ্রীয় বলের প্রভাবে গতিশীল কোন কণার বলকেন্দ্রের সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগের মান ও অভিমুখ ধ্রুবক।

সমতলে সীমাবদ্ধ গতি

কৌণিক ভরবেগের সংজ্ঞা অনুযায়ী $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$ । যেখানে $\vec{p} = m\vec{v}$ হল বস্তুকণার ভরবেগ। সুতরাং $\vec{L}$ হল $\vec{r}$ -এর $\vec{v}$ উভয়েরই লম্ব একটি ভেক্টর। যেহেতু $\vec{L}$ এর অভিমুখ নির্দিষ্ট, $\vec{\gamma}$ (এবং $\vec{v}$) $\vec{L}$ - এর লম্বতলে সর্বদা অবস্থান করবে (চিত্র 6.1)। অর্থাৎ বস্তুকণার গতি ঐ সমতলেই সীমাবদ্ধ থাকবে।



চিত্র 6.1 কৌণিক ভরবেগ $\vec{L}$ ধ্রুবক বলে বস্তুকণার গতিপথ $\vec{L}$-এর লম্বতলে সর্বদা অবস্থান করবে।

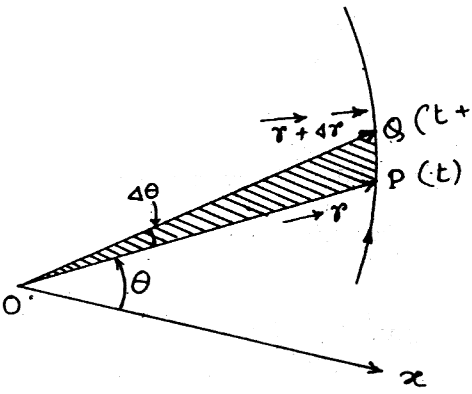
বস্তুকণার গতিপথের এই সমতলে দ্বিমাত্রিক ধ্রুবীয় (polar) নির্দেশতন্ত্র (r, θ) ব্যবহার করে আমরা লিখতে পারি

(একক 4 দেখুন), কেন্দ্রীয় বলের জন্য

$$L = mr^2\dot{\theta} = \text{ ধ্রুবক।}$$

ক্ষেত্রীয় গতিবেগের ধ্রুবক

চিত্র 6-এ কেন্দ্রীয় বলের প্রভাবে গতিশীল একটি কণার গতিপথ দেখানো হয়েছে। t সময়ে তার অবস্থান ভেক্টর হল r^2 এবং $t+\Delta t$ সময়ে তা হয় $\vec{r}+\Delta\vec{r}$। সুতরাং Δt সময়ের অবকাশে বস্তুকণার অবস্থান ভেক্টর দ্বারা অতিক্রন্ত ক্ষেত্রফল



চিত্র 6.2 অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ দ্বারা অতিক্রান্ত ক্ষেত্রফল।

ox – ধ্রুবীয় অক্ষ $\vec{OP} = \vec{r}$, $\vec{OQ} = \vec{r} + \Delta\vec{r}$

$$\Delta A = OPQ$$

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} r(r + \Delta r)\sin\Delta\theta$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta \quad [\because \ \sin\Delta\theta = \Delta\theta, \text{ ক্ষুদ্র } \Delta\theta \text{ এর জন্য}]$$

যেখানে আমরা অতিক্ষুদ্র রাশি $\Delta r \Delta\theta$ কে অগ্রাহ্য করেছি। সুতরাং একক সময়ে $\vec{r}$ কর্তৃক অতিক্রান্ত ক্ষেত্রফল

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\gamma^2 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2}\gamma^2\dot{\theta} = \text{ ধ্রুবক}$$

কারণ সমীকরণ (6.6) থেকে আমরা জানি $r^2\dot{\theta}$ ধ্রুবক।

অতএব ক্ষেত্রীয় গতিবেগ বা একক সময়ে অবস্থান ভেক্টর কর্তৃক অতিক্রান্ত ক্ষেত্রফল একটি ধ্রুবক হবে। অন্যভাবে বলতে পারি, কেন্দ্রীয় বলের প্রভাবে গতিশীল কোন বস্তুকণার অবস্থান ভেক্টর সমান সময়ে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করবে।

আপনারা জানেন (EPH 02' র একক 3 দেখুন) সংরক্ষী বলের জন্য মোট যান্ত্রিক শক্তি সংরক্ষিত হয়। কেন্দ্রীয় বলের ক্ষেত্রে স্থিতিশক্তি, অর্থাৎ বলের বিরুদ্ধে কৃতকার্য হবে,

$$U(r)-U(r_0)=-\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr \tag{6.8}$$

যেখানে r_0 হল একটি উপযুক্ত নির্দেশ বিন্দু (reference point)। আবার বস্তুকণার গতিবেগ $\vec{v}$ হলে তার গতিশক্তি হবে ঃ

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right) \tag{6.9}$$

যেখানে $\dot{r}$ হল গতিবেগের অরীয় (radial) উপাংশ এবং $r\dot{\theta}$ হল অনুপ্রস্থ (transverse) উপাংশ। সুতরাং মোট যান্ত্রিক শক্তির সংরক্ষণকে আমরা লিখতে পারি ঃ

$$E=T+U(r)-U(0)=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr=\text{ ধ্রুবক}$$

অনুশীলনী — 2

1. কেন্দ্রীয় সংরক্ষী বলের মান Kr^{-n} হলে, স্থিতিশক্তির মান কি? K এবং n ধ্রুবসংখ্যা এবং অসীম দূরত্বে স্থিতিশক্তি শূন্য ধরে নিন। $(n>1)$

2. সরল দোলনের ক্ষেত্রে বলটি কি কেন্দ্রীয় সংরক্ষী? ঐ বলের ক্ষেত্রে স্থিতিশক্তি কি অবস্থায় শূন্য ধরা হয় এবং কেন?

6.5 কেন্দ্রীয় সংরক্ষী বলক্ষেত্রে গতির সাধারণ অবকল সমীকরণ

কেন্দ্রীয় সংরক্ষী বলের প্রভাবে বস্তুকণার গতির সাধারণ বৈশিষ্ট্যগুলি আমরা উপরের অনুচ্ছেদে আলোচনা করলাম। আমরা দেখব এই আলোচনা বর্তমান অনুচ্ছেদে কেন্দ্রীয় গতির অবকল সমীকরণ লিখতে ও পরবর্তী অনুচ্ছেদে বিপরীত বর্গীয় বলের ক্ষেত্রে সমীকরণের সমাধানে আমাদের সাহায্য করবে।

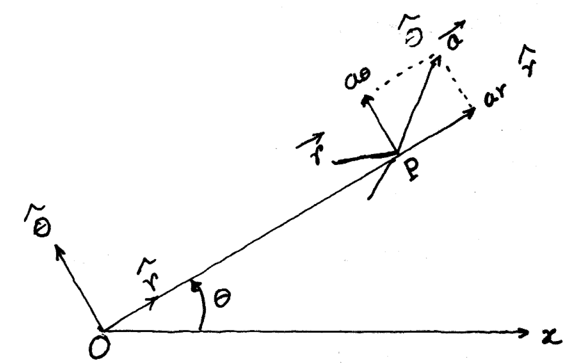
কেন্দ্রীয় গতি সমতলে সীমাবদ্ধ বলে আমরা দ্বিমাত্রিক ধ্রুবীয় নির্দেশতন্ত্র (r, θ) ব্যবহার করব। এই নির্দেশতন্ত্রে সাধারণভাবে কোন বস্তুকণার ত্বরণকে (চিত্র 6.2) লেখা যায় ঃ

$$\vec{a} = a_{\bar{r}}\bar{r} + a_{\theta}\hat{\theta} \quad (6.11)$$

$$a_r = \ddot{r} + r\,\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta}$$

যেখানে a_r হল ত্বরণের অরীয় (radial) উপাংশ এবং a_θ হল অনুপ্রস্থ (transverse) উপাংশ। (EPH 03' একক 1 দেখুন)।



চিত্র 6.3 দ্বিমাত্রিক ধ্রুবীয় নির্দেশতন্ত্রে অনির্দিষ্ট বলের প্রভাবে বস্তুকণার অরীয় এবং অনুপ্রস্থ ত্বরণ

সমীকরণ (6.11) থেকে $\vec{a}$-র ব্যঞ্জক ব্যবহার করে কেন্দ্রীয় বলের জন্য পাই,

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = f(r)/m \qquad (6.12)$$

এবং $$a_\theta = r\,\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \qquad (6.13)$$

এখানে সমীকরণ (6.12) এবং (6.13) প্রকাশ করছে, কেন্দ্রীয় গতির ক্ষেত্রে ত্বরণ সবটাই অরীয় এবং. ত্বরণের অনুপ্রস্থ উপাংশ নেই।

যেহেতু $\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = r\left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)$, আমরা সমীকরণ (6.13) কে লিখতে পারি ঃ

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0$$

অর্থাৎ $r^2\dot{\theta} =$ ধ্রুবক $= h$ $\qquad (6.14)$

সমীকরণ (6.14) ও (6.5) তুলনা করে বলা যায়

$$h = L/m$$

আবার (6.14) থেকে পাই, $\dot{\theta} = h / r^2$ যা 6.12 - এ বসালে পাওয়া যায়,

$$\ddot{r} - h^2 / r^3 = a_r = f(r) / m \tag{6.15}$$

এটি একটি দ্বিতীয় ক্রমের সাধারণ অবকল সমীকরণ, সমীকরণ (6.15) এর উভয় দিক $\dot{r}$ দিয়ে গুণ করে পাওয়া যায়,

$$\dot{r}\,\ddot{r} - \frac{h^2 \dot{r}}{r^3} = \frac{\dot{r}\, f(r)}{m}$$

এবার সময়ের সাপেক্ষে সমাকলন করে আমরা একটি প্রথম ক্রমের অবকল সমীকরণ পেতে পারি,

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{h^2}{2r^2} = -V + E \tag{6.16}$$

এখানে $V = -\frac{1}{m}\int f(r)\, dr$ (একক ভরের স্থিতিশক্তি) এবং সমাকলন ধ্রুবক E একক ভরের মোট যান্ত্রিক শক্তি। নীতিগতভাবে (6.16) এর সমাধান নিম্নরূপ,

$$\int \frac{dr}{\sqrt{2\left(E - V - \frac{h^2}{2r^2}\right)}} = \int dt \tag{6.17}$$

যেহেতু (6.17) এ চলগুলি আলাদা করা গেছে, সেজন্য বলা হয় যে সমাধানও হয়ে গেছে। কিন্তু Vর ব্যঞ্জক সাধারণত এমন যে বাঁদিকের সমাকলটিকে কোনও বদ্ধ অপেক্ষক (closed fuction) দিয়ে প্রকাশ করা যায় না এবং সমাকলটির মান সংখ্যাভিত্তিক পদ্ধতি তে নির্ণয় করতে হয়। সেজন্য সাধারণ তাত্ত্বিক বিশ্লেষণে এভাবে অগ্রসর হওয়া সুবিধাজনক নয়। বরং আমরা সময় t কে অপনয়ন করে একটি (γ, θ) র অবকল সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করব, যেটির সাহায্যে অনেক সিদ্ধান্তে পৌঁছানো যাবে।

বিশ্লেষণের সুবিধার জন্য আমরা নতুন একটি চল $u = \frac{1}{r}$ এর অবতারণা করব। এভাবে

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} \quad \text{(সমীকরণ 6.14 ব্যবহার করে)}$$

$$= -h\frac{du}{d\theta}$$

উপরের সম্পর্কটিকে (6.16) এ ব্যবহার করে লিখতে পারি,

$$\frac{h^2}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+\frac{h^2}{2}u^2=-V+E \tag{6.18}$$

আবার θ র সাপেক্ষে অবকলন করে পাওয়া যাবে (যেহেতু E একটি ধ্রবক)

$$h^2\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{du}{d\theta}+h^2u\frac{du}{d\theta}=-\frac{dV}{dr}\cdot\frac{dr}{d\theta}$$

$$=-\frac{dv}{du}\quad\frac{du}{dv}$$

যেহেতু $\frac{du}{d\theta}$ সাধারণভাবে শূন্য নয়, আমরা সমীকরণটিকে $\frac{dx}{d\theta}$ দিয়ে ভাগ করতে পারি এবং এভাবে পাই,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{1}{h^2}\frac{dV}{du} \tag{6.19}$$

এর পরের আলোচনার জন্য বলের (বা স্থিতিশক্তি Vর) কোনও বিশেষ রূপ ধরে নিতে হবে। আপাতত লক্ষ্যণীয় যে সমীকরণ (6.19)টির মূলে আছে সমীকরণ (6.14) ও (6.16) অর্থাৎ দুটি সংরক্ষণ সূত্র।

অনুশীলনী — 3

1. একটি মুক্ত কণার ক্ষেত্রে $\frac{dV}{du}=0$, সমীকরণ (6.19) এর সমাকলন করে দেখান যে মুক্ত কণার গতিপথ একটি সরলরেখা।

2. $V=\frac{k}{2r^2}=\frac{1}{2}ku^2$ হলে সমীকরণ (6.19) এর সমাকলন করুন। এই সমাধান কি বদ্ধ পথের? (k একটি ধ্রুবক)।

6.6 কেন্দ্রীয় বল দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক $f(r)=\frac{k}{r^2}$, $V(r)=-\frac{k}{r}=-ku$

স্থিতিশক্তি Vর মান সমীকরণ (6.19) এ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=+\frac{k}{h^2} \tag{6.20}$$

লক্ষ্য করুন $V(r)=-\frac{k}{r}$ থেকে বোঝা যাচ্ছে যে স্থিতিশক্তির শূন্যমান অসীম দূরত্বে এবং k ধনাত্মক

হলে বল বিকর্ষণ এবং k ঋণাত্মক হলে বল আকর্ষণ।

সমীকরণ (6.20) কে লেখা যায়,

$$\frac{d^2u'}{d\theta^2}+u'=0 \tag{6.21}$$

যেখানে $\left(u-\frac{k}{h^2}\right)$ কে আমরা u' লিখেছি।

সমীকরণ (6.21) আপনাদের পূর্বপরিচিত চেহারার। u' র বদলে x এবং θ র বদলে t লিখলেই দেখা যায় যে (6.21) সরল দোলনের অবকল সমীকরণ। সুতরাং আমরা (6.21)র সাধারণ সমাধান লিখতে পারি,

$$u'=A\cos(\theta-\theta_0) \tag{6.22}$$

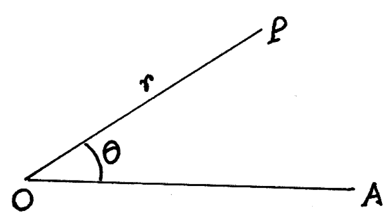
অথবা
$$u=\frac{k}{h^2}+A\cos(\theta-\theta_0) \tag{6.23}$$

সমীকরণ (6.22) এবং (6.23) তে A এবং θ_0 দুটি সমাকলন ধ্রুবক।

আবার $h^2/|k|$ কে ℓ লিখে এবং A র বদলে $Ah^2/|k|$ ধ্রুবকটিকে $\in$ লিখে (6.23) কে লেখা যায়

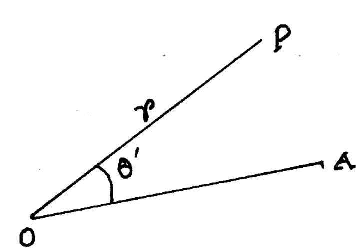
$$\frac{\ell}{r}=\frac{k}{|k|}+\sum\ \cos(\theta-\theta_0) \tag{6.24}$$

এবার লক্ষ্য করুন যে যদিও আমাদের মূলবিন্দু বলের কেন্দ্রবিন্দু হিসেবে স্থির হয়ে গেছে, ধ্রুবাক্ষটি ইচ্ছে মত নেবার স্বাধীনতা আমাদের আছে। (চিত্র 6.4 a ও চিত্র 6.4 b দেখুন)।



মূল বিন্দু O, ধ্রুবাক্ষ OA

চিত্র 6.4 a



মূল বিন্দু এখানেও O, কিন্তু ধ্রুবাক্ষ OA′ (OA নয়) $-\theta$ পরিবর্তিত হয়েছে θ' এ

চিত্র 6.4 b

ধরুন আমরা ধ্রুবাক্ষটি এমনভাবে নিলাম যে $\left(\frac{dr}{d\theta}\right)$ যেখানে শূন্য এবং $\frac{d^2 r}{d\theta^2}$ ধনাত্মক অর্থাৎ r যেখানে নিম্নতম মানের সেখানে $\theta = 0$। সমীকরণ (6.24) থেকে দেখা যাচ্ছে যে তাহলে $\theta_0 = 0$ এবং সমীকরণ (6.24) পরিণত হবে

$$\frac{\ell}{r^2} = \frac{k}{|k|} + \in \cos\theta \tag{6.25}$$

উপরের সমীকরণ একটি কণিকের অর্থাৎ $\in$- র মান অনুযায়ী উপবৃত্ত, বৃত্ত, অপবৃত্ত ও পরাবৃত্ত। আপনি হয়তো (r, θ) নির্দেশাংকে লেখা সমীকরণ (6.25) কিভাবে কণিকের সমীকরণ হল ভেবে আশ্চর্য হচ্ছেন কারণ আপনি এই সমীকরণের সঙ্গে পূর্বপরিচিত নন। সেজন্য আমরা নির্দেশাংক রূপান্তর করে দেখাচ্ছি যে (6.25) কার্টেজীয় নির্দেশাংকে আপনার চেনা কণিকের সমীকরণে পরিণত হয়।

আপনার জানা রূপান্তর সমীকরণ

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ব্যবহার করে সমীকরণ (6.25) থেকে r, θ অপনয়ন করে পাওয়া যায়,

$$\frac{\ell}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{k}{|k|} + \frac{\in x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

অথবা $(1 - \in x) = \sqrt{x^2 + y^2}$

উভয় দিকের বর্গ করে পাই,

$$\ell^2 + \in^2 x^2 - 2\ell \in x = x^2 + y^2$$

একটু সাজিয়ে লেখা যায়

$$\left(1 - \in^2\right)x^2 + 2\ell \in x + y^2 = \ell^2 \tag{6.26}$$

যদি $\in^2 = 1$ হয়, তাহলে x^2 পদটি আর থাকে না এবং (6.26) দাঁড়ায়

$$y^2 = 4ax' \tag{6.27}$$

যেখানে $\quad x' = -\left(x - \frac{\ell}{2}\right)$ এবং $a = \frac{1}{2}$

সমীকরণ (6.27) আপনাদের চেনা অপবৃত্তের সমীকরণ অর্থাৎ $\in -\ell$ হলে (6.25) দিচ্ছে একটি অপবৃত্ত।

যদি $\in^2 \neq 1$, তাহলে (6.26) কে $\left(1-\in^2\right)$ দিয়ে ভাগ করে পাওয়া যায়,

$$x^2 - \frac{21 \in x}{\left(1-\in^2\right)} + \frac{y^2}{\left(1-\in^2\right)} = \frac{1^2}{\left(1-\in^2\right)} \tag{6.28}$$

এবারে মনে করুন $\in^2$ 1 থেকে বড় বা ছোট হতে পারে। সম্ভাবনা দুটি আলাদাভাবে পরীক্ষা করে দেখা যাক। আগে (6.28)র দুদিকে $\frac{\ell^2 \in^2}{\left(1-\in^2\right)^2}$ যোগ করে পাই,

$$\left(x - \frac{\ell \in}{1-\in^2}\right)^2 + \frac{y^2}{\left(1-\in^2\right)} = \frac{\ell^2}{\left(1-\in^2\right)^2} = a^2 \text{ ধরুন} \tag{6.29}$$

এবার $\in^2 > 1$ হলে $a^2\left(\in^2 - 1\right) = b^2$ লিখে এবং ওপরের সমীকরণটি বরাবর a^2 দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{(x + \in a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6.30}$$

দৃশ্যতই এটি একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ। আবার $\in^2 < 1$ হলে আমরা $a^2\left(1-\in^2\right) = b^2$ লিখে (6.29) থেকে পাই,

$$\frac{(x - \in a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6.31}$$

সমীকরণ (6.31) আপনাদের পরিচিত উপবৃত্তের সমীকরণ এবং $\in = 0$ হলে $a = b$ তখন (6.31) হবে একটি বৃত্তের সমীকরণ। উপবৃত্তের বেলা, তার কেন্দ্রবিন্দু বলকেন্দ্র নয়, কিন্তু বৃত্তের কেন্দ্র ও বলকেন্দ্র অভিন্ন।

এর পরের অনুচ্ছেদে আমরা $\in$র সঙ্গে কণাটির যান্ত্রিক শক্তির একটি সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা করব। তার আগে আপনাকে কয়েকটি তথ্য স্মরণ করিয়ে দিচ্ছি — (ওপরের আলোচনা থেকে দেখা যাচ্ছে) —

উপবৃত্তের অর্ধমুখ্যাক্ষ (semi major axis) হল a, অর্ধগৌণাক্ষ হল b এবং বলের কেন্দ্রবিন্দু হল কণিকের নাভি বা focus, ℓ হল নাভিলম্বার্ধ (semi latus rectum)।

অনুশীলনী — 4

1. প্রমাণ করুন যে পথ বৃত্তকার হলে গতিশক্তি T, স্থিতিশক্তি V এবং মোট যান্ত্রিক শক্তি E - র ভেতরে সম্পর্ক নিম্নরূপ ঃ

$$T = -\frac{V}{2} = -E$$

2. বিস্তৃত গাণিতিক বিশ্লেষণে না গিয়ে বুঝিয়ে দিন যে মোট যান্ত্রিক শক্তি ঋণাত্মক হলে, কণাটি কখনই অপবৃত্ত বা পরাবৃত্ত পথে যেতে পারে না।

6.6.1 উৎকেন্দ্রিকতা $\in$ এবং মোট যান্ত্রিক শক্তি E 'র মধ্যে সম্পর্ক

সমীকরণ (6.18) $V = -k\,u$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\frac{h^2}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{h^2}{2}u^2 = -ku + E$$

এবার (6.25) থেকে $\left(\frac{du}{d\theta}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$ র মান নির্ণয় করা যায় এবং সেটি উপরের সমীকরণে বসালে দাঁড়ায়

$$\frac{h^2}{2}\frac{\in^2}{\ell^2}\sin^2\theta + \frac{h^2}{2\ell^2}\left[\frac{k}{|k|} + \in\cos\theta\right]^2$$

$$= \frac{k}{\ell}\left(\frac{k}{|k|} + \in\cos\theta\right) + E$$

এবার $\frac{h^2}{|k|} = \ell$ এই সম্পর্কটি ব্যবহার করে পাই

$$\frac{|k|}{2\ell}\epsilon^2+\frac{k}{\ell}\epsilon\cos\theta+\frac{|k|}{2\ell}=\frac{|k|}{\ell}+\frac{k}{\ell}\epsilon\cos\theta+E$$

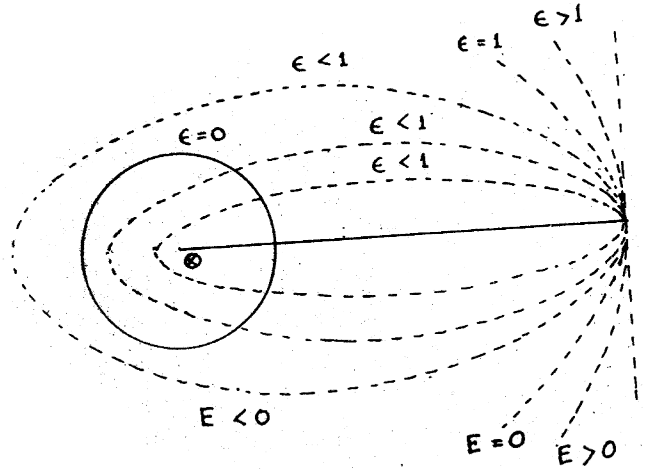
অথবা $$\frac{|k|}{2\ell}\left(\epsilon^2-1\right)=E \tag{6.32}$$

অর্থাৎ $\epsilon^2>1$ যদি $E>0\rightarrow$ পরাবৃত্ত,

$\epsilon^2=1$ যদি $E=0\rightarrow$ অপবৃত্ত,

$\epsilon^2<1$ যদি $E<0\rightarrow$ উপবৃত্ত।

সমীকরণ (6.32) ও (6.29) একত্র করে পাওয়া যায় $a=-\frac{K}{2E}$। (6.33)



বিপরীত বর্গীয় আকর্ষণী কেন্দ্রীয়

সংরক্ষী বলের প্রভাবেবস্তুর সম্ভাব্য কক্ষপথ

চিত্র 6.5

অনুশীলনী — 5

1. পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে দেখান যে, θর মান দুটি সীমার মধ্যে থাকবে।

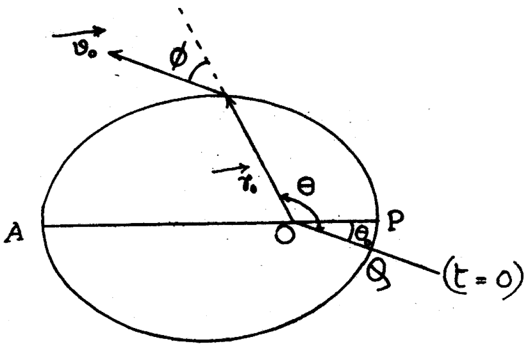
2. দেখান যে $\in < 1$ হলে θর মান যা কিছু হতে পারে কিন্তু r র উচ্চতম ও নিম্নতম মান আছে।

3. দুটি সরল দোলগতির কম্পাংক অভিন্ন কিন্তু তাদের গতিপথ পরস্পরের লম্ব অভিমুখী। এ দুটির উপরিপাতনে একটি উপবৃত্তাকার গতি হলে, ঐ উপবৃত্তের কেন্দ্র কোথায়?

4. সমীকরণ (6.31) উপবৃত্তটির নাভির নির্দেশাংক নির্ণয় করুন।

6.6.2 কৃত্রিম উপগ্রহের কক্ষপথ

মনে করা যাক, পৃথিবীর কেন্দ্র (o) থেকে r_0 দূরত্বে অবস্থান করার সময় কোন মহাকাশযান থেকে m ভরের একটি কৃত্রিম উপগ্রহ (চিত্র 6.6) ছোঁড়া হল। তার প্রাথমিক গতিবেগ $\vec{v}_0$ এবং উৎক্ষেপন কোণ ϕ হলে উপগ্রহটির কক্ষপথ কি হবে?



কৃত্রিম উপগ্রহের কক্ষপথ
চিত্র 6.6

উপগ্রহটির একক ভরের মোট শক্তি E একটি ধ্রুবক হবে। উৎক্ষেপনের সময়ে প্রাথমিক শর্তগুলি থেকে পাই,

$$E = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{r_0} \tag{6.34}$$

যেখানে M হল পৃথিবীর ভর। আমরা জানি, কক্ষপথ বদ্ধ বা উপবৃত্তাকার হওয়ার শর্ত হল ঃ

$E < 0$ অর্থাৎ

$v_0 < \sqrt{2GM / r_0}$

দৃশ্যতই আমাদের পূর্ব ব্যবহৃত $k = GM$ (বর্তমান ক্ষেত্রে)

কক্ষপথের মুখ্য অক্ষ আমরা সমীকরণ 6.33 থেকে পেতে পারি ঃ

$$AP = 2a = -GM/E \quad (\text{যেহেতু } k = GM)$$

আবার কক্ষপথে আর একটি ধ্রবক রাশি হল কৌণিক ভরবেগ L, প্রাথমিক শর্ত থেকে যা হল ঃ

$$L = m\nu_0 r_0 \sin\phi \tag{6.35}$$

সুতরাং সমীকরণ (6.32) থেকে আমরা কক্ষপথের উৎকেন্দ্রিকতা বার করতে পারি ঃ

$$\in = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}} \tag{6.36}$$

উপগ্রহটির অনুভূ (perigee) অবস্থান P (যখন সেটি পৃথিবীর থেকে নিকটতম অবস্থানে) ও অপভূ (apojee) অবস্থান A (যখন সেটি পৃথিবীর থেকে দূরতম অবস্থানে) আমরা এভাবে বার করতে পারি

$$OP = r_p = a(1 - \in), \quad OA = r_a = a(1 + \in)$$

কক্ষপথের উৎকেন্দ্রীকতা ও মুখ্যপক্ষ জানা যাওয়ায় কক্ষপথটি নির্দিষ্ট হয়ে যাচ্ছে। কিন্তু মহাশূন্যে কক্ষপথের অবস্থানও (orientation) জানা দরকার। এর জন্য সময় গণনা শুরুর মুহূর্তে (Q অবস্থান) কক্ষপথের অনুভূ P ও ফোকাস O সংযোগকারী রেখা OP-র অবস্থান অর্থাৎ কোণ θ_0 জানতে হবে। এটি কক্ষপথের ধ্রুবীয় সমীকরণ (polar equation) অর্থাৎ

$$r = \frac{\ell}{1 + \in \cos(\theta - \theta_0)},$$

(যেখানে $\ell = \dfrac{L^2}{GMm^2}$) থেকে পাওয়া যেতে পারে।

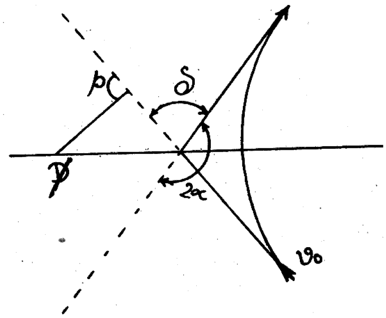
অনুশীলনী — 6

500kg ভরের একটি উপগ্রহকে মহাশূন্যে পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে $3 \cdot 6 \times 10^7$ m দূরত্বে $4000\,\text{ms}^{-1}$ প্রাথমিক গতিবেগে উৎক্ষিপ্ত করা হল এবং তার উৎক্ষেপন কোণ হল 30°। উপগ্রহটির (i) পৃথিবীর কেন্দ্রের সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ, (ii) মোট শক্তি, (iii) উৎকেন্দ্রীকতা এবং (iv) অপভূ ও অনুভূ দূরত্ব নির্ণয় করুন।

6.7 দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক বিকর্ষণ ক্ষেত্রে গতি

আমরা এখন কেন্দ্রীন দ্বারা আলফাকণার বিক্ষেপন আলোচনা করব। কেন্দ্রীন ও আলফাকণা উভয়েরই আধান ধনাত্মক হওয়ায় এদের মধ্যে কেন্দ্রীয় সংরক্ষী বল হবে বিকর্ষণ এবং আমরা দেখব এক্ষেত্রে আলফাকণার কক্ষপথ একমাত্র পরাবৃত্তাকারই হতে পারে।

ধরা যাক, Ze ধনাত্মক আধানে আহিত কোন কেন্দ্রীন (যার পারমাণবিক সংখ্যা z) O বিন্দুতে স্থির আছে এবং Ze ধনাত্মক আধানে আহিত একটি আলফাকণা v_0 বেগে কেন্দ্রীনের দিকে নিক্ষিপ্ত হয়েছে। বিক্ষিপ্ত না হলে আলফাকণাটি যে সরলরেখায় যেত কেন্দ্রীন থেকে তার লম্ব দূরত্ব (নূন্যতম দূরত্ব) p কে সংঘাত প্রাচল (impact parameter) বলা হয়। চিত্র 6.7)।



O কেন্দ্রীয় দ্বারা v_0 গতিবেগে আসা আলফা কণার বিক্ষেপণ। δ বিচ্যুতি কোণ

চিত্র 6.7

কেন্দ্রীন ও আলফাকণার মধ্যে বিকর্ষণী বল

$$\vec{F} = \frac{2Ze^2}{r^2}\vec{r} \tag{6.37}$$

অসীম দূরত্বে আলফাকণাটির গতিবেগ v_0 হওয়ায় তার প্রাথমিক কৌণিক ভরবেগ (একক ভর প্রতি)

$$h = v_0 p \tag{6.38}$$

যা একটি ধ্রুবক বলে আমরা জানি। আবার, অসীম দূরত্বে আলফাকণার স্থিতিশক্তি শূন্য ধরা যায় বলে, কক্ষপথের আর একটি ধ্রুবক রাশি, মোট শক্তি, E হবে একক ভর প্রতি

$$E = \frac{1}{2}v_0^2 \tag{6.39}$$

সমীকরণ (6.24) থেকে আমরা কক্ষপথের সমীকরণ পাই এক্ষেত্রে,

$$\frac{\ell}{r} = \in \cos(\theta - \theta_0) - 1 \tag{6.40}$$

এই সমীকরণ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ, যার একটি ফোকাসে (O বিন্দু) আছে কেন্দ্রীন। আলফাকণার কক্ষপথ হবে পরাবৃত্তের ঋণাত্মক শাখা।

আলফাকণাটি অসীম দূরত্বে পরাবৃত্তের একটি অনন্ত **স্পর্শক (asymptote)** বরাবর আসে ও অন্য স্পর্শক বরাবর অসীম দূরত্বে চলে যায়। কণাটির গতিপথের বিচ্যুতি δ এবং দুটি অনন্ত স্পর্শকের মধ্যে কোণ 2α হলে $\delta = \pi - 2\alpha$। পরাবৃত্তের জ্যামিতিক ধর্ম থেকে লেখা যায়,

$$\tan\delta/2 = \cot\alpha = \left(\epsilon^2 - 1\right)^{-1/2}$$

এখন সমীকরণ 6.32 থেকে পাই ($\ell = h^2/k$ মনে রেখে)

$$\epsilon^2 - 1 = \frac{2Eh^2}{k^2}$$

এখন h, E এবং $k = \dfrac{2Ze^2}{m}$ বসিয়ে পাই,

$$\epsilon^2 - 1 = \frac{m^2 v_0^4 p^2}{4Z^2 e^4}$$

বা $$\left(\epsilon^2 - 1\right)^{-1/2} = \frac{2Ze^2}{m v_0^2 p}$$

সুতরাং পরিশেষে

$$\tan\delta/2 = \frac{2Ze^2}{m v_0^2 p} \qquad (6.41)$$

কেন্দ্রীন থেকে বিভিন্ন নূন্যতম দূরত্ব p তে আসা বিভিন্ন আলফাকণার বিচ্যুতি কোণ δ বিভিন্ন হবে এবং সেটি আমরা (6.41) থেকে নির্ণয় করতে পারি।

6.8 সারাংশ

- কেন্দ্রীয় বল হল এমন একটি বল যা সর্বত্র কোন নির্দিষ্ট স্থির বিন্দুর অভিমুখে বা তার বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে ঃ

  $$\vec{F} = f\,\vec{r}$$

  নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে বলা হয় বলের কেন্দ্র।

- যে কেন্দ্রীয় বলের মান কেবলমাত্র বলের কেন্দ্র থেকে বস্তুর দূরত্বের মান, r এর উপর নির্ভর করে সেটি কেন্দ্রীয় সংরক্ষী বল। এটিকে লেখা যায় ঃ

  $$\vec{F} = f(r)\hat{r}$$

- কেন্দ্রীয় সংরক্ষী বলের প্রভাবে বস্তুর গতির ক্ষেত্রে (বলকেন্দ্রের সাপেক্ষে) কৌণিক ভরবেগ ও মোট যান্ত্রিক শক্তি সংরক্ষিত হবে; বস্তুর গতি একই সমতলে থাকবে; এবং বস্তুর অবস্থান ভেক্টর সমান সময়ে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করবে।

- বিপরীত বর্গীয় কেন্দ্রীয় সংরক্ষী বল $\vec{F} = \pm\frac{k_1}{r^2}r$ হলে বস্তুকণার গতিপথ হবে একটি কণিক, যার সমীকরণ ঃ

  $$\frac{\ell}{r} = \in \cos(\theta - \theta_0) \mp 1$$

  যেখানে $\in$ হল উৎকেন্দ্রীকতা, ℓ নাভিলম্বার্ধ।

  বিকর্ষণী বলের জন্য গিতপথ হবে পরাবৃত্তকার। আকর্ষণী বলের জন্য গতিপথের আকার $\in$-এর মানের ওপর নির্ভর করে উপবৃত্তাকার, অধিবৃত্তাকার বা পরাবৃত্তাকার হতে পারে।

6.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. নীচের কেন্দ্রীয় বলগুলির মধ্যে কোনটি আকর্ষণী ও কোনটি বিকর্ষণী বলুন ঃ

   (a) $\vec{F} = -4r^3\hat{r}$, (b) $\vec{F} = \frac{e^{-\mu r}\hat{r}}{r}\left[\mu + \frac{1}{r}\right]$, (c) $\vec{F} = \frac{r-1}{r^2+1}\hat{r}$

   যেখানে μ একটি ধনাত্মক ধ্রুবক।

2. থুম্বা থেকে একটি রকেট $v_0 = (3/4)\sqrt{2GM_E / R_E}$ প্রাথমিক গতিবেগে উৎক্ষিপ্ত হল (R_E ও M_E যথাক্রমে পৃথিবীর ব্যাসার্ধ ও ভর)। বায়ুর বাধা এবং পৃথিবীর ঘূর্ণনের প্রভাব সামান্য ধরে নিন। যান্ত্রিক শক্তি এবং কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র প্রয়োগ করে (a) উল্লম্বভাবে এবং (b) অনুভূমিকভাবে উৎক্ষেপনের দুটি ক্ষেত্রে পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে রকেটটির সর্বোচ্চ দূরত্ব নির্ণয় করুন।

6.10 উত্তরমালা

অনুশীলনী — 1

1. বল $\vec{F}$ একটি গ্রেডিয়েন্ট অতএব এটি সংরক্ষী। কিন্তু বলের ব্যঞ্জক θ বর্তমান, সুতরাং এটি কেন্দ্রীয় নয়।

2. $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ সম্পর্কটি ঠিক আছে কিন্তু বল কেন্দ্রীয় হতে হলে $\vec{F}=f(r)\hat{r}$, তার জন্য প্রয়োজন $a=b=c$।

3. $\vec{F}=f(\vec{r})\hat{r}$ হলে উপাংশগুলি,

$$F_x=f(\vec{r})\frac{x}{r}, F_y=f(\vec{r})\frac{y}{r}, F_z=f(\vec{r})\frac{z}{r}$$

সুতরাং

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y}\frac{x}{r}-f(\vec{r})\frac{xy}{r^3}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z}\frac{x}{r}-f(\vec{r})\frac{xz}{r^3}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x}\frac{y}{r}-f(\vec{r})\frac{xy}{r^3}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z}\frac{y}{r}-f(\vec{r})\frac{yz}{r^3}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x}\frac{z}{r}-f(\vec{r})\frac{xz}{r^3}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y}\frac{x}{r}-f(\vec{r})\frac{xy}{r^3}$$

$\vec{\Delta}\times\vec{F}=0$ থেকে পাওয়া যা, $\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y}x=\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x}$ অথবা $\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y^2}=\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x^2}$ এবং ঐভাবেই $\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y^2}=\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z^2}$ এবং $\frac{\partial f(r)}{\partial z^2}=\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x^2}$ সুতরাং $\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x^2}=\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y^2}=\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z^2}$ এর সমাধান

$f(\vec{r}) = \phi\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ অর্থাৎ $f(\vec{r}) = f(r)$

অনুশীলনী — 2

1. এখানে স্থিতিশক্তি V হলে,

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = kr^{-n}$$

অতএব $V(r) = \frac{k \quad r}{n-1}^{-n+1} = \frac{k}{n-1} \cdot \frac{1}{r^n - 1}$

2. বলটি সংরক্ষী কারণ দোলনের দিক x হলে বল $F = -kx = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$, সুতরাং

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - v(0)$$

স্থিতিশক্তি $\frac{1}{2}kx^2$ ধরা হয় অর্থাৎ $x = 0$ (স্থিতাবস্থা বা বলকেন্দ্র) তে $v = 0$ ধরে। এক্ষেত্রে $x \to \infty$ তে স্থিতাবস্থাকে শূন্যে ধরা চলে না কারণ $\int kx\,dx \quad x \to \infty$ তে অসংজ্ঞাত।

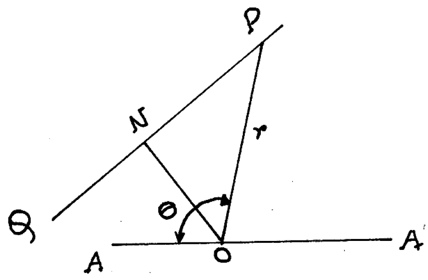
অনুশীলনী — 3

1. এক্ষেত্রে (6.19) দাঁড়ায়

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0$$

অর্থাৎ $u = \frac{1}{a}\cos(\theta - \theta_0)$

অথবা $r = a\sec(\theta - \theta_0)$



চিত্র 6.8

এটি একটি সরলরেখায় সমীকরণ। প্রমাণ নিম্নরূপ — P বিন্দুটি সরলরেখা QP র একটি সাধারণ বিন্দু, তার নির্দেশাংক r (= OP) এবং $\theta(=\angle AOP)$ (O মূলবিন্দু এবং AOA′ ধ্রুবাক্ষ)। ON, O থেকে QP র উপরে লম্ব। ΔONP থেকে দেখা যাচ্ছে $r\cos(\theta - \angle AON) = ON$ (P যে কোন বিন্দু হোক না, ON ধ্রুবক) এবার $\angle AON$ কে θ_0 লিখে এবং ON কে a লিখে পাই,

$$r = a\sec(\theta - \theta_0)$$

2. সমীকরণ (6.19) এক্ষেত্রে,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{k}{h^2}u$$

অথবা $$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\left(1 + \frac{k}{h^2}\right)u$$

সমাকলন করে লিখতে পারি

$$u = Ae^{i\alpha\theta} + Be^{-i\alpha\theta}$$

যেখানে A এবং B সমাকলন ধ্রুবক এবং $\alpha^2 = 1 + \dfrac{k}{h^2}$ পথ বদ্ধ হতে হলে u হতে হবে θর একটি পর্য্যাবৃত্ত অপেক্ষক, "পর্যায়কাল" 2π। বর্তমান ক্ষেত্রে এটি হবে $1 + \dfrac{k}{h^2}$ একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে।

অনুশীলনী — 4

1. বৃত্তাকার পথের ক্ষেত্রে r (বা u) ধ্রুবক অর্থাৎ $\dfrac{du}{d\theta} = 0$ সুতরাং (6.23) থেকে

$$u = \frac{k}{h^2}$$

এবং স্থিতিশক্তি $V = -ku = -\dfrac{k^2}{h^2}$

আবার সমীকরণ (6.16) এর বাদিকে $\dot{r} = 0$ বসিয়ে গতিশক্তি

$$T = \frac{h^2}{2r^2} = \frac{h^2}{2}u^2 = \frac{k^2}{2h^2}$$

সুতরাং $T = -\dfrac{1}{2}V$, তাহলে $E = T + V = \dfrac{V}{2}$

2. অপবৃত্ত বা পরাবৃত্ত পথে r অসীম হতে পারে। সেখানে $v \to 0$, কিন্তু গতিশক্তি কখনই ঋণাত্মক হতে পারে না। অতএব মোট যান্ত্রিক শক্তি $E = T + V = T \geq 0$।

অনুশীলনী — 5

1. পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে $\in > 1$ এবং তার সমীকরণ

$$\frac{\ell}{r} = \frac{k}{|k|} + \in \cos\theta$$

লক্ষ্য করুন, সংজ্ঞা অনুযায়ী $0 \leq r < +\alpha$, অর্থাৎ r কখনই ঋণাত্মক হতে পারে না। অতএব যদি k ধনাত্মক হয় তাহলে

$$\frac{\ell}{r} = 1 + \in \cos\theta \text{ এবং } \in \cos\theta \geq -1, \quad \cos\theta \geq -\frac{1}{\in}$$

আবার k ঋণাত্মক হলে

$$\frac{1}{r} = -1 + \in \cos\theta \text{ অতএব } \in \cos\theta \geq 1$$

2. এবার

$$\frac{\ell}{r} = 1 + \in \cos\theta, \quad \in < 1$$

দৃশ্যতই $\cos\theta$ যা কিছু হতে পারে (কারণ $-1 \leq \cos\theta \leq +1$)

কিন্তু r র চূড়ান্ত মান $\frac{\ell}{1+\in}$ এবং $\frac{\ell}{1-\in}$.

3. দুটি সরল দোলগতির সমীকরণ

$$x = a\cos pt$$

$$y = b\cos(pt + \alpha); \quad \alpha - \text{দশাভেদ}$$

এথেকে পাই,

$$\frac{y}{b} = \cos(pt + \alpha) = \cos pt . \cos\alpha - \sin pt \sin\alpha$$

$$= \frac{x}{a}\cos\alpha - \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sin\alpha$$

অথবা $\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\cos\alpha = -\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sin\alpha$

দুদিকের বর্গ নিয়ে পাই,

$$\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\cos\alpha\right)^2 = \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin^2\alpha$$

অথবা $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha = \sin^2\alpha$

এটি একটি উপবৃত্তের সমীকরণ, কেন্দ্রবিন্দু $x = 0, \quad y = 0$ তে অর্থাৎ বলকেন্দ্রে কিন্তু প্রধান দুটি অক্ষ x, y বরাবর নয়।

4. যেভাবে সমীকরণটি পাওয়া গেছে অর্থাৎ

$$\frac{\ell}{r} = \pm 1 + \in \cos\theta$$

তাতে একটি নাভির নির্দেশাংক $r = 0$ অর্থাৎ $x = 0, \quad y = 0$ সমীকরণ (6.31) থেকে দেখা যাচ্ছে উপবৃত্তের কেন্দ্র $x = \in a, \quad y = 0$ তে, সুতরাং অপর নাভিটি $x = 2\in a, \quad y = 0$ তে অবস্থিত।

অনুশীলনী — 6

(i) উপগ্রহটির কৌণিক ভরবেগ (সমীকরণ 6.41)

$$L = m\nu_0 r_0 \sin\phi$$

$$= 5000 \times 4000 \times 3 \cdot 6 \times 10^7 \times \sin 30^\circ$$

$$= 3 \cdot 60 \times 10^{14}\,\text{kg m}^2\text{s}^{-1}$$

(ii) মোট শক্তি (সমীকরণ 6.40)

$$E = \frac{1}{2}m\nu_0^2 - \frac{GMm}{r_0}$$

$$=\left[\frac{1}{2}\times5000\times4000^2-\frac{6\cdot673\times10^{-11}\times5\cdot97\times10^{24}\times5000}{3\cdot6\times10^7}\right]\text{J}$$

$$=-1\cdot53\times10^{10}\text{J}$$

(iii) কক্ষপথের উৎকেন্দ্রিকতা

$$\in=\sqrt{1+\frac{2\,E\,L^2}{G^2M^2m^3}}\ \text{(সমীকরণ 6.42)}$$

মানগুলি বসিয়ে পাই, $\in=0\cdot89$

(iv) কক্ষপথের মুখ্যঅক্ষ $2a=-\frac{GMm}{E}$ (সমীকরণ 6.39)

মানগুলি বসিয়ে পাই $a=6\cdot6\times10^7\,\text{m}$

সুতরাং অপনূ দূরত্ব

$\gamma_a=a(1+\in)=1\cdot25\times10^8\,\text{m}$ (সমীকরণ 6.43)

এবং অনুভূ দূরত্ব

$\gamma_p=a(1-\in)=6\cdot96\times10^6\,\text{m}$ (সমীকরণ 6.43)।

সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. (a) ঋণাত্মক চিহ্ন থেকে বোঝা যাচ্ছে বলটি কেন্দ্রাভিমুখী। সুতরাং এটি আকর্ষণী বল।

(b) μ ধ্রুবকটি ধনাত্মক হওয়ার ফলে r-এর যে কোন মানের জন্যই বলটি ধনাত্মক। অর্থাৎ বলের অভিমুখ কেন্দ্রের বিপরীতমুখী। সুতরাং এটি একটি বিকর্ষণী বল।

(c) $o<r<1$ হলে বলটি ঋনাত্মক, অর্থাৎ আকর্ষণী। $r=1$ হলে বলের মান শূন্য। $r>1$ হলে বলটি ধনাত্মক, অর্থাৎ বিকর্ষণী।

2. (a) উল্লম্ব উৎক্ষেপনের ক্ষেত্রে $h=0$। এবারশক্তির সংরক্ষণ সূত্র থেকে

$$\frac{1}{2}m\nu_0^2-\frac{GM_Em}{R_E}=\frac{1}{2}m\nu_A^2-\frac{GMem}{r_A}=-\frac{GM_cm}{r_A},\ \nu_0\ \text{মান বসিয়ে}\ r_A=\frac{16}{7}R_E$$

(b) এক্ষেত্রে P এবং B বিন্দুতে শক্তি সংরক্ষণের জন্য

$$\frac{1}{2}m\nu_0^2 - \frac{GM_Em}{R_E} = \frac{1}{2}m\nu_B^2 - \frac{GM_Em}{r_B}$$

এবং কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণের জন্য

$$mR_E\nu_0 = mr_B\nu_B$$

সুতরাং $\nu_B = \dfrac{R_E\nu_0}{r_B}$

ν_0-এর মান বসিয়ে পাই

$$r_B = \frac{9}{7}R_E$$

একক 7 ▫ কণাসমষ্টির গতিপ্রকৃতি

গঠন ঃ

7.1 প্রস্তাবনা

একক 6 -এ কণার গতি বিজ্ঞান সম্পর্কে আপনারা যে শিক্ষালাভ করেছেন আলোচ্য এককে কণাগোষ্ঠীর ক্ষেত্রে সে জ্ঞানের প্রয়োগ করা হবে।

ভরকেন্দ্রের সংজ্ঞা দিয়ে শুরু করব আমাদের আলোচনা। n কণাবিশিষ্ট কোন তন্ত্রের ক্ষেত্রে কণাগোষ্ঠীর গতির উপর বাহ্য বলের প্রভাব, রৈখিক ও কৌণিক ভরবেগ ও তাদের সংরক্ষণের সূত্র, বাহ্য বলের ভ্রামকের সঙ্গে কৌণিক ভরবেগের সম্পর্ক, গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি এবং মোট শক্তির সংরক্ষণ ইত্যাদিই হবে আমাদের আলোচনার বিষয়বস্তু।

উদ্দেশ্য ঃ এই একক পাঠান্তে আপনি,

- একাধিক কণার তন্ত্রের ক্ষেত্রে ভরকেন্দ্রের সংজ্ঞা থেকে ভরকেন্দ্রের স্থান ভেক্টর নির্ণয় করতে সমর্থ হবেন।
- N - কণাগুষ্ঠির ক্ষেত্রে রৈখিক ও কৌণিক ভরবেগ এবং গতিশক্তির রাশিগুলি নির্ণয় করে তাদের ভৌতিক গুরুত্ব বুঝতে পারবেন।
- কণাসমষ্টির ক্ষেত্রেও যে ভরবেগ , শক্তি ও কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত হয় সেটা জানতে পারবেন।

7.2 কণাসমষ্টির গতিবিজ্ঞানের মূল সূত্র

পূর্বের আলোচনায় কণার গতীয় বিজ্ঞান সম্পর্কে আপনারা যে জ্ঞানলাভ করেছেন, আলোচ্য এককে তারই সম্প্রসারণ করব আমরা কণাগোষ্ঠীর ক্ষেত্রে। কণাগোষ্ঠীর গতিবিজ্ঞান সংক্রান্ত আলোচনা অনেকটাই সহজ হবে কণাগোষ্ঠীর ভরকেন্দ্রের ধারণার সঙ্গে পরিচিত হলে।

গতিবিজ্ঞানের আলোচনায় আপনারা পূর্বেই নিউটনের তিনটি গতিসূত্রের সঙ্গে পরিচিত হয়েছেন। এখানে তার পুনরালোচনা নিষ্প্রয়োজন। কেবল মাত্র মনে রাখবেন যে দ্বিতীয় সূত্রের গাণিতিক রূপ

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{(যদি m ধ্রুবক হয়)} \qquad (7.1)$$

এবং তৃতীয় সূত্র থেকে লেখা যায় যে যদি $\vec{F}_{ik}$ i-তম কণার উপরে k- তম কণার জন্য প্রযুক্ত বল হয় তবে

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$$

অথবা $\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0$

এখানে অবশ্যই $\vec{F}_{ki}$ বলটি $\vec{F}_{ik}$ প্রতিক্রিয়া বল এবং k তম কণার উপর প্রযুক্ত হচ্ছে। এভাবে যদি বহু কণা পরস্পরের সঙ্গে আন্তঃক্রিয়াশীল হয় তবে,

$$\sum_{k}\sum_{\substack{i \\ k\neq i}} \vec{F}_{ik} = 0 \qquad (7.2)$$

দ্বৈত সমষ্টি কেবল মাত্র $k \neq i$ দিয়ে প্রাপ্ত পদগুলির উপর নিতে হবে। $i = k$ হলে, $\vec{F}_{ii}$ নির্দেশ করে কোন কণার নিজের জন্য নিজের উপরে বল [স্বকীয় বল (Seof-force)] সেটি আমরা অর্থহীন ও শূন্য বলে ধরে নেব।

7.2.1 ভরকেন্দ্রের সংজ্ঞা

n সংখ্যক কণার সমন্বয়ে গঠিত কোন কণাগোষ্ঠীর কথা আমরা আলোচনা করব। ধরা যাক উহারা ত্রিমাত্রিক দেশে n অবস্থানে ব্যাস্ত হয়ে আছে। উহাদের i-তম কণার ভর m_i এবং মূল বিন্দু O সাপেক্ষে স্থান ভেক্টর $\vec{r}_i$

দিয়ে বোঝানো হবে। চিত্র 7.1(a) তে $\vec{r}_i = \overrightarrow{OP_i}$। তন্ত্রের মোট ভর

$$M = \sum_i m_i$$

যেখানে i-এর উপর যোগ করতে হবে i = 1 থেকে i = n পর্য্যন্ত। সংজ্ঞানুসারে O সাপেক্ষে ভরকেন্দ্রের স্থান ভেক্টর

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots\ldots + m_n r_n}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n}$$

$$= \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$= \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \tag{7.3}$$

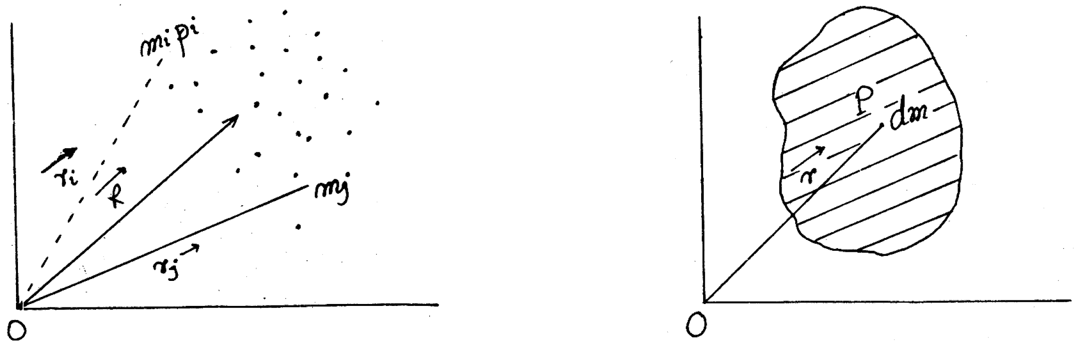
কার্টেজীয় নির্দেশাংক $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$ এবং $\vec{R}_i = \bar{x}\,\hat{i} + \bar{y}\,\hat{j} + \bar{z}\,\hat{k}$ হবে।

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{M} \tag{7.4}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum m_i y_i}{M} \tag{7.5}$$

ও $$\bar{z} = \frac{\sum m_i z_i}{M} \tag{7.6}$$

হবে



(a) কণাগুলি বিচ্ছিন্নভাবে ব্যস্ত (b) কণাগুলি অবিচ্ছিন্নভাবে ব্যস্ত

চিত্র 7.1 কণাগোষ্ঠীর তন্ত্রের ভরকেন্দ্র

মনে রাখবেন যে সাধারণভাবে কণাগোষ্ঠীর গতির ফলে অবস্থানের পরিবর্তন হলে ভরকেন্দ্রের অবস্থানের পরিবর্তন হবে। অবশ্য দৃঢ়বস্তুর ক্ষেত্রে তন্ত্রের সাপেক্ষে ভরকেন্দ্র অপরিবর্তিত থাকবে।

ভর অবিচ্ছিন্নভাবে ব্যাপক থাকলে যোগের পরিবর্তে সমাকলন করতে হবে এবং ভরকেন্দ্রের স্থান ভেক্টরকে লেখা যাবে

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm \tag{7.7}$$

(7.6) সমীকরণে dm স্বল্প পরিমিত আয়তনের ভর যার মূলবিন্দু O সাপেক্ষে স্থান ভেক্টর হচ্ছে $\vec{r}$। 7.2 (b) চিত্রে $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$। সমাকলন সম্পূর্ণ ভরব্যেপে হবে। কার্টেজীয় নির্দেশাংকে ভরকেন্দ্র

$\vec{R} = \bar{x}\hat{i} + \bar{y}\hat{j} + \bar{z}\hat{k}$ হলে,

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{M} \tag{7.8}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dm}{M} \tag{7.9}$$

এবং
$$\bar{z} = \frac{\int z dm}{M} \tag{7.10}$$

অনুশীলনী — 1

1. শূন্যস্থান পূরণ করুন ঃ

(a) যদি x অক্ষের উপর 5kg ও 10kg ভরের দুটি কণা মূলবিন্দু থেকে যথাক্রমে 3m ও 6m দূরে অবস্থান করে তবে উহাদের ভরকেন্দ্রের স্থান ভেক্টর

$\vec{R} =$ ______ হয়।

7.2.2 ভরকেন্দ্রের অবস্থান মূলবিন্দুর উপর নির্ভরশীল নয়

কোন কণাগোষ্ঠীর মূলবিন্দু O-র অবস্থানের উপর ভরকেন্দ্র G-র অবস্থান নির্ভর করে না। এটি প্রমাণের জন্য ধরা যাক্ O' অন্য এক মূলবিন্দু যার সাপেক্ষে G' নূতন ভরকেন্দ্র (চিত্র 7.3)। n কণাগোষ্ঠীর কোন তন্ত্রের i-তম কণার ভর m_i - এর স্থান ভেক্টর মূলবিন্দু O এবং মূলবিন্দু O' -এর সাপেক্ষে যথাক্রমে

$\overrightarrow{OP} = \vec{r}_i$ ও $\overrightarrow{O'P_e} = \vec{r}'_i$,

$\overrightarrow{O'O} = \vec{d}$ ধরলে

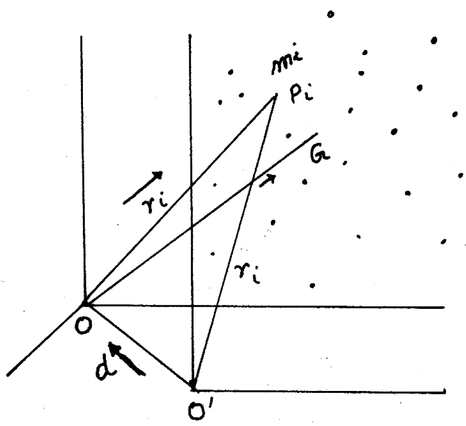
$\vec{r}_i' = \vec{d} \perp \vec{r}_i$ হয়।

সংজ্ঞানুসারে, মূলবিন্দু O′ সাপেক্ষে ভরকেন্দ্র G′ -এর স্থান ভেক্টর

$$\overrightarrow{O'G'} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M} = \frac{\sum m_i\left(\vec{d} + \vec{r}_i\right)}{M}$$

$$= \vec{d} + \vec{R} = \overrightarrow{O'G}$$

ইহার অর্থ G ও G′ অভিন্ন বিন্দু। অতএব ভরকেন্দ্র G অদ্বিতীয় বিন্দু।



চিত্র 7.2 : O এবং O′ দুইটি ভিন্ন মূলবিন্দু সাপেক্ষে m_i ভরের i -তম কণার স্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{r}_i = \overrightarrow{OP_i}$ এবং $\vec{r}_i = \overrightarrow{O'P_i}$ । $\overrightarrow{OG} = \vec{R}$ হচ্ছে ভরকেন্দ্র G-র স্থান ভেক্টর এবং $\overrightarrow{O'O} = \vec{d}$ ।)

তন্ত্রের ভরকেন্দ্র D মূল বিন্দু হলে ভরকেন্দ্রের স্থান ভেক্টর শূন্য হয়।

যদি ভরকেন্দ্র G মূলবিন্দু হয়, তবে

$$\sum m_i\vec{r}_i{}' = 0 \tag{7.11}$$

$m_i\vec{r}_i{}'$ কে ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে m_i ভরের প্রথম ভর ভ্রামক বলে।

ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে কোন কণাগোষ্ঠীর প্রথম ভর ভ্রামকের যোগফল শূন্য।

প্রথম ভর-ভ্রামকের সাপেক্ষে ভরকেন্দ্রের সংজ্ঞা :

যে বিন্দু সাপেক্ষে কোন কণাগোষ্ঠীর প্রথম ভর - ভ্রামকের যোগফল শূন্য। সেই বিন্দুকে ঐ কণাগোষ্ঠীর ভরকেন্দ্র বলে।

অনুশীলনী — 2

1. শূন্যস্থান পূরণ করুন :

(i) নির্দিষ্ট কণাগোষ্ঠীর ——— ভরকেন্দ্র থাকে।

(ii) যদি ভরকেন্দ্র G কে মূলবিন্দু ধরা হয়, তবে ভরকেন্দ্রের স্থান ভেক্টর $\vec{R}$ ——— হবে।

(iii) ভরকেন্দ্র G কে ——— ধরলে $\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$ শূন্য হয়।

(iv) $m_i \vec{r}_i{}'$ কে G বিন্দু সাপেক্ষে m_i ভরের প্রথম ——— বলে।

(v) ——— সাপেক্ষে কোন কণাগোষ্ঠীর প্রথম ভর-ভ্রামকের মান শূন্য।

(vi) যে বিন্দু সাপেক্ষে কোন নির্দিষ্ট কণাগোষ্ঠীর ——— ভর-ভ্রামকের যোগফল শূন্য, সেই বিন্দুকে ঐ কণাগোষ্ঠীর ——— বলে।

7.2.3 কণাগোষ্ঠীর রৈখিক ভরবেগ

কণাগোষ্ঠীর যে কোন কণার ওপর ক্রিয়াশীল লব্ধি বলকে সাধারণতঃ দু'ভাগে ভাগ করাযায়। একটি বাহ্য বল ও অপরটি আভ্যন্তরীন বল। তন্ত্রের বাইরের উৎসগুলো থেকে প্রতিটি কণার ওপর বলের ক্রিয়ার ফলেই বাহ্য বলের উৎপত্তি। i -তম কণার ওপর বাহ্য বল ক্রিয়া করলে তাকে আমরা বলব $\vec{F}_i^{(e)}$। কোন একটি কণার ওপর তন্ত্রের অন্য $n-1$ কণার ক্রিয়ার দরুণ যে বলের উদ্ভব হয় তা হল আভ্যন্তরীন বল। আভ্যন্তরীন বল $\vec{F}_{ij}$ বোঝাবে i -তম কণার ওপর j -তম কণাদ্বারা প্রযুক্ত বল। i -তম কণার ওপর মোট ক্রিয়াশীল আভ্যন্তরীণ বল $\vec{f}_i$ পাওয়া যাবে আভ্যন্তরীন বলগুলোর ভেক্টর যোগফল নিলে, অর্থাৎ

$$\sum_j \vec{F}_{ij} = \vec{f}_i \tag{7.12}$$

অতএব i -তম কণার ওপর যে মোট বল ক্রিয়া করে তা হচ্ছে,

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{f}_i \tag{7.13}$$

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে i -তম কণার ওপর ক্রিয়াশীল মোট বল $\vec{F}_i$-কে আমরা লিখতে পারি

$$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{f}_i \tag{7.14}$$

অথবা $\qquad m_i \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{f}_i \qquad (7.15)$

এখানে $\vec{p}_i$ হচ্ছে i -তম কণার রৈখিক ভরবেগ এবং $\vec{\gamma}_i$ হচ্ছে যে কোন বিন্দুকে মূল বিন্দু ধরে i -তম কণার স্থান ভেক্টর। (7.15) সমীকরণকে i -এর সকল মানের ওপর যোগ করে আমরা পাই,

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} + \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} \qquad (7.16)$$

আভ্যন্তরীন বলের ক্ষেত্রে নিউটনের তৃতীয় সূত্রের প্রয়োগ করে আমরা লিখতে পারব,

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \qquad (7.17)$$

(7.16) সমীকরণে ডানদিকের দ্বিতীয় পদটিতে $\sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}}$ চিহ্নটি বোঝাব যোগের পদগুলোতে $j = i$ ছাড়া অন্য সকল পদই বর্তমান। কারণ $j = i$ হলে $\vec{F}_{ii}$ বোঝায় i-তম কণা নিজেই নিজের ওপর বল প্রয়োগ করছে। বাস্তবে কোন কণাই নিজের ওপর বল প্রয়োগ করে না। অর্থাৎ

$$\boxed{\vec{F}_{ii} = 0} \qquad (7.18)$$

হবে (7.16) সমীকরণে ডানদিকের দ্বিতীয় পদটিতে বিভিন্নভাবে লেখা যায়। যেমন,

$$\sum_i \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} = \sum_i \sum_j{}' \vec{F}_{ij} = \sum_{i<j}\left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}\right) \qquad (7.19)$$

সমীকরণ (7.17) অনুসারে

$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$$

সুতরাং (7.19) সমীকরণে যুগ্ম সংকলনে এরূপ জোড়া জোড়া যে সব সমান ও বিপরীত রাশি রয়েছে তাদের মান শূন্য হবে। ফলে

$$\sum_i \sum_j{}' F_{ij} = 0 \qquad (7.19a)$$

হয় এবং সমীকরণ (7.16) হয়ে দাঁড়ায়

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum m_i \vec{r}_i\right) = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \tag{7.20}$$

ভরকেন্দ্রের সংজ্ঞানুসারে (7.3) সমীকরণ ব্যবহার করে (7.20) সমীকরণের বাঁ দিকের পদটিতে $\sum m_i \vec{r}_i$ এর বদলে $M\vec{R}$ লিখলে

এবং ডানদিকের পদ

$$\sum \vec{F}_i^{(e)} \equiv \vec{F}^{(e)} \tag{7.21}$$

লিখলে (7.20) সমীকরণটি হয়

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(M\vec{R}\right) = \vec{F}^{(e)}$$

M ধ্রুবক ধরলে আমরা পাই,

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)} \tag{7.22}$$

এখানে $\vec{F}^{(e)}$ কণাসমূহের ওপর বাইরের মোট বলকে বোঝায়।

(7.22) সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে কোন তন্ত্রের মোট ভরের সমান ভরের একটি করা ভরকেন্দ্র সংহত থাকলে মোট বাহ্যবলের ক্রিয়ায় উহার যে রূপ গতি হবে কণাগোষ্ঠীর ভরকেন্দ্রেরও সেই গতি হবে। এই গতিকে আভ্যন্তরীন বল কোনভাবেই প্রভাবিত করবে না যতক্ষণ আভ্যন্তরীন বলগুলো নিউটনের তৃতীয় সূত্র মেনে চলে। এখান থেকে এটা স্পষ্ট হয় যে কণাগোষ্ঠীর কোন তন্ত্রের ওপর বাইরের বলের প্রভাব যাচাই করবার সময় কণাগোষ্ঠীর ভর উহার ভরকেন্দ্রে সংহত করা যাবে।

কণাগোষ্ঠীরই মোট রৈখিক ভরবেগ,

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum m_i \vec{r}_i\right) = M\dot{\vec{R}} \tag{7.23}$$

সমীকরণ (7.23) থেকে এটা স্পষ্ট যে কণাগোষ্ঠীরই মোট রৈখিক ভরবেগ ভরকেন্দ্রে কণাগোষ্ঠীর মোট ভর **M** এর সমান ভরবিশিষ্ট কোন কণা সংহত থাকলে মূলবিন্দু **O** সাপেক্ষে তার রৈখিক ভরবেগের সমান। এখন (7.22) সমীকরণ এবং (7.23) সমীকরণ থেকে পাই

$$\dot{\vec{p}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)} \qquad (7.24)$$

অর্থাৎ কণাগোষ্ঠীর মোট রৈখিক ভরবেগের হার উহার ওপর ক্রিয়াশীল মোট বাহ্যবলের সমান।

অনুশীলনী — 3

1. শূন্য স্থান পূরণ করুন ;

 (i) দুই বা ততোধিক কণার কোন তন্ত্রের মোট আভ্যন্তরীন বল ———— হয়।

 (ii) 3 gm ও 6 gm ভরের দুটি কণা যথাক্রমে 6 cm/s ও 3 cm/s বেগে x-অক্ষ বরাবর চলতে থাকলে উহাদের মোট ভরবেগ ——— হবে এবং উহাদের ভরকেন্দ্র ——— বেগে চলবে।

 (iii) যদি 0.4 kg ও 0.6 kg ভরের দুটি কণার ওপর y অক্ষ বরাবর যথাক্রমে 4 N ও 6 N বাহ্য বল ক্রিয়া করে তবে ভরকেন্দ্রের ত্বরণ হবে।

2. দেখান যে কেবলমাত্র আভ্যন্তরীণ বলের প্রভাবে n কণার কোন তন্ত্রের ভরকেন্দ্রের গতিবেগ অপরিবর্তিত থাকে।

7.2.4 রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র

সমীকরণ (7.24) - $\vec{F}^{(e)} = 0$ হলে

$$\dot{\vec{p}} = M\ddot{\vec{R}} = 0 \qquad (7.25)$$

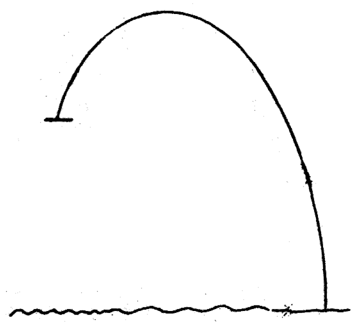
হবে অর্থাৎ $\vec{p} = M\dot{\vec{R}}$ একটি অচর রাশি। এর থেকে বলা যায় যে, কোন কণাগোষ্ঠীর ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র হল — ঐ কণাগোষ্ঠীর ওপর বাইরের মোট ক্রিয়াশীল বল শূন্য হলে কণাগোষ্ঠীর মোট রৈখিক ভরবেগ সময়ের সঙ্গে অপরিবর্তিত থাকে এবং ভরকেন্দ্রের রৈখিক ভরবেগের সমান হয়। অবশ্যই মনে রাখতে হবে তন্ত্রের আভ্যন্তরীন বলগুলো নিউটনের তৃতীয় সূত্র মেনে চলার ফলে মোট আভ্যন্তরীন বলের দরুন মোট রৈখিক ভরবেগের কোনও পরিবর্তন হয় না।

কোন তন্ত্রের রৈখিক ভরবেগের উদাহরণ হিসাবে মাটির ওপরে বোমা ফাটার ঘটনাটি উল্লেখ করা যেতে পারে। যেহেতু বিস্ফারণের ব্যাপারটি একটি আভ্যন্তরীন ঘটনা — তাই বোমার ওপর একমাত্র ক্রিয়াশীল বল যা ভরকেন্দ্রের বেগকে প্রভাবিত করতে পারে তা হচ্ছে অভিকর্ষজনিত বল। কাজেই বোমাটি ফাটবার আগে যে বেগে চলছিল, বোমাটি ফাটবার অব্যবহতির পরেও বোমার টুকরোগুলোর ভরকেন্দ্র সেই বেগেই চলতে থাকে।

উদাহরণ

পুরো বস্তুটির গতির বিষয়ে আমাদের কৌতুহল থাকলে আমরা বস্তুর বদলে ভরকেন্দ্রে সংহত বস্তুর মোট ভরের সমান ভরের একটি কণার কথা বিবেচনা করতে পারি। বস্তুটির ওপর বাহ্য বল যদি অভিকর্ষীয় হয়, তবে যে কোন জটিল বস্তুর ভরকেন্দ্রের গতি ঐ বলের অধীন পরবৃত্তাকার পথ অনুসারে হবে। (চিত্র 7.3)।

কোন ডুবুরী তার প্ল্যাটফর্ম থকে লাফ দেবার পর বায়ুতে তার দেহ ঘুরলেও দেহের ভরকেন্দ্র পরাবৃত্তাকার পথ অনুসরণ করে।



চিত্র 7.3

অনুশীলনী — 4 :

1. শূন্যস্থান পূরণ করুন ঃ

   (i) কণাগোষ্ঠীর ওপর বাইরের বল শূন্য হলে তন্ত্রের ———— সময়ের সঙ্গে অপরিবর্তিত থাকবে।

   (ii) 10kg ওজনের একটি বোমা পৃথিবীর ওপরে অনুভূমিকভাবে 500m/s বেগে চলতে চলতে হঠাৎ ফেটে অনেকগুলো টুকরোতে পরিণত হয়। ফাটবার অব্যবহিত পরেই টুকরোগুলোর ভরকেন্দ্রের বেগ হল ———— ————।

2. বাহ্য বল শূন্য হলে দেখান যে n কণাগোষ্ঠীর ভরবেগ তন্ত্রের ভরকেন্দ্রে উহার মোট ভর M এর সমান ভরের একটি কণা রাখলে তার ভরবেগের সমান হয় এবং ভরবেগ ধ্রুবক হয়।

3. রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রটি বিবৃত করুন।

4. 60 kg ভরের এবং 4 m দৈর্ঘ্যের একটি নৌকা শান্ত জলে স্থির অবস্থায় আছে। যদি একজন লোক নৌকার সম্মুখভাগে থেকে পশ্চাদদিকে হেঁটে যায়, তবে নৌকাটি কতদূর সরবে? এখানে জলের বাধা উপেক্ষনীয়।

7.3 কণাগোষ্ঠীর কৌণিক ভরবেগ

প্রথমেই ধরা যাক O মূলবিন্দু। ঐ বিন্দু O সাপেক্ষে কণাগোষ্ঠীর i - তম কণার কৌণিক ভরবেগের সংজ্ঞা হবে

$$\vec{\gamma}_i \times m_i\vec{v}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

এখানে i-তম কণার ভর, স্থান ভেক্টর এবং বেগ ও ভরবেগ হচ্ছে যথাক্রমে m_i, $\vec{r}_i, \vec{v}_i$ এবং $\vec{p}_i$। সুতরাং O বিন্দু সাপেক্ষে কণাগোষ্ঠীর মোট কৌণিক ভরবেগ

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \tag{7.26}$$

7.3.1 কৌণিক ভরবেগ এবং বাহ্য বলের ভ্রামক

আমরা এখন কোন এক Q বিন্দু সাপেক্ষে সময়ে সাথে কণাগোষ্ঠীর মোট কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার নির্ণয় করব। Q বিন্দু সাপেক্ষে কণাগোষ্ঠীর মোট কৌণিক ভরবেগ

$$\vec{L}_Q = \sum_i \vec{l}_{iQ} = \sum_i (\vec{\gamma}_i - \vec{\gamma}_Q) \times m_i (\dot{\vec{\gamma}}_i - \dot{\vec{\gamma}}_Q) \tag{7.27}$$

এখানে $\vec{l}_{iQ}$ হচ্ছে Q বিন্দু সাপেক্ষে i -তম কণার কৌণিক ভরবেগ। m_i ও $\vec{\gamma}_i$ যথাক্রমে উক্ত কণার ভর এবং মূলবিন্দু O সাপেক্ষে স্থান ভেক্টর। $\vec{r}_Q$ হল Q বিন্দুর স্থান ভেক্টর। $(\vec{r}_i - \vec{r}_q)$ এবং $(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_q)$ হল যথাক্রমে i -তম কণারই Q বিন্দু সাপেক্ষে স্থান ভেক্টর ও বেগ। এখন সমীকরণ (7.27) কে সময়ের সঙ্গে একবার অবকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \sum_i (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_Q) \times m_i (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_Q) + \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{r}}) - \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times m_i \ddot{\vec{r}}_Q \tag{7.28}$$

(7.33) সমীকরণে ডানদিকের প্রথম পদটি স্পষ্টতই শূন্য হবে। $\sum_i m_i = M$ ও $\sum m_i \vec{r}_i = M\vec{R}$ এবং $m_i\dot{\vec{\gamma}}_i = \vec{p}_i$, তবে (7.28) সমীকরণটি দাঁড়াবে,

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \sum_i (\vec{\gamma}_i - \vec{\gamma}_q) \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} - M(\vec{R} - \vec{\gamma}_q) \times \ddot{\vec{\gamma}}_q \tag{7.29}$$

এবার নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র ব্যবহার করে পাই,

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \sum_i \left[\left(\vec{r}_i - \vec{r}_q\right) \times \left(\vec{F}_i^{(e)} + \sum_j{}' \vec{F}_{ij} \right) \right] - M\left(\vec{R} - \vec{r}_Q\right) \times \ddot{\vec{r}}_Q \qquad (7.30)$$

অথবা $$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{\Gamma}_q^{(e)} + \sum_i \sum_j{}' \left(\vec{r}_i - \vec{r}_a\right) \times \vec{F}_{ij} - M\left(\vec{R} - \vec{r}_a\right) \times \ddot{\vec{r}}_Q \qquad (7.31)$$

এখানে ডানদিকের প্রথম পদ $\vec{\Gamma}_a^{(e)} = \sum_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_q\right) \times \vec{F}_i^{(e)}$ হচ্ছে Q বিন্দুর সাপেক্ষে কণাগোষ্ঠীর মোট বাহ্য টর্ক। (7.34) সমীকরণে ডানদিকের তৃতীয় পদটি শূন্য হবে, কয়েকটি ক্ষেত্রে যেমন,

(i) যেহেতু নিউটনের সূত্র ব্যবহার করা হচ্ছে, আমাদের ফ্রেমটি জড়ত্বীয় ঐ ফ্রেমের সাপেক্ষে Q বিন্দুর ত্বরণ $\ddot{\vec{r}}_q$ শূন্য হলে, ঐ পদটি শূন্য হবে, এক্ষেত্রে Q বিন্দুটি হয় (a) সুষম বেগে চলবে অথবা (b) স্থির থাকবে,

(ii) Q বিন্দুর ত্বরণ $\ddot{\vec{r}}_q$ এর অভিমুখ এবং Q বিন্দু ও ভরকেন্দ্র সংযোগকারী ভেক্টর $\left(\vec{R} - \vec{r}_q\right)$ একই রেখা বরাবর হয়।

(iii) Q বিন্দু ভরকেন্দ্র হয় অর্থাৎ $\vec{R} = \vec{r}_q$ ।

আমরা অবশ্য আমাদের আলোচনাকে সেই ক্ষেত্রগুলোর মধ্যেই সীমাবদ্ধ রাখবো যে ক্ষেত্রগুলোতে Q বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামকগুলো নিম্নলিখিত শর্ত মেনে চলে ঃ

$$\left(\vec{R} - \vec{r}_q\right) \times \ddot{\vec{r}}_q = 0 \qquad (7.32)$$

একটু পরে আপনার দেখবেন,

$$\sum_i \sum_j{}' \left(\vec{r}_i - \vec{r}_q\right) \times \vec{F}_{ij} = 0 \qquad (7.33)$$

তাহলে (7.34) সমীকরণটি হবে

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{\Gamma}_Q^{(e)} \qquad (7.34)$$

এ সমীকরণের মাধ্যমে যে কথা স্পষ্ট হয় তা হচ্ছে Q বিন্দুর সাপেক্ষে কণাগোষ্ঠীর মোট ভরবেগের পরিবর্তনের হার ঐ বিন্দু সাপেক্ষে তন্ত্রের ওপর ক্রিয়াশীল মোট বাহ্য টর্কের সমান। তবে Q বিন্দুকে সমীকরণ (7.35) -এ উল্লেখিত শর্তটি মেনে চলতে হবে।

নির্দেশ বিন্দুটি যদি ভরকেন্দ্রে অবস্থিত হয় এবং তন্ত্রের ওপর মোট বাহ্য বল শূন্য হয় তবে (7.34) সমীকরণটি সিদ্ধ হবে। অতএব কণাগোষ্ঠীর গতিকে বহু ক্ষেত্রে দুটি আলাদাভাগে ভাগ করা যাবে — ভরকেন্দ্রের রৈখিক গতি এবং ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে কণা সমষ্টির কৌণিক ভরবেগ।

এবার (7.33) সমীকরণের শুদ্ধতা আমরা দেখাব নিউটনের তৃতীয় সূত্রের ভিত্তিতে

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

এবং লক্ষ্য করুন $\sum_i \sum_j{}' F_{ij}$ তে i এবং j হচ্ছে মূক সূচক (dummy suffix)।

সুতরাং i এবং j কে পরস্পরের সঙ্গে পরিবর্তন করলে যোগফলের কোন পরিবর্তন হয় না। তাই আমরা লিখতে পারি

$$\sum_i \sum_j{}' F_{ij} = \sum_i \sum_j{}' \vec{F}_{ji} \tag{7.35}$$

এই যুক্তি অনুসারে,

$$\sum_i \sum_j{}' (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j{}' \left[(\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{ij} + (\vec{r}_j - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{ji} \right] \tag{7.36}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j{}' (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{ij} \tag{7.37}$$

যেহেতু বল $\vec{F}_{ij}$ হবে i, j কণার সংযোগকারী রেখা বরাবর, $\vec{F}_{ij}$ ও $(\vec{r}_i - \vec{r}_Q)$ ভেক্টর দুটির দিক অভিন্ন। সুতরাং

$$\sum \sum{}' (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

এবং (7.33) সমীকরণটি প্রমাণিত হল।

7.3.2 কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র

যদি বাহ্য টর্ক শূন্য হয়, তবে (7.9) সমীকরণ থেকে কণাগোষ্ঠীর মোট কৌণিক ভরবেগ ভেক্টরটি সময়ের সাথে অপরিবর্তিত থাকবে। অর্থাৎ

যদি $\vec{\Gamma}_Q^{(e)} = 0$ হয়,

তবে $\dfrac{d\vec{L}_Q}{dt} = 0$ হবে,

অথবা $\vec{L}_Q =$ একটি ধ্রুবক।

সুতরাং বাইরের বলের Q বিন্দু সাপেক্ষে কোন টর্ক না থাকলে Q বিন্দু সাপেক্ষে কণাগোষ্ঠীর মোট ভরবেগ ভেক্টর সময়ের সাথে ধ্রুবক থাকে। ইহাই কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র।

নিজ অক্ষে পৃথিবীর আবর্তন কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্রের একটি উদাহরণ। এখানে টর্ক সৃষ্টিকারী বাহ্য বল কার্য্যতঃ উপেক্ষা করার মত। তাই আবর্তন অক্ষের সাপেক্ষে পৃথিবীর কৌণিক ভরবেগ অপরিবর্তিত থাকে।

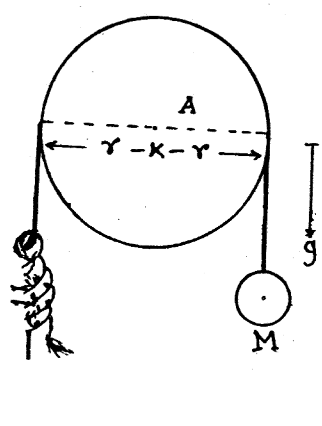
অনুশীলনী — 5

শূন্যস্থান পূরণ করুন ঃ

1. বাহ্য ——— শূন্য হলে, বা বল নির্দেশ বিন্দু দিয়ে গেলে, নির্দেশ বিন্দু সাপেক্ষে কণাগোষ্ঠীর ——— ভরবেগ সময়ের সাথে ——— থাকে।

উদাহরণ

একটি চাকা তার কেন্দ্রগামী কোন অক্ষের সাপেক্ষে ঘর্ষণ ছাড়া ঘুরতে পারে। অক্ষটি পরীক্ষাগারে আবদ্ধ। চাকার ওপর দিয়ে একটি দড়ির (চিত্র 7.4.) এক প্রান্তে M ভরের একটি বানর রয়েছে। অপর প্রান্তে M ভরেরই একটি পিন্ড আছে। প্রথমে তন্ত্রটি স্থির অবস্থায় আছে। চাকা এবং দড়ির ভর উপেক্ষনীয় হলে, বানরটি যদি v বেগে দড়ি বেয়ে ওপর দিকে উঠতে শুরু করে, তবে পিন্ডটির অবস্থা কি হবে বুঝিয়ে বলুন।



চিত্র 7.4

ভরকেন্দ্র ওপরদিকে ওঠে কেন?

চাকা দড়ি, পিন্ড এবং বানর একই তন্ত্রের অন্তর্গত ধরা যাক। প্রথমে তন্ত্রটি স্থির আছে। কাজেই A-র সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ শূন্য।

তন্ত্রের ওপর বাহ্য বলগুলি হচ্ছে ঃ A-র ওপর প্রতিক্রিয়া বল এবং বাজর ও পিন্ডের ওপর মহাকর্ষীয় বল। পরের দুটি বলের A সাপেক্ষে মোট কৌণিক বল শূন্য। কারণ,

A সাপেক্ষে বানরের ওজনের জন্য টর্ক = A সাপেক্ষে পিন্ডের ওজনের জন্য টর্ক

বা $\quad Mg \quad r = Mg \quad r$

A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া বল ক্রিয়া করার দরুন ঐ বিন্দু সাপেক্ষে কোন টর্ক ক্রিয়া করে না ঐ প্রতিক্রিয়া বলের জন্য।

কাজেই A অক্ষের সাপেক্ষে কোন বাহ্য টর্ক ক্রিয়া করে না এবং সেই কারণেই A বিন্দু সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগও শূন্যই থাকে।

সুতরাং পিন্ডটিও বানরের মত v বেগে ওপরদিকে ওঠে। ফলে বানরের থেকে A সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ বাতিল হয়ে যায়।

বানর এবং দড়ির মধ্যে বলগুলি হচ্ছে তন্ত্রের আভ্যন্তরীন বল এবং আভ্যন্তরীন বলের জন্য মোট কৌণিক ভরবেগের পরিমাণ শূন্য হয়।

তন্ত্রের ভরকেন্দ্র ওপরদিকে উঠতে থাকে। তাহলে ভরকেন্দ্রের ত্বরণের উৎপত্তির কারণ যে বাহ্য বল সেটি কোনটি? তা হচ্ছে A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া বল।

7.4 সংরক্ষী বলের ক্ষেত্রে কণাগোষ্ঠীর মোট শক্তি

এখন আমরা আলোচনা করব কণাগোষ্ঠীর শক্তির সংরক্ষণ সূত্র সম্পর্কে। তন্ত্রটিকে প্রাথমিক বিন্যাস 1 থেকে অন্তিম বিন্যাস 2 -এ নিয়ে যেতে সকল বলগুলি যে কার্য করবে তাকে আমরা লিখবো,

$$W_{12} = \sum_{i} \int_1^2 \vec{F}_i . d\vec{s}_i = \sum_{i} \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} . d\vec{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \vec{F}_{ij} . d\vec{s}_i \qquad (7.38)$$

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র ব্যবহার করে আমরা সমাকলগুলিকে লিখতে পারি,

$$\sum_i \int_1^2 \vec{F}_i . d\vec{s}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \vec{v}_i dt = \sum_i \int_1^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) dt$$

$$= \sum_i \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$$

$$= \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right)_2 - \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right)_1 \qquad (7.39)$$

তন্ত্রের মোট গতি শক্তি,

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 \qquad (7.40)$$

অতএব কৃতকার্যকে অন্তিম এবং প্রাথমিক গতিশক্তির পার্থক্য হিসাবে লিখকে দাঁড়ায়,

$$W_{12} = T_2 - T_1 \qquad (7.41)$$

সমীকরণ (7.40)কে (7.27) সমীকরণের সাহায্যে ভরকেন্দ্র নির্দেশতন্ত্রে রূপান্তর করে আমরা Tকে লিখতে পারি,

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{V} + \vec{V}_i'\right) \cdot \left(\vec{V} + \vec{V}_i'\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i V^2 + \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + 2\vec{V} \cdot \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right)$$

এখন আমরা সমীকরণ (7.38) এর ডানদিকের দুটি পদ বিবেচনা করব। বাহ্য বলগুলো যদি কোন বিভবের গ্রেডিয়েন্ট থেকে উৎপন্ন ধরা যায়, তবে প্রথম পদটিকে লেখা যাবে,

$$\sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{s}_i = -\sum_i \int_1^2 \vec{\nabla}_i V_i . d\vec{s}_i = -\sum_i V_i \int_1^2 \qquad (7.42)$$

এখানে ডেল সংকারক (operator) -এর i পদাংক নির্দেশ করে $\vec{r}_i$ এর উপাংশগুলি সাপেক্ষে অবকলজ নির্ণয় করতে হবে। এক্ষেত্রে বাহ্য বলগুলি সংরক্ষী বল হবে। আবার আভ্যন্তরীন বলগুলিও যদি

সংরক্ষী হয়, তবে i-তম এবং j -তম কণার মধ্যে পরস্পর ক্রিয়াশীল আভ্যন্তরীন বল $\vec{F}_{ij}$ ও $\vec{F}_{ji}$ একটি বিভব অপেক্ষক V_{ij} থেকে পাওয়া যাবে। ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার সবল রূপটি যদি বলগুলি মেনে চলে, তবে V_{ij} কেবলমাত্র কণা দুটির দূরত্বেরই অপেক্ষক হতে পারে। সেক্ষেত্রে

$$V_{ij} = V_{ij}\left(\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|\right) \tag{7.43}$$

বল দুটি তখন আপনা হতেই সমান ও বিপরীতমুখী হয় এবং আমরা লিখতে পারি,

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij} = +\vec{\nabla}_j V_{ij} = -\vec{F}_{ji} \tag{7.44}$$

আবার বলগুলো কণাদুটির সংযোগকারী রেখা বরাবরও ক্রিয়া করে। সেজন্য

$$\vec{\nabla} V_{ij}\left(\left|\vec{r}_{ij} - \vec{r}_j\right|\right) = \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) f \tag{7.45}$$

এখানে f হচ্ছে কোন স্কেলর অপেক্ষক। এছাড়া V_{ij} যদি কণাগুলোর অনুষঙ্গী অন্য কোন জোড়া ভেক্টরের পার্থক্যেরও অপেক্ষক হয়, যখন আভ্যন্তরীন সব বলগুলিই সংরক্ষী হয়, তখন (7.38) সমীকরণের ডানদিকের দ্বিতীয় পদটিকে লেখা যেতে পারে কণাগুলোর জোড়া পদের যোগফল হিসাবে। প্রত্যেকটি জোড়া পদের রূপ হবে,

$$-\int_1^2 \left(\vec{\nabla}_i V_{ij} \cdot d\vec{s}_i + \vec{\nabla}_j V_{ij} \cdot d\vec{s}_j\right) \tag{7.46}$$

আভ্যন্তরীন বল $\vec{F}_{ij}$ ও $\vec{F}_{ji}$ একটি বিভব অপেক্ষক V_{ij} থেকে পাওয়া যাবে। ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার সবল রূপ বলগুলিকে মেনে চলতে হলে V_{ij} শুধু কণা দুটির দূরত্বেরই অপেক্ষক হতে পারবে অর্থাৎ

$$V_{ij} = V_{ij}\left(\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|\right) \tag{7.43}$$

এক্ষেত্রে আপনা হতেই বল দুটি সমান ও বিপরীতমুখী হয়,

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}$$

$$= -\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y_i} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z_i}\right) v_{ij}$$

$$= -\left\{\hat{i}\frac{\partial\ \ V_{ij}}{\partial(x_i - x_j)}\frac{\partial(x_i - x_j)}{\partial x_i} + \hat{j}\frac{\partial\ \ V_{ij}}{\partial(y_i - y_j)}\frac{\partial(y_i - y_z)}{\partial y_i} + \hat{k}\frac{\partial\ \ V_{ij}}{\partial(z_i - z_j)}\frac{\partial(z_i - z_j)}{\partial z_i}\right\}$$

$$= -\left\{(-)\hat{i}\frac{\partial\ \ V_{ij}}{\partial(x_i - x_j)}\frac{\partial(x_i - x_j)}{\partial x_i} + (-)\hat{j}\frac{\partial\ \ V_{ij}}{\partial(y_i - y_j)}\frac{\partial(y_i - y_j)}{\partial y_i} + (-)\hat{k}\frac{\partial\ \ V_{ij}}{\partial(z_i - z_j)}\frac{\partial(z_i - z_j)}{\partial z_i}\right\}$$

$$= +\left\{\hat{i}\frac{\partial\ V_{ij}}{\partial(x_i - x_j)}\frac{\partial(x_i - x_j)}{\partial x_i} + \hat{j}\frac{\partial V_{ij}}{\partial(y_j - y_i)}\frac{\partial(y_j - y_i)}{\partial y_i} + \hat{k}\frac{\partial\ V_{ij}}{\partial(z_j - z_i)}\frac{\partial(z_j - z_i)}{\partial z_j}\right\}$$

$$= \vec{\nabla}_j\ V_{ij} = -\vec{F}_{ji} \qquad (7.47)$$

সংক্ষেপে

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij} = +\vec{\nabla}_j V_{ij} = -\vec{F}_{ji} \qquad (7.47a)$$

এবং উহারা কণাদ্বয়ের সংযোগকারী রেখা বরাবরও থাকে,

$$\vec{\nabla}\ V_{ij}\left(\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|\right) = \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)f \qquad (7.48)$$

এখানে f হচ্ছে কোন স্কেলর অপেক্ষক।

আভ্যন্তরীন সব বলগুলিই যখন সংরক্ষী হয়, তখন (7.38) সমীকরণের ডানদিকের দ্বিতীয় পদটিকে লেখা যেতে পারে কণাগুলির জোড়া পদের যোগফল হিসাবে। সমীকরণ (7.47a) অনুসারে প্রত্যেকটি জোড়া পদের রূপটি হবে,

$$-\int_1^2\left(\vec{\nabla}_i V_{ij}\cdot d\,\vec{s}_i + \vec{\nabla}_j V_{ij}\cdot d\,\vec{s}_j\right) \qquad (7.49)$$

আমরা যদি i-তম ও j-তম কণার স্থান ভেক্টরের পার্থক্য $\vec{r}_i - \vec{r}_j = \vec{r}_{ij}$ লিখি এবং $\vec{\nabla}_{ij}$ যদি $\vec{\gamma}_{ij}$ -র সাপেক্ষে গ্রেডিয়েন্টকে বোঝায় অর্থাৎ $\vec{\nabla}_{ij} \equiv \hat{i}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y_{ij}} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z_{ij}}$

তবে $\quad \vec{\nabla}_i\ V_{ij} = \vec{\nabla}_{ij}\ V_{ij} = -\vec{\nabla}_j\ V_{ij} \qquad (7.50)$

এবং $\quad d\vec{s}_i - d\vec{s}_j = d\vec{r}_i - d\vec{r}_j = d\vec{r}_{ij}$ (7.51)

উপরের (7.50) এবং (7.51) সমীকরণ দুটি ব্যবহার করে ij জোড়ার পদকে (7.49) সমীকরণ থেকে লেখা যায়

$$-\int_1^2 \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}$$

আভ্যন্তরীন বলগুলি থেকে মোট যে কার্য হবে তাকে লেখা যাবে,

$$-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\i\neq j}} \int_1^2 \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\i\neq j}} V_{ij}\Big|_1^2 \tag{7.52}$$

কারণ $\vec{\nabla}_{ij} V_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = \dfrac{\partial V_{ij}}{\partial x_{ij}} dx_{ij} + \dfrac{\partial V_{ij}}{\partial y_{ij}} dy_{ij} + \dfrac{\partial V_{ij}}{\partial z_{ij}} dz_{ij} = dV_{ij}$

সমীকরণ (7.52) এ গুণক $\dfrac{1}{2}$ লেখার কারণ হচ্ছে i এবং j উভয়েরই উপর যোগ করার সময় প্রত্যেকটি পদকে দুবার ধরা হয়েছে। প্রথমে i -এর উপর যোগ করার সময় এবং পরে j-র উপর যোগ করার সময়।

উপরের আলোচনা থেকে এটা স্পষ্ট যে, সব বাহ্য বল এবং আভ্যন্তরীন বলগুলিই যদি বিভবের গ্রেডিয়েন্ট থেকে নির্ণয় করা যায়, তবে তন্ত্রের মোট স্থিতিশক্তি V-র সংজ্ঞা হিসাবে লেখা যায়,

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\i\neq j}} V_{ij} \tag{7.53}$$

ফলে মোট শক্তি $T+V$ সংরক্ষিত হয়। (7.53) সমীকরণের ডানদিকের দ্বিতীয় পদটিতে বলা হবে আভ্যন্তরীন স্থিতি শক্তি। সাধারণতঃ পদটি শূন্য নাও হতে পারে। তন্ত্র সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হলে পদটিও সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হতে পারে। দৃঢ় বস্তুর ক্ষেত্রেই শুধু আভ্যন্তরীন স্থিতি শক্তি সর্বদা ধ্রুবক হয়। দৃঢ় বস্তুর ক্ষেত্রে কণাগুলির মধ্যে দূরত্ব r_{ij}, নির্দিষ্ট হয় এবং সময়ের সাথে অপরিবর্তিত থাকে। এক্ষত্রে $d\vec{r}_{ij}, \vec{r}_{ij}$ লম্বভাবে থাকে। কাজেই $d\vec{r}_{ij}, \vec{f}_{ij}$ -র সঙ্গেও লম্বভাবে থাকে। সুতরাং দৃঢ় বস্তুর ক্ষেত্রে

আভ্যন্তরীন বলগুলি কোন কার্য করে না এবং আভ্যন্তরীন বিভব ধ্রুবক থাকে। যেহেতু মোট বিভবে যে কোন ক্ষেত্রেই একটি অচর রাশির অনিশ্চয়তা থাকে, সেজন্য দৃঢ়বস্তুর গতির আলোচনায় অচর আভ্যন্তরীন বিভব সম্পূর্ণরূপে উপেক্ষনীয়।

অনুশীলনী — 6

1. শূন্যস্থান পূরণ করুন ঃ

(i) বাহ্য বল ও আভ্যন্তরীন বল ______ হলে, উভয় বলকেই কোন বিভবের গ্রেডিয়েন্ট হিসাবে লেখা যেতে পারে।

(ii) সংরক্ষী বলের ক্ষেত্রে মোট______ ______ ও মোট ______ র যোগফল ধ্রুবক।

(iii) দৃঢ় বস্তুর ক্ষেত্রে $\vec{r}_{ij}$ এবং $d\vec{r}_{ij}$ পরস্পর ______ থাকে।

7.4.1 সংরক্ষণ সূত্রগুলির পর্যালোচনা

এই অনুচ্ছেদে আমরা সকল সংরক্ষণ সুত্রগুলোর পর্যালোচনা করব। সংরক্ষণ সূত্রগুলোর মধ্যে একটি বিষয়ে মিল রয়েছে — সেটা হচ্ছে তন্ত্রটির পরিবর্তন ঘটলেও সময়ের সঙ্গে কোন একটি ভৌত রাশি যেমন রৈখিক ভরবেগ $(\vec{P})$, কৌণিক ভরবেগ $(\vec{L})$ এবং যান্ত্রিক শক্তি (E) অপরিবর্তিত থাকে। কণাগোষ্ঠীর কোন নির্দিষ্ট তন্ত্রের ক্ষেত্রে রৈখিক ভরবেগ, কৌণিক ভরবেগ ও যান্ত্রিক শক্তির সংরক্ষণ সূত্রগুলো যথাক্রমে সংক্ষেপে লেখা যেতে পারে,

$$\vec{F}^{(e)}=0 \text{ হলে } \vec{p} \text{ অচর রাশি} \tag{7.54}$$

$$\vec{\Gamma}^{(e)}=0 \text{ হলে } \vec{L} \text{ অচর রাশি} \tag{7.55}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=0 \text{ হলে } T+V'=E \text{ অচর রাশি} \tag{7.56}$$

এখানে $$V'=V+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j{}' V_{ij} \tag{7.56a}$$

এমন কি বিভিন্ন জড়ত্বীয় নির্দেশতন্ত্রের পর্যবেক্ষকগণ কোন একটি ভৌত রাশি, যেমন $\vec{p}$ এর মান তাদের নিজস্ব নির্দেশতন্ত্রে ভিন্ন ভিন্ন নির্দেশ করলেও তারা প্রত্যেকেই একমত হবেন যে তাদের নিজস্ব পরিলক্ষিত $\vec{p}$ এর মানটি কিন্তু সময়ের সঙ্গে অপরিবর্তিত থাকে, যদি $\vec{F}^{e}=0$ হয়। সমীকরণ (7.54) এবং সমীকরণ (7.55) উভয়েই ভেক্টর সমীকরণ। এদের প্রত্যেকটিই তিনটি নির্দেশ অক্ষের দিকে তিনটি নিরপেক্ষ স্কেলর সমীকরণের সমতুল। অতএব, আমরা x অক্ষের দিকে রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রটি তখনই প্রয়োগ করতে পারব যখন,

$$F_x^{(e)} = 0, \quad P_x \text{ অচর রাশি} \tag{7.57}$$

ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রের এই প্রয়োগ অন্য অক্ষগুলোর দিকের অবস্থা নিরপেক্ষ।

$$F_y^{(e)} \neq 0, \quad P_y \neq \text{ অচর রাশি} \tag{7.58}$$

$$F_z^{(e)} \neq 0, \quad P_z \neq \text{ অচর রাশি} \tag{7.59}$$

যদি কোন তন্ত্রের গতির ক্ষেত্রে সংররক্ষণ সূত্রগুলো প্রযোজ্য হয়, তবে প্রথম দুটি ভেক্টর সমীকরণ (7.54) ও (7.55) এর প্রত্যেকেই তিনটি শর্ত আরোপ করে এবং শক্তি স্কেলর রাশি হওয়ার দরুন শক্তির সংরক্ষণ সূত্র (সমীকরণ 7.56) একটি শর্ত আরোপ করে অর্থাৎ মোট সাতটি শর্ত আরোপিত হয়।

অনুশীলনী — 7

1. শূন্যস্থান পূরণ করুন ঃ

(i) $F_z^{(e)} = 0$ হলে ——— অচর রাশি

(ii) $\Gamma_x^{(e)} = 0$ হলে ——— অচর রাশি

(iii) ——— = 0 হলে $T + V' = E$ অচর রাশি

(iv) ——— বলক্ষেত্রে $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ হয়

উদাহরণ

M ভরের একটি গোলা $\vec{V}$ বেগে চলমান অবস্থায় ফেটে তিনটি টুকরো হল। টুকরো তিনটির ভর ও গতির বিষয়ে দেয়া আছে।

প্রথম টুকরো — ভর $m_1 = \dfrac{M}{2}$, গতির দিকের পরিবর্তন হল না।

দ্বিতীয় টুকরো — ভর $m_2 = \dfrac{M}{6}$, ঠিক উল্টোদিকে চলমান হল।

তৃতীয় টুকরো ভর — ভর $m_3 = \dfrac{M}{3}$, স্থির হয়ে রইল।

গোলটি ফাটার ফলে যে পরিমাণ শক্তি নির্গত হল তা ফাটার সময়ের গোলার গতিশক্তির 5 গুণ। টুকরোদের বেগ নির্ণয় করতে হবে।

তিনটির ভর ও বেগ হচ্ছে

$$m_1 = \frac{M}{2}, \ \vec{\nu}_1 = k_1\vec{\nu}$$

$$m_2 = \frac{M}{6}, \ \vec{\nu}_2 = k_2\vec{\nu}$$

$$m_3 = \frac{M}{3}, \ \vec{\nu}_3 = 0$$

উপরে উল্লেখিত শর্ত অনুযায়ী k_1 এবং k_2 উভয়ই ধনাত্মক।

রৈখিক ভরবেগ ও শক্তির সংরক্ষণ সূত্র অনুসারে যথাক্রমে পাওয়া যায়,

$$M\nu = \frac{M}{2}k_1\nu - \frac{M}{6}k_2\nu \quad \text{...... (a)}$$

$$E + \frac{1}{2}M\nu^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{2}(k_1\nu)^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{6}(k_2\nu)^2 \quad \text{..... (b)}$$

সমীকরণ (a) থেকে

$$k_2 = 3k_1 - 6 \qquad \text{..... (c)}$$

এই সমীকরণ (b) থেকে $k_2 = 3k_1 - 6$ বসালে (c) সমীকরণটি হয়

$$5\left(\frac{1}{2}M\nu^2\right) + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{M\nu^2}{4}k_1^2 + \frac{M\nu^2}{12}(3k_1 - 6)^2 \quad \text{..... (d)}$$

সরলীকরণের পর সমীকরণ (d) কে লেখা যায়

$$k_1^2 - 3k_1 = 0$$

অতএব $k_1 = 0$

অথবা $k_1 = 3$

$k_1 = 0$ হলে $k_2 = -6$

কিন্তু $k_2 > 0$ হতে হবে। সুতরাং $k_1 = 0$ সমাধান গ্রহণীয় নয়।

$k_1 = 3$ হলে $k_2 = 3$ ।

সুতরাং বেগগুলি হবে,

$$\vec{\nu}_1 = 3\vec{\nu}$$

$$\vec{\nu}_2 = -3\vec{\nu}$$

$$\vec{\nu}_3 = 0$$

7.5 সারাংশ

কণাগোষ্ঠীর তন্ত্রের ক্ষেত্রে ঃ

বিচ্ছিন্ন কণার ক্ষেত্রে, ভরকেন্দ্রের স্থান ভেক্টর $\vec{R} = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$

অবিচ্ছিন্নভাবে ব্যস্ত কণার ক্ষেত্রে, ভরকেন্দ্রের স্থান ভেক্টর $\vec{R} = \dfrac{\int \vec{r}\,dm}{M}$

বাহ্য বল ক্রিয়া করলে, $\dfrac{d^2}{dt^2}\left(\sum m_i \vec{r}_i\right) = \vec{F}^{(e)}$

বা $\quad M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)} = \dot{\vec{p}}$

রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র $\vec{P} = M\dot{\vec{R}} = M\vec{V}$ একটি অচর রাশি,

যদি $M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)}$

এখানে $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}} = M\dot{\vec{R}} = M\vec{V}$

কৌণিক ভরবেগ $\vec{L} = \sum_i \vec{\ell}\,i = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \left\{\left(\vec{R} + \vec{r}\,'_i\right) \times m_i\left(\vec{V} + \vec{v}\,'_i\right)\right\}$

বা $\quad \vec{L} = \vec{R} \times M\vec{V} + \sum_i \left(\vec{r}\,'_i \times \vec{p}\,'_i\right)$

Q বিন্দু সাপেক্ষে কৌণিক ভরবেগ, মূলবিন্দু O

$$\vec{L}_Q = \sum_i \vec{\ell}_{iQ} = \sum_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_Q\right) \times m_i\left(\dot{\vec{r}}\,'_i - \dot{\vec{r}}_Q\right)$$

$$\frac{d L_Q}{dt} = \sum_i \left\{ \left(\vec{r}_i - \vec{r}_Q\right) \times \left(\vec{F}_i^{(e)} + \sum_j{}' F_{ij} \right) \right\} - M\left(\vec{R} - \vec{r}_Q\right) \times \ddot{\vec{r}}_q$$

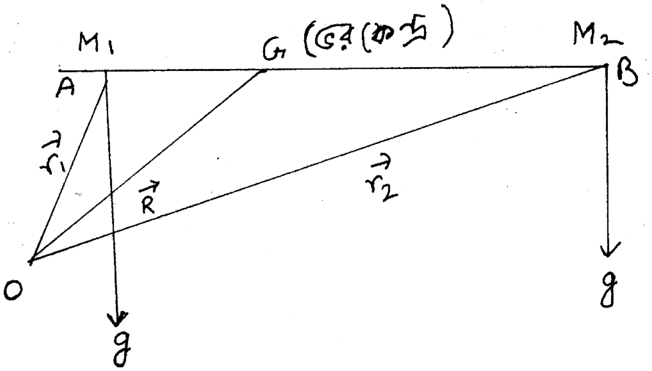
Q মূলবিন্দু হলে, $\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{\Gamma}_Q^{(e)}$

যদি $\left(\vec{R} - \vec{r}_Q\right) \times \ddot{\vec{r}}_Q = 0$ .....(7.3.10) হয় এবং $\sum_i \sum_j{}' \left(\vec{r}_i - \vec{r}_q\right) \times \vec{F}_{ij} = 0$ হয়। (7.35)

যখন কোন বাহ্য বল ক্রিয়া করে না, বা বলগুলো কোন টর্ক উৎপন্ন করে না, তখন $\vec{\Gamma}_Q^{(e)} = 0$, $\vec{L}_Q$ একটি অচর রাশি।

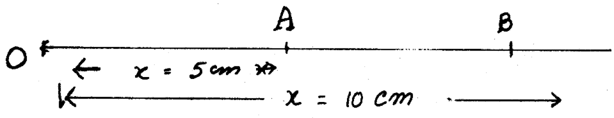
7.6 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোন অঞ্চলে ত্বরণ g সুসম হ'লে দেখান যে, ঐ অঞ্চলে দু'টি কণার কোন তন্ত্রের ভরকেন্দ্র সাপেক্ষে মোট মহাকর্ষীয় টর্ক শূণ্য হয়।



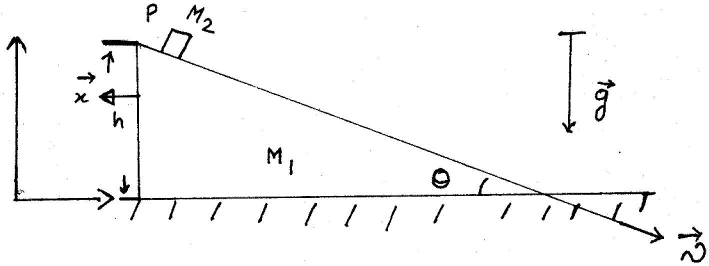
চিত্র 7.5

2. x – অক্ষের উপর M ও M/4 ভরের দুটি কণা A ও B যথাক্রমে x = 5 cm এবং x = 10 cm-এ অবস্থান করে। t = o সময়ে কণা দুটি স্থির অবস্থায় থাকলে পারস্পারিক আকর্ষণের দরুণ কণা দুটির মধ্যে যখন সংঘর্ষ হবে তখন x এর মান কত?



চিত্র 7.6

3. M_2 ভরের একটি মসৃণ খন্ড P M_1 ভরের একটি মসৃণ কীলের উপর রাখা হল। θ হচ্ছে কীলের কোণ। কীলাটিও আবার রাখা আছে একটি মসৃণ অনুভূমিক টেবিলের উপর। প্রথমে তন্ত্রটি যখন স্থির অবস্থায় রয়েছে তখন টেবিলের অনুভূমিক তল থেকে M_2 ভরের উচ্চতা h। স্থির অবস্থা থেকে P খন্ডটির বিসর্জণ (sliding) সুরু হয় এবং উহা নীচের দিকে নামতে থাকে। খন্ডটি যখন টেবিলকে স্পর্শ করে তখন টেবিলের সাপেক্ষে কীলের বেগ নির্ণয় করুন।



চিত্র 7.7

7.7 উত্তরমালা ঃ

অনুশীলনী — 1

(a) $5\hat{i}$

অনুশীলনী — 2

1. (i) একটি (ii) শূন্য, (iii) মূলবিন্দু, (iv) ভর-ভ্রামক, (v) ভরকেন্দ্র, (vi) প্রথম, ভরকেন্দ্র।

অনুশীলনী — 3

1. (i) শূন্য, (ii) $36\hat{i}, \text{kg m/s}, \quad 4\hat{i}\ \text{m/s}$, (iii) $10\hat{j} \quad \text{m/s}^2$
2. (7.22) সমীকরণটি দেখুন।

অনুশীলনী — 4

1. (i) রৈখিক ভরবেগ, (ii) 500 m/s
2. উত্তরের জন্য 7.22 সমীকরণটি দেখুন
3. 7.2.4 অনুচ্ছেদে দেখুন।
4. বাহ্য বল নৌকার ওপর ক্রিয়া করে না। ফলে নৌকোটির ভরকেন্দ্রের বেগ সুষম হবে। এক্ষেত্রে নৌকোটি প্রথমে স্থির আছে, অর্থাৎ বেগ শূন্য। কাজেই নৌকোটি নৌকোর সম্মুখ দিক থেকে পশ্চাদ্দিকে গেলেও ভরকেন্দ্র স্থির থাকবে।

স্থির মূলবিন্দু O থেকে নৌকোটির সম্মুখভাগে থাকাকালে নৌকোটির দূরত্ব r m নৌকোর ভরকেন্দ্রের দূরত্ব $(r+2)\,m$ এবং লোকটির নৌকোর পশ্চাদ্দিকে থাকাকালীন দূরত্ব $r+4m$।

O থেকে ভরকেন্দ্রের দূরত্ব R লিখলে এবং যখন লোকটি যেদিকে হাঁটে তার উল্টোদিকে x m নৌকোটি সরে, তখন আমরা পাই,

$$R = \frac{80r + 60(r+2)}{80+40} = \frac{80(r+4-x) + 60(r+2-x)}{80+40}$$

বা $\quad x = \frac{320}{140}\,m = \frac{16}{7}\,m$

নৌকোটি $x = \frac{16}{7}\,m$ লোকটির চলার উল্টোদিকে সরে।

অনুশীলনী — 5

1. টর্ক , কৌণিক, অপরিবর্তিত বা ধ্রুবক।

অনুশীলনী — 6

1. (i) সংরক্ষী, (ii) গতিশক্তি / স্থিতিশক্তি, স্থিতিশক্তি / গতিশক্তি, (iii) লম্বভাবে

অনুশীলনী — 7

1. (i) P_z, (ii) Γ_x, (iii) $\vec{\nabla}\times\vec{F}$, (iv) সংরক্ষী।

সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. মনে করি তন্ত্রের কণা দুটির ভর M_1 ও M_2; ওদের স্থানভেক্টর যথাক্রমে $\vec{r}_1$ ও $\vec{r}_2$ মূলবিন্দু O সাপেক্ষে। ভরকেন্দ্র G-র স্থান ভেক্টর $\vec{R}$ (চিত্র 7.5)

সংজ্ঞানুসারে $\vec{R}=\dfrac{M_1\vec{r}_1+M_2\vec{r}_2}{M_1+M_2}$ (A)

ভরকেন্দ্র G সাপেক্ষে তন্ত্রের ক্রিয়াশীল মোট মহাকর্ষীয় টর্ক $\vec{\Gamma}$;

$$\vec{\Gamma}=\left(\vec{r}_1-\vec{R}\right)\times M_1\vec{g}+\left(\vec{r}_2-\vec{R}\right)\times M_2\vec{g}$$

$$=(M_1\vec{r}_1+M_2\vec{r}_2)\times\vec{g}-\vec{R}(M_1+M_2)\times\vec{g}$$

(A) সমীকরণ ব্যবহার করে আমরা পাই

$$\vec{\Gamma}=\vec{R}(M_1+M_2)\times\vec{g}-\vec{R}(M_1+M_2)\times\vec{g}$$

$$=\vec{O}$$

2. মূলকেন্দ্র O সাপেক্ষে ভরকেন্দ্র

$$\times=\frac{M.5+{}^{M}\!/_{4}.10}{M+{}^{M}\!/_{4}}\text{cm}$$

$$=6\text{ cm}$$

যেহেতু তন্ত্রের উপর কোন বর্হিবল ক্রিয়া করে না, সেজন্য $t=o$ সময়ে ভরকেন্দ্রের যে অবস্থান তা অপরিবর্তিত থাকবে

যতক্ষণ শুধু পারস্পারিক বলের ক্রিয়ায় কণা দুটি পরস্পরের দিকে অগ্রসর হবে। কাজেই সংঘর্ষের সময়ও ভরকেন্দ্র একই থাকবে অর্থাৎ ভরকেন্দ্র $\times=6$ cm ।

টেবিলের সাপেক্ষে স্থির কোন নির্দেশ তন্ত্রে আমরা শক্তি ও ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র প্রয়োগ করব। যখন টেবিলকে স্পর্শ করে তখন কীলের সাপেক্ষে P র বেগ $\vec{v}$ এবং টেবিলের সাপেক্ষে কীলের বেগ $\vec{u}$ (চিত্র 7.7)

অনুভূমিক দিকে তন্ত্রের উপর কোন বর্হিবল ক্রিয়া করে না। তাই অনুভূমিক দিকে ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র প্রয়োগ করে আমরা লিখতে পারি

$$M_1 u = M_2(v\cos\theta - u) \qquad \text{..................} \text{ (i)}$$

আবার শক্তি সংরক্ষণের সূত্র থেকে আমরা পাই

$$mgh = \frac{1}{2}M_1 u^2 + \frac{1}{2}M_2\left[(v\cos\theta - u)^2 + (v\sin\theta)^2\right] \qquad \text{..................} \text{ (ii)}$$

উপরের দুটি সমীকরণ (i) এবং (ii) থেকে সরলীকরণের পর পাওয়া যায়

$$u^2 = \frac{2M_2 gh}{(M_1 + M_2)\left(\dfrac{M_1 + M_2}{M_2\cos^2\theta} - 1\right)}$$

একক 8 ▫ কণার বিচ্ছুরণ

গঠন

ভূমিকা

কোনও কণা বা কণাপ্রবাহ যদি গতিপথে কোনও বলক্ষেত্রের প্রভাবে পড়ে, তবে ঐ কণার বা কণাপ্রবাহের গতিপথের পরিবর্তন হয়। এই গতিপথের পরিবর্তনকেই বলা হয় বিচ্ছুরণ। বিচ্ছুরণের প্রকৃতি থেকে আমরা বলক্ষেত্রের রূপ সম্মন্ধে ধারণা করতে পারি —এভাবেই আমরা পারমাণবিক স্তরে আন্তঃক্রিয়া সম্মন্ধে সম্যক জ্ঞান লাভ করতে পেরেছি। বর্তমান এককে এই বিচ্ছুরণের বিভিন্ন দিক নিয়ে আপনারা জানতে পারবেন।

অবশ্য প্রকৃতিতে অন্যান্য ক্ষেত্রেও বিচ্ছুরণের নানা ঘটনা দেখা যায়, তবে বর্তমান এককে আমাদের লক্ষ্য মূলতঃ পারমাণবিক বিচ্ছুরণ।

8.1 প্রস্তাবনা

এই মাত্র যা লেখা হয়েছে, সে কথাই একটু অন্যভাবে বলা যায় — দুই বা ততোধিক কণার অল্প সময়ের জন্য পারস্পরিক ক্রিয়ার ফলে প্রারম্ভিক দিকের পরিবর্তনই বিচ্ছুরণ।

কণাদের সংঘাত (Collision) বা তাদের বিচ্ছুরণ (Scattering) বিশ্বের বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। পারমাণবিক ও কেন্দ্রকীয় গঠন ও মৌলকণাদের সম্পর্কে অনেক তথ্য জানা যায় এই বিচ্ছুরণ পরীক্ষা থেকেই। এ ধরনের পরীক্ষায় অতি সূক্ষ্ম বস্তুদের সঙ্গে কণাসমূহের সংঘাত হয় এবং বিভিন্ন দিকে যে কণাদের গতির বিভাজন ঘটে তাদের সংখ্যার পরিমাপ করা হয়। বিচ্ছুরিত কণাসমূহের কৌণিক বিতরণ

(Angular distribution) প্রকাশ করার জন্য যে শব্দটি ব্যবহার করা হয় তা হল বিচ্ছুরণ প্রস্থচ্ছেদ।

তাই বিচ্ছুরণ প্রস্তচ্ছেদের সংজ্ঞা দিয়েই শুরু হবে আমাদের আলোচনা। যে দুটি ক্ষেত্রে বিশেষ আলোচনা হবে তার একটি হচ্ছে দুটি শক্ত গোলকের বিচ্ছুরণ আর অন্যটি রাদারফোর্ড বিচ্ছুরণ। 1911 ইং সালে গাইগার ও মার্সডেন বিচ্ছুরণের যে পরীক্ষা সম্পন্ন করেন তারই ফলে প্রতিষ্ঠিত হয় পরমাণুর কেন্দ্রকীয় প্রতিরূপ (nuclear model)। সেই কারণেই রাদারফোর্ড বিচ্ছুরণের বিশেষ গুরুত্ব।

উদ্দেশ্য ঃ

এই একক অধ্যয়ন করার পর আপনারা

- অবকল ও মোট প্রস্থচ্ছেদের সংজ্ঞা জেনে তাদের পার্থক্য বুঝতে সমর্থ হবেন।
- ভরকেন্দ্র ও পরীক্ষাগার নির্দেশতন্ত্রের পার্থক্য বুঝতে পারবেন।
- দুটি কঠিন গোলকের স্থিতিস্থাপক বিচ্ছুরণ ও রাদারফোর্ড বিচ্ছুরণের বিষয় সম্যক জ্ঞান লাভ করবেন।

8.2 বিচ্ছুরণ প্রস্থচ্ছেদ — অবকল ও মোট

এই আলোচনা প্রসঙ্গে ভাবা যাক কোন এক সুষম সমান্তরিত কণাপুঞ্জের কথা। এই কণাগুলি আপতিত হয় কোন এক বলকেন্দ্রের ওপর। আমরা ধরে নেব যে বলের কেন্দ্র থেকে অসীম দূরত্বে বল শূন্য হবে। আপতিত কণাপ্রবাহের একটি বৈশিষ্ট্য প্রবাহমাত্রা বা "তীব্রতা" ফ্লাক্স্ ঘনত্বও বলা হয় তীব্রতাকে।

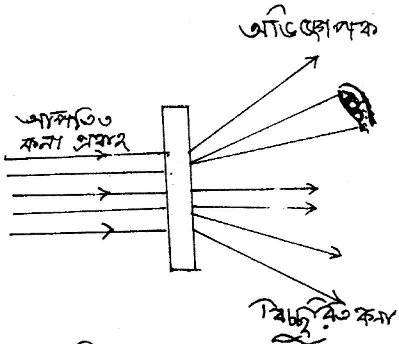
ফ্লাক্স্ ঘনত্ব বা তীব্রতা I হল আপতিত সুষম সমান্তরিত কণাপুঞ্জের গতির অভিমুখের অভিলম্বতলে একক ক্ষেত্রের মধ্য দিয়ে একক সময়ে অতিক্রমকারী কণাগুলির সংখ্যা। কোন একটি কণা বলকেন্দ্রের দিকে যতই আগুয়ান হয়, ততই কণাটির ওপর ক্রমবর্ধমান আকর্ষণ (attractive) বা বিকর্ষণ (repulsive) বল ক্রিয়া করে এবং গতিপথ প্রারম্ভিক সরলরেখার পথ থেকে বিচ্যুত হয়। কণাটি সবচেয়ে কাছের দূরত্ব অতিক্রম করার পর তার ওপর ক্রিয়াশীল বল ক্রমশঃ হ্রাস পায়। পরিশেষে কণাটি আবার কোন সরলরেখার সঙ্গে স্পর্শপ্রবণভাবে চলতে থাকে। সাধারণতঃ যদি কোন বলকেন্দ্রের প্রভাবে একটি কণার গতির অন্তিম অভিমুখ তার প্রারম্ভিক অভিমুখ থেকে ভিন্ন হয়, তবে প্রক্রিয়াটিকে বলে বিচ্ছুরণ এবং প্রারম্ভিক ও অন্তিম গতিপথের মধ্যে কৌনিক বিচ্যুতিকে বলা হয় বিচ্ছুরণের কোণ। অবশ্য যদি বলা হয় বিচ্ছুরণ কোণ θ, তাহলে কিন্তু বিচ্ছুরিত কণার গতির দিক পুরোপুরি বলা হবে না — শুধু বোঝা যাবে যে অন্তিম দিক একটি শঙ্কুর স্পর্শক যে শঙ্কুটির অক্ষ আপতনের দিক এবং যার অর্ধশীর্ষকোণ θ (চিত্র 8.2)। বিচ্ছুরণের দিক পুরোপুরি নির্দিষ্ট করতে আর একটি কোণ ϕ এর অবতারণা করত হয় (যেমন পৃথিবীপৃষ্ঠে কোনও স্থানের অবস্থান নির্দেশ করতে দুটি কোণ - অক্ষাংশ ও দ্রাঘিমা - প্রয়োজন)। এভাবে মনে করুন যে d n সংখ্যক

কণা একক সময়ে $\theta, \theta + d\theta$ এবং $\phi, \phi + d\phi$ এর অন্তর্গত ঘণকোণের মধ্যে বিচ্ছুরিত হল। অর্থাৎ

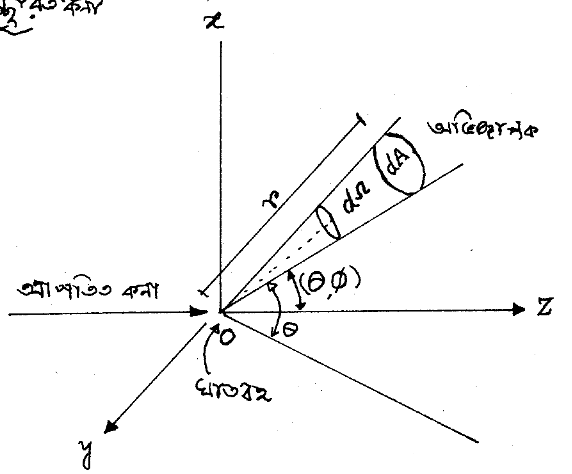
$$dn = \frac{\text{ঐ ঘনকোণের মধ্য দিয়ে t সময়ে বিচ্ছুরিত কণার সংখ্যা}}{\text{সময় t}} \qquad (8.1)$$

কোন পরীক্ষায় ধরা যাক একটি কণাপুঞ্জ, যাদের প্রাস (Projectile) বলা হয়, সমান্তরালভাবে একটি ঘাতবহের (Target) ওপর আপতিত হয়। অল্প সময়ের জন্য ঘাতবহের সঙ্গে কণাপুঞ্জের পারস্পরিক ক্রিয়ার ফলে কণাগুলি বিভিন্ন দিকে বিক্ষিপ্ত হয়। পরিশেষে ঘাতবহ থেকে বেশ খানিকটা দূরে কোন অভিজ্ঞাপক (detector) রেখে বিভিন্ন দিকে বিচ্ছুরিত কণাগুলির সংখ্যা dn নির্ণয় করা হয়। বিচ্ছুরিত কণাগুলির শক্তির পরিবর্তন না হলে বিচ্ছুরণকে বলা হয় স্থিতিস্থাপক বিচ্ছুরণ (elastic scattering)।

এই এককে আমাদের আলোচনা স্থিতিস্থাপক বিচ্ছুরণে সীমাবদ্ধ থাকবে।



চিত্র নং 8.1



চিত্র 8.2

(θ, ϕ) চারিদিকে কোণের $d\Omega$ ঘণ কোন; $d\Omega$ ঘণ কোনে বিচ্ছুরিত কণাগুলি অভিজ্ঞাপক দ্বারা পরিমাপ করা হয়; dA হচ্ছে অভিজ্ঞাপকের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল।

সহজেই বোঝা যায় dn হবে ঘণকোন $d\Omega$ অর্থাৎ $\sin\theta\, d\theta\, d\phi$ র সমানুপাতিক এবং সাধারণভাবে θ, ϕ কোণদুটির অপেক্ষক - অবশ্য আমরা যে সব উদাহরণ আলোচনা করব তাতে আপতন দিকের সাপেক্ষে একটি ঘূর্ণন প্রতিসাম্য থাকবে। ফলে ঘণকোণের ব্যঞ্জক ছাড়া $\sin\theta\, d\theta\, d\phi$ ছাড়া dn, ϕ 'র অপেক্ষক হবে না। যাই হোক ϕ দিকে বিচ্ছুরণের সম্ভাব্যতার মান লেখা যায়

$$\frac{dn}{\text{প্রবাহমাত্রা}\ \ I} = \frac{f(\theta, \phi)\sin\theta\, d\theta\, d\phi}{I}$$

ডানদিকের রাশিটিকে লেখা হয় $\sigma\, d\Omega \equiv \sigma \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ এবং একে বলা হয় ঐ বিশেষ দিকে বিচ্ছুরণে অবকল প্রস্থচ্ছেদ। সমীকরণ (8.2) থেকে σ অর্থাৎ

$$\sigma = \frac{1}{I}\frac{dn}{d\Omega} \tag{8.2}$$

রাশিটির মাত্রা নির্ণয় করলে দেখা যায় এটি একটি ক্ষেত্রফল - এ দিক থেকে প্রস্থচ্ছেদ শব্দটির তাৎপর্য্য কিছুটা আপনারা বুঝতে পারবেন। পরে এই শব্দটির সার্থকতা আপনারা আরও পরিষ্কার ভাবে দেখতে পারবেন।

আবার $\sigma\, d\Omega$ কে সকল ঘণকোণের উপর সমাকলন করলে যে রাশিটি পাওয়া যায় তাকে বলা হয় মোট বা সমাকলিত প্রস্থচ্ছেদ। লেখা যায় σ_T সুতরাং

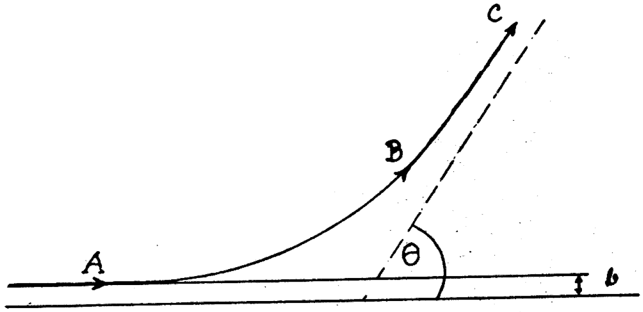
$$\sigma_T = \int \sigma\, d\pi = \iint \sigma \sin\theta\, d\theta\, d\phi \tag{8.3}$$

পূর্বে আমরা যে ঘূর্ণন প্রতি সাম্যের কথা বলেছি, সে ক্ষেত্রে

$$\sigma_T = 2\pi \int \sigma \sin\theta\, d\theta \tag{8.4}$$

σ_T হল যে কোনও দিকে বিচ্ছুরিত হবার মোট সম্ভাবনা।

অবকল প্রস্থচ্ছেদে ও সমাকলিত প্রস্থচ্ছেদের একটি প্রচলিত একক বার্ণ (barn) এর মান $1 \times 10^{-28}\, m^2$।



চিত্র 8.3 : ABC বক্র পথটি বিচ্ছুরিত কণার গতিপথ। b প্রাথমিক গতিরেখা এবং ঘাতবহের মধ্যে লম্ব দূরত্ব। —— চিহ্নিত রেখাটি বিচ্ছুরিত কণার প্রান্তিক গতির দিক - θ বিচ্ছুরণ কোণ।

8.2.1 সংঘাত প্রাচল (Impact Parameter) পদ্ধতি

ধরা যাক কোন ঘাতবহের উপর একটি কণাপ্রবাহ আপতিত হচ্ছে। এই প্রাসগুলির ঘাতবহের সঙ্গে মুখোমুখি সংঘাত হবে এমনটা নাও হতে পারে। এরকম একটি প্রাসের সংঘাতের আলোচনা করা যাক। প্রাসটি মুখোমুখি সংঘাতের বদলে এমন একটি পথে ঘাতবহের দিকে অগ্রসর হয় যে যদি সরল রেখায় চলত তবে ঘাতবহকে b দূরত্বে রেখে প্রাসটি চলে যেত। এই 'b' দূরত্বকে বলা হয় সংঘাত প্রাচল (Impact parameter)। এখানে 'b' হচ্ছে প্রাসটির প্রারম্ভিক পথ এবং ঘাতবহের মধ্যে লম্ব দূরত্ব (চিত্র 8.3)।

এখন আমরা অবকল বিচ্ছুরণ প্রস্থচ্ছেদকে সংঘাত প্রাচলের সাপেক্ষে প্রকাশ করব। ধরা যাক ঘাতবহের ওপর আপতিত কণাপুঞ্জের তীব্রতা বা ফ্লাক্স ঘনত্ব I এবং কোন একটি কণা যার সংঘাত প্রাচল b, θ কোণে বিচ্ছুরিত হয়। এখানে বিক্ষেপণ কেন্দ্র থেকে অভিজ্ঞাপকের দূরত্ব L সংঘাত প্রাচল b-র তুলনায় অনেক বড় অর্থাৎ L>>b। যদি অভিজ্ঞাপকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল ds হয়, তা হলে ds বিক্ষেপণ কেন্দ্রে $d\Omega$ ঘণ কোণ উৎপন্ন করে। এখানে ds যেহেতু θ এবং $(\theta+d\theta)$, ϕ এবং $(\phi+d\phi)$ এর মধ্যে থাকে, সেজন্য

$$d\Omega = \frac{ds}{L^2} = L\,d\theta \frac{L\sin\theta\, d\phi}{L^2}$$

বা $$d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi \tag{8.5}$$

যে কণাগুলি অভিজ্ঞাপকের মধ্যে প্রবেশ করবে তাদের সংঘাত প্রচল b এবং $(b+db)$ ব্যাসার্ধের বলয়ের অন্তর্গত $d\phi$ কোণের আছে এবং বিচ্ছুরিত হয়ে ds ক্ষেত্রফলের মধ্যে আপতিত হচ্ছে। এখানে আলোচিত অংশের বলয়ের ক্ষেত্রফল হল,

$$b \cdot db \cdot d\phi$$

তাহলে যে কণাগুলি $d\Omega$ ঘণ কোণে একক সময়ে প্রবেশ করবে, তাদের সংখ্যা

$$dn = I.b.db.d\phi \tag{8.6}$$

সমীকরণ (8.6) এ, সমীকরণ (8.2) ব্যবহার করে পাওয়া যায়

$$\sigma = -\frac{bdb\,d\phi}{d\Omega} = -\frac{b\,db}{\sin\theta d\theta} \text{।} \tag{8.7}$$

ডানদিকে মাইনাস চিহ্নটির কারণ সংঘাত প্রচল বৃদ্ধির সঙ্গে বিচ্ছুরণ কোণের হ্রাস হয় সুতরাং $\frac{db}{d\theta}$। ঋণাত্মক রাশি কিন্তু আমাদের সংজ্ঞা অনুযায়ী σ কে ধনাত্মক হতে হবে।

যদি bকে আমরা বিচ্ছুরণ কোণের অপেক্ষক হিসাবে জানতে পারি, তা হলে অবকল বিচ্ছুরণ প্রস্থচ্ছেদ গণনা করতে পারি (8.7) সমীকরণ ব্যবহার করে।

আমরা দুটি বিশেষ ক্ষেত্রে সমীকরণ (8.7) র প্রয়োগ করব। যেমন কার্বন গোলক বিচ্ছুরণ ও রাদারফোর্ড বিচ্ছুরণ।

8.3 দুটি কার্বন গোলকের সংঘাত ও বিচ্ছুরণ

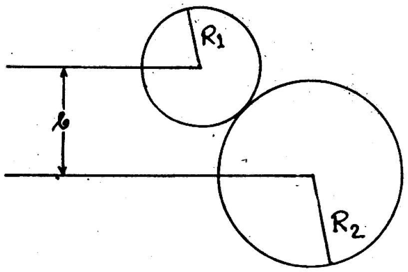
আমরা এখানে m_1 ভর ও R_1 ব্যাসার্ধের কোন গোলকের m_2 ভর ও R_2 ব্যাসার্ধের ঘাতবহ গোলকের দ্বারা স্থিতিস্থাপক বিচ্ছুরণের কথা বিবেচনা করব (চিত্র 8.4)। আমরা ধরে নেব যে $m_2 >> m_1$ অর্থাৎ m_2, m_1 অপেক্ষা অনেক বড়। সুতরাং দ্বিতীয় গোলকটিকে স্থির বলে ধরে নেওয়া যায় এবং ভরকেন্দ্রও ঐ গোলকটির কেন্দ্রে স্থির থাকবে। ধরা যাক গোলক দুটির কেন্দ্রের মধ্যে দূরত্ব কোন এক সময়ে r।

আপতিত শক্ত গোলক ঘাতবহ শক্ত গোলকের সঙ্গে সংঘাতে বিচ্ছুরিত হবে। এখানে শক্ত গোলক বলতে কি বোঝায়? এই শক্ত গোলক বলতে বোঝায় গোলক দুটি (R_1+R_2) দূরত্বের বেশী কাছাকাছি আর আসতে পারবে না। সুতরাং একথা বলা যায় যে বল অথবা বিভব অসীম যখন $r \le (R_1+R_2)$।

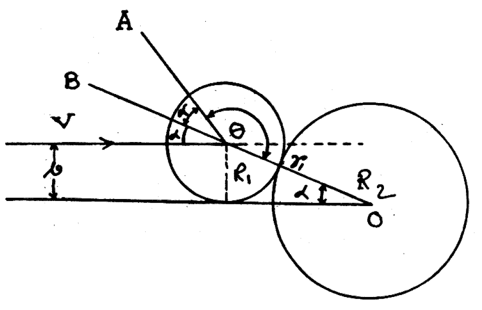
যদি $r > (R_1+R_2)$ হয়, তবে গোলক দুটি সংঘাতের পূর্বে ও পরে মুক্তভাবে চলতে পারবে। একথার মানে হল গোলক দুটির মধ্যে তখন কোন বল ক্রিয়া করে না। এই অবস্থাকে বিভব $v(r)$র সাপেক্ষে গণিতের ভাষায় প্রকাশ করলে লেখা যায়,

$$v(r) = \infty \text{ যখন } r \le (R_1+R_2)$$

$$= 0 \text{ যখন } r > (R_1+R_2) \qquad (8.8)$$



(a)



(b)

চিত্র : 8.4 (a) দুটি শক্ত গোলকের সংঘাত।

(b) ঘাতবহ গোলক দ্বারা বিচ্ছুরণের পর আপতিত শক্ত গোলক যে কোণে ফিরে আসে তা আপতন কোণের সমান হয়।

আপনারা বুঝতে পারছেন যে এ ধরনের বিভবের দরুন গোলক দুটির মধ্যে যে বল ক্রিয়া করে তা অসীম হবে যখন $r \leq (R_1 + R_2)$ এবং শূন্য হয় যখন $r > (R_1 + R_2)$। যেহেতু বল সংঘাতের সময় দুটি কেন্দ্র সংযোগকারী রেখা বরাবর কার্যকর, দ্বিতীয় বলের কেন্দ্রের সাপেক্ষে এই বলের জন্য টর্ক শূন্য এবং সেজন্য আপতিত বলটির কৌণিক ভরবেগের কোনও পরিবর্তন হবে না।

আমরা এখন b ও θ-র সম্পর্ক নির্ণয় করবো স্থিতিস্থাপক সংঘাতের ক্ষেত্রে যখন গতিশক্তি সংরক্ষিত হয়। স্থিতিস্থাপক বিচ্ছুরণের ক্ষেত্রে ঘাতবহ ও প্রাসের বেগের মান সংঘাতের পূর্বে ও পরে একই থাকে। ধরা যাক m_1 ভরের প্রাথমিক বেগ $\vec{v}_{1i}$ এবং সংঘাতের সময় গোলক দুটির কেন্দ্রের সংযোগকারী রেখার সঙ্গে $\vec{v}_{1i}$'র কোণ হচ্ছে α এবং R_2 ব্যাসার্ধের গোলকের কেন্দ্র সাপেক্ষে R_1 ব্যাসার্দ্ধের গোলকের কেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}_1$। সংঘাতের ঠিক পূর্বে m_2 ভরের গোলকের কেন্দ্র সাপেক্ষে m_1 ভরের গোলকের কৌণিক ভরবেগের মান L_1 হল

$$L_1 = m_1 |\vec{r}_1 \times \vec{v}_{1i}| = m_1 v_{1i} r_1 \sin(\pi - \alpha)$$

$$= m_1 v_{1i} r_1 \sin\alpha \tag{8.9}$$

সংঘাতের ঠিক পরেও কৌণিক ভরবেগের মান L_1 হবে

$$L_1 = m_1 |\vec{r}_1 \times \vec{v}_{1f}| = m_1 r_1 v_{if} \sin\angle ACB \tag{8.10}$$

$v_{1i} = v_{1f}$ স্থিতিস্থাপক সংঘাতের ক্ষেত্রে। সুতরাং (8.9) ও (8.10) সমীকরণ থেকে পাওয়া যাবে

$$\sin\alpha = \sin\angle ACB$$

অর্থাৎ $\angle ACB = \alpha$ (8.11)

সমীকরণ (8.11) থেকে দেখা যাচ্ছে m_1 ভরের গোলকটি m_2 ভরের গোলকের সঙ্গে সংঘাতের পর এদের সাধারণ অভিলম্বের সঙ্গে আপতন কোণ α-র সমান কোণে ফিরে আসে (প্রতিফলনের নিয়মের অনুবর্তীভাবে)। চিত্র 8.4 b থেকে আপনারা দেখবেন যে

$$\theta = \pi - 2\alpha \tag{8.12}$$

এবং α কোণের সঙ্গে সংঘাত প্রাচলে b -র সম্পর্ক ঐ চিত্র থেকেই লিখতে পারবেন,

$$b = \gamma_1 \sin\alpha = (R + R_1)\sin\alpha$$

বা (8.45) ব্যবহার করে লেখা যাবে, $b = (R + R_1)\sin\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right)$

বা $\quad b=(R+R_1)\cos\frac{\theta}{2}$ (8.13)

সমীকরণ 8.13 কে θ-র সাপেক্ষে একবার অবকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{d\,b}{d\theta}=-\frac{(R+R_1)}{2}\sin\frac{\theta}{2} \tag{8.14}$$

তাহলে সমীকরণ (8.7) সমীকরণ (8.14) ব্যবহার করে অবকল প্রস্থচ্ছেদ হিসাবে আমরা পাব,

$$\sigma=\frac{b}{\sin\theta}\left(\frac{R_1+R_2}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{b}{2\cos\theta/2}\left(\frac{R_1+R_2}{2}\right) \tag{8.15}$$

সমীকরণ (8.13) থেকে $\frac{b}{\cos\theta/2}=(R+R_1)$ লিখলে উপরের সমীকরণ থেকে পাব

$$\sigma=\frac{(R_1+R_2)^2}{4} \tag{8.16}$$

অতএব মোট বিচ্ছুরণ প্রস্থচ্ছেদ

$$\sigma_T=2\pi\int_0^{\pi}(\sigma)\sin\theta\,d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\frac{(R_1+R_2)}{4}\sin\theta\,d\theta$$

$$=2\pi\frac{(R_1+R_2)^2}{4}\cdot 2$$

$$=\pi(R_1+R_2)^2 \tag{8.17}$$

প্রাসটি যদি গোলকের বদলে একটি কণা হয়, তবে মোট বিক্ষেপণ প্রস্থচ্ছেদ হয় $\pi\ R_2{}^2$ অর্থাৎ মোট বিক্ষেপণ প্রস্থচ্ছেদ ঘাতবহ গোলকের প্রস্থচ্ছেদ ক্ষেত্রফলের সমান হয়।

অনুশীলনী — 1

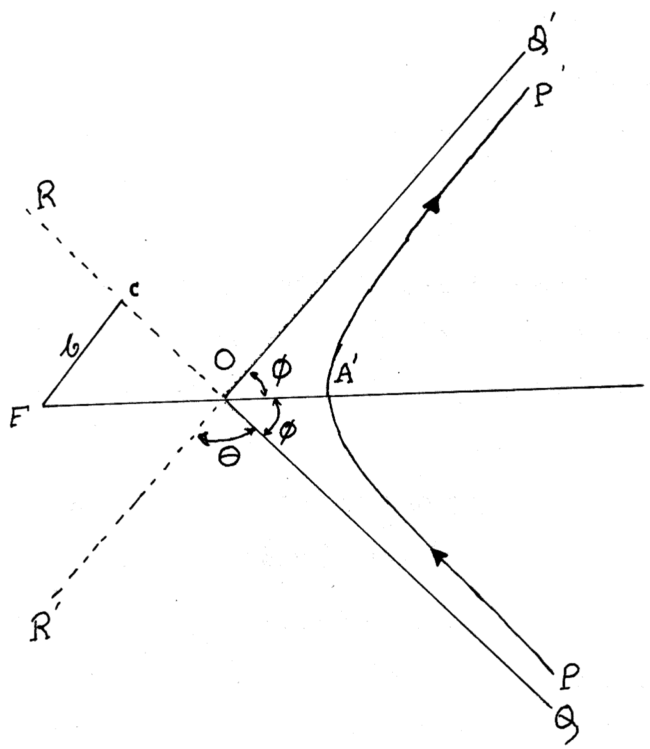
1. কোন কণাগুচ্ছ একটি দেওয়ালে এসে আঘাত করে। দেওয়ালের প্রত্যেকটি পরমাণুর ব্যাসার্ধ 3×10^{-5}m। এখানে পরমাণুকে গোলকের মত ধরা হল। পরমাণুর ভরের তুলনায় প্রত্যেকটি কণার ভর খুবই কম। যে কণাগুলি অভিজ্ঞাপকে প্রবেশ করছে বিচ্ছুরণ কোণ 60° তে এদের অবকল প্রস্থচ্ছেদ ও সংঘাত প্রাচল নির্ণয় করুন। সমস্ত বিচ্ছুরণ কোণ ধরে মোট প্রস্থচ্ছেদ কত?

8.4 রাদারফোর্ড বিচ্ছুরণ (Rutherford Scattering)

পরমাণু গঠন সম্পর্কে বুঝতে হলে রাদারফোর্ড বিক্ষেপণ পরীক্ষার বিশেষ গুরুত্ব রয়েছে। 1898 সনে ইলেকট্রনের আবিষ্কারের পর জে. জে. টমসন (J. J. Thomson) পরমাণুর "প্লাম-পুডিং" প্রতিরূপ প্রস্তাব করেছিলেন। এ প্রতিরূপ অনুযায়ী প্রায় 10^{-8} সেমি ব্যাসার্ধের গোলকের মধ্যে ধনাত্মক আধান পরিব্যপ্ত থাকবে এবং ঋণাত্মক অধান ইলেকট্রনগুলি এই পুডিং-এর মতো গোলকের মধ্যে প্লামের মতো এমনভাবে নিহিত থাকবে যেন মোট আধান শূন্য হয়। 1911 সনে ই. রাদারফোর্ড, যিনি টমসনেরই ছাত্র ছিলেন, তাঁর দুই ছাত্র এইচ্ গাইগার ও ই মার্সডেনকে সঙ্গে নিয়ে একটি অত্যন্ত পাতলা সোনার পাতের মধ্য দিয়ে α কণা পাঠিয়ে তাদের বিক্ষেপণের উপর কিছু পরীক্ষা সম্পন্ন করলেন এবং α-কণাদের কৌণিক বন্টন লিপিবদ্ধ করলেন। লক্ষ্য করলেন, বেশ কিছু α কণা 90° থেকে কম কোণে বিচ্ছুরিত হয়। কিন্তু 90°-র বেশী কোণেও বিচ্ছুরণ লক্ষ্য করা গেল অর্থাৎ পশ্চাদ অভিমুখেও বিক্ষেপণ সম্ভব। 6×10^{-7}m বেধের পাতলা সোনার পাতের মধ্য দিয়ে পোলোনিয়াম -214 থেকে পাওয়া 7.68 MeV শক্তির α কণা ভেদ করলে অধিকাংশ α-কণারই পথের কোন বিচ্যুতি ঘটে না। আবার এও দেখা গেছে যে প্রায় প্রতি 8000 কণার মধ্যে একটি কণা 90°-র বেশী কোণে বিচ্ছুরিত হয়।

টমসন প্রতিরূপ অনুসারে পাতটির মধ্য দিয়ে α কণাটি গেলে অতি সামান্য বিচ্ছুরণ ঘটবে। টমসনের প্রতিরূপ অনুসারে α কণাটি পাতলা পাতটি অতিক্রম করার সময় দুর্বল স্থির বৈদ্যুতিক বল অনুভব করবে। ফলে প্রাথমিক ভরবেগের জন্য পাতটি অতিক্রম করলে সামান্য দিক পরিবর্তন করবে। বাস্তবিকপক্ষে কোন প্রবল বলের ক্রিয়ায়ই শুধু এ ধরনের পশ্চাৎ অভিমুখে বিক্ষেপণ সম্ভব। এই বিক্ষেপণের ফলগুলি ব্যাখ্যা করার জন্য রাদারফোর্ড পরমাণুর কেন্দ্রকীয় প্রতিরূপ প্রস্তাব করেন। তাঁর যুক্তি অনুসারে আপতিত α কণার বেগের অভিমুখের উল্টোদিকে বিক্ষেপণ ইলেকট্রনের দ্বারা সম্ভব নয়। α - কণা ইলেকটনের তুলনায় এত ভারী যে ইলেক্ট্রনের দ্বারা α-কণার বিক্ষেপণ খুবই সামান্য হবে। রাদারফোর্ড স্বীকার করলেন যে পরমাণুর ধণাত্মক আধান অতি ক্ষুদ্র পরিসরের মধ্যে ঘনীভূত। কাজেই আল্‌ফা কণার বিক্ষেপণ পরমাণুর কেন্দ্রকের জন্যই হচ্ছে। পরমাণুর রাদারফোর্ড প্রতিরূপ অনুসারে পরমাণু গঠনে রয়েছে ধনাত্মক আধানযুক্ত একটি অতি ক্ষুদ্র কেন্দ্রক যার মধ্যে পরমাণুটির অধিকাংশ ভরই সংহত আছে, আর রয়েছে এই

কেন্দ্রকটি ঘিরে ঋণাত্মক অধানযুক্ত ইলেকট্রন। পরমাণু আধান নিরপেক্ষ হয় কারণ ধনাত্মক কেন্দ্রক ও ঋণাত্মক ইলেকট্রন কণাগুলির আধানের পরিমাণ সমান। আপনারা অবগত আছেন যে কেন্দ্রক ও α কণার মধ্যে পারস্পরিক বল ক্রিয়া করে তা বিকর্ষী বিষমবর্গীয় স্থির তড়িৎ বল (Repulsive inverse square law electrostatic force)।



চিত্র 8.5 : α কণিকার বিচ্ছুরণ চিত্র

$FA' = q, \quad FC = b, \quad \angle Q'OA' = \angle QOA' = \phi$

বিচ্ছুরণ কোণ $\theta = \angle QOR' = \pi - 2\phi$ ।

চিত্র 8.5 - এ α কণিকার কক্ষ PA′P দেখান হয়েছে পরাবৃত্তাকার (Hypobolic)। রাদারফোর্ডের মতবাদ অনুসারে অসীম ভরের একটি পরমাণুর সমগ্র ধনাত্মক আধান +Ze যদি F বিন্দুতে কেন্দ্রীভূত হয়, তবে দেখান যায় F বিন্দুটি পরাবৃত্তের অন্যতম ফোকাসে অবস্থিত থাকে। Z হল এখানে পারমাণবিক

সংখ্যা। যদি α কণাটির ভর z' হয় তবে $z' = 2$ হবে। α কণাটির আদি বেগ v হলে আদি গতিশক্তি হবে $E_\alpha = \frac{1}{2}Mv^2$।

যখন α কণাটি কেন্দ্রক F থেকে অসীম দূরত্বে থাকে তখন কণাটির ওপর কেন্দ্রকের বিষমবর্গীয় বিকর্ষক বল উপেক্ষা করা যায়; কণাটির সঙ্গে কেন্দ্রকের পারস্পরিক ক্রিয়ার পূর্বে ও পরে উভয়ক্ষেত্রেই এবং অসীম দূরত্বে পরাবৃত্তাকার কক্ষপথটি স্পর্শপ্রবণভাবে (Asymptotically) যথাক্রমে QOR ও Q′OR′ সরলরেখার সমান্তরাল হয়। F থেকে QOR রেখার ওপর অংকিত লম্ব FC কে সংঘাত প্রাচল (Impact Parameter) বলা হয়। ধরা যাক $FC = b$। α কণাটি যতই কেন্দ্রকের দিকে অগ্রসর হয়, ততই কণাটির ওপর কেন্দ্রকের বিকর্ষণ বল ক্রিয়া করার জন্য ও কক্ষপথটি বেঁকে যেতে থাকে এবং A′ বিন্দুতে কণাটির দূরত্ব কেন্দ্রক থেকে নূনতম হয়। এবার কেন্দ্রকের বিকর্ষণী বলের প্রভাবে A′P পথ ধরে ক্রমশঃ দূরে সরে যায়। α কণিকার আগমনের ও অপসরণের স্পর্শপ্রবণ রেখা (Asymptote) যথাক্রমে QOR ও Q′OR′ এর সমান্তরাল। QO এবং OQ′ সরলরেখা দুটি পরাবৃত্তের অক্ষ FOF′ এর সঙ্গে সমান কোণে (ϕ) আনত থাকে। A′ বিন্দুতে α কণার ওপর কেন্দ্রকের কুলম্ব বিকর্ষক বল সর্বাপেক্ষা বেশী হয়। যদি F′ থেকে A′ বিন্দুর দূরত্ব q হয়, তবে A′ বিন্দুর কণাটির স্থিতিশক্তি হয়।

$$v = \frac{Zz'e^2}{q} \tag{8.18}$$

A′ বিন্দুতে α কণার বেগ v_m লিখলে, এর গতিশক্তিকে লেখা যাবে।

$$E_k = \frac{1}{2}MV_m^2 \tag{8.19}$$

এখানে M ভরের α কণায় গতিশক্তি E_k। সুতরাং A′ বিন্দুতে α কণার মোট শক্তি হয়,

$$E_k + V = \frac{1}{2}MV_m^2 + \frac{Zz'e^2}{q} \tag{8.20}$$

α কণার আদি গতিশক্তি E_α, শক্তি সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী, $E_k + V$-র সমান হওয়া উচিত অর্থাৎ (8.20) সমীকরণ থেকে

$$E_\alpha = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}mV_m^2 + \frac{Zz'e^2}{q} \tag{8.21}$$

α কণা যখন অসীম দূরত্বে থাকে তখন তার ভরবেগ Mv হয়। এই ভরবেগের অভিমুখ QOR সরলরেখা

বরাবর। সুতরাং কেন্দ্রক F সাপেক্ষে α কণার আদি কৌণিক ভরবেগ হবে

$$M\nu.FC = M\nu \cdot b \tag{8.22}$$

আবার A′ বিন্দুতে α কণার ভরবেগের অভিমুখ MV_m ও FF′ অক্ষ পরস্পরের সঙ্গে লম্বভাবে রয়েছে। কাজেই কেন্দ্রক F সাপেক্ষে A′ বিন্দুতে α কণার কৌণিক ভরবেগ হবে,

$$MV_m\, FA' = MV_m.q \tag{8.23}$$

α কণার ওপর ক্রিয়াশীল বল কেন্দ্রগ (Central) হওয়ার দরুণ কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত হয়। অতএব কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র অনুসারে সমীকরণ (8.22) ও (8.23) থেকে আমরা লিখতে পারি,

$$M\nu b = MV_m.q \tag{8.23a}$$

সমীকরণ (8.21)-র উভয়দিককে $\frac{1}{2}M\nu^2$ দিয়ে ভাগ করে পক্ষান্তর (Transpose) করে পাওয়া যায়

$$\frac{\nu m^2}{\nu^2} = 1 - \frac{2Zz'e^2}{M\nu^2 q} \tag{8.24}$$

এখানে α কণাটির ওপর ক্রিয়াশীল বল দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতে পরিবর্তনশীল কেন্দ্রগ বল। ফলে কণাটির কক্ষপথ একটি 'কণিক' (Conic) হয়। α -কণার আদিশক্তি ধনাত্মক হওয়ায় কণিকটি পরাবৃত্তাকার (Hyperbolic) হয়। দেখান যায় যে, পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা (eccentincity) $\in$ হলে

$$q = FA' - (OF + OA') = OF\left(1 + \frac{1}{\in}\right)$$

আবার কনিক্স্ (Conics) তত্ত্ব থেকে পাওয়া যায়

$$1/\in = \cos\phi \tag{8.25}$$

$$\therefore \quad q = OF(1 + \cos\phi)$$

এখন Δ OFC থেকে আমরা পাই

$$\sin\phi = \frac{FC}{OF}$$

অতএব $$q = \frac{FC}{\sin\phi}(1 + \cos\phi) = \frac{b}{\sin\phi}(1 + \cos\phi) \tag{8.26}$$

সমীকরণ (8.23) এবং (8.26) থেকে আমরা পাই

$$\frac{b}{q} = \frac{\nu_m}{\nu} = \frac{\sin\phi}{1+\cos\phi} \tag{8.27}$$

সমীকরণ (8.27) থেকে $\frac{\nu_m}{\nu}$ -র মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\frac{\nu_m{}^2}{\nu^2} = \left(1 - \frac{2Zz'e^2}{M\nu^2}\right) = \frac{\sin^2\phi}{(1+\cos\phi)^2} = \frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi} \tag{8.28}$$

এবার সমীকরণ (8.27) থেকে $\frac{1}{q}$ -র মান $\frac{\sin\phi}{b(1+\cos\phi)}$ বসালে আমরা লিখতে পারব

$$1 - \frac{2Zz'e^2}{M\nu^2 b} \cdot \frac{\sin\phi}{(1+\cos\phi)} = \frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}$$

বা সরলীকরণ করে পাওয়া যায়,

$$b = \frac{Zz'e^2}{M\nu^2}\tan\phi \tag{8.29}$$

যেহেতু $\theta = \pi - 2\phi$, অতএব $\phi = \pi/2 - \theta/2$,

সুতরাং (8.29) থেকে আমরা পাব,

$$b = \frac{Zz'e^2}{M\nu^2}\cot\theta/2 \tag{8.30}$$

সমীকরণ (8.30) থেকে দেখা যায় যে সংঘাত প্রাচল (Impact parameter) b যত ছোট হবে, বিচ্ছুরণ কোণ θ ততই আরও বাড়তে থাকবে। (8.5) চিত্রে আপতিত α কণাপুঞ্জের বিচ্ছুরণের একটি নকশা দেখানো হয়েছে।

সমীকরণ (8.30) হবে

$$b = \frac{Zz'e^2}{4\pi \in_0 M\nu^2} \cot \theta/2 \qquad (8.31)$$

সংঘাত যদি মুখোমুখি হয় অর্থাৎ যদি α কণার পথ সোজা কেন্দ্রকের মধ্য দিয়ে যায় তবে কেন্দ্রক থেকে D দূরত্বে বেগ শূন্য হবে এবং কণাটি যে দিক থেকে আসে সেদিকেই ফিরে চলে যায়। কেন্দ্রকের নিকটে আসার ন্যূনতম দূরত্ব D হয় অর্থাৎ আদি গতি শক্তি স্থিতিশক্তিতে পুরোপুরি রূপান্তরিত হয়। তখন লেখা যায়,

$$\frac{1}{2} M\nu^2 = \frac{Zz'e^2}{D}$$

বা $$\frac{D}{2} = \frac{Zz'e^2}{M\nu^2} \qquad (8.32)$$

এবং (8.30) সমীকরণটি হয়,

$$b = \frac{D}{2} \cot \theta/2 \qquad (8.33)$$

যদি ঘাতবহের ওপর আপতিত α কণাপুঞ্জের সংঘাত প্রাচলে b থেকে $(b + db)$ র মধ্যে হয়, তবে কণাগুলির বিক্ষেপণ কোণ θ ও $(\theta + d\theta)$ -র মধ্যে থাকবে।

(8.7) সমীকরণ ব্যবহার করে পাওয়া যায় অবকল প্রস্থচ্ছেদ,

$$\sigma = -\frac{b}{\sin\theta} \frac{db}{d\theta}$$

$$= +\frac{D \cot \theta/2}{2 \sin\theta} \frac{D}{2} \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \theta/2$$

$$= \frac{D^2}{16 \sin\theta \cos\theta} \operatorname{cosec}^2 \theta/2$$

$$\sigma = \frac{D^2}{16} \operatorname{cosec}^4 \theta/2 \qquad (8.34)$$

এখানে $D = \dfrac{Zz'e^2}{E_\alpha}$

S. I. এককে $D = \dfrac{Zz'e^2}{4\pi \in_0 E_\alpha}$ হবে। (8.35)

কোন কণা কেন্দ্রকের b (সংঘাত প্রাচল) দূরত্বের মধ্যে দিয়ে অতিক্রম করার সম্ভাব্যতা

$$P = \pi b^2 nt$$

এখানে n হচ্ছে ঘাতবহ পাতের মধ্যে বিচ্ছুরক কেন্দ্রের ঘনত্ব আর t হচ্ছে পাতটির বেধ। (8.35) সমীকরণে b -র মান বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$P = \frac{1}{4}\pi\, nt\, D^2 \cot^2 \theta/2 \tag{8.36}$$

আবার, α কণার $D\,\theta$ ও $(\theta + d\theta)$ বিক্ষেপণ কোণের মধ্যে বিক্ষিপ্ত হবার সম্ভাবনা সংঘাত প্রাচল b ও $(b + db)$ - র মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতার সমান।

এবার (8.36) থেকে পাওয়া যায়,

$$dP = \frac{1}{4}\pi\, nt\, D^2 \cot \theta/2 \operatorname{cosec}^2 \theta/2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\pi\, nt\, D^2 \cos \theta/2 \operatorname{cosec}^3 \theta/2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\pi\, nt\, D^2 \sin \operatorname{cosec}^4 \theta/2\, d\theta \tag{8.37}$$

উপরের তত্ত্বকে পরীক্ষার জন্য পাত থেকে R দূরত্বে একটি ZnS পর্দার নির্দিষ্ট ক্ষেত্রের ওপর লম্বভাবে আপতিত α কণাদের সংখ্যা গণনা করা যায়। বিক্ষিপ্ত α কণার যে ভগ্নাংশ R দূরত্বে রাখা পর্দার অতিক্ষুদ্র ক্ষেত্রের ওপর আপতিত হয়েছে তা হল

$$\frac{dP}{2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta} = \frac{nt\, D^2 \operatorname{cosec}^4 \theta/2}{16R^2}$$

এখন যদি N সংখ্যক α কণা পাতের ওপর আপতিত হয় এবং Y সংখ্যক α কণা R দূরত্বে রাখা ZnS-এর পর্দার একক ক্ষেত্রের ওপর বিক্ষিপ্ত হয় এবং আদি অভিমুখের সঙ্গে θ কোণ করে, তখন

$$Y = \frac{N\, nt\, D^2 \operatorname{cosec}^4 \theta/2}{16R^2}$$

রাদারফোর্ডের বিক্ষেপণ তত্ত্ব অনুযায়ী বিক্ষেপণ কেন্দ্র থেকে R দূরত্বে রাখা কোন ZnS পর্দার একক ক্ষেত্রের ওপর যে সংখ্যক α -কণা আপতিত হচ্ছে সে সংখ্যাটি

1. $\operatorname{cosec}^4 \theta/2$, যেখানে θ হচ্ছে বিচ্ছুরণ কোণ

2. t_1 বিচ্ছুরণ পাতের বেধ

3. $1/(MV^2)^2$ অথবা, α কণার আদি শক্তির বিষম বর্গ

4. $(Ze)^2$, কেন্দ্রকীয় আধানের বর্গ

   ইত্যাদির সমানুপাতী হয়।

রাদারফোর্ডের তত্ত্বের বড় দিক হচ্ছে ঃ

1. পরমাণুর গঠনে কেন্দ্রকের ধারণার প্রবর্তন

2. α কণার বিক্ষেপণ থেকে $D = 3.0 \times 10^{-14}$ m, কাজেই স্বর্ণপাতের মধ্যে যে পরমাণু কেন্দ্রক রয়েছে,তার ব্যাসার্ধের 3.0×10^{-14} m - এর চাইতে ছোট।

অনুশীলনী — 2

1. আপতিত কণার বিক্ষেপণ কেন্দ্র থেকে ন্যূনতম দূরত্ব D (Distance of closest approach) কখন হয়? দূরত্বই বা কত? নির্ণয় করুন।

2. SI এককে D -র ব্যঞ্জকটি লিখুন, α কণার আদি গতিশক্তির সাপেক্ষে।

8.5 সারাংশ

- দুটি আন্তঃক্রিয়াশীল কণার গতিপথ নিকটবর্তী হলে, আন্তঃক্রিয়ার ফলে তাদের গতিপথ পরিবর্তিত হয়। তবে একটি কণা অপরটি অপেক্ষা বহুগুণ ভারী হলে, কেবলমাত্র লঘু কণার গতিপথের পরিবর্তনই গুরুত্বপূর্ণ। বহুদূর থেকে আনা লঘু কণা ভারীকণাটির প্রভাবে যে শেষ পর্যন্ত একটি বিভিন্ন দিকে আবার বহুদূরে সরে যায়, এই ঘটনাটিকেই বলা হয় বিচ্ছুরণ।

- বহু দূরে লঘুকণাটি সরলরেখা বরাবর গতিশীল হয়, কিন্তু আপতনের পূর্বে ও পরের সরলরেখাদুটি বিভিন্ন। এই দুটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণকে বলা হয় বিচ্ছুরণ কোণ।

- বিভিন্ন দিকে কি অনুপাতে কণা বিচ্ছুরিত হচ্ছে, তার আলোচনার জন্য অবকল প্রস্থচ্ছেদ বলে একটি শব্দের সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে, আবার এই অবকল প্রস্থচ্ছেদকে সকল কোণের সাপেক্ষে সমাকলন করে যে রাশিটি পাওয়া যায় তাকে বলা হয় মোট প্রস্থচ্ছেদ।
- প্রাথমিক গতিরেখা থেকে বিচ্ছুরক ভারী কণার লম্ব দূরত্বকে বলা হয় সংঘাত প্রচল এবং সংঘাত প্রচলের সঙ্গে প্রস্থচ্ছেদের একটি সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা করা হয়েছে।
- দুটি বিশেষ ক্ষেত্রে বিচ্ছুরণের বিস্তৃত আলোচনা করা হয়েছে :

  (i) যখন দুটি আন্তঃক্রিয়াশীল কণাই কঠিন গোলক,

  (ii) যখন দুটি কণার ভিতরে একটি দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক বিকর্ষণ ক্রিয়াশীল। ঐতিহাসিক দিক দিয়ে এই সমস্যাটির গাণিতিক ও পরীক্ষামূলক আলোচনা করেছিলেন রাদারফোর্ড। এজন্য এই বিচ্ছুরণকে বলা হয় রাদারফোর্ড বিচ্ছুরণ।

8.6 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. যখন প্যারাফিনের ওপর আপতিত নিউট্রন কণার তীব্রতা $10^{11}\mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$, তখন প্যারাফিনের মধ্য দিয়ে নিউট্রনগুলি গেলে $60°$ কোণে অবকল বিক্ষেপণ প্রস্থচ্ছেদ হয় $3\times10^{-26}\mathrm{m}^2\mathrm{sr}^{-1}$। যখন (i) একটিমাত্র প্যারাফিন অণু এবং (ii) 10^{20} প্যারাফিন অণু দ্বারা নিউট্রন কণাগুলি $10^{-3}\mathrm{Sr}$ ঘন কোণে বিক্ষিপ্ত হয়, তখন একক সময়ে বিক্ষিপ্ত কণার সংখ্যা নির্ণয় করুন।
2. গাইগার ও মার্সডেনের পরীক্ষায় α -কণার গতিশক্তি K_α, $7.68\mathrm{MeV}$; সোনার $(z = 79)$ কেন্দ্রকের কত ন্যূনতম দূরত্বে (Distance of closest approach) α কণা আসতে পারে? এর থেকে সোনার কেন্দ্রকের ব্যাসার্ধ সম্পর্কে কি ধারণা হয়?

8.7 উত্তরমালা

অনুশীলনী — 1

1. এখানে অবতল প্রস্থচ্ছেদ বিচ্ছুরণ কোণ নিরপেক্ষ এবং

$$\sigma = \frac{(R_1+R_2)^2}{4} \simeq \frac{R_2{}^2}{4} \simeq \frac{\left(3\times10^{-15}\right)^2}{4}\mathrm{m}^2\mathrm{sr}^{-1}$$

$$\simeq 2\cdot2\times10^{-30}\mathrm{m}^2\mathrm{sr}^{-1}$$

এবং মোট প্রস্থচ্ছেদ

$$\sigma_T = \pi R_2^2 = 2\cdot 8\times 10^{-29}\,m^2$$

এবং সমীকরণ (8.13) থেকে

$$b = R_2 \cos\left(\frac{60}{2}\right)^{\circ} = 3\times 10^{-15}\times 0\cdot 87m$$

$$= 2\cdot 6\times 10^{-15}m$$

সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. (i) সমীকরণ (8.1) এবং (8.2) ব্যবহার করে পাওয়া যায়,

$$dn_1 = \sigma I d\Omega = \left(3\times 10^{-26}\,m^2 sr^{-1}\right)\left(10^{11}\,m^{-2}s^{-1}\right)\left(10^{-3}sr\right)$$

$$= 3\times 10^{-18}s^{-1}$$

(ii) প্রতিটি প্যারাফিন কণার জন্য বিচ্ছুরিত কণার সংখ্যা dn_1, অতএব এক্ষেত্রে বিচ্ছুরিত কণার সংখ্যা dn_2 হলে

$$dn_2 = 3\times 10^{-18}s^{-1}\times \text{ প্যারাফিন কণার সংখ্যা}$$

$$= 3\times 10^{-18}s^{-1}\times 10^{20}$$

$$= 3\times 10^{2}s^{-1}$$

2. $D = \text{ন্যূনতম দূরত্ব} = \dfrac{2Ze^2}{4\pi \in_0 K_\alpha}$

$$= \frac{2\times 79\times\left(1\cdot 6\times 10^{-19}\right)^2}{4\times 3\cdot 14\times\left(8\cdot 85\times 10^{-12}\right)\times\left(7\cdot 68\times 1\cdot 6\times 10^{-13}j\right)}$$

$$= 2\cdot 96\times 10^{-14}m$$

সোনার কেন্দ্রকের $10^{-14}m$ - এর মত বা তারও কম ব্যাসার্ধ হবে।

EPH - 02

BLOCK - 2

একক 9 □ মহাকর্ষ ও অভিকর্ষ

গঠন

9.1 প্রস্তাবনা

বিজ্ঞান ও প্রযুক্তির ভিত্তিমূলক পাঠক্রমে আপনি পড়েছেন কীভাবে গ্রহনক্ষত্রের. গতিবিধি অতি প্রাচীন যুগ থেকেই বিজ্ঞানীদের মনোযোগ আকর্ষণ করেছে। গ্যাললিওর পর্যবেক্ষণ ও বিশ্লেষণ এবং টাইকো ব্রাহের সংগৃহীত উপাত্তের উপর ভিত্তি করে কেপলার কতকগুলি সূত্র নির্ধারণ করেন যেগুলি গতিবিধি নিয়ন্ত্রন করে। কেপলার সঠিকভাবেই এই সিদ্ধান্তে উপনীত হয়েছিলেন যে গ্রহগুলির উপর কোনও একটি বল কাজ করে বলেই সেগুলি উপবৃত্তকার পথে সূর্যকে প্রদক্ষিণ করে এবং সূর্য থাকে ঐ উপবৃত্তের একটি ফোকাসে। বলটি ঠিক কী ধরনের সে সম্বন্ধে কেপলার কোন ধারণা দিতে পারেন নি।

অন্যদিকে প্রতিটি বস্তুর উপর পৃথিবীর আকর্ষণও বিজ্ঞানীদের দৃষ্টি এড়ায় নি। পতনশীল বস্তুর উপর পরীক্ষানিরীক্ষা করে গ্যালিলিও পতনশীল বস্তুর কয়েকটি নিয়মও আবিস্কার করেছিলেন। কিন্তু সূর্য ও গ্রহদের মধ্যে পারস্পরিক আকর্ষন এবং পৃথিবীর আকর্ষণ বা অভিকর্ষের মধ্যে সংযোগ স্থাপন করে যিনি সর্বব্যাপী মহাকর্ষের সূত্র আবিস্কার করেছিলেন তিনি হলেন স্যার আইজ্যাক নিউটন। এই এককে আমরা অবশ্য অভিকর্ষ ও মহাকর্ষের আবিস্কারের সেই রোমাঞ্চকর ইতিহাসের পর্যালোচনা করব না। বরং এখানে আপনি নিউটনের আবিস্কৃত কেপলার সূত্রের গাণিতিক প্রেক্ষাপট এবং বিশ্বজনীন মহাকর্ষ সূত্রের বিবিধ প্রয়োগের সঙ্গে পরিচিত হবেন।

এই প্রসঙ্গে আর একটি বিষয়ের উল্লেখ প্রয়োজন। বিজ্ঞানীরা মনে করেন বিশ্বে যে সব বল ক্রিয়া করে সেগুলিকে তিনটি মূল শ্রেণীতে বিভক্ত করা যায়। এর প্রথম শ্রেণীটি হল মহাকর্ষ এবং অন্য দুটি হল তড়িৎচুম্বকীয় ক্ষীণ (electro-weak) এবং প্রবল (strong)। তিন শ্রেণীর বলের মধ্যে মহাকর্ষ দুর্বলতম হলেও নীহারিকা, তারকা, গ্রহ প্রভৃতি এই আকর্ষণী বলের প্রভাবেই সৃষ্টি হয়। আমাদের সৌরজগৎ, এক বা একাধিক উপগ্রহের পরিবার নিয়ে এক একটি গ্রহ এগুলির সৃষ্টি ও স্থায়িত্বের পিছনেও এই একই মহাকর্ষ কাজ করে। পদার্থবিদ্যার এমন গুরুত্বপূর্ণ একটি বিষয় সম্বন্ধে জানতে আপনি নিশ্চয়ই খুবই আগ্রহ বোধ করছেন।

উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়লে মহাকর্ষ ও অভিকর্য সম্বন্ধে আপনি সুস্পষ্ট একটি ধারণা লাভ করবেন। এর ফলে আপনি যে কাজগুলি করতে পারবেন সেগুলি হল ঃ

- নিউটনের মহাকর্ষসূত্রটি বিবৃত করতে পারবেন ও সেটি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- নিউটনের মহাকর্ষের সূত্রের সাহায্যে কেপলারের সূত্রগুলি প্রতিষ্ঠা করতে পারবেন।
- মহাকর্ষ সূত্র ও কেপলারের সূত্রগুলির সাহয্যে গাণিতিক প্রশ্নের সমাধান করতে পারবেন।
- মহাকর্ষসূত্রকে কেন বিশ্বজনীন বলা হয় তা বুঝিয়ে দিতে পারবেন।
- মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য, বিভব, সমবিভব তল কাকে বলে তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- বিন্দুভর, খোলক ও গোলকের জন্য বিভিন্ন বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব ও প্রাবল্যের রাশিমালা নির্ণয় করতে পারবেন।
- ভূপৃষ্ঠ, ভূপৃষ্ঠ থেকে উচ্চে, ভূ গর্ভে এবং বিভিন্ন অক্ষাংশে অভিকর্ষজ ত্বরণের রাশিমালা নির্ণয় করতে পারবেন এবং অভিকর্ষজ ত্বরণের আপাত পরিবর্তনের ব্যাখ্যা দিতে পারবেন।
- মুক্তিবেগ কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন এবং g -এর সঙ্গে এর সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন।
- মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের মান নির্ণয়ের জন্য যে সব পরীক্ষা করা হয়েছে তার মধ্যে কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ পরিক্ষার বর্ণনা দিতে পারবেন এবং সেগুলির উৎক্রর্ষের তুলনামূলক বিচার করতে পারবেন।
- অভিকর্ষজ ত্বরণের পরিমাপের একটি ব্যবহারিক প্রয়োগ — অভিকর্ষ জরিপ কী ও তা কোন্ কাজে লাগে তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

9.2 কেপলারের সূত্র

গ্রহগুলির গতিবিধির পর্যবেক্ষণ থেকে পাওয়া উপাত্তের উপর ভিত্তি করে কেপলার তিনটি সূত্র নির্ধারণ করেন। সেগুলি হল ঃ

প্রথমসূত্র ঃ প্রত্যেকটি গ্রহ সূর্যকে একটি ফোকাসে দেখে সূর্যের চারিদিকে উপবৃত্তাকার কক্ষ পথে ঘূর্ণায়মান।

দ্বিতীয় সূত্র ঃ সূর্য ও গ্রহের সংযোজক সরলরেখাটি সমান অবকাশে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করে অর্থাৎ একক সময়ে সরলখাটির দ্বারা অতিক্রান্ত ক্ষেত্রফল সর্বদাই সমান থাকে। ভাষান্তরে বলা যায় যে সূর্য ও গ্রহের সংযোজক রেখঅটির ক্ষেত্রফল গতিবেগ (areal velocity) একটি ধ্রুবক।

তৃতীয় সূত্র ঃ কোনও গ্রহের সূর্যকে একবার প্রদক্ষিণ করতে যে সময় লাগে তার বর্গ $(T)^2$ গ্রহটির কক্ষপথের অর্ধপরাক্ষের (a) ত্রিঘাতের সমানুপাতিক। অর্থাৎ $T^2 \alpha\, a^3$ যদি 9.1 চিত্রের উপবৃত্তটি একটি গ্রহের কক্ষপথ হয় তো ঐ উপবৃত্তের (ellipe) যে কোনও একটি ফোকাসে হবে সূর্যের অবস্থান।

দ্বিতীয়ত ঃ P ও S যদি যথাক্রমে গ্রহ ও সূর্যের অবস্থান বোঝায় তাহলে PS সংযোজক রেখাটি সমান সময়ের ব্যবধানে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করবে।

আবার ধরুন কোনও গ্রহের অবস্থান P থেকে উপবৃত্তকার পথে সূর্যকে প্রদক্ষিণ করে পুনরায় P তে ফিরে আসতে সময় লাগে T। উপবৃত্তটির একটি বৃত্ত কল্পনা করলে R যদি তার ব্যাসার্ধ হয় তাকেই বলে উপবৃত্তের গড় ব্যাসার্ধ। কেপলারের তৃতীয় সূত্রে অনুযায়ী $T^2 \alpha R^3$।

লক্ষ করুন, কেপলার কিন্তু গ্রহদের গতিবিধি নিয়ামক বলের প্রকৃতি ও পরিমাপ সম্বন্ধে কোনও আলোকপাত করতে পারেন নি। কেপলারের সূত্রগুলি প্রকাশিত হওয়ার পঞ্চাশ বছরেরও বেশী পরে বিশ্ববিখ্যাত বৈজ্ঞানিক আইজ্যাক নিউটন 1666 সালে গ্রহদের গতিবিধি নিয়ন্ত্রণকারী বলের প্রকৃতি ব্যাখ্যা করেন। এবার আমরা সেই মহাকর্ষ বলের প্রকৃতি ব্যাখ্যা করেন। এবার আমার সেই মহাকর্ষ বলের সম্বন্ধে আলোচনা করব।

9.3 নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র

নিউটনের মনে কিভাবে মহাকর্যের ধারণা জন্মাল সে কথা ভাবলে যথেষ্ট কৌতুহলের সৃষ্টি হয়। মনে হয় নিউটনের মনে দুটি আপাতদৃষ্টিতে পৃথক সমস্যা একযোগে উদিত হয়েছিল। এগুলি হল (ক) আলম্বিত নয় এমন যে কোন বস্তুর ভূপৃষ্ঠে পতন এবং অবাধে পতনশীল বস্তুর সূত্রাবলী, এবং (খ) গ্রহদের গতিবিধি সম্পর্কীয় কেপলারের সূত্রাবলী। তবে তখন জানা ছিল যে কোন বস্তু বৃত্তকার পথে পরিভ্রমণ করলে তার ওপর একটি কেন্দ্রাভিমুখী বল ক্রিয়াশীল হতে হবে। এই বলের মান হল $m\omega^2 r$ যেখানে $m =$ বস্তুটিভর, $\omega =$ ঘূর্ণায়মান বস্তুর কৌনিক গতিবেগ এবং গতিপথের ব্যাসার্ধ $= r$, যদি প্রদক্ষিণ কাল T হয় তাহলে কেন্দ্রভিমুখী বল $F = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$ কারন $\omega = \frac{2\pi}{T}$। আবার কেপলারের তৃতীয় সূত্র থেকে পাওয়া যায় আবার কেপলারের তৃতীয় সূত্র থেকে পাওয়া যায় $T^2 \alpha r^3$

যদি ধরা যায় $T^2 = kr^3$, তবে $F = \frac{m.4\pi^2.r}{kr^3} = \frac{4\pi^2 m}{k}.\frac{1}{r^2}$ অর্থাৎ

কেন্দ্রাভিমুখী বলটি দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক আর ঘূর্ণায়মান বস্তুর ভরের সমানুপাতিক।

এখন বৃত্তের কেন্দ্রে সূর্য এবং ঘূর্ণায়মান বস্তুটিকে গ্রহ ধরলে গ্রহদের গতিবিধি নিয়ামক বল সম্বন্ধে সামান্য ধরণা জন্মাতে পারে।

মনে হয় এই রকম কোনও যুক্তি বিচারের ওপর ভিত্তি করে নিউটনের মহাকর্ষ সূত্রের ধারণা মনে উদয় হয়। সূত্রটি হল ঃ

এই মহাবিশ্বে যে কোনও দুটি বস্তু কণা পরস্পকে আকর্ষণ করে। এই আকর্ষণ বলের মান বস্তুকণা দুটির ভরের গুণফলের সমানপাতিক ও তাদের মধ্যে দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক। এই বল বস্তুদুটির

সংযোগজক রেখা বারবার ক্রিয়াশীল। এই বলের মান F ও ভরদুটির মান m_1 ও m_2 এবং পারস্পারিক দূরত্ব r হলে $F \alpha\, m_1 m_2$

এবং $\alpha \dfrac{1}{r^2}$

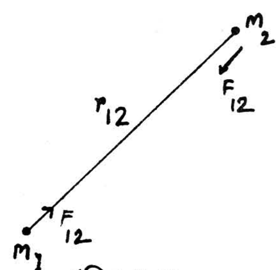
সুতরাং $F = \dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$ (9.1)

যেখানে G একটি ধ্রুবক। G কে মহাকর্ষীয় ধ্রুবক (Gravitational constant) বলা হয়। আন্তজার্তিক এককে G এর মান $6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$। অর্থাৎ 1 kg ভরের দুটি বস্তুকণা যদি 1m দূরত্বে থাকে তবে তারা পরস্পরকে $6.673 \times 10^{-11} N$ বলে আকর্ষণ করবে। বল একটি ভেক্টর রাশি সুতরাং বলের অভিমুখ জানা প্রয়োজন।

9.1 সমীকরণটি ভেক্টরে প্রকাশ করলে আমরা পাই

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{12} \qquad (9.2)$$

যেখানে r_{12} হল m_1 থেকে m_2 বস্তুকণাটির দূরত্ব আর $\vec{F}_{12}$ হল মহকর্ষ বল যার দ্বারা m_1 বস্তু কণাটি m_2 বস্তুকণাটিকে নিজের দিকে আকর্ষণ করছে। $\hat{r}_{12}$ হল m_1 থেকে m_2 এর দিকে একক ভেক্টর সমীকরণটিতে ঋণাত্বক চিহ্নের তাৎপর্য এই যে m_2 বস্তু কণাটির ওপরে m_1 বস্তু কণাটি যে বল প্রয়োগ করছে তা $\hat{r}_{12}$ ভেক্টরের বিপরীতমুখী কারণ এটি একটি আকর্ষণী বল (চিত্র 9.1)। এই বল সর্বদাই m_1 বস্তুকণা অভিমুখী আপনি আগেই জেনেছেন এজাতীয় বলকে কেন্দ্রীয় বল বলা হয়।



(চিত্র 9.1)

অনুরূপ ভাবে m_1 বস্তুকণাটিতে m_2 এর দিকে $\vec{F}_{21}$ বল দ্বারা আকৃষ্ট হচ্ছে এবং তার অভিমুখ হবে $\vec{r}_{12}$ এর দিকে। সুতরাং (9.2) সমীকরণকে নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র মেনে এইভাবেও লেখা যেতে পারে

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \qquad (9.3)$$

এ পর্যন্ত আমরা আকর্ষণকারী বস্তুগুলিকে কণাবস্তু হিসেবে গণ্য করেছি। বিস্তৃত বস্তুর ক্ষেত্রে তাদের অর্ন্তভুক্ত বস্তুকণাগুলির মধ্যে পারস্পারিক আকর্ষণী বলকে সমগ্র বস্তুর জন্য সমাকলন করে দুইটি বস্তুর মধ্যে মোট আকর্ষনী বল নির্ণয় করতে হয়। পরে কয়েকটি সরল ক্ষেত্রের জন্য আমরা এই বলের গণনা করব। তাবে দুইটি বস্তুর মধ্যে দূরত্বের তুলনায় বস্তুদ্বয়ের বিস্তৃত বা পরিমাপ যদি নগণ্য হয় তবে সেগুলিকে তাদের নিজ নিজ ভরকেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত বস্তুকণা বলে কল্পনা করা যায়। একটি উদাহরণ দেওয়া যাক। সূর্যের ব্যাস প্রায় $1\cdot4\times10^6\,km$ এবং পৃথিবীর ব্যাস প্রায় $1\cdot275\times10^4\,km$ । সূর্য ও পৃথিবীর মধ্যে দূরত্ব $1\cdot5\alpha10^8\,km$, যার তুলনায় সূর্য বা পৃথিবীর ব্যাস অতি ক্ষুদ্র। সুতরাং সূর্য ও পৃথিবীর মধ্যে আকর্ষণী বলের গণনায় দুটিকেই তাদের ভরকেন্দ্রে অবস্থিত বিন্দুভর বলে কল্পনা করা যায়। নিউটনের মহাকর্ষ সূত্রটি যে নিখুঁত বৈজ্ঞানিক যুক্তির ভিত্তিতে নির্নীত হয়েছে তা কিন্তু নয়। বিশেষ করে আকর্ষনী বল দুটি বস্তুর ভরের গুণফলের সমানুপাতিক কেন তার অনুকূলে কোনও যুক্তি প্রদর্শিত হয় নি। কিন্তু গুরুত্বপূর্ণ বিষয়টি হল এই যে নিউটনের মহাকর্ষসূত্রকে সত্য ধরে ইউরেনাস ও নেপচুন গ্রহের দুটির গতিবিধি সংক্রান্ত তথ্য ব্যাখ্যা করা গেছে। বিশেষ করে ধূমকেতুর পুনরাবির্ভাবের পর্যায়কাল নিউটনের মহাকর্ষ সূত্রের ভিত্তিতে প্রায় নিখুঁত ভাবে নির্ণয় করা গেছে। গ্রহদের ক্ষেত্রে প্রত্যাশিত গতিবিধি থেকে যে সামান্য বিচ্যুতি লক্ষ্য করা গিয়েছিল তা পরবর্তীকালে আইনষ্টানের আপেক্ষিকতাবাদের ভিত্তিতে ব্যাখ্যা করা সম্ভব হয়েছে।

9.3.1 নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র থেকে কেপলারের সূত্রগুলির প্রতিষ্ঠা

নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র থেকে মহাকর্ষীয় বলের দুটি প্রধান ধর্ম চিহ্নিত করা যায়। এগুলি হল (ক) মবহাকর্ষীয় বল একটি কেন্দ্রীয় আকর্ষণী বল এবং (খ) মহাকর্ষীয় বল যে বস্তুর উপর সেটি ক্রিয়াশীল তার ভরের সমানুপাতী। এখন আমরা একটি সমতলীয় পোলার নির্দেশতন্ত্র কল্পনা করব যার কেন্দ্রে আছে M ভরের সূর্য। ধরা যাক m ভরের একটি গ্রহের স্থানাঙ্ক এই নির্দেশতন্ত্রে (r, θ)। আমাদের জানা আছে, গ্রহটির ব্যাসার্ধ বরাবর (radial) ও ব্যাসার্ধের লম্ববরাবর (cross-radial) ত্বরণ যথাক্রমে

$$f_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

ও $$f_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

গ্রহের উপর মহাকর্ষীয় বল 9.2 সূত্র অনুযায়ী ব্যাসার্ধ বারবর $F_r = -\frac{GMm}{r^2}$ এবং ব্যাসার্ধের লম্ব

বরাবর (F_θ) শূন্য। সুতরাং আপনি এখন সহজেই গ্রহের গতি সমীকরণগুলি লিখতে পারেন :

$$F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -\frac{GMm}{r^2}$$

বা $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\dfrac{k}{r^2}$ (যেখানে $k=GM$) (9.4)

$$F\theta = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = 0 \qquad (9.5)$$

9.5 সমীকরণটির দিকে আগে দৃষ্টি দেওয়া যাক। এটিকে r দিয়ে গুণ করে লেখা যায়

$$m\left(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}\right) = 0$$

বা $\dfrac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0$

এটিকে সমাকলন করে পাওয়া যায় $mr^2\dot{\theta} =$ ধ্রুবক।

যেহেতু m একটি ধ্রুবক লেখা যায় $r^2\dot{\theta} = h$ (ধ্রুবক) (9.6)

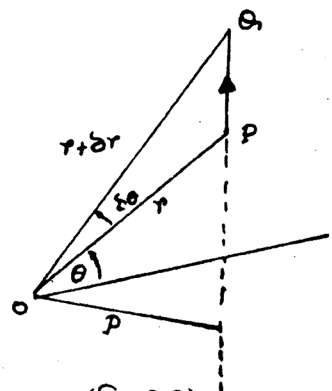
$r^2\dot{\theta}$ রাশিটি একটি গ্রহের ক্ষেত্রে সর্বদাই সমান থাকে। আপনি প্রশ্ন করতে পারেন, এই রাশিটির ভৌত তাৎপর্য কি?

ধরুন t সময়ে একটি গ্রহ $P(r,\theta)$ বিন্দুতে ছিল চিত্র 9.2 $t+\partial t$ সময়ে সেটি $Q(r+\delta r, \theta+\delta\theta)$ বিন্দুতে উপনীত হল। δt যদি অতি ক্ষুদ্র সময় হয় তবে PQ কে একটি সরলরেখা ধরা যায়, যার দৈর্ঘ্য δr।

ΔPOQ এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} OP.\ OQ.\ \sin \angle POQ$$

$$= \frac{1}{2} r(r+\delta r)\sin \delta\theta$$



(চিত্র 9.2)

সুতরাং P বিন্দুতে গ্রহটির ক্ষেত্রফল গতিবেগ ϑ_a

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{\Delta POQ}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{2} r(r+\delta r)\frac{\sin\delta\theta}{\delta t}$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{কেননা } r + \delta r \to r, \ \sin \delta\theta \to \delta\theta)$$

অথবা 9.6 সমীকরণ ব্যবহার করে $\vartheta_a = \frac{1}{2} h$ (9.7)

সুতরাং h ধ্রুবকটি আসলে গ্রহের ক্ষেত্রফল গতিবেগের দ্বিগুণ। এবং যেহেতু h একটি ধ্রুবক ক্ষেত্রফল গতিবেগও একটি ধ্রুবক, যা কেপলারের দ্বিতীয় সূত্র। লক্ষ্য করুন, এই সূত্রটি যে কোনও কেন্দ্রীয় বলের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য, ব্যাসার্ধ r এর উপর বলটি যে ভাবেই নির্ভর করুক না কেন। এখানে একটি প্রাসঙ্গিক বিষয়ের অবতারণা করা যাক। P বিন্দুতে গ্রহের বেগ

$$\vartheta = \underset{\partial t \to 0}{\ell t} \frac{\delta r}{\delta t} = \frac{dr}{dt}$$

সুতরাং O বিন্দুর সাপেক্ষে গ্রহের রৈখিক ভরবেগ $m\frac{dr}{dt}$ এবং কৌণিক ভরবেগ $L = pm\frac{dr}{dt}$, যেখানে P= গতিবেগরেখা PQ (বর্ধিত) এর উপর O বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য।

ΔOPQ এর ক্ষেত্রফল অন্যভাবেও নির্ণয় করা যায়। লক্ষ্য করুন ক্ষেত্রফল

$$\Delta OPQ = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot p\ l$$

সুতরাং গ্রহের ক্ষেত্রফল গতিবেগ

$$= \underset{\delta t \to 0}{\ell t} \frac{\Delta OPQ}{\delta t} = \frac{1}{2} p . \ell t \frac{PQ}{\delta t} = \frac{1}{2} p . \frac{dr}{dt}$$

যেহেতু এটি $\frac{1}{2} h$ এর সমান, $p . \frac{dr}{dt} = h$

অর্থাৎ কৌণিক ভরবেগ $L = p.m\frac{dr}{dt} = mh$ (9.8)

যেটি একটি ধ্রুবক। সুতরাং আপনি বুঝতেই পারছেন যে O বিন্দুর সাপেক্ষে গ্রহের কোণিক ভর বেগের কোন পরিবর্তন ঘটে না। অবশ্য এটি আমাদের প্রত্যাশিত। কেননা গ্রহটির উপর মহাকর্ষই একমাত্র কার্যকরী বল এবং এই বলের ক্রিয়ারেখা O বিন্দুর মধ্য দিয়ে যাওয়ায় O বিন্দুর সাপেক্ষে তার ভ্রামক শূণ্য। সুতরাং এই বল গ্রহের কৌণিক ভরবেগের কোন পরিবর্তনই ঘটাতে পারে না। এবার আমরা গ্রহের কক্ষপথের সমীকরণটি নির্ণয় করার চেষ্টা করব। আমরা যদি $\frac{1}{r} = u$ লিখি তবে 9.6 সমীকরণটি লেখা যাবে

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} = hu^2$$

সুতরাং $\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}.\frac{du}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}.hu^2$

$$= -h\frac{du}{d\theta}$$

এবং $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right) = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$

এখন আমরা 9.4 সমীকরণটিকে এভাবে লিখতে পারি

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u}\left(hu^2\right)^2 = -ku^2$$

বা $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{h^2}$ (9.9)

এখানে $\frac{k}{h^2}$ একটি ধ্রুবক। যদি $u' = u - \frac{k}{h^2}$ লেখা যায় তবে 9.9 সমীকরণটি দাঁড়ায়

$$\frac{d^2u'}{d\theta^2} + u' = 0$$

যার সমাধান আপনার আগেই জানা আছে। একটি সম্ভাব্য সমাধান হল

$$u' = a\cos\theta$$

বা $u' = \frac{k}{h^2} + a\cos\theta$

বা $r = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{k}{h^2} + a\cos\theta}$

সুবিধার জন্য আমরা সমাধানটি এইভাবে লিখে থাকি ঃ

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos\theta} \tag{9.10}$$

যেখানে $\frac{h^2}{k}$ এর স্থলে ℓ এবং $\frac{ah^2}{k}$ এর স্থলে e লেখা হয়েছে। 9.10 সমীকরণটি একটি কনিক সেকশনের (conic section) এর সমীকরণ। এই সমীকরণে ℓ অর্ধ (semi latus rectum) এবং e= উৎকেন্দ্রিকতা (eccentricity)। গ্রহের ক্ষেত্রে 'e' এর মান 1 অপেক্ষা কম এবং সেক্ষেত্রে 9.10 সমীকরণটি উপবৃত্তের সমীকরণে পরিণত হয়। এর দ্বারা আমরা **কেপলারের প্রথম সূত্রটি** প্রতিপন্ন করলাম।

এবার দেখা যাক আমরা কীভাবে কেপলারের তৃতীয় সূত্র অর্থাৎ কক্ষের অর্ধপরাক্ষের সঙ্গে গ্রহের কক্ষপথে গতির পর্যাকালের সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা করতে পারি। আমরা জানি উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল πab। যেখানে a ও b যথাক্রমে অর্ধপরক্ষ (semi major axis) ও অর্ধউপাক্ষ (semi minor axis)। এই ক্ষেত্রফলকে গ্রহের ক্ষেত্রফল গতিবেগ ϑ_a দিয়ে ভাগ করলেই পর্যায়কাল T পাওয়া যাবে।

সুতরাং পর্যায়কাল $T = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}h}$

কিন্তু $h = \sqrt{k\ell}$ এবং উপবৃত্তের ধর্ম অনুযায়ী $\ell = \frac{b^2}{a}$ সুতরাং

$$T = \frac{2\pi ab}{\sqrt{k\ell}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}\frac{ab}{b/\sqrt{a}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}a^{3/2}$$

বা $T^2 = \frac{4\pi^2}{k}a^3$ ।

যেহেতু $k(=GM)$ একটি ধ্রুবক, $T^2 \alpha\, a^3$। এটিই কেপলারের তৃতীয় সূত্র।

9.3.2 নিউটনের মহাকর্ষ সূত্রের বিশ্বজনীনতা

বিশ্বের যে কোন স্থানে দুটি বস্তুকণা পরস্পরকে আকর্ষণ করে এটি বস্তুদুটির প্রকৃতি, ধর্ম, উষ্ণতা, আকৃতি বা অর্ন্তবতী মাধ্যমের উপর নির্ভর করে না। শুধু সৌরজগতে নয়, বিশ্ব ব্রহ্মাণ্ডের সর্বত্রই এই সূত্র প্রযোজ্য হতে দেখা যায়। সেই দিক থেকে বিচার করলে নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র বিশ্বজনীন তবে মনে রাখতে হবে যে আপেক্ষিক তত্ত্ব অনুযায়ী বস্তুর ভর তার বেগের উপর নির্ভরশীল। তাই দুটি বস্তুর মধ্যে দূরত্ব এক থাকলেও তাদের মধ্যে আকর্ষণ বল বস্তুদুটির গতীয় অবস্থার ওপর নির্ভর করবে।

আপনি হয়ত জানেন যে আলো কোন সময় তরঙ্গের মত আবার কোন সময় কণিকার মত আচরণ করে। একটি আলোক কণিকার শক্তি যদি E হয় তবে সেটির ভর হয় E/c^2, যেখানে C = শূণ্যে আলোকের বেগ। এই ভর থাকার ফলে আলো যখন খুব ভারী কোন বস্তুর কাছ দিয়ে যায় তখন ঐ বস্তুর মহাকর্ষীয় আকর্ষণের ফলে আলোক কণিকার গতিপথ বেঁকে যায়। তারকা থেকে আসা আলো সূর্যের পাশ দিয়ে আসার সময় তার গতিপথ সরলরেখা থেকে বিচ্যুত হতে দেখা গেছে। এর ফলে তারকাটি তার প্রকৃত অবস্থান থেকে সামান্য সরে গেছে বলে মনে হয়।

9.4 অভিকর্ষজ ত্বরণ g ও মহাকর্ষীয় ধ্রুবক (G) এর সম্পর্ক ঃ

ধরুণ, m ভর বিশিষ্ট একটি বস্তুর ওজন mg (g = অভিকর্ষজ ত্বরণ)। ওজনের সংজ্ঞা অনুযায়ী ঐ বল বস্তু ও পৃথিবীর মধ্যে আকর্ষণ বলের সমান। পৃথিবীর ভর M যদি পৃথিবীর কেন্দ্র বিন্দুতে অবস্থিত বিন্দুভর বলে কল্পনা করা যায় তবে ঐ বলের মান $\frac{GMm}{R^2}$ যেখানে G মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, R পৃথিবীর ব্যাসার্ধ।

$$\therefore mg = \frac{GMm}{R^2}$$

$$g = \frac{GM}{R^2} \tag{9.11}$$

এটিই হল g ও G র মধ্যে সম্পর্ক। 9.7 অনুচ্ছেদে এ রিষয়ে বিশদ আলোচনা করা হবে। আগের অনুচ্ছেদগুলিতে যে আলোচনা করা হয়েছে তার উপর ভিত্তি করে নীচের অনুশীলনীটির উত্তর আপনি সহজেই দিতে পারবেন।

অনুশীলন — 1

(i) ধরা যাক পৃথিবী সূর্যকে 1.5×10^8 কিলোমিটার ব্যাসার্ধের বৃত্তকার কক্ষপথে $365\frac{1}{4}$ দিনে একবার প্রদক্ষিণ করছে। সূর্যের ভর নির্ণয় করুন। দেওয়া আছে $G = 6.67 \times 10^{11} m^3 kg^{-1} s^2$

(ii) একটি গ্রহের ভর ও ব্যাস পৃথিবীর ভর ও ব্যাস দ্বিগুণ। ভূপৃষ্ঠে যে সরল দোলকটির দোলনকাল ২ সেকেন্ড, ঐ গ্রহে সেই দোলকের দোলনকাল কত হবে?

9.5 মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য (intensity)

আপনি আগেই পড়েছেন, দুটি ভরের মধ্যে মহাকর্ষীয় বল তাদের মধ্যে দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতী। সুতরাং কোন একটি ভরের মহাকর্ষীয় আকর্ষণ দূরত্বের সঙ্গে ক্রমশ ক্ষীণ হলেও তা কখনই শূণ্য হয়ে যায়

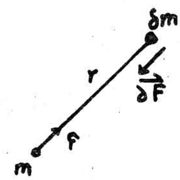
না। মহাকর্ষীয় বলের ক্ষেত্র অর্থাৎ যে অঞ্চলে মহাকর্ষীয় বল অনুভব করা যায় তা অসীম দূরত্ব পর্যন্ত বিস্তৃত। এ জাতীয় বলকে আমরা দূরপাল্লার বল (long-range force) বলি।

মহাকর্ষীয় বলের ক্ষেত্রে যদি একটি অত্যন্ত ক্ষুদ্র ভর δm রাখা যায় (চিত্র 9.3) এবং এই ভরটির উপর ক্রিয়াশীল মহাকর্ষীয় বল যদি $\delta\vec{F}$ হয় তবে ঐ ভরটি যে বিন্দুতে রয়েছে সেখানে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য

$$\vec{E} = \underset{\delta m \to 0}{\ell t}\, \frac{\delta \vec{F}}{\delta m}$$

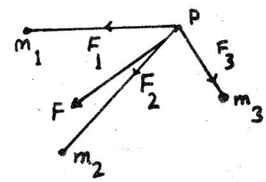
δm ভরটি যদি m ভরের একটি বস্তুকণার মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে রাখা **থাকে,** তবে 9.2 সমীকরণ থেকে সহজেই লেখা যায় সেটির উপর বল $\delta\vec{F} = -G\dfrac{m\delta m}{r^2}.\hat{r}$

সুতরাং $\hat{E} = -G\dfrac{m}{r^2}\hat{r}$ (9.12)



(চিত্র 9.3)

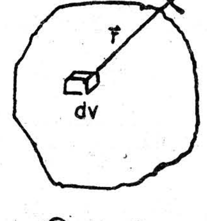
মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য উপরিপাতনের নীতি পালন করে। যদি কোন বিন্দু P তে m_1, m_2 ও m_3 ভরের তিনটি বস্তুকণার জন্য মহাকর্ষীয় প্রাবল্য যথাক্রমে $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ও $\vec{F}_3$ হয় তবে ঐ বিন্দুতে মোট প্রাবল্য হবে $\vec{F}_l = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, (চিত্র 9.4) অর্থাৎ একক প্রাবল্যগুলির ভেক্টর যোগফল। মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রটি যদি কিছুসংখ্যক বস্তুকণার পরিবর্তে বিস্তৃত কোন ভরের জন্য হয় তাহলে অবশ্য আপনাকে মোট প্রাবল্যের মান ও দিক সমাকলনের সাহায্যে নির্ণয় করতে হবে।



(চিত্র 9.4)

ধরুন বিস্তৃত ভরের কোন একটি বিন্দুতে ঘনত্ব ρ। ঐ বিন্দুতে অতি ক্ষুদ্র আয়তন dv এর ভর তাহলে ρdv (চিত্র 9.5) P বিন্দুর দূরত্ব যদি dv থেকে $\vec{r}$ ভেক্টর দিয়ে নির্দেশিত হয় তবে ঐ ρdv ভরের জন্য P বিন্দুতে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র হবে $d\vec{E} = -G\dfrac{\rho dv}{r^2}\hat{r}$। সমগ্র বস্তুটির জন্য মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র নির্ণয় করতে হলে বস্তুটির আয়তনের উপর সমাকলন করতে হবে। তখন আপনি পাবেন

$$\vec{E} = -G\int \frac{\rho dv}{r^2}\hat{r} \qquad (9.13)$$



(চিত্র 9.5)

dv আয়তনের বিভিন্ন অবস্থানের জন্য r এবং $\hat{r}$ এর মান বা দিক ভিন্ন হবে। তাই সাধারণভাবে এই সমাকলনটির মান নির্ণয় করা সহজ নয়। তবে কিছু বিশেষ ক্ষেত্রে মহাকর্ষীয় বিভবের ধারণা থেকে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য

সহজেই নির্ণয় করা যায়। এখন দেখা যাক মহাকর্ষীয় বিভব কী।

9.5.1 মহাকর্ষীয় বিভব ও বিভব বৈষম্য

অতিক্ষুদ্র ভরের কোন বস্তুকে অসীম দূরত্ব থেকে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে আনতে একক ভরপিছু মোট যে পরিমাণ কার্য করতে হয় তাকে ঐ বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব বলে। এক্ষেত্রে যেহেতু পারস্পরিক আকর্ষণ বলই কাজ করে এবং বাইরের কোন সংস্থা কার্য করে না তাই কৃত কার্য সর্বদাই ঋণাত্মক হয়। ধরা যাক ∂m ভরের কোন বস্তুকে অসীম দূরত্ব থেকে নির্দিষ্ট একটি বিন্দুতে আনতে মহাকর্ষীয় বলের বিরুদ্ধে ∂w কার্য করতে হয়। সেক্ষেত্রে ঐ বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব $\frac{\partial w}{\partial m}$।

মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে দুটি বিন্দুর মধ্যে বিভব বৈষম্য হল কোন বস্তুকে একটি বিন্দু থেকে আরেকটি বিন্দুতে বহন করে নিয়ে যেতে তার একক ভর পিছু যে পরিমাণ কার্য করতে হয়। সরণ যদি আকর্ষণ বলের অভিমুখে হয় তবে বিভব বৈষম্য ঋণাত্মক এবং সরণ আকর্ষণ বলের বিরুদ্ধে হলে বিভব বৈষম্য ধনাত্মক হবে।

9.5.2 সমবিভব তল

মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে সমবিভব সম্পন্ন বিন্দু গুলিকে সংযোগ করে যে তলটি পাওয়া যায় তাকে সমবিভব তল বলে অর্থাৎ সমবিভব সম্পন্ন বিন্দুর সঞ্চারতলই হল সমবিভব তল। সহজেই বোঝা যায়, একটি সমবিভব তলের এক বিন্দু থেকে অন্য একটি বিন্দুতে একটি ভরকে নিয়ে যেতে কোন কার্য করা হয় না। মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য সর্বদাই সমবিভব তলের লম্ব অভিমুখী হয়, যার ফলে সমবিভব তলের কোন বিন্দুতে ঐ তলের স্পর্শক অভিমুখে প্রাবল্যের কোন উপাংশই থাকে না।

9.5.3 প্রাবল্য ও বিভবের মধ্যে সম্পর্ক

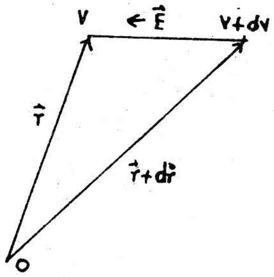
মহাকর্ষীয় বিভব সম্বন্ধে ইতিমধ্যেই আপনার কিছুটা ধারণা হয়েছে। ধরে নিন, দুটি সন্নিহিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক ভেক্টর $\vec{r}$ ও $\vec{r}+d\vec{r}$ এবং এই দুই বিন্দুতে বিভব যথাক্রমে V ও $V+dV$। আপনি যদি ∂m ভরের একটি বস্তুকে প্রথম বিন্দু থেকে দ্বিতীয় বিন্দুতে নিয়ে যেতে চান তবে আপনাকে $-\partial m.\vec{E}$ বল প্রয়োগ করতে হবে। এই বল $\vec{E}$ এর বিপরীতমুখী বলেই ঋণাত্মক চিহ্নটি ব্যবহার করতে হল। এই বল প্রয়োগ করে $d\vec{r}$ সরণ ঘটাতে আপনাকে $-\partial m\,\vec{E}.d\vec{r}$ পরিমাণ কার্য করতে হবে। এই কার্য বিভব পার্থক্যের সংজ্ঞা অনুযায়ী $\partial m.dr$ এর সমান।

কিন্তু $dv = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz$ (dx, dy ও dz $d\vec{r}$ এর উপাংশ)

$$= \Delta v.d\vec{r}$$

সুতরাং $-\partial m\, \vec{E}.d\vec{r} = \partial m dv = \delta m.\Delta v.d\vec{r}$

অর্থাৎ $\vec{E} = -\Delta v$ (9.14)



(চিত্র 9.6)

9.5.4 বিন্দুভরের জন্য মহাকর্ষীয় বিভব

ধরুন কোনবিন্দু O তে একটি M ভর বিশিষ্ট বিন্দু বস্তু আছে এবং সেটি থেকে r দূরত্বে p বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য E যার মান হল $-\frac{GM}{r^2}$।

যেহেতু এক্ষেত্রে বিভব v কেবলমাত্র বিন্দু বস্তু থেকে দূরত্বের উপর নির্ভরশীল, 9.14 সমীকরণটিকে লেখা যায়।

$$E = -\frac{dv}{dr}$$

সুতরাং $-\frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2}$ বা $v = \int_{\infty}^{r} \frac{GM}{r^2} = -\frac{GM}{r}$ (9.15)

9.15 সমীকরণ থেকে বোঝা যায় যে মহাকর্ষীয় বিভব সর্বদাই ঋণাত্মক। একমাত্র সমস্ত ভর থেকে অসীম দূরত্বেই এই বিভবের মান শূণ্য হতে পারে।

আগের অনুচ্ছেদে যা পড়লেন তার ওপর ভিত্তি করে এবার একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

অনুশীলনী — 2

নীচের উক্তিগুলির মধ্যে শূণ্যস্থানগুলি উপযুক্ত শব্দ বসিয়ে পূর্ণ করুন।

a) কোন বস্তু থেকে সসীম দূরত্বে মহাকর্ষীয় বিভব সর্বদাই ———— হয়।

b) দুইটি বিন্দু যদি একই মহাকর্ষীয় বিভবে থাকে তবে একটি ভরকে এক বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে নিয়ে যেতে ———— পরিমাণ কার্য করতে হবে।

c) সমবিভব তলের কোন একটি বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য ঐ তলের ———— অভিমুখে থাকে।

d) M ভরের একটি ক্ষুদ্র বস্তু থেকে x দূরত্বে মহাকর্ষীয় বিভবের মান ————।

9.6 বিশেষ ক্ষেত্রে বিভব ও প্রাবল্য নির্ণয়

মহাকর্ষীয় বিভব ও প্রাবল্য সম্বন্ধে আপনি যা জেনেছেন, তার ওপর ভিত্তি করে এখন আপনি বিশেষ কয়েকটি ক্ষেত্রে মহাকর্ষীয় বিভব ও প্রাবল্য নির্ণয় করতে পারবেন। এখানে আমরা সমসত্ত্ব খোলক ও গোলকের জন্য মহাকর্ষীয় বিভব নির্ণয় করে বিভবের রাশিমালাটির অবকলনের দ্বারা প্রাবল্য নির্ণয় করব। আপনি লক্ষ্য করবেন যে এই পদ্ধতি অপেক্ষাকৃত সরল। আমাদের পৃথিবী অনেকগুলি সমসত্ব খোলকের সমষ্টি এবং পৃথিবী, চন্দ্র, সূর্য প্রভৃতিকে নিরেট গোলক হিসাবে কল্পনা করা যায়। সুতরাং এই গণনাগুলি গ্রহাদির মহাকর্ষীয় প্রাবল্য নির্ণয় করতেও আপনার কাজে লাগবে।

9.6.1 একটি পাতলা খোলকের দরুন কোন বিন্দুতে বিভব ও প্রাবল্য

এখন আমরা M এর ও a ব্যাসার্ধের একটি গোলাকৃতি খোলকের বাইরে ও ভিতরে মহাকর্ষীয় বিভব ও প্রাবল্যের মান নির্ণয় করব।

(i) যখন বিন্দুটি খোলকের বাইরে ঃ

ধরা যাক খোলকটির O বিন্দুতে এবং কেন্দ্র থেকে r দুরত্বে অবস্থিত p বিন্দুতে বিভব ও প্রাবল্য নির্ণয় করতে হবে। OP রেখার লম্বভাবে খুবই কাছাকাছি দুটি সমতল CD ও EF কল্পনা করুন (চিত্র 9.7)। এই দুটি তলের মধ্যবর্তী বলয়াকৃতি ছেদিতাংশটির ব্যাসার্ধ EK এবং প্রস্থ CE। OC ও OE যুক্ত করা হল। মনে করি $\angle EOP = \theta$ এবং ক্ষুদ্র কোণ $\angle COE = d\theta$। লক্ষ্য করুন, বলয়টির প্রস্থ $CE = ad\theta$ এবং ব্যাসার্ধ $EK = a\sin\theta$ বলয়ের পরিধি $= 2\pi a\sin\theta$,

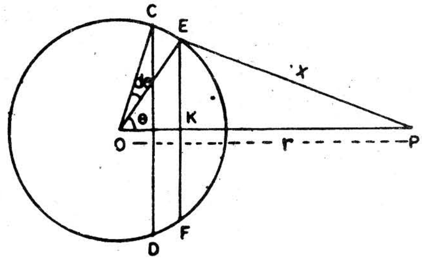
ক্ষেত্রফল $= 2\pi a\sin\theta.\ ad\theta$,

ও ভর $= 2\pi a^2 \sin\theta d\theta\rho$

যেখানে খোলকটির তলমাত্রিক ঘনত্ব অর্থাৎ একক ক্ষেত্রফলের ভর হল ρ। যেহেতু বলয়টি খুবই সরু তার প্রতিটি বিন্দু P বিন্দুথেকে সমদূরবর্তী হবে। ধরুন এই দূরত্ব PE = x।

$\therefore$ বলয়টির জন্য P বিন্দুতে বিভব

$= dv = -G\dfrac{2\pi a^2\rho\sin\theta d\theta}{x}$ এখন ত্রিভুজ EOP থেকে পাওয়া যায় যে



(চিত্র 9.7)

$$x^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta$$

উভয় দিক কে অবকলন করে পাই

$$2xdx = 2ar\sin\theta d\theta$$

$\therefore$ বা $\sin\theta d\theta = \dfrac{xdx}{ar}$

সুতরাং $dv = -G\dfrac{2\pi a^2\rho}{x}.\dfrac{xdx}{ar} = -G.\dfrac{2\pi a\rho}{r}dx$ (9.16)

9.16 এর উভয় দিককে সমগ্র খোলকটির জন্য সমাকলন করে আপনি পাবেন

$$V = \frac{-2\pi a\rho G}{r}\int_{r-a}^{r+a}dx = \frac{-2\pi a\rho G}{r}2a$$

$= -\dfrac{4\pi a^2\rho G}{r} = -\dfrac{Gm}{r}$ কারণ $M = 4\pi a^2\rho$ (9.17a)

আবার খোলকটির জন্য P বিন্দুতে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য

$$E = \frac{-dv}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GM}{r}\right) = \frac{GM}{r^2} \tag{9.17b}$$

(ii) যখন P বিন্দুটি খোলকের পৃষ্ঠে অবস্থিত

সমাকলনের সীমা পরিবর্তন খোলকের পৃষ্ঠে বিভব কি হবে তা পাওয়া যায় সীমাটি হবে x=0 থেকে x=2a

$\therefore$ বিভব $= V = -\dfrac{2\pi a\rho G}{r}\displaystyle\int_{o}^{2a}dx$

$= -\dfrac{2\pi a\rho G}{r}.2a = -\dfrac{-4\pi\rho a^2G}{r} = -\dfrac{GM}{a}$ কারণ $r = a$ (9.18a)

এবং প্রাবল্য $E = -\dfrac{dv}{dr} = -\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{-GM}{r}\right) = \dfrac{GM}{r^2}$

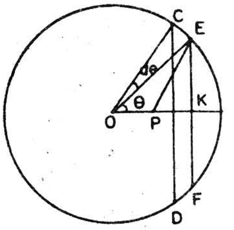
$= \dfrac{GM}{a^2}$ কারণ $r = a$ (9.18b)

(iii) যখন P বিন্দুটি খোলকের অভ্যন্তরে

এখন বিন্দুটির সর্বনিম্ন দূরত্ব $(a - r)$ এব সর্বোচ্চ দূরত্ব $(a + r)$ এই সীমাদ্বয়ের মধ্যে সমাকলন

করে P বিন্দুতে বিভব নির্ণয় করা যাবে (চিত্র 9.8)। P বিন্দুতে মোট বিভব $= \int_{a-r}^{a+r} \frac{-2\pi a\rho G}{r} dx$

$$= -G.\frac{2\pi a\rho G}{r}.2r = \frac{-G\,4\pi a^2 \rho}{a}$$

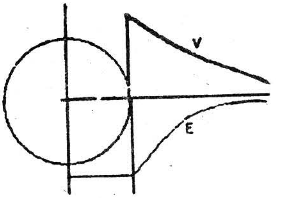


(চিত্র 9.8)

বা $V = \frac{-GM}{a}$ (9.19a)

কারণ $M = 4\Pi a^2 \rho$

লক্ষ্য করুন এক্ষেত্রে V= ধ্রুবক অর্থাৎ খোলকের অভ্যন্তরে প্রত্যেক বিন্দুতেই বিভব সমান।



(চিত্র 9.9)

$\therefore$ প্রাবল্য $E = -\frac{dv}{dr} = -\frac{d}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{GM}{a^2}\right) = 0$ (9.19b)

অর্থাৎ খোলকের অভ্যন্তরে প্রত্যেক বিন্দুতেই প্রাবল্য শূণ্য।

এবার উপরের তিনটি ক্ষেত্রে আমরা যে ফল পেলাম তার মমার্থ। ভেবে দেখতে পারেন। খোলকের বাইরে বা তার তলের উপরে মহাকর্ষীয় বিভব বা প্রাবল্যের মান খোলকটির সমগ্র ভর তার কেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত থাকলে যা হত, তার সমান। কিন্তু খোলকটির ভিতরে সর্বত্রই বিভবের মান তার তলের উপরে যে মান পাওয়া গেছে তার সমান। এর কারণ খোলকটির অভ্যন্তরে কোন প্রাবল্য থাকে না।
9.9 চিত্রে খোলকের মধ্যে ও বাইরে মহাকর্ষীয় বিভব ও প্রবল্যের পরিবর্তন কীভাবে হয় তা লেখচিত্রে দেখানো হল।

9.6.2 একটি নিরেট সমসত্ব গোলকের জন্য কোন বিন্দুতে বিভব ও প্রাবল্য

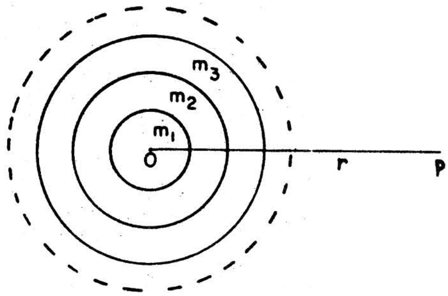
(i) বিন্দুটি যদি গোলকের বাইরে হয় একটি নিরেট গোলককে অসংখ্য পাতলা সমকেন্দ্রিক খোলকের সমবায় হিসেবে ভাবা যায় (চিত্র 9.10)। ধরুন এক একটি ফাঁপা খোলকের ভর যথাক্রমে m_1, m_2, m_3 .... ইত্যাদি এবং P বিন্দুটি গোলকটির কেন্দ্র O থেকে r দূরত্বে অবস্থিত। 9.17a সূত্র অনুযায়ী P বিন্দুতে ঐরূপ অসংখ্য ফাঁকা খোলকের দরুন মোট বিভব হবে

$$V = -\frac{Gm_1}{r} - \frac{Gm_2}{r} - \frac{Gm_3}{r} - ....$$

$$= -\frac{G}{r}(m_1 + m_2 + m_3 + ...)$$

বা $V = -\frac{GM}{r}$ (9.20a)

যেখানে $M = m_1 + m_2 + m_3 + ...$ = সমগ্র গোলকটির ভর।



(চিত্র 9.10)

P বিন্দুতে নিরেট গোলকের দরুন মহকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য

$$E = -\frac{dv}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GM}{r}\right) = \frac{GM}{r^2} \quad (9.20b)$$

(ii) যদি বিন্দুটি গোলকের ভেতরে হয় এবার ধরুন M ভরের নিরেট গোলকটির কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ a এবং ঘনত্ব ρ। O বিন্দু থেকে $r(\angle a)$ দূরত্বে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের বিভব ও প্রাবল্য করতে হবে। O বিন্দুকে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি গোলক অঙ্কন করলে নিরেট গোলকটি দুটি অংশে ভাগ হয়ে যায় যার একটি অংশ r ব্যাসার্ধের নিরেট গোলক এবং অন্যটি $a - r$ বেধের একটি গোল খোলক (চিত্র 9.11)। P বিন্দুটি ছোট গোলকটির পৃষ্ঠে কিন্তু ফাঁপা খোলকের ঠিক ভেতরে। সুতরাং P বিন্দুতে সমগ্র গোলকের বিভব হবে ঐ দুটি অংশের দরুন বিভবের সমষ্টি। r ব্যাসার্ধের ছোট গোলকটির দরুন বিভব

$$= V_1 = -G.\frac{4}{3}\pi\frac{r^3\rho}{r} = \frac{4}{3}\pi G r^2 \rho$$

খোলকটির দরুন P বিন্দুতে বিভব নির্ণয় করবার জন্য ঐ খোলকের ভেতর x ব্যাসার্ধ ও dx বেধের একটি পাতলা সমকেন্দ্রিক খোলক কল্পনা করুন। এটির দরুন P বিন্দুতে বিভব হবে

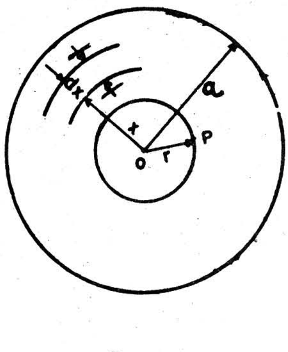
$$dv_2 = -G.\frac{4\pi x^2 dx \rho}{x} = -4\pi G x \rho dx$$

r থেকে a ব্যাসার্ধের মধ্যে এজাতীয় সবগুলির খোলকের জন্য মোট বিভব নির্ণয় করতে $x = r$ থেকে $x = a$ সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাওয়া যায়

$$V_2 = \int dV_2 = -4\pi G\rho \int_r^a x dx = 4\pi G\rho\left(\frac{\alpha^2 - r^2}{2}\right)$$

$$= -2\pi G\rho\left(a^2 - r^2\right)$$

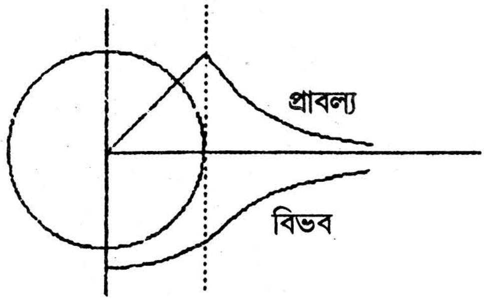
$\therefore$ P বিন্দুতে মোট বিভব $V = V_1 + V_2$



(চিত্র 9.11)

$$\therefore V = -\frac{4}{3}\pi G r^2 \rho - 2\pi G\rho\left(a^2 - r^2\right)$$

$$= -\frac{4}{3}\pi G\rho\left[r^2 + \frac{3\left(a^2 - r^2\right)}{2}\right]$$



(চিত্র 9.12)

$$= -\frac{4}{3}\pi G\rho\left[\frac{3a^2 - r^2}{2}\right]$$

$$= -\frac{4}{3}\pi G a^3 \rho\left[\frac{3a^2 - r^2}{2a^3}\right]$$

$$= -GM\left(\frac{3a^2 - r^2}{2a^3}\right) \qquad (9.21a)$$

এখানে M গোলকের ভর $= \frac{4}{3}\pi a^3 . \rho$

P বিন্দুতে গোলকের দরুণ প্রাবল্য

$$F = -\frac{dv}{dr} = -\frac{d}{dr}\left[GM\left(\frac{3a^2 - r^2}{2a^3}\right)\right]$$

$$= \frac{GM}{2a^3} . \frac{d}{dr}\left(r^2\right) = \frac{GM}{a^3} r \qquad (9.21b)$$

9.21b সমীকরণ থেকে আপনি বুঝতে পারছেন যে নিরেট গোলকের ক্ষেত্রে অভ্যন্তরস্থ যে কোনও বিন্দুতে প্রাবল্য গোলকের কেন্দ্র O থেকে ঐ বিন্দুটির দূরত্বের সমানুপাতিক।

9.12 চিত্রে নিরেট গোলকের জন্য মহাকর্ষীয় বিভব ও প্রাবল্যের লেখ দেখানো হল।

9.7 অভিকর্ষজ ত্বরণ

আগের অনুচ্ছেদগুলি থেকে আপনি মহাকর্ষীয় আকর্ষন সম্বন্ধে বেশ কিছু জানতে পেরেছেন। গোলকের খোলক এবং নিরেট গোলকের মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের বিভব ও প্রাবল্য এখন আপনি নির্ণয় করতে

পারবেন। আপনাকে যদি মহাকর্ষীয় আকর্ষণবলের একটি প্রত্যক্ষ উদাহরণ দিতে বলা হয় তাহলে হয়ত কোন বস্তুর উপর পৃথিবীর আকর্ষণের কথাই আপনার প্রথম মনে পড়বে। পৃথিবীর এই আকর্ষণকে আমরা বলি অভকর্ষ (gravity)। আর এই আকর্ষনী বলকেই আমরা বলি বস্তুর ওজন বা ভার (weight)। শূণ্যে কোন বস্তুকে ছেড়ে দিলে এই বলের প্রভাবে বস্তুর যে নিম্নমুখী ত্বরণ হয় তাকে আমরা বলি অভিকর্ষজ ত্বরণ (acceleration due to gravity)। এই ত্বরণকে আমরা 'g' বর্ণটি দিয়ে অভিহিত করি। ত্বরণ 'g' আসলে একটি ভেক্টর রাশি। এটির দিক মোটামুটিভাবে পৃথিবীর অথবা অন্য যে গ্রহ বা উপগ্রহের কথা আমরা বিবেচনা করব, তার কেন্দ্র অভিমুখী। এই অনুচ্ছেদে আমরা পৃথিবীকে একটি সমসত্ব গোলক ধরে নিয়ে তার বিভিন্ন অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় করব।

(a) ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ

9.20b সমীকরণ থেকে পাওয়া যায় M ভরের একটি নিরেট গোলকের বাইরে, গোলকের কেন্দ্র থেকে r দূরত্বে মহাকর্ষীয় প্রাবল্যের মান $E = \frac{GM}{r^2}$ । পৃথিবীকে একটি নিরেট গোলক হিসাবে কল্পনা করলে সেটির ব্যাসার্ধ যদি R হয় তবে ভূপৃষ্ঠে পৃথিবীর আকর্ষণজনিত প্রাবল্য $E_{r=a} = \frac{GM}{R^2}$ । m ভরের একটি বস্তুর উপর পৃথিবীর আকর্ষণী বল $Em = \frac{GNm}{R^2}$ ।

সুতরাং ভূপৃষ্ঠ বস্তুটির অভিকর্ষজ ত্বরণ $g_o = \frac{Gm}{R^2}$

9.22 সমীকরণ থেকে g_o এর প্রত্যাশিত মান কত তা দেখা যাক। পৃথিবীকে 6370 km ব্যাসার্ধের ও 5.976×10^{24} kg ভরের একটি সমসত্ব গোলক বলে ধরে নিলে

$$g_o = 6.67 \times 10^{-11} \cdot 5 \cdot 976 \times 10^{24} / \left(6370 \times 10^3\right)^2$$

$= 9.82\ mS^{-2}$

g_o এর এই প্রত্যাশিত মান পরীক্ষালব্ধ গড় মানের সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ। এক্ষেত্রে মনে রাখতে হবে যে পৃথিবী সম্পূর্ণ সমসত্ত্ব না হয়ে অনেকগুলি সমসত্ত্ব সমকেন্দ্রিক খোলকের সমষ্টি হলেও 9.22 সূত্রটি সঠিক থাকবে এবং আমাদের উপরের গণনাটিও নির্ভুল থাকবে।

(b) ভূপৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ

ভূপৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতায় (চিত্র 9.13) g এর মান হবে

$$g_h \frac{GM}{(R+h)^2}$$

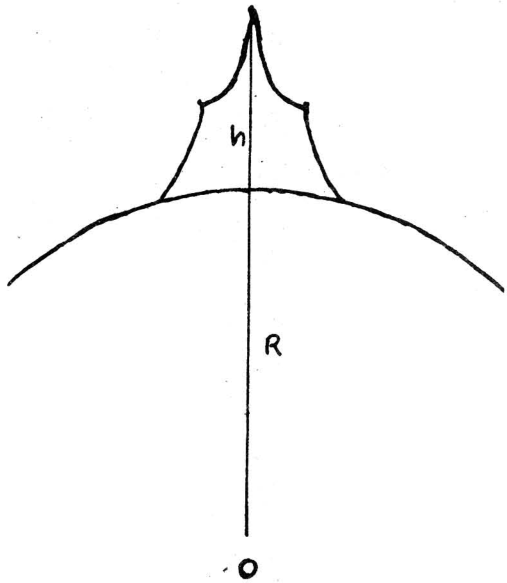
যেহেতু ভূপৃষ্ঠ g এর মান

$$g_o = \frac{GM}{R^2},$$

$$\therefore \frac{g_h}{g_o} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

বা $g_h = g_o\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2}$ (9.23a)

যদি $h \angle\angle R$ হয় তবে উপরের রাশিমালাকে দ্বিপদ শ্রেণীতে (binomial series) প্রকাশ করে $\frac{h}{R}$ এর একাধিক ঘাতগুলিকে উপেক্ষা করা যায়। সুতরাং



(চিত্র 9.13)

$$g_h = g_o\left(1-\frac{2h}{R}\right) \qquad (9.23b)$$

অর্থাৎ উচ্চতার সঙ্গে g_h এর মান রৈখিকভাবে হ্রাস পায়। অবশ্য h এর মান R এর সঙ্গে তুলনীয় হলে 9.23(a) সমীকরণটিই ব্যবহার করতে হবে।

(c) ভূগর্ভে d গভীরতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ

আপনি আগেই দেখেছেন, ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ

$$g_o = \frac{GM}{R^2} = \frac{G}{R^2}\frac{4}{3}\pi R^3\rho$$

$$= \frac{4}{3}\pi RG\rho$$

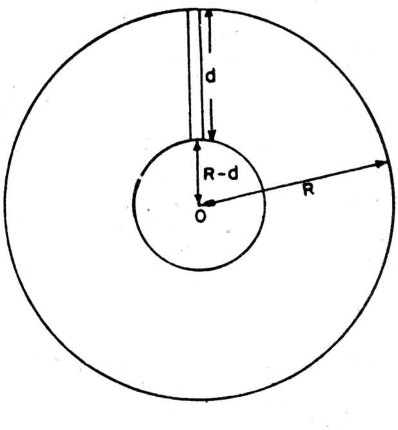
অনুরূপভাবে, ভূগর্ভে d গভীরতায় (চিত্র 9.14)

$g_d = \frac{4}{3}\pi G\rho(R-d)$ এক্ষেত্রে $R-d$ বাসার্ধ বিশিষ্ট কেন্দ্রীয় গোলকটির আকর্ষণ বলই বিবেচনা করা প্রয়োজন,

কেননা বাইরের ফাঁপা গোলকটির জন্য তার অভ্যন্তরে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য শূণ্য।

$$\therefore \frac{g_d}{g_o} = \frac{R-d}{R} = 1-\frac{d}{R}$$

বা $g_d = \left(1-\frac{d}{R}\right)g_0 \qquad (9.24)$



(চিত্র 9.14)

9.24 সূত্রটি d এর যে কোন মানের জন্য সত্য। এটি থেকে বোঝা যায় যে পৃথিবী একটি সমসত্ব গোলক হলে ভূগর্ভে g এর মান গভীরতার সঙ্গে রৈখিকভাবে

হ্রাস পেত। অবশ্য খনির মধ্যে g এর মান পরীক্ষার সাহায্যে নির্ণয় করে কিছুটা গভীরতা পর্যন্ত g_d কে গভীরতা d এর সঙ্গে বাড়তে দেখা গেছে। পৃথিবীর অভ্যন্তর সমসত্ব না হওয়াই এর কারণ। উপরের সূত্রটি থেকে আপনি এও বুঝতে পারবেন যে পৃথিবীর কেন্দ্রে, অর্থাৎ যখন $d = R$, g_d এর মান শূণ্য হবে। এখন 9.23 (a) এবং 9.24 সূত্রদুটির সাহয্যে পৃথিবীর অভ্যন্তরে ও বাইরে পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে দূরত্বের সঙ্গে অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান অর্থাৎ g এর লেখচিত্র আঁকা যেতে পারে। এ কাজটি আপনি 9.7 চিত্রের সাহায্যে নিজেই করতে পারবেন।

9.7.1 অক্ষাংশের সঙ্গে g এর পরিবর্তন

আপনি দেখেছেন যে ভূপৃষ্ঠ থেকে উচ্চতার সঙ্গে এবং ভূগর্ভে গভীরতার সঙ্গে g এর ফলে পরিবর্তন ঘটে। ভূপৃষ্ঠে g এর মানও অক্ষাংশের সঙ্গে পরিবর্তিত হতে দেখা যায়। পৃথিবীর আহ্নিক গতি এই পরিবর্তনের একটি কারণ। এখানে আমরা পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য g এর মান অক্ষাংশের উপর কীভাবে নির্ভর করে তা দেখব। ধরা যাক ভূপৃষ্ঠে λ অক্ষাংশে A বিন্দুতে একটি ক্ষুদ্রভর m অবস্থিত (চিত্র 9.15)। পৃথিবীর আবর্তনের সঙ্গে A বিন্দুটি r ব্যাসর্ধের একটি বৃত্তে ω কৌণিক বেগে পরিভ্রমণ করে।

A বিন্দুতে অবস্থিত বস্তুটির ওজন হবে

$$mg_\lambda = mg_o - m\omega^2 r\cos\lambda$$

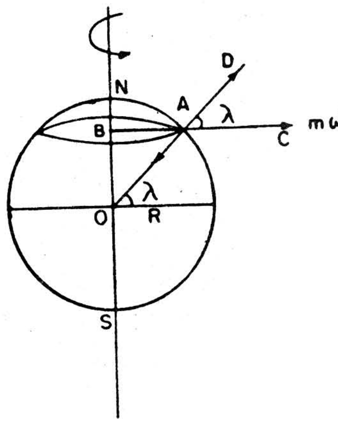
$$\therefore g_\lambda = g_o - \omega^2 R\cos^2\lambda \quad \text{করণ} \quad r = R\cos\lambda$$

$$g_\lambda = g_o\left(1 - \frac{\omega^2 R\text{Cos}^2\lambda}{g_o}\right) \qquad (9.25)$$

$$g_o = 9.81\text{m}/\text{sec}^2,\ R = 6.37\times10^6\text{m}$$

এবং $\omega = \dfrac{2\Pi}{24\times60\times60}$ rad s^{-1}

তাহলে $g_\lambda = g_o\left(1 - \dfrac{\text{Cos}^2\lambda}{291}\right) \qquad (9.26)$



(চিত্র 9.15)

A বিন্দুতে m ভরের উপর AO অভিমুখে mg_o বল ক্রিয়া করে। m ভরকে r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে আবর্তনশীল রাখতে AB অভিমুখে $mr\omega^2$ পরিমাণ অভিকেন্দ্র বলের প্রয়োজন হয়। AO অভিমুখে কার্যকর বল নির্ণয় করতে আমরা mg_o বলের সঙ্গে $mr\omega^2$ পরিমাণ AC অভিমুখী অপকেন্দ্র বল যোগ

করতে পারি। এই অপকেন্দ্র বলের AD অভিমুখী, অর্থাৎ উল্লম্ব উপাংশ $mr^2\omega\cos\lambda$ এবং অনুভূমিক উপাংশ $mr^2\omega\sin\lambda$। শেষোক্তটিকে উপেক্ষা করলে 9.26 সূত্র থেকে আপনি সহজেই বুঝতে পারছেন যে উত্তর ও দক্ষিণ মেরুতে $\lambda = 90^\circ, \cos\lambda = 0$ সুতরাং

$$g_\lambda = g_0 \text{ বা } 9.81 \text{ ms}^{-1}$$

আবার নিরক্ষরেখায় $\lambda = 0^\circ$, $\cos\pi = 1$, সুতরাং

$$g_\lambda = g_0\left(1 - \frac{1}{291}\right) = 9.78 \text{ ms}^{-1}$$

অক্ষাংশের সঙ্গে অভিকর্ষজ ত্বরণের পরিবর্তনের অবশ্য আর একটি কারণ আছে। সেটি হল এই যে পৃথিবী একটি নিখুঁত গোলক নয়, এটি একটি হ্রস্বাক্ষ উপগোলক (oblate spheroid)। পৃথিবীর নিরক্ষীয় ব্যাসার্ধ 6378 km এবং মেরু-ব্যাসার্ধ 6357 km। মেরু অঞ্চলে ভূপৃষ্ঠ পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে অপেক্ষাকৃত নিকটবর্তী হওয়ায় সেখানে অভিকর্ষ নিরক্ষীয় অঞ্চলের তুলনায় সামান্য বেশী শক্তিশালী।

মহাকর্ষীয় বিভব ও প্রাবল্য সম্বন্ধে যা পড়লেন তার উপর ভিত্তি করে নীচের অনুশীলনীটি দেওয়া হল।

অনুশীলনী — 3

(i) পৃথিবী ও চন্দ্রের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 6400 ও 1720 km এবং গড় ঘনত্ব যথাক্রমে 5520 ও 3340kg m^{-3}। পৃথিবীর পৃষ্ঠে g এর মান 9.8 ms^{-2}। এই উপাত্তগুলি ব্যবহার করে এবং পৃথিবী ও চন্দ্রকে পৃথিবী ও চন্দ্রকে সমসত্ব গোলক ধরে নিয়ে চন্দ্রের পৃষ্ঠে g এবং মহাকর্ষীয় ধ্রুবক G এর মান নির্ণয় করুন।

(ii) দুটি সুষম গোলাকার খোলকের কেন্দ্রে বিভব V_1 ও V_2 এর অনুপাত 3:4 I যদি খোলক দুটিকে মিলিয়ে একটি খোলক গঠন করা হয় তবে নূতন খোলকটির কেন্দ্রে বিভবের মান V_1 ও V_2 সঙ্গে কী অনুপাতে থাকবে? ধরে নিন তিনটি খোলকের ক্ষেত্রেই ভরের ক্ষেত্রফল ঘনত্ব এক।

(iii) পৃথিবীর একটি দিন কত দীর্ঘ হলে নিরক্ষরেখায় g এর মান শূণ্য হত?

9.8 মুক্তিবেগ

আমরা সাধারণত দেখি যে কোন বস্তুকে ওপরের দিকে ছুঁড়ে দিলে অভিকর্ষের ফলে বস্তুটি খানিকটা উঠে আবার ভূপৃষ্ঠে ফিরে আসে। উৎক্ষেপণ বেগ যত বাড়ানো যায় বস্তুটি তত বেশি উঁচুতে গিয়ে উচ্চতা পৌঁছতে পারে।

কিন্তু উৎক্ষেপণ বেগ বাড়াতে বাড়াতে এমন অবস্থায় পৌছান সম্ভব যখন উৎক্ষিপ্ত বস্তুটি আর ভূপৃষ্ঠে ফিরে আসবে না। যে ন্যূনতম বেগে কোন বস্তুকে উর্ধ্বে উৎক্ষেপণ করলে সেটি আর ভূপৃষ্ঠে ফিরে আসে না সেই ফিরে বেগকে মুক্তিবেগ বলে।

শক্তির নিত্যতা সূত্র প্রয়োগ করে মুক্তিবেগের মান নির্ণয় করা যায়।

ধরি পৃথিবীর ভর M ও ব্যাসার্ধ R এবং ভূপৃষ্ঠ থেকে উৎক্ষিপ্ত বস্তুটির ভর m।

9.20(a) সূত্র ব্যবহার করে পাওয়া যায়, উৎক্ষেপনের সময় বস্তুটির স্থৈতিক শক্তি $mv = -\frac{GMm}{R}$ বস্তুটির উৎক্ষেপন বেগ যদি u হয় তবে তার প্রাথমিক গতিশক্তি $\frac{1}{2}mu^2$। সুতরাং বস্তুটির মোট শক্তি $E = \frac{1}{2}mu^2 - \frac{GMm}{R}$ আমরা জানি যে পৃথিবী থেকে অসীম দূরত্বে পৃথিবীর মহাকর্ষীয় বিভব এবং বস্তুটির স্থিতিক শক্তির মান শূণ্য।

কোন বস্তুকে পৃথিবীর মহাকর্ষ ক্ষেত্র থেকে নিষ্ক্রান্ত হতে হলে অসীম দূরত্বেও তার শূণ্য গতিশক্তি থাকতে হবে। সুতরাং তার মোট শক্তিকে ধনাত্মক হতে হবে। এর অর্থ $E = \frac{1}{2}mu^2 - \frac{GMm}{R} \geq 0$ বা

$u \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ ।

u এর এই নিম্নতম মান $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ ই বস্তুটির মুক্তিবেগ।

আবার আমরা জানি ভূপৃষ্ঠ অভিকর্ষজ ত্বরণ $g = \frac{GM}{R^2}$

সুতরাং মুক্তিবেগ $Ve = \sqrt{2gR}$

9.27 সমীকরণটিতে লক্ষনীয় যে

(i) V_e এর মান উৎক্ষিপ্ত বস্তুটির ভর নিরপেক্ষ

(ii) $V_e \, \alpha \, \sqrt{g}$ অর্থাৎ কোন গ্রহে বা উপগ্রহের পৃষ্ঠে তার নিজস্ব আকর্ষণজনিত ত্বরনের বর্গমূল ও সেখানকার মুক্তিবেগ সমানুপাতী।

(iii) কোন একটি গ্রহ বা উপগ্রহের ব্যাসার্ধ R, গড় ঘনত্ব ρ হলে তার পৃষ্ঠে g এর মান

$G.\frac{4}{3}\pi R.\rho$ এবং

$$V_e = \sqrt{2.G\frac{4}{3}\pi R^2\rho} \qquad = \left(\frac{8\pi}{3}G\right)^{1/2}.R\sqrt{\rho}$$

সুতরাং একই আকারের গ্রহ-উপগ্রহের ক্ষেত্রে V_e সেগুলির গড় ঘনত্বের বর্গমূলের এবং ঘনত্ব এক হলে V_e সেগুলির ব্যাসার্ধের সমানুপাতী হয়। এখন আমরা পৃথিবীর ক্ষেত্রে মুক্তি বেগের মান নির্ণয় করতে পারি। ধরুন, $g = 9.8\ ms^{-2}$ আর $R = 6.4 \times 10^6 m$

$$\therefore V_e = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6}\ \ ms^{-1}$$

$$= 11.2 \times 10^3 ms^{-1} \text{ বা } 11.2\ km.S^{-1}$$

এই বেগ বায়ুতে শব্দের বেগের প্রায় 34 গুণ এবং কোন বস্তুকে এই বেগে উৎক্ষেপণ করা মোটেই সহজ নয়।

যা আপনারা এই অনুচ্ছেদে জানলেন তারই সাহায্য নিয়ে এই অনুশীলনটি করে ফেলতে পারবেন।

অনুশীলনী — 4

(i) পৃথিবীর বায়ুমন্ডলে হাইড্রোজেন ও হিলিয়াম গ্যাস দুষ্প্রাপ্য হলেও বৃহস্পতির বায়ুমন্ডলে এই গ্যাসগুলি প্রচুর পরিমাণে বিদ্যমান। এর কারণ কী? (বৃহস্পতির মুক্তিবেগ $61\ kmS^{-1}$)

(ii) পৃথিবী ও বুধ গ্রহের ঘনত্ব সমান এবং ব্যাসার্ধের অনুপাত 2.6:1। এই দুই গ্রহের মুক্তিবেগের অনুপাত নির্ণয় করুন।

9.9 পরীক্ষার সাহায্যে মহাকর্ষীয় ধ্রুবক G এর মান নির্ধারণ

বিজ্ঞানীরা অষ্টাদশ শতাব্দীর মাঝামাঝি থেকে মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের মান নির্ণয় চেষ্টা করে আসছেন। মহাকর্ষীয় ধ্রুবক G এর মানের সঙ্গে পৃথিবীর ভর ও গড় ঘনত্ব জড়িত কেননা ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ

$$g = \frac{GM}{R^2} \text{ (9.22 সমীকরণ দেখুন)}$$

$$= \frac{4}{3}\pi G\rho R \text{ (} \rho = \text{ পৃথিবীর গড় ঘনত্ব)}$$

সুতরাং পৃথিবীর ভর এবং গড় ঘনত্ব জানার জন্যও G এর মান নির্ণয় করা খুবই জরুরী ছিল। মোটের উপর দুটি ভিন্ন পদ্ধতিতে G এর মান নির্ণয় করা খুবই জরুরী ছিল। মোটের উপর দুটি ভিন্ন পদ্ধতিতে G এর মান নির্ণয়ের চেষ্টা করা হয়েছে। এগুলি হল ঃ

1) প্রথমে একটি সুবিধামত অবস্থান, আকার ও আকৃতির পর্বত নির্বাচন করে জরীপের দ্বারা তার অভ্যন্তরের উপাদান, অর্থাৎ শিলা, মাটি প্রভৃতির বিন্যাস ও ঘনত্ব বার করা হয়। এবার ঐ পর্বতটি তার পাশে রাখা একটি ওলন অথবা তার উপরে ও নীচে রাখা একটি সরলদোলকের উপর যে আকর্ষনী বল প্রয়োগ করে সেটির সঙ্গে পৃথিবীর আকর্ষণের তুলনা করা হয়। এর থেকে পৃথিবীর ভর পাওয়া যায় এবং তা থেকে G এর মান নির্ণয় করা যায়।

2) দ্বিতীয় পদ্ধতিতে গবেষণাগারে দুটি নিয়মিত আকৃতির ভরের মধ্যে আকর্ষণকে সরাসরি মাপা হয়। ঐ বলের মান থেকে সহজেই G এর মান পাওয়া যায়।

প্রথম পদ্ধতিতে G এর মান নির্ধারণের প্রথম ইঙ্গিত দিয়েছিলেন মহাকর্ষের আবিস্কর্তা নিউটন। তিনি লিখেছিলেন "তিন মাইল উঁচু এবং ছয় মাইল চওড়া একটি অর্ধগোলকের আকৃতির পর্বত ওলনদড়িকে উল্লম্ব দিক থেকে দুই মিনিট কোণেও হেলাতে পারবে না।" এই পদ্ধতিতে অনুসরণ করে পেরুতে বুঙয়ে বিম্বোরাজো পর্বতশৃঙ্গে (1749 খ্রিঃ) এবং স্কটল্যাণ্ডে ম্যাসকেলিন (Maskelyne) শেহালিয়েন পাহাড়ে (1772 খ্রিঃ) পরীক্ষা চালিয়েছিলেন। এ ধরনের পরীক্ষাগুলির ঐতিহাসিক গুরুত্ব থাকলেও এগুলি থেকে পরিমাণগতভাবে সঠিক ফল পাওয়া যায় নি।

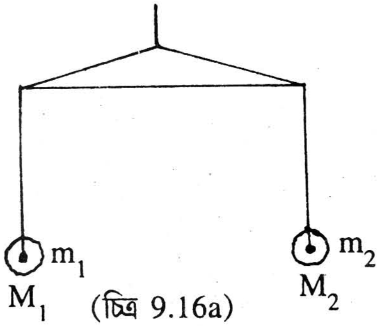
1826 খ্রিষ্টাব্দে এয়ারী (Airy) খনির মধ্যে সরল দোলকের সাহায্যে অভকর্ষজ ত্বরেণের (g) মান নির্ণয় করে এবং সেটি ভূপৃষ্ঠে 'g' এর মানের সঙ্গে তুলনা করে ভূত্বকের ঘনত্ব ও পৃথিবীর গড় ঘনত্বের অনুপাত নির্ণয় করেন। এই ধরনের পরীক্ষা থেকে পৃথিবীর গড় ঘনত্বের মোটামুটি সঠিক মান পাওয়া গিয়েছিল।

9.9.1 ক্যাভেন্ডিশের পরীক্ষা

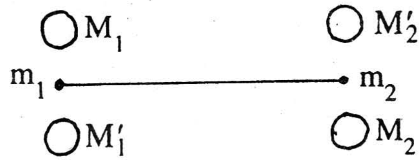
দ্বিতীয় পদ্ধতির মধ্যে ক্যাভেন্ডিশের পরীক্ষাই প্রথম উল্লেখযোগ্য পরীক্ষা। ক্যাভেন্ডিশের পরীক্ষায় 2" ব্যাসের দুটি সীসার গোলক (m_1, m_2) একটি হালকা অনুভূমিক দন্ডের দুই প্রান্ত থেকে ঝোলানো ছিল (চিত্র 9.16a)। দন্ডটি আবার একটি তার দিয়ে ঝোলানো, যাতে সমস্ত ব্যবস্থাটি একটি ব্যবর্তন দোলকের মত আন্দোলিত হতে পারে। 8" ব্যাসের দুটি বড় সীসার গোলক (M_1, M_2) m_1, ও m_2 এর পাশে একই অনুভূমিক তলে রাখা হল। m_1 এর উপর M_1 এর আকর্ষণ এবং m_2 এর উপর M_2 এর আকর্ষণ যে বলযুগ্ম তৈরী করে তার ফলে ব্যবর্তন দোলকটির কৌণিক বিক্ষেপ ঘটে। এখন যদি M_1 ও M_2 গোলকদুটিকে M_1' ও M_2' অবস্থানে আনা যায় তবে ব্যাবর্তন দোলকটি সাম্যবস্থার বিপরীত দিকে বিক্ষিপ্ত হবে (চিত্র b)। দুই অবস্থার মধ্যে ব্যাবর্তন দোলকের কৌণিক বিক্ষেপের পরিমাপ করে তা থেকে G এবং পৃথিবীর গড় ঘনত্ব নির্ণয় করা যায়।

ক্যাভেন্ডিশের পরীক্ষায় প্রধান অসুবিধা ছিল দুটি। প্রথমটি হল আলম্বন তারের স্থিতিস্থাপক অবসাদের (elastic fatigue) জন্য ক্ষণে ক্ষণে বিক্ষেপের পরিবর্তন। দ্বিতীয়টি হল, বড় আকারের পরীক্ষা যন্ত্র ও তার কক্ষের বিভিন্ন অংশে উষ্ণতা পার্থক্যের দরুন বায়ুর পরিচলন প্রবাহ উৎপন্ন হয়

এবং তার ফলে ব্যবর্তন দোলকটি কখনই স্থিতিসাম্যে পৌঁছায় না। এটি অতি সামান্য বিক্ষেপকে সূক্ষ্মভাবে মাপায় বিঘ্নের সৃষ্টি করে।



(চিত্র 9.16a)



(চিত্র 9.16b)

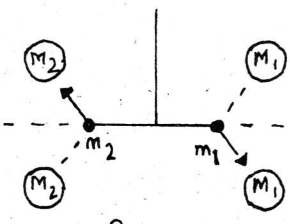
9.9.2 বয়েজ (Boys) এর পরীক্ষা (1889 খ্রিঃ)

বয়েজ ক্যাভেন্ডিশের যন্ত্রের চেয়ে অনেক ছোট আকারের ব্যাবর্তন তুলা ব্যবহার করেন। যন্ত্রটি অনেক ছোট কক্ষে থাকায় বায়ুর পরিচলন প্রবাহের প্রভাব অনেক কমানো গিয়েছিল। এই পরীক্ষাটি সম্বন্ধে আমরা কিছুটা বিস্তারিত আলোচনা করব।

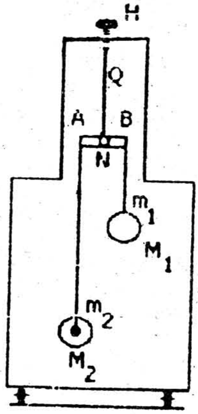
বয়েজ এর পরীক্ষার যন্ত্রব্যবস্থাটির একটি সরলীকৃত রূপ 9.17(a) চিত্রে দেখানো হয়েছে। একটি ক্ষুদ্রাকার দন্ড AB এর দুইপ্রান্ত থেকে সরু তার দিয়ে দুটি ক্ষুদ্র স্বর্ণগোলক ঝোলানো আছে, যাদের ভর m_1 ও m_2। AB দন্ডটি একটি ব্যাবর্তন শীর্ষ H (torsion head) থেকে কোয়ার্টজ সূত্র Q দিয়ে আলম্বিত। দন্ডটির সঙ্গে একটি দর্পণ N থাকে যার সাহায্যে AB দন্ডের কোণিক বিক্ষেপ মাপা যায়। দুটি বড় সীসার গোলক M_1 ও M_2 যথাক্রমে m_1 ও m_2 এর পাশে, ব্যাবর্তন তুলার উল্লম্ব তলের বিপরীত পার্শ্বে বসানো থাকে। প্রতি গোলকযুগ্মের কেন্দ্রদুটি একই উচ্চতায় থাকে m_1 এর উপর M_1 এর আকর্ষণ এবং m_2 এর উপর M_2 এর আকর্ষণ একটি বলযুগ্ম গঠন করে। যার ফলে ব্যাবর্তন তুলার কোণিক বিক্ষেপ ঘটে। m_1 এর উপর M_2 এর আকর্ষণ এবং m_2 এর উপর m_1 এর আকর্ষণ যাতে বিপরীতমুখী বলযুগ্ম গঠন করতে না পারে সেজন্য m_1, M_1 এর চেয়ে m_2, M_2 কে অনেকটা নীচের অনুভূমিক তলে রাখা হয়। m_1, m_2 ভরগুলি আলম্বন সূত্র সমেত একটি নলের মধ্যে থাকে, যার ফলে বায়ুপ্রবাহের জন্য সেগুলির কোন বিক্ষেপ ঘটে না।

বয়েজ এর পীরক্ষায় m_1 ও M_2 ভর দুটিকে একবার M_1-M_2 অবস্থায় এবং আরও একবার $M'_1 - M'_2$ অবস্থায় রাখা হয় (চিত্র 9.17b)। দুই অবস্থার মধ্যে AB দন্ডের কোণিক বিক্ষেপ N দর্পন এবং একটি অলোকিত স্কেলের সাহয্যে অত্যন্ত সূক্ষ্মভাবে মাপা হয়। ব্যাবর্তন তুলাটির কোণিক

আন্দোলনের পর্যায়কাল এবং আলম্বিত বস্তুগুলির জড়তা ভ্রামক মেপে কোয়ার্টজ সূত্রের ব্যাবর্তন ধ্রুবকও সহজেই জানা যায়। যন্ত্রটির জ্যামিতিক পরিমাপ সম্পূর্ণ জানা থাকায় এখন G এর মান নির্ণয় করা সম্ভব হয়। বয়েজ মহাকর্ষীয় ধ্রুবক ও পৃথিবীর গড় ঘনত্বের যে মান পেয়েছিলেন সেগুলি হল $G = 6.6576 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$ ও $D = 5527\ kg\ m^{-3}$।



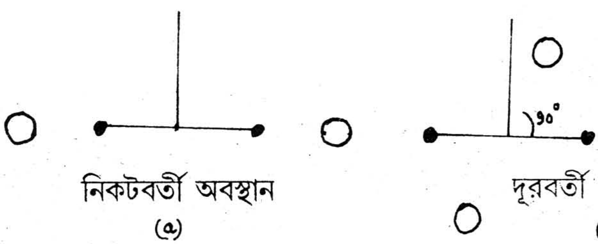
চিত্র 9.17(a)



(চিত্র 9.17)

9.9.3 হেলের (Heyl's) পরীক্ষা

ক্যাভেন্ডিশ ও বয়েজ এর পরীক্ষায় আপনি ব্যার্বতন তুলার ব্যবহার দেখেছেন। একটি ব্যার্বতন তুলাকে কে দুটি পদ্ধতিতে ব্যবহার করা যায়। একটি হল প্রত্যক্ষ বিক্ষেপ পদ্ধতি যার পরিচয় আমরা পেয়েছি। অন্যটি হল দোলন কাল পদ্ধতি। এই দোলনকাল পদ্ধতিতে ভারী ও স্থির ভরগুলির সাপেক্ষে প্রলম্বিত দোলকের ভরগুলির দুটি অবস্থানে দোলনকাল মাপা হয়। একটি নিকটবর্তী অবস্থান ও অপরটি দূরবর্তী অবস্থান। নিকটবর্তী অবস্থানে বেশী ভর সম্পন্ন বস্তুগুলির আকর্ষণ এমন ভাবে ক্রিয়াশীল হয় যাতে প্রলম্বিত তুলাটির দোলনকাল কমে যায় আর দূরবর্তী অবস্থানে সেগুলির আকর্ষণে দোলনকাল বৃদ্ধি পায়। যন্ত্রে বিন্যাস দুটি পৃথকভাবে এখানে দেখানো হল (চিত্র 9.18)।



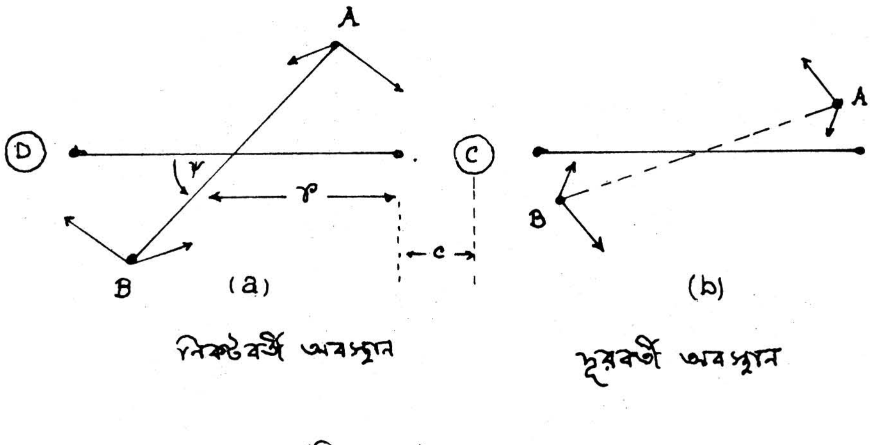
(চিত্র 9.18)

জার্মান বৈজ্ঞানিক বাউন, (Braun) এই দুই দোলনকাল মেপে G এর মান নির্ণয় করেন। তিনি ব্যাবর্তন তুলাটিকে নির্বাতিকক্ষে রেখে বায়ুপ্রবাহের প্রভাব সম্পূর্ণ অপনয়ন করেন। ধাতু ও কোয়ার্জের ব্যাবর্তন সূত্র ব্যবহার করে তিনি G এর যে মান পেয়েছিলেন তা বয়েজ এর পাওয়া মানের সমান।

হেল (P. R. Heyl) ব্রাউনের ব্যবহৃত পদ্ধতিতে ভূগর্ভস্থ সিথর উষ্ণতায় গবেষণাগারে পরীক্ষা চালান। তাঁর ব্যাবর্তন তুলাটি ছিল প্রায় 1m লম্বা টাংস্টেন সূত্রে ঝোলানো একটি অ্যালুমিনিয়াম দন্ড, যার দুইপ্রান্তে সোনা, প্ল্যাটিনাম বা সমস্তব লেন্স তৈরীর কাঁচের দুটি গোলক লাগানো ছিল। আকর্ষণকারী বড় ভরগুলি ছিল ইস্পাতের বেলন। ব্যাবর্তন তুলাটির স্বাভাবিক দোলনকাল ছিল প্রায় আধ ঘন্টা এবং 4^0 কৌণিক বিস্তারে আন্দোলন শুরু হলে সেটি প্রায় ২০ ঘন্টা আন্দোলিত হত। হেল আগের মত দুই যন্ত্র বিন্যাসের জন্য তুলাটির দোলনকাল নির্ণয় করেন — প্রথম, যখন দুটি গোলক ও দুটি বেলনের চারটি কেন্দ্র একই অনুভূমিক সরলরেখায় এবং দ্বিতীয়, যখন বেলন দুটির কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোগকারী সরলরেখা ও ব্যাবর্তন তুলার দন্ড পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখন্ডিত করে। হেল এই দুই ব্যবস্থায় দোলনকাল পেয়েছিলেন 1750s ও 2000s এর মত।

মূলতত্ত্ব

ধরুন বেশী ভরের বেলন দুটি নিকটবর্তী অবস্থানে রাখা হল। যে কোন মুহূর্তে সাম্যাবস্থানে থেকে ব্যাবর্তন তুলার কোণিক বিক্ষেপ $\dot{\psi}$ এবং কৌণিক বেগ ψ । সমগ্র ব্যাবর্তন তুলার মোট শক্তির হিসাব করা যাক।



(চিত্র 9.19)

ধরুন, টাংস্টেন তারের ব্যাবর্তন ধ্রুবক b এবং ঘূর্ণনের অক্ষ সাপেক্ষ আলম্বিত ক্ষুদ্র ভর A, B সমেত ব্যার্বতন তুলার জড়তা ভ্রামক I।

ব্যাবর্তন তুলার গতিশক্তি $= \frac{1}{2} I \dot{\Psi}^2$ । ভারী বেলন C, D না থাকলে স্থিতিশক্তির মান হত $\frac{1}{2} b\Psi^2$ । কিন্তু 9.19 চিত্র লক্ষ্য করলে বোঝা যাবে যে C, D ভরগুলির নিকটবর্তী অবস্থানে A ও B ভরগুলির উপর যথাক্রমে C ও D এর আকর্ষণ কিছুটা প্রত্যানয়ক বলযুগ্ম সৃষ্টি করে। A ভরের উপর D এবং B ভরের উপর C ও কিছুটা আকর্ষণী বল প্রয়োগ করে কিন্তু দূরত্ব অধিক হওয়ার ফলে এই আকর্ষণী বলগুলি অনেক দুর্বল। মোটের উপর C ও D এব আকর্ষণ তারের ব্যাবর্তন ধ্রুবককে কার্যকরীভাবে বর্ধিত করে এবং এই বর্ধিত মান G এর সমানুপাতী হয়। নিকটবর্তী অবস্থার জন্য আমরা b এর পরিবর্তে $b + \alpha G$ লিখতে পারি। সুতরাং সিস্থিশক্তির মান এখন দাঁড়াবে $\frac{1}{2}(b + \alpha G)\Psi^2$ । α রাশিটি গোলক ও বেলনগুলির ভর এবং যন্ত্রটির জ্যামিতিক পরিমাপের উপর নির্ভরশীল।

যন্ত্রটির ঘর্ষণজনিত শক্তিক্ষয় নগণ্য হলে মোট শক্তি

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2}(b + \alpha G)\Psi^2 = \text{ধ্রুবক}$$

সময়ের সাপেক্ষ অবকলন করলে

$$I\ddot{\Psi} + (b + \alpha G)\Psi = o$$

এটি একটি সরলদোলগতির সমীকরণ, যার দোলনকাল $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{b + \alpha G}}$

C ও D বেলন দুটি যখন দূরবর্তী অবস্থানে থাকে A ও B গোলক দুটির উপর C ও D এর আকর্ষণ ব্যাবর্তন তুলার বিক্ষেপ বৃদ্ধি করতে চেষ্টা করে। এক্ষেত্রে ব্যাবর্তন ধ্রুবকের মান কার্যকরীভাবে হ্রাস পায় এবং b এর পরিবর্তে $b - \beta G$ লেখা যায়। 'α' এর মত 'β' ও গোলক ও বেলনগুলির ভর ও যন্ত্রটির পরিমাপের উপর নির্ভর করে। আগের মত দেখানো যায়, যে এই অবস্থায় ব্যাবর্তন তুলার যে সরল দোলগতিতে কৌণিক আন্দোলন ঘটবে তার পর্যায়কাল $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{b - \beta G}}$ ।

এখন আপনি T_1 ও T_2 এর রাশিমালা থেকে b এর অপনয়ন করতে পারেন ঃ

$$b + \alpha G = \frac{4\pi^2 I}{T_1^2}, \; b - \beta G = \frac{4\pi^2 I}{T_2^2}$$

অতএব $G = \dfrac{4\pi^2 I}{\alpha+\beta}\left(\dfrac{1}{T_1^2} - \dfrac{1}{T_2^2}\right)$

হেল প্ল্যাটিনামের গোলক ব্যবহার করে G এর মান পেয়েছিলেন $6.664 \times 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$। কাচের গোলকের ক্ষেত্রে এই মান ছিল $6.674 \times 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$।

এবার একটি অনুশীলনী আপনাকে ব্যাবর্তন তুলার পরীক্ষাগুলি বুঝতে সাহায্য করবে।

অনুশীলনী — 5

একটি ব্যাবর্তন তুলার আলম্বিত গোলক দুটির কেন্দ্র A ও B বিন্দুতে এবং স্থির দুটি গোলকের কেন্দ্র C ও D বিন্দুতে একই অনুভূমিক তলে অবস্থিত। A ও B গোলকের প্রতিটির ভর 10g এবং C ও D গোলকের প্রতিটির ভর 10 kg। দূরত্ব AB = 10 cm, কোণ $\angle ABC = \angle BAD = 30^\circ$ এবং কোণ $\angle ABD = \angle BAC = 120^\circ$। A ও B গোলকের সংযোগকারী দন্ডটি মধ্যবিন্দুতে একটি কোয়ার্জ সূত্র দিয়ে আলম্বিত আছে। সূত্রটির ব্যাবর্তন ধ্রুবক $10^{-9} Nm\,rad^{-1}$। C ও D গোলকদুটির আকর্ষণের জন্য ব্যাবর্তন তুলাটি কত কোণে বিক্ষিপ্ত হবে?

9.10 গ্র্যাভিমিটারের সাহায্যে ভূগর্ভস্থ খনিজ সম্পদের অনুসন্ধান

আপনি আগেই দেখেছেন অভিকর্ষজ ত্বরণ g ও মহাকর্ষীয় ধ্রুবক G এর সম্পর্ক

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

যদি পৃথিবীকে একটি গোলক ধরা যায় যার গড় ব্যসার্ধ r এবং গড় ঘনত্ব ρ তাহলে দেখা যায় যে

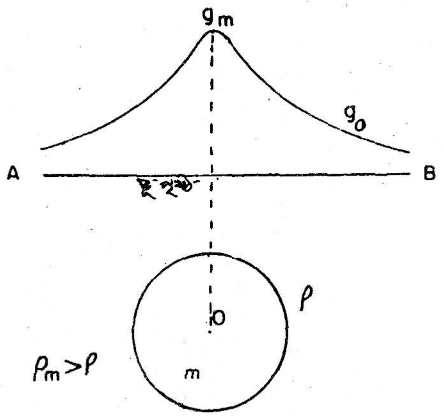
$$g = \frac{G}{r^2}.\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$g = \frac{4}{3}\pi r G\rho$$

তাহলে যদি G এর মান জানা থাকে তাহলে g এর মান নির্ণয় মূলতঃ ρ এর মান নির্ণয়ের সমতুল্য। এই নীতিটাই ভূগর্ভস্থ খণিজ অনুসন্ধানের মূলভিত্তি! আমরা যদি g এর পরিমাপের কোনও সূক্ষ্ম যন্ত্রের সাহায্যে g এর মান কোনও অঞ্চলে ঘন সন্নিবিষ্ট বিভিন্ন বিন্দুতে নিখুঁতভাবে মাপি এবং তাতে যদি কোন স্থানিক বৈশম্য দেখা যায় তাহলে তার থেকে গুরুত্বপূর্ণ কিছু তথ্য আহরণ করা যেতে পারে।

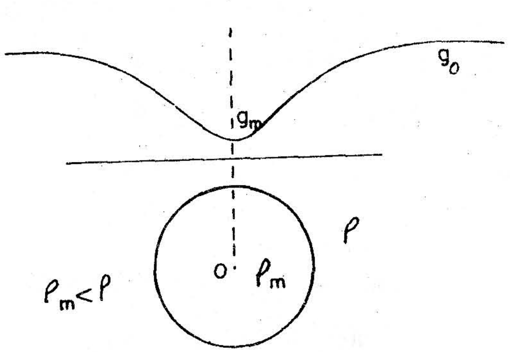
এ ধরনের যন্ত্রকে গ্যাভিমিটার (gravimeter) বলে। g এর মানের স্থানিক পরিবর্তন থেকে কি অনুমান করা যেতে পারে সেটা দেখা যাক।

9.20 (a) - (c) চিত্রে প্রদর্শিত AB একটি বিস্তীর্ণ সমভূমি যার C বিন্দুতে একটি গোলাকার অঞ্চলে কোন খনিজ সম্পদ প্রাকৃতিক কারণে সঞ্চিত হয়েছে। ধরি খনিজটির গড় ঘনত্ব ρ_m এবং AB অঞ্চলে ভূত্বকের গড় ঘনত্ব ρ। এমত অবস্থায় তিনটি সম্ভাবনার কথা ভাবা যায়, যেগুলি হল (i) $\rho_m > \rho$ (ii) $\rho_m \angle \rho$ (iii) $\rho_m = \rho$। এই তিনটি অবস্থার প্রথম ক্ষেত্রে C এর নিকটবর্তী অঞ্চলে g এর মান যদি g_m হয় সেক্ষেত্রে $g_m > g_o$ হবে। সেখানে g_o = AB অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বণের মান সেক্ষেত্রে যদি AB অঞ্চলে গ্রাভিমিটারের সাহয্যে বিভন্ন স্থানে g এর মান নির্ণয় করা হয় তাহলে C এর নিকটবর্তী অঞ্চলে g_m এর মান বেশী হতে দেখা যাবে। একটি আর্দশ ক্ষেত্রে g এর লেখচিত্রের আকার হবে 9.20(a) চিত্রের মত।



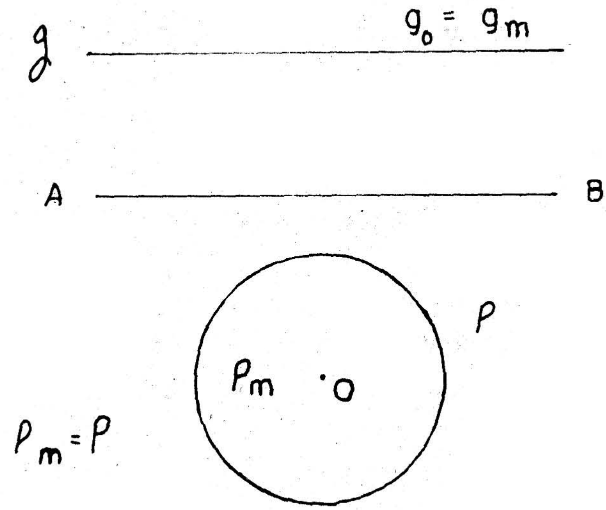
(চিত্র 9.20(a)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে লেখ চিত্রটির আকার হবে 9.20 (b) চিত্রের মত।



(চিত্র 9.20(b)

আর তৃতীয় ক্ষেত্রে খণিজের উপস্থিতি সনাক্তকরণ সম্ভব হবে না, g এর মানে কোনও পরিবর্তন লক্ষ্য করা যাবে না (চিত্র 9.20(c))



(চিত্র 9.20(c))

কোন বিস্তীর্ণ অঞ্চলে ভূগর্ভস্থ ঘণিজ পদার্থের সন্ধানের জন্য অঞ্চলটিকে ছোট ছোট বর্গকার অংশে ভাগ করে নেওয়া হয়। এবার প্রতিটি অংশ গ্র্যাভিমিটারের সাহয্যে g এর মান সূক্ষ্মভাবে মাপা হয়। একে বলে অভিকর্ষ জরিপ (gravity survey)। এবার লেখচিত্রের সাহায্যে g এর বৈষম্য লক্ষ্য করে খণিজ পদার্থের অবস্থান নির্ণয় করা যায়। এতো গেল স্থান নির্ণয়। অভিকর্ষজরিপের সাহয্যে আরও যা জানা যায় সেটি হল খণিজ সম্পাদটির পরিমান কত? নিশ্চয়ই 1000 টন খণিজের জন্য কোনও খনি সেখানে খোলা হবে না যদি না সেটি মহামূল্যবান সোনা বা হীরের খনি না হয়।

পেট্রোলিয়ামও একটি খনিজ সম্পদ। তারও অনুসন্ধান এইভাবে করা যায়।

অভিকর্ষ জরিপ (gravity survey) -এর জন্য প্রয়োজন অত্যন্ত সুবেদী গ্র্যাভিমিটার। এই যন্ত্রটির সাহায্যে কোন স্থানে g এর মান নির্ণয় করা হয়। বিখ্যাত জ্যোতির্বিদ গ্যালিলিও গ্যালেলাই এর নামে গ্যাল বলে একটি একক আছে যার মান হল 1 gal = 1 Cm/Sec^2 এমন সুবেদী যন্ত্রও আছে যার সাহয্যে g এর মানে 1 milli gal = 10^{-3} gal বা 1 microgal = 10^{-6} এর মত অতিক্ষুদ্র হেরফেরও নির্ভুলভাবে মাপা যায়।

বিজ্ঞানের উন্নতির সঙ্গে সঙ্গে বৈজ্ঞানিকদের কাজেরও অনেক সুবিধা হয়েছে। এখন যেমন আর মাঠে যাটে জঙ্গলে ঘুরে ঘুরে গ্র্যাভিমিটারের সাহায্যে g এর মান নির্ণয় করতে হয় না। আজকাল হেলিকপ্টার বা নীচে উড়তে সক্ষম ছোট প্লেনে চড়ে বিস্তীর্ণ অঞ্চলের অভিকর্ষ পর্যবেক্ষণ অতি অল্প সময়ে শেষ করে ফেলা যায়।

গত 6/7 বছরে পদ্ধতির আমূল পরিবর্তন হয়ে গেছে। এখন পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ রত কৃত্রিম উপগ্রহের ভেতর গ্র্যাভিমিটার বসানো আছে। যন্ত্রটি স্বয়ংক্রিয়ভাবে g এর মান নির্ণয় করে চলেছে। কৃত্রিম উপগ্রহ থেকে তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ পাঠানো হয় তারপর ভূপৃষ্ঠে প্রতিফলিত হয়ে যখন সেই তরঙ্গ উপগ্রহে পৌঁছায় তখন সেই সময়ের ব্যবধান বিশ্লেষণ করে ঐ যন্ত্রটি উচ্চতা সংশোধন করে। তাছাড়া ভূপৃষ্ঠের অমসৃণতার জন্যও সংশোধন প্রয়োজন এবং সেই সব সংশোধনের পর g এর মান লেখচিত্রে বসিয়ে ভূগর্ভস্থ খণিজের অনুসন্ধান করা সম্ভব।

পৃথিবীর তিনভাগ জল একভাগ স্থল। এখন স্থলভাগ পর্যবেক্ষণ মোটামুটি ভাবে প্রায় শেষ। তাই এখন সমুদ্রের নীচে যে ভূভাগ রয়েছে পর্যবেক্ষণ এখন সেই সব অঞ্চলেও চলছে কারণ সমুদ্রের নীচে কোনও খণিজ সম্পদ থাকলে তারও যথেষ্ট প্রয়োজন রয়েছে। সামুদ্রিক অভিকর্ষ জরিপ (Marine gravity Survey) এখন ভূগর্ভস্থ খণিজ সম্পদ অনুসন্ধানের নূতন দিগন্তের উন্মোচন করেছে।

9.11 সারাংশ

মহাকর্ষ ও অভিকর্ষ সম্বন্ধীয় এই এককটিতে আপনি মহাকর্ষীয় আকর্ষণ এবং তার অন্যতম প্রত্যক্ষ ফল অভিকর্ষ সম্বন্ধে অনেকটাই জানতে পেরেছেন। গ্রহদের গতিবিধি সংক্রান্ত কেপলারের সূত্রগুলি থেকেই মহাকর্ষ সম্বন্ধীয় গবেষণার শুরু। নিউটনের মহাকর্ষসূত্র থেকে কেপলারের সূত্রগুলি এবং অভিকর্ষজ ত্বরণের ব্যাখ্যা দেওয়ার পর এই এককে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য ও বিভব সম্বন্ধে বিশদ আলোচনা করা হয়েছে।

অভিকর্ষজ ত্বরণ সম্বন্ধে আলোচনাটি সম্পূর্ণ করা হয়েছে অক্ষাংশের সঙ্গে তার পরিবর্তন ও মুক্তিবেগের সঙ্গে অভিকর্ষজ ত্বরণের সম্পর্কের ব্যাখ্যা দিয়ে। এককের শেষাংশে অভিকর্ষজ ত্বরণের পরিমাপ দিয়ে কীভাবে খণিজ পদার্থের অনুসন্ধান করা হয় তার সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দেওয়া হয়েছে যাতে এই ধরনের পরীক্ষার তাৎপর্য আপনার কাছে সুস্পষ্ট হয়।

মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের মান পদার্থবিদ্যা ও জ্যোতির্বিজ্ঞানে একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ রাশি। এটির পরিমাপের জন্য যে সমস্ত পরীক্ষা করা হয়েছে তার কয়েকটি এই এককে বর্ণনা করা হয়েছে। পাঠক এগুলি থেকে অতি সরল যন্ত্রব্যবস্থা ব্যবহার করে কত সূক্ষ্ম পরীক্ষা বিজ্ঞানীরা করতে পেরেছেন তা অনুধাবন করতে পারবেন।

9.12 সর্বশেষ প্রশ্নবলী

(i) নিউটনের মহাকর্ষ সূত্রটি লিখুন। এই সূত্রকে বিশ্বজনীন বলা হয় কেন?

(ii) গ্রহদের গতিবিধি সম্বন্ধীয় কেপলারের সূত্রগুলি লিখুন। নিউটনের মহাকর্ষ সূত্রটির সাহয্যে কেপলারের সূত্রগুলি প্রতিষ্ঠা করুন।

(iii) মহাকর্ষীয় বিভব ও প্রাবল্যের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করুন। একটি সমকোণী কার্টেজীয় নির্দেশতন্ত্রে (a, o), (--a, o) এবং (0, 2a) বিন্দুগুলিতে তিনটি সমান ভর M রাখা আছে। (o, a) বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব ও প্রাবল্যের মান নির্ণয় করুন।

(iv) প্রমান করুন যে একটি খোলকের বাইরের কোন বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য নির্ণয়ের জন্য খোলকের ভর সেটির কেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত রয়েছে বলে ধরা যায়, কিন্তু খোলকটির অভ্যন্তরে কোন প্রাবল্যই থাকে না।

(v) একটি নিরেট সমসত্ত্ব গোলকের মধ্যে ও বাইরে মহাকর্ষীয় বিভবের মান নির্ণয় করুন। দেখান যে গোলকটির মধ্যে যে কোন বিন্দুতে প্রাবল্য গোলকের কেন্দ্র থেকে ঐ বিন্দুর দূরত্বের সঙ্গে সমানুপাতী।

(vi) পৃথিবীকে R ব্যাসার্ধ ও ρ ঘনত্বের একটি সমসত্ত্ব গোলক ধরে নিয়ে (a) ভূপৃষ্ঠে (b) ভূপৃষ্ঠে থেকে h উচ্চতায় এবং (c) ভূপৃষ্ঠের d গভীরতায় অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান নির্ণয় করুন।

সমসত্ব গোলকের ক্ষেত্রে গভীরতার সঙ্গে অভিকর্ষীয় ত্বরণের (g) মান হ্রাস পায়। কিন্তু পৃথিবীর খণিগর্ভে g এর মান ভূপৃষ্ঠের তুলনায় বেশী হতে দেখা যায়। এর কারণ কী?

(vii) G এর মান নির্ণয়ের জন্য বয়েজ এর পরীক্ষার সংক্ষিপ্ত বিবরণ দিন। এই পরীক্ষায় ব্যাবর্তন তুলার দন্ডের দুই প্রান্ত থেকে ঝুলানো ভরগুলি বিভিন্ন উচ্চতায় রাখার কারণ কী? যে গোলকগুলি এই পরীক্ষায় ব্যবহৃত হয়েছে সেগুলি সমসত্ব না হলে পরীক্ষায় কোন ত্রুটি ঘটত?

(viii) হেল এর পরীক্ষার মূলনীতি ব্যাখ্যা করুন। বয়েজের এর পরীক্ষা থেকে হেল এর পরীক্ষার মূল পার্থক্য কী?

(ix) অভিকর্ষ জরিপ কাকে বলে এবং এটি কী কাজে লাগে?

9.13 উত্তরমালা

অনুশীলনী — 1

(i) যদি সূর্যের ভর = M, পৃথিবীর ভর = m, পৃথিবীর কক্ষপথের ব্যাসার্ধ R হয়, তবে কেন্দ্রাভিমুখী বল $mR\omega^2 = \frac{mMG}{R^2}$, ω = পৃথিবীর কৌনিক বেগ। অতএব $M = \frac{\omega^2 R^3}{G}$। কিন্তু

$$\omega = \frac{2\pi}{365.25 \times 86400} s^{-1} = 1.991 \times 10^{-7} \text{ rad s}^{-1}$$

$$\therefore M = \frac{\left(1.991\times10^{-7}\right)^2\times\left(1.5\times10^8\times10^3\right)^3}{6.67\times10^{-11}}$$

$$= 2.01\times10^{30}\ \text{kg}$$

(ii) আমরা জানি, ℓ দৈর্ঘ্যের দোলকের দোলকাল $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ । 9.11 সূত্র অনুসারে $g = \frac{GM}{R^2}$, অর্থাৎ $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell R^2}{GM}}$ । এখানে M= পৃথিবীর ভর, R= পৃথিবীর ব্যাসার্ধ এবং T=2S। গ্রহের ভর 2M এবং ব্যাসার্ধ 2R সুতরাং

গ্রহের ক্ষেত্রে দোলনকাল $2\pi\sqrt{\frac{\ell(2R)^2}{G.2M}} = T\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\ \text{s}$

অনুশীলনী — 2

(a) নেগেটিভ (b) শূণ্য (c) লম্ব (d) $-\frac{GM}{x}$

অনুশীলনী — 3

(i) 9.22 সূত্র অনুযায়ী ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ $g = \frac{GM}{R^2}$ । পৃথিবীর গড় ঘনত্ব ρ হলে $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, সুতরাং $g = \frac{4}{3}GR\rho$ । দেওয়া আছে $R = 6400\ \text{km}$, $P \doteq 5520\ \text{kg m}^{-3}$

$$\therefore G = \frac{3}{4}\frac{g}{\pi R\rho} = \frac{3}{4\pi}\frac{9.8}{6400\times10^3\times5520} = 6.62\times10^{-11}\text{Nm}^2\ \text{kg}^{-2}$$

এবং চন্দ্রে পৃষ্ঠে $g = \frac{4}{3}\pi\times6.62\times10^{-11}\times1720\times10^3\times3340$

$$= 1.59\ \text{m s}^{-2}$$

(ii) ধরে নিন খোলক দুটির ব্যাসার্ধ r_1 ও r_2, ভরের ক্ষেত্রফল ঘনত্ব σ ।

$\therefore$ খোলকদুটির ভর $m_1 = 4\pi r_1^2\sigma$ এবং $m_2 = 4\pi r_2^2\sigma$

এবং সেগুলির মধ্যে বিভব $V_1 = -\frac{Gm_1}{r_1} = -4\pi G\sigma r_1$ এবং $V_2 = -4\pi G\sigma r_2$ নূতন খোলকটির ভর m_3 এবং ব্যাসার্ধ r_3 হলে

$m_3 = m_1 + m_2$, সুতরাং $4\pi r_1^2\sigma + 4\pi r_2^2\sigma$ বা $r^2 = r_1^2 + r_2^2$ যেহেতু $V_1 : V_2 = 3:4$, $r_1 : r_2 = 3:4$। ধরুন $r_1 = 3a, r_2 = 4a$। $\therefore r^2 = (3a)^2 + (4a)^2$, বা $r = 5a$ নূতন খোলকের মধ্যে বিভব V_3 হলে $\therefore V_1 : V_2 : V_3 = r_1 : r_2 : r_3$

$$= 3 : 4 : 5$$

(iii) নিরক্ষরেখা অক্ষাংশ $\lambda = 0°$, সুতরাং 9.25 সূত্র থেকে $g_{(\lambda=o)} = g_o\left(1 - \frac{\omega^2 R}{go}\right)$। g এর মান শূণ্য হবে যদি $\omega^2 = \frac{g_o}{R}$ হয়, অর্থাৎ দিনের দৈর্ঘ্য $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_o}}$ হয়।

$R = 6400$ km, $g_o = 9.8$ ms^{-2} ধরে

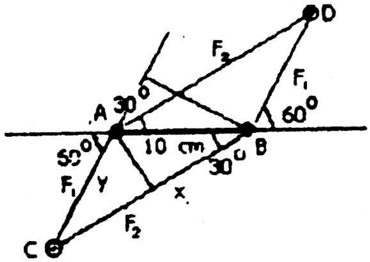
$$T = 2\pi\left(\frac{6400 \times 10^3}{9.8}\right)^{1/2} = 5080 \text{ s} = 1.41 \text{ ঘন্টা}$$

অনুশীলনী — 4

(i) হাইড্রোজেন ও হিলিয়াম হাল্কা গ্যাস হওয়ায় এদের অণুগুলির ভূপৃষ্ঠের উষ্ণতায় গড় বেগ পৃথিবীর মুক্তিবেগের তুলনায় খুব কম নয়। এর জন্য পৃথিবীর অভিকর্ষ এই গ্যাস অণুগুলিকে ধরে রাখতে পারে না এবং পৃথিবীর বাতাবরণে এই গ্যাসগুলি পাওয়া যায় না। বৃহস্পতির মুক্তবেগ অনেক বেশী হওয়ায় হাইড্রোজেন ও হিলিয়াম বৃহস্পতির অভিকর্ষকে ছড়িয়ে যেতে পারেনি।

(ii) মুক্তিবেগের মান $v_e = \sqrt{2gR} = \sqrt{2.\frac{MG}{R^2}.R} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}GR^2\rho} = 2R\sqrt{\frac{2}{3}\pi G\rho}$ যেখানে M, R, ρ যথাক্রমে গ্রহের ভর, ব্যাসার্ধ ও গড় ঘনত্ব।

$$\therefore \frac{v_e\text{ (বুধ)}}{v_e\text{ (পৃথিবী)}} = \frac{R\text{ (বুধ)}}{R\text{ (পৃথিবী)}} = \frac{1}{2.6}$$



(চিত্র 9.21)

গোলক A, B, C ও D এর বিন্যাস 9.21 চিত্রে দেখানো হয়েছে। ধরুন দূরত্ব BC=x, Ac = y। বিন্যাসের জ্যামিতি অনুযায়ী $x \sin 30° = y \sin 60°$ অর্থাৎ $y = x/\sqrt{3}$ এবং $x \cos 30° - y \cos 60° = 10$ অর্থাৎ $\sqrt{3}x - y = 20$ সমাধান করে, $x = 10\sqrt{3}$ cm, $y = 10$cm।

A এর উপর C এর আকর্ষণ এবং B এর উপর D এর আকর্ষণ উভয়ের মান

$$F_1 = \frac{1 \times \cdot 01 \times G}{(\cdot 1)^2} = 6.67 \times 10^{-11} \text{N}$$

A এর উপর D এর আকর্ষণ এবং B এর উপর C এর আকর্ষণ উভয়ের মান

$$F_2 = \frac{1 \times \cdot 01 \times G}{\left(\cdot 1 \times \sqrt{3}\right)^2} = 2.22 \times 10^{-11} \text{ N}$$

$F_1 - F_1$ বলয়যুগ্মর বাহুর দৈর্ঘ্য $10 \sin 30° = 5\text{cm} = \cdot 05\text{m}$

$\therefore$ এই বলযুগ্মের ভ্রামক $6.67 \times 10^{-11} \times .05 = 3.335 \times 10^{-12}$Nm (ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে)

$F_2 - F_2$ বলযুগ্মের বাহুর দৈর্ঘ্য $10 \sin 60° = 5\sqrt{3}\text{cm} = .05 \times \sqrt{3}$ m

$\therefore$ এই বলযুগ্মের ভ্রামক $-2.22 \times 10^{-11} \times .05 \times \sqrt{3} = -1.922 \times 10^{-12}$Nm (ঘড়ির কাঁটার দিকে)

$\therefore$ মোট বলযুগ্ম $= (3.335 - 1.922) \times 10^{-12} = 1.413 \times 10^{-11}$Nm

সুতরাং ব্যাবর্তন তুলার বিক্ষেপকোণ = বলযুগ্ম ÷ ব্যারর্তন ধ্রুবক

$$= \frac{1.413\times10^{-11}}{10^{-9}} = .0143 \text{ radian}$$

বা প্রায় 0.82^0।

<u>সর্বশেষ প্রশ্নাবলী</u>

(i) 9.2 অংশে (সূত্র 9.1) ও 9.3.2 অংশে প্রশ্নটির উত্তর পাবেন

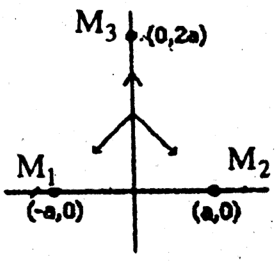
(ii) 9.2 ও 9.3 । অংশে প্রশ্নটির উত্তর পাওয়া যাবে।

(iii) 9.5.4 অংশে প্রশ্নের প্রথম অংশের উত্তর পাবেন।

দ্বিতীয় অংশে ঃ (0, a) বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব $(M_1 = M_2 = M_3 = M)$

$$V = -\frac{GM_1}{a} - \frac{GM_2}{a\sqrt{2}} - \frac{GM_3}{a\sqrt{2}} = -\frac{GM}{a}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

প্রাবল্যের x উপাংশ $E_x = -\frac{GM_2}{2a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{GM_3}{2a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$



(চিত্র 9.22)

y উপাংশ $E_y = -\frac{GM_1}{a^2}\frac{GM_2}{2a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{GM_3}{2a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{GM}{a^2}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{GM}{a^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.293.\frac{GM}{a^2}$$

সুতরাং মোট প্রাবল্য y অক্ষ অভিমুখে $0.293\frac{GM}{a^2}$

(iv) ও (v) 9.6 অংশে প্রশ্নগুলির উত্তর পাবেন।

(vi) 9.7 অংশ আপনি প্রশ্নটির উত্তর পাবেন। প্রশ্নটির দ্বিতীয় অংশের উত্তরে বলা যায় যে ভূপৃষ্ঠ থেকে যত গভীরে যাওয়া যায়, ঘনত্ব ততই বাড়তে থাকে, সুতরাং পৃথিবীকে সমসত্ব গোলক ধরা যায় না।

(vii) প্রশ্নের প্রথম অংশের উত্তর 9.9.2 অংশে পাবেন।

গোলকগুলি সমসত্ব না হলে সেগুলির মধ্যে আকর্ষণ গণনার জন্য তাদের ভরগুলি কেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত বলে ধরা যেত না, ফলে G এর মান নির্ণয়ে অসুবিধা ঘটত।

(viii) প্রশ্নের প্রথম অংশের উত্তরের জন্য 9.9.3 অংশ দেখুন।

বয়েজ এর পরীক্ষায় ব্যাবর্তন তুলার স্থির বিক্ষেপকোণ মাপা হয়েছিল। হেল এর পরীক্ষায় আকর্ষণকারী ভরগুলির ভিন্ন অবস্থানের জন্য তুলার ব্যাবর্তন দোলনকাল নির্ণয় করা হয়েছিল। দ্বিতীয় পরীক্ষাটির সংবেদশীলতা অপেক্ষাকৃত বেশী।

(ix) প্রশ্নটির উত্তর 9.10 অংশে পাবেন।

একক 10 □ স্থিতিস্থাপকতা

গঠন

10.1 প্রস্তাবনা

আপনারা হয়তো লক্ষ্য করেছেন যে পদার্থ বিজ্ঞানের আলোচনায় বিশেষ করে গতিবিদ্যায় দৃঢ়বস্তু বলে একটি শব্দ ব্যবহার করা হয়েছে। এরূপ একটি বস্তুর আকার বা আকৃতি কোনও অবস্থায়ই পরিবর্ত্তিত হয়না তা যে বস্তুটির গতি বা ভৌত অবস্থা যাই ই হোক। আণবিক তত্ত্ব থেকে এর তাৎপর্য হল যে বস্তুটির অভ্যন্তরের কণাদের পারস্পরিক দূরত্বের কোনই পরিবর্তন হয় না।

কিন্তু দৈনন্দিন অভিজ্ঞতা থেকে এমন কোনও বস্তু যে নেই, যে কথা বলা বোধ হয় নিস্প্রয়োজন। কে না জানে সোনা, রূপো পিটিয়ে নানাধরণের গয়না তৈরী করা হয়; লোহা, তামা,এ্যালুমিনিয়াম নানা আকৃতির জিনিষ থেকে বোঝা যায় তাদের পরিবর্তন সম্ভব — কোনও পদার্থই দৃঢ়বস্তুর আখ্যা পেতে পারে না।

এই এককে আলোচ্য বিষয় হবে বিভিন্ন প্রকারের বলপ্রয়োগে বস্তুর আকার বা আকৃতির পরিবর্ত্তন। কি নিয়ম এই সব পরিবর্ত্তন মেনে বলে তার বিবরণ। তবে আমাদের আলোচনায় ধরে নেওয়া হবে যে বাইরের বলের ভেতরে সাম্য আছে, ফলে বস্তুটির কোনও গতির পরিবর্তন হচ্ছে না — বস্তুতঃ আমরা ধরে নেব যে অধিকাংশ ক্ষেত্রে বস্তুটির কোনও সার্বিক গতিই নেই।

উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনি —

- বাড়িঘর, সড়ক সেতু, গহণা আসবাব এবং নানান যন্ত্রপাতি তৈরির সময় পদার্থগুলিকে যে ধরণের চাপ ও পীড়ন সহ্য করতে হয় সে সম্বন্ধে সম্যক ধারণা করতে পারবেন
- কি কি বিশেষ গুণের পদার্থ ব্যবহার করা সমীচীন তা বিচার করতে পারবেন।

10.2 বিভিন্ন সংজ্ঞা — স্থিতিস্থাপকতা, ততি ও পীড়ন

বলের ভাবে সব বস্তুরই কম বেশী বিকৃতি ঘটে। এই বিকৃতি দৈর্ঘ্যের আয়তনের বা আকৃতির হতে পারে। আবার বহিঃস্থ বল সরিয়ে নিলে বস্তু অনেক সময়ই নিজেদের পূর্বাবস্থা ফিরে পায়।

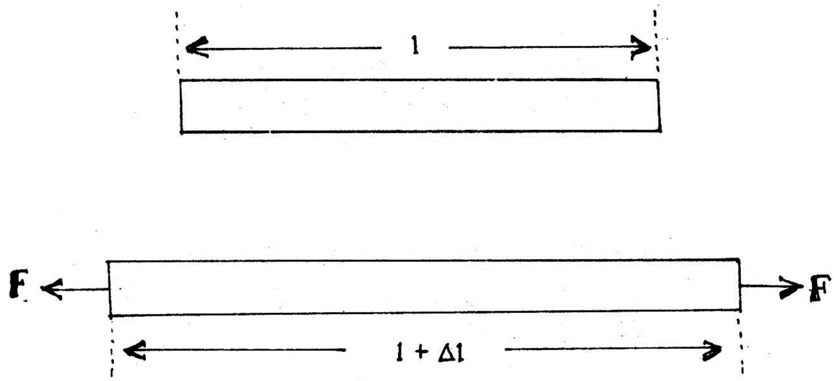
এই ধর্মের নামই স্থিতিস্থাপকতা।

বস্তুর সকল অংশে একই উপাদানে ও ধর্ম হলে বস্তুকে সমসতত্ব (homogeneous) বলে। সকল দিকে বস্তুর ধর্ম একই হলে বলা হয় বস্তুটি সমদৈশিক (isotropic); বিভিন্ন দিকে তন্ত্রের ধর্মের তারতম্য থাকলে তন্ত্রকে অসমদৈশিক (anistropic) বলা হয়। সমসত্ব সমদৈশিক পদার্থের মধ্যে আলোচনা সীমাবদ্ধ থাকবে। বস্তুটি সাম্যে (equilibrium) আছে বলে ধরা হবে — অর্থাৎ প্রযুক্ত বলের মোট লব্ধি এবং ভ্রামক (moment) শূন্য হবে।

ততি (strain)

মনে করুন ℓ দৈর্ঘ্যের একটি দন্ডের দুই প্রান্তে বিপরীতমুখী একই মানের দুটি বল প্রয়াগ করে ওর

দৈর্ঘ্যের $\Delta\ell$ পরিমাণ পরিবর্তন হলো। এই বৃদ্ধি



(চিত্র 10.1)

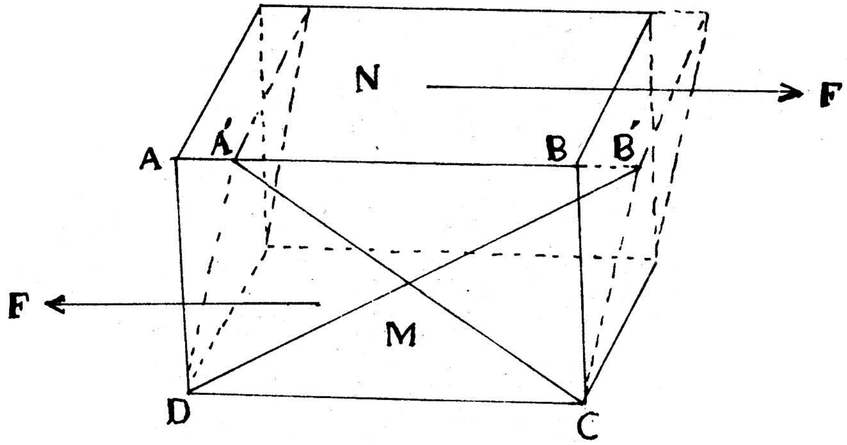
(সাধারণভাবে প্রযুক্ত বলের মান খুব বেশী না হলে) $\Delta\ell$ মূল দৈর্ঘ্য ℓ এর এক ক্ষুদ্র ভগ্নাংশ। প্রতি একক দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন অর্থাৎ অনুপাত $\frac{\Delta\ell}{\ell}$ কে দৈর্ঘ্যের ততি বলে। (longitudinal strain)

$$\text{দৈর্ঘ্যের ততি} = \frac{\Delta\ell}{\ell} \tag{10.1}$$

অনুরূপভাবে বহিঃস্থ বলের প্রভাবে বস্তুর আয়তন V পরিবর্তিত হয়ে $V + \Delta V$ হলে বলা হয়

$$\text{আয়তনের ততি} \quad \frac{\Delta v}{v} \tag{10.2}$$

দৈর্ঘ্যে আয়তন অপরিবর্তিত থেকে শুধুমাত্র আকৃতির বিকৃতি হতে পারে। যেমন আয়তাকার একটি বস্তুর একটি তল আবদ্ধ রেখে বিপরীত তলে যদি স্পর্শক বল (tangential force) প্রয়োগ করা হয়। এক্ষেত্রে আমরা বলি বস্তুটির কৃন্তন (shear) ঘটেছে। বস্তুটির মুক্ত তলের কৌণিক সরণ দ্বারা কৃন্তনের পরিমাপ করা হয়।



(চিত্র 10.2)

N তলে স্পার্শক বল F প্রয়োগের ফলে তলটির কৌণিক সরণ θ হয়েছে। কৃন্তনের তিতি

$$\theta \cong \tan\theta = \frac{AA'}{AD} \tag{10.3}$$

(যেহেতু θ খুব ছোট কোণ)। লক্ষণীয় বস্তুটিকে স্বস্থানে সাম্য অবস্থায় রাখার জন্য অবশ্যই M তলে বিপরীত দিকে F বলে ক্রিয়া করবে।

স্পষ্টত তিতি বিশুদ্ধ সংখ্যা কোনও মাত্রা (dimension) নেই।

পীড়ন (stress)

বাইরের বল (যাদের মোট কোনও লব্ধি নেই) তিতি ঘটায়। তবে তিতির বিরুদ্ধে বস্তুর ভেতরে একটা প্রতিরোধের আবির্ভাব হয় এবং বাইরের বল সরিয়ে নিলে, এই আভ্যন্তরীণ প্রতিরোধের প্রভাবে স্থিতিস্থাপক বস্তু তার আগের অবস্থা ফিরে পায়। সাম্যাবস্থায় এই আভ্যন্তরীণ প্রতিরোধ বল বাইরের বলের সমান এবং বিপরীতমুখী। এই প্রতিরোধ বলকে বলা হয় পীড়ন। পীড়ন একটি পৃষ্ঠবল এবং এর মান নির্দিষ্ট হয় নিম্নরূপ :

$$\text{পীড়ন} = \frac{\text{প্রতিরোধ বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = \frac{F}{A}$$

এখন যে অঞ্চলের উপর প্রতিরোধ বল F ক্রিয়াশীল তার ক্ষেত্রফল A

$$\text{পীড়নের মাত্রা} = \frac{[\text{বল}]}{[\text{ক্ষেত্রফল}]} = ML^{-1}T^{-2}$$

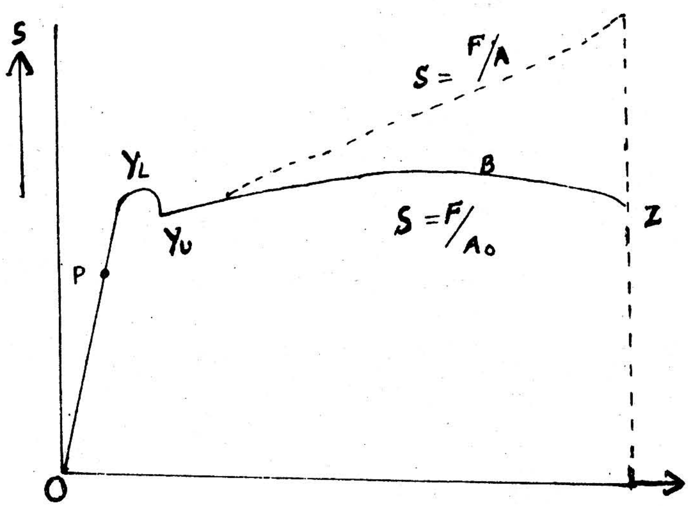
SI পদ্ধতিতে পীড়নের একক newton/m^2

10.3 স্থিতিস্থাপকতার কয়েকটি সাধারণ ধর্ম

মনে করা যাক,একটি ইস্পাতের তারকে এক প্রান্ত দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ করে অপর প্রান্তে F বল দ্বারা টানা হচ্ছে। প্রযুক্ত বলকে তারের অবিকৃত অবস্থার প্রস্থচ্ছেদ (A_0) দিয়ে ভাগ করে আমরা টানজ পীড়ন পাব অর্থাৎ

$$\text{পীড়ন } S = \frac{F}{A_0} \tag{10.4}$$

এই টানের জন্য উদ্ভুত ততি (ε) আমরা মাপতে পারি। ততির সাপেক্ষে (4.1) সম্পর্ক থেকে প্রাপ্ত পীড়নের যদি লেখচিত্র আঁকা হয় তবে



(চিত্র 10.3)

10.3 নং চিত্রে দেওয়া তত্তি পীড়ন রেখাটি পাওয়া যায়। অল্প তত্তির জন্য o বিন্দু থেকে P বিন্দু পর্য্যন্ত তত্তি-পীড়ন রেখা একটি সরলরেখা। P বিন্দুকে সমানুপাতিক সীমা বলে। স্থিতিস্থাপকতার সীমা এই রেখার একটি বিন্দু যার নীচে বহিঃস্থ বল অপসারণ করলে বস্তু অবিকৃত প্রাথমিক অবস্থা ফিরে আসে। ইস্পাতের ক্ষেত্রে স্থিতিস্থাপকতার সীমা সমাপুপাতিক সীমার সামান্য নীচে থাকে।

সমানুপাতিক সীমা ছাড়ালে পীড়ন তত্তি রেখা বক্র হয়ে যায় এবং একটি চরম মান প্রাপ্ত হয়। একে বলে 'ঊর্ধ পরাভব বিন্দু' (Y_u) (upper yield point) বা নমনীয়তার সীমা (flow or plasticity limit)। এর পর রেখাটি নীচের দিকে নেমে "নিম্ন পরাভব বিন্দুতে (Y_ℓ) (lower yield pt) পৌঁছায়। নিম্ন পরাভব বিন্দুর পর অল্প কিছুদূর রেখাটি মোটামুটি ভাবে তত্তি অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল থাকে। কোনও কোনও ক্ষেত্রে এই অংশে সামান্য পীড়নের মানের সামান্য কিছুটা উত্থান-পতন (oscillation) দেখা যায়। এর পরবর্তী পর্য্যায়ে বিকৃতিকে নমনীয় (plastic) বলে। এই স্থলে বহিঃস্থ বলের প্রভাবে 'স্থায়ী বৃদ্ধি' ঘটে। বলের অল্প বৃদ্ধিতে তত্তি অনেক বেশী বৃদ্ধি পায়, আর এই স্থলে রেখাটি সামান্য বক্রতা নিয়ে উপরে ওঠে এবং ε অক্ষের দিকে অবতল অবস্থায় ঘোরে। সর্বোচ্চ বিন্দু B তে চরম পীড়ন। Z বিন্দুতে তারটি ছিঁড়ে যায় (Fracture occurs) এখানে তত্তি পীড়ন রেখা হঠাৎ শেষ হয়।

এছাড়া আমাদের লক্ষ্য করতে হবে ঃ

1. দৈর্ঘ্যের বৃদ্ধির সঙ্গে তারের প্রস্থচ্ছেদের হ্রাস পায়।

2. যেখানে ছিঁড়ে যায় সেখানে প্রস্থচ্ছেদের হ্রাস খুবই বেশী; B বিন্দুর পর 'মধ্য কৃশন' (necking) ঘটে। যদি হ্রাসপ্রাপ্ত প্রস্থচ্ছেদ (A) দ্বারা পীড়ন গণনা করা হয় অর্থাৎ যদি

$$S = \frac{F}{A}$$

ধরি; তত্তি পীড়ন রেখা চিত্রে বর্ণিত উপরের রেখাটির মত হয় (বিচ্ছিন্ন বিন্দুর দ্বারা চিহ্নিত)।

ইতিপূর্বে বহুস্থলে আমরা বলেছি যে 'বহিঃস্থ বল যথেষ্ট পরিমাণ কম' বা 'তত্তি কম হলে' ইত্যাদি ইত্যাদি। সেই সব স্থলে মনে রাখতে হবে বহিঃস্থ বলের প্রভাবে সৃষ্ট তত্তি স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে আছে।

এই প্রসঙ্গে উলেখযোগ্য যে বিকৃতি একমাত্র বহিস্থ বলের মানের উপরই নির্ভর করে না। বিকৃতির অন্তিম মান (final value) অর্জন করতে কিছুটা সময়ের দরকার হয়। একে বলে স্থিতিস্থাপকীয় শৈথিল্য। আমরা বলি প্রাসঙ্গিক বস্তুটি ধীরে ধীরে (creep) অন্তিম অবস্থার দিকে এগোচ্ছে।

10.4 হুকের সূত্র

স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে পীড়ন ও ততি সমানুপাতিক।

$$\frac{\text{পীড়ন}}{\text{ততি}} = \text{স্থির রাশি}$$

এটি একটি বহুল পীড়ন পরীক্ষিত ফল। রবার্ট হুক এর আবিষ্কর্তা। এই স্থির রাশিটিকে স্থিতিস্থাপকতার গুণাংক' (Modulus of elasticity) বলে।

এটি পদার্থের ধর্মের উপর নির্ভরশীল। উষ্ণতা ও বস্তুর পূর্ব ইতিহাস একে সামান্য প্রভাবিত করে। সচরাচর স্থিতিস্থাপকতা উষ্ণতার সঙ্গে হ্রাস পায়।

বিভিন্ন স্থিতিস্থাপক গুণাংক

মৌলিক ততি অনুযায়ী বিভিন্ন গুণাংকের দ্বারা বস্তুর স্থিতিস্থাপকীয় ধর্ম বর্ণনা করা হয়ঃ

(i) টানজ ততির জন্য এই গুণাংককে বলে ইয়ং গুণাংক (Young's modulus Y)

$$Y = \frac{\text{টানজ পীড়ন}}{\text{টানজ ততি}} = \frac{F_{\perp}/A}{\Delta \ell/\ell} \tag{10.5}$$

($F_{\perp}$ = বলের লম্ব উপাংশ, A প্রস্থচ্ছেদ ℓ অবিকৃত দৈর্ঘ্য, $\Delta\ell$ দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন)

অথবা $\frac{F_{\perp}}{A} = Y\frac{\Delta\ell}{\ell}$

(ii) আয়তন ততির ক্ষেত্রে এর নাম আয়তন গুণংাক (Bulk modulus, K)

$$K = \frac{\text{আয়তনের পীড়ন}}{\text{আয়তন ততি}} = \frac{F/A}{-\frac{\Delta V}{V}} = \frac{p}{-\frac{\Delta V}{V}}$$

অর্থাৎ চাপ $p = \frac{F}{A} = -k\frac{\Delta V}{V}$ (10.6)

(V– অবিকৃত আয়তন, ΔV আয়তনের পরিবর্তন) লক্ষণীয় p– বৃদ্ধি পেলে V কমবে।

k– এর অন্যোন্যক $\frac{1}{k}$– কে সংনম্যতা (compressibility) বলে।

(iii) কৃন্তনের ক্ষেত্রে একে বলে কৃন্তন গুণাংক অথবা দৃঢ়তা গুণাংক (shear moduas or modulus of rigidity, η)

$$\eta = \frac{\text{স্পার্শক পীড়ন}}{\text{কৃন্তনের ততি}} = \frac{F_{11}/A}{\theta} \tag{10.7}$$

সব গুণাংক গুলির মাত্রা পীড়নের মাত্রা, কারণ ততি বিশুদ্ধ সংখ্যা। এটি $ML^{-1}T^{-2}$। SI পদ্ধতিতে এদের একক newton· m^{-2}

এই গুণাংকগুলি ছাড়া আর একটি অনুপাত স্থিতিস্থাপক ধর্মের বৈশিষ্ট্য প্রকাশ করে। এটি পোয়াসেঁর অনুপাত (Poissons ratio, σ)। দৈর্ঘ্যের বৃদ্ধির সঙ্গে প্রস্থের সংকোচন হয়। আয়তাকার দন্ডের ক্ষেত্রে (rectangular parallelopiped) প্রস্থে (breadth) ও উচ্চতায় (height) সমান আনুপাতিক সংকোচন (fractiend decrease) হবে এবং প্রতিক্ষেত্রেই দৈর্ঘ্যের আণুপাতিক বৃদ্ধির সঙ্গে সমানুপাতিক। এই সামনুপাতিক ধ্রুবকটি পোয়াসেঁর অনুপাত (σ)।

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\Delta h}{h} = -\sigma\frac{\Delta \ell}{\ell} \tag{10.8}$$

এখানে ℓ– দৈর্ঘ্য, h– উচ্চতা, w– প্রস্থ।

10.5 স্থিতিস্থাপক গুণাংকগুলির সম্পর্ক

উপরের আলোচনায় চারটি স্থিতিস্থাপক গুণাংক বা ধ্রুবকের অবতারণা করা হয়েছে। কিন্তু তারা পরস্পর নিরপেক্ষ নয় যে কোনও দুটির সাপেক্ষে অন্য দুটিকে প্রকাশ করা যায়। গুণাংকগুলির মধ্যে এই সম্পর্ক দেখানোর জন্য আমরা প্রথমে একটি উপপাদ্য প্রতিষ্ঠা করব। প্রতিপাদ্যটি এরূপ —

একটি দৈর্ঘ্য প্রসারণ ও তার অভিলম্ব দিকে একটি সমপরিমাণ সংকোচন মিলে একটি কৃন্তনের তুল্যমূল্য হয়।

প্রমাণ

চিত্র 10.2 লক্ষ্য করুন। এখানে কৃন্তন ততি $\theta = \dfrac{AA'}{AD} = \dfrac{BB'}{BC}$ ক্ষেত্রফল বা আয়তনের কোনও পরিবর্তন হয় নি। কিন্তু লম্ব DB কিছুটা প্রসারিত হয়ে DB' হয়েছে, আবার ওর অভিলম্ব কর্ণ AC কিছুটা সংকোচিত হয়ে $A'C$ হয়েছে।

DB'র প্রসারণ $= DB' - DB$

$$= \left(DA^2 + AB'^2\right)^{1/2} - \left(DA^2 + AB^2\right)^{1/2}$$

$$= \left[DA^2 + (AB + BB')^2\right]^{1/2} - \left(DA^2 + AB^2\right)^{1/2}$$

$$= \left[DA^2 + AB^2 + 2AB.BB' + BB'^2\right]^{1/2} - \left[DA^2 + AB^2\right]^{1/2}$$

যেহেতু BB', AB অপেক্ষা অনেক ক্ষুদ্র, BB'^2 আমরা অবহেলা করতে পারি তাহলে

DB' র প্রসারণ $= \left[DA^2 + AB^2\right]^{1/2}\left[1 + \dfrac{AB \cdot BB'}{\left(DA^2 + AB^2\right)}\right] - \left[DA^2 + AB^2\right]^{1/2}$

$$= \frac{AB \cdot BB'}{\left(DA^2 + AB^2\right)^{1/2}} = \frac{BB'}{BC} \cdot \frac{AB \cdot BC}{\left(DA^2 + AB^2\right)^{1/2}}$$

$$= \theta \cdot \frac{a^2}{\sqrt{2a.}} = \theta \frac{a}{\sqrt{2}}$$

প্রসরণ জনিত দৈর্ঘ্যের ততি :

DB কর্ণের দৈর্ঘ্যের ততি $= \theta . \dfrac{a}{\sqrt{2}} \Big| a\sqrt{2} = \dfrac{\theta}{2}$

ঠিক অনুরূপভাবে AC কর্ণের দৈর্ঘ্যের ততি $= -\theta/2$

অর্থাৎ কৃন্তন ততি θ দুটি অভিলম্ব দিকে $\theta/2$ এবং $-\theta/2$ দৈর্ঘ্যের ততির সঙ্গে সমতুল্য।

এবার পীড়নের কথা চিন্তা করুন মনে করুন DB এবং AC কর্ণাভিমুখী পীড়ন যথাক্রমে p এবং -p তাহলে দৈর্ঘ্যের ততি হবে যথাক্রমে

$$\frac{p}{Y} - \frac{\sigma}{Y}(-p) = \frac{p}{Y}(1+\sigma)$$

$$-\frac{p}{Y} - \frac{\sigma}{Y}p = -\frac{p}{Y}(1+\sigma)$$

এ দুটি ততি মিলে একটি কৃন্তন ততি হয়েছে θ যেখানে

$$\frac{\theta}{2} = \frac{p}{Y}(1+\sigma)$$

সুতরাং কৃন্তন বা দৃঢ়তা গুণাংক হবে

$$n = \frac{p}{\theta} = \frac{Y}{2(1+\sigma)} \tag{10.9}$$

অর্থাৎ আমরা একটি গুণাংক n কে Y এবং σ দিয়ে প্রকশ করতে পারি।

এবার একটি ঘনক কল্পনা করুন - মনে করুন এর প্রত্যেক অক্ষ বরাবরই সমান বল ক্রিয়াশীল - ফলত প্রত্যেক দিকেই দৈর্ঘ্যের পীড়ন p এবং সবগুলি মিলে একটি আয়তন পীড়ন p'র উদ্ভব হয়েছে সুতরাং

আয়তন ততি $\dfrac{\delta v}{v} = \dfrac{p}{k}$

আবার তিনটি দিকেই দৈর্ঘ্যের ততি

$$\frac{\delta \ell}{\ell} = \frac{p}{Y} - \frac{\sigma p}{Y} - \frac{\sigma p}{Y} = \frac{p}{Y}(1-2\sigma$$

এবং এর ফলে আয়তন ততি

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{3\delta \ell}{\ell} = \frac{3p}{Y}(1-2\sigma)$$

আয়তন ততির দুটি মান থেকে পাই

$$k = \frac{Y}{3(1-2\sigma)} \tag{10.10}$$

সীমকরণ (10.9) ও (10.10) থেকে বলা যায় যে যেহেতু **n, k, y** সংজ্ঞা অনুযায়ী ধনাত্মক হয়, σ 'র মান দুটি চরম মানের ভেতরে থাকতে হবে —

$$-1 \angle \sigma \angle 1/2$$

বাস্তবে σ অধিকাংশ ক্ষেত্রেই 1/3 'র কাছাকাছি।

অক্ষীয় গুণাংক (Axial modulus)

মনে করুন আয়তাকার দন্ডটিতে বহিঃস্থ বল এমভাবে প্রয়োগ করা হচ্ছে যাতে প্রস্থে কোন সংকোচন না হয়। মনে করুন দণ্ডের দৈর্ঘ্যে, প্রস্থে ও উচ্চতায় যথাক্রমে F_1, F_2 ও F_3 বল ক্রিয়া করছে। দণ্ডটির পৃষ্ঠত্রয়ের ক্ষেত্রফল যথাক্রমে A_1, A_2 ও A_3 এবং দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা ℓ, w, h। তিন দিকের ততি যথাক্রমে

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{1}{Y}\frac{F_1}{A} - \frac{\sigma}{Y}\frac{F_2}{A_2} - \frac{\sigma}{Y}\frac{F_3}{A_3}$$

$$= \frac{1}{Y}\frac{F_1}{A} - \frac{\sigma}{Y}\left(\frac{F_2}{A_2} + \frac{F_3}{A_3}\right) \tag{10.11}$$

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{1}{Y}\frac{F_2}{A_2} - \frac{\sigma}{Y}\left(\frac{F_1}{A_1} + \frac{F_3}{A_3}\right) \tag{10.12}$$

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{1}{Y}\frac{F_3}{A_3} - \frac{\sigma}{Y}\left(\frac{F_1}{A_1} + \frac{F_2}{A_2}\right) \tag{10.13}$$

আরোপিত সর্তানুসারে

$$\Delta w = \Delta h = 0$$

অতএব (10.12) ও (10.13) নং সমীকরণ থেকে পাই

$$\frac{F_2}{A_2} = \sigma\frac{F_1}{A_1} + \sigma\frac{F_3}{A_3}$$

$$\frac{F_3}{A_3} = \sigma\frac{F_1}{A_1} + \sigma\frac{F_1}{A_2}$$

অথবা

$$\sigma\frac{F_1}{A_1} - \frac{F_2}{A_2} + \sigma\frac{F_3}{A_3} = 0$$

$$\sigma\frac{F_1}{A_1} + \sigma\frac{F_2}{A_2} - \frac{F_3}{A_3} = 0$$

উপরের দুটি সমীকরণ সামাধান করে পাব

$$\frac{F_1/A_1}{1-\sigma^2} = \frac{F_2/A_2}{\sigma^2+\sigma} = \frac{F_3/A_3}{\sigma^2+\sigma}$$

অথবা $$\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_3}{A_3} = \frac{\sigma^2+\sigma}{1-\sigma^2}\frac{F_1}{A_1} = \frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{F_1}{A_1} \qquad (10.14)$$

(10.14) নং সমীকরণ থেকে $\frac{F_2}{A_2}, \frac{F_3}{A_3}$ এর মান (10.11) সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{1}{Y}\frac{F_1}{A_1} - \frac{\sigma}{Y}\left(\frac{2\sigma}{1-\sigma}\right)\frac{F_1}{A_1} = \frac{1}{Y}\left[1-\frac{2\sigma^2}{1-\sigma}\right]\frac{F_1}{A_1}$$

$$= \frac{1}{Y}\left(\frac{1-\sigma-2\sigma^2}{1-\sigma}\right)\frac{F_1}{A_1}$$

$$= \frac{1}{Y}\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}\frac{F_1}{A_1} \qquad (10.15)$$

অথবা $$\frac{F_1}{A_1} = Y\left[\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\right]\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{Y'\Delta\ell}{\ell}$$

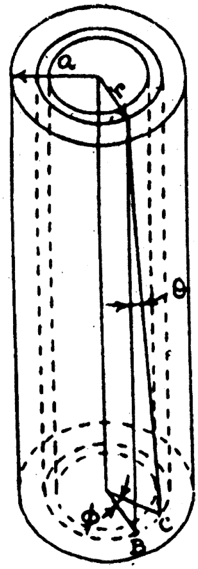
এখানে $Y' = \left[\dfrac{(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\right] Y$ (10.16)

অর্থাৎ দণ্ডের দুই পাশ দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ করলে টানের পীড়ন ও ততির অনুপাত কেবলমাত্র ইয়ং গুণাংক নয় σ 'র উপর নির্ভরশীল

10.6 বৃত্তকার দণ্ডের মোচড় (Torsion of a cylinder)

মোচড়ানো দণ্ডের ব্যবহার অনেক মেসিনে (machine) দেখা যায়। স্যাফটের একপ্রান্ত আবদ্ধ থাকে আর এক প্রান্তে মোচড় দেওয়া হয়। গ্যালভানোমিটারের কুণ্ডলী কোয়ার্য সূতা দিয়ে ঝোলানো থাকে। উপরের প্রান্ত আবদ্ধ থাকে ও নীচের প্রান্তে তারের কুণ্ডলী ঝোলে। কুণ্ডলীর ঘূর্ণনের সঙ্গে সূতার মুক্ত প্রান্তে মোচড় পড়ে।

মনে করুন একটি ℓ দৈর্ঘ্যের বৃত্তাকার প্রস্থচ্ছেদের দন্ডের উপরের প্রান্ত দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ এবং নীচের প্রান্ত ϕ কোণে মোচড়ানো হয়েছে। দণ্ডটিকে কতকগুলি ছোট ছোট সামক্ষ পাতলা স্তরের সমষ্টি বলে ভাবতে পারি। মোচড়ের ফলে বিভিন্ন স্তর একটু একটু ঘুরে যায়। আবদ্ধ প্রান্ত



(চিত্র 10.4)

থেকে স্তরের দূরত্বের সমানুপাতে এই কৌণিক চ্যুতি হবে। মোচড়ানো দণ্ডের আকৃতির বিকৃতি ঘটেছে; দৈর্ঘ্য বা আয়তনের পরিবর্তন হয় নি। ফলত দণ্ডের কৃন্তন ঘটেছে। মুক্ত প্রান্তে B বিন্দু মোচড়ের

ফলে C বিন্দুতে ঘূর্ণিত হয়েছে। স্পষ্টতঃই

$$\ell\theta = r\phi \tag{10.17}$$

এখানে B বিন্দু অক্ষ থেকে r দূরত্বে আছে। কৃন্তনের ততি

$$\theta = \frac{r}{\ell}\phi \tag{10.18}$$

এবং কৃন্তনের পীড়ন

$$g = n\theta = n\frac{r}{\ell}\phi \tag{10.19}$$

এখানে n কৃন্তন গুণাংক। লক্ষ্যণীয় যে কৃন্তন পীড়ন r এর অপেক্ষক; একই মোচড় Φ জনিত পীড়ন সর্বত্র সুষম নয়, r এর সঙ্গে সমানুপাতিক। দণ্ডের বিভিন্ন অংশে পীড়ন বিভিন্ন। r ও $r+dr$ ব্যাসার্ধের দ্বারা সীমাবদ্ধ বৃত্তাকার স্থানের ক্ষেত্রফল

$$\Delta A = 2\pi r dr \tag{10.20}$$

এই স্থানে পীড়ন g(r) হলে ΔA ক্ষেত্রফলে পীড়নজনিত স্পার্শক বল

$$\Delta G = g(r).2\pi r dr$$

এই বলের জন্য অক্ষের সাপেক্ষে ভ্রামক

$$\Delta\tau = r\Delta G$$

$$= g(r).2\pi r^2 dr$$

(স্পর্শক বল ΔG ও ব্যাসার্ধ r পরস্পরের লম্ব) অক্ষের সাপেক্ষে পীড়ন জনিত বলের মোট ভ্রামক

$$\tau = \int d\tau = 2\pi\int_o^a g(r)r^2 dr$$

(a – দন্ডের ব্যাসার্ধ) (10.19) নং সমীকরণ থেকে g(r) মান বসিয়ে পাই

$$\tau = 2\pi\frac{n}{\ell}\phi\int_o^a r^3 dr$$

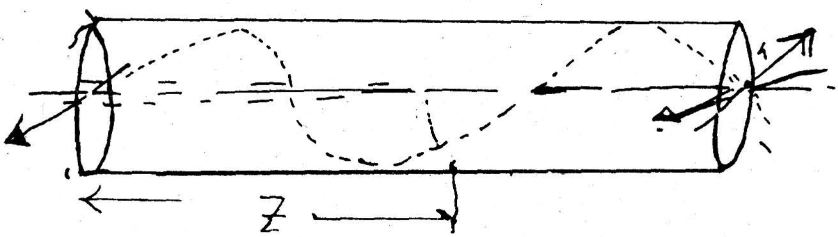
$$= \frac{n\pi a^4}{2\ell}\phi \qquad (10.21)$$

$$\text{অথবা } \Gamma = \frac{\tau}{\phi} = \frac{n\pi a^4}{2\ell} \qquad (10.22)$$

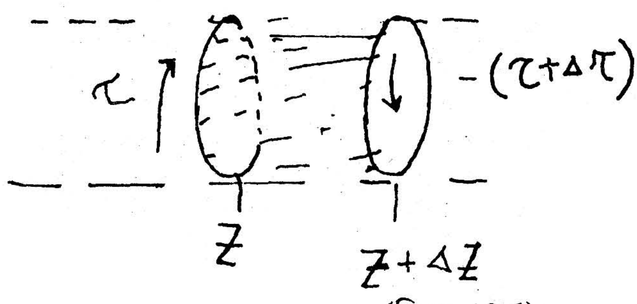
এক রেডিয়ান মোচড় দিতে Γ পরিমাণ ভ্রামক প্রয়োজন (torque per unit turot) ইহাকে মোচড়ের স্থিরাংক (Torsion constant) বা মোচড়ীয় দৃঢ়তাও (Torsional rigidity) বলে। প্রতি একক দৈর্ঘ্যে মোচড়ের স্থিরাংককে $\left(\frac{\Gamma}{\ell} = \frac{1}{2}n\pi a^4\right)$ মোচড়ের গুণাংক (Torsional modulus) বলা হয়।

10.6.1 ব্যবর্তন তরঙ্গ (Torsional wave)

মোচড়ের আনুষঙ্গিক ভ্রামকের অভিজ্ঞতা থেকে আমরা ব্যবর্তন তরঙ্গ আলোচনা করব।



(চিত্র 10.5)



(চিত্রও 10.6)

এক্ষেত্রে স্থির মোচড়ের পরিবর্তে স্থান ও সময় সাপেক্ষে পরিবর্তনশীল মোচড়ের কথা ভাবব। স্থির মোচড়ের জন্য দণ্ডের সর্বত্র ভ্রামক সমান ও $\frac{\phi}{\ell}$ এর সঙ্গে সামনুপাতিক (এখানে ℓ দূরত্বে কৌণিক চ্যুতি ϕ) (সমীকরণ 10.21 দ্রষ্টব্য)। যখন মোচড় সর্বত্র সমান নয়, দণ্ডের মধ্যে কোন বিন্দুতে (ধরা যাক z-

দূরত্বে) মোচড় জনিত স্থানীয় কৌণিক চ্যুতিই ঐ স্থানের ভ্রামকের নিয়ামক। তখন $\frac{\phi}{\ell}$ এর পরিবর্তে $\frac{\partial\phi}{\partial z}$ নিয়ে গণনা করতে হবে। এরূপ z - বিন্দুতে ভ্রামক হবে

$$\tau(z)=\frac{n\pi a^4}{2}\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{10.23}$$

z ও $z+\Delta z$ এর মধ্যে Δz স্থূলতার একটি স্তরের কথা ভাবা যাক। z প্রান্তে ভ্রামক $\tau(z)$ এবং দ্বিতীয় প্রান্তের ভ্রামক $\tau(z+\Delta z)$। ক্ষুদ্র $\Delta z-$ এর জন্য

$$\tau(z+\Delta z)=\tau(z)+\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)_z\Delta z$$

[চিত্রে $\tau(z)$ ও $\tau(z+\Delta z)$ এর দিক ভিন্ন দিকে কেন? ভাবুন : Δz স্থূলতার স্তরের z প্রান্তে বাম পার্শস্থ বস্তু ভ্রামক উৎপাদন করে আর $(z+\Delta z)-$ প্রান্তে ডান স্পার্শস্থ বস্তু ভ্রামকের জন্য দায়ী]

ঐ স্তরে লব্ধি ভ্রামক $\Delta\tau$ হবে

$$\Delta\tau=\tau(z+\Delta z)-\tau(z)=\frac{\partial\tau}{\partial z}.\Delta z$$

$$=\frac{n\pi a^4}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\Delta z \tag{10.24}$$

(10.23 নং সমীকরণ থেকে $\frac{\partial\tau(z)}{\partial z}$ 'র মান নিয়ে)

লব্ধি ভ্রামকের জন্য উক্ত স্তরের কৌণিক ত্বরণের সৃষ্টি হবে। স্তরটির ভর

$$\Delta m=\left(\pi a^2\Delta z\right)\rho$$

($\rho-$ ঘণত্ব)। বৃত্তাকার ঐ স্তরের দণ্ডের অক্ষের সাপেক্ষে জাড্য ভ্রামক

$$\Delta I=\frac{\Delta m a^2}{2}=\frac{\left(\pi a^4\Delta z\right)}{2}\rho \tag{10.25}$$

সুতরাং এক্ষেত্রে গতি সমীকরণ হবে

$$\Delta\tau = \Delta I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{10.26}$$

(10.24) ও (10.25) নং সমীকরণদ্বয় থেকে $\Delta\tau$ ও ΔI – এর মান (10.26) নং সমীকরণের বসিয়ে পাই

$$\frac{n\pi a^4}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\Delta z = \frac{\pi a^4 \Delta z}{2}\rho\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

অথবা $$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\rho}{n}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{10.27}$$

(10.27) নং সমীকরণ মোচড় তরঙ্গের প্রবাহ বোঝায়।

এই তরঙ্গের গতি

$$\vartheta_{tor} = \sqrt{\frac{n}{\rho}} \tag{10.28}$$

মোচড় তরঙ্গ কৃন্তন তরঙ্গের একটি বিশেষ রূপ। সাধারণ ভাবে কৃন্তন তরঙ্গে ততির কারণে মাধ্যমের কোন অংশের আয়তনের পরিবর্তন হয় না। দৃশ্যতই কৃন্তন তরঙ্গ তির্যক তরঙ্গ (transverse wave)

স্থিতিস্থাপক মাধ্যমে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গও সম্ভব। যেমন 'চাপজ' তরঙ্গ। বাতাসে ধ্বনি তরঙ্গ একটি চাপজ তরঙ্গ।

মাধ্যমের বস্তুর ঘনত্ব ও উপরিউক্ত দুই ধরনের তরঙ্গ বেগ মেপে স্থিতিস্থাপক গুণাংক Y ও n মাপা যায়। প্রসঙ্গ ক্রমে উল্লেখযোগ্য ভূমিকম্পের সময় এই দুই ধরণের তরঙ্গই উদ্ভূত হয় এবং ভিন্ন বেগ সম্পন্ন দুই তরঙ্গ ভূকম্পমাপক যন্ত্রে (seismograph) ভিন্ন সময়ে পৌছায়। এই সময়ের প্রভেদ থেকে ভূকম্পের উৎসের দূরত্ব অনুমান করা যায়।

10.7 ততি যুক্ত অবস্থায় স্থিতিশক্তি

(i) টানজ ততিযুক্ত দন্ডের স্থিতিশক্তি

মনে করি

ℓ_0 — দন্ডের অবিকৃত দৈর্ঘ্য

x - দন্ডের মোট বৃদ্ধি

দন্ডটির বৃদ্ধির পরিমাণ যখন x

তখন ততি $= \frac{x}{\ell_0}$

পীড়ন $= Y.\frac{x}{\ell_0}$ এবং বলের মান $Y\frac{x}{\ell_0}\cdot\alpha$ সুতরাং দৈর্ঘ্যের বৃদ্ধির x থেকে $x+dx$ করার জন্য পীড়নের বিরুদ্ধে কৃত কার্যের পরিমাণ $dw = Y\alpha\frac{x}{\ell}(dx)$ যেখানে α দন্ডটির প্রস্থচ্ছেদ।

সুতরাং, ততিশূণ্য অবস্থা থেকে দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি x করতে কৃত কার্যের পরিমাণ হবে $V = \int_0^x Y\frac{\alpha x}{\ell_0}dx = \frac{1}{2}Y\frac{\alpha}{\ell_0}x^2$ এই কৃতকার্যই দন্ডটির ততিজনিত স্থিতিশক্তি। একে স্থিতিস্থাপক শক্তি ও বলা হয়। লক্ষ্য করুন প্রতি একক আয়তনের স্থিতিশক্তি হবে $\left(\frac{1}{2}Y\frac{\alpha}{\ell_0}x^2\right)\Big/\alpha\cdot\ell_0 = \frac{1}{2}Y\frac{x}{\ell_0}\cdot\frac{x}{\ell_0} = \frac{1}{2}$ ততি $\times$ পীড়ন

(ii) <u>আয়তন বিকৃতির স্থিতিশক্তি</u> ঃ মনে করি উদস্থৈতিক (hydrostatic) চাপে এক বস্তুর আয়তন V থেকে V_0 তে পরিবর্তিত হয়েছে $(\vartheta_0 \angle \vartheta)$। এই সংকুচিত অবস্থায় বস্তুর স্থিতিশক্তি গণনা করা যাক। বস্তুটির আয়তন যখন $\vartheta(\vartheta_0 \angle \vartheta \angle V)$ তখন

ততি $= \frac{\vartheta - V}{V}$

পীড়ন $p = -k\frac{(\vartheta - V)}{V}$ (সমীকরণ 10.10 দ্রষ্টব্য)

ϑ আয়তন থেকে $\vartheta + d\vartheta$ আয়তনে প্রসারিত হতে অভ্যন্তরীন বল স্থিতিশক্তি ব্যয় করে কাজ করবে। $-dU$ যদি স্থিতিশক্তির হ্রাস হয় তবে $-dU = dw = p d\vartheta = -k\left(\frac{\vartheta - V}{V}\right)d\vartheta$ সংকুচিত আয়তন ϑ_0 থেকে স্বাভাবিক আয়তন V – তে ফিরতে মোট কার্যই সংকুচিত অবস্থার স্থিতিশক্তি। অতএব

$$-\int_{u}^{o} du = -k\int_{\vartheta_o}^{V}\left(\frac{\vartheta - V}{V}\right)d\vartheta$$

$$= -\frac{k}{v}\int_{\vartheta_o}^{v}\vartheta d\vartheta + k\int_{\vartheta_o}^{v} d\vartheta$$

$$= \frac{-1}{2}\frac{k}{v}\left(v^2 - \vartheta_o^2\right) + \frac{1}{2}\left(V - \vartheta_o\right)$$

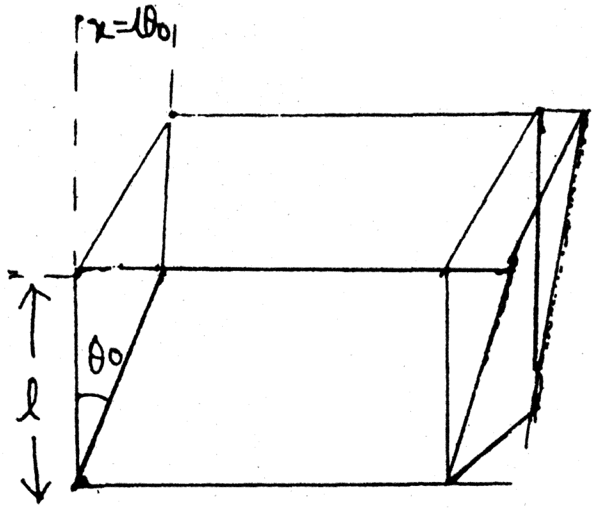
অথবা $U = \frac{1}{2}\frac{k}{v}(v - \vartheta_o)[2v - (v + \vartheta_o)]$

$$= \frac{1}{2}\frac{k}{v}(v - \vartheta_o)^2$$

$$= \frac{1}{2}k\left(\frac{v - \vartheta_0}{v}\right) \times \left(\frac{v - \vartheta_0}{v}\right) \times v$$

$$= \frac{1}{2} \text{ পীড়ন } \times \text{ তন্তি } \times \text{ আয়তন}$$

(iii) কৃন্তনে স্থিতিশক্তি



(চিত্র 10.7)

তভি $\theta \cong \tan\theta = \frac{x}{\ell}$

পীড়ন $= n\theta$

অভ্যন্তরীন বল $(F) = nA\theta$

স্থিতিশক্তির হ্রাস $-du = dw = F.(-dx)$

$$= nA\theta(-\ell d\theta)$$

অতএব $-\int_{u}^{0} du = -nA\ell \int_{\theta_0}^{0} \theta d\theta$

অথবা $u = nA\ell \frac{\theta_0^2}{2}$

$$= \frac{1}{2}(n\theta_0) \times \theta_0 \times (A\ell)$$

$= \frac{1}{2}$ পীড়ন $\times$ তভি $\times$ আয়তন

(iv) মোচড়ানো দন্ডের স্থিতিশক্তি

করে দেখুন

$$U = \frac{n\pi a^4}{4\ell}\phi_0$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n\pi a^4}{2\ell}\phi_0\right)\phi_0$$

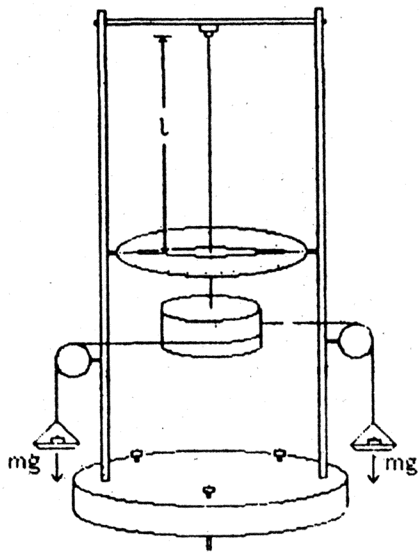
$$= \frac{1}{2}\tau_0 \phi_0$$

এখানে মনে রাখতে হবে ভ্রামকের দ্বারা কার্য $dw = \tau d\phi$

10.8 দৃঢ়তা গুণাংক মাপার পদ্ধতি

i) সাম্য অবস্থায় — দৃঢ়তা গুণাংক বা কৃন্তন গুণাংক মাপার জন্য বহিঃস্থ ভ্রামকের সাহায্যে একটি তারে মোচড় সৃষ্টি করা হয়। আবদ্ধ প্রান্ত থেকে নির্দিষ্ট দূরত্বে কৌণিক চ্যুতি মেপে (10.21) নং সমীকরণের সাহায্যে 'n' গর্ণনা করা হয়।

তারটির এক প্রান্ত একটি দৃঢ় অনমনীয় স্ট্যান্ডে আবদ্ধ থাকে। অপর প্রান্তে একটি ভারী চোঙ (cylinder) ঝুলানো হয়। ফলে তারটি উলম্ব ভাবে সোজা থাকে। দু'টি সমান ওজন (mg) পুলির (pullay) সাহায্যে চোঙের ব্যাসের দুই প্রান্তে, একই পরিমাণের স্পার্শক বল প্রয়োগ করে। এর ফলে বহিঃস্থ ভ্রামক mgd - এর দ্বারা তারটিকে মোচড় দেওয়া হয়, এখানে d- চোঙের ব্যাস। উপরের আবদ্ধ প্রান্ত থেকে ℓ দূরত্বে কৌণিক চ্যুতি (ϕ) বৃত্তাকার স্কেলে দিক্ দর্শকের সাহায্যে মাপা হয়।



(চিত্র 10.8)

সমীকরণ (10.21) থেকে

$$\tau = mgd = \frac{n\pi r^4}{2}\frac{\phi}{\ell}$$

এখানে ϕ রেড়িয়ানে বৃত্তাকর স্কেলের পাঠ ডিগ্রিতে থাকে, সেই কারণে

$$\varphi^0 = \frac{\pi}{180}\phi \text{ রেড়িয়ান}$$

উপরিউক্ত সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\tau = mgd = \frac{n\pi r^4}{2} \frac{1}{\ell} \cdot \frac{\pi\phi^\circ}{180}$$

এই সমীকরণ থেকে 'n' গণনা করা যায় d এবং r যথাক্রমে স্লাইড ক্যালিপার্স ও স্ক্রু গেজের সাহায্যে মাপা হয়।

(ii) মোচড় দোলকের সাহায্যে (Torsional pendulum)

এ ক্ষেত্রে একটি দৃঢ় স্ট্যান্ড থেকে ঝুলন্ত তারটির মুক্ত প্রান্তের সঙ্গে একটি ভারী ধাতব চোঙ লাগানো থাকে। চোঙটিকে অল্প ঘূর্ণন দিয়ে ছেড়ে দিলে তারের উপর মোচড় পড়বে। ϕ কৌণিক চ্যুতির জন্য পীড়ন জনিত প্রতিক্রিয়া ভ্রামক হবে $\frac{n\pi r^4}{2} \frac{\varphi}{l}$। এই ভ্রামক কৌণিক ত্বরণ $\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)$ সৃষ্টি করবে। এই দোলনের সমীকরণ $I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{n\pi r^4}{2\ell}\phi$, এখানে I অক্ষের সাপেক্ষে চোঙের জাড্য ভ্রামক।

অথবা $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + w^2\varphi = 0$

$$w^2 = \frac{n\pi r^4}{2\ell I},$$ এবং দোলন কাল (T)

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell I}{n\pi r^4}}$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{2\ell I}{n\pi r^4} \Rightarrow n = \frac{8\pi}{T^2}\frac{\ell I}{r^4}$$

ষ্টপ ঘড়ির সাহায্যে T মাপা হয়। স্ক্রু গেজের দ্বারা তারের বিভিন্ন স্থানে r মাপা হয়। প্রতি স্থলে পরস্পরের লম্ব অবস্থানে পাঠ নেওয়া দরকার।

10.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. নিম্নলিখিত রাশি গুলির ব্যাখ্যা লিখুন ঃ

পীড়ন, ততি, স্থিতিস্থাপকতার সীমা।

2. ততি পীড়ন লেখচিত্রর ব্যাখ্যা করুন। ঐ লেখচিত্র থেকে স্থিতিস্থাপকতার সীমা, স্থায়ীবৃদ্ধি চরম পীড়ন ও পরাভব বিন্দু-র ব্যাখ্যা দিন।

3. সমসত্ব, সমদৈশিক পদার্থের স্থিতিস্থাপক গুণাংক গুলির মধ্যো সম্পর্ক বের করুন।

প্রমাণ করুন (i) $\frac{9}{Y} = \frac{1}{k} + \frac{3}{n}$ (a)

(ii) $\sigma = \frac{3k-2n}{6k+2n}$ (b)

4. প্রমান করুন $-1 \angle \sigma \angle 0.5$ একটি সরু রবারের দন্ডকে টেনে বড় করলে যদি তার আয়তনের কোনও পরিবর্তন না হয় তবে পোয়াসঁর অনুপাত কত?

5. একটি জলাশয়ে উপরতলে ও 100 m নীচে জলের ঘনত্বের তুলনা করুন। দেওয়া আছে জলের সংনম্যতা $\frac{1}{22000}$ প্রতি এক বায়ুমন্ডল চাপে এবং পারদের ঘনত্ব 13.6 gm/cc.

6. কৃন্তনকে কিভাবে একদিকে টান ও তার সমকোণে একই মানের চাপের সম্মিলিত প্রয়োগের সমতুল্য মনে করা যায়। এই টানজ (বা চাপজ) ততির সঙ্গে কৃন্তনের ততির সম্পর্ক কি?

7. r ব্যাসর্ধের একটি বৃত্তাকার দন্ডকে মোচড় দেওয়া হয়েছে। কৃন্তনজনিত পীড়ন সর্বত্র সমান নয়। প্রস্থচ্ছেদের নিম্নলিখিত অংশ দ্বয়ের পীড়নের আনুষঙ্গিক ভ্রামকের তুলনা করুন।

(i) অক্ষ থেকে $\frac{r}{4}$ (ii) $\frac{3}{4}r$ থেকে r

8. r ও 2r ব্যাসার্ধের দুটি বৃত্তকার প্রস্থচ্ছেদের একই দৈর্ঘ্যর দুটি দন্ডকে সমাক্ষ ভাবে ঝালাই করা হলো। প্রথম দন্ডের মুক্ত প্রান্তকে দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ করে দ্বিতীয় দন্ডের মুক্ত প্রান্তে ϕ কোণে মোচড় দেওয়া হ'লো। সংযোগস্থলের কৌণিক চ্যুতি গণনা করুন। দুইটি দন্ড একই পদার্থের তৈরী।

9. একই পদার্থের সমান ভর দৈর্ঘ্যের বৃত্তকার প্রস্থচ্ছেদের দুটি দন্ড নেওয়া হল। একটি নিরেট ব্যাসার্ধ r, অপরটি ফাঁপা, অভ্যন্তরীন ও বহিঃস্থ ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1 এবং r_2 ফাঁপা দন্ডটি বেশী দৃঢ় কেন?

10.10 উত্তরমালা

সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. এই এককের 10.2 ও 10.3 অংশ দেখুন।

2. 10.3 অংশ দেখুন।

3. **সংকেত :** সমীকরণ দুটি

$$Y = 3k(1-2\sigma)$$

এবং $Y = 2n(1+\sigma)$

(a) সম্পর্কের জন্য সমীকরণদ্বয় থেকে σ কে অপনীত করে .... (a) পাবেন

$$\text{(ii)}\ \sigma = \frac{3k-2n}{6k+2n}$$

(b) সম্পর্কের জন্য Y কে অপনীত করতে হবে।

4. ধরা যাক $\frac{\Delta \ell}{\iota} = \alpha$ এবং $\frac{\Delta r}{r} = \beta$

$$\therefore \Delta\ell = \ell\alpha,\ \Delta r = r\beta$$

সুতরাং $\ell + \Delta\ell = \ell(1+\alpha),\ r - \Delta r = r(1-\beta)$

আয়তন সমান থাকে — অতএব

$$\pi r^2 \ell = \pi r^2 (1-\beta)^2 \ell(1+\alpha)$$

$$= \pi r^2 \ell(1-2\beta)(1+\alpha)$$

$$= \pi r^2 \ell(1-2\beta+\alpha)$$

α, β ক্ষুদ্র বলে প্রথম ঘাত পর্য্যন্ত রেখে

সর্তানুসারে $\alpha - 2\beta = 0$,

সংজ্ঞানুযায়ী $\sigma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha/2}{\alpha} = \frac{1}{2}$

5. **সংকেত :** আয়তন গুণাংক $k = \frac{-p}{\frac{\Delta V}{V}}$

$\therefore$ সংনম্যতা $C = -\frac{\Delta V}{V}\frac{1}{p}$

$$= \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1} \cdot \frac{1}{p}$$

এখানে ϑ_1, ϑ_2 উপরতলে ও নীচে 1 gm জলের আয়তন (specific volume)

অথবা $C = \left(1 - \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)\frac{1}{p} = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{1}{p}$

(ρ ঘনত্ব)

সুতরাং $\frac{\rho_1}{\rho_2} = -1 - c.p$

100 মিঃ জলের তলে $p = 10^4 \times 1 \times 980.\frac{\text{ডাইন}}{\text{সেমি}^2}$

$$C = \frac{1}{2000} \text{ প্রতি একক বায়ুমন্ডল চাপে}$$

$$= \frac{1}{2000} \times \frac{1}{76 \times 13.6 \times 980}$$

$$\therefore Cp = \frac{1}{2000} \times \frac{10^4}{76 \times 13.6}$$

$$= 4.8 \times 10^{-3}$$

$$\therefore \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - cp = .99516$$

6. অনুচ্ছেদ 5 অলোচনা দেখুন।

সমীকরণ (10.21) হতে $\tau = \frac{n\pi r^4}{2} \frac{\phi}{\ell}$

(i) অক্ষ হতে $\frac{r}{4}$ অংশের জন্য $\tau_1 = \frac{n\pi}{2}\left(\frac{r}{4}\right)^4 \frac{\phi}{\ell}$

(ii) $\frac{3}{4}r$ হতে r এর জন্য

$$\tau_2 = \frac{2\pi n\phi}{\ell}\int_{\frac{3}{4}r}^{r} r^3 dr$$

$$= \frac{n\pi r^4}{2\ell}\phi\left[1 - \frac{3^4}{4^4}\right]$$

$$= \frac{n\pi r^4}{2\ell}\phi\left(\frac{4^4 - 3^4}{4^4}\right)$$

$$\therefore \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{1}{4^4 - 3^4} = \frac{1}{175} = 5.7\times 10^{-3}$$

8. **সংকেত ঃ** মনে করি সংযোগ স্থলের কৌণিক চ্যুতি Ψ এবং প্রযুক্ত ভ্রামকের মান τ । এই ভ্রামক সর্বত্র সমান এবং প্রথম প্রান্তের তুলনায় সংযোগ তলে Ψ কৌণিক চ্যুতি ঘটায় এবং সংযোগ তলের তুলনায় মুক্ত প্রান্তে কৌণিক চ্যুতির মান $(\phi - \Psi)$ । অতএব

$$\tau = \frac{n\pi r^4}{2\ell}(\Psi - o) = \frac{n\pi (2r)^4}{2\ell}(\varphi - \Psi)$$

$$\therefore \Psi = \frac{16}{17}\phi$$

9. নিরেট দণ্ডকে ϕ কোণে মোচড় দিতে প্রয়োজনীয় ভ্রামক $\tau_1 = \frac{n\pi r^4}{2\ell}\phi$

ফাঁপা দণ্ডের ক্ষেত্রে এই ভ্রামকের মান

$$\tau_2 = \frac{n\pi}{2\ell}\phi\left(r_2^4 - r_1^4\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{r_2{}^4 - r_1{}^4}{r^4} = \frac{\left(r_2{}^2 - r_1{}^2\right)\left(r_2{}^2 + r_1{}^2\right)}{r^4} \qquad \text{(i)}$$

যেহেতু ভর সমান

$$\pi r^2 \ell\rho = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)\ell\rho$$

$$\Rightarrow r^2 = r_2^2 - r_1^2$$

$$\therefore \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} > 1$$

দেখা যাচ্ছে ফাঁপা দন্ডকে মোচড় দিতে বেশী ভ্রামকের দরকার। ফাঁপা দন্ড স্যাফ্‌টের (shaft) পক্ষে বেশী উপযোগী।

10.11 পরিশিষ্ট ঃ বিভিন্ন বস্তুর স্থিতিস্থাপক গুণাংক ও গলনাংক

বস্তুর নাম	ইয়ং গুণাংক Y $\frac{\text{Newton}}{m^2} \times 10^{10}$	আয়তন গুণাংক K $\frac{\text{Newton}}{m^2} \times 10^{10}$	কৃন্তন গুণাংক n $\frac{\text{Newton}}{m^2} \times 10^{10}$	পোয়াসঁ অনুপাত σ	গলনাঙ্ক (^{o}c)
ভালকানাইজ্‌ করা রবার	0.10-0.70	--	.00016	0.46-0.49	
অ্যালুমিনিয়াম	7.05	7.46	2.67	0.34	660
তামা	12.4-12.9	14.3	3.9-4.0	0.26	1083
স্টীল	19.5-20.6	18.1	7.9-8.9	0.25-0.33	
পেটালোহা	19-20	14.6	7.7-8.3	0.27	1527
ফস্‌ফর্‌ ব্রোঞ্চ	12.0	14.0	4.4	0.33	

উচ্চ গলনাংক আনবিক বলের প্রাধান্যের পরিচায়ক। গলনাংক উচ্চ হলে স্থিতিস্থাপকতার গুণাংকের মানও বেশী হয়।

একক 11 ▫ বীম ও স্প্রিং

গঠন

11.1 প্রস্তাবনা

কোন একটি দন্ডাকৃতি বস্তুকে এক বা উভয় প্রান্তে আবদ্ধ করে অথবা দুই প্রান্তকে দৃঢ় আলম্বের উপর স্থাপন করে অনুভূমিকভাবে রাখলে তাকে আমরা বীম (beam) বলি। বীমের দৈর্ঘ্য সর্বদাই প্রস্থ বা উচ্চতার তুলনায় বেশী হয়। বীমের ব্যবহারের সঙ্গে আমরা খুবই পরিচিত। বাড়ি তৈরীর সময় ছাদের তলায় যে কংক্রীটের বীম রাখা হয় বা পুরানো বাড়িতে যে কড়ি বরগা থাকে যেগুলি আপনি নিশ্চয়ই দেখেছেন। সেতু, আসবাবাপত্র, যন্ত্রপাতিতেও আপনি লক্ষ্য করলে বীমের ব্যবহার দেখতে পাবেন। বীমের ধর্ম, অর্থাৎ সেটি কতটা ভার বহন করতে পারে, ভারের প্রভাবে তার কতটা বংকন ও নমন ঘটে এগুলি স্থপতি

যন্ত্রপাতির প্রস্তুতকারক প্রভৃতির কাছে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। এই ধর্ম বীমের আকার ও আকৃতি ছাড়াও তার উপাদানের স্থিতিস্থাপক ধর্মের উপরও নির্ভর করে। পূর্ববর্তী এককে আপনি স্থিতিস্থাপক সম্বন্ধে যা জেনেছেন এই এককে আপনি তার সরাসরি প্রয়োগ দেখতে পাবেন। এখানে আমরা সমসত্ত্ব উপাদানে নির্মিত সমান প্রস্থচ্ছেদের বীমের কথাই আলোচনা করব।

বীমের মত নানাধরণের স্প্রিং এর সঙ্গে আপনি নিশ্চয়ই পরিচিত। স্প্রিং এর আকৃতি নানারকম হতে পারে। আমরা এই এককে সমান ব্যাসার্ধের স্ক্রুর মত পেঁচানো (helical) স্প্রিংএর বিষয়ে আলোচনা করব। এধরনের স্প্রিং এর আপনি স্প্রিং তুলায় সাইকেলের সীটের তলায় বা ডট পেনের মধ্যে দেখে থাকবেন। অবশ্য বীম যেমন কাঠ, ধাতু বা ইস্পাতের দন্ড দিয়ে জোরদার করা কংক্রীটের হতে পারে, স্প্রিং এর বেলা তা সম্ভব হয় না। বিশেষ আকৃতি এবং প্রয়োজনীয় স্থিতিস্থাপক ধর্মের চাহিদা মেটাতে পান দেওয়া ইস্পাত পা ঐ ধরণের ধাতুই পেঁচাল স্প্রিং তৈরী করতে ব্যবহার করা হয়। এই এককে আমরা স্প্রিং থেকে ঝোলানো ভারের সঙ্গে প্রলম্বিত স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্যের পরিবর্তনের মান নির্ণয় করব। আপনি লক্ষ্য করবেন যে এক্ষেত্রেও স্প্রিং-এর আকার ছাড়াও তার উপাদানের স্থিতিস্থাপক ধর্মও আমাদের বিবেচনা করতে হবে।

উদ্দেশ্য :

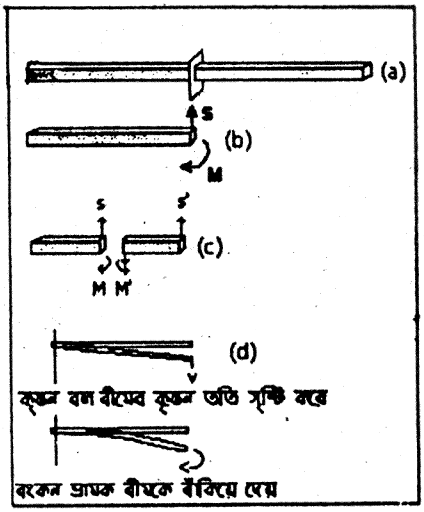
এই এককটি থেকে আমনি স্থিতিস্থাপক পদার্থে নির্মিত বীম ও স্প্রিং এর ধর্ম সম্বন্ধে অনেক তথ্যই জানতে পারবেন। এর ফলে যে কাজগুলি আপনি করতে পারবেন সেগুলি হল :

- স্থিতিস্থাপক পদার্থে নির্মিত বীমের ক্ষেত্রীয় ভ্রামক ও বংকন দৃঢ়তার সংজ্ঞা দিতে পারবেন এবং বাস্তবক্ষেত্রে এগুলির মান নির্ণয় করতে পারবেন।
- বীমের ক্ষেত্রে কার্যকরী কৃন্তন বল ও বংকন ভ্রামকের সংজ্ঞা দিতে পারবেন এবং বীমের বিভিন্ন প্রস্থচ্ছেদে এগুলির মান নির্ধারণ করে কৃন্তন বলচিত্র এবং বংকন ভ্রামকচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন।
- ক্যান্টিলিভার বীম ও দুইপ্রান্তে আলম্বিত বীমর উপর ভার প্রয়োগের ফল বিশ্লেষণ করতে পারবেন এবং বীমের নতি ও নমনের মান নির্ণয় করতে পারবেন।
- পেঁচালো স্প্রিং - এ ভার প্রয়োগের ফলে সেটির নমনের কারণ ব্যাখ্যা করতে পারবেন এবং নমনের পরিমাণ গণনা করতে পারবেন।

11.2 স্থিতিস্থাপক বীম

11.1(a) চিত্রে দুই প্রান্তে আলম্বের উপর রাখা সমান প্রস্থচ্ছেদের একটি অনুভূমিক বীম দেখানো হয়েছে। ধরে নিন XX′ তলটি বীমটিকে লম্বভাবে ছেদ করে সেটিকে A ও B এই দুই অংশে বিভক্ত করছে। সহজেই বোঝা যায় যে A অথবা B কোন অংশই অন্যটির অনুপস্থিতিতে সাম্যাবস্থায় থাকবে না। যদি শুধু A অংশটি কল্পনা করা যায় B অংশ সেটির উপর যে বলগুলি প্রয়োগ করে সেটিকে সাম্যে রাখে (চিত্র 11.1[b]) যেগুলিকে একটি বল S এবং একটি M ভ্রামকের বলযুগ্মের দ্বারা প্রকাশ করা যায়। আবার আপনি যদি শুধু B অংশটি কল্পনা করেন বে নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্রের অনুযায়ী বোঝা যায় যে A অংশটি B অংশের উপর যে সব বল প্রয়োগ করে সেটিকে সাম্যে রাখে যেগুলি S এর বিপরীত বল S′ এবং M এর বিপরীত ভ্রামকের বলযুগ্ম M′ এর সমতুল্য হবে (চিত্র 11.1C) S এবং S′ বল বীমের প্রস্থচ্ছেদের উপর অনুপ্রস্থভাবে কাজ করে। এই বলগুলিকে কৃন্তন বল বলা হয় কেননা, আপনি আগেই জেনেছেন এ জাতীয় বল কৃন্তন সৃষ্টি করে। M অথবা M′ বলযুগ্ম বীমের উপর ক্রিয়া করলে তার ফল কী হবে? আপনার মনে হতে পারে যে M বলযুগ্ম বীমের A অংশোর ঘূর্ণন সৃষ্টি করবে। এক্ষেত্রে মনে রাখতে হবে যে বীমের প্রান্তগুলি যে আলম্বের উপর স্থাপিত যেগুলি বীমের উপর প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে এবং এই বলগুলির ভ্রামক M বা M′ বলযুগ্মের বিপরীতমুখে ক্রিয়া করে। এর ফলে বীমটির বংকনের (curvature) সৃষ্টি হয়। (চিত্র 11.1d) M এ M′ কে তাই বংকন-ভ্রামক (Bending moment) বলা হয়।

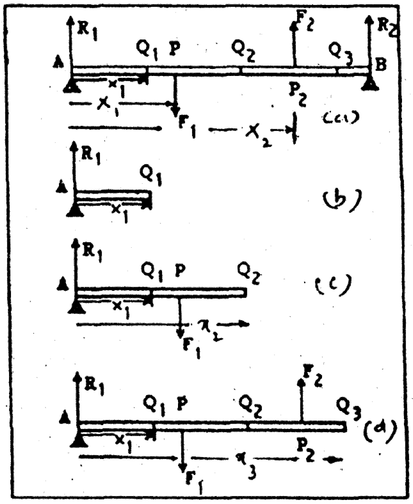
যে কোন বীমের বংকন ও নমন নির্ণয় করতে তার প্রতি প্রস্থচ্ছেদে কৃন্তন বল ও বংকন ভ্রামকের মান নির্ণয় করা প্রয়োজন। এখন আমরা একটি উদাহরণ বিবেচনা করব, যা থেকে আপনি এর পদ্ধতিটি বুঝতে পারবেন। বীমর যে কোনও বিন্দুতে কৃন্তন বল ও বংকন ভ্রামক বলতে আমরা সেই বিন্দুর বামদিকের অংশে প্রযুক্ত বল ও বলযুগ্মকেই নির্দেশ করব। ঊর্ধ্বমুখী কৃন্তন বল এবং দক্ষিণাবর্তী (ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের মত) বংকন ভ্রমককে আমরা পজিটিভ বলে কল্পনা করব, যদিও এ বিষয়ে যে কোনও রীতিই গ্রহণ করা যেতে পারে।



চিত্র 11.1

11.2.1 কৃন্তন বল ও বংকন ভ্রামকের মান নির্ণয়

ধরে নিন, AB একটি সুষম প্রস্থচ্ছেদের অনুভূমিক বীম এবং সেটি A ও B বিন্দুতে দুটি ক্ষুরাকৃতি আলম্বের উপর আলগাভাবে বসানো আছে (চিত্র 11.2a)। বীমটির নিজস্ব ওজন নগণ্য ওবং তার P_1 ও P_2 বিন্দুতে যথাক্রমে F_1 ও F_2 বল চিত্রে প্রদর্শিত দিকে কাজ করছে। আলম্ব দুটিও A ও B বিন্দুতে বীমের উপর যথাক্রমে R_1 ও R_2 প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করছে। A থেকে P_1 ও P_2 বিন্দুর দূরত্ব যথাক্রমে X_1 ও X_2, বীমের দৈর্ঘ্য $AB = \ell$ এবং A থেকে বীমের মধ্যে Q_1 বিন্দুর দূরত্ব $AQ_1 = x_1$ $(x_1 < x)$। ধরা যাক বীমের AQ_1 অংশটি 11.2b চিত্রটি দেখানো হয়েছে। পূর্বের মত S ও M যথাক্রমে AQ_1



চিত্র 11.2

অংশের উপর মোট উল্লম্ব বল $= S + R_1 = 0$, অর্থাৎ Q_1 বিন্দুতে $S = -R_1$ (11.1a)

এবং A বিন্দুর সাপেক্ষে মোট ভ্রামক $= M - Sx_1 = 0$, অর্থাৎ $M = Sx_1 = -R_1x_1$ (11.1b)

এবার বীমের AQ_2 অংশটি বিবেচনা করা যাক (চিত্র 11.2c) পূর্বের যুক্তি

অনুযায়ী, মোট উল্লম্ব বল $S + R_1 - F_1 = 0$ অর্থাৎ Q_2 বিন্দুতে $S = -R_1 + F_1$ (11.1c)

এবং A বিন্দুর সাপেক্ষে মোট ভ্রামক $= M - Sx_2 + F_1X_1 (X_1 < x_2 < X_2)$ অর্থাৎ $M = Sx_2 - F_1X_1$

$$= (-R_1 + F_1)x_2 - F_1X_1 = -R_1x_2 + F_1(x_2 - X_1) \quad (11.1d)$$

অনুরূপভাবে বীমের AQ_3 অংশটি বিবেচনা করলে আপনি পাবেন (চিত্র 11.2d)

Q_3 বিন্দুতে $S = -R_1 + F_1 - F_2$ (11.1e)

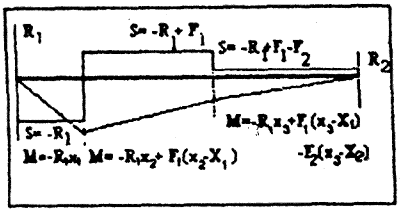
এবং $M = -R_1x_3 + F_1(x_3 - X_1) - F_2(x_3 - X_2) \quad (x_3 > X_2)$ (11.1f)

এক্ষেত্রে আপনি সহজেই F_1, F_2, X_1, X_2 ও বীমের মোট দৈর্ঘ্য ℓ এর হিসাবে R_1 এর মান নির্ণয়

করতে পারেন। B বিন্দুর উপর কার্যকরী সব বলের মোট ভ্রামক $R_1\ell - F_1(\ell - X_1) + F_2(\ell - X_2)$ যেহেতু বীমটি সাম্যে আছে, অতএব এই ভ্রামকের মান শূন্য। এথেকে দেখা যায়

$$R_1 = F_1 - F_2 + \frac{F_2X_2 - F_1X_1}{\ell} \tag{11.2}$$

আবার যেহেতু বীমের সাম্যের জন্য মোট উল্লম্ব বল, $R_1 - F_1 + F_2 + R_2 = 0$



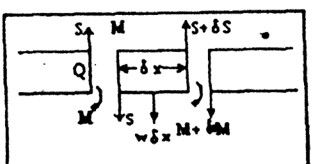
চিত্র 11.3

$$R_2 = -R_1 + F_1 - F_2 = \frac{F_1X_1 - F_2X_2}{\ell} \tag{11.3}$$

এখন আমরা বীমের দৈর্ঘ্য বরাবর A বিন্দু থেকে দূরত্ব x এর সঙ্গে কৃন্তন বল ও বংকন ভ্রামকের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারি। 11.3 চিত্রে 11.1(a, b, c) সমীকরণে প্রাপ্ত কৃন্তন বল ও 11.1 (b, d, f) সমীকরণে প্রাপ্ত বংকন ভ্রামকের মানগুলি দেখানো হয়েছে। এ ধরনের লেখচিত্রকে কৃন্তন বলচিত্র (Shearing force diagram) ও বংকন ভ্রামক চিত্র (bending moment diagram) বলা হয়।

ভারী বীম : আগের আলোচনায় আমরা বীমের ওজন নগন্য ধরেছি। 11.1 সমীকরণগুলি থেকে আপনি বুঝতে পারছেন যে এক্ষেত্রে F_1 ও F_2 বলগুলিই কৃন্তন ও বংকনের কারণ, কেননা এগুলি না থাকলে R_1, R_2 এবং কৃন্তন বল S, বংকন ভ্রামক M শূন্য হত। এবারে আমরা বীমর নিজস্ব ওজন শূন্য না ধরে প্রতি ওকক দৈর্ঘ্য পিছু w ধরব। বীমের মধ্যে অতিক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য , δx ধরা যাক (চিত্র 11.4) যার ওজন $w\delta x$ । এটি বামদিকের বীমের অংশের উপর S কৃন্তন বল এবং M বংকন ভ্রামক প্রয়োগ করে। প্রতিক্রিয়া হিসাবে বামদিকের অংশটিও এর উপর বিপরীত বল $-S$ ও বংকন ভ্রামক $-M$ প্রয়োগ করে। আবার এর ডানদিকের অংশ δx দৈর্ঘ্যের অংশটির উপর $S + \delta x$ কৃন্তন বল এবং $M + \delta M$ বংকন ভ্রামক প্রয়োগ করে ক্ষুদ্র অংশটি যেহেতু সাম্যে রয়েছে, অতএব এটির উপর মোট উল্লম্ব বল $s + \delta s - s - w\delta x = 0$

অর্থাৎ $\delta s = w\delta x$



চিত্র 11.4

বা, $\delta x \to 0$ হলে $\dfrac{ds}{dx} = w \qquad (11.4)$

আবার P বিন্দুর উপর ভ্রামক বিবেচনা করলে

$$M + \delta M - M - (s + \delta s)\delta x + w\delta x \cdot \frac{\delta x}{2} = 0$$

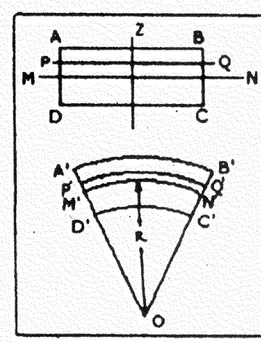
বা, $\delta x \to 0$ সীমায়, $\delta s \cdot \delta x$ কে নগণ্য ধরে, $\frac{dM}{dx} = s$ । (11.5)

11.4 ও 11.5 সমীকরণ দুটিকে একত্র করে , $w = \frac{d^2M}{dx^2}$ (11.6)

উপরের 11.4 ও 11.6 সমীকরণ দুটি থেকে আপনি বুঝতে পারছেন যে বীজের ওজন যদি নগণ্য হয় তবে $w = 0$ হবে। এর ফলে S এর মান বীমের দৈর্ঘ্য বরাবর সমান থাকবে এবং M বীমের দৈর্ঘ্য বরাবর দূরত্বের সঙ্গে রৈখিকভাবে বাড়বে বা কমবে।

11.2.2 ক্ষেত্রীয় ভ্রামক ও বংকন দৃঢ়তা

এবার আমরা বংকন ভ্রামকের সঙ্গে বীমের বক্রতার সম্পর্ক সম্বন্ধে আলোচনা করব। ধরা যাক ABCD পীড়নের পূর্বে বীমের একটি ক্ষুদ্র অংশে (চিত্র 11.5)। বল প্রয়োগের ফলে বেঁকে যাওয়ার পর এই অংশটি A'B'C'D' রূপ গ্রহণ করে। দেখা যাক যে বংকনের ফলে বক্রতা কেন্দ্র O এর নিকটবর্তী প্রান্তে বীমের দৈর্ঘ্য বরাবর লম্বিত তন্তুগুলি সংকুচিত হয় এবং দূরবর্তী প্রান্তের তন্তুগুলি প্রসারিত হয়। অর্থাৎ $C'D' < CD$ এবং কিন্তু $A'B' > AB$ । বীমের মধ্যে একটি তল থাকে, যে তলে তন্তুগুলির দৈর্ঘ্য বীমের বংকন সত্ত্বেও অপরিবর্তিত থাকে। চিত্রে MN রেখাটি এই তলটিকে নির্দেশ করছে। বীমের বক্র অবস্থায় MN রেখাটি M'N' বক্ররেখায় পরিণত হয়। দৈর্ঘ্যের হিসাবে MN = M'N' । অতিহীন এই তলটিকে নিরপেক্ষ তল (Neutral layer) বলা হয়। আমরা এই তলে বীমের দৈর্ঘ্য বরাবর x-অক্ষ এবং এই তল থেকে উর্ধ্বমুখে z অক্ষ কল্পনা করব। ধরে নিন বক্র অবস্থায় M'N' রেখার বক্রতা ব্যাসার্ধ R এবং বক্রতা কেন্দ্রে এই বক্ররেখাটি $\delta\theta$ কোণ উৎপন্ন করছে।

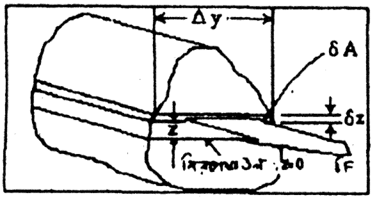


চিত্র 11.5

বীমরে মধ্যে নিরপেক্ষ তলের উপরে বা নীচে ততির পরিমাণ কত হবে? এটি নির্ণয় করতে নিরপেক্ষ তল থেকে z উচ্চতায় PQ স্তর কল্পনা করুন। বীমাটি বেঁকে যাওয়ার পর এটি P'Q' অবস্থায় থাকবে। সুতরাং এই স্তরে ততি

$$= \frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{(R+z)\delta\theta - R\delta\theta}{R\delta\theta} = \frac{z}{R}$$

যেহেতু বীমের তন্তুগুলি দৈর্ঘ্যে প্রসারণ বা সঙ্কোচন ঘটছে এবং অনুপ্রস্থ দিকে সেগুলি অবাধে সঙ্কুচিত বা প্রসারিত হতে পারে। অতএব এক্ষেত্রে পীড়ন ও ততির অনুপাত হবে বীমের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক Y। বীমের প্রস্থচ্ছেদের উপর z ও $z+\delta z$ স্থানাঙ্কের মধ্যে Δy প্রস্থ ও δz উচ্চতার ক্ষেত্রটুকু বিবেচনা করলে দেখা যাবে এই ক্ষেত্রটির উপর পীড়ন বল $\delta F = Y \times$ ততি $\times$ ক্ষেত্রফল



চিত্র 11.6

$$= Y \cdot \frac{z}{R} \times \Delta y \cdot \delta z = Y \frac{z}{R} \cdot \delta A$$ ধরা যাক,

যেখানে $\delta A = \Delta y.\delta z$

সুতরাং সমগ্র প্রস্থচ্ছেদের উপর মোট টান

$$F = \int \delta F = \int Y.\frac{z}{R}\delta A$$

$$= \frac{Y}{R}\int z\delta A$$

সমাকলনটির মান নির্ণয় করতে হলে z এর বিভিন্ন মানের জন্য প্রস্থচ্ছেদের প্রস্থ Δy এর মান জানা প্রয়োজন। তবে সাধারণভাবে আপনি সমাকলনটির মান লিখতে পারেন $\bar{z}A$, যেখানে $\bar{z} = z$ এর গড় মান এবং $A =$ প্রস্থচ্ছেদের মোট ক্ষেত্রফল। সুতরাং মোট টান $F = \frac{Y}{R}\bar{z}A$

বিশুদ্ধ বংকনের ক্ষেত্রে বীমের প্রস্থচ্ছেদের উপর কোন মোট টান থাকে না।

সুতরাং $\bar{z}$ এর মান শূন্য হবে। বস্তুতঃ $\bar{z} = 0$ সর্তটিই নিরপেক্ষ তলের অবস্থান নির্ধারণ করে।

এবার আমরা $z = 0$ রেখার উপর পীড়ন বলগুলির ভ্রামক নির্ণয় করব। δA ক্ষেত্রফলে উপর কার্যকরী $\delta F = \frac{Y}{R} z\delta A$ বলটির ভ্রামক $\frac{Y}{R} z^2\delta A$। সুতরাং প্রস্থচ্ছেদের উপর কার্যকরী মোট বলযুগ্মের ভ্রামক

$$M = \int \frac{Y}{R} z^2 \delta A$$

বা $$M = \frac{Y}{R} I \tag{11.7}$$

যেখানে $I = \int z^2 \delta A$, রাশিটিকে নিরপেক্ষ তলের উপর $z = 0$ রেখার উপর প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফলের দ্বিঘাত ভ্রামক (quadratic or second areal moment) বা ক্ষেত্রীয় ভ্রামক (areal moment) বলা হয়। আপনি হয়ত বুঝতে পারছেন, যে ভ্রামক M ই বীমের উপর কার্যকরী বংকন ভ্রামক। যার সঙ্গে আপনি ইতিপূর্বেই পরিচিত হয়েছেন। 11.7 সমীকরণ থেকে এটি স্পষ্ট যে বংকন ভ্রামক বক্রতা ব্যাসার্ধের ব্যাস্তানুপাতী অথাৎ বক্রতার সামনুপাতী। YI রাশিটি যত বড় হয়, নির্দিষ্ট বক্রতার সৃষ্টি করতে তত বেশী বংকন ভ্রামকের প্রয়োজন হয়। এজন্য YI রাশিটিকে আমরা বীমের বংকন দৃঢ়তা (flexural rigidity) বলি। সাধারণভাবে বীমের বংকন-দৃঢ়তা যথেষ্ট বেশী হয় এবং তার ফলে বক্রতা খুবই অল্প থাকে। এই অবস্থায় $x - z$ তলে বীমের সমীকরণে লিখলে দেখা যাবে $\frac{dz}{dx}$ অর্থাৎ বীমরে নতি সর্বদাই খুবই সামান্য $(<< 1)$ হবে এবং বক্রতা $\frac{1}{R}$ এর পরিবর্তে $\frac{d^2z}{dx^2}$ লেখা যারে (কেননা গাণিতিকভাবে বক্রতা $\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$)। সুতরাং বীমের অবকল সমীকরণ হবে

$$M = YI \frac{d^2z}{dx^2} \tag{11.8}$$

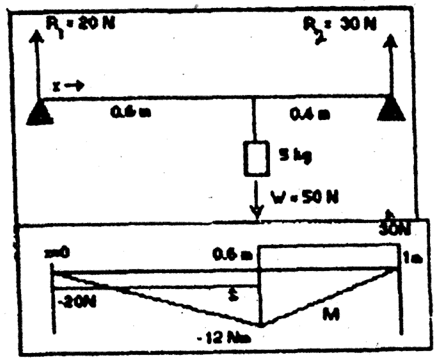
11.8 সমীকরণে M এর মান বসিয়ে এবং উপযুক্ত সীমান্ত সর্তাবলী প্রয়োগ করে এটির সমীকরণ করা যেতে পারে। এই সামধানই বংকনের পর বীমের আকৃতি নির্দেশ করবে।

এবার কয়েকটি উদাহরণ আলোচনা করা যাক, যার থেকে আপনার পূর্বে আলোচিত বিষয়গুলি বুঝতে সুবিধা হবে।

উদাহরণ 1. 1m লম্বা একটি হালকা সুষম বীম দুইপ্রান্তে আলম্বিত আছে। বীমের বামপ্রান্ত থেকে 60cm দূরে 5 kg ওজন ঝোলানো আছে। বীমটির কৃন্তন বলচিত্র ও বংকন ভ্রামক চিত্র অংকন করতে হবে। আমরা ধরে নেব $g = 10ms^{-2}$।

ধরা যাক AB বীমটির P বিন্দুতে ওজনটি ঝোলানো আছে, ফলে ঐ বিন্দুতে $w = 5 \times 10 = 50N$ নিম্নমুখী বল কাজ করছে। A ও B বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া বল যথাক্রমে R_1 ও R_2।

B বিন্দুর উপর w, R_1, R_2 এর ভ্রামক



চিত্র 11.7 এবং 11.8

$$R_1 \times 1m - W \times 0 \cdot 4m = 0,$$ অর্থাৎ

$$R_1 = W \times 0 \cdot 4 = 50 \times 0 \cdot 4 = 20N$$

A ও P বিন্দুর মধ্যে A থেকে x m দূরে কৃন্তন বল $S = -R_1 = -20N$ (নেগেটিভ চিহ্ন নিম্নমুখী বল বোঝাচ্ছে)

এবং বংকন ভ্রামক $= -R_1 x = -20x \quad Nm$।

P বিন্দুতে $(x = 0 \cdot 6m)$ বংকন ভ্রামকের মান $-20 \times 0 \cdot 6 = -12\,Nm$।

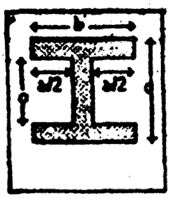
P ও B বিন্দুর মধ্যে A থেকে x m দূরে কৃন্তন বল $S = -R_1 + W = -20N + 50N = 30N$ এবং বংকন ভ্রামক

$$= -R_1 x + w(x - 0 \cdot 6) = -20x \quad Nm + 50(x - 0 \cdot 6)\,Nm$$

$$= (30x - 30)Nm$$

এখন আমরা কৃন্তন বলচিত্র এবং বংকন ভ্রামকচিত্র আঁকতে পারি।

উদাহরণ 2 : আপনি ক্ষেত্রীয় ভ্রামক সম্বন্ধে পড়েছেন। আসুন একটি I - আকৃতির প্রস্থচ্ছেদ বিশিষ্ট বীমের জন্য ক্ষেত্রীয় ভ্রামক নির্ণয় করা যাক। প্রস্থচ্ছেদের পরিমাপগুলি চিত্রে দেখানো হল। প্রতিসাম্য থেকে বোঝা যায় যে এক্ষেত্রে অনুভূমিক মধ্যমা তল NN′ নিরপেক্ষ তল, কেননা এই তলের সাপেক্ষে $\int zdA$ গণনা করলে দেখা যাবে z এর পজিটিভ মানের প্রতিটি অবদানের জন্য z এর নেভেটিভ মানের একটি সমান ও বিপরীত চিত্রের একটি অবদান রয়েছে, যার ফলে $\int zdA$ সমাকলটির মান শূন্য হয়।



চিত্র 11.9

সমগ্র প্রস্থচ্ছেদের জন্য $\int z^2 dA$ রাশির মান

$$\int_{z=-d/2}^{d/2} z^2 dA = 2\int_0^{d/2} z^2 dA$$

$$= 2\left[\int_0^{c/2} z^2(b-a)dz + \int_{c/2}^{d/2} z^2 b\, dz\right]$$

$$= 2\left[(b-a)\frac{c^3}{24} + b\cdot\frac{d^3-c^3}{24}\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[bd^3 - ac^3\right]$$

এবার আপনি নিজেই নীচের অনুশীলনীটি করতে পারবেন।

অনুশীলনী 1

(i) 1.2m লম্বা ওকটি হাল্কা বীম দুই প্রান্তে দড়ি বাঁধা অবস্থায় অনুভূমিকভাবে ঝোলানো আছে। বীমের দুই প্রান্তে থেকে 0.4m ও 0.2m ভিতরের দুটি বিন্দু থেকে যথাক্রমে 8N ও 5N পরিমাণ বল বীমের উপর ক্রিয়া করছে। বীমটির কৃন্তন বলচিত্র ও বংকন ভ্রামকচিত্র অংকন করুন।

(ii) একটি বীমের আয়তাকার প্রস্থচ্ছেদের প্রস্থ b এবং উচ্চতা d। বীমটির প্রস্থচ্ছেদের ভ্রামক নির্ণয় করুন।

(iii) একটি I আকৃতির প্রস্থচ্ছেদ বিশিষ্ট ইস্পাতের বীমের মাপ (চিত্র 11.9 দেখুন) $b = d = 5cm$, $c = 3cm$, $a=3cm$। ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক $210GNm^{-2}$। বীমটির বংকন দৃঢ়তা নির্ণয় করুন। বীমটি একই ক্ষেত্রফলের কিন্তু বর্গাকার প্রস্থচ্ছেদের হলে সেটির বংকন দৃঢ়তা কত হত?

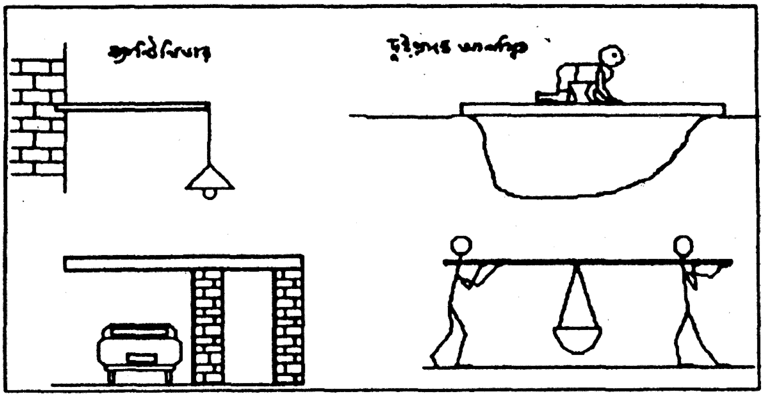
11.3 বীমের বংকন ও নমন

আপনি ইতিমধ্যেই বীমের উপর কার্যকরী কৃন্তন বল ও বংকন ভ্রামক কাকে বলে এবং কীভাবে এগুলির মান নির্ণয় করতে হয় তা জেনেছেন। বীমের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রীয় ভ্রামক ও বীজের বংকন দৃঢ়তাও আপনি নির্ণয় করতে শিখেছেন। এখন আপনি সহজেই নিজস্ব ভার অথবা প্রযুক্ত বলের প্রভাবে বাস্তবক্ষেত্রে ব্যবহৃত বীমের কী ধরনের বংকন হয় এবং তার কতটা নমন ঘটে তা নির্ধারণ করতে পারবেন। এখনে আমরা প্রধানতঃ দুই ধরনের বীমের বিষয়ে আলোচনা করব। এগুলি হল

1. ক্যান্টিলিভার বীম : এ জাতীয় বীমের একপ্রান্ত দেওয়াল অনুভূমিক অবস্থায় দৃঢ়ভাবে গাঁথা থাকে এবং বীমের আর কোনও অংশে কোন আলম্ব থাকে না। বীমের নিজস্ব ওজন থাকতে পারে এবং কোন বিন্দুতে উল্লম্ব বল কাজ করতে পারে।

2. দুইপ্রান্তে মুক্তভাবে আলম্বিত বীম : ইতিপূর্বেই এ ধরনের বীমের উল্লেখ করা হয়েছে। এখানে বীমের দুইপ্রান্ত সমান উচ্চতায় আলগাভাবে আলম্বিত অর্থাৎ যেখানে ঊর্ধ্বমুখী প্রতিক্রিয়া বল কাজ করলেও কোন বলযুগ্ম থাকে না।

আমরা আগের মত সবক্ষেত্রেই বীমটি সুষম প্রস্থচ্ছেদের এবং প্রস্থচ্ছেদের প্রস্থ বা উচ্চতার তুলনায় অধিক দৈর্ঘ্যের বলে ধরে নেব। সেই সঙ্গে ভারহীন অবস্থায় বীমটি অনুভূমিক, বীমের উপর পীড়ন স্থিতিস্থাপক সীমাকে অতিক্রম করবে না এবং বীমের নতিও সব অংশেই 1 এর তুলনায় অল্প হবে এগুলিও আমাদের অঙ্গীকারের মধ্যে থাকবে।



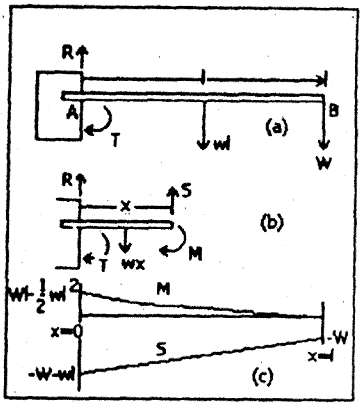
চিত্র 11.10

11.10 চিত্রে উপরের দুই ধরণের বীমের উদাহরণ দেখানো হয়েছে।

11.3.1 ক্যান্টিলিভার বীম :

ধরা যাক AB একটি ক্যান্টিলিভার বীম যার A প্রান্তটি দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ এবং B প্রান্তে w ভার প্রয়োগ করা হয়েছে (চিত্র 11.11) বীমের দৈর্ঘ্য ℓ এবং ওজন একক দৈর্ঘ্য পিছু ω, অর্থাৎ বীমের মোট নিজস্ব ওজন $w\ell$। A প্রান্তে বীমের উপর একটি উল্লম্ব বল R এবং বলযুগ্ম T কাজ করে, যাতে বীমটি

সাম্যাবস্থায় থাকে। এছাড়া বীমের ওজন $w\ell$ বীমের মধ্যবিন্দু দিয়ে নিম্নাভিমুখে কাজ করে বলে ধরা যায়। বীমের সাম্যহেতু বীমের উপর কার্যকরী মোট বল $R - W - w\ell = 0$ বা $R = W + w\ell$



চিত্র 11.11

আবার, বীমের উপর কার্যকরী বলযুগ্মের ভ্রামক

$$T + W\ell + \frac{1}{2}wl^2 = 0 \text{ সুতরাং } T = -Wl - \frac{1}{2}wl^2$$

এবার বীমের আবদ্ধপ্রান্ত থেকে x দৈর্ঘ্যের একটি অংশের সাম্য বিবেচনা করা যাক। এটির মুক্ত প্রান্তে কৃন্তন বল s ও বংকন ভ্রামক M কাজ করবে। সুতরাং এই অংশের সাম্যের জন্য

$$R + S - wx = 0 \text{ অর্থাৎ } s = wx - W - wl = -W - w(\ell - x)$$

আবার A বিন্দুর উপর মোট বলযুগ্মের ভ্রামক $T + M + \frac{1}{2}wx^2 - sx = 0$

অর্থাৎ $M = -T - \frac{1}{2}wx^2 + Sx = W\ell + \frac{1}{2}w\ell^2 - \frac{1}{2}wx^2 - Wx - wx(\ell - x) = W(\ell - x) + \frac{1}{2}w(\ell - x)^2$

11.9 ও 11.10 সমীকরণে পাওয়া S ও M এর মান 11.1 (C) চিত্রে দেখানো হয়েছে।

এখন আমরা বক্র অবস্থায় বীমটির নমন কত হবে তা নির্ণয় করতে পারি।

11.8 সমীকরণ অনুযায়ী

$$YI\frac{d^2z}{dx^2} = M = W(\ell - x) + \frac{1}{2}w(\ell - x)^2$$

সমাকলনকরে $\quad YI \cdot \frac{dz}{dx} = \int\left(W\ell - Wx + \frac{1}{2}w\ell^2 - w\ell x + \frac{1}{2}wx^2\right)dx$

$$= \left(W\ell + \frac{1}{2}w\ell^2\right)x - \frac{1}{2}(W + w\ell)x^2 + \frac{1}{6}wx^3 + C$$

যেখানে $c =$ সমাকলন ধ্রুবক। আমরা জানি বীমের আবদ্ধ প্রান্তে $(x = 0)$ বীমটি অনুভূমিক অবস্থায় থাকে, অর্থাৎ সেখানে $\frac{dz}{dx} = 0$। এই সীমাশর্ত অনুযায়ী $c = 0$

সুতরাং $$YI\frac{dz}{dx} = \left(W\ell + \frac{1}{2}w\ell^2\right)x - \frac{1}{2}(W + w\ell)x^2 + \frac{1}{6}wx^3 \qquad (11.11)$$

এই সমীকরণটিকে আবার সমাকলন করলে এবং পূর্বের মত, আবদ্ধ প্রান্তে $z = 0$ সর্তটি ব্যবহার করলে পাওয়া যাবে

$$YI.z = \frac{1}{2}\left(W\ell + \frac{1}{2}w\ell^2\right)x^2 - \frac{1}{6}(W + w\ell)x^3 + \frac{1}{24}wx^4 \qquad (11.12)$$

11.11 সমীকরণ থেকে বক্র অবস্থায় বীমের যে কোন বিন্দুতে সেটির নতির মান পাওয়া যাবে। তেমনই 11.12 সমীকরণ থেকে বীমটি যে কোন বিন্দুতে নমনের পরিমাণ জানা যাবে। মুক্ত প্রান্তে যখন $x = \ell$, তখন এই নমনের মান হবে

$$z_{x=\ell} = \frac{1}{YI}\left[\frac{1}{2}\left(w\ell + \frac{1}{2}w\ell^2\right)\ell^2 - \frac{1}{6}(W + W\ell)\ell^3 + \frac{1}{24}w\ell^4\right]$$

$$= \frac{1}{YI}\left[\frac{W\ell^3}{3} + \frac{w\ell^4}{8}\right]$$

$$= \frac{\ell^3}{3YI}\left[W + \frac{3}{8}W_0\right] \qquad (11.13)$$

যেখানে $W_0 = w\ell =$ বীমের নিজস্ব ওজন।

11.13 সমীকরণ থেকে আপনি নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে বীমটির মুক্তপ্রান্তের নমন বীমের বংকন দৃঢ়তা YI এর ব্যস্তানুপাতী। কেমনলমাত্র বীমের মুক্তপ্রান্তে ভার বা বীমের নিজস্ব ওজনের জন্য যে নমন ঘটে সেগুলি ঐ ভার বা ওজনের সমানুপাতী। তবে বীমের নিজস্ব ওজন যে পরিমাণ নমন ঘটাতে পারে, মুক্তপ্রান্তে ঝোলানো সমপরিমাণ ওজন তার $\frac{8}{3}$ গুণ বেশী নমন সৃষ্টি করে।

আপনার মনে হতে পারে যে বীমের উপর যেহেতু কৃন্তন বলও কাজ করে, কৃন্তনের জন্যও বীমের মুক্তপ্রান্তের কিছুটা নমন হবে। এখানে আমরা সেই নমনটিকে গণনার মধ্যে আনছি না কেন? এই প্রশ্নের

উত্তর পেতে আমাদের কিছুটা সরলীকৃত অবস্থা বিবেচনা করতে হবে। ধরা যাক বীমটি হাল্কা ($W_0 << W$) এবং তার প্রস্থচ্ছেদ আয়তাকার প্রস্থে b ও উচ্চতায় d। আপনি অনুশীলনী 1(ii) এ দেখেছেন যে এই বীমের ক্ষেত্রীয় ভ্রামক $\frac{1}{12}bd^3$। সুতরাং 11.13 সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়, বীমের মুক্তপ্রান্তের নমন $z_b = \frac{4W\ell^3}{Ybd^3}$। অপরপক্ষে বীমের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল bd, কৃন্তন পীড়ন $= \frac{W}{bd}$, কৃন্তন ততি $= \frac{W}{bd\,n}$ (n= দৃঢ়তা গুণাঙ্ক) এবং এর ফলে মুক্তপ্রান্তের নমন $z_s = \frac{Wl}{bdn}$। এই দুই নমনের অনুপাত

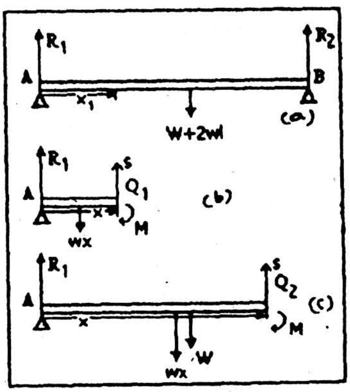
$$\frac{Z_s}{Z_b} = \frac{W\ell}{bdn}\Big/\frac{4W\ell^3}{Ybd^3} = \frac{d^2}{4\ell^2}$$

বীমের ক্ষেত্রে সর্বদাই $d << \ell$ হয়। বস্তুতঃ কোন দন্ডকে তখনই বীম নামে অভিহিত করাহয় যখন এই সর্তটি খাটে। সুতরাং আলোচ্য ক্ষেত্রে $Z_s << Z_b$ এবং এই কারণেই আমরা কৃন্তনের জন্য যে নমন ঘটে তাকে উপেক্ষা করি। এই নীতি অন্য ধরণের বীমের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য হয়।

এবার আমরা দুইপ্রান্তে মুক্তভাবে আলম্বিত বীমের সম্বন্ধে আলোচনা করব।

11.3.2 দুইপ্রান্তে আলম্বিত বীম

এ জাতীয় বীমের সঙ্গে আপনি 11.2.1 অংশে আগেই পরিচিত হয়েছেন। এখানে আমরা ধরে নেব AB একটি সুষম প্রস্থচ্ছেদের বীম, যেটি A ও B বিন্দুতে দুটি ক্ষুরাকৃতি আলম্বের উপর বসানো আছে। বীমের দৈর্ঘ্য 2ℓ; ওজন একক দৈর্ঘ্যে পিছু w। অর্থাৎ বীমের মোট ওজন $2w\ell$। বীমের মধ্যবিন্দু P তে একটি ভার W নিম্নভিমুখে কাজ করছে (চিত্র 11.12a) A ও B বিন্দুতে বীমটি যেভাবে আলম্বিত আছে তাতে ঐ বিন্দুদুটিতে বীমের উপর উর্দ্ধমুখী প্রতিক্রিয়াবল R_1 ও R_2 ক্রিয়া করলেও কোন বলযুগ্ম কাজ করেন না।



চিত্র 11.12

প্রথমে সমগ্র বীমটির সাম্য বিবেচনা করাযাক। বীমের মোট ওজন P বিন্দু দিয়ে নিম্নাভিমুখে কাজ করে বলে ধরা যায়। সুতরাং বীমের উপর মোট উর্দ্ধমুখী বল $R_1 + R_2 - W - 2wl = 0$। ব্যবস্থাটির প্রতিসাম্যের জন্য $R_1 = R_2$ ধরা যেতে পারে। সুতরাং

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{2}(W + 2wl) = \frac{W}{2} + wl$$

এখন A ও P বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোন এক বিন্দু Q_1 কল্পনা করা যাক, যাতে $AQ_1 = x(\le \ell)$ হয়, (চিত্র 11.12b)। Q_1, বিন্দুতে বীমের বাকি অংশ যে সব বল প্রয়োগ করে, কৃন্তন বল S ও বংকন ভ্রামক M সেগুলিকে প্রকাশ করছে। AQ_1 অংশটি যেহেতু সাম্যে আছে, অতএব এর উপর মোট বল

$$R_1 + S - wx = 0 \text{ অর্থাৎ } S = -R_1 + wx = -\frac{1}{2}W - w\ell + wx \tag{11.15}$$

এবং A বিন্দুর সাপেক্ষে মোট গ্রামক $Sx - M - \frac{1}{2}wx^2 = 0$, অর্থাৎ $M = Sx - \frac{1}{2}wx^2$

$$\text{বা } M = -\left(\frac{W}{2} + wl\right)x + \frac{1}{2}wx^2 \tag{11.16}$$

এবার P ও B বিন্দুর মধ্যবর্তী Q_2 বিন্দু কল্পনা করা যাক, যাতে $AQ_2 = x(\ell \le x \le 2\ell)$ হয়। (চিত্র 11.12c) যেহেতু AQ_2 অংশটি সাম্যে আছে, অতএব আগের মত এর উপর মোট বল

$$R_1 + S - (W + wx) = 0 \text{ অর্থাৎ } S = -R_1 + (W + wx) = -\frac{1}{2}W - wl + W + wx$$

$$= \frac{1}{2}W - wl + wx \tag{11.17}$$

এবং A বিন্দুর সাপেক্ষে মোট ভ্রামক $Sx - M - W\ell - \frac{1}{2}wx^2 = 0$

অর্থাৎ $M = Sx - \frac{1}{2}wx^2 - W\ell$

$$= \left(\frac{1}{2}W - w\ell + wx\right)x - \frac{1}{2}wx^2 - W\ell$$

$$= \left(\frac{1}{2}W - w\ell\right)x + \frac{1}{2}wx^2 - W\ell \tag{11.18}$$

বীমের নমন নির্ণয় করার জন্য আমরা আগের মত 11.8 সমীকরণটি ব্যবহার করব। AP অংশের জন্য 11.16 সমীকরণ থেকে

$$YI\frac{d^2z}{dx^2} = -\left(\frac{W}{2} + wl\right)x + \frac{1}{2}wx^2$$

সমাকলন করে $YI\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}\left(\frac{W}{2} + w\ell\right)x^2 + \frac{1}{6}wx^3 + c$

যেখানে c সমাকলন ধ্রুবক। এক্ষেত্রে $x = 0$ বিন্দুতে $\frac{dz}{dx}$,র মান আমা জানি না কিন্তু বীমের মধ্য বিন্দু P তে বীমটি অনুভূমিক থাকবে। এটি প্রতিসাম্য থেকে বোঝা যায়। সুতরাং যখন $x = \ell$, তখন $\frac{dz}{dx} = 0$, এই সর্তটি প্রয়োগ করে,

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{W}{2} + w\ell\right)\ell - \frac{1}{6}w\ell^3 = \frac{1}{4}W\ell^2 + \frac{1}{3}w\ell^3$$

অর্থাৎ $$YI\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}\left(\frac{W}{2} + w\ell\right)x^2 + \frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{4}W\ell^2 + \frac{1}{3}w\ell^3 \qquad (11.19)$$

আরও একবার সমাকলন করে

$$YIZ = -\frac{1}{6}\left(\frac{W}{2} + wl\right)x^3 + \frac{1}{24}wx^4 + \left(\frac{1}{4}W\ell^2 + \frac{1}{2}w\ell^3\right)x + c'$$

যেহেতু $x = 0$ বিন্দুতে z এর মান শূন্য, অতএব সমাকলন ধ্রুবক $c' = 0$।

সুতরাং $$YIZ = -\frac{1}{6}\left(\frac{W}{2} + w\ell\right)x^3 + \frac{1}{24}wx^4 + \left(\frac{1}{4}W\ell^2 + \frac{1}{3}w\ell^3\right)x \qquad (0 \le x \le \ell) \qquad (11.20)$$

বীমের মধ্য বিন্দুতে $(x = \ell)$ নমন সর্বাধিক 1 এ বিন্দুতে নমনের মান

$$z(x = \ell) = \frac{1}{YI}\left(\frac{1}{6}W\ell^3 + \frac{5}{24}w\ell^4\right)$$

$$= \frac{1}{6YI}\left(W + \frac{5}{8}W_0\right)\ell^3 \qquad (11.21)$$

এখানে $W_0 = 2w\ell =$ বীমের নিজস্ব ভার।

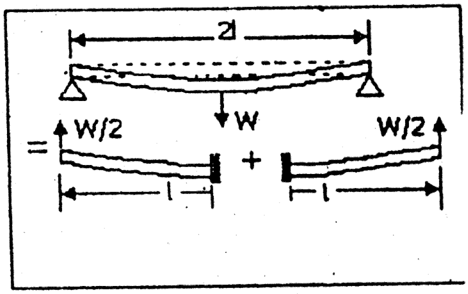
আপনি প্রশ্ন পরতে পারেন, 11.16 সমীকরণের পরিবর্তে বংকন ভ্রামকের 11.18 সমীকরণের রাশিমালাটি ব্যবহার করা যায় কি না। এর উত্তর, হ্যাঁ নিশ্চয়ই যায়। আপনি যদি 11.18 সমীকরণ ব্যবহার করে বীমের নমন নির্ণয় করেন তবে আপনি বীমের PB অংশের জন্য পাবেন

$$YIz = \frac{1}{6}\left(\frac{W}{2} - w\ell\right)x^3 + \frac{1}{24}wx^4 + \left(\frac{3}{4}W\ell^2 + \frac{1}{3}w\ell^3\right)x \quad (\ell \le x \le 2\ell) \quad (11.22)$$

এই সমীকরণে $x = \ell$ বসালে আপনি বীমের মধ্যবিন্দুতে নমনের 11.21 রাশিমালাটি পাবেন।

হালকা বীমের ক্ষেত্রে একটি বিকল্প পদ্ধতি

দুই প্রান্তে মুক্তভাবে আলম্বিত একটি হালকা বীমের যে কোনও অর্ধাংশ কল্পনা করুন (চিত্র 11.13) লক্ষ্য করুন, অন্য অর্ধাংশটি এর এক প্রান্তকে অনুভূমিক অবস্থায় থাকতে বাধ্য করছে এবং অন্যপ্রান্তে একটি প্রতিক্রিয়া বল বীমের বংকন ঘটাচ্ছে। অর্থাৎ 11.12(a) চিত্রে দেখানো বীমটি দুটি ক্যান্টিলিভার বীমের সমষ্টি, যাদের প্রতিটির দৈর্ঘ্য ℓ, মুক্তপ্রান্তে ঊর্ধ্বমুখী বল ক্রিয়া করছে, যার মান $\frac{W}{2}$ (চিত্র 11.13) সমীকরণ থেকে আমরা হালকা ক্যান্টিলিভারের ক্ষেত্রে পাই মুক্ত প্রান্তের নমন $= \frac{\ell^3}{3YI} \cdot W$; সুতরাং দুইপ্রান্তে



চিত্র 11.13

আলম্বিত বীমের অর্ধেকের ক্ষেত্রে মুক্তপ্রান্তের নমন $= \frac{\ell^3}{3YI} \cdot \frac{W}{2} = \frac{W\ell^3}{6YI}$। যেটি আমরা 11.2 সমীকরণে পেয়েছি।

ক্যান্টিলিভার এবং দুইপ্রান্তে আলম্বিত বীম সম্বন্ধে আপনি অনেক তথ্যই জানতে পেরেছেন। এবার একটি সাংখ্যীয় উদাহরণ আপনাকে বিষয়টি বুঝতে সাহায্য করবে।

উদাহরণ 3 : একটি ইস্পাতের বীম 1.20m লম্বা এবং ক্ষুরাকৃতি আলম্বের উপর অনুভূমিক অবস্থায় দুইপ্রান্তে মুক্তভাবে আলম্বিত আছে; বীমের প্রস্থচ্ছেদ আয়তাকার, প্রস্থে 2cm, এবং বেধে 1cm; বীমটির মধ্যবিন্দু থেকে 2kg ওজন ঝোলানো আছে। ইস্পাতের ঘনত্ব $7900\ kgm^{-3}$, স্থিতিস্থাপকতার ইয়ং গুণাঙ্ক $2 \cdot 0 \times 10'' Nm^{-2}$। বীমটির সংশ্লিষ্ট তথ্যগুলি বার করা যাক; $g = 9 \cdot 8 ms^{-2}$ ধরা হবে

(i) বীমের নিজস্ব ওজন $W_0 = 1 \cdot 2 \times \cdot 02 \times \cdot 01 \times 7900 \times 9 \cdot 8 = 18 \cdot 6\ N$

(ii) বীমের বংকন দৃঢ়তা $= 2\cdot 0\times 10'' \times \frac{1}{12}\times \cdot 02\times(\cdot 01)^3 = 333\,\text{Nm}^2$

(iii) বীমের মধ্যবিন্দুর নমন।

বীমের নিজস্ব ওজনের জন্য $\frac{1}{6YI}\cdot\frac{5}{8}W_0\ell^3 = \frac{1}{6\times 333}\cdot\frac{5}{8}\times 18\cdot 6\times(0\cdot 6)^3 \quad (\because z^1 = 1\cdot 2\text{m})$

$$= 1\cdot 26\text{mm}$$

ঝোলানোর ভার $= 2\times 9\cdot 8 = 19\cdot 6\text{N}$

ঝোলানো ওজনের জন্য নমন $\frac{1}{6YI}W\ell^3 = \frac{1}{6\times 333}19\cdot 6\times(0\cdot 6)^3$

$$= 2\cdot 12\text{ mm}$$

মোট নমন $= 3\cdot 37\text{mm}$

(iv) বীমের সর্বাধিক নতি 11.9 সমীকরণে $x = 0$ বসালে পাওয়া যাবে; এর মান

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=0} = \frac{1}{YI}\left(\frac{1}{4}W\ell^2 + \frac{1}{3}w\ell^3\right) = \frac{1}{YI}\left(\frac{W}{4} + \frac{W_0}{3}\right)\ell^2$$

$$= \frac{1}{333}\left(\frac{1}{4}\times 19\cdot 6 + \frac{1}{3}\times 18\cdot 6\right)(0\cdot 6)^2$$

$$= \cdot 002 = \tan^{-1} 0\cdot 69^\circ$$

লক্ষ্য করুন এই সর্বাধিক নতির মান অতি সামান্য এবং অনুভূমিক অবস্থা থেকে বীমের বিচ্যুতি কখনই এর বেশী নয়।

(v) এখন দেখা যাক এই বীমটিকে যদি ক্যান্টিলিভার হিসাবে ব্যবহার করা হয় এবং মুক্তপ্রান্তে 2 kg ওজন ঝোলানো হয় তবে ঐ প্রান্তের নমন কত হবে। 11.13 সূত্র ব্যবহার করে,

মুক্তপ্রান্তে নমন $= \frac{\ell^3}{3YI}\left[W + \frac{3}{8}W_0\right]$

$$= \frac{(1\cdot 2)^3}{3\times 333}\left[19\cdot 6+\frac{3}{8}\times 18\cdot 6\right]$$

$$= 4\cdot 6\text{cm}$$

এবার আপনি অতি সহজেই একটি অনুশীলনীর উত্তর করতে পারবেন।

অনুশীলনী 2

(i) একটি অ্যালুমিনিয়াম দণ্ডের বর্গাকার প্রস্থচ্ছেদের বাহুগুলি 5mm। এই দন্ডটির একপ্রান্ত অনুভূমিক অবস্থায় আবদ্ধ। অন্য পান্ত থেকে 1kg ওজন ঝোলানো হলে ঐ প্রান্তে 5mm নমন ঘটে। দন্ডটির দৈর্ঘ্য কত? অ্যালুমিনিয়ামের ইয়ং গুণাঙ্ক $7\times 10^{10}\text{Nm}^{-2}$, দন্ডটির নিজস্ব ওজন নগণ্য ধরে নিন।

(ii) ল্যাবরেটরীতে যে মিটার স্কেল ব্যবহার করা হয় সেরূপ একটি স্কেল মধ্যবিন্দুতে আলম্বিত করে দুইটি মুক্তপ্রান্ত থেকে 50 গ্রামের দুটি ওজন ঝুলিয়ে দেওয়া হল। প্রান্ত দুটি মধ্য বিন্দুর তুলনায় কতটা নমিত হবে? কাঠের দৈর্ঘ্য বরাবর ইয়ং গুণাঙ্ক $1\cdot 2\times 10^{10}\text{Nm}^{-2}$, স্কেলের প্রস্থ 2.5cm ও বেধ 5mm, স্কেলের ওজন উপেক্ষণীয়।

11.3.3 বীমের ব্যবহার

প্রাগৈতাহাসিক যুগ থেকে মানুষ বীমের ব্যবহার করে এসেছে। প্রাচীন যুগে পাথর ও কাঠের মত সহজলভ্য বস্তুর দ্বারা বীম নির্মান সম্ভব ছিল। ভারতে তুর্কী আক্রমনের পূর্বে স্থাপত্যে অনুভূমিক বীমের ব্যবহারই প্রচলিত ছিল। প্রাচীন গ্রীক স্থাপত্যে নানা ধরনের কারুকার্যখচিত থাম ও তার উপর স্থাপন করা অনুভূমিক করা অনুভূমিক বীম দেখা যায়। ইংল্যান্ডের উইল্ট্শায়ারে স্টোনহেন্জ্ (Stonehenge) নামের অতি প্রাচীন স্থাপত্যে (খ্রীষ্টপূর্ব 1640) পাথরের থামও বীম দেখা গেছে।

আধুনিক যুগে আপনি বীমের নানা ব্যবহার দেখতে পাবেন। এগুলি হল :

1. বাড়িঘর নির্মানে ছাদের আলম্ব বা দরজা জানালার উপরের লিনটেল (lintel) হিসাবে।

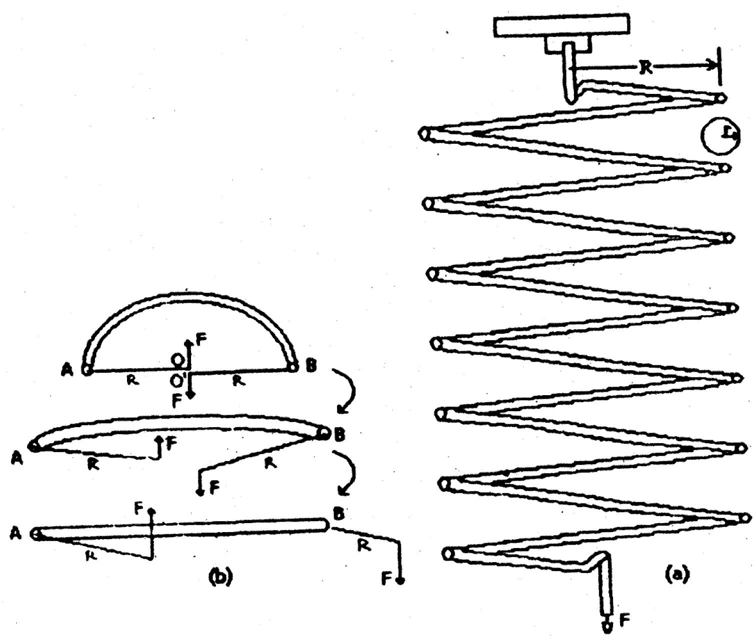
2. সেতু নির্মানে। ক্যান্টিলিভার, দড়ি দিয়ে ঝুলানো (suspension) বীম, ইস্পাতের ফ্রেম দ্বারা নির্মিত ট্রাস বীম - ইত্যাদি নানা ধরনের বীম সেতু হিসাবে ব্যবহৃত হয়।

3. আসবাবপত্র, যানবাহন নির্মানে : টেবিল, বেঞ্চ, রেলের কামরা, মোটরগাড়ি, ট্রাক প্রভৃতির চেসিস্ ইত্যাদির মধ্যে আপনি বীমের অনেক উদাহরণ দেখতে পাবেন।

4. ঝাঁকানি কমানোর জন্য বা বৈদ্যুতিক শক্তির ভাণ্ডার হিসাবেও বীমের ব্যবহার দেখা যায়। ভারী গাড়িতে চাকার উপরে যে পাটিগুলি (leaf-spring) দেখা যায় তা স্প্রিং নামে অভিহিত হলেও সেগুলি আসলে বক্রাকৃতির বীম। ধনুককেও এই জাতীয় বীম বলা যায়।

11.4 স্থিতিস্থাপক স্প্রিং

বৃত্তাকার প্রস্থচ্ছেদের একটি সুষম লম্বা তারকে যদি বেলনের উপর প্রতিটি পাকের মধ্যে সমান ও অল্প ফাঁকা রেখে জড়ানো যায় তবে আমরা যে জিনিষটি পাই সেটিই হল পেঁচালো (helical) স্প্রিং। আমরা নানা ধরণের স্প্রিং এর সঙ্গে পরিচিত হলেও এখানে আমরা কেবলমাত্র পেঁচালো স্প্রিং এর কথাই আলোচনা করব। আমরা এও ধরে নেব যে স্প্রিংটির প্রতিটি পাক মোটামুটি যে তলে থাকে বেলনের অক্ষটি তার সমকোণে থাকে। 11.14 চিত্র একটি পেঁচালো স্প্রিং এবং তার অর্ধেক পাক দেখানো হল;



চিত্র 11.14

স্প্রিং এর একপ্রান্ত আবদ্ধ রেখে অপর প্রান্তে স্প্রিংএর অক্ষো সমান্তরালআকর্ষণী বা সংনমক বল প্রয়োগ করলে সেটি যথাক্রমে প্রসারিত বা সংকুচিত হয়। স্প্রিং এর দৈর্ঘ্যের একক পরিবর্তনের জন্য যে বলের প্রয়োজন হয়, তাকেই আমরা স্প্রিং এর বল-ধ্রুবক (force constant) বা দৃঢ়তা (stiffness) বলি। পেঁচালো স্প্রিং এর বিভিন্ন স্থিতিমাপের (parameter) হিসাবে আমরা বল-ধ্রুবকের মান নির্ণয় করব।

11.4.1 স্থিতিস্থাপক স্প্রিং এর নমন

ধরা যাক পেঁচালো স্প্রিংটির প্যাঁচগুলির গড় ব্যাসার্ধ R; তারটির প্রস্থচ্ছেদের ব্যাসার্ধ r, প্যাঁচের সংখ্যা N, স্প্রিংএর উপাদানের দৃঢ়তা গুণাঙ্ক (modulus of rigidity) n এবং বল প্রয়োগের ফলে স্প্রিং এর প্রসারণ z। ধরে নিন স্প্রিং এর অর্ধেক প্যাঁচের (AB) উন্মুক্ত প্রস্থচ্ছেদের সঙ্গে R দৈর্ঘ্যের দুটি বাহু যোগ করে সেগুলির অপর প্রান্তে $(0, 0')$ দুই বিপরীতমুখী বল F, F প্রয়োগ করা হল। স্প্রিং এর এই অংশটি সোজা অবস্থায় থাকলে বলদুটি কীভাবে কাজ করত তা চিত্রে দেখানো হয়েছে। আপনি বুঝতেই পারছেন যে এই F, F বলদুটি FR ভ্রামকের একটি বলযুগ্ম গঠন করে। এই বলযুগ্ম স্প্রিং এর AB অংশটির উপর মোচড় দেয় এবং এক প্রান্তের সাপেক্ষে অন্য প্রান্তের θ কোণের ব্যবর্তন (torsion) সৃষ্টি করে। যেহেতু AB অংশের দৈর্ঘ্যে πR, তারের ব্যবর্তনের সূত্র অনুযায়ী

$$\frac{\pi n r^4 \theta}{2\pi R} = FR$$

বা $$\theta = \frac{2FR^2}{nr^4} \text{।} \qquad (11.22)$$

সমগ্র স্প্রিংটি AB অংশের মত অনেকগুলি অর্ধেক প্যাঁচ জুড়ে তৈরী। মোট অর্ধেক প্যাঁচের সংখ্যা 2N। এর প্রতিটির উপর F-F বলযুগ্ম ক্রিয়া করে এবং প্রতিটির θ কোণে ব্যবর্তন ঘটে। এই ব্যবর্তনের জন্য AB অংশের ক্ষেত্রে $0, 0'$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে $R\theta$ পরিমাণে বৃদ্ধি পায়। সুতরাং সবগুলি অর্ধাংশকে ধরলে স্প্রিংএর যে নমন পাওয়া যাবে তার মান

$$z = 2N.R\theta = \frac{4NFR^3}{mr^4} \qquad (11.23)$$

অর্থাৎ স্প্রিং এর বল ধ্রুবক $$k = \frac{F}{z} = \frac{nr^4}{4NR^3} \qquad (11.24)$$

11.24 সূত্রটি থেকে আমরা কোন স্প্রিং এর স্থিতিস্থাপক মাপগুলি জানলে তার বলধ্রুবক বা দৃঢ়তা সহজেই নির্ণয় করতে পারি। অপরপক্ষে এই সূত্রের সাহায্যে নির্দিষ্ট কোন কাজে লাগানোর জন্য স্প্রিংএর নক্সা তৈরী করাও সম্ভব। সূত্রটির কয়েকটি বৈশিষ্ট্য নিশ্চয়ই আপনার দৃষ্টি এড়ায়নি। এগুলি হল :

(i) বীমের নমন তার উপাদানের ইয়ং গুণঙ্কের উপর নির্ভর করে কেননা সেক্ষেত্রে তার স্তরগুলির দৈর্ঘ্য বরাবর প্রসারণ বা সংকোচন ঘটে। স্প্রিং এর ক্ষেত্রে উপযুক্ত গুণাঙ্কটি হল উপাদানের দৃঢ়তা গুণাঙ্ক কেননা

স্প্রিং এর প্রসারণ বা সংকোচনের কারণ সেটির তারের মোচড়, তারের দৈর্ঘ্যের কোন পরিবর্তন এক্ষেত্রে ঘটে না।

(ii) স্প্রিং এর বল ধ্রুবক সেটির তারের ব্যাসার্ধ ও প্যাঁচের ব্যাসার্ধের প্রতি অত্যন্ত সংবেদনশীল - এটি r^4 এর সমানুপাতী এবং R^3 এর ব্যাস্তানুপাতী। এখানে আর একটি বিষয় উল্লেখ করা প্রয়োজন। বীমের মত স্প্রিং এর ক্ষেত্রেও আমরা কৃন্তনের ফলে স্প্রিং এর নিম্নপ্রান্তের যে নমন হয় তা উপেক্ষা করেছি। এটি যুক্তিযুক্ত কিনা তা দেখা যাক। এক্ষেত্রে কৃন্তন পীড়ন $\frac{w}{\pi r^2}$, সুতরাং কৃন্তন তডি $\frac{F}{n\pi r^2}$। এর ফলে মোট $2\pi NR$ দৈর্ঘ্যের তারের যে নমন ঘটে তার মান $z_s = 2\pi NR \cdot \frac{F}{n\pi r^2} = \frac{2NRF}{nr^2}$। সুতরাং মোচড় ও কৃন্তনের জন্য নমনের অনুপাত $\frac{z_s}{z} = \frac{2NRF}{nr^2} \Big/ \frac{4NFR^3}{nr^4} = \frac{r^2}{2R^2}$। যেহেতু এ জাতীয় স্প্রিং এর ক্ষেত্রে $r << R$, এই অনুপাতটির ফল অত্যন্ত অল্প এবং কৃন্তনের প্রভাবএক্ষেত্রে উপেক্ষা করা যেতে পারে। এবার একটি উদাহরণ 11.24 সূত্রটির পীয়োগ বুঝতে আপনাকে সাহায্য করবে।

উদাহরণ 4 : ডট পেনের মধ্যে পাওয়া একটি স্প্রিং মেপে দেখা গেল এটিতে 2mm ব্যাসার্ধের 12 টি প্যাঁচ আছে এবং তারের ব্যাসাধ- 0.15mm। স্প্রিংটি যদি ইস্পাতের তৈরী হয় $\left(n = 80\ GNm^{-2}\right)$ তবে সেটির 2mm সংকোচন ঘটাতে কত বল লাগবে?

স্প্রিংএর বল ধ্রবক $\frac{nr^4}{4NR^3} = \frac{80 \times 10^9 \times (\cdot 00015)^4}{4 \times 12 \times (\cdot 002)^3} = 105\ N/m$

সুতরাং 2mm সংকোচন ঘটাতে প্রয়োজনীয় বল $= 105 \times \cdot 002 = \cdot 21\ N$ এধ বল প্রায় 21g ওজনের সমান।

এধরনের একটি অনুশীলনী আপনি করে দেখতে পারেন।

অনুশীলনী 3

আপনি নরম ইস্পাতের $\left(n = 82\ GNm^{-2}\right)$ 2mm ব্যাসার্ধের তার দিয়ে একটি স্প্রিং তুলা তৈরী করতে চান যার প্যাঁচগুলির ব্যাস হবে 4 cm এবং 1kg ওজন ঝোলালে স্প্রিংটির 1cm প্রসারণ ঘটবে। স্প্রিংটিতে কতগুলি প্যাঁচ থাকবে?

11.4.2 স্প্রিং - এর ব্যবহার

এর আগে আমরা বীমের ব্যবহার সম্বন্ধে আলোচনা করেছি। বীমের মত স্প্রিংও আমাদের অত্যন্ত কাজের জিনিষ। স্প্রিং এর ব্যবহারের কয়েকটি বিভিন্ন ধরন লক্ষ্য করা যায়। এগুলি হল :

1. **স্প্রিং এর প্রসারণ থেকে বলের পরিমাণ** : স্প্রিং-তুলায় স্প্রিং এর ওই ব্যবহার দেখতে পাবেন।

2. **যন্ত্রপাতিতে কোন যন্ত্রাংশের সরণের পর প্রাথমিক অবস্থানে ফিরিয়ে আনতে প্রত্যানয়ক বল সৃষ্টি** : মোটরগাড়ির চাকায় ব্রেক প্রয়োগ করার পর ব্রেক গুলিকে স্বস্থানে ফিরিয়ে আনার জন্য স্প্রিং লাগানো হয়।দড়িতে কাপড় টাঙানোর জন্য যে ক্লিপ ব্যবহার করা হয় তার মধ্যেও আপনি স্প্রিং এর এই ব্যবহার দেখতে পাবেন।

3. **কোন বস্তুকে স্বস্থানে আবদ্ধ রাখা** : ডট পেনের রিফিলটিকে স্প্রিং এর সাহায্যে আটকে রাখা হয়, এ আপনি জানেন। নাট বল্টু রাখেতে যে স্প্রিং ওয়াশার ব্যবহার করা হয় তাও একটি মাত্র প্যাঁচের একটি স্প্রিং।

4. **ধাক্কার ফলে উদ্ভূত ঝাঁকানি কামানো** : আপনি মোটরগাড়ির চাকার অক্ষদন্ডের (axle) উপর, সাইকেল বা স্কুটারের সীটের তলায় যে স্প্রিং দেখতে পান সেগুলি এই কাজ করে।

5. **দোলগতির জন্য প্রত্যানায়ক বল ও বলযুগ্ম উৎপাদন** : যন্ত্রচালিত হাতঘড়িতে একটি সূক্ষ্ম সর্পিল (spiral) স্প্রিং এর সাহায্যে ব্যালান্স হুইলের ঘূর্ণন দোলগতির জন্য প্রয়োজনীয় প্রত্যানায়ক বলযুগ্ম তৈরী করা হয়।

6. **স্থৈতিক শক্তির ভান্ডার হিসাবে স্প্রিং এর ব্যবহার** : যাবতীয় দম দেওয়া খেলনা, যান্ত্রিক ঘড়ি প্রভৃতিতে একটি স্প্রিং কে গুটিয়ে তার স্থৈতিক শক্তি হিসাবে শক্তি সঞ্চিত রাখা হয়।

উপরে যে ব্যবহারগুলির উল্লেখ করা হল তার জন্য সাধারণ পেঁচাল স্প্রিং ছাড়া অন্য আকৃতির স্প্রিংও ব্যবহৃত হয়। আপনি হয়ত স্প্রিং এর আরও ব্যবহার লক্ষ্য করতে পারেন।

11.5 সারাংশ

এই এককটিতে আপনি স্থাপত্য ও যন্ত্রপাতির দুটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ অংশ, বীম ও স্প্রিং সম্বন্ধে অনেকটাই জানতে পারলেন। বিশেষতঃ এগুলির ধর্ম উপাদানের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক এবং অন্যান্য স্থিতি মাপের উপর কীভাবে নির্ভর করে তার গণনা এই এককটিতে করে দেখানো হয়েছে।

বীমের ক্ষেত্রে আপনি প্রথমেই একটি নির্দিষ্ট ছেদে কৃন্তন বল ও বংকন ভ্রামক কাকে বলে তা জেনেছেন এবং এগুলি নির্ণয়ের পদ্ধতির সঙ্গে পরিচিত হয়েছেন। বীমের বংকনের পরেও যে তলটিতে বীমের দৈর্ঘ্য

বরাবর কোন দৈর্ঘ্যে প্রসারণ বা সংকোচন ঘটে না সেটিকে নিরপেক্ষ তল বলে। এই তলের সাপেক্ষে প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফলের দ্বিতীয় ভ্রামক অর্থাৎ '$\int z^2 dA$' রাশিটি প্রস্থচ্ছেদের 'ক্ষেত্রীয় ভ্রামক'। ক্ষেত্রীয় ভ্রামক ও উপাদানের ইয়ংগুণাঙ্কের গুণফল বীমের 'বংকন দৃঢ়তা' নামে অভিহিত। বীমের বক্রতা ও বংকন দৃঢ়তার গুণফল প্রযুক্ত বংকন ভ্রমাকের সমান— এইভাবে আমরা বীমের উপর ক্রিয়াশীল বলের সঙ্গে সেটির জ্যামিতিক বিকৃতির সম্পর্কসাধন করতে পেরেছি।

বীমের আলম্বনর স্থান ও প্রকৃতি অনুযায়ী অনেক ধরণের বীমের পরিকল্পনা সম্ভব। এই এককে বীমের দুটি গুরুত্বপূর্ণ শ্রেণী — ক্যান্টিলিভার অর্থাৎ একপ্রান্ত অনুভূমিক অবস্থায় আবদ্ধ ও অন্যপ্রান্ত সম্পূর্ণমুক্ত, এবং উভয়প্রান্তে মুক্তভাবে আলম্বিত। এই দুই ধরনের বীমের সম্বন্ধে আলোচনা করেছি।

বীমের মত স্প্রিংও নানা ধরনের হতে পারে। এই এককে আপনি পোঁচালো স্প্রিং এ আকর্ষনী বা সংনমক বল প্রয়োগ করলে কীভাবে এবং কী পরিমাণে সেটির প্রসারণ বা সংকোচন ঘটে তা নির্ণয়ের পদ্ধতি জেনেছেন।

এই এককটি পড়ার পর আপনি নিশ্চয়ই আপনার চতুর্দিকে যে সব বীম ও স্প্রিং ছড়িয়ে আছে সেগুলির কার্যপদ্ধতি পদার্থবিদের দৃষ্টিভঙ্গী থেকে বিচার করতে পারবেন।

11.6 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. (i) বীমের ক্ষেত্রে কৃন্তন বল ও বংকন ভ্রামক কাকে বলে?

(ii) 4ℓ দৈর্ঘ্যের একটি বীম অনুভূমিক অবস্থায় একপ্রান্ত থেকে ℓ ও 3ℓ দূরত্বে মুক্তভাবে আলম্বিত আছে। বীমটা একক দৈর্ঘ্য পিছু ওজন w হলে সেটির কৃন্তন বলচিত্র ও বংকন ভ্রামক চিত্র অংকন করুন।

2. একটি বীমের প্রস্থচ্ছেদ বৃত্তাকার (ব্যাসার্ধ a) হলে সেটির ক্ষেত্রীয় ভ্রামকের রাশিমালা নির্ণয় করুন।

3. বংকন দৃঢ়তা কাকে বলে? বংকন ভ্রামক, বংকন দৃঢ়তা ও বীমের বক্রতার সম্পর্ক নির্ণয় করুন।

4. একটি ক্যান্টিলিভার বীমের দৈর্ঘ্য ℓ, প্রস্থচ্ছেদ আয়তাকার, যার প্রস্থ b ও উচ্চতা d। বীমের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক Y এবং নিজস্ব ওজনের জন্য নমন নগণ্য। বীমটির প্রান্তে w ভার প্রয়োগ করলে তার মধ্যবিন্দুর নমন কত হবে?

5. আগের প্রশ্নে যে বীমটির উল্লেখ করা হয়েছে সেটি উভয় প্রান্তে মুক্তভাবে আলম্বিত করলে এবং w ভারটি মধ্যবিন্দুতে প্রয়োগ করলে ঐ বিন্দুটিতে বীমের নমন কত হবে? প্রান্ত থেকে $\frac{\ell}{4}$ দূরত্বে নমন কত হবে?

6. L দৈর্ঘ্যের বৃত্তাকার প্রস্থচ্ছেদের (ব্যাসার্ধ $= r$) একটি তারকে পেঁচিয়ে N সংখ্যক পাকের একটি স্প্রিং

তৈরী করা হল। তারের উপাদানের দৃঢ়তা গুণাঙ্ক n। স্প্রিংটির একক দৈর্ঘ্য প্রসারণের জন্য কত বল প্রয়োগ করতে হবে?

11.7 উত্তরমালা

অনুশীলনী 1

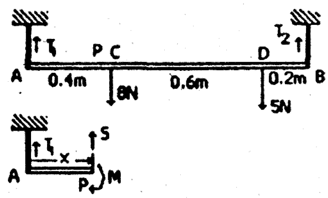
(i) B বিন্দুর উপর বলগুলিরী ভ্রামক শূন্য, যেহেতু বীমটি সাম্যে আছে। সুতরাং A বিন্দুতে দড়ির টান T_1 হলে $1\cdot 2\, T_1 = 8 \times 0\cdot 8 + 5 \times 0\cdot 2$

বা $T_1 = 6\cdot 17\text{N}$ অনুরূপভাবে $T_2 = 6\cdot 83\,\text{N}$।

(a) এখন A ও C এর মধ্যবর্ত্তী কোন বিন্দুতে কৃন্তন বল s এবং বংকন ভ্রামক M হলে

$$s = -T_1 = -6\cdot 17\,\text{N}$$

$$M = Sx = -6\cdot 17x\ \text{Nm}$$



চিত্র 11.15 (a)

(b) অনুরূপভাবে C ও D এর মধ্যবর্ত্তী কোন বিন্দুর জন্য

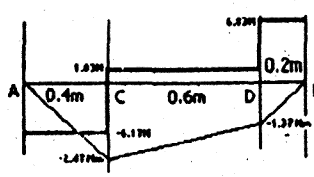
$$S = -T_1 + 8\text{N} = 1\cdot 83\,\text{N}$$

$$M = sx - (8 \times 0\cdot 4) = (1\cdot 83x - 3\cdot 2)\,\text{Nm}$$

(c) D ও B এর মধ্যবর্তী কোন বিন্দুর জন্য

$$S = -T_1 + 8\text{N} + 5\text{N} = 6\cdot 83\text{N}$$

$$M = Sx - (8 \times 0\cdot 4) - (5 \times 1\cdot 0) = (6\cdot 33 - 8\cdot 2)\,\text{Nm}$$



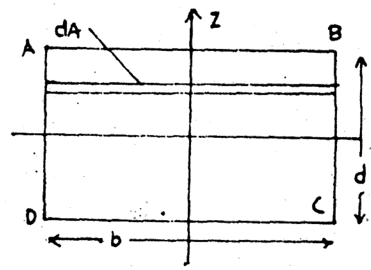
এবার কৃন্তন বলচিত্র ও বংকন ভ্রামক চিত্র আঁকা যেতে পারে।

চিত্র 11.15 (b)

(ii) ধরা যাক আয়তাকার প্রস্থচ্ছেদ ABCD, যার AB=CD=b, AD=BC=d। AD ও BC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগকারী রেখাটির জন্য z=0। z ও z+dz স্থানাঙ্কের মধ্যবর্ত্তী অংশের ক্ষেত্রফল $dA = bdz$।

z=0 রেখাটিই নিরপেক্ষ তল সুচিত করে কেননা $\int z dA = \int_{-d/2}^{d/2} b\, z dz = \frac{b}{2}\left[z^2\right]_{-d/2}^{d/2} = 0$

$$I = \int z^2 dA = \int_{-d/2}^{d/2} bz^2 dz = \frac{b}{3}\left[z^3\right]_{-d/2}^{d/2} = \frac{b}{3} z \cdot \frac{d^3}{8} = \frac{1}{12} bd^3$$



চিত্র 11.16

(iii) উদাহরণ 2 তে দেওয়া সূত্র অনুযায়ী

ক্ষেত্রীয়ভ্রামক $I = \frac{1}{12}\left(bd^3 - ac^3\right) = \frac{1}{12}\left(5 \cdot 5^3 - 3 \cdot 3^3\right)$ ।

$$= \frac{1}{12}(625 - 81) = 45 \cdot 33 \quad cm^4$$

$\therefore$ বংকন দৃঢ়তা $YI = 210 \times 10^9 Nm^{-2} \times 45 \cdot 33 \times 10^{-8} m^4$

$$= 9 \cdot 52 \times 10^4 Nm^2$$

দ্বিতীয় অংশ ঃ প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল $= bd - ac = 5 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 16 \quad cm^2$

$\therefore$ বর্গাকার প্রস্থচ্ছেদের প্রস্থ ও উচ্চতা $b = \sqrt{16} = 4cm$

$\therefore$ ক্ষেত্রীয় ভ্রামক $= \frac{1}{12} b^4 = \frac{1}{12} \cdot 4^4 = 21 \cdot 33 \quad cm^4$

$\therefore$ বংকন দৃঢ়তা $YI = 210 \times 10^9 Nm^{-2} \times 21 \cdot 33 \times 10^{-8} m^4$

$$= 4 \cdot 48 \times 10^4 Nm^2$$

লক্ষ্য করুন বর্গাকার প্রস্থচ্ছেদের বীমের তুলনায় একই প্রস্থচ্ছেদ ক্ষেত্রফলের এবং তার ফলে একই ওজনের I বীমের বংকন দৃঢ়তা দ্বিগুণেরও বেশী।

অনুশীলনী 2

(i) ক্যান্টিলিভারের সূত্র 11.13 থেকে হাল্কা বীমের ক্ষেত্রে

$$z_{x=\ell} = \frac{W\ell^3}{3YI}$$

এক্ষেত্রে $I = \frac{1}{12} \cdot 5^4\, mm^4 = 5 \cdot 21 \times 10^{-11} m^4 \quad W = 1 \times 9 \cdot 8 = 9 \cdot 8\, N$

$$\therefore \quad \ell^3 = \frac{5 \times 10^{-3} \times 3 \times 7 \times 10^{10} \times 5 \cdot 21 \times 10^{-11}}{9 \cdot 8} = 5 \cdot 58 \times 10^{-3} m^3$$

$$\therefore \quad \ell = \cdot 177 m \text{ বা } 17 \cdot 7 cm$$

(ii) এক্ষেত্রে মিটার স্কেলটিকে দুটি 50cm দৈর্ঘ্যের ক্যান্টিলিভার বীম হিসাবে ভাবা যেতে পারে, বীমের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রীয় ভ্রামক $= \frac{1}{12} \times 2 \cdot 5 \times (0 \cdot 5)^3 cm^4 = \cdot 026 cm^4 = 2 \cdot 6 \times 10^{-10} m^4$ সুতরাং প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের নমন ক্যান্টিলিভারের সূত্র থেকে

$$z = \frac{W\ell^3}{3YI} = \frac{\cdot 05 \times 9 \cdot 8 \times (0 \cdot 5)^3}{3 \times 1 \cdot 2 \times 10^{10} \times 2 \cdot 6 \times 10^{-10}} = 6 \cdot 5 \quad mm$$

অনুশীলনী 3

ধরা যাক প্যাঁচের সংখ্যা N। 11.23 সূত্র থেকে, যেহেতু R=2cm

$$N = z\, nr^4 / 4FR^3 = \frac{\cdot 01 \times 82 \times 10^9 (\cdot 002)^4}{4 \times 1 \cdot 0 \times 9 \cdot 8 \times (\cdot 02)^3}$$

$$= 41 \cdot 8 \text{ বা } 42$$

সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. (i) 11.2 অনুচ্ছেদে এ সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে।

(ii) আপনি যদি 11.2.1 অংশে অনুসৃত পদ্ধতিতে বিভিন্ন বিন্দুতে S ও M এর মান নির্ণয় করেন তবে আপনি পাবেন :

a) AC অংশের জন্য

$$s = \omega x, \quad M = \frac{1}{2}\omega x^2$$

b) CD অংশের জন্য

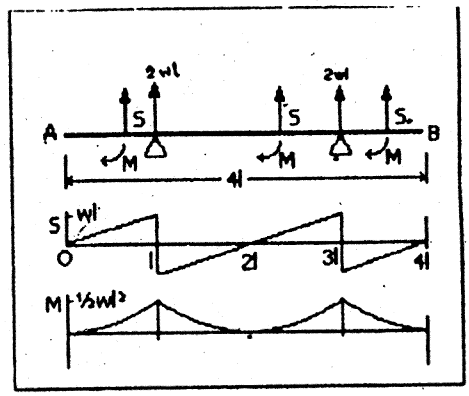
$$s = \omega(x - 2\ell)$$

$$M = \frac{1}{2}\omega x^2 + 2\omega\ell(\ell - x)$$

c) DB অংশের জন্য

$$s = \omega(x - 4\ell)$$

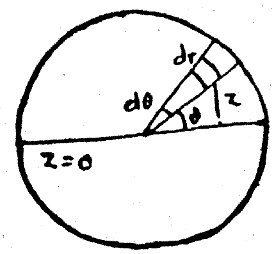
$$M = \frac{1}{2}\omega x^2 + 4\omega\ell(2\ell - x)$$



চিত্র 11.17

কৃন্তন বলচিত্র ও বংকন ভ্রামক চিত্র পাশে দেখানো হল।

2. বীমের প্রস্থচ্ছেদে একটি সমতলীয় পোলার নির্দেশতন্ত্র কল্পনা করুন। প্রস্থচ্ছেদের অনুভূমিক ব্যাসটিকে যদি $z = 0$ ধরা যায় তবে ঐ ব্যাস থেকে $dA = rd\theta dr$ ক্ষেত্রফলের অতি ক্ষুদ্র অংশটির দূরত্ব $z = r\sin\theta$ ।



চিত্র 11.18

$\therefore$ ক্ষেত্রফলের প্রথম ভ্রামক

$$_a\int z dA = \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} r\sin\theta r d\theta dr$$

$$= \int_{r=0}^{a} r^2 dr \int_{0}^{2\pi}\sin\theta d\theta = \frac{a^3}{3}\cdot 0 = 0$$

সুতরাং $z = 0$ রেখাটিই বীমের নিরপেক্ষ তল নির্দেশ করছে।

ক্ষেত্রীয় ভ্রামক $=\int z^2 dA$

$$=\int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^2\sin^2\theta\cdot r d\theta dr$$

$$=\int_{r=0}^{a} r^3 dr\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta$$

$=\frac{a^4}{4}\cdot\pi$ সুতরাং ক্ষেত্রীয় ভ্রামকের মান $=\frac{\pi a^4}{4}$।

3. 11.2.2 অংশে আপনি প্রশ্নটির উত্তর পাবেন।

4. 11.3.1 অংশে এ বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। অংশটি পড়ে নিয়ে আপনি এর উত্তর লিখতে পারবেন।

5. 11.3.2 অংশে এ জাতীয় বীমের (দৈর্ঘ্য $=2\ell$) নমন নির্ণয় করা হয়েছে। 11.20 সমীকরণ থেকে

$YIz=\left(\frac{1}{16}W\ell^2+\frac{1}{24}w\ell^3\right)x-\frac{1}{6}\left(\frac{W}{2}+\frac{w\ell}{2}\right)x^3+\frac{1}{24}wx^4$। বীমের দৈর্ঘ্যকে যদি ℓ বলা হয় তবে ℓ এর পরিবর্তে $\frac{\ell}{2}$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$YIz=\left(\frac{1}{16}W\ell^2+\frac{1}{24}w\ell^3\right)x-\frac{1}{6}\left(\frac{W}{2}+\frac{w\ell}{2}\right)x^3+\frac{1}{24}wx^4$$

এখন $I=\frac{1}{12}bd^3$ (অনুশীলনী 1(ii) দেখুন) এবং $x=\frac{\ell}{4}$ বসিয়ে

$$z_{x=\ell/4}=\frac{12}{Ybd^3}\left[\left(\frac{1}{16}W\ell^2+\frac{1}{24}w\ell^3\right)\frac{\ell}{4}-\frac{1}{6}\left(\frac{W}{2}+\frac{w\ell}{2}\right)\frac{\ell^3}{64}+\frac{1}{24}w\frac{\ell^4}{256}\right]$$

$$= \frac{3}{8Ybd^3}\left[\left(\frac{W}{2}+\frac{w\ell}{3}\right)\ell^3 - \frac{1}{24}(W+w\ell)\ell^3 + \frac{w\ell^4}{192}\right]$$

$$= \frac{3\ell^3}{8Ybd^3}\left[\frac{W}{2}+\frac{W_0}{3}-\frac{W}{24}-\frac{W_0}{24}+\frac{W_0}{192}\right] \quad \text{যেখানে } W_0 = \omega\ell = \text{ বীজের ওজন}$$

$$= \frac{3\ell^3}{8Ybd^3}\left[\frac{11}{24}W+\frac{57}{192}W_0\right] = \frac{\ell^3}{64Ybd^3}\left[11W+\frac{57}{8}\cdot W_0\right]$$

6. প্রশ্নটির উত্তর 11.4.1 অংশে পাওয়া যাবে।

একক 12 □ পৃষ্ঠ টান

গঠন

12.1 প্রস্তাবনা

আপনারা নিশ্চয়ই জানেন যে আন্তরাণবিক বলের জন্য পদার্থের স্থিতিস্থাপকতা ধর্মের প্রকাশ পায়। উপরোক্ত বলের ফলে (যা খুব স্বল্প পাল্লার 10^{-7} cm মধ্যে ক্রিয়াশীল থাকে) তরল পৃষ্ঠের একটি ধর্ম —

পৃষ্ঠ টান প্রকাশ পায়। এই প্রসঙ্গে একটা কথা বলা খুব জরুরী অর্থাৎ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ক্ষুদ্রতম হতে চায়। তরলপৃষ্ঠের এই ধর্মকে পৃষ্ঠটান বলে। কয়েকটি দৈনন্দিন ঘটনার বলা যাক।

ব্লটিং পেপার কালি শুষে নেয়। একটা ষ্টীলের সূচ অথবা ব্লেড্ সাধারণত জলে ডুবে যায়, কিন্তু বিশেষ যত্নে একটা সূচ রাখলে, সূচ ভাসমান থাকে এবং সূচের অবস্থানে তরলপৃষ্ঠ সামান্য নেমে (depressed) থাকে। এ অবস্থায় কারণ তরলপৃষ্ঠ টানা দেওয়া পর্দার মত আচরণ করে। বৃষ্টির ফোঁটা বাতাসের মধ্য দিয়ে পড়ার সময়ে প্রায় গোলাকার হয়—কেননা নির্দিষ্ট আয়তনে, গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ক্ষুদ্রতম হয়।

যে তরলের পৃষ্ঠটান কম তা সহজে ছড়ায়। সাবান জলের পৃষ্ঠটান জলের থেকে কম। এই জন্যে কোন দ্রবণ স্প্রে করতে হলে তাতে সাবান জল মেশানো হয়। পৃষ্ঠটানের জন্য ছাতা বা তাঁবুর কাপড়ের ভিতর দিয়ে জল জল যায় না।

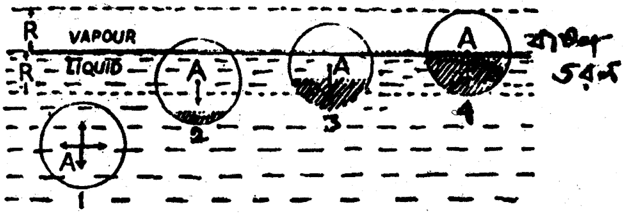
তরলের এই পৃষ্ঠটানের ফলে, জল কাচের কৈশিক নলের উপরে ওঠে বা পারদ কাচের নলে নীচে নামে।

উদ্দেশ্য

উপরের ঘটনাগুলোর সাম্যক ব্যাখ্যা পেতে গেলে তরলের পৃষ্ঠটানের বিশেষ জ্ঞান থাকা প্রয়োজন এই এককে পৃষ্ঠটানের বিশদভাবে আলোচনা করা হবে।

12.2 পৃষ্ঠটানের আণবিক ব্যাখ্যা

একই পদার্থের বিভিন্ন অণুর মধ্যে ক্রিয়াশীল বলকে সংসক্তি (cohesion) বলে — এর ফলে পদার্থের বিভিন্ন অংশকে একসঙ্গে ধরে রাখে। দুটি ভিন্ন পদার্থের স্পর্শতলে বিভিন্ন অণুর মধ্যেও আকর্ষণ বল থাকে — একে আসঞ্জন (adhesion) বলে। এই আমঞ্জলেনর ফলে জলের ফোটা কাচের গায়ে লেগে থাকে। উপরোক্ত আন্তরাণবিক বলে বৈদ্যুতিক কারণজনিত এবং এটি খুব অল্প দূরত্বের (প্রায় 10^{-7} cm) মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে। দূরত্ব কম থাকলে অণুগুলোর মধ্যে সংসক্তি প্রবল হয়, কিন্তু দূরত্ব সামান্য বাড়লেই সংসক্তি খুব কমে যায়। মনে করা যাক সংসক্তি R দূরত্বের পর্য্যন্ত ক্রিয়াশীল থাকে। R এর মান প্রায় 10^{-7} cm। কোন বিশেষ অণুকে কেন্দ্র করে R ব্যাসার্দ্ধের একটা গোলক ধরা যাক। গোলকের ভিতরে



চিত্র 12.1

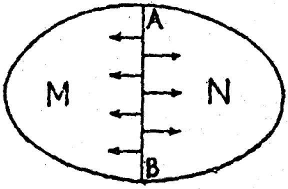
অবস্থিত সব অণুর আকর্ষণ বল ধরে নেওয়া বিশেষ অণুটির পরে পড়বে, কিন্তু গোলকের বাইরের অণুগোলকের কোন ক্রিয়া অণুটির উপর পড়বে না।

যে অণুগুলো তরলপৃষ্ঠ থেকে R দূরত্বের চেয়ে বেশী নিচে তাদের চারদিকে R ব্যাসার্দ্ধের গোলক সম্পূর্ণভাবে তরলের ভিতরে থাকবে (চিত্র 12.1)। এইসব অণু কোনদিকে লব্ধিবল অনুভব করবে না। কিন্তু যে সব অণু তরল পৃষ্ঠ থেকে R দূরত্বের মধ্যে আছে, তারা নিচের দিকে লব্ধিবল অনুভব করবে। (চিত্র 12.1 অণু নং 2, 3, 4)। অতএব, সংসক্তির জন্যে তরলপৃষ্ঠের অণুগুলো (য়ারা R বেধের স্তরের মধ্যে থাকে) নিচের দিকে, পষ্ঠের অভিলম্বে, একটা লব্ধিবল অনুভব করে।

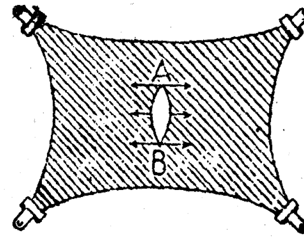
এবার মনে করুন আমরা পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল বাড়াতে চাই। এজন্য আমাদের ভিতরের কিছু অণুকে পৃষ্ঠতলে নিয়ে আসতে হবে। কিন্তু সেই কোনও অণু পৃষ্ঠের কাছাকাছি আসবে (অর্থাৎ R'র মধ্যে) তখনই তার উপরে একটি তরলের অভ্যন্তরের দিকে আণবিক বল ক্রিয়াশীল হবে সুতরাং অণুগুলিকে পৃষ্ঠে নিয়ে আসতে এই বলের বিরুদ্ধে কিছু কার্য করতে হবে। এই কৃতকার্যই তরলপৃষ্ঠে একটি শক্তি হিসেবে সঞ্চিত থাকবে। এই শক্তি দৃশ্যতই স্থিতিশক্তি এবং একে বলা হল পৃষ্ঠ শক্তি (Surface energy)

পৃষ্ঠটানের সংজ্ঞা

তরল পৃষ্ঠে একটা সরলরেখা AB কল্পনা করা হল, এটি তরলপৃষ্ঠকে M ও N দুটো অঞ্চলে ভাগ করে (চিত্র 12.2)। পৃষ্ঠে টান থাকায় M অংশ N অংশের উপর AB সরলরেখার আড়াআড়ি (লম্বদিকে) বল প্রয়োগ করে। আবার N অংশ M অংশের উপর বিপরীত দিকে সমপরিমাণ টান প্রয়োগ করে। AB রেখার আড়াআড়ি প্রতি একক দৈর্ঘ্যে যে টান ক্রিয়া করে তাকে তরলের পৃষ্ঠটান বলে। পৃষ্ঠটান সি জি এস পদ্ধতিতে dyne/cm এককে, এবং এম. কে. এস পদ্ধতিতে newton/metre এককে প্রকাশ করা হয়।



চিত্র 12.2

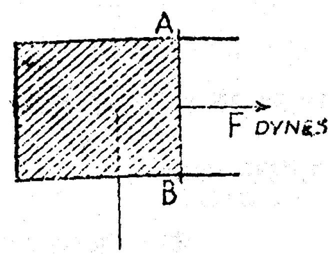


চিত্র 12.3

তরল পৃষ্ঠ একটা টানা দেওয়া রবার পাতের মত আচরণ করে। পাতের উপরে কল্পিত কোন AB রেখা ধরলে, তার এক পাশের পাত অন্য পাশের পাতের উপর রেখার আড়াআড়ি টান দিয়ে ধরে রাখে। চিড়ে দিলে দুপাশে পাত সরে যায় (চিত্র নং 12.3)। উপরোক্ত উদাহরণ থেকে বোঝা যায় যে টানা রবার পাতে বল স্পর্শক, অর্থাৎ পাতের তলে থাকে। তরলের পৃষ্ঠটান ও তরল পৃষ্ঠে স্পর্শক তলে থাকে।

12.3 পৃষ্ঠের স্থিতিশক্তি এবং পৃষ্ঠটানের সম্পর্ক

পৃষ্ঠ শক্তি এবং পৃষ্ঠটানের সম্পর্ক নির্ণয় করবার জন্য একটা কাল্পনিক পরীক্ষার কথা চিন্তা করুন। একটা চৌকা তারের কাঠামো অনুভূমিক ভাবে রাখা হল (চিত্র 12.4)। কাঠামোর AB বাহু অন্য দুই বাহুর উপর দিয়ে বিনা বাধায় সরতে পারে। চৌকার মাঝে কোন তরলের পাতলা ঝিল্লী গড়া হোল। এই স্তর ছোট হতে চাইবে এবং AB কে টানতে চাইবে। AB কে স্বস্থানে রাখতে হলে তার অভিলম্বে (ধরা যাক) F বল প্রয়োগ করতে হয়। AB র দৈর্ঘ্য 'l' হলে এবং তরলের পৃষ্ঠটান



চিত্র 12.4

γ হলে, সাম্যবস্থায় $F = 2\gamma\ell$ হবে। ঝিল্লীর দুই পিঠ থাকায় উপরোক্ত সমীকরণে ডানদিকে '2' এসেছে। AB বাহু যদি বল F এর অভিমুখে δx দূরত্ব সরে, তবে পৃষ্ঠটানের বিরুদ্ধে মোট $F\delta x = 2\gamma \cdot \ell\,\delta x$ কার্য

করা হয় এবং পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $2\ell\,\delta x$ পরিমাণে বাড়ে।.কার্যই বর্ধিত পৃষ্ঠতলের স্থিতিশক্তি। অতএব, তাপমাত্রা স্থির আছে ধরে নিলে পৃষ্ঠতলের প্রতি একক ক্ষেত্রফল সঞ্চিত স্থিতিশক্তির পরিমাণ হল $\gamma\,\mathrm{erg/cm^2}$ অথবা $\mathrm{joule/m^2}$।

উপরোক্ত আলোচনা থেকে পৃষ্ঠটানের বিকল্প সংজ্ঞা পাওয়া যায়। স্থির তাপমাত্রায় তরল পৃষ্ঠের প্রতি একক ক্ষেত্রফলে সঞ্চিত স্থিতিশক্তির পরিমাণই তরলের পৃষ্ঠটান γ। আমরা জানি সাম্যাবস্থায় কোন তন্ত্রের স্থিতিশক্তি অবম হয়। নির্দিষ্ট আয়তনে তরলপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল অবম (সর্বাপেক্ষা কম) হতে চায়—এটিই পৃষ্ঠের সংকুচিত হবার প্রয়াসের কারণ।

তরল পৃষ্ঠের মোটশক্তি

তরলের পৃষ্টটান γ হলে, তার উষ্ণতা স্থির রেখে পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল একক পরিমাণ বাড়াতে মোট শক্তির পরিমাণ $\gamma\,\mathrm{erg/cm^2}$ অপেক্ষা কিছু বেশী হবে। আসলে γ হল পৃষ্ঠতল গঠনের যান্ত্রিক শক্তি (প্রতি একক ক্ষেত্রফলে)। পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল বাড়াতে তরলের ভিতর থেকে যে অণুগুলো আসে তাদের স্থিতিশক্তি বাড়ায় গতিশক্তি কমে। এরফলে তরলের উষ্ণতা কমবে। উষ্ণতা অপরিবর্তিত রাখার জন্য আশপাশ থেকে তরলে তাপশক্তি প্রবেশ করতে দিতে হবে। অতএব উষ্ণতা স্থির রেখে তরলপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল একক পরিমাণে বাড়ানোর জন্য প্রয়োজনীয় শক্তিকে (E) দুভাগে ভাগ করা যায় — (ক) যান্ত্রিক শক্তি γ পরিমাণ ও (খ) শোষিত তাপশক্তি (h)।

অর্থাৎ $$E = \gamma + h \qquad (12.3.1)$$

তাপগতীয় তত্ত্ব কে h এর মান নির্ণয় করা যায়। তাপমাত্রা $T^\circ K$ হলে দেখানো যায়

$$h = -T\left(\frac{d\gamma}{d\theta}\right) \qquad (12.3.2)$$

তাপমাত্রা বাড়লে পৃষ্ঠটান কমে বলে $\left(\frac{d\gamma}{d\theta}\right)$ ঋণাত্মক হয়, ফলে h ধনাত্মক হয়।

12.4 আন্তপৃষ্ঠ পৃষ্ঠটান

তরলের পৃষ্ঠটান উল্লেখের সময়ে, সাধারণতঃ তরলের অন্য পশে কি পদার্থ আছে তা উল্লেখ করা হয় না। এটা সহজেই অনুময়ে যে, কোন পদার্থের পৃষ্ঠের এক পাশে কোন পদার্থ না থাকলে যে পরিমাণ পৃষ্ঠটান (বা প্রতি একক ক্ষেত্রের স্থিতিশক্তি) হবে, অন্যদিকে অন্য কোন পদার্থ থাকলে পৃষ্ঠটান কিছুটা

বদলাবে। তরলে যে কারণে পৃষ্ঠটান ঘটে, কঠিন পদার্থ ও গ্যাসে একই কারণ বর্তমান। অতএব কঠিন পদার্থে এবং গ্যাসেও পৃষ্টটান আছে ধরতে হবে। কাজেই কঠিন-তরল, তরল-গ্যাস বা কঠিন-গ্যাসের বিভেদ তলে পৃষ্ঠটান বিভিন্ন প্রকার হবে। দুটি পদার্থের বিভেদ তলে ক্রিয়াশীল পৃষ্ঠটান কে আন্তর্পৃষ্ঠ টান বলে। যখন আমরা ধরে কোন তরলের পৃষ্টটান উল্লেখ করি তখন ধরে নেওয়া হয় যে তরলের অন্যদিকে বায়ু অথবা তরলের বাষ্প আছে।

পৃষ্ঠটানের ঘাত

পৃষ্টটানের দুরকম সংজ্ঞা থাকলেও উভয়ক্ষেত্রে পৃষ্ঠটানের ঘাত একই হয়। প্রথম সংজ্ঞানুসারে,

$$\text{পৃষ্ঠটান} = \frac{\text{বল}}{\text{দৈর্ঘ্য}} = \frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2}$$

দ্বিতীয় সংজ্ঞানুসারে

$$\text{পৃষ্ঠটান} = \frac{\text{শক্তি}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = \frac{ML^2T^{-2}}{L^2} = MT^{-2}$$

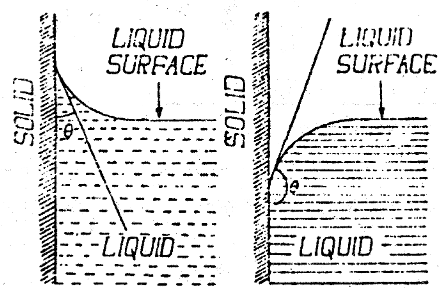
অর্থাৎ, উভয়ক্ষেত্রে ঘাত একই।

অনুশীলনী - 1

1. তরলের পৃষ্ঠটান কাকে বলে? দৈনন্দিন অভিজ্ঞতা থেকে পৃষ্ঠটান ক্রিয়ার কয়েকটা উদাহরণ দিন।
2. পৃষ্ঠের স্থিতিশক্তি্র সঙ্গে পৃষ্ঠটানের সম্পর্ক কি?
3. 1 m.m ব্যাসের এক ফোঁটা জল একই উষ্ণতায় সমান আকারের 10^6 গোল কণায় ভাগ করা হল। নূতন পৃষ্ঠতল সৃষ্টিতে কি পরিমাণ যান্ত্রিক কার্য হবে? দেওয়া আছে জলের পৃষ্ঠটান $74\,dyn/cm$ ।

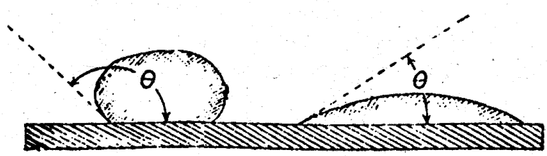
12.5 স্পর্শকোণ

যখন কোন তরলপৃষ্ঠ কোন কঠিন পদার্থের সংস্পর্শে আসে, তখন দুটি বিভিন্ন তলের মধ্যে একটি কোণ থেকে যায়। এই কোণ দুটি পদার্থের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে। স্পর্শরেখার লম্বতলে স্পর্শবিন্দুতে টানা তরল পৃষ্ঠের স্পর্শক কঠিনের সীমারেখার সঙ্গে তরলের মধ্যে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাকে স্পর্শকোণ বলে। 12.5 নং চিত্রে কঠিনের সংস্পর্শে অবস্থিত তরলের একটা ছেদ দেখান হয়েছে; ছেদটি স্পর্শরেখার লম্বতলে নেওয়া।



চিত্র 12.5

উপরের চিত্রে θ হল স্পর্শকোণ। θ এর মান 90° থেকে কম (যেমন জল এবং কাচের ক্ষেত্রে) এবং 90° থেকে বেশী (যেমন কাচ এবং পারদের ক্ষেত্রে দুপ্রকার অবস্থাই দেখানো হয়েছে।



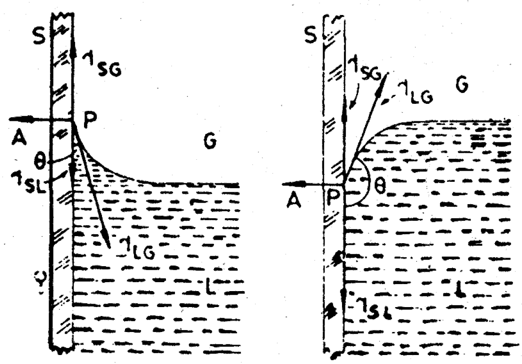
চিত্র 12.6

পরিষ্কার কাচের পতের উপর ওক ফোঁটা জল অথবা বেনজি্ন ফেললে ফোঁটাটি কাচের পাতে ছড়িয়ে পড়ে। স্পর্শকোণ খুব ছোট (প্রায় শূন্যের কাছাকাছি) বলে এরূপ দেখা যায়। আবার স্পর্শকোণ অপেক্ষাকৃত বড় বলে, কাচের উপর পারদ (স্পর্শকোণ প্রায় 140°) ছড়ায় না। (চিত্র 12.6 a ও b) অপদ্রব্য বা ভেজালের উপস্থিতিকে তরলে স্পর্শকোণ অনেক পরিবর্তিত হতে পারে। পরিষ্কারক (detergent) বলে যেসব

রাসায়নিক পদার্থ আমরা ব্যবহার করি সেগুলোর কাজ স্পর্শকোণ অনেকটা কমিয়ে আনা। স্পর্শকোণ কমলে জলে কাচা কাপড়কে জলে অভেদ্য করার (Water proofing) জন্য কাপড়ে এক প্রকার অভেদক পদার্থ লাগিয়ে জলের সঙ্গে কাপড়ের স্পর্শকোণ 90° অপেক্ষা বেশী করা হয়। ফলে জল ভিতরে না ঢুকে বাইরেই থেকে যায়।

12.5.1 তরলের ছড়ানোর অথবা গুটানো

কোনও তরল কঠিন পদার্থের তলে ছড়িয়ে পড়বে কিনা বোঝার জন্য



চিত্র 12.7

12.7 নং চিত্রে দেখুন পাত্রে কঠিন (S) ও গ্যাসের (G) সংস্পর্শে অবস্থিত তরলের (L) খাড়া ছেদ দেখানো হয়েছে। P বিন্দুতে তিনটিরই মিলন ঘটেছে। মনে করা যাক

কঠিন তরল স্পর্শতলে পৃষ্ঠটান $=\gamma_{SL}$

কঠিন - গ্যাস স্পর্শতলে পৃষ্ঠটান $=\gamma_{SG}$

এবং

তলর-গ্যাস স্পর্শতলে পৃষ্টটান $=\gamma_{LG}$

সাম্যাবস্থায় $\gamma_{LG}\sin\theta$ (কঠিনের অভিলম্বে) γ_{LG} এর উপাংশ আসঞ্জনজনিত বল A দ্বারা নিষ্ক্রিয় হয়।

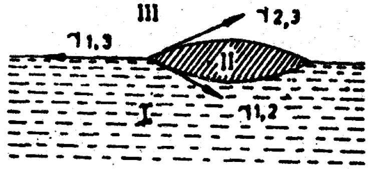
অতএব P বিন্দুতে অবস্থিত তরল কণার সাম্যের সমীকরণ হবে

$$\gamma_{LG}\cos\theta + \gamma_{SL} = \gamma_{SG}$$

$$\text{or} \quad \cos\theta = \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma_{LG}} \qquad (12.5.1)$$

উপরোক্ত সমীকরণ থেকে θ এর মান নির্ণয় করা সম্ভব। $\gamma_{SL} > \gamma_{SG}$ হলে θ স্থূলকোণ হবে (12.7b চিত্র) $(\gamma_{SG} - \gamma_{SL}) > \gamma_{LG}$ হলে $\cos\theta > 1$ হয় কিন্তু $\cos\theta$ কখনই >। হতে পারে না, সুতরাং এক্ষেত্রে সাম্যাবস্থা হবে না এবং তরল কঠিনের পৃষ্ঠে ছড়িয়ে পড়বে। γ_{SG}, γ_{SL} ও γ_{LG} এর মাপের সমান তিনটি বাহু দিয়ে কোন ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব হলে $(\gamma_{SG} \sim \gamma_{SL}) < \gamma_{LG}$ হবে,ফলে $|\cos\theta| < 1$ হবে। উপরোক্ত ত্রিভুজকে নয়ম্যানের ত্রিভুজ (Neumann's triangle) বলে এবং এক্ষেত্রে সাম্য সম্ভব। অতএব বলা যায় যে নয়ম্যানের ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব হলে তরল গুটিয়ে, নচেৎ তরল কঠিনের পৃষ্ঠে সম্পূর্ণভাবে ছড়িয়ে পড়বে।

কোন তরলপৃষ্ঠে অন্য কোন তরলের এক ফোঁটা রাখলেও সাম্যের যুক্তি উপরের মত হবে। এক্ষেত্রেও তিনটি পৃষ্ঠটান আছে (12.8 চিত্র)। যদি $\gamma_{13} > \gamma_{12} + \gamma_{23}$ হয়, তবে সাম্য সম্ভব নয়। এক্ষেত্রে II নং তরলের সীমান্ত কণাগুলো γ_{13} এর দিকে এগোতে থাকবে এবং তরল I নং তরলের পৃষ্ঠে ছড়িয়ে পড়বে। জলের উপর জলপাইয়ের তেলের ফোঁটার ক্ষেত্রে $\gamma_{13} = 72$, $\gamma_{23} = 32$ এবং $\gamma_{12} = 30$ dyn / cm হয়। কাজেই এক্ষেত্রে তিনটি রেখা দিয়ে ত্রিভুজ অংকন করা সম্ভব নয়।



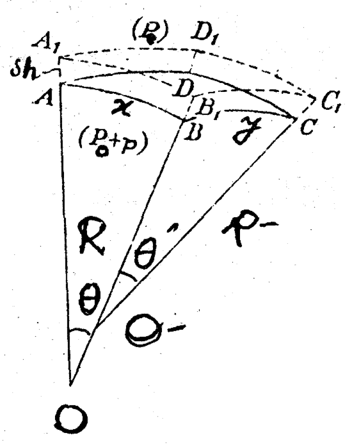
চিত্র 12.8

12.6 বক্র তরলপৃষ্ঠের দুই পাশে চাপের প্রভেদ।

বক্র পৃষ্ঠে অবস্থিত কোন বিন্দু দিয়ে কয়েকটি রেখা টানা যেতে পারে। সাধরণতঃ এদের বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ আলাদা হয়। যে রেখা দুটোর বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ সবচেয়ে কমও সবচেয়ে বেশী হয়, তারা পরস্পরের অভিলম্বে থাকে। উপরোক্ত রেখাদুটোর ভিতর দিয়ে পৃষ্ঠের অভিলম্বে অংকিত ছেদদুটোকে প্রধান ছেদ বলে এবং এই ছেদে বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ দুটোকে মুখ্য বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ বলে (12.9 নং চিত্রে R ও R′)। একটি তরলের বক্রপৃষ্ঠের দুপাশে চাপের তারতম্যের বিষয়ে ল্যাপ্লাসের একটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য আছে। উপপাদ্যটি এরূপ কোন বক্র তরল পৃষ্ঠের কোন বিন্দুতে বক্রতার মুখ্য ব্যাসার্দ্ধ R ও R′ হলে ঐ স্থানে পৃষ্ঠের দুপাশে চাপের পার্থক্য p হবে

$$p = \gamma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \qquad (12.6.1)$$

এখানে γ তরলটির পৃষ্ঠটান ।



চিত্র 12.9

12.6.1 সমীকরণের প্রমাণ

মুখ্য ছেদ দিয়ে সীমাবদ্ধ বক্রপৃষ্ঠের একটি অণু পরিমান আয়তাকার অংশ ABCD (12.9 চিত্র) ধরা যাক। মনে করা যাক AB অংশের দৈর্ঘ্য x এবং BC অংশের y। তাদের বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ যথাক্রমে R ও R′ ; ধরা যাক $\angle AOB = \theta$ ও $\angle BO'C = \theta'$ । ABCD এর ক্ষেত্রফল $S = xy = R\theta \cdot R'\theta'$ । মনে করা

যাক, উপরোক্ত ক্ষেত্রকে নিজের অভিলম্বে δh পরিমাণ কল্পিত সরণ দেওয়া হল, অর্থাৎ তার প্রতিটি বিন্দু δh এগিয়ে গেল। ফলে ABCD এর ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি δs হবে।

$$\delta s = (R+\delta h)\theta \cdot (R'+\delta h)\theta' - R\theta \cdot R'\theta'$$

$$\cong \delta h(R+R')\,\theta\theta'$$

[δh^2 দ্বিতীয় ক্রমের ক্ষুদ্র রাশি বলে, δh^2 সম্বলিত রাশি উপেক্ষা করা হয়েছে।]

তরলের পৃষ্ঠটান γ হলে এবং ঝিল্লীর দুই পিঠ বলে, ক্ষেত্রের স্থিতিশক্তির বৃদ্ধির পরিমাণ হবে

$$2\gamma \cdot \delta s = 2\gamma \cdot \delta h(R+R')\,\theta\theta'$$

ঝিল্লীর অবতল পৃষ্ঠে চাপ P এবং উত্তল পৃষ্ঠে (অর্থাৎ বুদ্‌বুদের বাইরে) P_0 হলে, কল্পিত সরণে কৃতকার্যের পরিমাণ

$$(P-P_0)dv = (P-P_0)\delta h \cdot RR'\,\theta\theta'$$

ঝিল্লী সাম্যে আছে বলে, উপরোক্ত কৃতকার্য স্থিতিশক্তি বৃদ্ধির সমান হবে।

$$\therefore \quad (P-P_0)\delta h \cdot RR'\,\theta\theta' = 2\gamma\delta h(R+R')\theta\theta'$$

বা, $$p = P - P_0 = 2\gamma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) \qquad (12.6.1a)$$

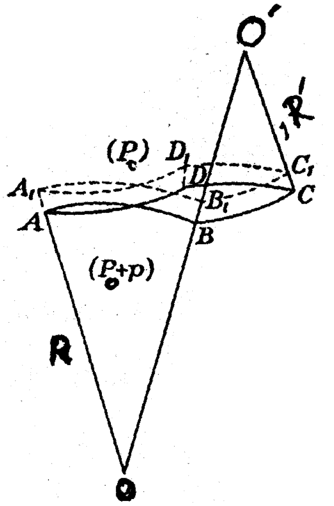
তরলের মধ্যে একটা বায়ু বুদবুদের ক্ষেত্রে মুক্ত বক্র পৃষ্ঠ একটাই থাকে, কাজেই 12.6.1a সমীকরণে ডানদিকে '2' থাকবে না। তরলে গোলাকার বায়ু বুদ্‌বুদের ক্ষেত্রে $R = R'$

$$p = \frac{2\gamma}{R} \qquad (12.6.2)$$

বাতাসে ভাদমান কোন গেলাকার বুদ্‌বুদের ক্ষেত্রে

$$p = \frac{4\gamma}{R} \qquad (12.6.3)$$

কেননা এক্ষেত্রে দুটো মুক্ত বক্রপৃষ্ঠ থাকে। কোন কোন বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রে বক্রতা কেন্দ্র বক্রতলের একই পাশে না থেকে দুপাশে থাকে (চিত্র নং 12.10)। এক্ষেত্রে অবতল রেখার ব্যাসার্ধ ধনাত্মক ও উত্তল রেখার ব্যাসার্ধ ঋণাত্মক নিতে হয়।



চিত্র 12.10

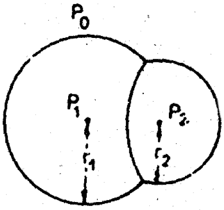
অনুশীলনী :

4. স্পর্শ কোণ কাকে বলে? স্পর্শ কোণ 90° থেকে (ক) বেশী, (খ) কম হলে তরল কঠিনের সংস্পর্শে কিভাবে থাকে ছবি সহ দেখান।

5. সংসক্তি ও আসঞ্জনের উপর স্পর্শকোণ কিভাবে নির্ভর করে বুঝিয়ে বলুন।

6. দুখানা সমতল কাচের ফাঁকে খানিকটা জল 5cm ব্যাসার্দ্ধের বৃত্তাকারে আছে। দুইপাতের দূরত্ব 1mm জলের পৃষ্ঠটান 72 dyn/cm ও স্পর্শকোণ 0° হলে পাতের অভিলম্বে কমপক্ষে কত বল প্রয়োগে তাদের ছাড়ান যাবে?

7. 4 cm ও 3 cm ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট দুটি সাবানজলের বুদবুদকে সংযুক্ত করা হল, যাতে তাদের একটা সাধারণ তল থাকে (12.11 চিত্র)। এই সাধারণ তলের বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ নির্ণয় করুন।

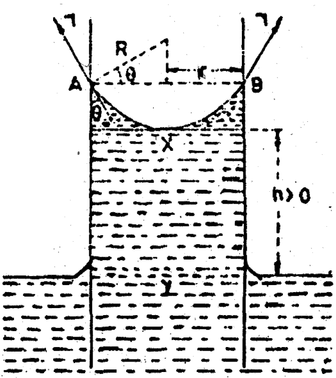


চিত্র 12.11

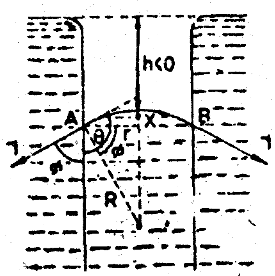
12.7 কেশিকতা - কেশিক নলে তরলের ওঠা নামা।

কোন কৈশিক নল তরলে ডোবালে, তরল কৈশিক নলের উপরে উঠবে যদি স্পর্শকোণ 90° থেকে কম হয় (12.12 নং চিত্রে), এবং স্পর্শকোণ 90° থেকে বেশী হলে তরল নিচে নামবে (12.13 চিত্রে)।

ধরা যাক স্পর্শ কোণ $\theta < 90^\circ$ নলের ব্যাসার্দ্ধ r এবং নলে তরল বাইরেরর মুক্ত তল থেকে h উচ্চতায় আছে। $h >> r$ ধরলে, নলের ভিতরে অবতল তরল পৃষ্ঠকে $R\left(=\dfrac{r}{\cos\theta}\right)$ ব্যাসার্দ্ধের গোলকের অংশ বলে ধরা যায়। P_0 হোল বায়ুমন্ডলীর চাপ এবং P_x অবতল তরলপৃষ্ঠের ঠিক নিচে (x) বিন্দুতে চাপ।



চিত্র 12.12



চিত্র 12.13

12.6.1 সমীকরণে $R = R'$ ধরে

$$P_0 - P_x = \frac{2\gamma}{R} \tag{12.7.1}$$

আবার তরলে চাপের সংগে গভীরতার সম্পর্ক থেকে পাই

$$P_0 = P_x + h\rho g \tag{12.7.2}$$

$$\therefore \quad h\rho g = \frac{2\gamma}{R} \tag{12.7.3}$$

উপরোক্ত সমীকরণে ρ হোল তরলের ঘনত্ব এবং g অভিকর্ষজ ত্বরণ। R কে r এবং স্পর্শকোণ θ এর সাপেক্ষে লিখলে

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r} \tag{12.7.4}$$

কঠিন পদার্থকে ভেজানো তরলের ক্ষেত্রে (যথা, কাচের কৈশিক নলে জলের ক্ষেত্রে) $1 \geq \cos\theta \geq 0$, নলে উত্থিত তরলের উচ্চতা h ধানত্মক হয়, এবং অভেজানো তরলের ক্ষেত্রে (যথা, কাচের নলে পারদ) $\cos\theta < 0$, h ঋণাত্মক হয় (চিত্র নং 12.13)

নলের ভিতরে তরলের উপর উল্লম্ব দিকে বিভিন্ন বলের প্রভাব বিচার করেও উপরোক্ত সমীকরণ 12.7.4 প্রতিষ্ঠা করা যায়। নল ও তরলের স্পর্শরেখার দৈর্ঘ্য $2\pi r$। এই রেখার আড়াআড়ি প্রতি একক দৈর্ঘ্যে তরলপৃষ্ঠ নলকে পৃষ্ঠের নলকে পৃষ্ঠের স্পর্শক বরাবর γ বলে টানে। এই বলের প্রতিক্রিয়া স্বরূপ নল তরলকে বিপরীত দিকে সমান বলে টানে। এই প্রতিক্রিয়া বলের খাড়া উপরের দিকের উপাংশ $2\pi r \cdot \gamma\cos\theta$। নলের মধ্যে তরলের ওজন $\pi r^2 h \rho g$। সাম্যাবস্থায়

$$2\pi r \quad \gamma\cos\theta = \pi r^2 h \rho g$$

বা, $$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r}$$

বা, $$\gamma = \frac{r h \rho g}{2\cos\theta} \tag{12.7.5}$$

কাচের নলে জলের ক্ষেত্রে, $\theta \simeq 0^0$ ধরলে

$$\gamma = \frac{rh\rho g}{2} \tag{12.7.6}$$

12.7.6 সমীকরণ নির্ণয়ে (x) বিন্দুর উপরের তরল (12.12) চিত্রে কালো অংশ) উপেক্ষা করা হয়েছে। উপরোক্ত তরলের আয়তন $= \pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^3$। কাজেই এ অবস্থায় সাম্যের সমীকরণ ($\theta \simeq 0^0$ ধরে) হয়

$$2\pi r\gamma = \pi r^2 \rho g\left(h + \frac{1}{3}r\right)$$

$$\therefore \quad \gamma = \frac{r g \rho}{2}\left(h + \frac{r}{3}\right) \tag{12.7.7}$$

জুরিনের সূত্র : কোন তরল কোন কৈশিক নলে h উচ্চতায়, 12.7.6 নং সমীকরণ থেকে বলা যায় যে নির্দিষ্ট তরলের ক্ষেত্রে rh = ধ্রুবক। এটিকে জুরিনের সূত্র বলা হয়। আরও সূক্ষ্ম সমীকরণ হল

$$r\left(h+\frac{r}{3}\right) = \text{ ধ্রুবক}$$

12.7.1 ভেজা তরলে ডোবানো খাটো কৈশিক নল।

ধরা যাক কোন কাচের কৈশিক নল জলে ডোবানো হল। মনে করা যাক নলের উচ্চতা (H) নলে যে পর্যন্ত (h) জল উঠতে পারে তার থেকে ছোট, অর্থাৎ $H < h$, তাহলে জল কি উপচে পড়বে? এক্ষেত্রে নলের অন্য প্রান্তে তরলপৃষ্ঠ অবতল হয়ে থাকবে, পৃষ্ঠের বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ (R) বৃদ্ধি পাবে, এবং $H = 2r\cos\theta'/\rho gr$ যেখানে θ' পরিবর্তিত স্পর্শকোণ।

12.8 পৃষ্ঠ টান মাপা

পৃষ্ঠ টান মাপার অনেক প্রকার পদ্ধতি আছে আমরা নিচে দুটো পদ্ধতি সম্পর্কে আলোচনা করব ঃ

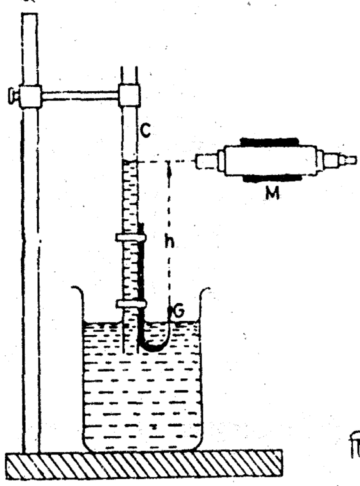
(1) কৈশিক নলের সাহায্যে;

(2) বুদ্‌বুদের চরম চাপ-বৈষম্য মেপে।

উপরোক্ত পদ্ধতি দুটো স্থিতীয় (Static) — কেননা এখানে তরলপৃষ্ঠ সাম্যে থাকে। গতীয় (Dynamic) উপায়ে (যেমন লহরীর সাহায্যে (ripple method))

12.8.1 কৈশিক নলের সাহায্যে পৃষ্টটান মাপার পদ্ধতি

যেসব তরল কাচকে ভেজায় (অর্থাৎ কাচ সাপেক্ষে স্পর্শকোণ খুব ছোট) তাদের পৃষ্ঠটান মাপার পক্ষে এই পদ্ধতি উপযুক্ত। এজন্য সদ্য তৈরি, পরিষ্কার সুক্ষ্ম ব্যাসের সরু কাচের সরু কৈশিক নল প্রয়োজন হয়।



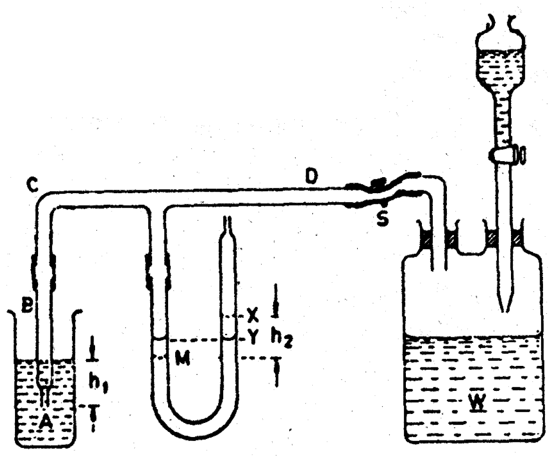
চিত্র 12.14

12.14 নং চিত্রে C কাচের নল এবং এর সঙ্গে একটা কাচের কাঁটা (G) লাগান আছে। নলটি ঠিক খাড়াভাবে আটকানো আছে। পরীক্ষাধীন তরলকে একটা পাত্রে নেওয়া হল এবং তরলটি নলের নিচে রাখা হোল, যাতে তরল কাচের নলে উঠে যায়। নলটি উঠিয়ে বা নামিয়ে এমনভাবে রাখা হোল যাতে কাঁটা G এর সরু মুখ তরলের ঠিক মুক্ত তলে থাকে। তরলের মুক্ত অবতল পৃষ্ঠ যে নলের মধ্যে সেখানে নলের বাইরে একটা দাগ দেওয়া হল। ট্রাভেলিং মাইক্রোস্কোপের (M) সাহায্যে নলের মধ্যে তরলের পৃষ্ঠ এবং G এর সরু মুখের পাঠ নেওয়া হল। উপরোক্ত পাঠ দ্বয়ের ব্যবধান থেকে h নির্ণয় করা হল, দাগ দেওয়া জায়গায় কাচের নলটি কেটে পরস্পর অভিলম্ব দুদিকে ব্যাস মাপা হল এবং তা থেকে নলের গড় ব্যাস $(=2r)$ নির্ণয় করা হল। এখন 12.7.7 সমীকরণ ব্যবহার করে পৃষ্ঠটান γ নির্ণয় করা হয়। 12.7.7 নং সমীকরণে স্পর্শকোণ $\theta = 0^\circ$ ধরা হয়েছে।

এই পদ্ধতি সঠিক γ নির্ণয়ে অসুবিধা : (i) স্পর্শকোণ (θ) 'র অনিশ্চয়তা (ii) নলের ব্যাসের সুষমতা নাও থাকতে পারে।

12.8.2 বিভিন্ন উষ্ণতায় পৃষ্ঠটান মাপার পদ্ধতি (ইয়েগারের পদ্ধতি)

এই পদ্ধতিতে (Jaeger's method) পরীক্ষাধীন তরলকে একটা 8 - 10 cm ব্যাস বিশিষ্ঠ কাচের বীকারে নেওয়া হয়। এই তরলে একটা কাচের নল যার মুখ খুব সরু (ব্যাস প্রায় 0.5 mm) আংশিকভাবে ডোবানো হয় (12.15 নং চিত্র)। নলের ভিতরে মুখের



চিত্র 12.15

সীমারেখা গোল ও অভগ্ন হওয়া দরকার। উলফ্ বোতলে (W) আস্তে আস্তে জল ফেলা হল। এর ফলে

বাতাস DCBA নল দিয়ে A এর মুখে বুদ্‌বুদ তৈরি করে। W বোতলে জল ফেলা এমনভাবে নিয়ন্ত্রন করা হয়, যাতে প্রতি কয়েক সেকেন্ডে একটা করে বুদ্‌ বুদ হয়। A এর বাইরে পরীক্ষাধীন তরল নেওয়া হয়। ম্যানোমিটার (M) এ কোন হাল্কা তেল (যেমন কেরোসিন) থাকে। M এর দুই নলে তরল উচ্চতার সবচেয়ে বেশী ব্যবধান থেকে, বুদ্‌বুদের ভিতর ও বাইরের চাপের তারতম্য নির্ণয় করা হয়। ধরা যাক, A মুখ ছাড়ার সময়ে বুদ্‌বুদের ব্যাসার্দ্ধ r_b এবং A মুখের ভিতরের ব্যাসার্দ্ধ r। r এর উপর r_b নির্ভর করে কিন্তু $r_b = r$ ধরা যায় না, কাজেই $\gamma_b = f(r)$ ধরা যায়। যেহেতু $f(r)$ এর রূপ অজানা, কাজেই এই পদ্ধতিতে γ এর চরম মান নির্ণয় করা সম্ভব নয়। ধরা যাক, পরীক্ষাধীন তরলে A এর গভীরতা h_1, পরীক্ষাধীন তরলের নত্ব ρ_1 এবং বায়ু মণ্ডলের চাপ P_0। যদি ম্যানোমিটার তরলের ঘনত্ব ρ_2 এবং তার দুই নলে তরল উচ্চতার সর্বাধিক ব্যবধান h_2 হয়, তবে বুদ্‌বুদের ভিতরের চাপ হয় $(P_0 + h_2\rho_2 g)$। বুদ্‌বুদের বাইরের চাপ $(P_0 + h_1\rho_1 g)$।

$$\therefore \quad \frac{2\gamma}{f(r)} = (P_0 + h_2\rho_2 g) - (P_0 + h_1\rho_1 g)$$

$$\therefore \quad \gamma = \frac{1}{2} f(r) g \quad (h_2\rho_2 - h_1\rho_1) \qquad (12.8.1)$$

উপরোক্ত উপায়ে γ এর চরম মান নির্ণয় করা না গেলেও, কোন তরলের বিভিন্ন উষ্ণতায় পৃষ্ঠটানের মানের তুলনা করা যায়। অবশ্য এক্ষেত্রে বিভিন্ন উষ্ণতায় $f(r)$ এর মান অপরিবর্তিত থাকে বলে ধরা হয়। এছাড়া এই পদ্ধতিতে একই তরলের বিভিন্ন ঘনত্বে পৃষ্ঠটান তুলনা করা যায়। এই পদ্ধতিতে স্পর্শকোণ জানার দরকার হয় না — এটা এই পদ্ধতির একটা সুবিধা।

12.9 তাপমাত্রার সঙ্গে পৃষ্ঠটানের পরিবর্তন।

স্বল্প তাপমাত্রার পাল্লায়, পৃষ্ঠটানের পরিবর্তন নিচের সমীকরণ দ্বারা লেখা যায়।

$$\gamma = \gamma_0(1 - \alpha t) \qquad (12.9.1)$$

γ ও γ_0 $t^\circ c$ ও $0^\circ c$ এ পৃষ্ঠটান এবং α উষ্ণতা গুণাংক। সংকট তাপমাত্রার (T_c) কাছাকাছি γ এর মান শূন্য হয়। এর উপর ভিত্তি করে লেখা যায়।

$$\gamma_T = A\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^n \qquad (12.9.2)$$

যেখানে γ_T হোল $T^\circ k$ তে তরলের পৃষ্ঠটান, নির্দিষ্ট তরলের ক্ষেত্রে A একটি ধ্রুবক এবং $n \simeq 1.21$ ধরা হয়।

12.10 সারাংশ

পৃষ্ঠটান মুক্ত তরলপৃষ্ঠের একটা গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম। এই এককে পৃষ্ঠটান সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। এখানে পৃষ্ঠটানের সংজ্ঞা, গুণগত ব্যাখ্যা, পৃষ্ঠটান ও তরলপৃষ্ঠের স্থিতিশক্তি, বক্রপৃষ্ঠের দুপাশে চাপের তারতম্য, কৈশিকতা এবং তাপমাত্রার সঙ্গে পৃষ্ঠটানের পরিবর্তন বিষয়ে কিছু আলোচনা করা হয়েছে। সঠিক ধারণার জন্য উত্তর সমেত কিছু গাণিতিক প্রশ্নাবলী দেওয়া হয়েছে। চাযের জমি জলে ভিজা থাকে, ডিটারজেন্ট জলে গোলার ফলে জামা কাপড় কাচা সুবিধা হয় ইত্যাদি ঘটানর ব্যাখ্যা পেতে গেলে পৃষ্ঠটান সম্পর্কে সম্যক জ্ঞান থাকা দরকার।

12.11 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. কোন পাত্রে নিচের দিকে 0.2mm ব্যাসার্দ্ধের একটি ছেঁদা আছে। জলের ভিতর পাত্রটি কতখানি ঢুকালে ছেঁদা দিয়ে পাত্রে জল ঢুকবে? জলের পৃষ্ঠটান 72 dyn/cm।

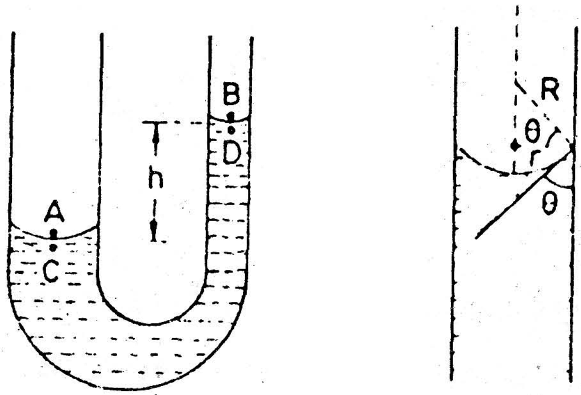
2. কোন পারদ ব্যারোমিটারের নলের ব্যাস 3.0mm। পৃষ্ঠটানের জন্য ব্যারোমিটারের পাঠে কি ত্রুটি হবে? পারদের $\gamma = 465 \text{dyn/cm}$, $\theta = 128^\circ$, ঘনত্ব $\rho = 13.6 \text{gm/c.c.}$, $g = 981 \text{ cm/sec}^2$।

3. a এবং b ব্যাসার্দ্ধের দুটি সাবানের বুদ্‌বুদ্ এক সঙ্গে জুড়ে একটি বুদ্‌বুদ্ হওয়ায় তার ব্যাসার্দ্ধ c হল। বাইরের চাপ P হলে প্রমাণ করুন যে পৃষ্ঠটান

$$\gamma = P\left(c^3 - a^3 - b^3\right)/4\left(a^2 + b^2 - c^2\right)$$

4. 2 cm ব্যাসার্দ্ধের একটি সাবানের বুদ্‌বুদের আয়তন আস্তে আস্তে বাড়িয়ে 20 cm করা হোল। সাবান জলের **পৃষ্ঠটান** 30dyn/cm। আয়তন বাড়াতে কত কাজ করতে হয়েছে হিসাব করুন। আয়তন দ্রুত বাড়ালে কাজ বেশী হোত না কম?

5. কোন U নলের দুই বাহুর ব্যাস যথাক্রমে 10mm ও 1mm। U নলটি আংশিক ভাবে জলপূর্ণ এবং বাহুদ্বয় খাড়াভাবে রাখা আছে (প্রঃ 12.16 চিত্র)। দুই বাহুতে জলতলের উচ্চতার পার্থক্য নির্ণয় করুন, দেওয়া আছে জলের পৃষ্ঠটান $\gamma = 72\text{dyn/cm}$ ।



চিত্র 12.16

12.12 উত্তরমালা

অনুশীলনী

1. প্রস্তাবনা 12.1 দেখুন। পৃষ্ঠটানের সংজ্ঞার জন্য 12.2 এর শেষাংশ দেখুন।

2. পৃষ্ঠের স্থিতিশক্তি 12.3 এর শেষাংশ দেখুন।

3. অবিভক্ত ফোঁটার পৃষ্ঠের স্থিতিশক্তি

$$= 4\pi \times (0\cdot05)^2 \times 74 = 0\cdot74\pi \quad \text{ergs}$$

উৎপন্ন নূতন ফোঁটার ব্যাসার্দ্ধ r ধরলে,

$$10^6 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times (0\cdot05)^3$$

বা, $r = \frac{0\cdot05}{100} = 5\times10^{-4}\,\text{cm}$

∴ নূতন ফোঁটাগুলোর পৃষ্ঠ তলের স্থিতিশক্তি

$$= 10^6 \times 4\pi \times \left(5\times10^{-4}\right)^2 \times 74$$

$$= 74\pi \quad \text{ergs}$$

∴ নূতন ফোঁটাগুলোর অতিরিক্ত স্থিতিশক্তি বা নূতন ফোঁটা উৎপাদনে কৃতকার্য

$$= \pi(74 - 0\cdot74) = 230 \quad \text{ergs}$$

4. 12.5 নং চিত্র দেখুন।

5. 12.5 এর আলোচনা দেখুন।

6. বায়ুর সংস্পর্শে জলের তল বায়ুর দিকে অবতল এবং এর বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ $\frac{1}{2} = 0\cdot5\ \text{mm}$। এর অভিলম্বে বক্রতা কেন্দ্র বিপরীত দিকে এবং বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ 5 cm। জলের বাইরে চাপ ভিতরের চেয়ে p পরিমাণে বেশী হলে

$$p = 72\left(\frac{1}{0\cdot05} - \frac{1}{5}\right) = 1425\cdot6\ \text{dyn}/\text{cm}^2$$

∴ প্রযুক্ত বল $= \pi \times 5^2 \times p = 111966\cdot4\ \text{dyn}$

7. ধরা যাক সাধারণ তলের বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ r।

$$P_1 - P_0 = \frac{4\gamma}{r_1}$$

এবং $P_2 - P_0 = \frac{4\gamma}{r_2}$

$$\therefore \quad P_2 - P_1 = 4\gamma\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$= 4\gamma\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{4\gamma}{12} = \frac{\gamma}{3}$$

আবার, $P_2 - P_1 = \frac{4\gamma}{r}$ (সাধারণ পৃষ্ঠকে গোলাকার ধরে) $\therefore r = 12\,\text{cm}$

উপরোক্ত উদাহরণ থেকে পরিষ্কার যে সাধারণ পৃষ্ঠ ছোট ব্যাসার্দ্ধের বুদবুদের দিকে অবতল।

সর্বশেষ প্রশ্নাবলীর উত্তর

1. h গভীরতায় ঢোকার সময়ে তরলের ফোঁটা r ব্যাসার্দ্ধের (ছেঁদার ব্যাসার্দ্ধ r) অর্ধগোলকে পরিণত হয়। $r << h$ হলে, সাম্যের জন্য

$$h\rho g = \frac{2\gamma}{r}$$

$$\text{or} \quad h = \frac{2\gamma}{r\rho g}$$

এখানে $r = 0\cdot 02\text{cm}$

$$\gamma = 72 \quad \text{dyn/cm}$$

$$\therefore h = \frac{2 \times 72}{0\cdot 02 \times 1 \times 981} = 7\cdot 3 \text{ cm}$$

2. পৃষ্ঠটানের পারদস্তম্ভ কিছুটা (h) নলে নেমে যাবে। h নিচের সমীকরণ থেকে নির্ণয় করা যায়। (12.7.4 সমীকরণ দেখুন)

$$h + \frac{r}{3} = \frac{2\gamma\cos\theta}{r\rho g}$$

বা, $$h = \frac{2 \times 465 \times \cos 128^\circ}{0\cdot 15 \times 13\cdot 6 \times 981} - \frac{0\cdot 15}{3}$$

$$= -0\cdot 2861 - 0\cdot 05 = -0\cdot 05 = -0\cdot 3361 \text{ cm}$$

3. 'a' ব্যাসার্দ্ধের বুদ্‌বুদের ভিতরের চাপ

$$p_1 = P + \frac{4\gamma}{a}$$

'b' ব্যাসার্দ্ধের বুদ্‌বুদের ভিতরের চাপ

$$p_2 = P + \frac{4\gamma}{b}$$

(12.6.3 সমীকরণ দেখুন)

'c' ব্যাসার্দ্ধের বুদ্‌বুদের ভিতরের চাপ

$$p_3 = P + \frac{4\gamma}{C}$$

ধরা যাক, তিনটি বুদ্‌বুদের ভিতরের বায়ুর ভর যথাক্রমে m_1, m_2 এবং m_3।

$\therefore$ ভরের সংরক্ষণ সূত্র থেকে পাই

$$m_3 = m_1 + m_2$$

এখন, $m_1 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_1$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3 (kp_1)$$

[তাপমাত্রার স্থির ধরে, বয়েলের সূত্র থেকে পাই $\rho_1 = k\,p_1$; k = একটি ধ্রুবক]

$$= \frac{4}{3}\pi a^3 k\left(p + \frac{4\gamma}{a}\right)$$

অনুরূপে

$$m_2 = \frac{4}{3}\pi b^3 k\left(P + \frac{4\gamma}{b}\right)$$

$$m_3 = \frac{4}{3}\pi c^3 k\left(P + \frac{4\gamma}{c}\right)$$

m_1, m_2 এবং m_3 এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{4}{3}\pi k\left[c^3\left(P+\frac{4\gamma}{c}\right)\right]=\frac{4}{3}\pi k\left[a^3\left(P+\frac{4\gamma}{a}\right)+b^3\left(P+\frac{4\gamma}{b}\right)\right]$$

বা, $c^3P+4\gamma c^2=a^3P+4\gamma a^2+b^3P+4\gamma b^2$

বা, $4\gamma\left(a^2+b^2-c^2\right)=P\left(c^3-a^3-b^3\right)$

বা, $\gamma=\dfrac{P\left(c^3-a^3-b^3\right)}{4\left(a^2+b^2-c^2\right)}$

4. বুদ্‌বুদের আয়তন বাড়ার সময়ে কোন এক মুহূর্তে বুদ্‌বুদের ব্যাসার্দ্ধ ধরা যাক r, পরের মুহূর্তে এর ব্যাসার্দ্ধ হয় $(r+dr)$

$\therefore$ বক্রতলের ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধি

$$=4\pi\left(r+dr^2\right)-4\pi r^2$$

$\simeq 8\pi rdr$ ($(dr)^2$ পদ উপেক্ষণীয়)

বুদ্‌বুদের দুটি পৃষ্ঠ ধরে, কৃতকর্যের পরিমান

$$dW=16\pi\gamma rdr$$

$\therefore$ মোট কৃতকার্যের পরিমাণ

$$W=16\pi\gamma\int_{r_1}^{r_2} rdr=\frac{16\pi\gamma}{2}\left(r_2^2-r_1^2\right)$$

$$=\frac{16\pi\times 30}{2}\left(20^2-2^2\right)=2\cdot 99\times 10^5\,\text{erg}$$

রুদ্ধতাপ পরিবর্তনর ফলে কৃতকার্যের বেশী হোত।

5. ধরা যাক r_1 ও $r_2(r_1>r_2)$ দুই নলের ব্যাসার্দ্ধ এবং θ স্পর্শকোণ। দুই নলের তরলবক্র

পৃষ্ঠের বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ যথাক্রমে R_1 ও R_2। চিত্র প্র : 12.16 থেকে পাই,

$$r_1 = R_1 \cos\theta, \quad r_2 = R_2 \cos\theta$$

$P_0 =$ বায়ুমন্ডলীয় চাপ

$$\therefore \quad P_A = P_B = P_0$$

$$P_0 - P_c = \frac{2\gamma}{R_1} \text{ এবং } P_0 - P_D = \frac{2\gamma}{R_2}$$

$$\therefore \quad (P_0 - P_D) - (P_0 - P_C) = P_C - P_D = 2\gamma\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

চিত্র (প্র: 12.16) থেকে পাই

$$P_C - P_D = h\,\rho\, g = 2\gamma\cos\theta\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

ρ তরলের ঘনত্ব এবং h দুই নলে জলতলের উচ্চতার ব্যবধান। ভেজানো তরলের ক্ষেত্রে $\cos\theta =$ ধনাত্মক, অর্থাৎ $P_C > P_D$। অর্থাৎ সরু নলে জলতল উচুতে থাকবে। কাচের নলে জলের ক্ষেত্রে $\theta \simeq 0$, $\cos\theta \simeq 1$

$$\therefore \quad h = \frac{2\gamma}{\rho g}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{2\times 72}{1\times 981}\left(\frac{1}{0\cdot 05} - \frac{1}{0\cdot 5}\right)$$

$$= 2\cdot 64 \text{ cm}$$

গঠন

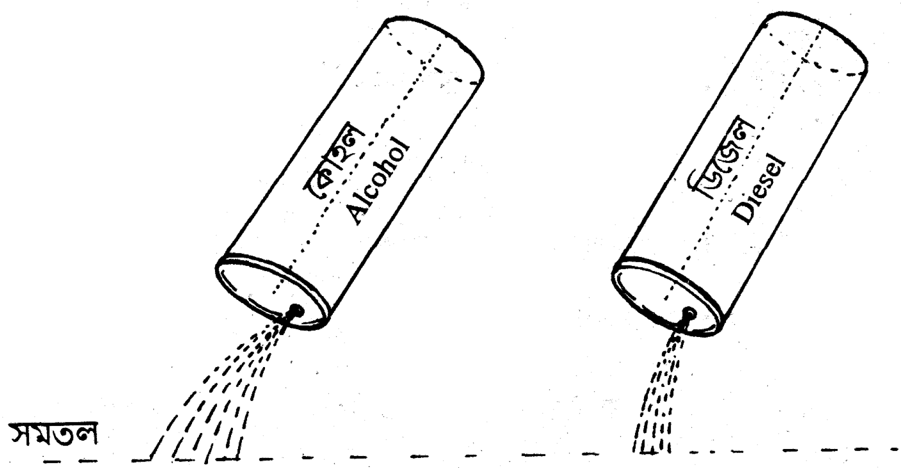
13.1 প্রস্তাবনা

একই পরিমাপের দুটি ড্রামের মধ্যে একটিতে কোহল আর অন্যটিতে ডিজেল তেল নিয়ে একই ব্যাসের ছিদ্র দিয়ে একইভাবে তরল দুটি ঢালতে থাকা হল।

কোহলপূর্ণ পাত্রটি আগে খালি হয়ে যাবে। এর কারণ কি?

পাশাপাশি স্তরের প্রবাহের বেগের তফাৎ থাকলে ঘর্ষণ বলের অনুরূপ একটি বল ক্রিয়াশীল হয়—একে বলা হয় সান্দ্রতা বল (viscous force)। এই বল ডিজেলের ক্ষেত্রে কোহলের চেয়ে অনেক বেশী শক্তি শালী, সেজন্যই এই প্রভেদ।

প্রবাহীর সান্দ্রতার পরিমাপ যে রাশির দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাকে প্রবাহীর সান্দ্রতাঙ্ক (co-efficient of viscosity) বলে।



(চিত্র 13.1)

উদ্দেশ্য

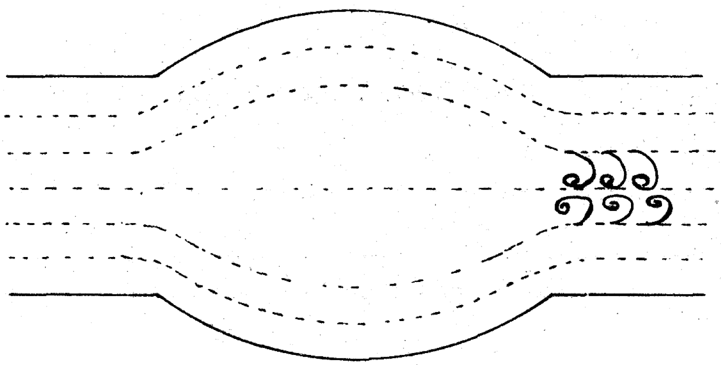
এই এককটিতে আপনি তরল ও গ্যাসীয় পাদার্থের সান্দ্রতা ধর্ম সম্বন্ধে অবহিত হবেন। এককটি পড়ার পর আপনি যে কাজগুলি করতে পারবেন সেগুলি হল ঃ

- তরল ও গ্যাসীয় পদার্থের সান্দ্রতা ধর্মটি ব্যাখ্যা করতে পারবেন এবং সান্দ্রতাঙ্কের সংজ্ঞা দিতে পারবেন।

- তরল ও গ্যাসীয় পদার্থের ক্ষেত্রে সান্দ্রতাঙ্কের উপর উষ্ণতা ও চাপের প্রভাব বর্ণনা করতে পারবেন।
- তরল ও গ্যাসীয় পদার্থের সান্দ্রতাঙ্ক নির্ণয় করার যন্ত্রব্যবস্থার সচিত্র বর্ণনা দিতে পারবেন এবং নির্ণয় পদ্ধতির মূলনীতি ও পরীক্ষা পদ্ধতি বিবরণ দিতে পারবেন।

13.2 প্রবাহীর গতি (Mofion of fluid)

প্রবাহীর (তরল বা গ্যাসের) প্রবাহ দুইভাগে ভাগ করা হয় (1) শান্ত প্রবাহ (Steady flow) এবং (2) অশান্ত প্রবাহ (Turbulent Flow)

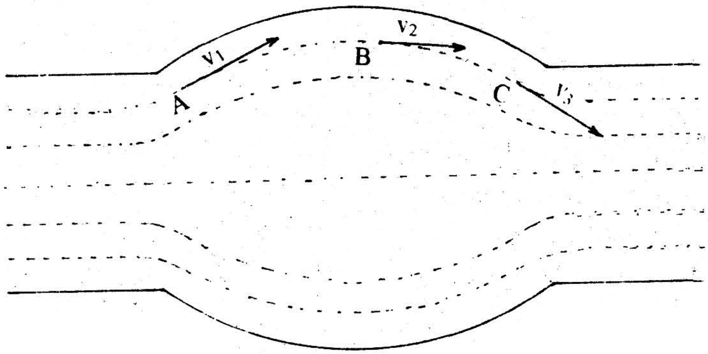


(চিত্র 13.2)

13.2 চিত্রে একটি অসম প্রস্থচ্ছেদের নল দেখানো হল। তরলের মধ্যে A, B, C বিন্দুর মধ্য দিয়ে প্রবাহিত তরলের সকল কণাই যদি নির্দিষ্ট V_1, V_2 এবং V_3 বেগে সময় নিরপেক্ষ ভাবে (অর্থাৎ সব সময়ে) ধাবিত হয় তবে ঐ প্রবাহকে শান্ত প্রবাহ (Steady flow) বলে। এক্ষেত্রে প্রবাহীর প্রতিটি কণা তার পূর্বগামী কণার পথ হুবহু অনুসরণ করে। এক্ষেত্রে প্রবাহীর যে কোন একটি কণা যে পথ ধরে চলে তাকে প্রবাহ রেখা (Stream line) বলে। এই রেখার যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক টানলে ঐ বিন্দুতে বেগের অভিমুখ পাওয়া যায়। এখানে তরলের কণাগুলি মিশ্রিত হয় না। দুটি বিভিন্ন রঙের মিশ্রণ দিয়ে এর পরীক্ষা করা যায়।

প্রবাহীর বেগ যথেষ্ট কম থাকলে প্রবাহ শান্ত থাকে। এই বেগ ক্রমে বাড়ালে দেখা যায় যে একটি নির্দিষ্ট সীমা পর্য্যন্ত প্রবাহ শান্ত থাকে। এই নির্দ্দিষ্ট সীমার বেগকে ক্রান্তিক বেগ বা সন্ধি বেগ (critical velocity) বলে।

প্রবাহীর বেগ ক্রান্তিক বেগের বেশী হলে প্রবাহ স্থির থাকে না, প্রবাহের ভিতর আবর্ত (vortices) ও ঘূর্ণির (Eddies) সৃষ্টি হয়। এক্ষেত্রে প্রবাহকে অশান্ত প্রবাহ (Turbulent flow) বলে।

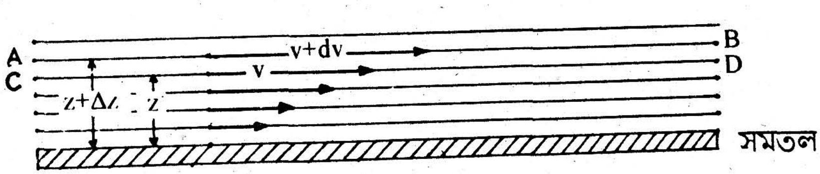


(চিত্র 13.3)

এই অবস্থায় তরল কণার গতি পথ ও বেগ ক্রমাগত বদলে যায় এবং প্রবাহীর কণাগুলো পরস্পরের সাথে মিলে যায়। চিত্র 13.3 দেখুন।

13.3 সান্দ্রতাঙ্ক (co-efficient of viscosity)

একটি তরল পদার্থ কম গতিবেগে সমতল স্থানের উপর দিয়ে প্রবাহিত হলে তার সর্ব্বনিম্নস্তর আসঞ্জন (Adhesion) বলের জন্য স্থির থাকে। তার উপরের স্তর সামান্য বেগে চলে। তার উপরের স্তর আরও একটু বেশী বেগে চলে। এখানে বেগের নতিমাত্রা $\frac{d\vartheta}{dz}$, তরলের পরপর দুটি স্তর পরস্পরকে ত্বরান্বিত বা মন্থর করে আপেক্ষিক বেগ হ্রাস করার চেষ্টা করে।



(চিত্র 13.4)

13.4 চিত্রে AB স্তরের উপর CD স্তর একটি পশ্চাদবর্তী স্পর্শক বল F প্রয়োগ করে, আবার AB স্তর CD স্তরের উপর F এর সমান বিপরীত মুখী একটি স্পর্শক বল প্রয়োগ করে।

এই পশ্চাদমুখী স্পর্শক বলকে F মনে করলে বলে নিউটনের সূত্র অনুসারে

$F \alpha A$; $A \longrightarrow$ স্পর্শতলের ক্ষেত্র ফল

$\alpha \frac{d\vartheta}{dz}$; $\frac{d\vartheta}{dz} \rightarrow$ বেগের নতিমাত্রা

$$\therefore F \alpha A \frac{d\vartheta}{dz}$$

$$= \eta A \frac{d\vartheta}{dz} \tag{13.1}$$

$$\therefore \eta = \frac{F}{A \frac{d\vartheta}{dz}}$$

η রাশিটিকে সান্দ্রতাঙ্ক (co-efficient of viscosity) বলে। η এর মান প্রবাহীর প্রকৃতির উপর নির্ভর করে। একই তরলের ক্ষেত্রে এই মান তাপমাত্রা ও চাপের উপর নির্ভরশীল। আর্দশ গ্যাসের ক্ষেত্রে ঐ মান কেবল তাপ মাত্রার উপর নির্ভর করে।

ধরা যাক $A=1$ এবং $\frac{d\vartheta}{dx} = 1$

$\therefore \eta = F$ (সংখ্যাগত ভাবে)

সংজ্ঞা ঃ— শান্ত প্রবাহে প্রবাহীর মধ্যে বেগের একক নতিমাত্রায় এক বর্গ ক্ষেত্রের উপর ক্রিয়াশীল স্পর্শক বল প্রবাহীর সান্দ্রতাঙ্কের মান।

η **মাত্রা (Dimensions of η)**

$$[\eta] = \frac{[F]}{[A]\left[\frac{d\vartheta}{dx}\right]} = \frac{MLT^{-2}}{[L^2][LT^{-1}/L]} = [ML^{-1}T^{-1}]$$

সি.জি.এস পদ্ধতিতে η এর একক $gcm^{-1}s^{-1}$ কে পয়জ (poise) বলে। এস্ আই এককে η এর একক $kgm^{-1}s^{-1} = 10$ পয়জ।

নিউটনীয় এবং অনিউটনীয় তরল (Newtonian and non Newtonian Liquids)

যে সকল তরলের ক্ষেত্রে সমীকরণ (13.1) প্রয়োগ করা চলে তাদের নিউটনীয় তরল বলে।

যে সকল তরল এই নিয়ম মানে না অর্থাৎ নির্দিষ্ট উষ্ণতা ও চাপে F/A র মান $\frac{d\vartheta}{dz}$ এর মানের আনুপাতিক হয় না তাদের অনিউটনীয় তরল বলে। যেমন কলয়েড সমৃদ্ধ পদার্থ (রক্ত ও রং প্রভৃতি) এক্ষেত্রে $\left(F/A\right)/\left(\frac{d\vartheta}{dz}\right)=\eta$ কে আপাত সান্দ্রতা (Apparent viscosity) বলে।

13.3.1 ক্রান্তিক বেগ ও রেনল্ডস্ সংখ্যা (Critical velocity and Reynolds' number)

ক্রান্তিক বেগ অতিক্রম করলে প্রবাহীর শান্ত প্রবাহ, অশান্ত প্রবাহে পরিণত হয়।

পরীক্ষার দ্বারা রেনল্ড দেখান যে তরলের ক্রান্তিক বেগ (V_c)

$$V_c \alpha \frac{\eta}{\rho r}$$

$\eta \rightarrow$ তরলের সান্দ্রতাঙ্ক

$\rho \rightarrow$ তরলের ঘনত্ব

$r \rightarrow$ তরলের প্রবাহ নলের ব্যাসার্দ্ধ

$$\therefore V_c = N\frac{\eta}{\rho r}$$

$N \rightarrow$ রেনল্ডস সংখ্যা (মাত্রাহীন)।

ধরা যাক উপরের সমীকরণটীর রূপ

$$V_c = N\,\eta^x \rho^y r^z$$

মাত্রা সমীকরণে প্রকাশ করলে

$$\left[LT^{-1}\right]=\left[ML^{-1}T^{-1}\right]^x\left[ML^{-3}\right]^y[L]^z$$

এখানে M, L ও T র উভয় দিকের মাত্রা (ঘাত) পৃথকভাবে সমান

$\therefore$ M এর ক্ষেত্রে $\qquad o = x + y$

L " " $l = -x - 3y + z$

T " " $-l = -x$

উপরের তিনটি সমীকরণ সরলীকরণ করলে

$x = l,\ y = -l$ এবং $z = -l$ পাওয়া যায়।

$$\therefore V_c = N\frac{\eta}{\rho r} \tag{13.2}$$

কৈশিক নলের মধ্য দিয়ে জল প্রবাহিত হলে N এর মান 1000 (প্রায়)

13.4 পোয়াস্যেইর সমীকরণ (Poiseulle's equation)

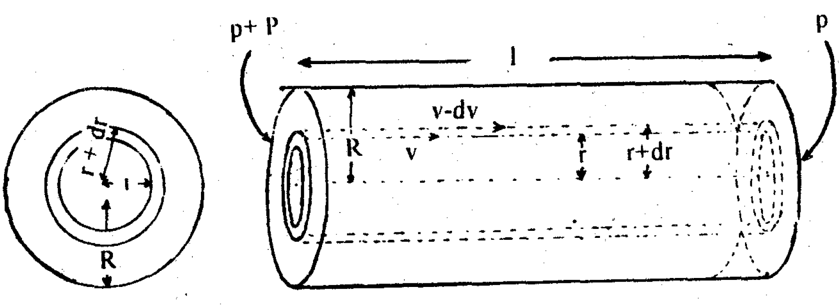
পোয়াস্যেইর সমীকরণে প্রবাহী নিম্নলিখিত শর্তগুলি মেনে প্রবাহিত হয়।

1) প্রবাহিত তরল নিউটনীয় শ্রেণীর হতে হবে।

2) প্রবাহীর প্রবাহ শান্ত থাকবে।

3) যে নলের ভিতর দিয়ে প্রবাহী প্রবাহিত হয় তার যে কোন ছেদের প্রতি বিন্দুতে চাপ সমান থাকবে।

4) নলের সংস্পর্শে অবস্থিত তরল স্তর গতিহীন থাকবে।



(চিত্র 13.5)

মনে করুন ℓ দৈর্ঘ্যের এবং R ব্যাসার্ধের একটি অনুভূমিক কৈশিক নলের মধ্য দিয়ে উপরের শর্তগুলি মেনে তরল প্রবাহিত হচ্ছে।

এই তরলের অক্ষ বরাবর শান্ত প্রবাহ রেখার বেগ, ϑ সবথেকে বেশী। বিভিন্ন বেলনাকৃতির স্তরগুলির গতি সমাক্ষ দেওয়ালের দিকে অগ্রসর হলে ক্রমাগত বেগ কমতে থাকে এবং নলের দেওয়ালের

সংলগ্ন স্তরের বেগ $\vartheta = o$। বেগের ব্যাসার্ধ মুখী নতিমাত্রা $= -\frac{d\vartheta}{dr}$ এখানে নলের দুই মুখের চাপের পার্থক্য P।

নলের সমাক্ষ r ব্যাসার্ধের তরল বেলন কল্পনা করুন। ঐ নলের গাত্র বরাবর সর্ব্বত্র বেগ ϑ। বাহিরের সংলগ্ন তরল স্তরের গতিবেগ $\vartheta - d\vartheta$, এই বেগ তরল চোঙের উপর স্পর্শকীয় ভাবে পশ্চাদ্‌বর্তী বল প্রয়োগ করে তরল চোঙের অগ্রগমনে বাধা দেয়। এই সান্দ্রতা জনিত বলের মান,

$$F = -\eta 2\pi r\ell \frac{d\vartheta}{dr} \quad [\ \eta = \text{ তরলের সান্দ্রাতাঙ্ক }]$$

এই পশ্চাদবর্তী বলকে, P চাপের জন্য উৎপন্ন সম্মুখবর্তী বল, $p\pi r^2$ প্রশমিত করে। ফলে প্রবাহে ত্বরণ থাকে না।

$\therefore$ তরল চোঙের প্রবাহ স্থির থাকলে

$$\pi r^2 p = -2\pi r\ell\eta \frac{d\vartheta}{dr}$$

বা $-r\,dr = \frac{2\ell}{p}\eta d\vartheta$

ইন্টিগ্রেট করলে পাই

$$\vartheta = -\frac{p}{2\eta\ell}\int r dr$$

$$= -\frac{p}{4\eta\ell}r^2 + c \qquad |c = \text{ ইন্টিগ্রেট ধ্রুবক}$$

আমরা জানি যখন $r=R$, $\vartheta = o$

$$\therefore o = -\frac{pR^2}{4\eta\ell} + c$$

বা $c = \frac{PR^2}{4\eta\ell}$

$$\therefore \vartheta = \frac{PR^2}{4\eta\ell} - \frac{pr^2}{4\eta\ell}$$

$$= \frac{p}{4\eta\ell}\left(R^2 - r^2\right) \qquad (13.3)$$

এটি একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

∴ নলের সমাক্ষ r এবং r+dr ব্যাসার্ধের বেলন অকারের খোলক দুটির মধ্য দিয়ে প্রতি সেকেন্ডে যে পরিমাণ তরল নির্গত হয় তার আয়তন dv ধরলে

$$dv = 2\pi r dr \vartheta$$

$$= 2\pi r \frac{\left(R^2 - r^2\right)p}{4\eta\ell} dr$$

$$= \frac{\pi p}{2\eta\ell}\left(R^2 - r^2\right) r dr$$

সমগ্র কৈশিক নল দিয়ে যে পরিমাণ তরল প্রতি সেকেন্ডে প্রবাহিত হয় তার আয়তন

$$V = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{p}{\eta\ell} \int_{\circ}^{R} \left(R^2 r - r^3\right) dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{p}{\eta\ell}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi PR^4}{8\eta\ell} \qquad (13.4)$$

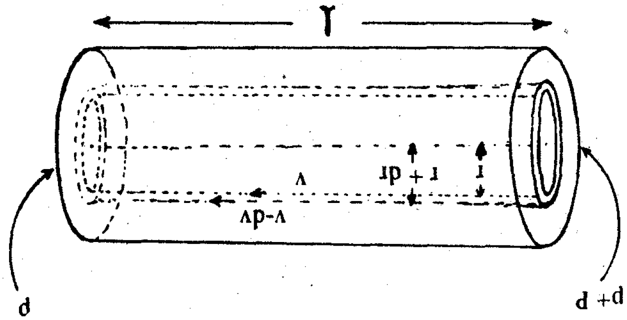
পোয়াস্যেইর সমীকরণ (Poiseulle's equation) বলে।

13.4.1 পোয়াস্যেইর সমীকরণের শুদ্ধি

পোয়াস্যেইর সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করার সময় মূলত দুইটি বিষয় বাদ দেওয়া হয়েছে, এর জন্য দুটি ত্রুটির শুদ্ধি প্রয়োগ করা দরকার।

1) গতি শক্তি জনিত ত্রুটির শুদ্ধি

আমরা ধরেছি যে মাপ   জনিত বল নলে কেবল মাত্র সান্দ্রতা জনিত বাধা অতিক্রম করে। কিন্তু বাস্তবে নল দিয়ে যখন তরল বের হয়, তরলের কিছু গতি শক্তি থাকে। প্রযুক্ত বলই এই গতিশক্তির উৎস। সুতরাং পোয়াস্যেইর সমীকরণে প্রেত বৈষম্য p এর থেকে কিছু কম হবে।



(চিত্রে 13.6)

চিত্রে নলের সমাক্ষে তরলের r এবং r+dr ব্যাসার্ধের খোলক দুটির মধ্য দিয়ে প্রতি সেকেন্ডে যে পরিমাণ তরল নির্গত হয় তার ভর

$$\rho dv = \rho 2\pi r dr \vartheta$$

এবং গতিশক্তি $dE = \frac{1}{2}\rho dv \vartheta^2$

$$= \pi\rho\vartheta^3 r dr$$

সমগ্র নলের মধ্য দিয়ে প্রতি সেকেন্ডে নির্গত তরলের মোট গতিশক্তি

$$E = \int dE = \int_0^R \pi\rho\vartheta^3 r dr$$

$$= \pi\rho\left(\frac{p}{4\ell\eta}\right)^3 \int_0^R \left(R^2 - r^2\right)^3 r dr$$

$$= \pi\rho\left(\frac{p}{4\ell\eta}\right)^3\left[\int_o^R R^6 rdr - 3\int_o^R R^4 r^2 rdr + 3\int_o^R R^2 r^4 . rdr - \int_o^R r^6 rdr\right]$$

$$= \pi\rho\left(\frac{p}{4\ell\eta}\right)^3\left[\frac{R^8}{2} - 3\frac{R^8}{4} + 3\frac{R^8}{6} - \frac{R^8}{8}\right]$$

$$= \pi\rho\left(\frac{p}{4\ell\eta}\right)^3 \frac{R^8}{8}$$

$$= \frac{\rho}{\pi} . \frac{p}{8\ell\eta}\left(\frac{\pi p R^4}{8\eta\ell}\right)^2$$

$$= \frac{\rho}{\pi} . \frac{p}{8\ell\eta} V^2$$

$$= \frac{\rho v^3}{\pi^2 R^4} \qquad (13.5)$$

এখানে প্রযুক্ত চাপের পার্থক্য p এর প্রভাবে প্রতি সেকেন্ডে v আয়তনের তরল নির্গত হয় এবং এর ফলে যে কার্য্য হয় তার মান pv। কেবল মাত্র সান্দ্রতা জনিত বাধা অতিক্রম করতে যদি P′ চাপ পার্থক্যের প্রয়োজন হয় তা হ'লে

$$p'v + \frac{\pi p R^4}{8\eta\ell} . \frac{\rho v^2}{\pi^2 R^4} = pv$$

বা $p'v + \dfrac{\rho p v^2}{8\pi\eta\ell} = pv$

বা $p' = p - \dfrac{\rho p v}{8\pi\eta\ell}$

$\therefore$ গতিশক্তির জন্য শোধিত সমীকরণ

$$\eta = \frac{\pi p' R^4}{8\ell v} = \frac{\pi R^4}{8\ell v}\left(p - \frac{\rho p v}{8\pi\eta\ell}\right)$$

$$= \frac{\pi p R^4}{8\ell v} - \frac{\rho}{8\ell} \cdot \frac{PR^4}{8\eta\ell}$$

$$= \frac{\pi PR^4}{8\ell v} - \frac{\rho V}{8\pi\ell} \qquad (13.6)$$

2) <u>ত্বরণের ত্রুটির শুদ্ধি</u>

তরলের প্রবাহে কোন ত্বরণ নেই ধরা হয়েছে কিন্তু বাস্তবে নলের মুখের কাছে তরল ত্বরণ নিয়ে প্রবেশ করে কিছুদুর অগ্রসর হওয়ার পর ঐ ত্বরণ শূণ্য হয় এবং তরল সমবেগে প্রবাহিত হতে থাকে।

এখানে প্রথমে ত্বরণের বদলে সমবেগ ভাবলে নলের কার্যকির দৈর্ঘ্য ℓ এর বদলে $\ell + nR$ ধরা যায়। এখানে n একটি সংখ্যা।

(13.6) নং সমীকরণে এই ত্রুটির শুদ্ধি ধরলে $\eta = \dfrac{\pi p R^4}{8v(\ell + nR)} - \dfrac{\rho V}{8\pi(\ell + nR)}$ (13.7)

তে রূপান্তরিত হয়। n এর মান 0.5 থেকে 0.8 η এর পরীক্ষা লব্ধ মানের সঙ্গে 13.6 নং সমীকরণের সামঞ্জস্য রাখতে হলে 13.7 নং সমীকরণের কিছু রূপান্তর করতে হয়। রূপান্তরিত সমীকরণটি হবে

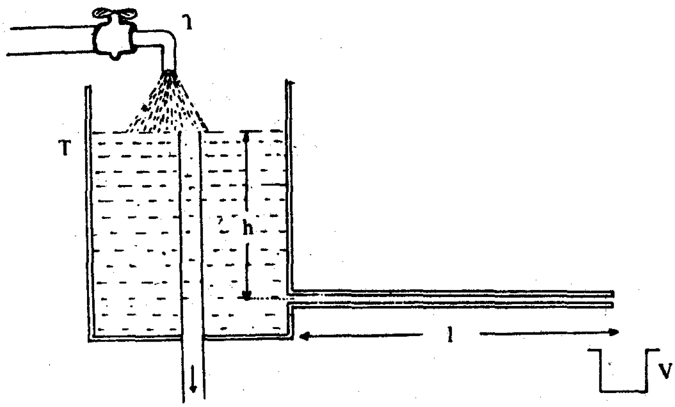
$$\eta = \frac{\pi PR^4}{8V(\ell + nR)} - \frac{m\rho V}{8\pi(\ell + nR)} \qquad (13.8)$$

এখানে m একটি সংখ্যা যার পরীক্ষা লব্ধমান 0.5 থেকে 1.55 মধ্যে থাকে।

সমীকরণ (13.8) ব্যবহার করে η 'র সঠিক মান পাওয়া যায়।

13.4.2 পোয়াস্যেইর পদ্ধতিতে তরলের সান্দ্রতাঙ্ক নির্ণয়।

T পাত্রে তরলের (নিম্ন সান্দ্রতাঙ্ক বিশিষ্ট) পৃষ্ঠদেশের উচ্চতা স্থির থাকে। R ব্যাসার্ধের কৈশিক নলের মধ্য দিয়া তরল পদার্থটি বেগ সংকট বেগের নিচে থাকবে।



(চিত্রে 13.7)

1) নলের মধ্যে সামান্য পরিমাণ পারা দিয়া এক থেকে অন্য স্থানে সরিয়ে গড় দৈর্ঘ্য $(L)^3$ ভরের (m) পরিমাপ করে

$$R = \sqrt{\frac{m}{\pi \rho L}}; \quad \left[\frac{m}{\rho} = \pi R^2 L,\ \rho \ \text{ তরলের ঘনত্ব} \right]$$

সূত্রের সাহায্যে "R" এর মান নির্ণয় করা হয়।

2) কৈশিক নলের দৈর্ঘ্য (ℓ) স্কেলের সাহায্যে পরিমাপ করা যায়।

3) তরলের উচ্চতার প্রভেদ "h" হলে $P = h\rho g$, $g =$ অভিকর্ষজ ত্বরণ।

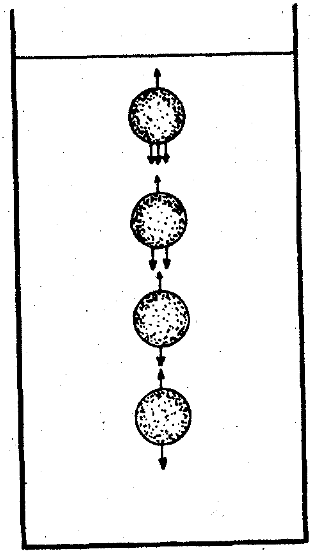
4) একটি মাপ নির্ধারক পাত্র v ও একটি স্টপ ঘড়ির সাহায্যে প্রতি সেকেন্ডে প্রবাহিত তরলের পরিমাণ v জানা যায়

$$\therefore\ V = \frac{\pi P R^4}{8\eta \ell}$$ সূত্রের সাহায্যে

η এর মান জানতে পারবেন।

13.5 সান্দ্র মাধ্যমের ভিতর গোলকের গতি, সীমান্তবেগ—ষ্টোক্‌সের সূত্র (Motion of a spherical body in a viscous medium terminal velocity - stokes law)

কোন বস্তু (এক্ষেত্রে গোলাকার) একটি অপেক্ষাকৃত কম ঘনত্বের প্রবাহীর (এখানে তরল পদার্থ) ভিতর দিয়ে নীচে পড়তে থাক্‌লে ঐ পতনশীল বস্তুর সংলগ্ন স্তরটি স্থির থাকে এবং পাশের তরল স্তরের মধ্য নিয়ে ঐ তরল নীচের দিকে নামতে থাকে। এই অবস্থায় দুটি স্তরের মধ্যে একটি আপেক্ষিক গতির সৃষ্টি হয়। তরল মাধ্যমের সান্দ্রতার জন্য গোলাকার বস্তুটির উপর উর্দ্ধমূখী বল (F) ক্রিয়া করে। অভিকর্ষজ ত্বরণের প্রভাবে বস্তুটির গতিবেগ বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে উর্দ্ধমূখী বল (F) এর মান বৃদ্ধি পায়। কিছুক্ষণের মধ্যে গতিসৃষ্টিকারী বল (Driving Force) এবং সান্দ্রতা জনিত বিরুদ্ধবল (Viscous Force) সমান হয়। এই অবস্থায় বস্তুটি স্থির বেগে নীচের দিকে পড়তে থাকে। এই স্থির বেগকে প্রান্ত্যবেগ (Terminal velocity) বলে।



(চিত্রে 13.8)

এই অবস্থায় পরীক্ষা করে দেখা যায়

$$F = f(r, \eta, \vartheta);$$

$r =$ গোলকের ব্যাসার্দ্ধ

$\eta =$ তরলের সান্দ্রতাঙ্ক

$\vartheta =$ গোলকের প্রান্ত্যবেগ

এখানে ধরা যায়

$F = kr^x \eta^y \vartheta^z$; $k =$ একটি মাত্রাহীন সংখ্যা,

এখানে মাত্রা সমীকরণ

$$MLT^{-2} = L^x\left(ML^{-1}T^{-1}\right)^y\left(LT^{-1}\right)^z$$

M এর মাত্রা থেকে পাই $1 = y$

L এর মাত্রা থেকে পাই $1 = x - y + z$

T এর মাত্রা থেকে পাই $-2 = -y - z$

এই তিনটি সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$x = y = z = 1$$

$$\therefore\ F = kr\eta\vartheta$$

তরলের গতি বিজ্ঞানের সাহয্যে ষ্টোক্স্ প্রমান করেন যে প্রবাহ্ শান্ত এবং তরল সীমাহীন হলে, $k = 6\pi$

অতএব $F = 6\pi r\eta\vartheta$ (13.9)

এটাই ষ্টোক্স্ এর সূত্র।

ত্বরণহীন অবস্থায়, সান্দ্রতা জনিত বল (F) গতি সৃষ্টিকারী গোলকের আপাত ওজন।

$$\therefore 6\pi r\eta\vartheta = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho-\sigma)g;$$

r = গোলকের ব্যাসার্ধ

ρ = গোলকের পদার্থের ঘনত্ব

σ = তরলের ঘনত্ব

g = অভিকর্ষজ ত্বরণ

$$\therefore\ \eta = \frac{2}{9}\frac{g}{\vartheta}r^2(\rho-\sigma) \tag{13.10}$$

পরীক্ষার দ্বারা ϑ, r, ρ, σ ও g র মান নির্ণয় করলে (13.10) সমীকরণের সাহায্যে η এর মান জানা যাবে।

সর্তানুসারে পাত্রটি সীমাহীন কিন্তু এখানে বেলনাকার পাত্র নেওয়ার জন্য পাত্রের দেওয়াল ও তলদেশ সসীম দূরত্বে থাকার ফলে (13.10) সমীকরনের ϑ বা ϑ_∞ র মান পরিবর্ত্তিত হয়ে

$\vartheta_f\left(1+2.4\frac{r}{R}\right)\left(1+3.3\frac{r}{h}\right)$ হবে।

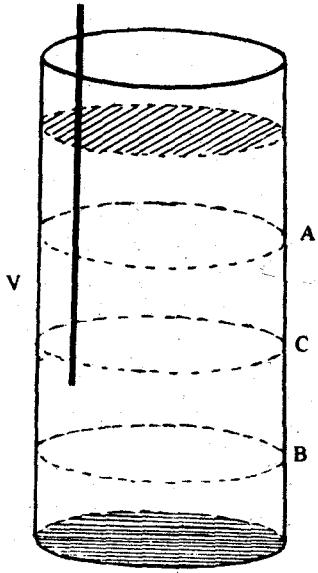
এখানে $\vartheta_f =$ পাত্রের মধ্যে পড়ন্ত গোলকের বেগ

$R =$ পাত্রের ব্যাসার্দ্ধ

$h =$ তরলের গভীরতা

$$\therefore \eta = \frac{2}{9}\frac{gr^2(\rho-\sigma)}{\vartheta_f\left(1+2.4\frac{r}{R}\right)\left(1+3.3\frac{r}{h}\right)} \qquad (13.11)$$

সাধারণত $\frac{r}{h}$ র মান খুবই ছোট $\left(\angle 10^{-3}\right)$ হয় এবং এই মানকে উপেক্ষা করলে (13.11) সমীকরণ থেকে পাওয়া যায় $\eta \simeq \frac{2}{9}\frac{gr^2(\rho-\sigma)}{\vartheta_f\left(1+2.4\frac{r}{R}\right)}$ (13.12)



(চিত্র 13.9)

এই পদ্ধতিতে উচ্চ সান্দ্রতাঙ্ক $\left(\simeq 10^2 \text{ poise}\right)$ বিশিষ্ট তরল পদার্থের সান্দ্রতা নির্ণয় করা হয়।

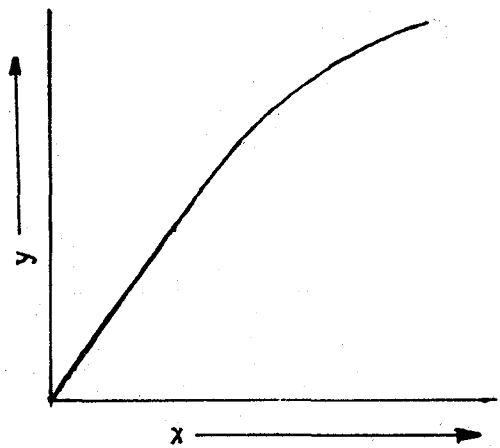
পরীক্ষা ঃ প্রায় এক মিটার উচ্চতার এবং 10cm ব্যাসের একটি কাঁচের বেলনাকার পাত্রের (v) মধ্যে অধিক সান্দ্রাতাঙ্ক যুক্ত তরল (যেমন তেল, গ্লিসারিন) নেওয়া হয়েছে। উপরে ও নীচে কিছু দূরত্ব ছেড়ে দুটি রবারের রিং A ও B লাগান হয়েছে। তৃতীয় আর একটি রিং C কে A ও B র মধ্যবর্ত্তী জায়গায় স্থাপন করা আছে।

কম ঘনত্বের সংকর ধাতুর (যেমন উড মেটাল) খুব ছোট একটি গোলক পরীক্ষাধীন তরলে ভিজিয়ে চোঙটির মধ্যবর্ত্তী স্থান দিয়ে ধীরে ছাড়া হল। এইবার ঐ গোলক AC ও CB দূরত্ব অতিক্রম করতে সমান সময় লাগে কিনা তা সময় মাপন যন্ত্রের সাহায্যে দেখা হল। দুটি ক্ষেত্রে একই সময় না লাগলে আরও ছোট গোলক নিয়ে পরীক্ষা করতে হবে।

এক্ষেত্রে সীমান্ত বেগ

$$= \frac{\ell}{t} \qquad \left[\begin{array}{l} \ell = \text{A ও B র মধ্যবর্ত্তী দূরত্ব} \\ t = \text{A থেকে গোলকের} \\ \quad\ \ \text{B পৌঁছিবার সময়} \end{array} \right.$$

একটি লেখচিত্রে x অক্ষ বরাবর $r^2\left(1+2.4\frac{r}{R}\right)^{-1}$ এবং y অক্ষ বরাবর $1/t$ বসালে যদি সরললেখা পাওয়া যায়



(চিত্র 13.10)

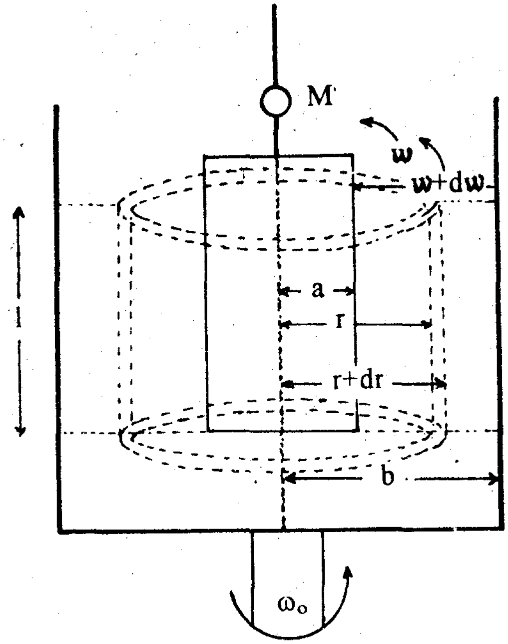
তা হ'লে সর্তগুলি সঠিক ভাবে পালিত হয়েছে বলে বোঝা যাবে। এই সরল রেখার নতি থেকে $t.\ r^2\left(1+2.4\frac{r^2}{R}\right)^{-1}$ এর মান জানা যাবে।

(13.12)'র ρ এবং σ র মান স্পেসিফিক্ গ্রাভিটি বোতলের সাহায্যে পরিমাপ করা হয়। অন্য অন্য রাশিগুলি পরিমাপ করে η এর মান বের করা যায়।

তাপমান যন্ত্রের (T) সাহায্য η র মান কোন্ উষ্ণতায় নির্ণয় করা হল তা জানা যায়।

13.6 আবর্তীয় ভিস্কোমিটারের সাহয্যে সান্দ্রতা নির্ণয়

A ও B দুইটি সমাক্ষ বেলনের বাহিরের বেলন



(চিত্র 13.11)

B কে বৈদ্যুতিক মোটরের সাহায্যে নির্দিষ্ট কৌণিক গতিবেগে (ω_0) ঘোরানো হয়। ভেতরের নীরেট বেলন A কে অক্ষ বরাবর তারের সাহায্যে ঝোলান আছে। তারের নীচের প্রান্তের কাছে একটি ছোট আয়না M ঝোলান আছে। এর সাহায্যে ল্যামপ ও স্কেল পদ্ধতিতে বেলন A র মোচড় কোণ (θ) পরিমাপ করা যায়। ভেতরের ও বাইরের বেলনের ব্যাসার্ধের পরিমাপ যথাক্রমে "a" এবং "b"।

পরীক্ষাধীন তরল পদার্থকে দুই বেলনের মধ্যবর্তী অংশে ঢালা হয়। ভেতর বেলনের নিমজ্জিত অংশের দৈর্ঘ্য l। এখানে A বেলনের সঙ্গে লেগে থাকা বেলনাকৃতির তরলস্তরটি আসঞ্জন বলের প্রভাবে স্থির থাকে এবং B র সঙ্গে লেগে থাকা স্তরটির কৌণিক গতিবেগ $\omega(=\omega_0)$

তরল মাধ্যমের ভেতরে l দৈর্ঘ্যের ও r ব্যাসার্ধের একটি সমাক্ষ বেলন কল্পনা করুন। এর কৌণিক গতিবেগ ω। এর গায়ে লেগে থাকা বেলনাকৃতির তরল স্তরের কৌণিক গতিবেগ $\omega + d\omega$। ঐ স্থানের তরল স্তরের আপেক্ষিক কৌণিক গতি $d\omega$ এবং নতিমাত্রা $r\dfrac{d\omega}{dr}\left[\therefore \dfrac{d\vartheta}{dr} = r\dfrac{d\omega}{dr}\right]$

$\therefore$ কল্পিত বেলনের গায়ে সান্দ্রতা জনিত স্পর্শক বল $F = 2\pi r \ell \eta \quad r\dfrac{d\omega}{dr}$ $\left[\because F = \eta A \dfrac{d\vartheta}{dr}\right.$

এবং টর্ক, $d\Gamma = Fr = 2\pi \ell \eta r^3 \dfrac{d\omega}{dr}$ (13.13)

$\therefore$ A বেলনের উপর প্রযুক্ত টর্ক

$\Gamma = \int d\Gamma$ (13.14)

(13.13) ও (13.14) নং সমীকরণ থেকে জানা যায়

$$2\pi\ell\eta\int_o^{\omega_o} d\omega = \Gamma\int_a^b \frac{dr}{r^3}$$

কারন যখন $r = a,\ \ \omega = o,$ এবং $r = b,\ \ \omega = \omega_o,$

বা $2\pi\ell\eta\omega_o = \dfrac{\Gamma}{2}\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)$ (13.15)

এখানে টর্ক Γ তারটিকে মোচড়াবার চেষ্টা করে এবং তারের স্থিতিস্থাপকতার জন্য সমান ও বিপরীতমুখী টর্ক তারকে স্থির অবস্থায় রাখবে। মনেকরি স্থায়ী অবস্থায় এর মান $C\theta$ (13.16)

যেখানে C= তারকে এক রেডিয়ান মোচড় দিতে প্রয়োজনীয় টর্ক এবং $\theta =$ তারের মোচড় কোণ (রেডিয়ানে)

(13.15) ও (13.16) থেকে পাই

$$2\pi\ell\eta\omega_o = \frac{C\theta}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$

বা $\eta = \dfrac{C\theta}{4\pi\ell\omega_o}\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)$ (13.17)

এখানে বেলন A র তলদেশে উৎপন্ন টর্ক উপেক্ষা করা হয়েছে। মনে করুন A বেলনের তলদেশে উৎপন্ন টর্ক $f^1(a, b)$ তা হলে (13.17) সমীকরণ থেকে লেখা যায়

$$\frac{4\pi\eta\omega_0 a^2 b^2}{\left(b^2-a^2\right)} b + f^1(a,b) = C\theta \tag{13.18}$$

ω_0 কে স্থির রেখে বেলন A র দৈর্ঘ্য নিমর্জিত অংশের দৈর্ঘ্য একবার ℓ_1 আর একবার ℓ_2 করা হয়, এক্ষেত্রে (13.18) সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{4\pi\eta\omega_0 a^2 b^2}{\left(b^2-a^2\right)} \ell_1 + f'(a,b) = C\theta_1 \tag{13.19}$$

ও $$\frac{4\pi\eta\omega_0 a^2 b^2}{\left(b^2-a^2\right)} \ell_2 + f'(a,b) = C\theta_2 \tag{13.20}$$

উপরের দুটি সমীকরণ থেকে

$$\frac{4\pi\eta\omega_0 a^2 b^2}{\left(b^2-a^2\right)}(\ell_1-\ell_2) = C(\theta_1-\theta_2) \quad [\text{এখানে } \ell_1 > \ell_2]$$

$$\therefore \eta = \frac{C\left(b^2-a^2\right)(\theta_1-\theta_2)}{4\pi\omega_0 a^2 b^2(\ell_1-\ell_2)} \tag{13.21}$$

আবার ধরুন বেলন A র ব্যবর্ত দোলনের দোলনকাল,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}},\ I - \text{ অক্ষ বরাবর বেলন A র জাড্য ভ্রামক}$$

$$\text{তাহলে } C = \frac{4\pi^2 I}{T^2} \tag{13.22}$$

(13.21) নং ও (13.22) সমীকরণ দুটির রাশি গুলি পরিমান করে তরলের η র মান সঠিকভাবে পরিমাপ করা যায়।

এই পদ্ধতির সাহায্যে মাঝারি সান্দ্রতাঙ্কের তরলের (10^{-4} P থেকে 10^3 P) η র মাপ পরিমাপ করা হয়।

13.7 তরলের সান্দ্রতার উপর উষ্ণতা ও চাপের প্রভাব

তরলের সান্দ্রতা তাপমাত্রা বৃদ্ধিতে হ্রাস পায়। তরলের সান্দ্রতার সঙ্গে তাপমাত্রার পরিবর্তনের কতকগুলি পরীক্ষাভিত্তিক (empirical) সমীকরণ আছে। এদের মধ্যে (অর্থাৎ তাত্ত্বিক ভিত্তিহীন) মোটামুটি সঠিক সমীকরণটি

$$\eta_t = \frac{\eta_0}{(1+Bt)^c}$$

নির্দিষ্ট তরলের ক্ষেত্রে B ও C নিত্য সংখ্যা এবং $\eta_t \rightarrow t^\circ c$ তরলের সান্দ্রতাঙ্ক, $\eta_0 \rightarrow 0^\circ C$ সান্দ্রতাঙ্ক।

অ্যান্ড্রেড তত্ত্ব ভিত্তিক সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করেন, সেটি এরূপ

$$\eta \rho^{-1/3} = Ae^{\frac{c\rho}{T}}$$

ρ = তরলের ঘনত্ব

T = তরলের পরম তাপ মাত্রা

A ও C নির্দিষ্ট তরলের স্থির রাশি। জল ও কোহল ভিন্ন অন্য তরলের ক্ষেত্রে এই সমীকরণ ভালভাবে প্রযুক্ত হয়।

সাধারণতঃ তরলের ক্ষেত্রে চাপ বৃদ্ধির সঙ্গে সান্দ্রতা দ্রুত বৃদ্ধি পায়। এই বৃদ্ধির পরিমাণ বিভিন্ন তরলের ক্ষেত্রে বিভিন্ন প্রকার। জলের ক্ষেত্রে প্রথমে কমে, তার পর বাড়তে থাকে।

13.8 সারাংশ

প্রবাহীর সান্দ্রতা ধর্মের জন্য প্রবাহীর অভ্যন্তরস্থ বিভিন্ন স্তরের আপেক্ষিক গতির বিরুদ্ধে বাধার সৃষ্টি হয়। এই ধর্মের পরিমাপ সান্দ্রতাঙ্কের দ্বারা করা হয়। সান্দ্রাতাঙ্কের মাত্রা $ML^{-1}\ T^{-1}$

প্রবাহীর বেগ কম থাকলে প্রবাহ শান্ত থাকে, প্রবাহীর বেগ সন্ধি বেগ অতিক্রম করলে অশান্ত প্রবাহের সৃষ্টি হয়। সন্ধি বেগ রেনোল্ড সংখ্যার উপর নির্ভরশীল।

কৌশিক নলের মধ্য দিয়ে যে পরিমাণ তরল প্রতি সেকেন্ডে প্রবাহিত হয় তার পরিমান

$$V = \frac{\pi p R^4}{8\eta \ell}$$

একে পোয়াস্যেইর সমীকরণ বলে। এই সমীকরণের সাহায্যে তরলের সান্দ্রতাঙ্ক নির্ণয় করা হয়। পোয়াস্যেইর সমীকরণের শুদ্ধির প্রয়োজন আছে এবং তা করা হয়।

সান্দ্র মাধ্যমের ভিতর গোলকের গতি স্টোকসের সূত্র, $\eta = \frac{2}{q}\frac{g}{\vartheta} r^2(\rho-\sigma)$ নিয়ন্ত্রণ করে।

আবর্তীয় ভিস্কোমিটারের সাহয্যে মাঝারি সান্দ্রতাঙ্কের তরলের η র মান নির্ণয় পরিমাপ করা যায়।

তরল সান্দ্রতার উপর উষ্ণতা ও চাপের প্রভাব সাধারণ ভাবে বলা হয়েছে।

13.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

ছোট প্রশ্ন

1. শান্ত ও বিক্ষুব্ধ প্রবাহের মধ্যে পার্থক্য কি? সংকট গতিবেগ কাকে বলে?।
2. রেনল্ডস্ সংখ্যা কি? নিউটনীয় ও অনিউটনীয় তরলের মধ্যে পার্থক্য কি রকম
3. পোয়াস্যেইর সমীকরণের ত্রুটি কিকি?
4. প্রান্ত্যবেগ বলতে কি বোঝেন?
5. স্টেকস্ সূত্রের সর্ত কি?
6. তাপমাত্রা বৃদ্ধির সঙ্গে তরলের সান্দ্রতাঙ্কের পরিবর্তন কিরূপ হয় তা বলুন।
7. চাপ বৃদ্ধির সঙ্গে তরলের সান্দ্রতাঙ্কের পরিবর্তন কিরূপ হয় তা বর্ণনা করুন।

গাণিতিক প্রশ্ন

1. তরলের সান্দ্রতাঙ্ক $0.012 kg/ms$; $1x10^{-3} m$ ব্যাস এবং 1 metre দীর্ঘ একটি কৈশিক নল দিয়ে 2 উচ্চ জলস্তম্ভের চাপে তরল প্রবাহিত হচ্ছে। নলের অক্ষ বারাবর প্রতি মিনিটে প্রবাহের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

   (অভিকর্ষজ ত্বরণ $= 9.8 m/S^2$, তরলের সান্দ্রতাঙ্ক $= 0.001 kg/metre-sec$ (উত্তর $2.9 \times 10^{-6} m^3/min$)

2. একটি অনুভূমিক নলের দৈর্ঘ্য 0.25 metre এবং ব্যাস 2×10^{-3} metre এর মধ্য দিয়ে 0.3 metre উচ্চ তরল চাপে প্রতি মিনিটে $15 \times 10^{-6} metre^3$ তরল প্রবাহিত হ'লে তরলের সান্দ্রাতঙ্কের মান কত হবে?

(তরলের ঘনত্ব $= 2.3 \times 10^3 kg/m^3$ (উত্তর $0.042 kg/ms$)

3. গ্লিসারিনের মধ্য দিয়া 1×10^{-3} ব্যাসার্দ্ধের বল নীচে পড়তে থাকলে ঐ বলের সীমান্ত বেগ কত হবে? বলের পদার্থের আপেক্ষিক গুরুত্ব 8, গ্লিসারিনের আপেক্ষিক গুরুত্ব 1.3 এবং সান্দ্রতাঙ্ক $0.83 kg/netre-sec$ (উত্তর $17.5 \times 10^{-3} m/s$)

4. $1 \times 10^{-5} m$ ব্যাসার্ধের জল বিন্দু বায়ুর মধ্য দিয়া পড়তে থাক্‌লে তার সীমান্ত বেগ কত হবে?

   ($g = 9.8 ms^{-1}$; $\eta_{air} = 1.8 \times 10^{-5} kg/m^5$ (উত্তর $1.2 \times 10^{-2} m/s$)

5. একই ব্যাসের দুইটি জল বিন্দু বায়ুর মধ্যে $0.1 m/s$ প্রান্ত্যবেগ লইয়া পড়তে পড়তে এক সঙ্গে মিশিয়া একটি জলবিন্দু গঠন করল। একক জল বিন্দুর প্রান্ত্যবেগ কত হবে? (উত্তর $.159 m/s$)

13.10 উত্তরমালা

ছোট প্রশ্ন

1. 13.2 অংশ দেখুন।
2. 13.3.4 এবং 13.3.3 অংশ দেখুন।
3. 13.4.1 অংশ দেখুন।
4. 13.4 অংশ দেখুন।
5. 13.5 অংশ দেখুন
6. 13.6 অংশ দেখুন।
7. 13.7 অংশের প্রথম অংশ দেখুন।
8. 13.8 অংশের শেষ অংশ দেখুন

গাণিতিক প্রশ্ন

এখানে উত্তর মালায় এস.আই (SI) পদ্ধতি গ্রহণ হয়েছে।

1. 13.4 থেকে লিখুন প্রতি সেকেন্ডে নলের মধ্য দিয়া প্রবাহিত তরলের পরিমাণ

$$V = \frac{\pi p R^4}{8\eta\ell}$$

আমরা জানি

$$P = h\rho g = 0.2 \times 1000 \times 9.8 \text{ pascal}$$

$$R = \left(\frac{1}{2} \times 10^{-3}\right) = .5 \times 10^{-3} \text{ metre}$$

$$\eta = 0.001\text{kg / metre} - \text{sec}, \ \ell = 1 \text{ metre}$$

$$\therefore V = \frac{3.142 \times .2 \times 1000 \times 9.8 \times \left(.5 \times 10^{-3}\right)^4}{8 \times .001 \times 1}$$

$\therefore$ প্রতি মিনিটে প্রবাহিত তরলের পরিমাণ =

$$v \times 60 = \frac{3.142 \times .2 \times 1000 \times 9.8 \times \left(.5 \times 10^{-3}\right)^4}{8 \times .001 \times 1} \times 60$$

$$= 2.9 \times 60^{-6} \text{m}^3 / \text{min}$$

2. 13.4 থেকে তরলের সান্দ্রতাঙ্ক

$$\eta = \frac{\pi \rho R^4}{8 v \ell}$$

আমরা জানি

$$p = h\rho g = 0.3 \times 2.3 \times 10^3 \times 9.8 \text{ pascal}$$

$$R = \frac{2}{2} \times 10^{-3}; \qquad \ell = 0.25$$

প্রতি মিনিটে প্রবাহিত তরল $= 15 \times 10^{-6} \text{m}^3$

$\therefore$ প্রতি সেকেন্ডে প্রবাহিত তরল, $v = \frac{15}{60} \times 10^{-6} \text{m}^3$

$$\therefore \eta = \frac{3.142 \times 0.3 \times 2.3 \times 10^3 \times 9.8 \times \left(1 \times 10^{-3}\right)^4}{8 \times 15 \times 10^{-6} \times .25} \times 60$$

$$= 0.0425 \text{kg / metre sec}$$

$$= 0.0425 \text{kg / m.s}$$

3. 13.5 থেকে বলটির সীমান্তবেগ

$$u = \frac{2gr^2(\rho - \sigma)}{9\eta}$$

আমরা জানি

$$g = 9.8;\ r = 1 \times 10^{-3};\ \rho = 8 \times 10^3 (\therefore \rho = sp.gr \times 10^3),\ \sigma = 1.3 \times 10^3$$

এবং $\eta = .83$

$$\therefore\ u = \frac{2 \times 9.8 \times (1 \times 10^{-3})^2 \times (8 - 1.3) \times 10^3}{9 \times .83}$$

$$= 17.5 \times 10^{-3}\,m/sec$$

4. 13.5 থেকে জল বিন্দুর সীমান্ত বেগ,

$$u = \frac{2gr^2(\rho - \sigma)}{9\eta}$$

$$= \frac{2 \times 9.8 \times (1 \times 10^{-5})^2 \times 1000}{9 \times 1.8 \times 10^{-5}}$$

$$= 1.2 \times 10^{-2}\,m/s$$

[এখানে $g = 9.8\ m/s^2$

$r = 1 \times 10^{-5}\ m$

$\rho = 1 \times 10^3\ xg/m^3$

$\sigma \simeq$ মান উপেক্ষা করা হল।

এস. আই এককে

$\rho = S \times 10^3$

5. 13.5 থেকে জল বিন্দুর সীমান্ত বেগ

$$u = \frac{2gr^2(\rho - \sigma)}{9\eta}$$

মনেকরি পৃথক দুটি জল বিন্দুর ব্যাসার্দ্ধ 'r' এবং সম্মিলিত জল বিন্দুর ব্যাসার্দ্ধ "R".

এক্ষেত্রে প্রশ্নানুসারে

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2 \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

অথবা $R = \sqrt[3]{2}.r = 1.26r$

ছোট বিন্দুর ক্ষেত্রে $u_s = \frac{2}{9}.\frac{r^2(\rho - \sigma)g}{\eta}$

সম্মিলিত বিন্দুর ক্ষেত্রে $u_c = \frac{2}{9}\frac{(1.26r)^2(\rho - \sigma)g}{\eta}$

এখানে $\frac{u_c}{u_s} = \frac{(1.26r)^2}{r^2}$

$$\therefore \ u_c = (1.26)^2 \times u_s$$

$$= (1.26)^2 \times .1 \qquad \therefore \ u_s = .1 \text{ m/s}$$

$$= .159 \text{m/s}$$

একক 14 ☐ উদ্‌গতি বিদ্যা

গঠন

14.0 প্রস্তাবনা

যে সকল পদার্থের সান্দ্রতা অবহেলনীয় এবং অভিলম্ব চাপ সমদেশিক তাদের আদর্শ প্রবাহী (Ideal fluids) বলা হয়।

প্রবাহী সংক্রান্ত বল বিজ্ঞানের যে শাখায় বাহ্যিক বল প্রয়োগে প্রবাহী স্থিত অবস্থায় সাম্যে থাকলে তার অবস্থা এবং সাম্যের সূত্রগুলি নিয়ে আলোচনা করা হয় তাকে উদ্‌স্থিতি বিদ্যা বলে।

প্রবাহী সংক্রান্ত বল বিজ্ঞানের যে শাখা বাহ্যিক বল প্রয়োগে প্রবাহী স্থিত অবস্থায় সাম্যে থাকলে তার অবস্থা এবং সাম্যের সূত্র গুলি নিয়ে আলোচনা করা হয় তাকে উদ্‌স্থিতি বিদ্যা বলে।

প্রবাহী সংক্রান্ত বল বিজ্ঞানের যে শাখায় গতিশীল প্রবাহী যে সূত্রগুলি মেনে চলে তা নিয়ে আলোচনা করা হয় তাকে প্রবাহীর গতি বিজ্ঞান বলে।

উদ্দেশ্য

এই এককটিতে আপনি গতিশীল প্রবাহী যে যে সূত্র মেনে চলে সে সম্বন্ধে জানতে পারবেন। এককটি পড়ার পর আপনার যে যে সুবিধা হবে সেগুলি হল ঃ

- গতিশীল প্রবাহীর বিভিন্ন বিচিত্র ব্যবহার ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- গতিশীল প্রবাহীর বিভিন্ন অবস্থায় ধর্ম্ম পরিমাপের যন্ত্র উদ্ভাবন করতে শেখাবে
- উদ্‌গতি বিদ্যার অনেক জটিল গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

14.1 প্রবাহীর গতি বিজ্ঞান—অয়লারের প্রবাহগতি সমীকরণ

যে স্থান জুড়ে প্রবাহীর গতি আছে তাকে 'প্রবাহক্ষেত্র' বলা হয়। প্রবাহক্ষেত্রে সচল প্রবাহী কণা যে রেখা বর্ণনা করে তাকে প্রবাহ রেখা (Line of flow বা Lnie of motion) বলে। প্রবাহ রেখার উপর যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক টানলে ঐ বিন্দুতে প্রবাহী কণার তাৎক্ষনিক বেগ $\vec{\vartheta}$ নির্দেশ করে। $\vec{\vartheta}$ সাধারণতঃ স্থানাংক ও সময়ের উপর নির্ভর করে; প্রবাহ ক্ষেত্রে বেগ সময়ের উপর নির্ভরশীল না হলে প্রবাহকে শান্ত প্রবাহ (steady flow) বলে। অন্যথায় প্রবাহ 'অশান্ত' (non steady) হবে।

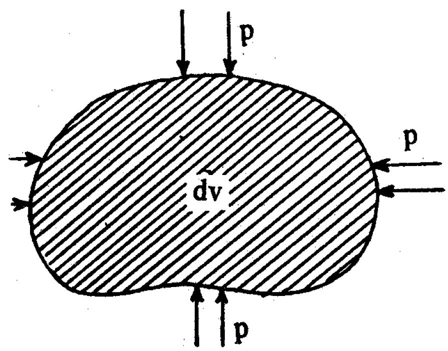
প্রবাহ ক্ষেত্রে যে প্রবাহ রেখার কোন বিন্দুস্থ স্পর্শক ঐ বিন্দুতে প্রবাহ কণার বেগের অভিমুখ নির্দেশ করে তাকে স্ট্রীম লাইন (stream line) বা ধারা রেখা বলে। প্রবাহ 'শান্ত প্রবাহ' হলে প্রত্যেক কণার প্রবাহী রেখাই একটি ধারা রেখা।

একটি নিরবচ্ছিন্ন প্রবাহীর অণুপরিমাণ আয়তন dv'র কথা মনে করুন। ঘনত্ব ρ হলে ওর ভর হবে ρdv এবং $\vec{u}$ যদি ঐ অংশের গতিবেগ ভেক্টর হয় তবে ওর তাৎক্ষণিক ভরবেগ হবে $\rho dv\,\vec{u}$ ।

নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র অনুযায়ী লেখা যায়

$\frac{d}{dt}(\rho dv\vec{u}) =$ ঐ অংশের উপর মোট বল = দেহবল $\vec{F}+$ বিভিন্ন অংশের আন্তঃক্রিয়া জনিত ঐ অংশের উপর ক্রিয়াশীল পৃষ্ঠবল। (14.1)

দেহবল $\vec{F}$ নানারকমের হতে পারে; তবে অভিকর্ষজ বল তো সবসময়েই ক্রিয়াশীল। সে কথা মনে রেখে $\vec{F}$ কে লেখা যায় $\rho g dv$ আর্দশ প্রবাহীর ক্ষেত্রে আন্তঃক্রিয়া জনিত বল সবসময়ই পৃষ্ঠতলের লম্ব অভিমুখী কাজ করে — এজন্য চাপ p হলে এই বল হবে $-\oint p\,\vec{ds}$ যেখানে $\vec{ds}$ পৃষ্ঠতলের অনুপরিমাণ অংশ এবং সমাকলনটি সমগ্র পৃষ্ঠতলের উপর নেওয়া হয়েছে।



(চিত্র 14.1)

চিত্র 14.1 -এ অণুপরিমাণ অংশ dv 'র পৃষ্ঠতলের সর্বত্র চাপ p ক্রিয়াশীল। এবার দেখান যায়

$$-\oint p\, \overrightarrow{ds} = \vec{\nabla}\, p dv$$

মনে করুন একটি ভেক্টর $\vec{A}$ 'র কেবলমাত্র x উপাংশ আছে এবং ঐ উপাংশ — p'র সমান অর্থাৎ

$A_x = -p, \quad A_y = A_z = 0$। তাহলে $\vec{\nabla}.\vec{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}$

গাউসের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই

$$-\int p ds_x = +\int \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \int \vec{\nabla}.\vec{A} dv = -\int \frac{\partial p}{\partial x} dv$$

কাজেই সাধারণভাবে

$$\oint p d\vec{s} = \int \vec{\nabla} p dv = \vec{\nabla} p \quad dv \tag{14.2}$$

যেহেতু সমস্ত আয়তনই অনুপরিমান dv

এবার মূল নিউটনীয় সমাকরণটি লেখা যাবে

$$\frac{d}{dt}(\rho dv \vec{u}) = \vec{F} - \vec{\nabla}. p dv \tag{14.3}$$

প্রবাহীর গতিবিজ্ঞানে $\dfrac{d}{dt}$ সংকরটির তাৎপর্য গুরুত্বপূর্ণ। মনে করুন আপনি কোনও বহতী নদীর পারে বসে আছেন। আপনি কতগুলি যন্ত্রের সাহায্যে আপনার সামনের জলের গতিবেগ, উষ্ণতা, দূষণের পরিমাণ ইত্যাদি মাপছেন। বলা নিস্প্রয়োজন আপার সামনের জল সততই পরিবর্তিত হচ্ছে কারণ নদীটি বহতী। কাজেই আপনি যে পরিবর্তন মাপছেন সেটি আপনার স্থানীয় জলের। এরূপ পরিবর্তনকে আংশিক অবকলাংক $\dfrac{\partial}{\partial t}$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়। এবার অন্য এক পরিবর্তনের কথা চিন্তা করুন-ধরুণ মাপনী যন্ত্রগুলি জলের সঙ্গে ভেসে চলেছে - তাহলে যন্ত্রগুলির পাঠ থেকে আপনি যে পরিবর্তন দেখবেন তা হল বিশেষ একটি জলের অংশের। এই পরিবর্তনের হারকে $\dfrac{d}{dt}$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়। অতএব

$\dfrac{d}{dt} =$ একটি নির্দিষ্ট স্থানে পরিবর্তনের হার $+$ জলের গতিজনিত পরিবর্তন

$$= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{u}.\vec{\nabla}\right)$$

(14.4) সম্পর্কটি (14.3) সমীকরণে ব্যবহার করে পাই

$$\vec{u}\frac{d}{dt}(\rho dv) + \rho dv \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} - \vec{\nabla}p.dv$$

অথবা $\vec{u}\frac{d}{dt}(\rho dv) + \rho dv\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}.\vec{\nabla}\right)\vec{u}\right] = \vec{F} - \vec{\nabla}p.dv$

যেহতু ρdv একটি বিশেষ পরিমাণ তরলের ভর, এর কোন পরিবর্তন $\frac{d}{dt}$ নেই অর্থাৎ $\frac{d}{dt}(\rho dv) = 0$। সুতরাং উপরের সমীকরণটি দাঁড়ায় $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}.\vec{\nabla}\right)\vec{u} = \frac{\vec{F}}{\rho dv} - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho}$ (14.5)

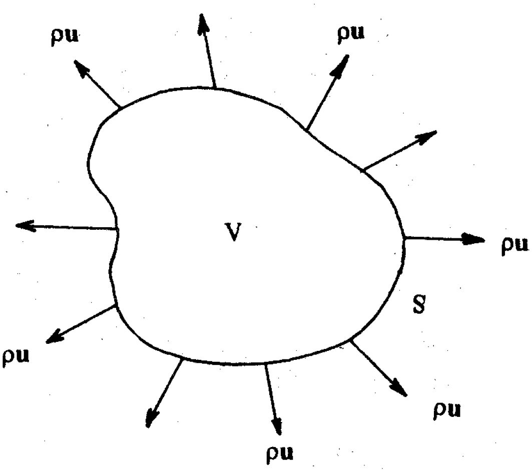
দেহবলের উৎস যদি অভিকর্ষ হয়, তবে $\vec{F} = pdv.\vec{g}$ এবং উপরের সমীকরণটি হবে

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}.\vec{\nabla}\right)\vec{u} = \vec{g} - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho} \qquad (14.6)$$

সমীকরণ (14.5) কে অয়লারের প্রবাহগতি সমীকরণ বলা হয় — দৃশ্যতই (14.6) তারই একটি বিশেষ অবস্থায় রূপ।

14.2 অবিচ্ছন্নতা সূত্র Equation of continuity

এই সূত্রটি ভরের সংরক্ষণ সূত্র থেকে অভিন্ন শুধু এটিকে একটি অবকল সমীকরণের রূপ দেওয়া হয়। চিত্র 2.1 এ প্রবাহীর ভিতরের একটি অঞ্চল দেখান হয়েছে।



(চিত্র 14.2)

V অঞ্চলের সীমাতল S তীরচিহ্ন দিয়ে প্রবাহীর বহির্গমন দেখান হয়েছে।

দৃশ্যতই মোট যে ভরের প্রবাহী একক সময়ে সীমাতল অতিক্রম করে বেরিয়ে যাচ্ছে তার ভর

$$\oint \rho \vec{u}.\overrightarrow{ds}$$

ভর সংরক্ষিত হয়, কাজেই এই পরিমাণ তরল বেরিয়ে যাওয়ার জন্য V'র অভ্যন্তরের তরলের ভরের হ্রাস হয়েছে

$$-\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

সুতরাং $\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \oint \rho \vec{u} d\vec{s} = 0$

দ্বিতীয় সমাকলটিকে আয়তন সমাকলে পরিণত করে পাওয়া যায়

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho \vec{u}) \right] dv = 0$$

যেহেতু সমাকলন আয়তন ইচ্ছেমত নেওয়া যায়, সমাকল প্রত্যেক বিন্দুতে শূণ্য হতে হবে অর্থাৎ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u}) = 0 \qquad (14.7)$$

যদি প্রবাহী অসংনম্য (incompressible) হয় তবে $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ এবং $\vec{\nabla}.(\rho)$

উভয়ই শূণ্য এবং অবিচ্ছিন্নতা সূত্র থেকে পাই

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = 0 \qquad (14.8)$$

14.3 বার্নুলির সূত্র (Bernoulli's equation)

সমীকরণ (14.5) লক্ষ্য করুণ। প্রথমেই আমরা দুটি বিশেষ অবস্থার কথা ধরে নেব। প্রথমত প্রবাহ শান্ত অর্থাৎ $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$। দ্বিতীয় অবস্থা হল যে $\vec{F}$ বলটি একটি সংরক্ষী বল সেজন্য $\vec{F}$ কে একটি গ্রেডিয়েন্ট হিসেবে প্রকাশ করা যায়। আমরা লিখব $\vec{F} = -\vec{\nabla} v$। আপনারা বুঝতে পাচ্ছেন যে মাইনাস চিহ্নটি দেওয়া হয়েছে এই কারণে যে $\cup$ স্থিতিশক্তি নির্দেশ করে। এবার সমীকরণ (14.5) দাঁড়াল

$$\left(\vec{u}.\vec{\nabla}\right)\vec{u} = \frac{1}{\rho dv}\left(-\vec{\nabla}U\right) - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho}$$

এবার ডানদিকের প্রথম পদে ρdv কে গ্রেডিয়েন্টের ভেতরে ঢুকিয়ে দেব। অর্থাৎ এখন U নির্দেশ করবে একক ভরের তরলের স্থিতিশক্তি। এবং আমরা লিখব $\left(\vec{u}.\vec{\nabla}\right)\vec{u} = -\vec{\nabla}U - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho}$ (14.9)

প্রথম পদটি $\left(\vec{u}.\vec{\nabla}\right)\vec{u}$ একটু জটিল মনে হতে পারে। এজন্য এর x উপাংশ পরীক্ষা করে দেখা যাক। পাদচিহ্ন দিয়ে উপাংশ নির্দেশ করে x উপাংশটির হবে

$$\left(u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y} + u_z\frac{\partial}{\partial z}\right)u_x$$

$$= u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}$$

$$= \left[u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}\right] + u_y\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + u_z\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

উপরের লাইনে আমরা প্রথম বন্ধনীর ভেতরে দুটি পদ $u_y\frac{\partial u_y}{\partial x}$ এবং $u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}$ যোগ করেছি, আবার এই দুটি পদই দ্বিতীয় ও তৃতীয় বন্ধনী থেকে বাদ দিয়েছি। উদ্দেশ্য একটু লক্ষ্য করলেই আপনারা বুঝতে পারবেন। প্রথম বন্ধনীর পদগুলি মিলে হয়েছে। $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right)$ অর্থাৎ $\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x}$ । আবার দ্বিতীয় ও তৃতীয় বন্ধনী $\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)$ 'র দুটি উপাংশ। এভাবে আমরা x উপাংশটি পেয়েছি $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2\right) - u_y\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_z + u_z\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_y$ আবার দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদটি মিলে হয় $\left[-\vec{u}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)\right]$ এই ভেক্টরটির উপাংশ, সুতরাং x উপাংশটি শেষ পর্যন্ত লেখা যায়

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2\right) - \left[\vec{u}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)\right]_x$$

দৃশ্যতই এই যদি x উপাংশ হয় তবে ভেক্টরটিকে লেখা যাবে

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}u^2\right) - \left[\vec{u}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)\right] \qquad (14.10)$$

বিশেষ অবস্থা

(ক) প্রবাহ ঘূর্ণনহীন অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$, উপরের দ্বিতীয় পদটি শূণ্যে পরিণত হল।

(খ) প্রবাহী তরল অসংনম্য অর্থাৎ ρ একটি ধ্রুবরাশি। এবার (14.9) সমীকরণটি দাঁড়াল

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}u^2\right) = -\vec{\nabla}\left(\text{U} + \frac{p}{\rho}\right)$$

অথবা $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}u^2 + \text{U} + \frac{p}{\rho}\right) = 0$

অর্থাৎ $\frac{1}{2}u^2 + \text{U} + \frac{p}{\rho} =$ ধ্রুবক (14.11)

সমীকরণ (14.11) ই বার্নুলির সূত্র বা উপপাদ্য।

স্থিতিশক্তি U অভিকর্ষের দরুণ হলে লেখা যায়

$\text{U} = gr$ এবং সমীকরণ (14.11) কে লেখা যায়

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{\vartheta^2}{2g} + h = H \text{ (ধ্রুবক)} \tag{14.12}$$

এখানে $\frac{p}{\rho g} =$ চাপশীর্ষ (pressure head), $\frac{\vartheta^2}{2g} =$ বেগশীর্ষ (velocity head), h= উচ্চতা শীর্ষ (elevation head) এবং H (ধ্রুবক) = মোটশীর্ষ (Total head) এই শব্দগুলি ব্যবস্থায় করা হয়। সমীকরণ (14.12) কেও বার্ণুলীয় উপপাদ্য বলা হয়।

বার্ণুলির উপপাদ্য (বিকল্প সিদ্ধান্ত গ্রহণ)

কোন প্রবাহীর প্রবাহ ধারারেখ বা শান্ত প্রবাহ হলে এই উপপাদ্য থেকে উক্ত প্রবাহীর গতিবেগ, চাপ ও স্থিতিশক্তির সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন।

প্রবাহী তরল পদার্থের শক্তি

প্রবাহী তরলের কোন বিন্দুতে তিন রকম ভাবে শক্তির উদ্ভব হতে পারে (i) স্থিতিশক্তি (ii) গতিশক্তি এবং (iii) চাপশক্তি

(i) স্থিতিশক্তি (Potential Energy)

প্রমাণ অনুভূমিক তল (Datum level or standard ground level) থেকে "m" ভরের তরল "h"

উচ্চতায় থাক্‌লে, আপনি জানেন ঐ তরলের স্থিতি শক্তি = mgh

$\therefore$ তরলের প্রতি এককভরে স্থিতিশক্তি = gh

(ii) গতি শক্তি (kinetic energy)

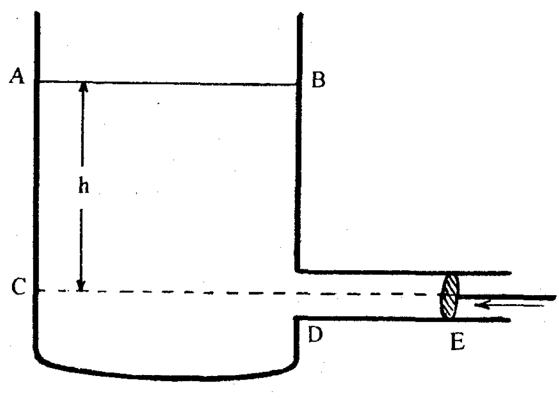
"m" ভরের তরল ϑ গতিবেগে প্রবাহিত হলে,

ঐ তরলের গতিশক্তি $=\frac{1}{2}m\vartheta^2$

$\therefore$ তরলের প্রতি একক ভরে গতিশক্তি $=\frac{1}{2}\vartheta^2$

(iii) চাপশক্তি (Pressure energy)

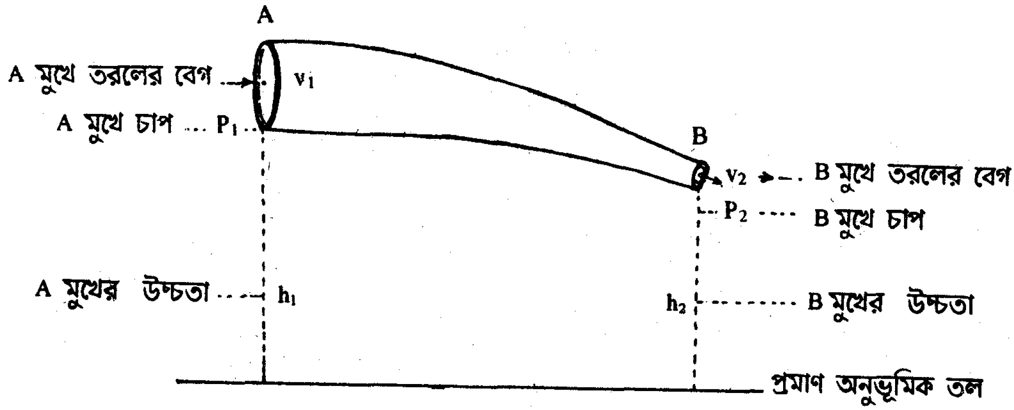
একটি আধারে কিছু পরিমাণ তরল রাখা আছে মুক্ত পৃষ্ঠ (AB), h গভীরতার CD পৃষ্ঠের চাপের পরিমাণ P। α প্রস্থচ্ছেদের DE নলের পিষ্টন এ প্রযুক্ত বল $p\alpha$ এখন খুব আস্তে আস্ত পিষ্টনকে ভিতরের দিকে x দূরত্বে সরানো হলে, কৃতকার্য্য = $p.\alpha.x$ এর ফলে পাত্রের ভিতর αx আয়তনের অর্থাৎ $\alpha.x.\rho$ ভরের তরল প্রবেশ করে। সুতরাং $p\alpha x$ কৃতকার্য্য $\alpha.x.p$ ভরের তরলের চাপশক্তি হিসাবে সঞ্চিত থাকবে।



(চিত্র 14.3)

সুতরাং প্রতি একক ভরের চাপ শক্তি $=\frac{p\alpha x}{\alpha x\rho}\simeq\frac{p}{\rho}$ এই অবস্থায় চাপ dp বাড়ালে কার্য্য হবে

$=\frac{dp}{\rho}$ চাপ শূণ্য থেকে p_1 পর্য্যন্ত আনতে মোট কার্য্য হবে $\int_0^{p_1}\frac{dp}{\rho}=\frac{p_1}{\rho}$



(চিত্র 14.4)

মনে করুন তরল শান্ত প্রবাহে প্রবাহিত হচ্ছে এবং একটি সরু ধাররেখী নলের এক অংশ AB চিত্রে যেমন হয়েছে। A এবং B দুইটি ছেদ অনুভূমিক তল থেকে h_1 ও h_2 উচ্চতায় আছে। দুই ছেদে যথাক্রমে ϑ_1 ও ϑ_2 এবং চাপ যথাক্রমে P_1 ও P_2 নলে তরল কোথাও জমে থাকে না, প্রথম ছেদে t অবসরে m ভরের পদার্থ ঢুকে থাকলে দ্বিতীয় ছেদে ঐ অবসরে m ভরের পদার্থ বের হয়ে যাবে (অবিচ্ছিন্নতা সূত্র)

প্রবাহীকে আদর্শ (সন্দ্রতাহীন) ধরুন, A বিন্দুতে তরলের, মোটশক্তি = স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি + চাপশক্তি

$$= mgh_1 + \frac{1}{2}m\vartheta_1^2 + \frac{mp_1}{\rho}$$

অনুরূপে B বিন্দুতে তরলের মোটশক্তি $= mgh_2 + \frac{1}{2}m\vartheta_2^2 + \frac{mp_2}{\rho}$

$\therefore$ শক্তির সংরক্ষণ সূত্র থেকে আমরা লিখতে পারি

$$mgh_1 + \frac{1}{2}m\vartheta_1^2 + \frac{mp_1}{\rho} = mgh_2 + \frac{1}{2}m\vartheta_2^2 + \frac{mp_2}{\rho}$$

বা $gh_1 + \frac{1}{2}\vartheta_1^2 + \frac{p_1}{\rho} = gh_2 + \frac{1}{2}\vartheta_2^2 + \frac{p_2}{\rho}$

অর্থাৎ $gh + \frac{1}{2}\vartheta^2 + \frac{p}{\rho} =$ স্থির মান (বা ধ্রুবক) (i)

এটি বার্ণুলির উপপাদ্য।

এখন উপরের সমীকরণকে g দ্বারা ভাগ করলে লেখা যায়

$$h+\frac{1}{2}\frac{\vartheta^2}{g}+\frac{p}{\rho g}= \text{স্থিরমান} \qquad \text{(ii)}$$

অর্থাৎ উচ্চতা শির (elevation head, h) + বেগ শির (velocity head, $\frac{1}{2}\frac{\vartheta^2}{g}$) + চাপ শির (pressure head, $\frac{p}{\rho g}$) = মোট শির (Total head) বার্ণুলির উপপাদ্যকে নিম্নলিখিত রূপেও লেখাযায়

শান্তপ্রবাহ হলে তরলের যে কোন বিন্দুতে উচ্চতা শির, বেগশির এবং চাপশিরের যোগফল ধ্রুবক।

যদি তরলের প্রবাহ অনুভূমিক তল বরাবর হয় সেক্ষেত্রে (ii) নং সমীকরণ থেকে লেখা যায়

$$\frac{p}{\rho g}+\frac{\vartheta^2}{2g}= \text{ধ্রুবক} \qquad \because h \text{ সব ক্ষেত্রে ধ্রুবক}$$

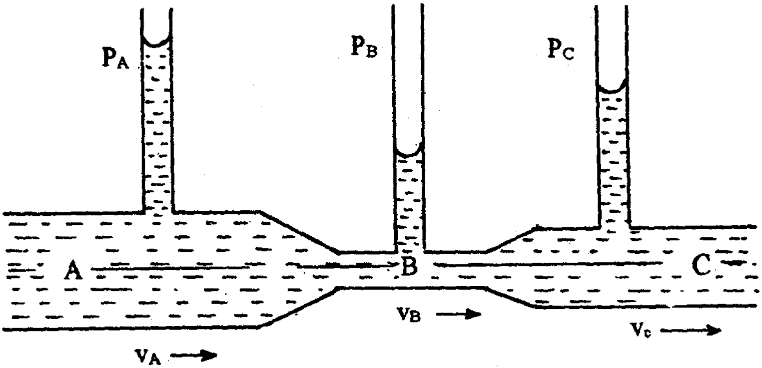
$$\text{অথবা } p+\frac{1}{2}\rho\vartheta^2 = \text{ধ্রুবক} \qquad (14.3)$$

এক্ষেত্রে P কে বলা হয় স্থিতিচাপ (static pressure) এবং $\frac{1}{2}\rho\vartheta^2$ কে বলা হয় গতি বা বেগ চাপ (dynamic or velocity pressure)

14.4 বার্ণুলির উপপাদ্যের উদাহরণ (Illustration of Bernoulli's theorem)

বার্ণুলির উপপাদ্যের মূলতত্ত্ব থেকে জানা যায় বেগ বেশী হলে চাপ কম এবং বেগ কম হলে চাপ বেশী হয়।

(i) এখানে গোলাকার অসমান ছেদের অনুভূমিক অক্ষবিশিষ্ট নলে তরল শান্ত প্রবাহে প্রবাহিত হচ্ছে। A তে ছেদ (α_A) বড়, B তে (α_B) ছোট এবং C তে (α_C) মাঝারি। তিনটি ছেদে তরলের বেগ যথক্রমে ϑ_A, ϑ_B ও ϑ_C চাপ মাপবার জন্য তিনটি ছোট ছোট নল এই নলের সঙ্গে উপরের দিকে জুড়ে দেওয়া আছে। ছোট নলে তরলের উচ্চতা থেকে চাপের পরিমান জানা যাবে। চাপ বেশী হলে উচ্চতা বেশী হবে এবং চাপ কম হলে উচ্চতা কম হবে। এখানে একটি শান্ত প্রবাহরেখা নলের অক্ষ বারাবর থাকবে। সম্পূর্ণ প্রবাহরেখা



(চিত্র 14.5)

একই অনুভূমিক তলে থাকার ফলে যে কোন বিন্দুতে h মান সমান বা উচ্চতা শিরের মান সমান।

মনে করুণ A, B, C তে চাপ যথাক্রমে P_1, P_2 ও P_3 হলে বার্নুলির সূত্র থেকে লিখুন

$$\frac{\vartheta_A^2}{2g} + P_A = \frac{\vartheta_B^2}{2g} + P_B = \frac{\vartheta_C^2}{2g} + P_C \qquad (14.14)$$

নলে কোথাও তরল জমে না থাকায় তরলের প্রবাহ হার সকল ছেদেই সমান।

$$\therefore \alpha_A \vartheta_A = \alpha_B \vartheta_B = \alpha_C \vartheta_C$$

এখানে $\alpha_A > \alpha_C > \alpha_B$ সুতরাং $\vartheta_A \angle \vartheta_C \angle \vartheta_B$

সুতরাং আগের সমীকরণ অনুসারে $P_A > P_C > P_B$ (14.15)

$\therefore$ A তে মেনোমিটারে তরলের উচ্চতা সব থেকে বেশী, C তে তার থেকে কম এবং B তে আরও কম হবে। বাস্তব ক্ষেত্রে এটাই প্রতিফলিত হয় (চিত্রে দেখান হয়েছে)।

(ii) ঝড়ে কখনও কখনও ঘরের চাল উড়ে যায়। ঘরের উপর দিয়ে তীব্রবেগে বায়ু প্রবাহিত হলে ঐ অঞ্চলের চাপ খুব কমে যায়। ঘরের ভিতরে বায়ু স্থির থাকার জন্য চাপ বেশী থাকে। এই চাপ বৈষম্যে চালকে উর্দ্ধে নিক্ষিপ্ত হয়।

(iii) শহরে বোমা বর্ষনে যে বিস্ফোরণ হয় তাতে রাস্তা দিয়ে তীব্র বেগে বায়ু প্রবাহ প্রবাহিত হয় এবং বাতাসের চাপ খুবই কমে যায়। এর ফলে ঘরের ভিতরের অধিক বায়ুচাপ থাকায় জানালার কাঁচ ভেঙ্গে বাইরের দিকে রাস্তায় ছড়িয়ে পড়ে।

(iv) রেলগাড়ী দ্রুত বেগে যাওয়ার সময় প্রবল বায়ু প্রবাহের সৃষ্টি হয় এবং বাতাসের চাপ কমে যায়। স্থির বায়ুর চাপ বেশী থাকার জন্য দর্শককে গাড়ীর দিকে ঠেলে ফেলার প্রবনতা দেখা যায়। সেইজন্য দ্রুতগামী রেলগাড়ীর কাছে দাঁড়িয়ে থাকা উচিৎ নয়।

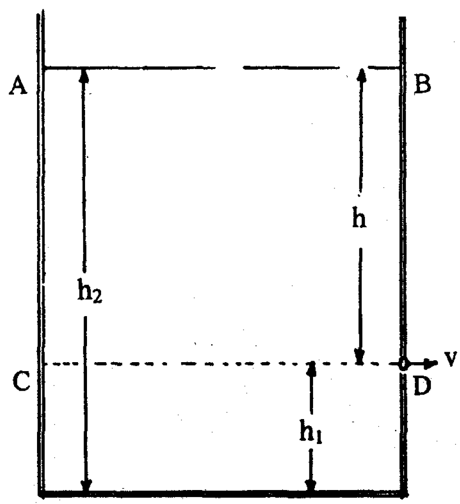
(v) ঊর্ধ্বগমী জলধারর গায়ে 'পিং পং' বল লেগে থাকে পড়ে যায় না। জল ধারার বেগের জন্য বলের যে দিক জল ধারার সংস্পর্শে থাকে সেই দিকে চাপ কম থাকে এবং বলের বিপরীত দিকে বায়ুমন্ডলের চাপ বেশী থাকে। এই চাপ পার্থক্য বলটিকে জলধারার গায়ে ধরে রাখে এবং ধারার গতির জন্য বল ঘুরতে থাকে। ধারার তারতম্যে বল সামান্য ওঠা নামা করে।

14.5 বার্নুলির সূত্রের প্রয়োগ (Application of bernoullis theorem)

বার্নুলির সূত্রের তাত্ত্বিক ও ব্যবহারিক প্রয়োগ আলোচনা করা হচ্ছে।

(i) টারিচেল্লির সূত্র (Torricelli's theorem)

একটি প্রশস্থ তরলের পাত্রের গ্যায়ে তলদেশে একটি ক্ষুদ্র রন্ধ্র থাকলে ঐ মধ্য দিয়ে যে বেগে তরল বের হয় তাকে তরলের প্রবহন বেগ (velocity of efflux) বলে। একে টারিচেল্লির সূত্র বলে। বার্নুলির সূত্র থেকে সহজেই টরিচেল্লির সূত্র পাবেন।



(চিত্র 14.6)

আধারের মুক্ত পৃষ্ঠ AB ঐ ছিদ্রের লেভেল CD থেকে "h" উচ্চতায় আছে। আধার খুব প্রশস্ত এবং রন্ধ্র খুব ছোট হওয়ার জন্য AB পৃষ্ঠে কোন গতি থাকে না। AB পৃষ্ঠের চাপ এবং নির্গম রন্ধ্র মুখের চাপ বায়ুমন্ডলীয় চাপের (P) সমান হয়। ছিদ্র পথে তরলের প্রবাহ বেগ ϑ ধরা হয়েছে।

এখন তরলের উপরিতল থেকে আরম্ভ করে রন্ধ্রের বর্হিমুখ পর্য্যন্ত একটি প্রবাহ নল ধরা হয়েছে। AB অবস্থানের রাশি গুলিকে 2 সংখ্যা দিয়া ও CD অবস্থানের রাশিগুলিকে 1 সংখ্যা দিয়ে বার্ণুলির উপপাদ্য প্রয়োগ করে লেখা যায় (এখানে প্রবাহীর সান্দ্রতা উপেক্ষিত) $h_2 + o + \frac{p}{\rho g} = h_1 + \frac{\vartheta_1^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}$

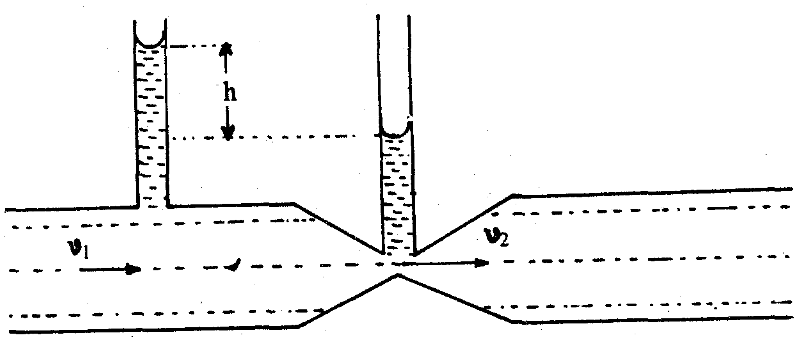
অথবা $\frac{\vartheta_1^2}{2g} = h_2 - h_1$

অথবা $\vartheta_1^2 = 2g(h_2 - h_1) = 2gh$

অথবা ϑ (বা ϑ_1) $= \sqrt{2gh}$, এটাই টরিচেল্লির উপপাদ্য।

(ii) ভেন্টুরি মিটার (Venturi meter)

তরল বাহী নলে প্রতি সেকেন্ডে কি পরিমাণ তরল প্রবাহিত হচ্ছে তা পরিমাপের জন্য ভেন্টুরি মিটার ব্যবহার করা হয়। এর ক্রিয়া বার্নুলির উপপাদ্যের উপর নির্ভর করে। এর দুই পাশে একই প্রস্থচ্ছেদের মোটা নল এবং মাঝের অংশ ক্রমশঃ সরু হয়েছে। তরলবাহী নলে প্রবাহিত তরলকে এর মধ্য দিয়ে অনুভূমিক অবস্থায় চলনা করা হয়। ভেন্টুরি মিটারের মধ্য দিয়ে তরল শান্ত প্রবাহে চলে।



(চিত্র 14.7)

ধরুন নলের মোটা অংশে তরলের চাপ P_1 ও বেগ ϑ_1 এবং সরু অংশে চাপ p_2 ও বেগ ϑ_2 এক্ষেত্রে বার্নুলির সূত্র থেকে উচ্চতাশির বাদ দিয়ে লেখা যায় $P_1 + \frac{1}{2}\rho\vartheta_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\vartheta_2^2$

এখানে $P_1 > P_2$, $P_1 - P_2 = h\rho g$ তরলের ঘনত্ব সুতরাং $\vartheta_1 \angle \vartheta_2$

মোটা অংশের প্রস্থচ্ছেদ α_1 এবং সরু অংশের প্রস্থচ্ছেদ α_2 একই পরিমান তরল প্রতি সেকেন্ডে সকল অংশ দিয়ে প্রবাহিত হয় কাজেই $\alpha_1\vartheta_1 = \alpha_2\vartheta_2$

$$\text{বা } \vartheta_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\vartheta_1 \tag{14.17}$$

পূর্বের সমীকরণে ϑ_2 র মান বসিয়ে পাই

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\vartheta_1\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 - \vartheta_1^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\rho\vartheta_1^2\left[\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 - 1\right]$$

$$\therefore \vartheta_1 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left[\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 - 1\right]}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\,gh}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_2}\right)^2 - 1}}$$

অতএব প্রতি সেকেন্ডে যন্ত্রের বা প্রবাহী বাহী নলের মাঝ দিয়ে প্রবাহিত তরলের আয়তন,

$$V = \alpha_1\vartheta_1 = \alpha_1\left[\frac{2gh}{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 - 1}\right]^{1/2} \tag{14.18}$$

যন্ত্রের গঠন থেকে α_1 ও α_2 জানা থাকলে, h পরিমাপ করে প্রতিসেকেন্ডে নল দিয়া প্রবাহিত তরলের পরিমাণ জানা যায়।

(iii) পিটো নল (Pitot tube)

পিটো নলের সাহায্যে ভেন্টুরি মিটারের মতন তরল নির্গমনের হার নির্ণয় করা যায়। এটি বার্নুলির উপপাদ্যের আর একটি উদাহরণ।

এই যন্ত্রে দুটি নল AB ও CD খাড়াভাবে তরলে ডুবান থাকে। নলদুটির ডোবান দুই মুখে সরু ছিদ্র আছে। AB নলের ছিদ্রটি প্রবাহের অভিমুখের সমান্তরালে স্থাপিত এবং CD নলটি এমনভাবে বাঁকানো যে ছিদ্রটি প্রবাহের অভিলম্বে থাকে।

B ও D কে প্রবাহ রেখা দিয়ে যোগ করে বার্ণুলি উপপাদ্য প্রয়োগ করলে লেখা যায়

$$h_B \frac{\vartheta_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g} = h_D + \frac{\vartheta_D^2}{2g} + \frac{P_D}{\rho g}$$

এখানে $h_B = h_D$, $\vartheta_B = \vartheta$ (ধরাযাক), $\vartheta_D = o$

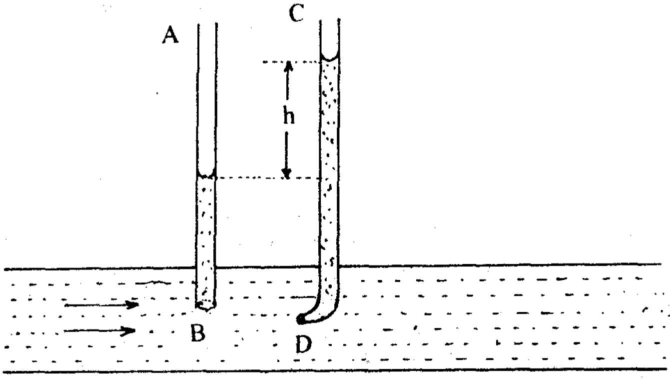
$$\therefore\ P_D - P_B = \frac{1}{2}\rho\vartheta^2$$

এখানে $P_D - P_B = \rho hg$, h নল দুটির মধ্যে তরলের উচ্চতা পার্থক্য

অতএব $\vartheta^2 = 2gh$

বা $\vartheta = \sqrt{2gh}$ (14.19)

মূল পাইপের যেখানে AB ও CD নল দুটি রাখা আছে সেখানের নলের প্রস্থচ্ছেদ α হলে, $\alpha\vartheta$ র মান থেকে তরলের নির্গমনের হার নির্ণয় করতে পারেন।



(চিত্র 14.8)

বিমান চলাকালীন বায়ুসাপেক্ষ বিমানের আপেক্ষিক গতিবেগ পরিমাপের জন্য পিটো নলের ব্যবহার আছে।

14.6 সারাংশ

সান্দ্রতাহীন তরল প্রবাহীর গতি শান্ত বা অপরিবর্তী হলে প্রবাহী সংক্রান্ত গতি বিজ্ঞান এখানে আলোচিত হয়েছে।

প্রবাহীর গতির সাধারণ সূত্র বা অয়লারের গতিসূত্র $\frac{1}{2}\text{grad } \vartheta^2 - \left[\vec{\vartheta} \text{ curl } \vec{\vartheta}\right] = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\text{grad p}$। এখানে প্রতিষ্ঠা করা হয়েছে। এর থেকে প্রবাহীর গতি সংক্রান্ত বিভিন্ন সূত্র প্রতিষ্ঠা করা যায়। বহমান প্রবাহীর (তরল) ক্ষেত্রে অবিছিন্নতা সূত্র যা একটা সংরক্ষন সূত্র, এটিকে প্রতিষ্ঠিত করা হয়েছে। এর গাণিতিক রূপ $\text{div}\,\vec{\vartheta} = o$

অয়লারের গতিসূত্র থেকে বার্নুলির সূত্র প্রতিষ্ঠা করা হয়েছে। এটি একটি শক্তির সংরক্ষণ সূত্র। এর গাণিতিক রূপ $\frac{1}{2}\vartheta^2 + \frac{p}{\rho} + \vartheta =$ ধ্রুবক।

বার্নুলির উপপাদ্যের সাহয্যে টারিচেল্লির সূত্রের প্রতিষ্ঠা এবং বিভিন্ন প্রাকৃতিক ঘটনাকে বিশ্লেষণ করা হয়েছে।

বার্নুলির উপপাদ্যর প্রয়োগ করে ভেন্টুরি মিটার ও পিটো নলের মত প্রয়োজনীয় যন্ত্রের মূলতত্ব প্রতিষ্ঠা করা হয়েছে।

14.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. আদর্শ প্রবাহী কাকে বলে?
2. ধারারেখা ও ধারা নল বলতে কি বোঝেন?
3. ঘূর্ণিঝড়ে বাড়ীঘর বাইরের দিকে ভেঙ্গে পড়ে কেন।
4. টরিচেল্লির সূত্র অনুসারে তরলের বেগ $\sqrt{2gh}$ বাস্তবে এই বেগ কিছুটা কম হয় কারণটি কি?
5. ভেন্টুরি মিটার ও পিটোনল দিয়ে কি কি পরিমাপ করা যায়।

গাণিতিক প্রশ্ন

1. কোন চৌবাচ্চার পাশের খাড়া দেওয়ালে একটা ছিদ্র আছে। ছিদ্র জলের উপরের তল থেকে 2.7cm নীচে থাক্‌লে জল কি বেগ নির্গত হবে তা নির্ণয় করুন।

উত্তর — 7.27m/s

2. একটি পরিবর্ত্তনশীল প্রস্থচ্ছেদের অনুভূমিক নলের মধ্য দিয়া জল প্রবাহিত হচ্ছে। যখন তরলের গতিবেগ .2m/s থেকে .3m/s হয় সেই চাপের পরিবর্তন কত হবে তা বের করুন।

উত্তর — $-25 N/m^2$

3. 0.6×10^{-2} m ব্যাসার্দ্ধের নলে কি বেগে জল প্রবাহিত হলে গতীয় চাপ $\cdot3\times10^{-2}$ m জলের চাপের সমান হবে। প্রতি সেকেন্ডে নল দিয়ে কি পরিমান জল যাবে? (সংকেত গতীয় চাপ $=1/2\rho\vartheta^2$)

উত্তর — $27\cdot3\times10^{-6} m^3/s$

4. একটা অনুভূমিক নলের দুই স্থানের ব্যাস 1×10^{-2} m ও $\cdot6\times10^{-2}$ m এর মাঝ দিয়ে প্রবাহ মান জলে দুই স্থানে চাপের পার্থক্য 1×10^{-2} m উচ্চতার জলের চাপের সমান। প্রবাহের হার নির্ণয় করুন।

উত্তর — $13\cdot4\times10^{-6} m^3/sec$

5. 10^{-1} m ব্যাসের মূল পাইপের সাথে পিটোট নল যুক্ত করা আছে এবং ঐ যন্ত্র হতে চাপের পার্থক্য 4×10^{-2} m জল স্তম্ভের সমান দেখা গেল। মূল পাইপে প্রতি সেকেন্ডে জল প্রবাহের পরিমান বের করুন।

উত্তর — $4\cdot9\times10^{-3} m^3/sec$

14.8 উত্তরমালা

সংকেত

1. 14.0 অংশ দেখুন
2. 14.1 অংশের দ্বিতীয় ও তৃতীয় অনুচ্ছেদ দেখুন
3. 14.4 অংশ দেখুন (সংকেত ঘুর্ণিঝড়ে বায়ু গোল হয়ে ঘোরার সময় বাইরের দিকের বেগ ভিতরের দিকের থেকে কম থাকে)।
4. বার্ণুলির উপপাদ্যের উপেক্ষিত বিষয় থেকে নিজে চেষ্টা করুন।
5. 14.5 অংশ দেখুন।

(SI একক ব্যবহার করা হয়েছে)

14.5 থেকে লিখুন

$$\vartheta = \sqrt{2gh}$$

এখানে $g = 9.8 m/s^2$

$h = 2 \cdot 7m$

$$\therefore \vartheta = \sqrt{2 \times 9.8 \times 2.7}$$

$$= 7 \cdot 27 m/s$$

2. 14.3 থেকে অনুভূমিক প্রবাহের ক্ষেত্রে লিখুন

$$\frac{1}{2}\vartheta_1^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}\vartheta_2^2 + \frac{p_2}{\rho}$$

এখানে $\rho = 10^3 kg/m^3$

$$\therefore p_2 - p_1 = \rho \times \frac{1}{2}\left(\vartheta_1^2 - \vartheta_2^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^3 \times \left[(\cdot 2)^2 - (\cdot 3)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^3 [\cdot 04 - \cdot 09]$$

$$= -25 N/m^2$$

3. 14.3 থেকে লিখুন

গতিয় চাপ $= \frac{1}{2}\rho\vartheta^2$

এখানে $\rho = 10^3 kg/m^3$

$$\therefore \frac{1}{2}\rho\vartheta^2 = \frac{1}{2} \times 10^3 \times \vartheta^2 = h\rho g$$

$$= \cdot 3 \times 10^{-2} \times 10^3 \times 9.8$$

$$\therefore \vartheta^2 = 2 \times \cdot 3 \times 9 \cdot 8 \times 10^{-2}$$

$$\vartheta = \cdot 242 \text{ m/s}$$

প্রতি সেকেন্ডে নল দিয়ে প্রবাহিত জলের পরিমাণ

$$V = \pi r^2 \cdot \vartheta$$

$$= 3 \cdot 142 \times (\cdot 6)^2 \times 10^{-4} \times \cdot 242$$ | এখানে $r = \cdot 6 \times 10^{-2} \text{ m}$

$$= 27 \cdot 3 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

4. 14.5 থেকে লিখুন

নলের মাঝদিয়ে প্রতিসেকেন্ডে প্রবাহিত তরলের আয়তন,

$$V = \alpha_1 \left[\frac{2gh}{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 - 1} \right]^{1/2}$$

এখানে $\alpha_1 = \pi \cdot r_1^2 = \pi \cdot (\cdot 5 \times 10^{-2})^2$; $\alpha_2 = \pi r_2^2 = \pi \cdot (\cdot 3 \times 10^{-2})^2$

$h = 1 \times 10^{-2} \text{ m}$; $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

$$\therefore V = 3 \cdot 142 \times (\cdot 5)^2 \times 10^{-4} \times \left[\frac{2 \times 9 \cdot 8 \times 1 \times 10^{-2}}{\left\{\frac{(.5)^2}{(.3)^2}\right\}^2 - 1} \right]^{1/2}$$

$$= 13 \cdot 4 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

5. 14 5 থেকে লিখুন

মূল পাইপের ভিতর দিয়ে প্রতি সেকেন্ডে নির্গত জলের

আয়তন $= \alpha\vartheta = \alpha\sqrt{2gh}$

এখানে $\alpha = 3.142 \times \left(\frac{1}{2} \times 10^{-1}\right)^2 = 3 \cdot 142 \times (\cdot 5)^2 \times 10^{-2} m^2$

$g = 9 \cdot 8 m/s^2$, $h = 4 \times 10^{-2} m$

$\therefore \alpha\vartheta = 3 \cdot 142 \times (\cdot 5)^2 \times 10^{-2} \times \left(2 \times 9 \cdot 8 \times 4 \times 10^{-2}\right)^{1/2}$

$= 6 \cdot 9 \times 10^{-3} m^3/s$

একক 15 □ নির্বাতিন ও চাপের পরিমাপ

গঠন

15.1 প্রস্তাবনা

উচ্চ মাত্রার শূণ্যতা বা উচ্চ নির্বাতি সৃষ্টির পথিকৃত হলেন গেডে (Gaede)। নানা রকমের পাম্পের সাহায্যে 'উচ্চ নির্বাতি' (high vaccum) ও 'অত্যুচ্চ নির্বাতি (ultra high vaccum) সৃষ্টি করা হয়।

এই অবস্থায় যে সামান্য বায়ু পাত্রে থাকে তা যে চাপ দেয় তার থেকে পাত্রের শূণ্যতার পরিমাণ বুঝান হয়। কোন চাপ যদি এক মিলিমিটার উচ্চ পারা স্তম্ভ যে চাপ দেয় তার সমান হয় তাহলে ঐ চাপকে নিম্ন চাপ পরিমাপের ক্ষেত্রে একক চাপ বা এক টর (torr) বলে।

1 torr = 1 mm Hg

= .1X13.6X.980

= 1333.224 dyn/cm^2

= 133.3 প্যাস্কল (N/m^2)

N = নিউটন $\left(M L T^{-2}\right)$ 1.

10^{-3} থেকে 10^{-8} টরের শূণ্যতাকে উচ্চ নির্বাতি এবং আরও কম চাপকে 'অত্যুচ্চ নির্বত' বলে। এই নিম্ন চাপ পরিমাপের জন্য যে সকল যন্ত্র ব্যবহার করা হয় তাদের 'গেজ' বলে (gauge) বলে। বিভিন্ন নিম্নচাপ পরিমাপর জন্য বিভিন্ন গেজ উদ্ভাবিত হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এই এককটিতে আপনি আধুনিক প্রযুক্তিতে একান্ত প্রয়োজনীয় উচ্চ মাত্রার শূণ্যতা বা উচ্চ নির্বাতি সৃষ্টি ও পরিমাপের পদ্ধতি সম্বন্ধে অবহিত হবেন।

এককটি পড়ার পর যে কাজগুলি করতে পারবেন তা হল—

- কোন পাত্রে প্রয়োজন মত বিভিন্ন মাত্রার উচ্চ নির্বাতি (Heigh vaccum) সৃষ্টি করতে পারবেন।
- কোন পাত্রে সৃষ্ট উচ্চ নির্বাতের পরিমাপ আপনি নিজেই করতে পারবেন।

15.2 নির্বাতিন হার (The speed of a pump)

উপস্থিত চাপে (P) কোন পাম্পের নির্বাতিন হার (S) বলতে প্রতি সেকেন্ডে যে আয়তন গ্যাস টেনে বের করে দেয় তা বোঝান হয়।

সুতরাং পাম্পের নির্বাতিন হার,

$S = -\frac{dv}{dt}, dv =$ নির্দিষ্ট চাপে (P) যে আয়তন গ্যাস dt সময়ে পাত্র থেকে নির্গত হয় তার পরিমান

ধরা যাক $p_0 =$ পাম্পের অন্তিম চাপ

p= যে কোন সময়ে (t) পাম্প চলাকালীন পাত্রের ভিতরের গ্যাসের চাপ।

v= পাত্রের আয়তন।

তাপমাত্রা স্থির ধরে, বয়েলের সূত্র থেকে আমরা লিখ্‌তে পারি

$$(P - P_0)v = (v + dv)[(p - p_0) - dp]$$

উপরের সমীকরণটিকে লেখা যায়

$$(P - P_0)dv = v\,dp$$

[dp dv র মান খুব সামান্য হওয়ার জন্য উপেক্ষা করা হয়েছে]

বা $dp = (p - p_o)\frac{dv}{v}$

বা $\frac{dp}{dt} = \frac{(p - p_o)}{v}.\frac{dv}{dt}$

$$= -s.\frac{(p - p_o)}{v}$$

এখানে t_1 এবং t_2 সময়ে পাত্রের বায়ুর চাপ যথাক্রমে p_1 এবং p_2 হলে দেখা যাবে,

$$\frac{s}{v}\int_{t_1}^{t_2} dt = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p - p_o}$$

$$\therefore \frac{s}{v}(t_2 - t_1) = \therefore \log_e \frac{p_1 - p_o}{p_2 - p_o} = 2.303 \log_{10} \frac{p_1 - p_o}{p_2 - p_0}$$

বা $s = 2 \cdot 303 \frac{v}{(t_2 - t_1)} \log_{10} \frac{p_1 - p_o}{p_2 - p_o}$

যদি অন্তিম চাপ p_o খুবই সামান্য হয় তা হলে উপরের সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$S = 2 \cdot 303 \frac{v}{t_2 - t_1} \log_{10} \frac{p_1}{p_2}$$

এটিকে গেডের সমীকরণ বলে।

উপরের সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$\log_e \frac{p_1}{p_2} = \frac{s(t_2 - t_1)}{v}$$

$$= \frac{s}{v} \cdot t \text{ এখানে } t_2 - t_1 = t$$

$$\therefore \frac{p_2}{p_1} = e^{-\frac{s}{v}t}$$

যদি $t=\frac{v}{s}$ তাহলে

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{1}{e}=\frac{1}{2\cdot713}\doteq 0\cdot37$$

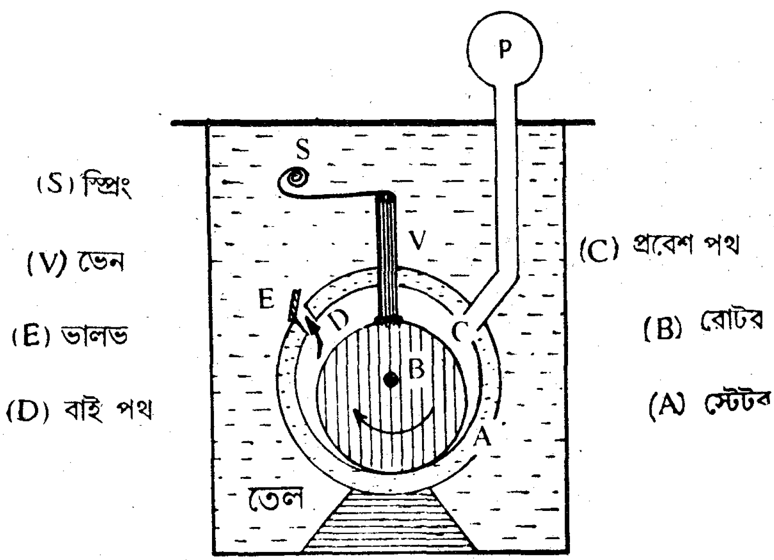
বা $p_2 = 0.37\ p_1$

সুতরাং $t\left(=\frac{v}{s}\right)$ সময়ে পাত্রে চাপ প্রারম্ভিক চাপের 0.37 অংশ হবে।

15.3 ঘূর্ণী পাম্প (Rotary Pump)

এই আধুনিক পাম্পের উদ্ভাবক হলেন গেডে (Gaede)। এর সাহায্যে অতি অল্প সময়ে কোন পাত্রের চাপ বায়ুমন্ডলের চাপ থেকে 10^{-3} টর চাপে নামিয়ে আনা যায়।

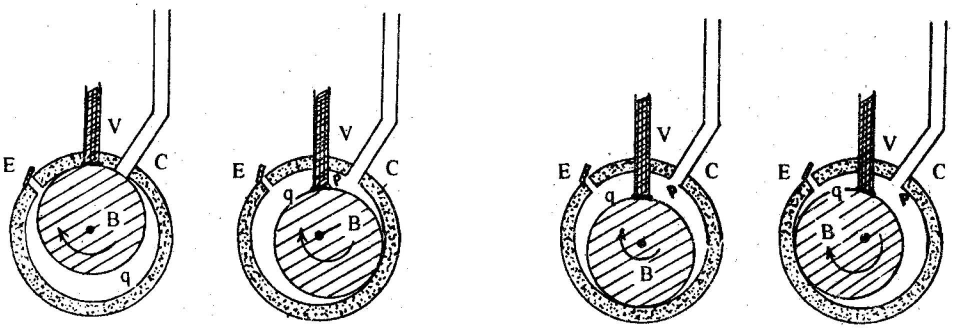
গঠন 15.1 নং চিত্রে A একটি ইস্পাতের বেলন আকারের ফাঁপা কুঠরি যার নাম স্টেটর। এই কুঠরির ভিতর একটি নিরেট ইস্পাতের বেলন B রোটর উৎকেন্দ্রিক ভাবে Aর দেওয়াল স্পর্শ করে ঘুরতে পারে। C পথে বায়ু A তে প্রবেশ করতে এবং D পথে বের হতে পারে। D ছিদ্রটি স্প্রিং লাগান ভাল্ভ E দিয়ে বন্ধ থাকে। A তে বায়ুর চাপ একটা সীমা অতিক্রম করলে E খুলে যায় এবং D পথে বের হয়।



(চিত্র 15.1)

একটি পার্টিশান (ভেন) V স্প্রীং (S) এর সাহায্যে সব সময় B এর গায়ে লেগে থাকে এবং A ও B র মধ্যবর্ত্তী স্থানে অবস্থিত বায়ুকে নবাগত বায়ুথেকে পৃথক করে রাখে। ক্ষরণ (leakage) নীরাবণের জন্য সমগ্র যন্ত্রটিকে একটি বিশেষ তেলে ডুবান থাকে। ইলেকট্রিক মোটরের সাহয্যে বেলন B (Rotor) কে উচ্চ বেগে ঘোরানো হয়।

কার্যপ্রণালী — 2 নং চিত্রে রোটর B র ঘূর্ণন কালে চারটি অবস্থান (i), (ii), (iii) ও (iv) দেখান হয়েছে।



(i) (ii) (iii) (iv)

(চিত্র 15.2)

(i) অবস্থানে স্টেটর (A) ও রোটর (B) র মধ্যবর্ত্তী স্থান q, p- পাত্রের বায়ু বা গ্যাস দ্বারা পূর্ণ হয়েছে।

(ii) অবস্থানে q এর আয়তন হ্রাস পেয়েছে এবং বায়ু পিষ্ট হয়েছে। একই সময়ে প্রবেশ পথ C দিয়া নতুন গ্যাস রোটরের পিছনের অংশ p তে প্রবেশ করেছে। ভেন (v), q এবং p অংশ দুটিকে পৃথক করে রেখেছে।

(iii) রোটর B র ঘূর্ণন কালে এই অবস্থানে এসেছে। q অংশের বায়ু আরও পিষ্ট হয়েছে এবং p অংশে আরও বায়ু প্রবেশ করেছে।

(iv) এই চুড়ান্ত পর্য্যায়ে q অংশের বায়ুর চাপ অতিরিক্ত বেশী হওয়ায় নির্গম নলের E ভালবকে খুললে পাম্প থেকে বায়ু বের হয়ে যাবে। এর সঙ্গে কোন পাত্র যুক্ত করে ঐ গ্যাস পাত্রে প্রবেশ করান যাবে এবং পাম্পটি তখন সংনমন পাম্প হিসাবে কাজ করবে। এইভাবে রোটরের প্রতি ঘূর্ণণের সময় p পাত্র থেকে প্রবেশ পথ C দিয়ে কিছু পরিমান বায়ু পাম্পে প্রবেশ করবে এবং বর্হিপথ D দিয়ে বাইরে

বেরিয়ে যাবে। এই ভাবে রোটর B ইলেকট্রিক মোটরের সাহায্যে ক্রমাগত ঘুরতে থাক্‌লে P পাত্রের বায়ুর চাপ ক্রমাগত কমতে থাক্‌বে।

q অংশের ক্রমাগত বায়ুর চাপ কমতে থাকলে এক সময়ে q অংশের বায়ুর চাপ ভালব অংশের E খুলতে পারবে না এবং পাম্প এর বায়ু নিষ্ক্রমনের কাজ বন্ধ হয়ে যাবে। এইভাবে 10^{-2} টর পর্য্যন্ত পাত্রের বায়ুর চাপ কমান যায়।

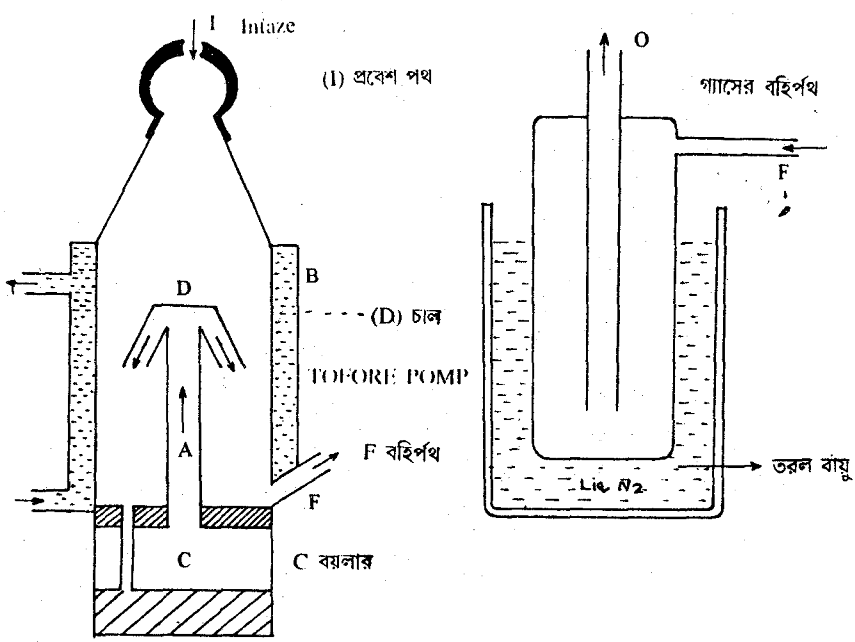
পর পর দুটি পাম্প শ্রেণী সমবায়ে যুক্ত করলে উচ্চ মাত্রায় শূণ্যতা 10^{-3} টর সৃষ্টি করা যায়।

15.4 ব্যাপন পাম্প (Diffusion Pump)

বর্তমানের ব্যাপন পাম্পের উদ্ভাবনের জন্য গেডে (Gaede) ও ল্যাংমুয়ের (Langmuir) এর যথেষ্ট অবদান আছে।

এই পাম্পে দুটি গ্যাসের পারস্পারিক ব্যাপন ক্রিয়াকে অবলম্বন করে দ্রুত উচ্চমাত্রার শূণ্যতা সৃষ্টি করা হয়।

ব্যাপন পাম্প সাধারণতঃ ইস্পাতে তৈরী করা হয়, কাঁচের পাম্পও কখনও কখনও দেখা যায়।



(চিত্র 15.3(a)

(চিত্র 15.3(b)

(চিত্র 15.3(a) & (b))

গঠন ঃ— C পাত্রে পারা রেখে তাকে বার্ণারের সাহায্যে ফুটিয়ে বাস্পায়িত করা হয়। এই পারদ বাষ্প A নল দিয়ে উপরে উঠে ঢাল (shield) D তে ধাক্কা খেয়ে A ও B র মধ্যের বলয় আকার অংশে তীব্র গতিতে নামতে থাকে। B র দেওয়াল বাইরের জল প্রবাহে ঠান্ডা থাকে। B র সংস্পর্শে এসে পারার ভারী বাষ্প জমে C তে ফিরে আসে। B র নিচের দিকে একটি মোটা রবারের নলের সাহায্যে এই পাম্পের সঙ্গে একটি সহায়ক ঘূর্ণী পাম্পকে যুক্ত করা হয়। যে পাত্রকে বায়ুশূণ্য করতে হবে তার সঙ্গে পাম্পের উপরের দিকের চোঙ কে যুক্ত করা হয়।

ক্রিয়া ঃ— প্রথমে কেবল মাত্র ঘূর্ণী পাম্প চালিয়ে পাত্রের বাতাস বা গ্যাসের চাপ 10^{-1} থেকে 10^{-2} টর এ নামান হয় তারপর ব্যাপন পাম্প ও ঘূর্ণী পাম্প একই সঙ্গে চালান হয়।

এখন গ্যাসের যে অনুগুলি ব্যাপন ক্রিয়ায় D ও B এর ফাঁক দিয়ে নিচের অংশে নেমে আসে এবং নিম্নগামী ভারী পারার অণুতে ধাক্কা খেয়ে দ্রুত নিচে নেমে আসে। ফলে F নলের মুখের কাছে গ্যাসের ঘনত্ব বাড়ে এবং সহায়ক পাম্প টেনে বের করে দেয়। নির্বাতেয় গ্যাস বা বায়ুর পাত্রে ক্রমে ক্রমে অণুর সংখ্যা কমতে থাকে ফলে বাতাস বা গ্যাসের চাপ আরও হ্রাস পায়।

ব্যাপনে পারা বাষ্পের যে অণুগুলি গ্যাস পাত্রের দিকে যায় তাদের আটকাতে না পারলে নির্বাতেয় পাত্রের চাপ পারাবাষ্পের চাপের নিচে নামান যাবে না। এই অণুগুলিকে আটকাবার জন্য ফাঁদ (Trap) ব্যবহার করা হয়। ফাঁদটিকে ব্যাপন পাম্প ও গ্যাস পাত্রের মধ্যবর্ত্তী জায়গায় লাগান হয়।

ফাঁদটির (T) গঠন চিত্র 15.3 (b) তে আছে। তরল বায়ু (বা তরল নাইট্রোজেন) মধ্যে রেখে সবসময়ে ঠান্ডা করা হয় ফলে পাম্প থেকে ব্যাপন প্রক্রিয়ায় যে অনুগুলি ফাঁদে প্রবেশ করে সেগুলি ঠান্ডা দেওয়ালের সংস্পর্শে এসে তরল হয়ে ফাঁদে থেকে যায়, পাত্রে যেতে পারে না।

এই পাম্পের সাহয্যে 10^{-6} mm পর্যন্ত্য নিম্নচাপ সৃষ্টি করা যায়।

1924 সালের পর থেকে পারার বদলে জটিল হাইড্রোকার্বন, ডাই ননাইল থ্যালেট প্রভৃতি বিশেষ ধরনের তেলের ব্যবহার প্রচলিত হয়েছে।

ব্যাপন পাম্পের কার্য্যক্ষমতা বাড়াবার জন্য অনেক সময় পাম্পে দুই বা তিনটি পাম্প পরস্পর জোড়া হয়ে থাকে।

ব্যাপন পাম্পের সাহায্যে অত্যুচ্চ নির্ব্বত ($\angle 10^{-8}$ টর) সৃষ্টি করা সম্ভব হয়েছে। তেলের কতকগুলি বৈশিষ্ট থাকা দরকার

1. তেলের অণুগুলির ভর বেশী হওয়া এবং তেলের মধ্যে কোন উদ্বায়ী অপবস্তুর অণুপস্থিত থাকা দরকার।

2. তেলকে ফোটালে তার অণুগুলির বিয়োজন (Dissociation) বা জারণ (oxidation) হবে না।

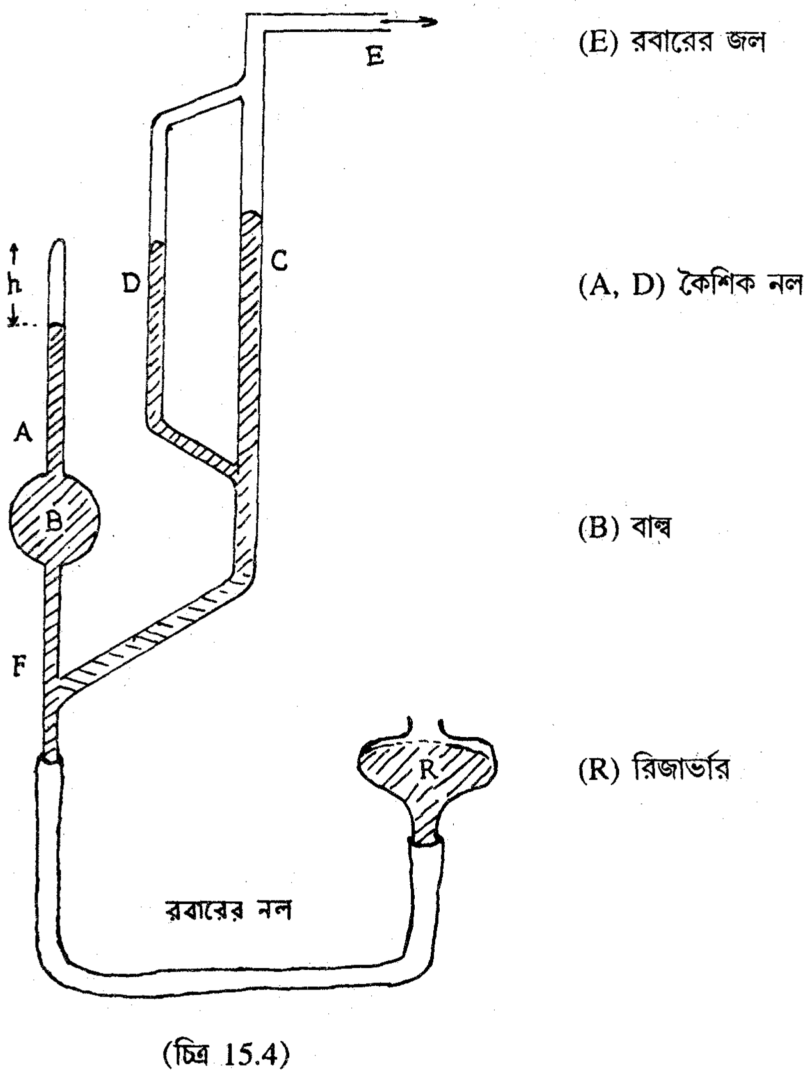
3. তেল বা তেলের বাষ্পের সঙ্গে যে সকল পদার্থের সংস্পর্শ ঘটবে তাদের সঙ্গে কোন রকম রাসায়নিক বিক্রিয়া ঘটবে না।

15.5 নিম্নচাপ মাপন (Measurcment of low pressure)

(i) ম্যাকলিওড গেজ (Mc Lerd gauge)

বহুল পরিমাণে ব্যবহৃত ম্যাকলিওড গেজ সাধারণত 10° টর থেকে 10^{-4} টর পর্য্যন্ত চাপ মাপবার জন্য ব্যবহার করা হয়। এর ক্রিয়া বয়েলের সূত্রের উপর নির্ভর করে।

গঠন — একটি জানা আয়তনের কুন্ড বা বালব এর উপর প্রান্তে একটি বদ্ধ মুখ সরুনল A র সঙ্গে যুক্ত আছে। রবার নলের সাহায্যে তলার প্রান্ত পারদ আধার R এর সঙ্গে সংযুক্ত। তলার প্রান্ত F বিন্দু থেকে পার্শ্বনল C ও D সংযুক্ত করা আছে। যে পাত্রের গ্যাসের চাপ মাপতে হবে তার সঙ্গে নলের মুখ E যুক্ত করা আছে। A ও D নল দুটি সমান্তরাল ও একই ব্যাসের এর ফলে পারদ স্তম্ভের কৈশিক ক্রিয়ার দরুন অবনমনের প্রতিকার করা হয়। পারদ আধার, রবারের নল ইত্যাদি বিশুদ্ধ ও শুষ্ক পাদর পূর্ণ থাকে।



(চিত্র 15.4)

ক্রিয়া ঃ—

(i) প্রথমে R কে নামিয়ে পারদ স্তরকে F বিন্দুর তলায় নামাতে হবে তারপর যে পাত্রের গ্যাসের চাপ মাপতে হবে তাকে E নলের সঙ্গে সংযুক্ত করা হল।

(ii) এখন গ্যাস পাত্র থেকে গ্যাস B কুন্ড ও A নল পূর্ণ করবে এবং এই গ্যাসের চাপ (p) পাত্রস্থ গ্যাসের পরিমেয় চাপের সমান হবে।

(iii) এইবার পারদ আধার R কে ধীরে ধীরে উপরে ওঠাতে হবে। পারদ ধীরে ধীরে F বিন্দু পার হয়ে A, D ও C নলের মধ্যে প্রবেশ করে উপরে উঠতে থাকবে D র মধ্যে পারদ তল A নলের বন্ধ মুখের সাথে একই উচ্চতায় এলে R কে আটকে স্থির করে রাখা হল। এই অবস্থায় A ও D র মধ্যে পারদ তলের উচ্চতার পার্থক্য (h) পরিমাপ করা হল। এখন কৈশিকনল A তে আবদ্ধ গ্যাসই গ্যাস পাত্র থেকে পাত্রস্থ নির্দিষ্ট চাপের গ্যাস।

মনে করি A নলের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের আয়তন ϑ , তাহলে

A নলে সঙ্কুচিত গ্যাসের আয়তন $= h\vartheta$

এবং " " " চাপ $=(p+h)$

A নলে আবদ্ধ গ্যাসের প্ররম্ভিক চাপ ও আয়তন যথাক্রমে p ও v

সুতরাং বয়েলের সূত্র অনুসারে লেখা যায়

$$pv=(p+h)h\vartheta$$

যেহেতু $p << h$

$$pv = h^2\vartheta$$

$$\therefore p = h^2 \cdot \frac{\vartheta}{v}$$

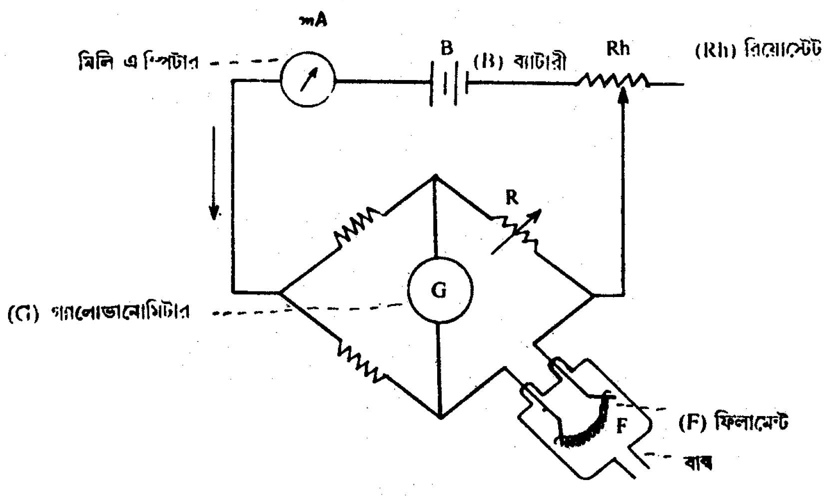
$$= kh^2 \qquad \left| \frac{\vartheta}{v} = k \right. \text{ গেজ ধ্রুবক}$$

সুতরাং, যদি k র মান জানা থাকে তা হলে p র মান সহজেই পাওয়া যায়। A ও D র পিছনে চাপ সূচক স্কেল থাক্‌লে সরাসরি গ্যাসের চাপ পরিমাপ করা যায়।

এই গেজের সাহায্যে 10^{-5} টরের মত নিম্নচাপ পর্য্যন্ত মাপা যায়।

(ii) পিরানি গেজ (Pirani gauge)

কোন গ্যাসের মধ্য দিয়ে কোন পরিবাহীর পরিবহন পদ্ধতিতে তাপ ত্যাগের হার গ্যাসের চাপের সাথে সমানুপাতিক হয়। অতএব তাপত্যাগের হার γp, এখানে γ একটি ধ্রুবক। যখন গ্যাস পাত্রের সঙ্গে পাম্পকে যুক্ত করা হয়, পাত্রের ভিতর চাপ কমলে তার মধ্যে অবস্থিত ফিলামেন্টের তাপ পরিবহন পদ্ধতির জন্য কম হ্রাস পায়। ফলে ফিলামেন্টের তাপ মাত্রা বৃদ্ধি পায় এবং উচ্চ রোধাঙ্কে ফিলামেন্টের রোধের পরিমাণ বৃদ্ধি পায়। অর্থাৎ চাপ কমলে ফিলামেন্টের (টাংস্টেন বা প্লাটিনাম) রোধ বৃদ্ধি পায়। এ পিরানি গেজের ক্রিয়া এই তত্ত্বের উপর নির্ভর করে।



(চিত্র 15.5)

গঠন ও ক্রিয়া ঃ— তার একটি বালবের মধ্যে টানা দেওয়া পোঁচান থাকে। এই গেজে টাংস্টান বা প্লাটিনামের উষ্ণতার সামান্য বৃদ্ধিতে এদের যথেষ্ট পরিমান বোধের বৃদ্ধি ঘটে। এই গেজ p কে হুইটস্টেন ব্রিজের চতুর্থ বাহুতে রাখা হয়। নির্বতেয় পাত্রের সঙ্গে বালবের খোলা মুখ মোটানল দিয়ে যোগ করা হয়। হুইটস্টেন ব্রিজের নীতি মেনে ফিলামেন্ট A এর রোধ পরিমাপ করা হয়। মাপনের সময় এই বাহুতে বিদ্যুৎ প্রবাহ স্থির থাকে এবং গ্যালভানোমিটারের মধ্য দিয়ে কোন বিদ্যুৎ প্রবাহ থাকে না। রিয়স্টেটের সাহায্যে ব্যাটারীর তড়িৎ প্রবাহ মাত্রার হ্রাস বা বৃদ্ধি করা যায় এবং মিলি এ্যামিটারের সাহায্যে পরিমাপ করা যায়।

যখন পাম্পটি কাজ করে গ্যাস পাত্র ও তার সঙ্গে যুক্ত ফিলামেন্ট বাল্বের চাপ কমে ফলে তার

তাপমাত্রা বাড়ে ফলে বোধের পরিমান বৃদ্ধি পায় এবং তা হুইটস্টোন ব্রিজের সাহায্যে পরিমাপ করা হয়; এইভাবে বিভিন্ন নির্দিষ্ট চাপে ফিলামেন্টের রোধের মান জানা যায়।

একটি ম্যাকলিওড গেজকে পিরানি গেজটির সঙ্গে সংযুক্ত করে বিভিন্ন চাপে বিভিন্ন রোধের মানের সঙ্গে ক্রমাংকিত করা যায়।

এক্ষনে সোজাসুজিভাবে হুইটস্টেন ব্রিজের সাহয্যে রোধের পরিমান করে গ্যাস পাত্রের নিম্নচাপ জানা যায়

এই গেজের সাহায্যে 10^{-2} টর থেকে 10^{-4} টর পর্য্যন্ত নিম্নচাপ মাপা যায়। ফিলামেন্টে পেঁচান তার ব্যবহার করে 10^{-6} টর পর্য্যন্ত চাপ এর গেজের দ্বারা পরিমাপ করা সম্ভব।

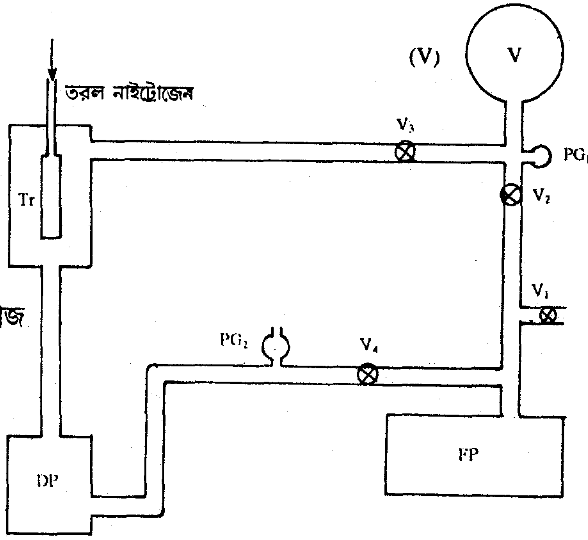
15.6 উচ্চ নির্বাত ও পরিমাপের কার্য্যকর ব্যবস্থা

উচ্চ নির্বাত সৃষ্টি ও পরিমাপের কার্য্যকর ব্যবস্থার আভাস চিত্রে দেখানো হয়েছে। ভালব V_1 নির্বাতনের সময় বন্ধ থাকে।

(i) প্রথম পর্য্যায়ে ভালব V_2, V_3 ও V_4 খুলে ঘূর্ণীপাম্প (FP) চালিয়ে বায়ু পাত্রের চাপ 10^{-2} টরে নামান হয়। এই চাপ PG_1 ও PG_2 উভয়েই দেখা যায়। এক্ষনে ভালব V_2 বন্ধ করা হয়।

(Tr) ফাঁদ

(V) বায়ু পাত্র



(V_3) ভল্ব

(PG) পিরানি গেজ

(PG_2) পিরানি গেজ

(V_2) ভাল্ব

(V_1) ভাল্ব

(V_1) ভাল্ব

(DP) ব্যাপন পাম্প

(F P) সহায়ক ঘূর্ণ পাম্প

(চিত্র 15.6)

(ii) দ্বিতীয় পর্য্যায়ে ঘূর্ণীপাম্প চালু রেখে ব্যাপন পাম্প চালান হয়। চাপ 10^{-4} তে পৌছিলে ফাঁদে তরল নাইট্রোজেন বা বাতাস ঢালা হয়। কিছু সময় পর চাপ 10^{-6} টর পর্য্যন্ত নামবে। এটি PG_1 ও PG_2 সাহায্যে পরিমাপ করা হয়। প্রয়োজনে একটি আয়ন গেজ ($10^{-3}-10^{-8}$ টর) ভালব V_3 ও ট্রাপের মধ্যবর্ত্তী স্থানে লাগিয়ে পাত্রের নিম্ন চাপ পরিমাপ করা হয়।

15.7 সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি

1. টর, নির্বাতন হার এবং অন্তিম চাপ কাকে বলে?
2. রোটারী পাম্পকে তেলে ডোবান হয় কেন?
3. রোটারী পাম্পকে সংনমন পাম্প ব্যবহার করা যায় কি?
4. ব্যাপন পাম্পে পারার বদলে তেলে ব্যবহার করলে তেলের কি কি বৈশিষ্ট্য থাকা দরকার?
5. পিরানি গেজের ক্রিয়া কিসের উপর নির্ভর করে?

15.8 সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলির উত্তর

1. 15.1, 15.2 অংশ দেখুন
2. 15.3 অংশ দেখুন।
3. 15.3 অংশ দখেুন।
4. 15.4 এর শেষ অংশ দেখুন।
5. 15.5 এর পরবর্ত্তী অংশ দেখুন।

15.9 গাণিতিক প্রশ্ন

1. একটি ম্যাকলিওড গেজের কুন্ড বা বালবের আয়তন $250\times10^{-6}\,m^3$, কৈশিক নলের দৈর্ঘ্য $5\times10^{-2}\,m$ এবং ব্যাসার্দ্ধ $0\cdot075\times10^{-2}\,m$ গেজটির দ্বারা পরিমাপ যোগ্য চাপের মোটামুটি পাল্লা নির্ণয় করুন।

(উত্তর — $P_{max}=1\cdot77\times10^{-5}\,m$ এবং $P_{min}=7\cdot06\times10^{-9}\,m$)

2. 10^{-2} cubic metre আয়তনের সছিদ্র পাত্র থেকে বায়ু পাম্পের সাহায্যে ক্রমাগত বায়ু বের করে সর্ব্ব নিম্ন চাপ 1×10^{-3}metre এ আনা হল। এইবার পাম্প থেকে পাত্রটিকে বিচ্ছিন্ন করে দেখা

গেল 20 sec সময়ে পাত্রটি প্রারম্ভিক চাপ 20×10^{-3} এ পৌছাচ্ছে। পাম্পটির নির্বাতন হার কত হবে?

(উত্তর $s = 2 \cdot 219 \times 10^{-3} m^3 / S$)

গাণিতিক প্রশ্নের উত্তর

1. 15.5 থেকে লিখুন $p = \dfrac{h^2 \vartheta}{v}$

চাপ উর্দ্ধসীমায় থাকলে কৈশিক নলে (A) পারদ সবথেকে উপরে থাকবে, এক্ষেত্রে h র মান 5×10^{-2} m প্রশ্নানুসারে A নলে একক দৈর্ঘের আয়তন $\vartheta = 3.142 \times |X(\cdot 075 \times 10^{-2})^2 m^3$ এবং $v = 250 \times 10^{-6} m^3$

এক্ষেত্রে সর্বোচ্চ পরিমাপ যোগ্য চাপ

$$P\max = \frac{(5 \times 10^{-2})^2 \times 3 \cdot 142 \times (\cdot 075 \times 10^{-2})^2}{250 \times 10^{-6}}$$

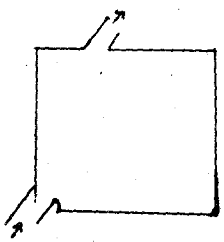
1 letre $= 10^3$ cc

7.06×10^{-9}

চাপ সর্ব্বনিম্ন সীমায় থাকলে কৈশিক নলে (A) পারদ সব থেকে নীচে থাকবে, সেক্ষেত্রে h র মান 1mm বা 1×10^{-3} m এক্ষেত্রে $P\min = \dfrac{(1 \times 10^{-3})^2 \times 3 \cdot 142 \times (\cdot 075 \times 10^{-2})^2}{250 \times 10^{-6}}$

$$= 1 \cdot 77 \times 10^{-5} \text{ m}$$

2. এখানে



$1 m^3 = 10^6$ cc

1 letre $= 10^3$ cc

পাত্রের আয়তন $= 10^{-2}$ cu metre $= 10$ লিটার

15.2 থেকে লিখুন $S = 2 \cdot 303 \cdot \dfrac{V}{t_2 - t_1} \log_{10} \dfrac{p_1}{p_2}$

এক্ষেত্রে $V = 10^{-2} m^3$, $P_1 = 2 \times 10^{-3}$ m, $P_2 = 1 \times 10^{-3}$ m, $t_2 - t_1 = 20s$

$$S = \frac{2 \cdot 303 \times 10^{-2}}{20} \times \log_{10} \frac{2 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-3}}$$

$$= 2 \cdot 219 \times 10^{-3} \mathrm{m}^3 / \mathrm{s}$$

15.10 সারাংশ

আধুনিক বিজ্ঞানে উচ্চ মাত্রার শূণ্যতা বা উচ্চ মাত্রার নির্বাত সৃষ্টির ও এর পরিমাপ খুবই প্রয়োজনীয়।

10^{-2} টর পর্যন্ত বাতাসের চাপ হ্রাস করার জন্য ঘূর্ণী পাম্প ব্যবহার করা হয়। পর পর দুটি বা তিনটি ঘূর্ণীপাম্পকে শ্রেণী সমবায়ে যুক্ত করে 10^{-3} টর পর্য্যন্ত চাপে আনা যায়।

ঘূর্ণী পাম্পের সাথে পারা বা তেলের ব্যাপন পাম্প যুক্ত করলে 10^{-6} থেকে 10^{-8} পর্য্যন্ত নির্বাত সৃষ্টি করা সম্ভব হয়।

উচ্চ নির্বাত পরিমাপের জন্য ম্যাকলিওড বয়েলের সূত্রের উপর নির্ভরশীল নিম্নচাপ মাপক উদ্ভাবন করেন। এর সাহায্যে সোজাসুজি 10^{-4} টর পর্য্যন্ত নিম্নচাপ মাপা যায়। পিরানি গেজের সাহায্যে 10^{-6} টর পর্য্যন্ত চাপও পরিমাপ করা যায়। অত্যুচ্চ নির্বাত পরিমাপের জন্য আয়ন গেজ (10^{-3} থেকে 10^{-8} টর) ও উল্টান আয়ন গেজ (10^{-10} টর পর্য্যন্ত) ব্যবহার করা হয়।

একক 16 □ একক ও মাত্রা

গঠন

16.1 প্রস্তাবনা

নিম্নলিখিত ছয়টি মৌলিক একককে মূল একক ধরে যে সুসঙ্গত পদ্ধতিতে ভৌত রাশি গুলিকে প্রকাশ করা হয় সেখানে মৌলিক একক গুলিকে SI একক (SI unit) বলে। তবে আলোচ্য অংশ গুলিতে মিটার, কিলোগ্রাম ও সেকেন্ড ছাড়া অন্য মৌলিক একক গুলির দরকার হয় না।

মৌলিক একক ছয়টির তালিকা

মৌলিক একক	চিহ্ন	মৌলিক একক	চিহ্ন
মিটার (metre)	m	অ্যাম্পিয়ার (ampre)	A
কিলোগ্রাম (kilogram)	kg	ডিগ্রী কেলভিন (degree kelvin)	°k
সেকেন্ডে (second)	s	ক্যান্ডেলা (candela)	cd

উদ্দেশ্য

এই এককটিতে আপনি পদার্থ বিজ্ঞানের অসংখ্য পরিমাপ যোগ্য একককে মাত্র কয়েকটি এককের সাহায্যে প্রকাশ করতে পারবেন। এককটি পড়লে আপনার যে যে সুবিধা হবে সেগুলি হল,

- অসংখ্য ভৌতরাশির প্রতিটির একককে মাত্র কয়েকটি মৌলিক এককের সাহায্যে প্রকাশ করতে পারবেন।
- সকল পদ্ধতির এককের মধ্যে একটা সহজ সামঞ্জস্য দেখাতে পারবেন।
- পদার্থবিজ্ঞানের অনেক সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করতে পারবেন।

16.1.1 আন্তজার্তিক মৌলিক এককগুলির মান

(1) দৈর্ঘ্যের একক মিটার (m).

Krypton (86) পরমাণুর কমলা রং এর বর্ণালি রেখার শূণ্য স্থানে তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের 165076.73 গুণ দৈর্ঘ্যকে 1 মিটার বলে।

(2) ভরের একক কিলোগ্রাম (kg) এটি মূল আন্তজার্তিক কিলোগ্রাম।

(3) কালের একক সেকেন্ড (s)

সিজিয়াম (133) (cs 133) পরমানুর নিম্নতম শক্তিস্তরে অতিসূক্ষ্ম দুটি শক্তি স্তরে প্লতি হলে যে বিকিরণ নির্গত হয় তার পর্য্যায় 9, 192, 631, 770 গুণ সময়কে 1 সেকেন্ডে বলে।

(4) বিদ্যুৎধারার একক অ্যাম্পিয়ার (A), একমিটার দূরত্বে খুব লম্বা দুটি পরিবাহীকে শূণ্যস্থানে রেখে তাদের মধ্যদিয়ে যে স্থিরমান বিদ্যুৎ ধারা প্রবাহিত করলে প্রতিটি পরিবাহী নিজের 1 মিটার দৈর্ঘ্যে 2×10^{-7} newton বল অনুভব করলে ঐ স্থির মান বিদ্যুৎ প্রবাহকে এক অ্যাম্পিয়ার বলে।

(5) উষ্ণতার একক ডিগ্রী কেলভিন (°k) চরম শীতলতা (Absolute zero) এবং জলের ত্রিক বিন্দু

(Triple point) র মধ্যবর্তী উষ্ণতার ব্যবধানের $\frac{1}{273.6}$ অংশকে এক ডিগ্রী কেলভিন বলে। তাপ তত্ত্বে এর দরকার হয়।

(6) আলোক তীব্রতার একক ক্যান্ডেলা (cd)। প্রায় বন্ধ আধারে গলা প্লাটিনামকে তার হিমাংকে (1769^0C) রাখলে আধারের ছোট ছিদ্রদিয়ে গলা প্লাটিনাম তলের প্রতি $1cm^2$ ক্ষেত্র থেকে তলের অভিলম্বে প্রতি সেকেন্ডে প্রতি ঘণ কোণে যে পরিমাণ আলোক শক্তি প্রবাহিত হয় তার $\frac{1}{60}$ অংশকে এক ক্যান্ডেলা বলে।

আলোক তত্ত্বের ক্ষেত্রে এর দরকার হয়।

মৌলিক SI একক গুলি পূর্বতন অনুরূপ রাশির এগুলির বৈশিষ্ট এই যে এগুলি আরও সুনির্দিষ্ট।

16.1.2 CGS ও MKSA পদ্ধতি

(i) CGS পদ্ধতির ভিত্তি বল বিজ্ঞানের ক্ষেত্রে তিনটি মৌলিক একক দৈর্ঘ্য (cm) , ভর (gm বা g) ও সময় বা কাল (sec বা s) এগুলির সাহায্যে সকল যৌগিক একক গঠন করা হয়।

বিদ্যুৎ ও চুম্বকের ক্ষেত্রে সি.জি.এস স্থির বিদ্যুত পদ্ধতি (cgs electrostatic বা cgs method) ও সি.জি.এস বিদ্যুৎ চৌম্বক পদ্ধতি (cgs electromagnetic বা egsm method) অণুসরণ করা হয়।

(ii) MKSA পদ্ধতির ভিত্তি চারটি মৌলিক একক দৈর্ঘ্য (Metre বা M) বা ভর (killogram বা kg) সময় বা কাল (second বা s) ও বিদ্যুৎ ধারা (Ampre বা A)।

বল বিজ্ঞানের ক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য ভর ও কালের মৌলিক একক থেকে সব যৌগিক একক গঠণ করা হয়; সেই জন্য তিনটি মৌলিক একক দ্বারা গঠিত পদ্ধতিকে Mks পদ্ধতি বলে।

16.1.3 আন্তর্জার্তিক পদ্ধতিতে এককের প্রকাশ রীতি

(1) এককের নাম গুলি ইংরাজী ছোট হরফে লেখা হবে। যেমন মিটারের ক্ষেত্রে m, কিলোগ্রামের ক্ষেত্রে kg কিন্তু যে সকল একক বৈজ্ঞানিকদের নাম থেকে এসেছে সেখানে ইংরাজী বড় হরফে লেখা হয়। যেমন নিউটনের ক্ষেত্রে N, জুলের ক্ষেত্রে J ওয়াটের ক্ষেত্র W ইত্যাদি।

(2) (i) গুণন বোঝাতে তিনটির N m, N X m, N. m মধ্যে যে কোন একটি প্রথা ব্যবহার করা যাবে। তবে প্রথম প্রথাটি Nm বেশী ব্যবহার করা হয়।

(ii) ভাগ বোঝাতে তিনটির $\frac{m}{s}$, m/s, ms^{-1} মধ্যে যে কোন একটি প্রথা ব্যবহার করা হয়। এক্ষেত্রে শেষ পদ্ধতি ms^{-1} অধিক ক্ষেত্রে ব্যবহার করা হয়।

16.2 ভৌত রাশির মাত্রা (Dimensions of a physical quantity)

কোন লব্ধ এককের 'মাত্রা' (dimensions) বলতে আমরা সেই 'ঘাত' (power) বুঝি যে ঘাতে দৈর্ঘ্য, ভর এবং কাল বা সময় এই প্রাথমিক এককগুলিকে তুললে ঐ লব্ধ একক প্রকাশিত হবে।

যেমন (1) ক্ষেত্রফল (Area) দুটি দৈর্ঘ্যের গুণফল

$[A]=[L]\times[L]=\left[L^2\right]$ এইবার পুরাপরি প্রকাশ করলে লেখা যায়

$[A]=\left[M^{\circ}L^2T^{\circ}\right]$ এটি ক্ষেত্রফলের মাত্রা সূত্র।

এক্ষেত্রে A ক্ষেত্রফলের মাত্রা

M	এর ক্ষেত্রে	O
L	" "	2
T	" "	O

এখানে গুরু বন্ধনী [ ] মাত্রীয় সংকেত নির্দেশ করে।

(2) বেগ (velocity) দূরত্ব ও অতিক্রান্ত সময়ের অনুপাত।

$$\text{বেগ, } [\vartheta]=\frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}}$$

$$=\frac{[L]}{[T]}=\left[LT^{-1}\right]=\left[M^{\circ}LT^{-1}\right]$$

এটি বেগের মাত্রা সূত্র।

$\therefore$ বেগের মাত্রা

M	এর ক্ষেত্রে	O
L	" "	1
T	" "	-1

(3) ত্বরণ (Acceleration) বেগ পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলে।

ত্বরণ, $[f] = \dfrac{\text{বেগ}}{\text{কাল}}$

$$= \frac{[LT^{-1}]}{[T]} = [LT^{-2}] = [M^{\circ}LT^{-2}]$$

এটিই ত্বরণের মাত্রা সূত্র।

∴ ত্বরণের মাত্রা

M	এর	ক্ষেত্রে	O
L	"	"	1
T	"	"	-2

(4) অণুরূপে কয়েকটি রাশির মাত্রা সূত্র দেওয়া হল

(i) বল (Force) = ভর × ত্বরণ $= [M] \times [LT^{-2}] = [MLT^{-2}]$ এটির মাত্রা

M	এর	ক্ষেত্রে	1
L	"	"	1
T	"	"	-2

(ii) ভরবেগ (Momentun) = ভর × বেগ

$$= [M] \times [LT^{-1}] = [MLT^{-1}]$$

(iii) চাপ (Pressure) = $\dfrac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{[MLT^{-2}]}{[L^2]} = [ML^{-1}T^{-2}]$

(iv) কার্য ও শক্তি (Work and Energy)

= বল × দূরত্ব

$$= [MLT^{-2}] \times [L] = [ML^2T^{-2}]$$

(v) ক্ষমতা (Power) $= \dfrac{\text{শক্তি}}{\text{কাল}}$

$$= \left[ML^2T^{-2}\right] / [T] = \left[ML^2T^{-3}\right]$$

(vi) কম্পাংক (Frequency) $= \dfrac{\text{দোলন সংখ্যা}}{\text{সময়}}$

$$= \frac{M^\circ L^\circ T^\circ}{T} \quad [\because \text{ সংখ্যর কোন মাত্রা নাই।}]$$

$$= \left[M^\circ L^\circ T^{-1}\right]$$

(vii) কোণ (Angle) $= \dfrac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্দ্ধ}} = \dfrac{[L]}{[L]} =$ বিশুদ্ধ সংখ্যা

(viii) পৃষ্ঠ টান (Surface Tension) $= \dfrac{\text{বল}}{\text{দূরত্ব}} = \dfrac{\left[MLT^{-2}\right]}{[L]} = \left[MT^{-2}\right]$

(ix) পৃষ্ট শক্তি (Surface Energy) $= \dfrac{\text{কার্য}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{\left[ML^2T^{-2}\right]}{\left[L^2\right]} = \left[MT^{-2}\right]$

(x) সান্দ্রতাঙ্ক (Co-efficient of viscosity)

$$\eta = \frac{F}{A\frac{d\vartheta}{dx}} = \frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল} \times \text{বেগের নতিমাত্রা}}$$

এখন

$$[\eta] = \frac{[MLT^{-2}]}{[L^2] \times \left[\frac{LT^{-1}}{L}\right]}$$

$$= [ML^{-1}T^{-1}]$$

এটির মাত্রা	M	এর	ক্ষেত্রে	O
	L	"	"	1
	T	"	"	-1

16.3.1 মাত্রা ঘটিত সমীকরণ (Dimensional Equation)

ভৌত বিজ্ঞানের কোন সমীকরণের দুই পাশের রাশিগুলির মান না লিখে কেবল মাত্রা লিখলে যে সমীকরণ পাওয়া যায় তাকে রাশিগুলির মাত্রীয় সমীকরণ (Dimensional Equation) বলে।

16.3.2 মাত্রার সমতার তত্ত্ব (Principle of homogenity of dimension)

কোন রাশি ঐ জাতীয় রাশিরই সমান হতে পারে, সেই কারণে যে কোন সমীকরণের দুই পাশে যে সকল পদ (Term) থাকে, তাদের প্রত্যেকের মাত্রা একই হবে। এটিকে মাত্রার সমতার তত্ত্ব (Principle of homogenity of dimensions) বলে।

যেমন

$$S = ut + \frac{1}{2}ft^2$$

$$\therefore [L] = [LT^{-1}] \times [T] + [LT^{-2}] \times [T^{-2}]$$

এখানে s = দূরত্ব
u = বেগ
t = সময়
f = ত্বরণ

এখানে $\frac{1}{2}$ একটি মাত্রাহীন সংখ্যা হওয়ায় মাত্রা ঘটিত সমীকরণে বা মাত্রাসূত্রে উহার ঐ সংখ্যার স্থান নেই।

$$\therefore [L] = [L] + [L]$$

সুতরাং উপরের বল বিজ্ঞানের সমীকরণের প্রত্যেক পদের মাত্রা একই।

16.4 মাত্রীয় বিশ্লেষণ (Dimensional analysis)

সমীকরণের উভয় মাপের প্রত্যেক পদের মাত্রা একই এই নিয়ম মেনে এক রাশির সঙ্গে অন্য রাশিগুলির সম্পর্ক বের করা যায়। মাত্রায় সমতার তত্ত্বের এই প্রকার প্রয়োগকে মাত্রীয় বিশ্লেষণ বলে। পদার্থ বিদ্যার বিভিন্ন ক্ষেত্রে এর প্রয়োগ আছে।

কয়েকটি সহজ উদাহরণ দেখুন।

(1) তরলের সংকট বেগ ϑ_c (critical velocity of liquid) তরলের সংকট বেগ (ϑ_c) (i) তরলের সান্দ্রতাঙ্ক η ; (ii) তরলের ঘনত্ব ρ এবং (iii) নলের ব্যাসার্ধ r র উপর নির্ভর করে।

অর্থাৎ $\vartheta_c = f(\eta, \rho, r)$

$$= k\eta^x \rho^y r^z$$

[k= ধ্রুবক (সংখ্যা)]

এই সমীকরণে বিভিন্ন রাশির মাত্রা বসালে

$$\left[LT^{-1}\right] = \left[ML^{-1}T^{-1}\right]^x \left[ML^{-3}\right]^y [L]^z$$

$$\left[M^{\circ}L^{1}T^{-1}\right] = [M]^{x+y}[L]^{-x-3y+z}[T]^{-x}$$

উভয় দিকে M, L ও T র খাতাংক সমান হতে হলে

L থেকে পাই $0 = x + y$

M থেকে পাই $1 = -x - 3y + z$

T থেকে পাই $-1 = -x$

উপরের তিনটি সমীকরণ থেকে পাই

$$x = 1, y = -1 \text{ ও } z = -1$$

$$\therefore \vartheta_c = k\eta^1\rho^{-1}r^{-1}$$

$$= k\frac{\eta}{\rho r}$$

এরূপ বিশ্লেষণের k র মান পাওয়া যায় না। পরীক্ষার দ্বারা বা গাণিতিক সাহায্যে k র মান পাওয়া যায়।

$$\therefore \vartheta = N\frac{\eta}{\rho r} \;;\; k = N \text{ রেনল্ডস সংখ্যা}$$

(2) সরল দোলকের দোলন কাল (Time preiod of simple pendulum)

সরল দোলকের দোলনকাল t, (i) দোলকের দৈর্ঘ্য ℓ (ii) দোলক পিন্ডের ভর m এবং (iii) অভিকর্ষজ ত্বরণ g এর উপর নির্ভর করে।

অর্থাৎ $t = f(\ell, m, g)$

$$= k\,\ell^x m^y g^z$$

$|k =$ ধ্রুবক (সংখ্যা)

এক্ষনে মাত্রীয় সমীকরণ পাওয়া যাবে

$$[T]^1 = [L]^x[M]^y\left[LT^{-2}\right]^Z$$

$$= [M]^y[L]^{x+z}[T]^{-2z}$$

এখন উভয় দিকের খাতাংক সমান হতে হলে

M হতে পাই $\quad o = y$

L হতে পাই $\quad o = x + z$

T হতে পাই $\quad 1 = -2z$

∴ উপরের তিনটি সমীকরণ থেকে পাই

$$x=\frac{1}{2}, y=0, \quad z=-\frac{1}{2}$$

অতএব $t=k\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

$y=0$ থেকে বোঝা যায় t, m এর উপর নির্ভর করে না।

এখানে k র মান পাওয়া যায় না। পরীক্ষার দ্বারা বা গাণিতিক বিশ্লেষণ থেকে পাওয়া যায় $k=2\pi$

$$\therefore t=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

(3) টানা দেওয়া তারের কম্পঙ্ক (Frequency of a string under tension)

টানা দেওয়া তারের কম্পঙ্ক (n), তারের টান (T), তারের দৈর্ঘ্য এবং তারের প্রতি দৈর্ঘ্য ভরের (m) উপর নির্ভরশীল।

মনে করুন $n \alpha T^x \ell^y m^z$

অথবা $n=kT^x \ell^y m^z$ $\quad$ $k=$ একটি সংখ্যা মাত্র

এটির মাত্রীয় সমীকরণ হল

$$\left[T^{-1}\right]=\left[MLT^{-2}\right]^x [L]^y \left[ML^{-1}\right]^z$$

$$=[M]^{x+z}[L]^{x+y-z}[T]^{-2x}$$

বিভিন্ন রাশির মাত্রা বিবেচনা করে পাই

$$x+z=0$$
$$x+y-z=0$$
$$-2x=-1$$

$\therefore x = \frac{1}{2}, y = -1$ ও $z = -\frac{1}{2}$

$$\therefore n = k\frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

পরীক্ষার সাহয্যে প্রমান করা যায়, $k = \frac{1}{2}$, $\therefore n = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}}$

(4) গ্যাসে শব্দের বেগ (Velocity of sound in a gas)

গ্যাসে শব্দের বেগ ϑ চাপ p ও ঘনত্ব ρ এর উপর নির্ভর করে।

ধরা যাক সম্পর্কটি

$$\vartheta = k\,p^x\,\rho^y$$

এটির মাত্রীয় সমীকরণ

$$\left[LT^{-1}\right] = \left[ML^{-1}T^{-2}\right]^x \left[ML^{-3}\right]^y$$

$$[M]^{\circ}[L]^1[T]^{-1} = [M]^{x+y}[L]^{-x-3y}[T]^{-2x}$$

অতএব

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ -x - 3y &= 1 \\ -2x &= -1 \end{aligned}$$

সমাধান করে পাই $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$

$$\therefore \vartheta = k\sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

16.5 মাত্রীয় সমীকরণ পদ্ধতির উপযোগিতা (Uses of Dimensional equations)

(1) এক পদ্ধতির একক থেকে অন্য পদ্ধতির এককে রূপান্তর করা।

(2) প্রান্ত ফলাফল মিলিয়ে দেখা।

(3) বিভিন্ন প্রাকৃতিক রাশির ভিতর যথাযথ সম্পর্ক নিরূপণ করা।

(i) এক পদ্ধতির একক থেকে অন্য পদ্ধতির এককে রূপান্তর।

মৌলিক রাশিগুলির একক পরিবর্তন করলে কোন আলোচ্য নতুন মান কত হবে, তা রাশির মাত্রার সাহায্যে পাওয়া যায়।

এক পাউন্ডাল বলকে ডাইন এ প্রকাশ করার পদ্ধতি বলের মাত্রা MLT^{-2} পাউন্ডালে ভরের একক পাউন্ড (lb) দৈর্ঘ্যের একক ফুট (ft) ও কালের একক সেকেন্ড (s)।

ডাইনে ভরের একক (g) দৈর্ঘ্যের একক (cm) এবং কালের এক সেকেন্ডে (s)।

অতএব 1 পউন্ডাল = 1 lbft s^{-2}

এবং 1 ডাইন $= 1 \text{ g cm s}^{-2}$

এক পাউন্ডাল বল x ডাইন্ এর সমান হলে

$$1 \text{ lbfts}^{-2} = x \text{ g cm s}^{-2}$$

$$\therefore x = \frac{lb}{g}.\frac{ft}{cm}. = 453.6 \times 30.48 = 1.382 \times 10^4$$

আর্থাৎ এক পাউন্ডাল $= 1.382 \times 10^4$ ডাইন

(ii) প্রান্ত ফলাফল মিলিয়ে দেখার পদ্ধতি।

কোন সমীকরণের বাম দিকের মাত্রা সূত্র যদি দক্ষিণ দিকের মাত্রা সূত্রের সমান হয় তবে সমীকরণটি নির্ভুল হবে। অন্যথায়, সমীকরণটি হবে ত্রুটিপূর্ণ এই নীতিকে সমমাত্রিক নীতি (Priciple of homogeity)

আমরা জানি, গোলাকার বায়ু-বুদের অভ্যন্তরস্থ অতিরিক্ত চাপ

$$p = \frac{2T}{r} \qquad (1)$$

চাপের (p) মাত্রা = $\dfrac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{[MLT^{-2}]}{[L^2]} = [MI^{-1}T^{-2}]$

পৃষ্ঠ টান (T) এর মাত্রা = $\dfrac{\text{বল}}{\text{দূরত্ব}} = \dfrac{[MLT^{-2}]}{[L]} = [ML^{\circ}T^{-2}]$

ব্যাসার্দ্ধ (r) এর মাত্রা $= [L]$

উপরের সমীকরণের (I) বাম দিকের মাত্রা সূত্র

$$= [ML^{-1}T^{-2}] \qquad (2)$$

উপরের সমীকরণের (I) ডান দিকের মাত্রা সূত্র

$$= \frac{[MT^{-2}]}{[L]} = [ML^{-1}T^{-2}] \qquad (3)$$

মাত্রা সূত্র 1 নং সমীকরণের উভয় দিকে বসালে পাবেন

$$[ML^{-1}T^{-2}] = 2[ML^{-1}T^{-2}] = k[ML^{-1}T^{-2}]$$

এটি থেকে বোঝা যাচ্ছে যে 1 নং সমীকরণের উভয় দিকের মাত্রাসূত্র সমান। সুতরাং সমীকরণটি নির্ভুল।

(iii) বিভিন্ন প্রাকৃতিক রাশির ভেতর যথাযথ সম্পর্ক নিরূপণ

কোন প্রাকৃতিক রাশি যে যে বিষয় গুলির উপর নির্ভরশীল তা জানা থাকলে মাত্রা সমীকরণের সাহয্যে প্রাকৃতিক রাশির সঙ্গে বিষয়গুলির যথাযথ সমীকরণ প্রকাশ করতে পারা যায়।

দৃষ্টান্ত ঃ 14.4 এর 1, 2, 3, 4

16.6 মাত্রা বিশ্লেষণ পদ্ধতির সীমা (Limitations of dimensional analysis)

এই পদ্ধতি প্রায় অতুলনীয় ও অভ্রান্ত কিন্তু এটির নিম্নলিখিত সীমা আছে ঃ

(i) বিভিন্ন প্রাকৃতিক রাশির সম্পর্কের ভিতর কোন ধ্রুব সংখ্যা বা কোন মাত্রাহীন রাশি থাকলে তাদের মান এই পদ্ধতির দ্বারা নির্ণয় করা যায় না।

(ii) প্রাথমিক একক তিনটির (M, L ও T) মাত্রা বিবেচনা করে তিনটির বেশী সমীকরণ পাওয়া যায় না। তার ফলে কোন সম্পর্ক তিনটির বেশী রাশির উপর নির্ভরশীল হলে সম্পর্কটির যথাযথ সম্পর্ক নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

16.7 সি.জি.এস ও এম কে এস পদ্ধতির এককের তালিকা

	সি.জি.এস			এম.কে.এস	
রাশি	মাত্রা	একক	চিহ্ন	একক	চিহ্ন
মৌলিক					
দৈর্ঘ্য	L	সেন্টিমিটার	cm	মিটার	m
ভর	M	গ্রাম	g	কিলোগ্রাম	kg
কাল	T	সেকেন্ড	s	সেকেন্ড	s
যৌগিক					
বেগ	LT^{-1}	—	cm/s	—	m/s
ত্বরণ	LT^{2}	—	cm/s^2	—	m/s^2
ভরবেগ	MLT^{-1}	—	gm cm/s	—	kgm/s
বল	MLT^{-2}	ডাইন	dyn	নিউটন	N
চাপ	$ML^{-1}T^{-2}$	—	dyn/cm^2	প্যাস্কাল	N/m^2
কার্য্য ও শক্তি	$ML^{2}T^{-2}$	আর্গ	dyn/cm	জুল	J(Nm)
ক্ষমতা	$ML^{2}T^{-3}$	—	erg/s	ওয়াট	W(J/s)

16.8 সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন ও সংকেত

1. SI পদ্ধতির মৌলিক একক গুলির নাম লিখুন।
2. কোন ভৌত রাশির মাত্রা বলতে কি বোঝায়।
3. নিচের রাশিগুলির সংজ্ঞা থেকে তাদের মাত্রা নির্ণয় করুন। মহাকর্ষীয় নিত্য সংখ্যা, পৃষ্ঠটান ও সান্দ্রতার গুনাংক।
4. মাত্রা সমীকরণ কি তা লিখুন।
5. মাত্রা বিশ্লেষণ পদ্ধতির সীমা কি কি?
6. এম.কেএস পদ্ধতিতে বল, চাপ ও ক্ষমতার এককগুলির নাম লিখুন।

সংকেত

1. 16.1 দেখুন।
2. 16.2 দেখুন।
3. 16.2 এর সাহায্যে নিজে চেষ্টা করুন।
4. 16.3.1 দেখুন।
5. 16.6 দেখুন।
6. 16.7 দেখুন।

16.9 গাণিতিক প্রশ্ন ও উত্তর

1. কোন বল 10 kg ভরের উপর 1 min ক্রিয়া করায় তার বেগ 5 km/S হয়। বলের মাত্রা বিচার করে তার মান ডাইন-এ প্রকাশ করুন।

   উত্তর 3×10^8 ডাইন

2. কোন বেগ প্রতি সেকেন্ডে 10 মিটার হলে প্রতি ঘন্টায় কত মাইল হবে তা বের করুন।

   উত্তর 22.37 মাইল প্রতি ঘন্টা

3. মহাকর্ষীয় ধ্রুবক G এর মান সি.জি.এস পদ্ধতিতে 6.66×10^{-8} ; এই মানকে এফ.পি.এস পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন। $1 \text{lb} = 453.6 \text{ gm}$ এবং $1 \text{ft} = 30.48$ c.m.

   উত্তর — $1.07 \times 10^{-9} \text{lb}^{-1} \text{ft}^3 \text{s}^{-2}$

4. 4.2×10^7 আর্গ এর মান কে এম.কে.এস পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।

উত্তর 4.2 জুল।

গাণিতিক প্রশ্নের উত্তর

1. আপনারা জানেন

1 নিউটন $= 1 \text{ kg m s}^{-2}$

1 ডাইন $= 1 \text{ gm cm sec}^{-2}$

$\therefore$ 1 নিউটন $= 1000 \times 100 \text{ gm cm sec}^{-2}$

$= 10^5$ ডাইন

প্রশ্ন অনুসারে,

বল $= 10 \times 60 \times 5$ নিউটন

$= 3000$ নিউটন

$= 3000 \times 10^5$ ডাইন

$= 3 \times 10^8$ ডাইন

2. আপনারা জানেন

$$10 \text{ ms}^{-1} = x \text{ mihr}^{-1}$$

$$\therefore x = 10 \times \frac{\text{m}}{\text{mi}} \frac{\text{hr}}{\text{s}}$$

[এখানে আপনারা জানেন

1m = 39.37 inch]

$$= 10 \times \frac{39.37}{1760 \times 3 \times 12} \times \frac{3600}{1}$$

$= 22.37$ মাইল প্রতি ঘন্টায়

3. আপনারা জানেন

$$[G] = [F][d^2]/[m_1 m_2]$$

$$= \frac{[MLT^{-2}][L^2]}{[M^2]} = [M^{-1}L^3T^{-2}]$$

প্রশ্নানুসারে $G = 6.66 \times 10^{-8} gm^{-1}cm^3s^{-2}$

$\therefore 6.66 \times 10^{-8}\ gm^{-1}cm^3s^{-2}$ [$\because$ 1 lb = 454gm

$= x\ lb^{-1}ft^3s^{-2}$ 1 ft = 12×2.54cm

বা $x = 6.66 \times 10^{-8} \frac{gm^{-1}}{lb^{-1}} \cdot \frac{cm^3}{ft^3}$ = 30.5cm]

$$= 6.66 \times 10^{-8} \times 454 \times \left(\frac{1}{30.5}\right)^3$$

$$= 1.06 \times 10^{-9} \quad lb^{-1}ft^3s^{-2}$$

4. কাজের মাত্রা সূত্র, $[W] = [ML^2T^{-2}]$

মনে করুন, 4.2×10^7 আর্গ পরিমাণ কাজের পরিমাণ

এম.কে.এস পদ্ধতিতে x হয়।

এক্ষেত্রে $4.2 \times 10^7\ gm\,cm^2T^{-2} = x\ kgm^2s^{-2}$

$$\therefore x = 4.2 \times 10^7 \frac{gm}{kg} \cdot \frac{cm^2}{m^2} = 4.2 \times 10^7 \times \frac{1}{10^3} \times \frac{1}{10^4}$$

$= 4.2$ [$\because 1m = 10^2$

$\therefore$ এম.কে.এস পদ্ধতিতে 4.2×10^7 আর্গ এর পরিমান $1kg = 10^3 gm$

$4.2\ kg\ m^2s^{-2}$ বা 4.2 জুল

16.10 সারাংশ

এখানে এককের আন্তর্জাতিক পদ্ধতি এবং আন্তর্জাতিক মৌলিক এককগুলির মান নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। c.g.s পদ্ধতির ভিত্তি তিনটি এবং M.K.S.A. পদ্ধতির ভিত্তি চারটি মৌলিক এককের বিষয়ে তুলনা করা হয়েছে।

ভৌত রাশির মাত্রা, মাত্রা ঘাটতি সমীকরণ, মাত্রার সমতার তত্ত্ব, মাত্রীয় বিশ্লেষণ প্রভৃতি বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে।