

## প্রাক্কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমতো কোন বিষয়ে সাম্মানিক (honours) স্তরে সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠউপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে—যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয় সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যয়ন বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠউপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন ; যখনই কোন শিক্ষার্থী এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠউপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্ঠায় অধিগত হয় পাঠউপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তাঁর নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণ ক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশ কিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক — অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠউপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার  
উপাচার্য

তৃতীয় পুনর্মুদ্রণ : জুন, 2017

---

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী এবং অর্থানুকূল্যে মুদ্রিত।  
Printed in accordance with the regulations and financial assistance  
of the Distance Bureau of the University Grants Commission.

## পরিচিতি

বিষয় : পদার্থ বিদ্যা

সাম্মানিক স্তর

পাঠক্রম : পর্যায় : EPH 05 : 01 & 02

	রচনা	সম্পাদনা
একক 1	অধ্যাপিকা নন্দিতা দত্ত	অধ্যাপক প্রদীপ কুমার ঘোষ
একক 2	ঐ	ঐ
একক 3	ড. তারাশঙ্কর নাগ	ড. অমল কুমার রায়চৌধুরী
একক 4	ঐ	অধ্যাপক প্রদীপ কুমার ঘোষ
একক 5	ঐ	ঐ
একক 6	ঐ	ঐ
একক 7	ড. অরবিন্দ নাগ	ড. অমল কুমার রায়চৌধুরী
একক 8	ড. কৃষ্ণপদ সরকার	অধ্যাপক প্রদীপ কুমার ঘোষ
একক 9	ড. প্রতীপ কুমার চৌধুরী	ড. অমল কুমার রায়চৌধুরী
একক 10	ড. কৃষ্ণপদ সরকার	অধ্যাপক প্রদীপ কুমার ঘোষ
একক 11	ড. কৃষ্ণপদ সরকার	অধ্যাপক প্রদীপ কুমার ঘোষ
একক 12	ড. সুভাষ চন্দ্র সামন্ত	অধ্যাপক প্রদীপ কুমার ঘোষ
একক 13	ড. সুভাষ চন্দ্র সামন্ত	অধ্যাপক প্রদীপ কুমার ঘোষ
একক 14	ড. সুভাষ চন্দ্র সামন্ত	অধ্যাপক প্রদীপ কুমার ঘোষ

### প্রস্তাৱন

এই পাঠ সংকলনের সমুদয় স্বত্ব নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের দ্বারা সংরক্ষিত। বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃপক্ষের লিখিত অনুমতি ছাড়া এর কোন অংশের পুনর্মুদ্রণ বা কোনভাবে উদ্ভূতি সম্পূর্ণ নিষিদ্ধ।

মোহন কুমার চট্টোপাধ্যায়  
নিবন্ধক







নেতাজি সুভাষ  
মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

EPH 05  
তাপ ও তাপগতি বিদ্যা  
গ্যাসের আণবিক তত্ত্ব

## পর্যায়

### 1

একক 1	□ তাপগতিবিদ্যার মূল ধারণা	7-39
একক 2	□ উষ্ণতার ধারণা ও পরিমাপ	40-73
একক 3	□ তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র ও তার প্রয়োগ	74-109
একক 4	□ তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র ও এনট্রপি	110-171
একক 5	□ তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের বিবিধ প্রয়োগ	172-230
একক 6	□ দশাস্তর	231-259
একক 7	□ বিকিরণ	260-302

## পর্যায়

### 2

একক 8	□ আদর্শ গ্যাস	305-330
একক 9	□ পরিবহণ প্রক্রিয়া	331-355
একক 10	□ ব্রাউনীয় গতি	356-372
একক 11	□ বাস্তব গ্যাস	373-394
একক 12	□ পরিসংখ্যান ও তাপ গতিতত্ত্বের মূলনীতি	395-425
একক 13	□ গুরুত্ব সমষ্টি	426-458
একক 14	□ কণিকাবাদী পরিসংখ্যান	459-497



## গঠন

### 1.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

### 1.2 তাপগতীয় তত্ত্ব

তত্ত্বের শ্রেণীবিভাগ

তত্ত্বের সীমার শ্রেণীবিভাগ

### 1.3 তত্ত্বের তাপগতীয় অবস্থা এবং তাপগতীয় চল

সংকীর্ণ চল ও ব্যাপক চল

তাপগতীয় সাম্য

### 1.4 তাপগতীয় প্রক্রিয়া

আপাতসাম্যীয় প্রক্রিয়া

উৎক্রমণীয় ও অনুৎক্রমণীয় প্রক্রিয়া

সূচক চিত্রের সাহায্যে প্রক্রিয়ার প্রদর্শন

### 1.5 তাপগতিতত্ত্বের আদি সূত্র (Zeroth law of thermodynamics)

### 1.6 অবস্থার সমীকরণ

সমীকরণ থেকে গাণিতিক সম্পর্ক স্থাপনকরণ

সম্পূর্ণ ও অসম্পূর্ণ অবকল

### 1.7 সারাংশ

### 1.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

### 1.9 উত্তরমালা

---

## 1.1 প্রস্তাবনা

---

আপনারা নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছেন যে শীতের সকালে খুব শীতবোধ করলে আমরা হাত দুটিকে ঘষে নিজেদের গরম করার চেষ্টা করি। সাইকেলের চাকায় হাওয়া ভরার সময় দেখা যায় যে কিছুক্ষণ পরে পাম্পটি গরম হয়ে গেছে। উভয় ক্ষেত্রে উত্তাপের সৃষ্টির জন্য তাপীয় উৎসের প্রয়োজন হচ্ছেনা। অপরপক্ষে স্টীম ইঞ্জিনের আবিষ্কারে আমরা লক্ষ্য করলাম তাপের সাহায্যে যান্ত্রিক শক্তি পাওয়া সম্ভব।

সুতরাং আমরা দেখতে পাচ্ছি যান্ত্রিক শক্তি ও তাপশক্তির মধ্যে একটি সম্পর্ক আছে। আমাদের উদ্দেশ্য — এই যান্ত্রিক ও তাপীয় শক্তির মধ্যে যে সম্পর্ক রয়েছে তা নির্ণয় করা এবং কোন সাধারণ নিয়ম দিয়ে তাদের ব্যাখ্যা করা যায় তা নির্ধারণ করা।

সাধারণত তাপীয় তত্ত্বের বিভিন্ন ধর্ম ব্যাখ্যা করার জন্য দুটি ভিন্ন দৃষ্টিভঙ্গির সাহায্য নেওয়া হয়। এদের মধ্যে একটি পদার্থের আণবিক তত্ত্ব এবং দ্বিতীয় পদ্ধতিটি হোল তাপগতিতত্ত্ব যা আমাদের মূল আলোচ্য বিষয়। উষ্ণতা পরিবর্তনে তত্ত্বে যে ভৌত পরিবর্তন হয় তা স্থির করা ও কোন সাধারণ নিয়ম দ্বারা এরা নিয়ন্ত্রিত হয় তার ব্যাখ্যা করাই তাপগতিতত্ত্বের মূল উদ্দেশ্য।

পদার্থের আণবিক গতিতত্ত্বে আণুবীক্ষণিক দৃষ্টিভঙ্গির সাহায্যে বিভিন্ন কাল্পনিক অঙ্গীকার করে চাক্ষুষ বা বাহ্যিক তত্ত্বের বিভিন্ন ধর্ম ব্যাখ্যা করা হয়। যেমন আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে অণুগুলি পরস্পরের মধ্যে আকর্ষণ - হীন অবস্থায় অবাধে সর্বদা সঞ্চরণ করে এবং উষ্ণতা বৃদ্ধিতে এদের গতিবেগ বৃদ্ধি পায়। এর সাহায্যে আপনারা গ্যাসের চাপ, তাপ-পরিবাহিতা, সান্দ্রতা ইত্যাদি ভৌত ধর্মগুলি ব্যাখ্যা করতে পারবেন। এই দৃষ্টিভঙ্গির বৈশিষ্ট্যগুলি নিম্নরূপ :

- (ক) পদার্থের গঠনে কল্পনার প্রয়োজন। যেমন — গ্যাস কতকগুলি অভিন্ন অণুর দ্বারা সৃষ্টি।
- (খ) অসংখ্য রাশিমালার সাহায্য প্রয়োজন
- (গ) সাধারণ বুদ্ধির সাহায্যে এদের কল্পনা করা চলে না।
- (ঘ) এই সকল রাশিমালা মাপনযোগ্য নয়।

অপরপক্ষে তাপগতিতত্ত্বে চাক্ষুষতত্ত্বের বাহ্যিক ধর্ম আলোচনার জন্য অণু-পরমাণুর অস্তিত্ব এবং এদের গতিবিধি সম্পর্কে কোন উল্লেখ করা হয়না। বাস্তব অভিজ্ঞতা ও সকল তত্ত্বে সমভাবে প্রযোজ্য সাধারণ কয়েকটি তথ্যের ভিত্তিতে তাপগতিতত্ত্ব বিকাশ লাভ করেছে। এই তত্ত্বের সাধারণ সূত্রগুলি তত্ত্ব নিরপেক্ষ। তত্ত্বের বিভিন্ন পরিবর্তন বোঝার জন্য কতগুলি ভৌত রাশিমালার প্রয়োজন হয়, যারা মাপনযোগ্য। যেমন গ্যাসের ক্ষেত্রে চাপ, আয়তন ও উষ্ণতা। এই বিভাগের বৈশিষ্ট্যগুলি নিম্নরূপ :

- (ক) এই আলোচনায় পদার্থের গঠনের অঙ্গীকারের প্রয়োজন নেই।
- (খ) কয়েকটি ভৌত রাশিমালার সাহায্যে তত্ত্বের ব্যাখ্যা সম্ভব।
- (গ) সাধারণ অভিজ্ঞতালব্ধ প্রয়োগে এই তত্ত্বের প্রতিষ্ঠা সম্ভব।
- (ঘ) ভৌত রাশিমালাগুলি মাপনযোগ্য।

ইঞ্জিন, হিমায়ক ইত্যাদি যন্ত্রের তাপীয় শক্তির অন্যান্য শক্তিতে রূপান্তর বা অন্যান্য শক্তির তাপীয় শক্তিতে রূপান্তরের ঘটনাগুলি ব্যাখ্যা করতে তাপগতিতত্ত্বের সফল প্রয়োগ আপনারা এই এককগুলিতে লক্ষ্য করবেন।

তাপগতিবিদ্যা পড়তে গেলে যে তথ্যগুলি সম্বন্ধে প্রথমে জানা প্রয়োজন সেগুলি আমরা এই এককে আলোচনা করব। এরপর আপনারা অবস্থার সমীকরণ ব্যবহার করে বিভিন্ন যন্ত্রের তাপপ্রসারণ গুণাঙ্ক, আয়তন বিকৃতি গুণাঙ্ক, সংনম্যতা ইত্যাদির গাণিতিক রূপ নির্ণয় করতে শিখবেন।

(এখানে বলে রাখা দরকার যে তাপগতিতত্ত্বের সিদ্ধান্তগুলো কেবলমাত্র কোন বিশেষ তন্ত্রের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য নয়। যেখানেই শক্তির রূপান্তর ঘটে সেক্ষেত্রেই তাপগতিতত্ত্বের প্রয়োগ সম্ভব। সেই কারণে জৈব-রাসায়নিক বা ভূতাত্ত্বিক কোন তন্ত্রের শক্তি রূপান্তরের বিশ্লেষণের ক্ষেত্রেও তাপগতীয় সূত্রগুলি প্রয়োগ করা হয়)।

**উদ্দেশ্য :**

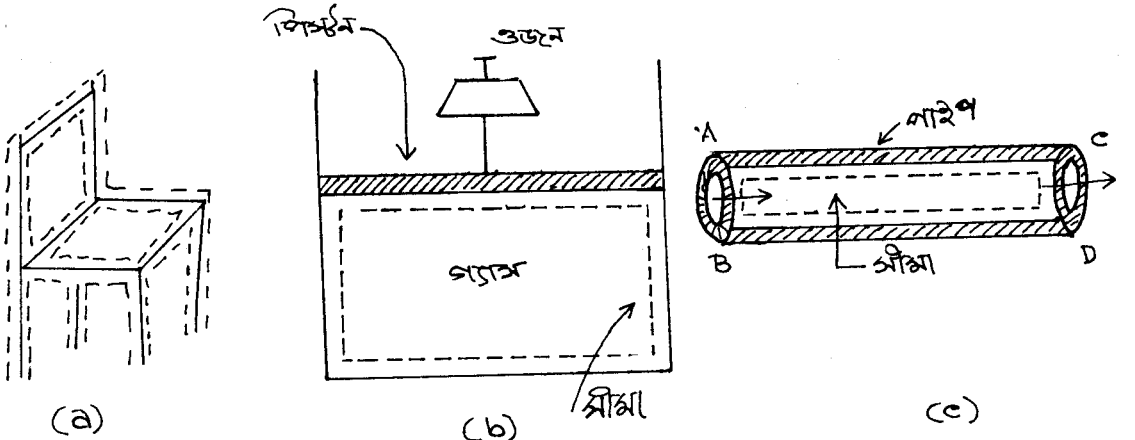
এই এককটি পড়লে আপনারা —

- বিভিন্ন তাপগতীয় তন্ত্র, তাদের সীমা এবং পারিপার্শ্বিক (surroundings) - কে চিনতে সক্ষম হবেন।
- তাপগতীয় চল কাকে বলে জানতে পারবেন এবং বিভিন্ন তন্ত্রের এই চলগুলি নির্ণয় করতে পারবেন।
- যান্ত্রিক সাম্য, রাসায়নিক সাম্য ও তাপীয় সাম্য কাকে বলে জানতে পারবেন।
- উৎক্রমণীয় ও অনুৎক্রমণীয় প্রক্রিয়ার মধ্যে পার্থক্য বুঝতে পারবেন।
- আপাতসাম্যীয় পরিবর্তনের প্রয়োজনীয়তা বুঝতে পারবেন।
- বিভিন্ন ধরনের তাপগতীয় তন্ত্র চিনতে সক্ষম হবেন।
- তাপগতিতত্ত্বের আদি সূত্রটি জেনে তার সাহায্যে উষ্ণতা কাকে বলে তার সম্বন্ধে ধারণা করতে পারবেন।
- যে কোন তন্ত্রের অবস্থার সমীকরণ ব্যবহার করে তাপগতিতত্ত্বের বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

## 1.2 তাপগতীয় তন্ত্র

তাপগতিবিদ্যার অন্তর্গত যে কোন বিষয়ের আলোচনা করতে গেলে প্রথমেই কোন বস্তুর থেকে কিছুটা অংশ অথবা কোনও স্থানের কিছুটা অংশকে চারিদিকের অন্যান্য বস্তু বা স্থান (যা ঐ অংশটির ওপর প্রভাব বিস্তার করতে পারে) থেকে স্বতন্ত্র হিসাবে গণ্য করা। এই অংশটিকে আমরা বলি 'তাপগতীয় তন্ত্র' অথবা শুধুই 'তন্ত্র'। প্রত্যেকটি তন্ত্র চারদিকে একটি স্বৈচ্ছিক (arbitrary) তল দিয়ে ঘেরা। এটিকে তন্ত্রের 'সীমা' বলা হয়। সাধারণ কোন বস্তুর সীমা বলতে আমরা যা বুঝি তন্ত্রের সীমা তার থেকে কিছু আলাদা। এই সীমা কিন্তু কাল্পনিক, স্থিতিশীল, গতিশীল অথবা আকার ও আয়তনে পরিবর্তনশীল হতে পারে।

'পারিপার্শ্বিক' বলতে আমরা তন্ত্রের সীমার বাইরে চারধারের তলকে বুঝি। যথার্থভাবে বলতে গেলে তন্ত্র বহির্ভূত সবই তার পারিপার্শ্বিক। কিন্তু তাপগতিবিদ্যাতে তন্ত্রের বাইরে যে অংশটুকু দ্বারা তন্ত্র প্রভাবিত হতে পারে তাকেই তন্ত্রের কার্যকরী পারিপার্শ্বিক বলা যায়। এরপরে আপনারা দেখবেন কিভাবে একটি তন্ত্র তার পারিপার্শ্বিকের দ্বারা প্রভাবিত হয়। তাপগতিবিদ্যা পাঠের প্রথম সোপান হল, কোন তন্ত্র, তার সীমা এবং পারিপার্শ্বিককে সনাক্তকরণ। আসুন আমরা চিত্রের সাহায্যে কয়েকটি বিভিন্ন ধরনের সীমাবিশিষ্ট তন্ত্রের উদাহরণ আলোচনা করি।



কয়েকটি তাপগতীয় তন্ত্র এবং তাদের সীমা

চিত্র নং—1.1

চিত্র নং—1.1 (a) তে চেয়ারকে যদি একটি তন্ত্র বলে মনে করি তাহলে চেয়ার ব্যতীত অন্যান্য সবই এর পারিপার্শ্বিকের অন্তর্গত। চেয়ারের সীমা বাস্তব এবং স্থির। সিলিন্ডারে পিষ্টন দ্বারা সংনমিত গ্যাস (চিত্র নং 1.1 (b)) আমাদের দ্বিতীয় তন্ত্র। এখানে সীমা বাস্তব কিন্তু স্থির নয়। কেননা পিষ্টনের অন্তর্ভাগ ও সিলিন্ডারের দেওয়াল গ্যাসীয় তন্ত্রের সীমার অন্তর্গত। এই পিষ্টনটিকে সরানো যায়। গ্যাস ব্যতীত পিষ্টনের বহির্ভাগ, সিলিন্ডারের বহির্ভাগ এবং বাকী সমস্তই পারিপার্শ্বিকের অন্তর্গত। তৃতীয় তন্ত্র - একটি নলের ভিতর দিয়ে প্রবাহিত তরল (চিত্র নং 1.1 (c))। নলের ভিতরের দেওয়াল দিয়ে তরল আবদ্ধ, কাজেই ভিতরের দেওয়ালকে আমরা তরলের সীমার অংশ বলতে পারি। কিন্তু নলের দুই দিকের মুখে তরল প্রবাহিত হচ্ছে। কাজেই সেখানে কোনও বাস্তব সীমা নেই। কিন্তু আমরা নলের দুই মুখ AB ও CD-র কাছে দুইটি সীমারেখা কল্পনা করে নিতে পারি। কাজেই এখানে সীমা কাল্পনিক। এই কাল্পনিক সীমা বহির্ভূত সবই তন্ত্রের পারিপার্শ্বিক।

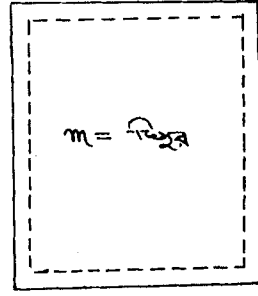
কোন নির্দিষ্ট ভরের রাসায়নিক বস্তু যদি অভিকর্ষজ, তড়িৎ ও চৌম্বক বলের দ্বারা প্রভাবিত না হয় তবে ঐ বস্তুকে রাসায়নিক তন্ত্র বলা হয়। রাসায়নিক তন্ত্র সকল সময় পারিপার্শ্বিক মাধ্যমের ওপর উদ্‌স্থিতিক চাপ (hydrostatic pressure) প্রয়োগ করে। রাসায়নিক তন্ত্রে যদি একটি মাত্র উপাদান (component) থাকে তবে তাকে বিশুদ্ধ রাসায়নিক তন্ত্র এবং অন্যথায় তাকে মিশ্রণ বলে। তন্ত্র একটি মাত্র দশা বা অবস্থায় থাকলে তাকে সমসত্ত্ব তন্ত্র বলে। যেমন — বাতাস : এটি  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $CO_2$  প্রভৃতি গ্যাসের সমসত্ত্ব মিশ্রণ, এরা সকলেই গ্যাসীয় অবস্থায় বিদ্যমান। অপরদিকে একটি বীকারে (beaker) বরফ ও জলের মিশ্রণ নিলে সেটি একটি অসমসত্ত্ব তন্ত্র। কারণ এখানে বরফ একটি কঠিন পদার্থ এবং জল তরল পদার্থ।

একটি তন্ত্র তার পারিপার্শ্বিকের সাথে কিভাবে ক্রিয়া করে তার ওপর ভিত্তি করে তন্ত্রগুলিকে বিভিন্ন নাম দেওয়া হয়। তাপগতিবিদ্যা পড়তে গেলে এই বিভিন্ন ভাগগুলি জানা বেশী প্রয়োজনীয়। এবার আমরা তাহলে সেই ভাগগুলি সম্বন্ধে জানার চেষ্টা করি।

### 1.2.1 তন্ত্রের শ্রেণীবিভাগ

আবদ্ধতন্ত্র — এই তন্ত্র নির্দিষ্ট ভরের বস্তু দিয়ে তৈরী। পারিপার্শ্বিকের সঙ্গে এই তন্ত্রের বস্তুর আদান-প্রদান সম্ভব নয় কিন্তু শক্তির আদান-প্রদান সম্ভব। তবে এই তন্ত্রের আয়তন স্থির নাও থাকতে পারে। চিত্রে আবদ্ধ তন্ত্রের একটি উদাহরণ দেখতে পাচ্ছেন। এটি পিষ্টন দ্বারা আবদ্ধ একটি সিলিন্ডার ভর্তি গ্যাস। এখানে গ্যাসের ভর স্থির। কিন্তু পারিপার্শ্বিকের সঙ্গে শক্তির আদান-প্রদান সম্ভব।

**মুক্ততন্ত্র** — এই তন্ত্রের আয়তন স্থির। কিন্তু এই তন্ত্রের সঙ্গে পারিপার্শ্বিকের ভর এবং শক্তির আদান-প্রদান ঘটতে পারে। একটি উদাহরণ দিলে বোধহয় আপনাদের কাছে বক্তব্যটি পরিষ্কার হবে। একটি জলের হিটারের (Geyser) কথা ধরা যাক। এখানে সবসময় গরম জল পাওয়ার জন্য ট্যাঙ্কে জল গরম করা হয় এবং এই গরম জল পাইপের সাহায্যে বার হয়ে যাওয়ার সঙ্গে সঙ্গেই ঠান্ডা জল অন্য পাইপ দিয়ে ট্যাঙ্কে প্রবেশ করে। কাজেই তন্ত্রের (জলের) ভর কখনই স্থির থাকবে না। তবে যেটি স্থির থাকবে সেটি হল তন্ত্রের আয়তন (ট্যাঙ্কের ভিতরের আয়তন)।



ওয়েব  
আদান-  
প্রদান  
সম্ভব নয়।

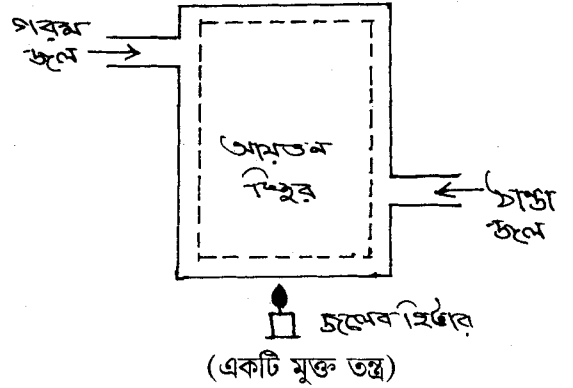
শক্তির আদান-  
প্রদান সম্ভব

(একটি বদ্ধ তন্ত্র)

চিত্র 1.2

**বিচ্ছিন্ন তন্ত্র** — এই তন্ত্রের সঙ্গে পারিপার্শ্বিকের কোন শক্তির আদান-প্রদান ঘটতে পারে না। থার্মোস্ট্যাট ভর্তি চা বিচ্ছিন্ন তন্ত্রের একটি উদাহরণ।

আপনারা নিশ্চয়ই লক্ষ করেছেন যে বিভিন্ন প্রকার তন্ত্রের শ্রেণীবিভাগে তন্ত্রের সীমা একটি বড় ভূমিকা গ্রহণ করে। অতএব আমাদের পরবর্তী কাজ — সীমার শ্রেণীবিভাগ।



(একটি মুক্ত তন্ত্র)

চিত্র 1.3

### 1.2.2 সীমার শ্রেণীবিভাগ

(i) তাপভেদ্য সীমা — কোন তন্ত্রের সীমা যদি এরূপ হয় যে তার ভিতর দিয়ে তন্ত্র পারিপার্শ্বিকের সহিত তাপের আদান-প্রদান করতে পারে তাহলে আমরা সেই সীমাকে তাপভেদ্য অথবা তাপ-পরিবাহী সীমা বলি। ধাতুনির্মিত চায়ের পটে ভিতরের তল চায়ের কাছে তাপভেদ্য সীমার কাজ করে।



(ii) রুদ্ধতাপ সীমা — তন্ত্রের যে সীমা বাইরের পারিপার্শ্বিকের সঙ্গে কোন তাপের আদান-প্রদান করতে দেয়না অর্থাৎ যে সীমার মধ্যে অবস্থিত তন্ত্র পারিপার্শ্বিক থেকে অন্তরিত অবস্থায় থাকে সেই ধরণের সীমাকে রুদ্ধতাপ সীমা বলে।

(iii) দৃঢ়সীমা (Rigid boundary) — বাইরের থেকে যত বড় হোক না কেন যেকোন প্রকার বল প্রয়োগ করে এই ধরনের সীমার পরিবর্তন ঘটানো যায়না। যে তন্ত্রের সীমা দৃঢ়, সেই তন্ত্রের বৃদ্ধি বা সংকোচন ঘটানো সম্ভব নয়। আদর্শ দৃঢ়সীমা প্রকৃতিতে পাওয়া যায়না। একটি খুব ভারী ধাতুনির্মিত গোলাকৃতি বলের উপরিতলকে দৃঢ়সীমার উদাহরণ হিসাবে ধরা যেতে পারে।

(iv) ভেদ্য (পারগম্য) সীমা (Permeable boundary) — এই ধরনের সীমার ভিতর দিয়ে বস্তুর আদান-প্রদান সম্ভব।

(v) অর্ধভেদ্য সীমা (Semi-permeable boundary) — এই সীমার ভিতর দিয়ে বিশেষ কিছু উপাদানের আদান-প্রদান সম্ভব কিন্তু অন্য উপাদানগুলি যেতে পারেনা। যথা — গরম কোয়ার্টজের ভিতর দিয়ে হিলিয়াম গ্যাস যেতে পারে কিন্তু অন্য কোন গ্যাস নয়।

আপনারা এতক্ষণ বিভিন্ন ধরনের তন্ত্র এবং তার পারিপার্শ্বিকের সম্বন্ধে জানলেন। বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করার সময় আমাদের সমস্যাটির ধরন দেখে তন্ত্র এবং তার পারিপার্শ্বিককে চিহ্নিত করতে হবে। যেমন — একটি রেফ্রিজারেটর (refrigerator) বা হিমায়কের দক্ষতা নির্ণয় করার সময় আমরা হিমায়ককে তন্ত্র, হিমায়কের দেওয়ালকে সীমা এবং যে ঘরে এটি আছে তাকে তার পারিপার্শ্বিক হিসাবে গণ্য করব। কিন্তু যদি একই ঘরে অবস্থিত বাতানুকূল যন্ত্রের (air conditioner) দক্ষতার কথা ভাবি সেক্ষেত্রে ঘরকে তন্ত্র, ঘরের দেওয়াল ছাদ ইত্যাদিকে তার সীমা এবং ঘরের বাইরে অন্যান্য ঘর-বারান্দা ইত্যাদিকে পারিপার্শ্বিক হিসাবে গণ্য করতে হবে।

আপনারা নিশ্চয় এখন সমস্যা অনুযায়ী তন্ত্রকে চিহ্নিত করতে পারবেন। এবার পরবর্তী পর্যায়ে আমরা তন্ত্রের যথাযথ বর্ণনার জন্য কিছু রূপের আলোচনা করব।

---

### 1.3 তন্ত্রের তাপগতীয় অবস্থা এবং তাপগতীয় চল

---

তাপগতীয় তন্ত্রের তাপগ্রহণ এবং বর্জনের ক্ষমতা থাকে। তাপগ্রহণ কিংবা বর্জনের সময় তন্ত্র নিজে কার্য করতে পারে অথবা বাইরে থেকে তন্ত্রের ওপর কার্য করা যায়। এছাড়াও কোন প্রকার কার্য ব্যতীত তাপগতীয় তন্ত্র পারিপার্শ্বিক মাধ্যমের সঙ্গে কেবলমাত্র তাপ বিনিময় করতে পারে।

তাপগতিতত্ত্বে মাপনযোগ্য কয়েকটি ভৌত রাশির (তাপগতীয়তত্ত্বের ভৌতধর্ম) সাহায্যে তত্ত্বের বর্ণনা দেওয়া হয়। এগুলিকে তত্ত্বের স্থিতিমাপ (Parameters) অথবা তাপগতীয় চল (Thermodynamic variables) বলে। তাপ বিনিময়ের অথবা কার্য করার ফলে তত্ত্বের তাপগতীয় চলের পরিবর্তন হয়। সংজ্ঞা হিসাবে বলা যায় যে সকল রাশিমালা তত্ত্বের আভ্যন্তরীণ ধর্মের ওপর নির্ভরশীল তাদেরকে তাপগতীয় চল বলা হয়। তাপগতীয় চলগুলির মধ্যে কয়েকটি তত্ত্বের নিজস্ব ধর্ম — যেমন একটি গ্যাসের ক্ষেত্রে চাপ  $p$  এবং আয়তন  $v$ , পৃষ্ঠসরের (surface film) ক্ষেত্রে পৃষ্ঠটান (surface tension)  $S$  ও সরের ক্ষেত্রফল  $A$  এবং টানা তারের ক্ষেত্রে তারের দৈর্ঘ্য  $L$  এবং তারের টান  $T$ । কয়েকটি চল তত্ত্ব নিরপেক্ষ, যেমন — উষ্ণতা, আন্তরশক্তি, এনট্রপি (আন্তরশক্তি ও এনট্রপি সম্বন্ধে পরের এককগুলিতে বিস্তারিত জানতে পারবেন।) তত্ত্ব বিশেষের নিজস্ব ধর্ম নয়। এই সকল রাশিমালাই তত্ত্বের আভ্যন্তরীণ গঠনের ওপর নির্ভরশীল।

আপনারা নিশ্চয়ই লক্ষ্য করে থাকবেন যে স্থিতিমাপ অথবা চলের সংজ্ঞা দেওয়ার সময় তত্ত্বের আভ্যন্তরীণ অনুপ্রকৃতি সম্বন্ধে কোন উল্লেখ করা হয়নি। তাপগতীয় চল তত্ত্বের একটি চাক্ষুষ বা বাহ্যিক ধর্ম (macroscopic property) মাত্র। তাপগতীয় চলের বিশেষত্ব এই যে এক অবস্থা থেকে অন্য অবস্থায় গেলে তত্ত্বের তাপগতীয় চলের পরিবর্তন কেবলমাত্র তত্ত্বের আদি ও অন্তিম অবস্থার ওপর নির্ভর করে। বিভিন্ন উপায়ে এক অবস্থা থেকে অন্য অবস্থায় তত্ত্বের পরিবর্তন ঘটানো যায় কিন্তু সেক্ষেত্রে চলের পরিবর্তন একই হবে। এই কারণে অবস্থার পরিবর্তনে স্থিতিমাপের (চলের) পরিবর্তন (যেমন —  $dp, dv, d\theta$  ইত্যাদি) যথার্থ বা সম্পূর্ণ অবকল (perfect differential)। এই সম্বন্ধে পরের এককে আপনারা বিশদভাবে জানতে পারবেন।

### 1.3.1 সংকীর্ণ চল ও ব্যাপক চল

তত্ত্বের তাপগতীয় চলগুলিকে মোটামুটি দুটি শ্রেণীতে ভাগ করা যায়। চাপ, উষ্ণতা ইত্যাদি চলগুলি কোনমতেই তত্ত্বের ভরের ওপর নির্ভর করেনা। এক বা একাধিক দেওয়াল দিয়ে তত্ত্বকে কয়েকটি ভাগে বিভক্ত করলে প্রত্যেক ভাগের জন্য এই চলগুলির মান অপরিবর্তিত থাকে। এগুলি তত্ত্বের সংকীর্ণ চল (intensive parameters)। আবার একটি তত্ত্বের আয়তন, ভর ইত্যাদি চলগুলির মান দেওয়াল দিয়ে বিভক্ত খন্ডিত তত্ত্বের একটি অংশের আয়তন, ভরের মানের থেকে অনেক বেশী। অন্যভাবে বলা যায় যে বিভিন্ন অংশের এই চলগুলির মানের সমষ্টি করলে সমগ্র তত্ত্বের চলের মানের সমান হবে। এদের তত্ত্বের ব্যাপক চল (extensive parameters) বলা হয়। তত্ত্বের ভর  $m$  গুণ বৃদ্ধি করলে এই চলগুলির মান  $m$  গুণ বেড়ে যাবে।

1. (a)  $x$  ও  $y$  দুইটি ব্যাপক চল হলে  $\left(\frac{x}{y}\right)$  একটি সংকীর্ণ চল হবে — উদাহরণ দিয়ে এই বক্তব্যের সত্যতা প্রমাণ করুন।
- (b) ‘সাইকেলের পাম্পের মধ্যে অবস্থিত হাওয়া’ — এই তন্ত্রটির বর্ণনা কোন তাপগতীয় চলের সাহায্যে দেওয়া যাবে?

কোনও কোনও সময় তন্ত্রের কিছু কিছু ভৌতধর্মের মান জানা থাকলে তন্ত্রের প্রকৃতি সম্বন্ধে সম্পূর্ণ জ্ঞানলাভ করা যায়। একটি গ্যাসীয় তন্ত্রের উদাহরণ আলোচনা করলে আপনাদের কাছে বক্তব্য স্পষ্ট হবে। ধরা যাক গ্যাসের চাপ  $p$ , আয়তন  $v$  এবং গ্রাম অণুর সংখ্যা  $n$  আমাদের জানা আছে। এখন আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ —

$$pv = nRT \quad \dots (1.1)$$

ব্যবহার করে আমরা এই তন্ত্রের তাপমাত্রা  $T$  - এর মান জানতে পারব। উপরের সমীকরণকে আমরা বলতে পারি আদর্শ গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ। সাধারণভাবে কোন গ্যাসের অবস্থার সমীকরণকে লেখা যায়  $f(pvT) = 0$

এই সমীকরণটি তখনই কার্যকরী হয় যখন তন্ত্রটি সাম্যাবস্থায় আসে। এই সাম্যাবস্থাকে বলা হয় তাপগতীয় সাম্যাবস্থা। পরের অংশে তাপগতীয় সাম্য বলতে কি বোঝায় সে সম্বন্ধে আপনারা জানতে পারবেন।

### 1.3.2 তাপগতীয় সাম্য (Thermodynamic Equilibrium)

মনে করা যাক একটি পাত্রে  $60^\circ\text{C}$  উষ্ণতায় কিছু পরিমাণ জল আছে। এই অবস্থায় পাত্রটি কিছুক্ষণ থাকলে জল ধীরে ধীরে পারিপার্শ্বিকের সঙ্গে তাপ বিনিময় করে ঠান্ডা হতে থাকবে। যখন জলের তাপমাত্রা পারিপার্শ্বিকের তাপমাত্রার সমান হয়ে যাবে তখন আর তার তাপের কোনও পরিবর্তন হবেনা। এমত অবস্থায় আমরা বলতে পারি যে পাত্রের জল পারিপার্শ্বিক মাধ্যমের সঙ্গে তাপীয় সাম্যে (Thermal Equilibrium) আছে।

আবার যদি কোন তন্ত্রের বিভিন্ন অংশের মধ্যে চাপ বা স্থিতিস্থাপক বলের তারতম্য ঘটে তাহলে তন্ত্রের এক অংশ থেকে বস্তু অন্য অংশে চালিত হয় অথবা সামগ্রিকভাবে তন্ত্রের ক্ষেত্রফল, আয়তন ইত্যাদি চলের পরিবর্তন হয়। পরিশেষে এই পরিবর্তন তখনই বন্ধ হয় যখন তন্ত্রের বিভিন্ন অংশের মধ্যে অথবা তন্ত্র ও পারিপার্শ্বিকের মধ্যে অসম বল আর কাজ করেনা। এই অবস্থায় তন্ত্র যান্ত্রিক সাম্যে (Mechanical

Equilibrium) আছে। উদাহরণস্বরূপ মনে করা যাক পিস্টনের সাহায্যে একটি স্তম্ভকের ভিতর কিছু পরিমাণ গ্যাস আটকানো আছে। গ্যাসের চাপ পিস্টনের ওপর প্রযুক্ত চাপের সমান। ফলে পিস্টনটি স্থির থাকবে। এ অবস্থায় গ্যাস যান্ত্রিক সাম্যে আছে বলা যায়। পিস্টনের ওপর ভর বাড়ালে গ্যাস ও পারিপার্শ্বিকের মধ্যে অসম বলের সৃষ্টি হয়। গ্যাসের চাপ এই অবস্থায় পিস্টনের ওপর প্রযুক্ত চাপের সমান হয়ে যান্ত্রিক সাম্য প্রতিষ্ঠিত না হওয়া পর্যন্ত গ্যাসের আয়তন হ্রাস পায়।

পরিশেষে এমন একটি তন্ত্রের কথা কল্পনা করা যাক যার বিভিন্ন অংশের মধ্যে রাসায়নিক বিক্রিয়া, দ্রবণ, ব্যাপন (diffusion) ইত্যাদি প্রক্রিয়া হতে পারে। পর্যাপ্ত সময় বাদে যখন সমস্ত বিক্রিয়া শেষ হয়ে গেছে তখন তন্ত্রের আর কোনও রাসায়নিক পরিবর্তন হয়না এবং তখন তন্ত্র রাসায়নিক সাম্যে (Chemical Equilibrium) আছে বলা যায়।

তন্ত্র একই সময়ে যান্ত্রিক, রাসায়নিক ও তাপীয় সাম্যে থাকলে তবেই তার তাপগতীয় চল অপরিবর্তিত থাকে। এই অবস্থাকে তন্ত্রের তাপগতীয় সাম্যাবস্থা বলে।

আপনারা সাম্যাবস্থা কাকে বলে জানতে পারলেন। এবার আমরা এক সাম্যাবস্থা থেকে আর এক সাম্যাবস্থায় পৌঁছানোর বিভিন্ন উপায়গুলি সম্বন্ধে আলোচনা করব।

(অতঃপর ‘তাপগতীয় সাম্যাবস্থা’র স্থানে আমরা ‘সাম্যাবস্থা’ লিখব)

---

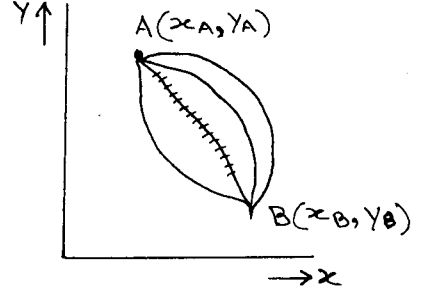
## 1.4 তাপগতীয় প্রক্রিয়া

---

একটি তন্ত্রের এক সাম্যাবস্থা থেকে অন্য সাম্যাবস্থায় পরিবর্তনের সময় যদি তন্ত্রের চলগুলির পরিবর্তন ঘটে তবে তন্ত্রটি একটি তাপগতীয় প্রক্রিয়া সম্পাদন করেছে বলা হয়। এই প্রক্রিয়ার ফলে তন্ত্রটি একটি প্রারম্ভিক সাম্যাবস্থা থেকে আর একটি অন্তিম সাম্যাবস্থায় উপনীত হয়। যেমন স্থির চাপে একটি নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসে তাপ প্রদান করলে গ্যাসের যে আয়তন বৃদ্ধি হয় সেটি একটি তাপগতীয় প্রক্রিয়া। একটি তারকে দুটি খুঁটির মধ্যে টান করে আবদ্ধ রাখা আছে। এই তারটিকে ঠাণ্ডা করলে এর দৈর্ঘ্য হ্রাস পাবে। কিন্তু দুই দিক আবদ্ধ থাকায় তারটির দৈর্ঘ্য কমতে পারবে না, কাজেই দৈর্ঘ্য ঠিক রাখার জন্য তারটির মধ্যের টান আরও বৃদ্ধি পাবে। এটিও একটি তাপগতীয় প্রক্রিয়া।

পরবর্তী এককগুলিতে আমরা তাপগতীয় প্রক্রিয়াকে বিস্তারিত ভাবে অধ্যয়ন করার চেষ্টা করব। সেজন্য প্রথমেই প্রয়োজন তাপগতীয় প্রক্রিয়াকে সূচক চিত্র দ্বারা উপস্থাপিত করতে শেখা। মনে করা যাক একটি

তন্ত্রকে  $x$  এবং  $y$  এই দুইটি চল দ্বারা প্রকাশ করা যায়। চিত্র 1.4 তে  $x$  চলের মান  $x$  অক্ষ বরাবর এবং  $y$  চলের মান  $y$  অক্ষ বরাবর প্রকাশ করা হয়েছে। প্রক্রিয়ার প্রারম্ভিক সাম্যাবস্থা নির্দেশিত হচ্ছে  $A$  বিন্দু দিয়ে, যার স্থানাঙ্ক  $x_A, y_A$  এবং অন্তিম সাম্যাবস্থা নির্দেশিত হচ্ছে  $B$  বিন্দু দিয়ে, যার স্থানাঙ্ক  $x_B, y_B$ । এই প্রারম্ভিক সাম্যাবস্থা এবং অন্তিম সাম্যাবস্থার মধ্যে কোন প্রক্রিয়াকে আমরা এই চিত্রে  $A$  এবং  $B$  - র মধ্যে অঙ্কিত একটি রেখা দ্বারা প্রকাশ করতে পারি। এই রেখাটিকে বলা যায় একটি পথ। আপনারা নিশ্চয়ই লক্ষ্য করে থাকবেন যে  $A$  এবং  $B$  কে অসংখ্য উপায়ে যুক্ত করা যায়। কিন্তু  $A$  থেকে  $B$  তে পৌঁছানোর সম্ভাব্য প্রকৃত পথ নির্ণয় করতে হলে আমাদের প্রত্যেকটি অন্তর্বর্তী বিন্দুর স্থানাঙ্ক জানা প্রয়োজন। এটি তখনই সম্ভব যখন প্রত্যেকটি অন্তর্বর্তী বিন্দু একটি সাম্যাবস্থা নির্দেশ করে। কিন্তু বাস্তবে কি তা সম্ভব? সেটি দেখতে গেলে বিভিন্ন প্রকার তাপগতীয় প্রক্রিয়ার কথা আলোচনা করা প্রয়োজন।



চিত্র 1.4

### 1.4.1 আপাতসাম্যীয় প্রক্রিয়া (Quasistatic Process)

তন্ত্রের সাম্যাবস্থা কাকে বলে আমাদের জানা হয়ে গেছে। দুটি সাম্যাবস্থার মধ্যে পরিবর্তনের সময় তন্ত্র সাধারণতঃ সাম্যাবস্থায় থাকে না। প্রারম্ভিক সাম্যাবস্থা থেকে অন্তিম সাম্যাবস্থায় পৌঁছানোর সময় তন্ত্র যদি খুব ধীরে ধীরে এমনভাবে অগ্রসর হয় যে, অন্তর্বর্তী প্রত্যেকটি অবস্থাকেই তন্ত্রের সাম্যাবস্থা বলা যায় তবে ঐ পরিবর্তনকে আপাত - সাম্যীয় পরিবর্তন এবং প্রক্রিয়াটিকে আপাত-সাম্যীয় প্রক্রিয়া বলা হয়। মনে রাখা দরকার যে ধীরে পরিবর্তন মানেই আপাত-সাম্যীয় পরিবর্তন নয়। এমন হতে পারে যে পরিবর্তন শুরু হওয়ার পর শেষ না হওয়া পর্যন্ত অন্তর্বর্তী সময়ে তন্ত্রে কখনই সাম্যাবস্থার সৃষ্টি হয় না; কিন্তু তৎসত্ত্বেও পরিবর্তন খুব ধীরে হয়। অন্তর্বর্তী সময়ে অসংখ্যবার সাম্যাবস্থার সৃষ্টি না হলে সেই পরিবর্তনকে আপাত-সাম্যীয় পরিবর্তন বলা যায় না, এবং সেই প্রক্রিয়া একটি আপাত-সাম্যীয় প্রক্রিয়া নয়।

একটি উদাহরণ দিলে উপরের উক্তিটি স্পষ্ট হবে। মনে করা যাক আমরা একটি তন্ত্রের তাপমাত্রা  $T_1$  থেকে  $T_2$  তে বৃদ্ধি করতে চাই। সেজন্য আমরা  $T_1$  তাপমাত্রায় তন্ত্রকে একটি তাপভেদ্য সীমা দ্বারা আবদ্ধ করলাম এবং পারিপার্শ্বিকের তাপমাত্রা  $T_2$  তে রাখলাম। কিন্তু এখানে তন্ত্র ও পারিপার্শ্বিকের তাপের আদান-প্রদানের ফলে যে প্রক্রিয়াটি অনুষ্ঠিত হবে সেটি আপাত-সাম্যীয় নয়। কারণ তন্ত্রের সীমার কাছাকাছি

অংশগুলির তাপমাত্রা তন্ত্রের ভিতরের অংশের অপেক্ষা অনেক দ্রুত বৃদ্ধি পাবে। আপাত-সাম্যীয় প্রক্রিয়ায় তাপমাত্রার পরিবর্তন ঘটাতে হলে প্রথমে তন্ত্রের পারিপার্শ্বিক অংশের তাপমাত্রার মানও  $T_1$  রাখতে হবে। তারপর পারিপার্শ্বিকের তাপমাত্রা ধীরে ধীরে খুব অল্পমাত্রায় বাড়াতে হবে যাতে যে কোন মুহূর্তে তন্ত্রের এবং পারিপার্শ্বিকের তাপমাত্রার পার্থক্য খুবই কম (অণু পরিমাণ) হয়। এইভাবে পারিপার্শ্বিকের তাপমাত্রা ধীরে ধীরে  $T_2$  তে নিয়ে গেলে তন্ত্রের তাপমাত্রাও  $T_2$  তে পৌঁছাবে।

প্রকৃতিতে সংঘটিত প্রক্রিয়াগুলির কেহই আপাত-সাম্যীয় নয় কেননা প্রক্রিয়াগুলি চলাকালে তন্ত্রের বিভিন্ন অংশের মধ্যে তাপমাত্রা চাপ ইত্যাদির পার্থক্য অণুপরিমাণ নয়, সসীম।

---

### 1.4.2 উৎক্রমণীয় ও অনুৎক্রমণীয় প্রক্রিয়া (Reversible and irreversible process)

---

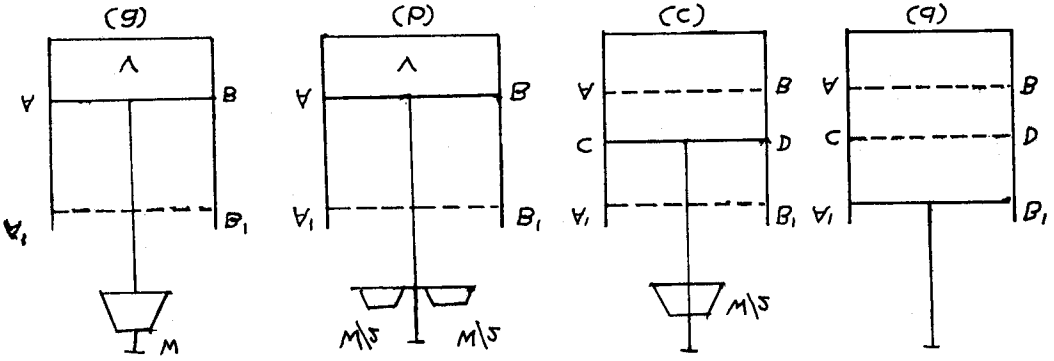
যে সকল আপাত - সাম্যীয় প্রক্রিয়ায় তন্ত্রকে একটি সাম্যাবস্থা থেকে অন্য সাম্যাবস্থায় পৌঁছাবার পর অন্য পথে বা সেই পথের বিপরীতমুখী প্রক্রিয়ার দ্বারা, তন্ত্র ও পারিপার্শ্বিক মাধ্যমের কোন পরিবর্তন না করে, তন্ত্রকে যদি আবার প্রাথমিক অবস্থায় নিয়ে আসা যায় তাদেরকে উৎক্রমণীয় প্রক্রিয়া বলে। আপাত-সাম্যীয় প্রক্রিয়ার সময়ে তন্ত্রে যদি ঘর্ষণ, সান্দ্রতা, স্থিতিস্থাপকতার অভাব, রোধ, চৌম্বক-শৈথিল্য (magnetic hysteresis) ইত্যাদি শক্তিক্ষয়ী কারণ না থাকে তবেই উৎক্রমণীয় প্রক্রিয়া পাওয়া সম্ভব। উৎক্রমণীয় পরিবর্তন মাত্রেই আপাত-সাম্যীয় পরিবর্তন কিন্তু সব আপাত-সাম্যীয় পরিবর্তন উৎক্রমণীয় নয়।

উৎক্রমণীয় পদ্ধতিতে এক সাম্যাবস্থা থেকে অন্য সাম্যাবস্থায় যাওয়ার সময় তন্ত্রের অন্তর্ভুক্ত সাম্যাবস্থা নির্দিষ্ট ভাবে জানা থাকে। এই কারণে উৎক্রমণীয় প্রক্রিয়াকে সূচক চিত্র দ্বারা প্রকাশ করা যায়। উৎক্রমণীয় পরিবর্তনের সময় তন্ত্র যে পথে অগ্রসর হয় তাকে উৎক্রমণীয় পথ বলে। উৎক্রমণীয় পথে প্রত্যেকটি বিন্দু তন্ত্রের অন্তর্ভুক্ত সাম্যাবস্থা নির্দেশ করে। প্রয়োজনে এই পথে তন্ত্রকে পূর্বের অবস্থায় ফিরে নিয়ে আসা সম্ভব। এখানে বলা দরকার যে নির্দিষ্ট উৎক্রমণীয় পথে পরিবর্তনের পর তন্ত্র যখন একই পথে পূর্বের অবস্থায় ফিরে আসে তখন পৃথকভাবে প্রতিটি পর্যায়ে তন্ত্র ও তার পারিপার্শ্বিক মাধ্যমের পরিবর্তন পূর্ব পরিবর্তনের সমান এবং বিপরীত হবে।

তন্ত্র এক সাম্যাবস্থা থেকে অন্য সাম্যাবস্থায় পৌঁছানোর পরে মাধ্যমের কোন পরিবর্তন না করে কোনক্রমেই যদি তাকে প্রারম্ভিক অবস্থায় ফিরিয়ে আনা সম্ভব না হয় তবে সেই প্রক্রিয়াকে অনুৎক্রমণীয় প্রক্রিয়া বলা হয়।

এখন একটি উদাহরণ আলোচনা করা যাক এবং দেখা যাক প্রকৃতপক্ষে একটি উৎক্রমণীয় প্রক্রিয়া ঘটানো সম্ভব কিনা।

মনে করা যাক একটি স্তম্ভকের ভিতর কিছু পরিমাণ গ্যাস একটি পিস্টন দিয়ে আটকানো আছে ও পিস্টনের ওপর  $w$  ওজন দেওয়া আছে। এই অবস্থায় গ্যাসের আয়তন  $v$  (চিত্র 1.5a)। এইবার



চিত্র 1.5

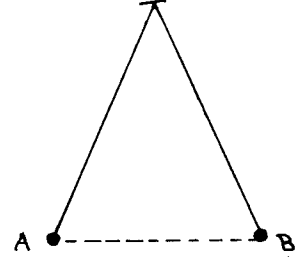
$w$  ওজনকে সরিয়ে দিলে গ্যাসের প্রসারণ ঘটে এবং তার আয়তন হয়  $2v$  ( $A'B'$  অবস্থা চিত্র 1.5a)। এই প্রসারণ প্রক্রিয়াটি কিন্তু অনুক্রমণীয়। কারণ  $w$  ওজন সরানোর সঙ্গে সঙ্গেই গ্যাস প্রসারিত হয়। অর্থাৎ প্রক্রিয়াটি খুব দ্রুত।

একটি ওজন  $w$ - এর পরিবর্তে যদি আমরা দুটি  $w/2$  (চিত্র 1.5b) ওজন নিই এবং প্রথমবার  $w/2$  ওজন তুলে নিই তাহলে পিস্টনটি  $AB$  এবং  $A'B'$  এর মাঝামাঝি  $CD$  অবস্থায় উঠে আসবে। (চিত্র 1.5c) এবং এর পর আর একটি  $w/2$  ওজন তুলে নিলে পিস্টনটির অন্তিম অবস্থান হবে  $A'B'$  (চিত্র 1.5d)। কাজেই এক্ষেত্রে আমরা প্রাথমিক এবং অন্তিম অবস্থার মধ্যে একটি সাম্যাবস্থা পাব।

অনুরূপভাবে একটি  $w$  ওজনের পরিবর্তে তিনটি  $w/3$  ওজন ব্যবহার করে গ্যাসের প্রসারণ ঘটালে আমরা দুটি মধ্যবর্তী সাম্যাবস্থা পাবো। সুতরাং আমরা যদি  $w/n$  মানের  $n$  টি ওজন ব্যবহার করি তাহলে মধ্যবর্তী সাম্যাবস্থার সংখ্যা হবে  $(n-1)$ । কিন্তু পুরো প্রক্রিয়াটিকে উৎক্রমণীয় হতে হলে প্রত্যেকটি অন্তর্বর্তী অবস্থাকে সাম্যাবস্থা হতে হবে। এটি তখনই সম্ভব যখন  $n$  - এর মান হয় অসীম। কিন্তু বাস্তব ক্ষেত্রে এটি অসম্ভব। এথেকেই বুঝতে পারছেন যে উৎক্রমণীয় একটি আদর্শ প্রক্রিয়া যেটি বাস্তবে ঘটানো সম্ভব নয়।

আমাদের আগের আলোচনা থেকেই আপনারা দেখেছেন যে কোন পরিবর্তনের পরে একটি তন্ত্রকে উৎক্রমণীয় অথবা অনুৎক্রমণীয় যে কোন প্রক্রিয়ার দ্বারা তার প্রাথমিক অবস্থায় ফিরিয়ে নিয়ে আসা যায়।

দুটি প্রক্রিয়ার মধ্যে পার্থক্য এই যে উৎক্রমণীয় প্রক্রিয়ায় পারিপার্শ্বিকের কোন পরিবর্তন ঘটে না কিন্তু অনুৎক্রমণীয় প্রক্রিয়ায় পারিপার্শ্বিকের কিছু পরিবর্তন ঘটে। খুব সহজ একটি উদাহরণের সাহায্য নেওয়া যাক। একটি পেডুলাম দোলককে A বিন্দুতে নিয়ে গিয়ে দুলিয়ে দেওয়া হল। সে অপর প্রান্ত B-তে গিয়ে আবার A -তে ফিরে এলো। আপাতদৃষ্টিতে পেডুলাম দোলকটি তার প্রারম্ভিক অবস্থায় ফিরে এলেও চারিদিকের বায়ু মাধ্যমের সঙ্গে দোলকটির ঘর্ষণের ফলে পারিপার্শ্বিকের তাপমাত্রা বৃদ্ধি পাবে। কাজেই এই প্রক্রিয়াটি অনুৎক্রমণীয়। পেডুলামটি যদি সম্পূর্ণ বায়ুহীন পরিবেশে রাখা যেত তাহলে প্রক্রিয়াটিকে উৎক্রমণীয় বলা যেত, কেননা তখন পারিপার্শ্বিকের কোন তাপমাত্রার পরিবর্তন ঘটত না। কিন্তু সম্পূর্ণ বায়ুহীন পরিবেশ সৃষ্টি করা প্রায় অসম্ভব। কাজে কাজেই উৎক্রমণীয় প্রক্রিয়া বাস্তবে সম্ভব নয়। অতএব সমস্ত প্রাকৃতিক প্রক্রিয়াই অনুৎক্রমণীয়।



(একটি দোলক)

চিত্র 1.6

উৎক্রমণীয় এবং অনুৎক্রমণীয় প্রক্রিয়া সম্বন্ধে ধারণা আরও স্পষ্ট করার জন্য নীচের অনুশীলনীগুলির সমাধান করার চেষ্টা করুন।

## প্রশ্নাবলি — 2

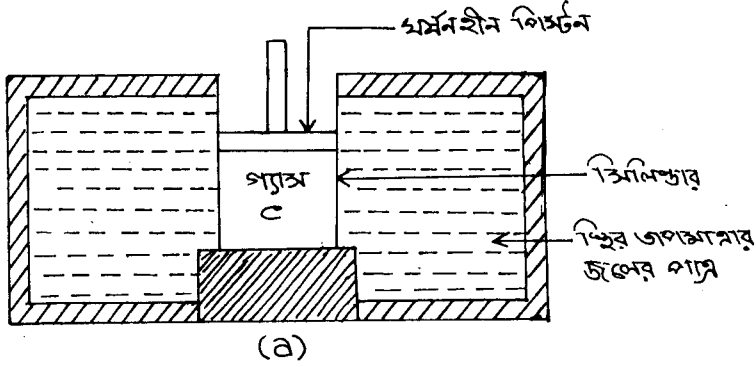
নীচের প্রক্রিয়াগুলির কোনটি উৎক্রমণীয় এবং কোনটি অনুৎক্রমণীয়?

- (a) (i) ঘর্ষণহীন পিস্টন দিয়ে একটি সিলিন্ডারে আবদ্ধ গ্যাসকে দ্রুত চাপ দেওয়া হল।  
(ii) দুধে চিনি মেশানো হল।  
(iii) ঘর্ষণহীন দণ্ড থেকে আলম্বিত একটি আদর্শ পেডুলামের দোলন।
- (b) অনুৎক্রমণীয় প্রক্রিয়ায় শক্তির ব্যয় হয় — উদাহরণ সহকারে এই উক্তিটির ব্যাখ্যা করুন।

## 1.4.3 সূচক চিত্রের সাহায্যে প্রক্রিয়ার প্রদর্শন

আপনারা এতক্ষণে নিশ্চয়ই জেনে গেছেন যে কোনও আপাত সাম্যীয় প্রক্রিয়ার বিভিন্ন স্তর হচ্ছে এক একটি সাম্যীয় অবস্থা। (1.4) চিত্রে লক্ষ্য করবেন যে সাম্যীয় অবস্থাগুলি xy তলে পরপর কতকগুলি বিন্দু দিয়ে লেখা হয় (এখানে x এবং y দুটি তাপগতীয় চল এবং সাধারণতঃ x ব্যাপক চল ও y সংকীর্ণ চল হয়।) এবং এই বিন্দুগুলি দিয়ে অঙ্কিত রেখাটি প্রক্রিয়ার পথ। এই চিত্রটিকে বলা হয় সূচক চিত্র। সূচক চিত্র দ্বারা একটি নির্দিষ্ট প্রক্রিয়াকে কিভাবে বর্ণনা করা যায় দেখা যাক।





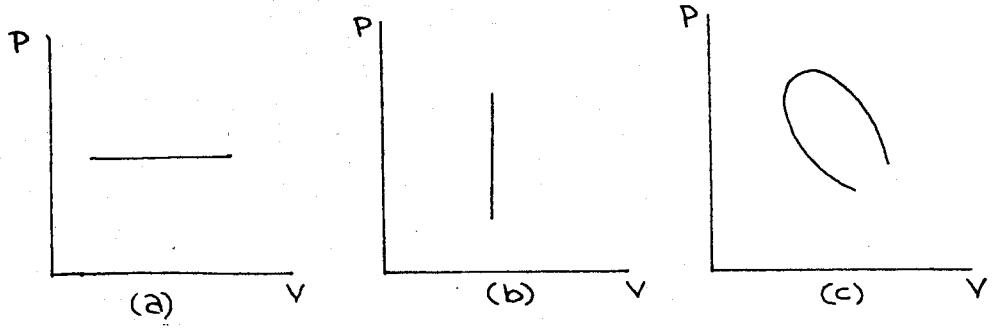
চিত্র 1.7

চিত্র 1.7 (a) স্থির তাপমাত্রায় গ্যাসের প্রসারণের ব্যবস্থা

চিত্র 1.7 (b)  $p-v$  সূচক চিত্রের সাহায্যে একটি আপাত - সাম্যীয় সমোষ্ণ প্রসারণের বর্ণনা।

চিত্রে (1.7 a) C একটি সিলিন্ডার এবং P একটি ঘর্ষণহীন পিস্টন। সিলিন্ডারের ভিতর গ্যাস আছে এবং পিস্টনটি তাপভেদ্য বস্তু দিয়ে তৈরী। পিস্টনসহ সিলিন্ডার একটি স্থির তাপমাত্রার জলের পাতে ডোবানো হল। মনে করা যাক গ্যাসের প্রারম্ভিক অবস্থাকে  $(p_i, v_i, T_i)$  দ্বারা সূচিত করা হল। এবার ধীরে ধীরে পিস্টনটিকে বাইরের দিকে টেনে নিয়ে গেলে প্রসারণ ঘটবে যাতে যে কোন সময়ে পিস্টনের বাইরের দিকের চাপের সঙ্গে গ্যাসের চাপের পার্থক্য অনুপরিমাণ  $(dp)$ । ধরা যাক গ্যাসের অন্তিম অবস্থার চল  $p_f v_f T_f$  প্রারম্ভিক অবস্থা থেকে অন্তিম অবস্থায় তন্তু (গ্যাস) যে প্রক্রিয়ার মধ্যে দিয়ে যায় তাকে  $p$  ও  $v$  এর ক্রম পরিবর্তনশীল পরপর কতকগুলি মান দিয়ে প্রকাশ করা হয়। একটি  $p$  এবং  $v$  এর মানের সঙ্গে পরবর্তী  $p$  ও  $v$  এর মানের পার্থক্য অণু পরিমাণ।  $v$  এর পরপর মানগুলি  $y$  অক্ষ বরাবর এবং  $p$  এর মানগুলি  $x$  অক্ষ বরাবর বসিয়ে যোগ করে দিলে যে চিত্রটি হয় সেটি 1.7 (b) চিত্রের অনুরূপ।

এতক্ষণ আমরা একটি প্রক্রিয়াকে সেই প্রক্রিয়া কি হারে সম্পাদিত হয় সেই দৃষ্টিভঙ্গী দিয়ে বিবৃত করার চেষ্টা করেছি। প্রক্রিয়াগুলির শ্রেণীবিভাগ অন্যভাবেও করা যায়। দেখা যায় যে কোন একটি প্রক্রিয়া চলাকালে তন্ত্রের কোন একটি ধর্ম অথবা চলার কোন পরিবর্তন হয়না। যেমন উপরোক্ত প্রক্রিয়ায় আমরা দেখলাম যে গ্যাসের আয়তন বৃদ্ধি করা হয়েছে তাপমাত্রা স্থির রেখে। এই ধরনের প্রক্রিয়াকে বলা হয় সমোষ্ণ প্রক্রিয়া। প্রক্রিয়াটি যদি স্থির চাপে সংঘটিত হয় তাহলে তাকে বলে সমচাপী প্রক্রিয়া। প্রক্রিয়া চলাকালীন আয়তন স্থির থাকলে তাকে বলা হয় সমায়তনী প্রক্রিয়া।



চিত্র 1.8

এছাড়া যদি কোন প্রক্রিয়ার সময় তন্ত্র ও তার পারিপার্শ্বিকের মধ্যে কোন তাপের আদান-প্রদান না ঘটে অর্থাৎ তন্ত্র যদি রুদ্ধ তাপ সীমা দ্বারা আবদ্ধ থাকে তাহলে সেই প্রক্রিয়াকে বলা হয় রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়া।

তন্ত্র যদি প্রক্রিয়া শেষে তার প্রারম্ভিক অবস্থায় ফেরৎ আসে তাহলে সেটির নাম চক্রীয় প্রক্রিয়া।

চিত্র (1.8) তে P.V সূচক চিত্রে সমচাপা (a) সমায়তনী (b) এবং চক্রীয় (c) প্রক্রিয়া দেখানো হল।

### প্রশ্নাবলি — 3

আদর্শ গ্যাসের জন্য  $V-T$  এ বং  $p-T$  সূচক চিত্রে নিম্নলিখিত প্রক্রিয়াগুলি অঙ্কন করুন :

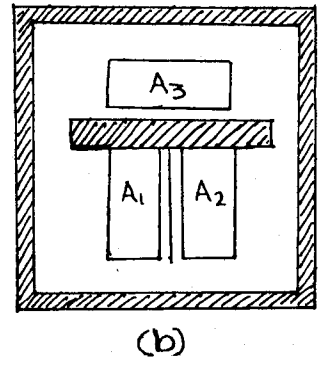
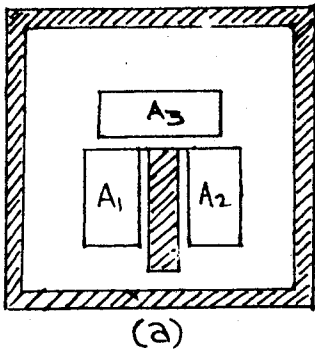
(i) সমচাপী প্রসারণ, (ii) সমায়তনী সঙ্কোচন, (iii) সমোষ্ণ সঙ্কোচন।

আপনারা নিশ্চয়ই লক্ষ্য করে থাকবেন যে তাপমাত্রা শব্দটি আমরা অনেকবারই ব্যবহার করেছি। কিন্তু তাপমাত্রা বলতে আমরা কি বুঝি সে সম্বন্ধে প্রকৃত ধারণা করতে গেলে তাপগতিতত্ত্বের একটি সূত্র প্রয়োজন। সেটিকে বলা হয় তাপগতিতত্ত্বের আদি সূত্র।

## 1.5 তাপগতিতত্ত্বের আদি সূত্র

এই সূত্র অনুযায়ী দুটি তন্ত্র  $A_1$  এবং  $A_2$  পৃথক পৃথকভাবে একটি তৃতীয় তন্ত্র  $A_3$  র সঙ্গে তাপীয় সাম্যে থাকলে,  $A_1$  এবং  $A_2$  ও পরস্পরের সঙ্গে তাপীয় সাম্যে থাকবে।

নীচের চিত্রের সাহায্যে এই সূত্রের ব্যাখ্যা করা যায়।



চিত্র 1.9

চিত্র (1.9a) তে  $A_1$  এবং  $A_2$  এর মধ্যে অন্তরক দেওয়াল আছে। কিন্তু  $A_1$  এবং  $A_2$  —  $A_3$  এর সঙ্গে তাপ বিনিময় করতে পারে। এর ফলে  $A_1$  এবং  $A_2$  পৃথকভাবে  $A_3$  এর সঙ্গে তাপীয় সাম্যে আসবে।

এখন (1.9b) চিত্রের ন্যায় অন্তরক দেওয়ালটি যদি  $A_1 A_3$  এবং  $A_2 A_3$  এর মধ্যে সরিয়ে নেওয়া যায় তাহলে দেখা যাবে যে  $A_1$  ও  $A_2$  এর মধ্যে তাপীয় সাম্য আছে। এটিই হল তাপগতিতত্ত্বের আদি সূত্র। তাহলে দেখা যাচ্ছে যে অনেকগুলি তন্ত্র বা বস্তু পরস্পরের সঙ্গে তাপীয় সাম্যে থাকার অর্থ এই যে নিশ্চয় তাদের সকলের একটি সাধারণ ধর্ম আছে যার মান ঐ সব তন্ত্র অথবা বস্তুর ক্ষেত্রে সমান। এই ধর্মটিকেই আমরা বলি তাপমাত্রা। কাজেই তাপমাত্রা বস্তুর এমনই একটি ধর্ম যার সাহায্যে বস্তুটি অন্য কোন বস্তুর সঙ্গে তাপীয় সাম্য আছে কিনা নির্ধারণ করা যায়। প্রাত্যহিক জীবনে আমরা দেখতে পাই যে বিভিন্ন তাপমাত্রায় দুটি বস্তুকে সংযুক্ত করলে কিছু সময় বাদে উভয়ের তাপমাত্রা একটি সাধারণ মানে পৌঁছায় এবং তখন তাপীয় সাম্য প্রতিষ্ঠিত হয়।

এখন (1.1) নং সমীকরণ লক্ষ্য করলে দেখবেন যে এটি একটি আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ। এবং এই সমীকরণটি আদর্শ গ্যাসের অবস্থার বর্ণনা করে। সে জন্য এটিকে বলা হয় অবস্থার সমীকরণ। তাপগতীয় আদি সূত্রের সাহায্যে গাণিতিক ভাবে দেখানো যায় যে অন্যান্য তাপগতীয় তন্ত্রেও তাপমাত্রা এবং অন্য তাপগতীয় চলের মধ্যে অবস্থার সমীকরণ নির্ণয় করা সম্ভব।

## 1.6 অবস্থার সমীকরণ

আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে আমরা দেখেছি যে তাপমাত্রা  $T$  কে অন্য দুটি তাপগতীয় চল  $p$  এবং  $v$  এর সাপেক্ষে প্রকাশ করা যায়। সাধারণভাবে এই দুটি চলকে  $x$  এবং  $y$  দিয়ে প্রকাশ করলে আমরা লিখতে পারি,

$$T = f_1(x, y) \quad \dots (1.2a)$$

(1.2a) নং সমীকরণের ন্যায় সমীকরণের সাহায্যে x কে T এবং y এর সাপেক্ষে এবং y কে x এবং T এর সাপেক্ষে প্রকাশ করা যায়। সে ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি,

$$x = f_2(T, y) \quad \dots (1.2b)$$

$$\text{এবং } y = f_3(T, x) \quad \dots (1.2c)$$

(1.2a), (1.2b) এবং (1.2c) এর সম্মিলিত রূপ হবে

$$f(x, y, T) = 0 \quad \dots (1.3)$$

এটিকে আমরা তন্ত্রের অবস্থার সমীকরণের অপেক্ষক রূপ বলতে পারি। কিন্তু (1.1) সমীকরণটি একটি আদর্শ গ্যাসীয় তন্ত্রের অবস্থার সমীকরণের সঠিক রূপ। বিভিন্ন তন্ত্রের জন্য অবস্থার সমীকরণ বিভিন্ন হবে। কয়েকটি উদাহরণ আলোচনা করা যায়। (এক্ষেত্রে আমরা অবস্থার সমীকরণ নির্ণয় করব না।)

তন্ত্র (তাপগতীয় চল)	অবস্থার সমীকরণ	
	অপেক্ষক রূপ	সঠিক রূপ
আদর্শ গ্যাস (P, V, T)	$f(P, V, T) = 0$	$PV = RT$ R = গ্যাসীয় ধ্রুবক
বাস্তব গ্যাস (P, V, T)	$f(P, V, T) = 0$	$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$ a, b = ধ্রুবক
টানা তার (L, F, T)	$f(L, F, T) = 0$	$L = L_0[1 + pF + q(T - T_0)]$ L, L <sub>0</sub> → তারটির T এবং T <sub>0</sub> তাপমাত্রায় দৈর্ঘ্য F — তারটির টান p এবং q ধ্রুবক

## 1.6.1 অবস্থার সমীকরণ থেকে গাণিতিক সম্পর্ক স্থাপন

অবস্থার সমীকরণের সাহায্যে তন্ত্রের বিভিন্ন ধর্মের আলোচনা করার পূর্বে 'আংশিক অবকল' কাকে বলে এবং 'সম্পূর্ণ অবকলের' সঙ্গে এর পার্থক্য কি জানা প্রয়োজন। যখন একটি রাশি একটির বেশী চলার অপেক্ষক, তখন যে কোন চলার সামান্য পরিবর্তনে রাশিটি কিভাবে পরিবর্তিত হয় সেটি নির্ণয় করার জন্য আংশিক অবকলের প্রয়োজন হয়।

একটি উদাহরণের সাহায্য নেওয়া যাক। আমরা জানি যে একটি গ্যাসীয় তন্ত্রে তাপমাত্রা চাপ এবং আয়তনের সঙ্গে পরিবর্তিত হয়। এখন আমরা যদি গ্যাসের আয়তন স্থির রেখে চাপের পরিবর্তনের সঙ্গে তাপমাত্রা কিভাবে পরিবর্তিত হয় তাহলে আমাদের  $T$  এর সঙ্গে স্থির আয়তনে  $p$  এর আংশিক অবকল কষতে হবে। এর গাণিতিক রূপ  $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v$ । আবার যদি আমরা চাপ স্থির রেখে আয়তন পরিবর্তনের সঙ্গে তাপমাত্রার পরিবর্তনের হারের আংশিক অবকলের গাণিতিক রূপ  $\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p$ । আপনারা নিশ্চয় লক্ষ্য করেছেন যে সাধারণ অবকলের রূপ 'd' এর পরিবর্তে এখানে আমরা '∂' (del) রূপটি ব্যবহার করেছি।

এখন আমরা তিনটি চলার মধ্যে আংশিক অবকল নির্ণয় করব। অবস্থার সমীকরণ থেকে বিভিন্ন গাণিতিক বিশ্লেষণের কাজে ঐ নির্ণীত ফলগুলি খুবই কাজে লাগবে।

মনে করি  $x$  এবং  $y$  চলার অপেক্ষক  $z$

$$Z = Z(x, y) \quad \dots (1.4)$$

তাহলে  $z$  এর সম্পূর্ণ অবকল  $dZ$  কে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়।

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \quad \dots (1.5)$$

এখানে  $z$  এর পরিবর্তনকে  $x$  এবং  $y$  এর পরিবর্তনের সাপেক্ষে প্রকাশ করা হয়েছে।

এবার একটি গ্যাসীয় তন্ত্র কল্পনা করলে তার তিনটি তাপগতীয় চল হল  $P$ ,  $V$ ,  $T$ । আমরা আয়তন  $V$  কে লিখতে পারি

$$V = V(p, T)$$

(1.5) সমীকরণ ব্যবহার করে দুটি নিকটবর্তী সাম্যাবস্থার মধ্যের আয়তনের পার্থক্য  $dv$  কে লেখা যায়।

$$dv = \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T dP \quad \dots (1.6a)$$

অনুরূপভাবে চাপের পার্থক্য  $dp$  কে লেখা যায়

$$dp = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T dv \quad \dots (1.6b)$$

(1.6a) তে (1.6b) এর মান বসিয়ে আমরা পাই,

$$dv = \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T dv + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dT \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P dT$$

$$\text{অথবা } 0 = \left[ 1 - \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \right] dv - \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v + \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dT \quad \dots (1.7)$$

এখন  $P, V, T$  তিনটি চলার মধ্যে যে কোন দুটি নিরপেক্ষ চল।  $V$  এবং  $T$  কে নিরপেক্ষ চল বলে ধরলে  $dv$  এবং  $dT$  এর সব মানের ক্ষেত্রেই (1.7) সমীকরণ প্রযোজ্য হবে। সমান তাপমাত্রা ( $dT = 0$ ) কিন্তু বিভিন্ন আয়তনের ( $dv \neq 0$ ) দুটি অবস্থার জন্য (1.7) সমীকরণ থেকে লেখা যায়।

$$1 - \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T = 0$$

$$\text{অথবা } \boxed{\left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T}} \quad (1.8)$$

আবার সম আয়তনের ( $dv = 0$ ) কিন্তু বিভিন্ন তাপমাত্রার ( $dT \neq 0$ )। দুটি অবস্থার জন্য (1.7) সমীকরণের রূপ হবে,

$$\left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v + \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = 0$$

$$\text{or } \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

$$\text{কিন্তু (1.8) নং সমীকরণ অনুযায়ী } \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p}$$

অতএব আমরা লিখতে পারি ,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = -\frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p}$$

$$\text{অথবা } \boxed{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -1} \quad \dots (1.9)$$

(1.8) এবং (1.9) সমীকরণকে ব্যবহার করে স্থির চাপে আয়তন প্রসারণ গুণক  $\beta$  এবং স্থিরতাপে আয়তন গুণক  $E_T$  কে আংশিক অবকল দ্বারা নিম্নলিখিত রূপে প্রকাশ করা যায় :—

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \quad \dots (1.10)$$

$$\text{এবং } E_T = -v \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \quad \dots (1.11)$$

আপনারা নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছেন যে, যেকোন তন্ত্রের ক্ষেত্রেই চাপ বৃদ্ধি করলে আয়তন কমে। এই কারণে  $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$  কে ঋণাত্মক রূপে দেখানো হয়েছে যাতে  $E_T$  মান ধনাত্মক হয়। (1.10) এবং (1.11) এর সম্মিলিত রূপ হবে,

$$\beta E_T = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$$

$$\text{অথবা } \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T = -\beta E_T$$

$$\text{অথবা } \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_p \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{\beta E_T}$$

$$(1.9) \text{ সমীকরণ ব্যবহার করে লেখা যায় যে, } \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \beta E_T$$

চাপের অণু পরিমাণ পরিবর্তনকে আয়তন এবং তাপমাত্রার পরিবর্তনের সাপেক্ষে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়,

$$dp = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T dv$$

$$\text{অথবা } dp = \beta E_T dT + \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T dv$$

আয়তন স্থির রাখলে ( $dv = 0$ ) লেখা যায়,

$$dp = \beta E_T dT$$

স্থির আয়তনে তাপমাত্রার পরিবর্তন সসীম এবং ক্ষুদ্র ( $\Delta T$ ) হলে  $\beta$  এবং  $E_T$  কে স্থির গণ্য করা যায়। সেক্ষেত্রে চাপের সসীম পরিবর্তন  $\Delta p$  কে লেখা যায়,

$$\Delta p = \beta E_T \Delta T \quad \dots (1.12)$$

## 1.6.2 সম্পূর্ণ অবকল ও অসম্পূর্ণ অবকল

ধরুন  $z(x, y)$  দুইটি চল  $x$  এবং  $y$  এর একমানের আপেক্ষক।

$$\text{সেক্ষেত্রে } dz = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y dx + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)_x dy$$

$$= M(x, y) dx + N(x, y) dy$$



এখন a)  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

b)  $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y$

c)  $\oint dz = 0$

এই তিনটি শর্ত যে সকল একমানের সম্মত অপেক্ষক  $z$  এর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হয় তাদের ক্ষেত্রে  $dz$  কে সম্পূর্ণ অবকল বলা হয়।

সাধারণতঃ  $z$  এর অবকল অসম্পূর্ণ হলে ওকে  $dz$  দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাঃ 1  $dz = (2x + y)dx + (2y + x)dy = Mdx + Ndy$

$M = 2x + y$   $N = 2y + x$   $\therefore dz$  একটি সম্পূর্ণ অবকল।

$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = 1$   $\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y = 1$

উদাঃ 2  $dz = 2x my dx + \frac{x^2}{y} dy$ ,  $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \frac{2x}{y} = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y$   $\therefore dz$  একটি সম্পূর্ণ অবকল।

#### প্রশ্নাবলী — 4

1) তামার একটি খন্ডের তাপমাত্রা  $400\text{k}$  থেকে  $410\text{k}$  করা হল। খন্ডটির আয়তন স্থির রাখতে গেলে চাপের কি পরিবর্তন ঘটতে হবে? দেওয়া আছে যে তামার  $\beta = 5 \times 10^{-5} \text{k}^{-1}$  এবং  $E_T = 1.3 \times 10^{11} \text{Nm}^{-2}$ ।

2)  $(P + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$  সমীকরণের ক্ষেত্রে (1.9) সমীকরণের সিদ্ধতা প্রতিষ্ঠা করুন।

3) কোন টান দেওয়া তারের অণু পরিবর্তনে এক সাম্যাবস্থা থেকে অপর সাম্যাবস্থায় গেলে তার টানের পরিবর্তনের রাশিমালা নিম্নরূপ হয় প্রমাণ কর :

$dr = -\alpha AYdT + \frac{AY}{L}dL$  রাশিমালাগুলি প্রচলিত অর্থ বহন করে।

## 1.7 সারাংশ

কোনও স্থান বা বস্তুর বিশেষ একটি অংশ, যেটির সম্বন্ধে আমরা জানতে চাই তাকে বলা হয় তন্ত্র। তন্ত্রের চারপাশের একটি স্বৈচ্ছিক তলকে তন্ত্রের সীমা বলা হয়। সীমা বহির্ভূত চারদিকের অংশকে বলা হয় তন্ত্রের পারিপার্শ্বিক।

- একটি তন্ত্রের তাপগতীয় অবস্থা সেই তন্ত্রের বিশেষ ধর্মের দ্বারা নির্ধারিত হয়। যে বাহ্যিক (macroscopic) চল দ্বারা এই ধর্মগুলিকে প্রকাশ করা হয় তাকে বলা হয় তাপগতীয় চল।
- তাপগতীয় চল দুই প্রকার — সংকীর্ণ চল ও ব্যাপক চল। সংকীর্ণ চল তন্ত্রের ভরের ওপর নির্ভর করে না কিন্তু ব্যাপক চলের মান তন্ত্রের ভরের ওপর নির্ভরশীল। সময়ের সঙ্গে কোন তন্ত্রের তাপীয়, যান্ত্রিক এবং রাসায়নিক অবস্থার পরিবর্তন না ঘটলে তন্ত্র তাপগতীয় সাম্যে আছে বলা যায়।
- তাপগতীয় সাম্যে স্থিত কোন তন্ত্রের চলগুলির পরস্পরের মধ্যের সম্পর্কের গাণিতিক রূপকে সেই তন্ত্রের অবস্থার সমীকরণ বলা হয়।
- তন্ত্রের কোন ধর্মের পরিবর্তন হলে তন্ত্রের অবস্থার পরিবর্তন হয় এবং তখন একটি প্রক্রিয়া সংঘটিত হয়।

কোন প্রক্রিয়া শেষ হবার পর যদি বিশ্বের কোন পরিবর্তন না ঘটিয়ে তন্ত্র এবং তার পারিপার্শ্বিককে তাদের প্রাথমিক অবস্থায় ফিরিয়ে নিয়ে আসা সম্ভব হয় তাহলে সেই প্রক্রিয়াকে বলা হয় উৎক্রমণীয় প্রক্রিয়া।

- কিন্তু যে প্রক্রিয়া শেষ হয়ে যাওয়ার পরে তন্ত্র বিশ্ব এবং পারিপার্শ্বিককে তাদের অপরিবর্তিত প্রাথমিক অবস্থায় ফিরিয়ে নিয়ে যাওয়া সম্ভব হয় না সেই প্রক্রিয়া অনুৎক্রমণীয় প্রক্রিয়া।
- একটি প্রক্রিয়া যদি ধীরে ধীরে এমনভাবে সম্পাদিত হয় যে প্রতি মুহূর্তে তন্ত্রে — তন্ত্রের অবস্থা এবং সাম্যাবস্থার মধ্যে অণুপরিমাণ পার্থক্য থাকে, (অর্থাৎ প্রক্রিয়াটি এত ধীরে হয় যে অন্তর্বর্তী প্রত্যেকটি অবস্থাকেই তন্ত্রের সাম্যাবস্থা বলা যায়) তবে ঐ প্রক্রিয়াকে আপাত সাম্যীয় প্রক্রিয়া বলা হয়।
- তাপগতিতন্ত্রের আদি সূত্র অনুসারে — দুটি তন্ত্র  $A_1$  এবং  $A_2$  যদি পৃথকভাবে  $A_3$  তন্ত্রের সঙ্গে তাপীয় সাম্যে থাকে তবে  $A_1$  এবং  $A_2$  ও পরস্পরের সঙ্গে তাপীয় সাম্যে থাকবে। যে তন্ত্রগুলি পরস্পরের সঙ্গে তাপীয় সাম্যে থাকে তাদের তাপমাত্রা এক।

- কোন গ্যাসীয় তন্ত্রের অবস্থার সমীকরণের অপেক্ষক রূপ

$$f(p, v, T) = 0$$

এখানে  $f =$  চাপ ( $p$ ), আয়তন ( $v$ ) এবং পরম তাপমাত্রার ( $T$ ) অপেক্ষক।

$z = z(x, y)$  হলে সম্পূর্ণ অবকল  $dz$  এর রূপ হবে,

$$dz = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y dx + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)_x dy$$

ওপরের সমীকরণ থেকে আমরা দুটি প্রয়োজনীয় গাণিতিক সম্পর্ক পাই,

$$(i) \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = \frac{1}{\left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)_y} \quad (ii) \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x = -1$$

- আংশিক অবকলের সাহায্যে স্থির চাপে আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক ( $\beta$ ), স্থির তাপে আয়তন গুণাঙ্কে ( $E_T$ ) নিম্নলিখিত উপায়ে প্রকাশ করা যায়,

$$\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad E_T = -V \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T$$

- সম্পূর্ণ ও অসম্পূর্ণ অবকলের ধারণা।

## 1.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

- 1) (a) 200টি অণুবিশিষ্ট কোন তন্ত্রকে কি তাপগতীয় তন্ত্র বলা যায়? কারণসহ ব্যাখ্যা করুন।  
 (b)  $0^\circ\text{C}$  তাপমাত্রায় এবং 1 বার (bar) চাপে  $2\text{m}^3$  আয়তন বিশিষ্ট পারদের ওজন  $2.67 \times 10^5 \text{N}$  (দেওয়া আছে যে  $g = 9.80 \text{ms}^{-2}$ )। এই তন্ত্রের দুটি ব্যাপক চল এবং পাঁচটি সংকীর্ণ চলের মান লিখুন।
- 2) থর মরুভূমিতে রেল লাইন পাতা হল। মরুভূমিতে দিন এবং রাতের তাপমাত্রার পার্থক্য  $25\text{k}$ । দেওয়া আছে যে রেলের প্রস্থচ্ছেদ  $3.6 \times 10^{-3} \text{m}^2$ , ইয়াং গুণাঙ্ক ( $\gamma$ )  $-2 \times 10^{11} \text{Nm}^{-2}$  এবং আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক ( $\alpha$ )  $-8 \times 10^{-6} \text{k}^{-1}$ ।

- (a) লাইনের দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত রাখতে হলে দিন এবং রাত্রে মধ্যে রেল লাইনে টানের পরিবর্তন নির্ণয় করুন।
- (b) লাইনের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি ঘটলে (লাইনের প্রাথমিক দৈর্ঘ্য 15 km) দিন এবং রাত্রির মধ্যে দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন নির্ণয় করুন।
- 3) (a) স্থিরতাপে সংকোচনশীলতা  $K$  (আয়তন গুণাঙ্কের বিপরীত রাশি),  $\rho =$  বস্তুর ঘনত্ব এবং  $\beta =$  আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক হলে দেখান যে,

$$(i) k = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad (ii) \beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$$

- (b) দেখান যে আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে,

$$k = \frac{1}{p} \quad \text{এবং} \quad \beta = \frac{1}{T}$$

- (c) PVT তন্ত্রের ক্ষেত্রে প্রমাণ করুন যে,

$$\frac{dV}{V} = \beta dT - k dp$$

- (d) কোন PVT তন্ত্রের ক্ষেত্রে  $\beta = \frac{3aT^3}{v}$ ,  $k = \frac{b}{v}$  হলে অবস্থার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

## 1.9 উত্তরমালা

### প্রশ্নাবলি —1

- 1 (a) ধরা যাক কোন বস্তুর ভর  $x$  এবং আয়তন  $y$  তাহলে বস্তুর ঘনত্ব  $\frac{x}{y}$ । আমরা জানি ভর এবং আয়তন ব্যাপক চল এবং ঘনত্ব সংকীর্ণ চল।

- (b) চাপ, আয়তন, তাপ, ভর এবং ঘনত্ব।

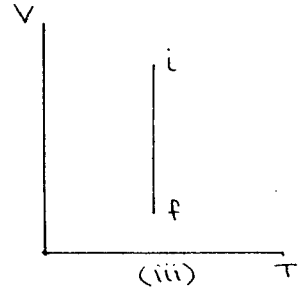
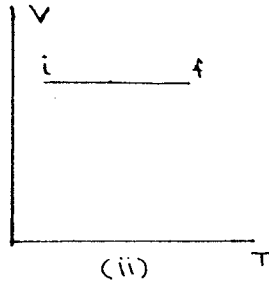
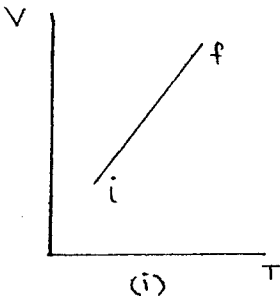
### প্রশ্নাবলি —2

- 1 (a) (i) এবং (ii) অনুক্রমণীয় প্রক্রিয়া এবং (iii) উৎক্রমণীয় প্রক্রিয়া।

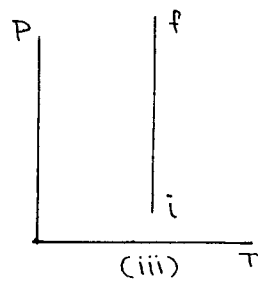
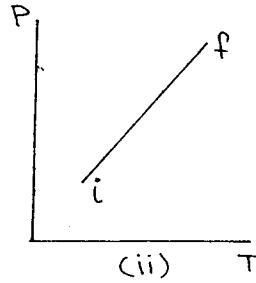
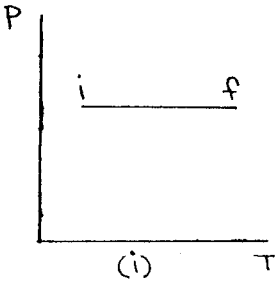
(b) একটি উদাহরণ ধরা যাক। একটি সিলিন্ডারে গ্যাস নেওয়া হল। গ্যাস একটি পিস্টন দিয়ে আবদ্ধ আছে। পিস্টনটিকে বাইরের দিকে সরিয়ে গ্যাসের সম্প্রসারণ ঘটানো হল। আয়তন বৃদ্ধির সময় পিস্টন এবং সিলিন্ডারের ভিতরের দেওয়ালের মধ্যে ঘর্ষণ হলে প্রক্রিয়াটি অনুক্রমণীয় হবে। এক্ষেত্রে পিস্টনটি সরাবার জন্য যান্ত্রিক শক্তি, পিস্টন ও সিলিন্ডারের দেওয়ালের তাপমাত্রা বৃদ্ধি করে। এই উদাহরণ থেকেই বোঝা যায় যে, অনুক্রমণীয় প্রক্রিয়ায় শক্তির ক্ষয় হয়।

প্রশ্নাবলী — 3

V-T চিত্র



P-T চিত্র



(i) সমচাপী প্রসারণ

(ii) সময়তনী সংকোচন

(iii) সমোষ্ণ সংকোচন

(i) সমচাপী প্রসারণ

(ii) সময়তনী সংকোচন

(iii) সমোষ্ণ সংকোচন

1) (1.12) সমীকরণ অনুযায়ী

$$\Delta p = \beta E_r \Delta T$$

এখানে  $\Delta T = 10\text{k}$

$$\beta = 5 \times 10^{-5} \text{ k}^{-1}$$

$$E_r = 1.3 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$$

$$\begin{aligned} \text{অতএব } \Delta p &= (5 \times 10^{-5} \times 1.3 \times 10^{11} \times 10) \text{ Nm}^{-2} \\ &= 6.5 \times 10^7 \text{ Nm}^{-2} \end{aligned}$$

2) 1gm অণু গ্যাসের জন্য

$$PV = RT \quad \text{বা} \quad P = \frac{RT}{V}$$

$$\therefore \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = -\frac{RT}{V^2}$$

$$\text{অনুরূপে } V = \frac{RT}{P} \quad \text{থেকে} \quad \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{R}{P}$$

$$\text{ও } T = \frac{PV}{R} \quad \text{থেকে} \quad \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = \frac{V}{R}$$

$$\begin{aligned} \therefore \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V &= -\frac{RT}{V^2} \cdot \frac{R}{P} \times \frac{V}{R} \\ &= -\frac{RT}{PV} = -1 \end{aligned}$$

3) যখন  $\tau = \tau(T, L)$  অর্থাৎ টান উষ্ণতা ও দৈর্ঘ্যের অপেক্ষক।

$$d\tau = \left( \frac{\partial \tau}{\partial T} \right)_L dT + \left( \frac{\partial \tau}{\partial L} \right)_T dL$$

$$\text{এখন } \left(\frac{\partial \tau}{\partial T}\right)_L \left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_\tau \left(\frac{\partial L}{\partial \tau}\right)_T = -1$$

$$\text{সুতরাং, } \left(\frac{\partial \tau}{\partial T}\right)_L = -\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_\tau \left(\frac{\partial \tau}{\partial L}\right)_T$$

$$= -\frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_\tau L \left(\frac{\partial \tau/A}{\partial L}\right)_T \cdot A$$

$$= -\alpha \cdot A \cdot Y \quad (\text{যেখানে } \alpha = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_\tau \text{ ও } Y = L \left(\frac{\partial \tau/A}{\partial L}\right)_T)$$

$$\therefore d\tau = -\alpha AY dT + \frac{YA}{L} dL$$

সর্বশেষ প্রশ্নাবলি :—

1. (a) এটি একটি তাপগতীয় তন্ত্র নয়, কেননা একটি তাপগতীয় তন্ত্রের আয়তন যথেষ্ট বড় হওয়া প্রয়োজন যাতে এটিকে একটি নিরবচ্ছিন্ন সমবায় হিসাবে গণ্য করা যায়। যে তন্ত্রে 200টি অণু আছে সেটিকে একটি নিরবচ্ছিন্ন সমবায় বলা যায়না।

(b) তন্ত্রের ব্যাপক চল-আয়তন =  $2\text{m}^3$

$$\text{ভর} = \frac{2.67 \times 10^5}{9.80} = 2.72 \times 10^4 \text{ kg}$$

সংকীর্ণ চল — তাপমাত্রা —  $0^\circ\text{C}$ , চাপ = 1 bar,

$$\text{অভিকর্ষজ ত্বরণ} = 9.80 \text{ ms}^{-2}$$

$$\text{ঘনত্ব} = \frac{2.72 \times 10^4}{2} = 1.36 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$$

2 (a) এখানে তাপগতীয় চল তিনটি L, F, T

কাজেই তন্ত্রের অবস্থার সমীকরণ

$$f(L, F, T) = 0$$

আমরা লিখতে পারি,

$$\left(\frac{\partial L}{\partial F}\right)_T \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_L \left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_F = -1$$

এবং আমরা জানি

$$Y = \frac{L}{A} \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_T \quad \text{এবং} \quad \alpha = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_F$$

$$\text{অতএব} \quad \frac{L}{YA} \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_L \frac{1}{\alpha L} = -1,$$

$$\text{অথবা} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_L = -YA\alpha$$

এখন যদি লাইনের দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত রাখা হয় তবে  $\Delta T$  তাপ পরিবর্তনের জন্য টানের পরিবর্তন  $\Delta F$  কে লেখা যায়

$$\Delta F = -YA\alpha\Delta T \quad \text{— দিন থেকে রাত্রে তাপমাত্রা কমে কাজেই } \Delta T \text{ ঋণাত্মক।}$$

$$\begin{aligned} \text{অতএব} \quad \Delta F &= -(2 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2})(3.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(9 \times 10^{-6} \text{ k}^{-1})(-25 \text{ k}) \\ &= 1.44 \times 10^5 \text{ N} \end{aligned}$$

দিন থেকে রাত্রে তাপমাত্রা কম হওয়ার দরুণ লাইনের দৈর্ঘ্য হ্রাস পাবে, কিন্তু প্রক্রিয়াটি স্থির দৈর্ঘ্যে ঘটছে, কাজেই দৈর্ঘ্য স্থির রাখার জন্য একটি বলের প্রয়োজন। সেই কারণে  $\Delta F$  ধনাত্মক হবে।

(b) আমরা জানি  $f(L, F, T) = 0$

$$\text{অথবা} \quad L = L(F, T)$$



$$\therefore dL = \left( \frac{\partial L}{\partial F} \right)_T dF + \left( \frac{\partial L}{\partial T} \right)_F dT$$

লাইনের দৈর্ঘ্য সম্প্রসারণ ঘটা সম্ভব (অর্থাৎ  $dF = 0$ )

$$\text{এবং } \alpha = \frac{1}{L} \left( \frac{\partial L}{\partial T} \right)_F$$

অতএব তাপমাত্রার  $\Delta T$  পার্থক্যের জন্য দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন  $\Delta \ell$  এর মান হবে

$$\Delta \ell = \alpha L \Delta T$$

দিন থেকে রাত্তিতে তাপমাত্রার পরিবর্তন  $\Delta T = -25\text{k}$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta \ell &= (8 \times 10^{-6} \text{ k})(15 \times 10^3 \text{ m})(-25\text{k}) \\ &= -3\text{m} \end{aligned}$$

$\therefore$  লাইনের দৈর্ঘ্য 3m কমবে।

$$3 \text{ (a) আমরা জানি ঘনত্ব} = \frac{\text{ভর}}{\text{আয়তন}} \text{ অর্থাৎ } \rho = \frac{m}{V}$$

$$(i) \quad \therefore \rho v = m$$

সমাকলন করলে  $\rho dv + v d\rho = 0$  ( $m =$  স্থির সংখ্যা)

$$\text{অথবা } -\frac{dv}{v} = \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\therefore -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T$$

$$\text{যেহেতু } E_T = -V \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T$$

$$\therefore \frac{1}{E_T} = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = +\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T$$

$$\text{অথবা } K = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T$$

$$(ii) \text{ আমরা জানি } \frac{dv}{v} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\text{অথবা } \frac{1}{V} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

$$\therefore \beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

b) আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে

$$pv = nRT$$

$$\text{অথবা } v = \frac{nRT}{p}$$

$$\left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = -\frac{nRT}{p^2}$$

$$\text{এখন } k = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = \frac{nRT}{vp^2} = \frac{pv}{vp^2} = \frac{1}{p}$$

$$\text{আবার } \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{nR}{p}$$

$$\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{nR}{pv} = \frac{nR}{nRT} = \frac{1}{T}$$

c) (1.6 a) নং সমীকরণ থেকে আমরা পাই যে,

$$dV = \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T dp + \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT$$

কিন্তু  $k = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$  এবং  $\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$

$\therefore \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = -kV$  এবং  $\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \beta V$

অতএব আমরা পাই,

$$dv = -kvdP + \beta v dT$$

অথবা  $\frac{dv}{v} = +\beta dT - kdp$

d)  $\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{3aT^3}{v}$

$\therefore \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = 3aT^3$

$$v = \frac{3aT^4}{4} + f(P)$$

$$k = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = b/v$$

$$\left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = b$$

$$v = bp - f_1(T)$$

এখন  $f(p) = bp$  ও  $f_1(T) = \frac{3aT^4}{4}$  ধরে পাই,

$$v = \frac{3aT^4}{4} + bp \text{ এটাই উক্ত ক্ষেত্রে অবস্থার সমীকরণ।}$$

একক 2 : উষ্ণতার ধারণা ও পরিমাপ

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

2.2 উষ্ণতা পরিমাপের মূলতত্ত্ব

উষ্ণতার পরিমাপের জন্য প্রয়োজনীয় ভৌতধর্ম

উষ্ণতার মাপক্রম (scale of temperature)

2.3 গ্যাস থার্মোমিটার

স্থির আয়তন এবং স্থির চাপের গ্যাস থার্মোমিটার

গ্যাস থার্মোমিটারের পাঠের সংশোধন

আদর্শ গ্যাস স্কেল (perfect gas scale)

2.4 রোধ থার্মোমিটার

প্ল্যাটিনাম রোধ থার্মোমিটার

থার্মিস্টার (Thermistors)

2.5 তাপযুগ্ম (Thermocouple)

তাপযুগ্ম এবং তাপীয়-তড়িৎ বর্তনী

ব্যবহারিক তাপযুগ্ম

2.6 বাষ্প চাপ থার্মোমিটার (vapour pressure thermometer)

2.7 বিকিরণ পাইরোমিটার (Radiation Pyrometer)

2.8 আন্তর্জাতিক ব্যবহারিক তাপীয় স্কেল (Practical of Temperature Scale)

2.9 সারাংশ

2.10 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

2.11 উত্তরমালা

## 2.1 প্রস্তাবনা

কোন প্রচলিত গ্রীষ্মের দুপুরে নিশ্চয়ই আপনাদের ঘরের বাইরে থাকতে ভাল লাগবে না। আবার শীতকালে ঠান্ডা জলে স্নান করাটাও খুব সুখপ্রদ নয়। এই যে গরম বা ঠান্ডার বোধ (অর্থাৎ উষ্ণতার ধারণা), একে সোজাসুজি মাপ করা যায় না। এই উষ্ণতা বোধকে কোন যন্ত্রের সাহায্যে পরিমাপ করতে গেলে আমাদের সাহায্য নিতে হবে তাপগতিবিদ্যার আদি সূত্রের (zeroth law)। এই সূত্রে আমরা তাপীয় সাম্যের ধারণা পাই যে দুটি বস্তু তৃতীয় কোন বস্তুর সঙ্গে তাপীয় সাম্যে থাকলে ঐ দুটি বস্তুও পরস্পরের সঙ্গে তাপীয় সাম্যে থাকবে। এর থেকেই বোঝা যাচ্ছে যে যে বস্তুগুলি পরস্পরের সঙ্গে তাপীয় সাম্যে থাকে তাদের মধ্যে কোন সাধারণ ধর্ম বিদ্যমান। এই সাধারণ ধর্মের নাম তাপমাত্রা। তাপমাত্রা তন্ত্রের এমন একটি ধর্ম যেটি নির্ধারণ করে যে তন্ত্রটি অন্যান্য তন্ত্রের সঙ্গে তাপীয় সাম্যে আছে কিনা। তাপমাত্রা একটি প্রয়োজনীয় তাপগতীয় চল। এ সম্বন্ধে আমরা পূর্ববর্তী এককেও আলোচনা করেছি। কোন বস্তুর তাপমাত্রা বেশী কি কম তা আমরা অনুভব করতে পারি। কিন্তু এই অনুভূতির সঙ্গে স্বাদ বা গন্ধের অনুভূতির পার্থক্য আছে। স্বাদ বা গন্ধকে আমরা কোন যন্ত্রের সাহায্যে পরিমাপ করতে পারি না। কিন্তু তাপমাত্রা সম্বন্ধে ধারণা করতে গেলে তার মাপের প্রয়োজন। বস্তুকে উত্তপ্ত করলে তার বিভিন্ন ভৌত ধর্মের পরিবর্তন ঘটে — যথা আয়তন প্রসারণ, রোধের পরিবর্তন, দুটি বিভিন্ন ধাতুর সংযোগস্থলে তড়িচ্চালক বলের উদ্ভব ইত্যাদি। এই সমস্ত উষ্ণতা মাপক ধর্ম (Thermometric property) কেই উষ্ণতার পরিমাপ (অর্থাৎ তাপমাত্রা নির্ণয়) এর কাজে ব্যবহার করা হয়েছে। তাপমাত্রা নির্ণয়ের জন্য যে যন্ত্র ব্যবহার করা হয় তাকে বলা হয় তাপমান যন্ত্র বা থার্মোমিটার। সাধারণভাবে সর্বত্র দৈনন্দিন জীবনে ব্যবহৃত থার্মোমিটার হল পারদ থার্মোমিটার। এই থার্মোমিটারে — উষ্ণতা বৃদ্ধির সঙ্গে পারদের আয়তন প্রসারণের ধর্মের সাহায্য নেওয়া হয়েছে। কিন্তু এই ধরনের থার্মোমিটার বিভিন্ন সূক্ষ্ম বৈজ্ঞানিক কাজের পক্ষে উপযুক্ত নয় এবং অতি শীতল বা অতি উষ্ণ বস্তুর উষ্ণতার পরিমাপ করতে পারে না। ফলে অন্য প্রকার থার্মোমিটার তৈরী করা প্রয়োজন—যথা গ্যাস থার্মোমিটার, রোধ থার্মোমিটার, তাপযুগ্ম, বিকীরণ পাইরোমিটার ইত্যাদি। এই থার্মোমিটারগুলির গঠন এবং কার্যপ্রণালী সম্বন্ধে এই এককে আমরা আলোচনা করব। উষ্ণতা নির্ধারণের জন্য মাপক্রম কিভাবে তৈরী করা হয় সে সম্বন্ধেও আপনারা এই এককে জানতে পারবেন। আমরা আদর্শ গ্যাস স্কেলের কথা বিশেষভাবে আলোচনা করব। সবশেষে আন্তর্জাতিক তাপীয় স্কেল কাকে বলে সে কথা জানব।

উদ্দেশ্য —

এই এককটি পড়লে আপনারা—

- যে বিশেষ নীতির সাহায্যে উষ্ণতার পরিমাপ করা হয় সেটিকে জানতে পারবেন।

- উষ্ণতা নির্ধারণের বিভিন্ন উপায়ের তুলনা করতে পারবেন।
- গ্যাস থার্মোমিটার, রোধ থার্মোমিটার, তাপযুগ্ম, বাষ্পচাপ থার্মোমিটার এবং বিকীর্ণ পাইরোমিটার এর কার্যপদ্ধতি এবং সুবিধা ও অসুবিধার কথা জানতে পারবেন।
- আদর্শ গ্যাস স্কেলের বিশেষত্বের কথা জানতে পারবেন।
- কোন অজ্ঞাত উষ্ণতার একটি তত্ত্ব বা বস্তুর উষ্ণতা মাপক ধর্মের সাহায্যে জানা অজ্ঞাত উষ্ণতার মান থেকে বস্তুর উষ্ণতার পরিমাপ অর্থাৎ তাপমাত্রা নির্ণয় করতে পারবেন।
- কোন বিশেষ কাজে কি প্রকার থার্মোমিটার ব্যবহার করতে হবে সেটি স্থির করতে সক্ষম হবেন।

## 2.2 উষ্ণতা পরিমাপের মূলতত্ত্ব

দৈনন্দিন জীবনে আমরা যে পারদ থার্মোমিটার ব্যবহার করি সেটিতে উষ্ণতার পরিবর্তনের সঙ্গে পারদের আয়তন পরিবর্তনের ধর্মকে ব্যবহার করা হয়।

উষ্ণতার পরিমাপের জন্য প্রয়োজনীয় ভৌত ধর্ম

কিছু কিছু ধর্ম আছে, যেমন — কৈশিক নলে নেওয়া তরলের দৈর্ঘ্য, তরলের আয়তন, স্থির আয়তনে রাখা একটি গ্যাসের চাপ, স্থির চাপে রাখা একটি গ্যাসের আয়তন, একটি ধাতু কিংবা অর্ধপরিবাহীর রোধ, দুটি ধাতু অথবা সংকরধাতুর সংযোগস্থল দুটির মধ্যে উষ্ণতার পার্থক্যের জন্য উদ্ভূত তড়িচ্চালক বল ইত্যাদি — যেগুলির মান উষ্ণতার পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে পরিবর্তিত হয়। এই ধর্মগুলিকে আমরা বলব উষ্ণতা মাপক ধর্ম।

এবার আমরা যদি আমাদের চিরপরিচিত ডাঙলরি থার্মোমিটারে ফিরে আসি তাহলে দেখবো যে থার্মোমিটারের গায়ে যে দাগ কাটা আছে সেটি মোটামুটি  $94^{\circ}\text{F}$  থেকে  $108^{\circ}\text{F}$  পর্যন্ত বিস্তৃত। অপরদিকে পরীক্ষাগার বা ল্যাবরেটরীতে যে থার্মোমিটার ব্যবহৃত হয় তার পাঠের বিস্তার  $-10^{\circ}\text{C}$  থেকে  $110^{\circ}\text{C}$  পর্যন্ত। দুটি ক্ষেত্রেই থার্মোমিটারের দুটি সীমার মধ্যবর্তী পাঠের পুরো দৈর্ঘ্যটি সমান ভাগে বিভক্ত করে দাগ কাটা আছে। প্রত্যেক ধরনের থার্মোমিটারের সীমা পাঠ নির্ধারণ করা এবং মধ্যবর্তী পাঠকে সমান ভাগে বিভাজন — উষ্ণতার পরিমাপের জন্য অত্যন্ত প্রয়োজনীয়। এই কাজটিকে আমরা বলব উষ্ণতা পরিমাপের স্কেল তৈরী করা।

### উষ্ণতার মাপক্রম (Scale of temperature)

একটি থার্মোমিটার তৈরী করার সময় আমরা এমন একটি বস্তু বেছে নিই, যার একটি উষ্ণতামাপক

ধর্ম আছে। এরপর উষ্ণতার পরিবর্তনের সঙ্গে সেই ধর্মের পরিবর্তনের মধ্যে একটি নিয়ম বা সূত্র নির্ধারণ করে সেই নিয়ম অনুযায়ী ক্রমান্বয়ে পরিবর্তনশীল ধর্মগুলিকে কিছু সংখ্যা দ্বারা নির্দেশ করা হয়। এইটিই হোল উষ্ণতার মাপকম নির্ণয়ের প্রথম পদক্ষেপ। থার্মোমিটারটিকে কিছুক্ষণ কোন বস্তুকে স্পর্শ করে রাখা হলে ধীরে ধীরে সেটি বস্তুর সঙ্গে তাপীয় সাম্যে আসে এবং তখন থার্মোমিটারের উষ্ণতামাপক ধর্ম একটি বিশেষ মানে পৌঁছায়। প্রত্যেকটি মানকে একটি সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা হয়, কাজেই সেই সংখ্যাটি পাঠ করলেই আমরা বস্তুর উষ্ণতার পরিমাপ করতে পারি। এই উষ্ণতার মাপকম  $x$  স্কেল তৈরী করা সহজ হবে যদি আমরা যে উষ্ণতা মাপক ধর্মটি বেছে নেব সেটির মান উষ্ণতার সঙ্গে রৈখিক ভাবে পরিবর্তনশীল হয় (Linear dependence)।

মনে করা যাক আমরা বস্তুর কোন একটি তাপমাত্রা  $T(x)$  এ উষ্ণতা মাপক ধর্মটির মান  $X_T$  ধরলাম।  $X_T$  এবং উষ্ণতার মধ্যে সম্পর্ক রৈখিক হলে আমরা লিখতে পারি

$$X_T = aT(x) + b \quad (2.1)$$

যেখানে  $a$  এবং  $b$  দুটি প্রকৃৎক। দুটি বিভিন্ন উষ্ণতায় উষ্ণতা মাপক ধর্মের মান থেকে  $a$  এবং  $b$  এর মান নির্ণয় করা যায়। উদাহরণস্বরূপ যদি  $0^\circ\text{C}$  এবং  $100^\circ\text{C}$  তাপমাত্রায় উষ্ণতা মাপক ধর্মের মান হয়  $X_0$  এবং  $X_{100}$  তবে

$$X_0 = a \cdot 0 + b = b \quad (2.2)$$

$$\text{এবং } X_{100} = 100a + X_0$$

$$\text{অথবা } a = \frac{X_{100} - X_0}{100} \quad (2.3)$$

(2.2) এবং (2.3) এর মান (2.1) এ বসিয়ে আমরা পাই —

$$T(x) = \frac{1}{a}(x(T) - b) = \frac{X_T - X_0}{X_{100} - X_0} \times 100 \quad (2.4)$$

আপনারা নিশ্চয়ই ওপরের স্কেলটির সঙ্গে পরিচিত আছেন। এখানে আমরা  $a$  এবং  $b$  এর মান নির্ণয়ের জন্য দুটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে  $X_T$  র মান নিয়েছি। কোন প্রমান তত্ত্বের একটি সহজলভ্য অবস্থাকে স্থির বিন্দু হিসাবে নেওয়া হয়। এখানে আমরা দুটি স্থির বিন্দু নিয়েছি (i) হিমাঙ্ক — যে উষ্ণতায় বিশুদ্ধ বরফ এবং বাষ্প সম্পৃক্ত বায়ু 1 atmosphere চাপে পরস্পরের সঙ্গে সাম্যে অবস্থান করে (ii) বাষ্পাঙ্ক — যে তাপমাত্রায় বিশুদ্ধ জল এবং বিশুদ্ধ বাষ্প 1 atmosphere চাপে পরস্পরের

সঙ্গে সাম্যে থাকে। এই দুটি স্থির বিন্দুর মধ্যকার ব্যবধানকে 100টি সমান ভাগে ভাগ করে প্রত্যেকটি 1° ডিগ্রি বলা হয়।

এতক্ষণ যে স্কেলটির কথা আলোচনা করা হল সেটিতে দুটি স্থির বিন্দুর প্রয়োজন। কিন্তু হিমাঙ্ক এবং বাষ্পাঙ্কের মান বায়ুর চাপ থার্মোমিটারের তরলে দ্রবীভূত ময়লা, থার্মোমিটারের কাঁচের প্রকৃতি ইত্যাদির ওপর নির্ভর করে। কাজে কাজেই এই স্থির বিন্দুগুলিকে ঠিকভাবে পাওয়া খুব সহজ নয়। এছাড়াও যে স্কেলটি প্রস্তুত করা হয়, তার মান উষ্ণতা মাপক বস্তুর ভৌত ধর্ম এবং বস্তুর প্রকৃতির ওপর নির্ভর করে। যদি এমন একটি স্কেল প্রস্তুত করা যায় যেটি কোন বিশেষ বস্তুর বিশেষ ধর্মের ওপর নির্ভরশীল হবে না, তাহলে দ্বিতীয় সমস্যাটির সমাধান করা যায়। এইরূপ দুটি তাত্ত্বিক স্কেল হল

(i) আদর্শ গ্যাস স্কেল — এটি গ্যাসের সূত্র ( $\frac{PV}{T} = \text{স্থির সংখ্যা}$ ) কে নির্ভর করে তৈরী। এই সম্বন্ধে আপনারা দ্বিতীয় ব্লকে বিস্তারিত জানতে পারবেন।

(ii) উৎক্রমণীয় চক্রের কার্যের তত্ত্বের ওপর ভিত্তি করে প্রস্তুত কেলভিনের তাপগতীয় স্কেল।

ওপরের স্কেল দুটি কিন্তু সমমানের। এই সমতার প্রমাণ সম্বন্ধে আপনারা এই ব্লকের ৪ নং এককে জানতে পারবেন।

1954 সালে প্যারী (Paris) তে অনুষ্ঠিত ওজন ও মাপ সম্পর্কিত আন্তর্জাতিক সম্মেলনে দুটি স্থির বিন্দু সমেত স্কেলের পরিবর্তে একটি স্থিরবিন্দু যুক্ত স্কেলের কথা বলা হয়। সেটি হল জলের ত্রিক বিন্দুকে (Triple Point) একটি মাত্র স্থির বিন্দু নিয়ে একটি উষ্ণতার স্কেল। উষ্ণতা বনাম চাপের সূচক চিত্রে ত্রিক বিন্দু এমন একটি বিন্দু যেখানে জলের তিন দশা বরফ, জল এবং জলীয় বাষ্প পরস্পরের সঙ্গে তাপীয় ও চাপীয় সাম্যে অবস্থান করে। এই বিন্দুর মান (273.15K)। জলের ত্রিক বিন্দুর তাপমাত্রাই এখন উষ্ণতা নির্ধারণের স্থির বিন্দু।

এই স্কেল অনুসারে হিমাঙ্কের মান 273.15K এবং বাষ্পাঙ্কের মান 373.16K। 0K এর নীচে তাপমাত্রা পাওয়া সম্ভব নয় সেজন্য 0K কে বলা হয় পরম শূন্য এবং স্কেলটিকে বলা হয় পরম স্কেল। তবে ব্যবহারিক জীবনে আমরা সেলসিয়াস স্কেলই ব্যবহার করি। এই স্কেল অনুযায়ী ত্রিক বিন্দুর মান 0.01°C এখানে আমরা তাপমাত্রাকে t দিয়ে প্রকাশ করলে, t এবং পরম তাপ T এর মধ্যে সম্পর্ককে নিম্নলিখিত উপায়ে প্রকাশ করা যায়

$$t = T - 273.15 \tag{2.5}$$

ত্রিক বিন্দুতে উষ্ণতা মাপক ধর্মের মান যদি  $X_{ip}$  হয় তাহলে (2.1) নং সমীকরণে  $b=0$  বসিয়ে পাওয়া যায়,



$$X_{lp} = 273.16a \quad (2.6)$$

$X_{lp}$  জানা থাকলে  $a$  -এর মান নির্ণয় করা যায়।

(2.1) সমীকরণে  $b=0$  বসিয়ে লিখলে  $X_T = aT(x)$  এবং (2.6) সমীকরণের সাহায্য নিলে আমরা পাই,

$$T(x) = 273.16 \left( \frac{X_T}{X_{lp}} \right) \quad (2.7)$$

উপরের সমীকরণে কোন বস্তুর উষ্ণতা মাপক ধর্মের মান এবং বস্তুর তাপমাত্রার মধ্যে প্রত্যক্ষ সম্পর্ক স্থাপিত হয়েছে। এক্ষেত্রে ত্রিক বিন্দুতে উষ্ণতা মাপক ধর্মের মানটি জানা থাকা প্রয়োজন।

প্রশ্নাবলি — 1

(a) তিনটি এমন উষ্ণতা মাপক ধর্মের উল্লেখ করুন যেগুলি উষ্ণতার সঙ্গে রৈখিকভাবে পরিবর্তিত হয়।

(b) পরম স্কেলের কোন পাঠ

(i) সেলসিয়াস স্কেলের পাঠের 1.5 গুণ হবে?

(ii) সেলসিয়াস স্কেলের পাঠের সমান হবে?

(c) একটি কৈশিক নলের ভিতরের পারদ সূত্রের  $0^{\circ}\text{C}$  তাপমাত্রায় দৈর্ঘ্য 3.30 cm এবং  $100^{\circ}\text{C}$  তাপমাত্রায় দৈর্ঘ্য 24.87cm। এই নলটি একটি বস্তুর সংস্পর্শে রাখার ফলে পারদ সূত্রের দৈর্ঘ্য হয় 18.53cm। বস্তুটির তাপমাত্রা কত?

ত্রিক বিন্দুকে একটি মাত্র স্থির বিন্দু ধরে নিয়ে তিনটি বিভিন্ন ধরনের থার্মোমিটারের কথা ধরা যাক — স্থির আয়তনের গ্যাস থার্মোমিটার, রোধ থার্মোমিটার এবং তাপযুগ্ম।

(2.7) নং সমীকরণ অনুযায়ী

গ্যাস থার্মোমিটারে উষ্ণতার পাঠ :—

$$T(p) = 273.16 \frac{p}{p_{TP}}$$

রোধ থার্মোমিটারে উষ্ণতার পাঠ :—

$$T(R) = 273.16 \frac{R}{R_{tp}}$$

এবং তাপযুগ্মের জন্য

$$T(E) = 273.16 \frac{E}{E_{tp}}$$

এখন যদি কোন তন্ত্রের উষ্ণতা পৃথক পৃথকভাবে তিনটি থার্মোমিটার দ্বারা মাপা যায় তাহলে কেবল মাত্র ত্রিক বিন্দুতেই তিনটি থার্মোমিটারের পাঠ এক হবে কিন্তু অন্য স্থির বিন্দুগুলির (যথা প্রমাণ স্ফুটনাঙ্ক, প্রমাণ গলনাঙ্ক ইত্যাদি) পাঠে তারতম্য ঘটবে। এর কারণ উষ্ণতার পরিবর্তনের সঙ্গে উষ্ণতা মাপক ধর্ম অরৈখিকভাবে পরিবর্তিত হয়, যদিও এই অরৈখিকতার পরিমাণ কম। এমনকি দুটি হাইড্রোজেন থার্মোমিটারের পাঠেও সামান্য পার্থক্য দেখা যায় তবে অত্যন্ত কম চাপে গ্যাস আদর্শ গ্যাসের ন্যায় আচরণ করে এবং তখন এই থার্মোমিটারের পাঠেও এই বৈষম্য দূরীভূত হয়। সেই কারণে গ্যাস থার্মোমিটারকে প্রমাণ থার্মোমিটার হিসাবে ব্যবহার করা হয় এবং এর সাপেক্ষে একটি পরীক্ষালব্ধ উষ্ণতা স্কেলের সংজ্ঞা দেওয়া হয়। এখন গ্যাস থার্মোমিটার সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা যাক।

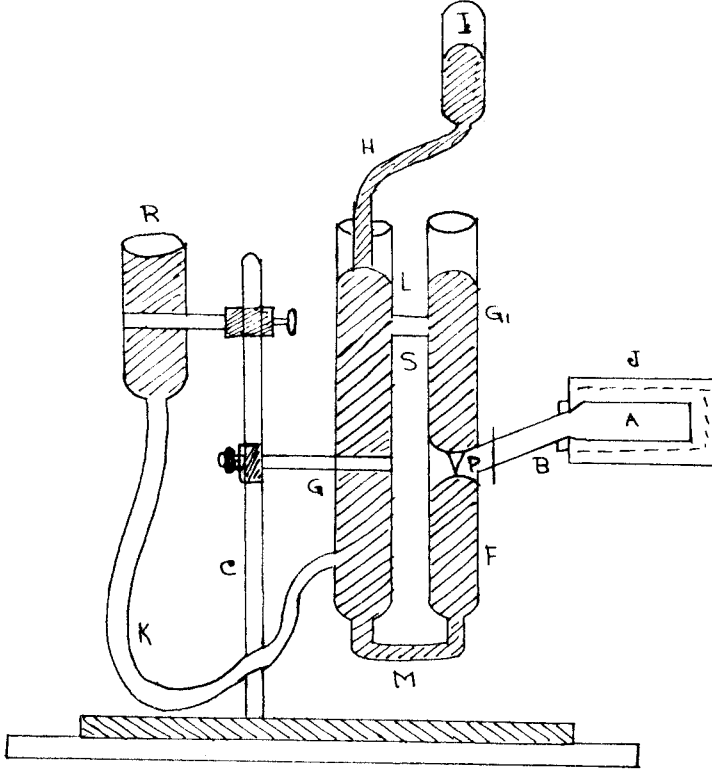
## 2.3 গ্যাস থার্মোমিটার

গ্যাস থার্মোমিটারের সাহায্যে প্রতিষ্ঠিত আদর্শ গ্যাস স্কেলের ওপর ভিত্তি করে গড়ে উঠেছে — আধুনিক উষ্ণতামাপনবিদ্যা বা উষ্ণামিতি (thermometry)। তন্ত্র অথবা বস্তুর উষ্ণতা নির্ণয় করার জন্য বস্তু বা তন্ত্রের বিভিন্ন ধর্মের পরিবর্তন লক্ষ্য করে দেখা গেছে যে স্থির আয়তনের কোন গ্যাসে সামান্য উষ্ণতার পরিবর্তনেই চাপের যে পরিবর্তন হয় তার মান যথেষ্ট বেশী, সঠিক এবং গ্যাসের এই পরিবর্তন খুব সহজেই দেখানো সম্ভব। সেই কারণে আন্তর্জাতিক মানক নির্ধারক দফতর (International Bureau of Standards) স্থির আয়তনের গ্যাস থার্মোমিটারকে উষ্ণতা নির্ণয়ের মুখ্য মানদণ্ড (primary standard) হিসাবে ঘোষণা করেন। এই থার্মোমিটারে হাইড্রোজেন (অথবা হিলিয়াম) গ্যাস ব্যবহৃত হয়। কারণ আদর্শ গ্যাস এবং হাইড্রোজেনের ধর্মের মধ্যে পার্থক্য অন্যান্য গ্যাস অপেক্ষা কম এবং হাইড্রোজেনকে সহজেই বিশুদ্ধ অবস্থায় পাওয়া যায়। অবশ্য এই গ্যাসের একটি অসুবিধা হল যে অতি উচ্চতাপে আধারের মধ্যে এই গ্যাসের ব্যাপন ঘটে। তৎসত্ত্বেও স্থির আয়তনের হাইড্রোজেন থার্মোমিটারকে সর্বত্র মানকগ্যাস থার্মোমিটার বলে গণ্য করা হয়ে থাকে।

স্থির চাপের গ্যাস থার্মোমিটার (যেখানে চাপ স্থির রেখে উষ্ণতার সঙ্গে আয়তনের পরিবর্তন:

লক্ষ্য করা হয়) তৈরী করা কঠিন এবং সমান উষ্ণতার পরিবর্তনের জন্য সবসময়ে আয়তন পরিবর্তন সমান হয় না। সেই কারণে আমরা স্থির আয়তনের গ্যাস থার্মোমিটারের কথা প্রধানত আলোচনা করব।

স্থির আয়তনের গ্যাস থার্মোমিটার — স্থির আয়তনের গ্যাস থার্মোমিটার বলতে আমরা হাইড্রোজেন গ্যাস থার্মোমিটারের কথা আলোচনা করব। এই থার্মোমিটারে দুটি অংশ আছে (i) হাইড্রোজেন গ্যাস পূর্ণ একটি বাস্ক এবং (ii) চাপ মাপার জন্য ম্যানোমিটার।



চিত্র 2.1

চিত্র (2.1) তে A প্ল্যাটিনাম এবং ইরিডিয়ামের সংকর ধাতুতে প্রস্তুত একটি থার্মোমিটার বাস্ক। এটির দৈর্ঘ্য 1 মি বেধ 3 সেমি এবং আয়তন 1 লিটার।  $0^{\circ}\text{C}$  সে তাপমাত্রায় 1 মিটার পারদের চাপে এই বাস্কটিতে শুষ্ক এবং বিশুদ্ধ হাইড্রোজেন গ্যাস ভরা হয়। বাস্কটি একটি প্ল্যাটিনামের তৈরী কৈশিক নল B (1 মি লম্বা) এর দ্বারা বিশেষভাবে প্রস্তুত একটি পারদ ম্যানোমিটার টিউব FG। এর মধ্যের একটি ইম্পাতের বিভাজক S এর নীচের অংশের সঙ্গে যুক্ত হয়েছে। বিভাজক S এর সঙ্গে একটি

প্ল্যাটিনামের সূচক P লাগানো আছে। A র ভিতরের গ্যাসের আয়তন স্থির রাখার জন্য  $FG_1$  টিউবের নীচের অংশের পারদ স্তম্ভকে ওঠা নামা করাতে হবে যাতে স্তম্ভের উত্তল মেনিস্কাস (meniscus) সবসময়ে P এর ডগা স্পর্শ করে থাকে।  $FG_1$  টিউবের ওপরের অংশ একটি সরু নল L দিয়ে ম্যানোমিটারের অন্যবাছ GH এর সঙ্গে যুক্ত।  $FG_1$  এবং GH এর পারদস্তম্ভ দুটি নীচের দিকে M নল দিয়ে যুক্ত। বায়ুর চাপ মাপার জন্য একটি উন্টানো ম্যানোমিটার টিউবের বাছকে GH স্তম্ভের পারদের মধ্যে ডুবিয়ে দেওয়া হয়। এই ম্যানোমিটার টিউব IH কে H বিন্দুর কাছাকাছি এমনভাবে বাঁকানো হয় যাতে I,  $G_1$  এবং F এর পারদের মেনিস্কাস একই উল্লম্ব সরলরেখায় অবস্থান করে। P একটি পারদের আধার, এটি ম্যানোমিটার নলদুটির পারদস্তম্ভের সঙ্গে একটি নমনীয় ইম্পাতের পাইপ K দ্বারা যুক্ত।

কোন কুন্ড অথবা বস্তুর উষ্ণতা নির্ণয়ের জন্য A বাছটিকে সেই বস্তুর সংস্পর্শে রাখা হলে গ্যাসের চাপ বৃদ্ধি পাবে। এই বর্দ্ধিত চাপের ফলে F বাছর পারদ স্তম্ভ নীচের দিকে নেমে যাবে। এখন R আধারটিকে স্ক্রুর (Rack and Pinion) ওঠা নামা করিয়ে F বাছর পারদ তলকে আবার P সূচকের মুখ স্পর্শ করাতে হবে। একটি ক্যাথিটোমিটারের সাহায্যে  $IG_1$ , এবং  $G_1, P$  এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করলে,  $IG_1$  দৈর্ঘ্য বায়ুমন্ডলীর চাপ H নির্দেশ করবে এবং A বালবের গ্যাসের চাপ পরিবর্তনের জন্য অতিরিক্ত চাপ h,  $G_1, P$  দৈর্ঘ্যের সমান হবে।

$$\text{অতএব মোট চাপ } p = H + h$$

আমরা এখন এই চাপের পাঠকে উষ্ণতা নির্ণয়ের পাঠে পরিবর্তিত করার জন্য, দুটির মধ্যে একটি সম্পর্ক স্থাপন করার চেষ্টা করব।

ধরা যাক হিমাঙ্ক এবং বাষ্পাঙ্ক গ্যাসের চাপ যথাক্রমে  $P_0$  এবং  $P_{100}$ । তাহলে আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ অনুসারে

$$P_0 V = nRT_0$$

$$P_{100} V = nR(T_0 + 100)$$

যেখানে  $T_0$  আদর্শ গ্যাস স্কেলে হিমাঙ্ক নির্দেশ করছে, V- গ্যাসের স্থির আয়তনের মান এবং হিমাঙ্ক ও বাষ্পাঙ্কের মধ্যে মূল অন্তরের (Fundamental interval) মান  $100^{\circ}\text{C}$

$$\therefore \frac{1}{T_0} = \frac{P_{100} - P_0}{P_{100}} = \beta \quad (2.8)$$

যেখানে  $\beta$  হচ্ছে চাপ গুণাঙ্ক (pressure coefficient) কাজেই  $P_0$  এবং  $P_{100}$  মাপা থাকলে চাপ গুণাঙ্কের মান নির্ণয় করা যায়।

থার্মোমিটার দ্বারা মাপা যে কোন চাপ p এর সাপেক্ষে গ্যাসের পরম তাপমাত্রা T কে নিম্নলিখিত উপায়ে নির্ণয় করা যায়,

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0}$$

$$\therefore T = T_0 \frac{p}{p_0} = \frac{p}{p_0} \frac{l}{\beta} = \frac{100p}{p_{100}^{-p_0}}$$

এইপ্রকার স্থির আয়তনের হাইড্রোজেন থার্মোমিটার 500°C পর্যন্ত তাপমাত্রা মাপতে সক্ষম। এর অধিক তাপমাত্রায় হাইড্রোজেন প্ল্যাটিনামের টিউবের ভিতর দিয়ে বাইরে ছড়িয়ে পড়ে। হাইড্রোজেনের পরিবর্তে হিলিয়াম গ্যাস ব্যবহার করে এবং প্ল্যাটিনামেরডিয়াম (Rhodium) সংকর ধাতু নির্মিত বাল্‌বুলে উষ্ণতা নির্ণয়ের উর্ধ্বসীমা 1600°C পর্যন্ত করা যায়।

### গ্যাস থার্মোমিটারের পাঠের সংশোধন

গ্যাস থার্মোমিটার দ্বারা উষ্ণতা নির্ণয়ের জন্য আমরা যে গাণিতিক পদ্ধতির সাহায্য নিয়েছি সেখানে আমরা ধরে নিয়েছিলাম যে (i) যে উষ্ণতা আমরা মাপব সমস্ত গ্যাসটির সেই উষ্ণতা হবে, গ্যাসের আয়তন অপরিবর্তিত থাকবে ও অন্য কোনও বাধাদানকারী কারণ থাকবে না এবং (ii) গ্যাসটি আদর্শ গ্যাসের সূত্রগুলি মেনে চলবে।

ওপরের দুটি অনুমানের কোনটিই বাস্তবে ঘটে না। সেজন্য গ্যাস থার্মোমিটার দ্বারা প্রকৃত নির্ভুল মান নির্ণয় করতে হলে কিছু ত্রুটি সংশোধনের প্রয়োজন আছে।

প্রথমে আমরা প্রথম কারণটির জন্য সংশোধনের কথা আলোচনা করব। এক্ষেত্রে ত্রুটির মূল উৎসগুলি হল —

(a) ম্যানোমিটার পারদস্তম্ভের শীর্ষ এবং বিভাজক-এর মধ্যে অবস্থিত গ্যাস, ও কৈশিক নল B এর মধ্যের গ্যাসের উষ্ণতা বাল্‌বুল A এর গ্যাসের উষ্ণতায় পৌঁছাতে পারে না। এই দুটি স্থানকে বলা হয় 'নিষ্ক্রিয় স্থান' (Dead space)। নিষ্ক্রিয় স্থানের আদি এবং অন্তিম উষ্ণতা বাল্‌বুলের উষ্ণতা থেকে আলাদা হয়।

(b) উষ্ণতা বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে বাল্‌বুলের আয়তনও বৃদ্ধি পায়।

(c) আভ্যন্তরীণ চাপের পরিবর্তনের জন্য বাল্‌বুলের আয়তনের পরিবর্তন ঘটে।

(d) উষ্ণতার পরিবর্তনে পারদের ঘনত্বের পরিবর্তন ঘটে।

### নিষ্ক্রিয় স্থানের জন্য সংশোধন

ধরা যাক, বাল্‌বুলের আয়তন  $V_0$  এবং বাল্‌বুলের গ্যাসের উষ্ণতা  $0^\circ\text{C}$  এবং চাপ  $H_0$ , নিষ্ক্রিয়

স্থানের আয়তন  $v$  এবং পরীক্ষা চলাকালীন তাপমাত্রা  $t$ ।  $\alpha$  হচ্ছে পরীক্ষাধীন গ্যাসের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক। তাহলে প্রমাণ তাপ এবং চাপে সম্পূর্ণ গ্যাসের আয়তন হবে,

$$\left( V_0 + \frac{v}{1 + \alpha t} \right) \frac{H_0}{760} \quad (2.9)$$

বাল্বটিকে  $0^\circ\text{C}$  পর্যন্ত উত্তপ্ত করলে চাপ বৃদ্ধি পেয়ে  $H_0 + h$  হয় এবং উপরের আয়তন হয়ে দাঁড়ায়,

$$\left\{ \frac{V_0(1 + \gamma\theta) + bh}{1 + \alpha\theta} + \frac{v}{1 + \alpha t} \right\} \frac{H_0 + h}{760} \quad (2.10)$$

এখানে  $\gamma =$  বাল্বের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক

$b =$  আভ্যন্তরীণ চাপ গুণাঙ্ক (একক চাপ পরিবর্তনে আয়তনের পরিবর্তন)

$h =$  বাল্বের আভ্যন্তরীণ চাপের পরিবর্তন।

(2.9) এবং (2.10) এর মান সমান। অতএব সরলীকরণের পর আমরা লিখতে পারি,

$$V_0 H_0 = \left\{ \frac{V_0(1 + \gamma\theta) + bh}{1 + \alpha\theta} \right\} (H_0 + h) + \frac{vh}{1 + \alpha t}$$

$$\text{অথবা } \alpha\theta = \frac{H_0 + h}{H_0} \frac{V_0(1 + \gamma\theta) + bh}{V_0} + \frac{vh(1 + \alpha\theta)}{H_0 V_0 (1 + \alpha t)} - 1 \quad (2.11)$$

এখানে অজ্ঞাত তাপমাত্রা  $\theta$  (যেটিকে নির্ণয় করতে হবে) (2.11) সমীকরণের উভয়দিকেই রয়েছে। এক্ষেত্রে আমাদের ক্রমিক আসন্নয়ন উপায় (successive approximation) অবলম্বন করে  $\theta$ -এর মান নির্ণয় করতে হবে। প্রথমে  $\theta$  - এর অশোধিত মান,

$$1 + \alpha\theta = \frac{H_0 + h}{H_0} \quad \text{যেহেতু } \left[ \frac{V_0 H_0}{100} = \frac{V_0}{1 + \alpha\theta} \frac{(H_0 + h)}{100} \right]$$

অথবা  $\theta = \frac{h}{\alpha H_0}$  কে (2.11) এর ডানদিকে বসিয়ে  $\theta$ -এর একটি অপেক্ষাকৃত শুদ্ধ মান পাওয়া

যাবে। সেই মানটিকে আবার (2.11) এর ডানদিকে বসিয়ে  $\theta$  র যে মানটি পাওয়া যাবে সেটি

আগেরটি অপেক্ষা শুদ্ধতর হবে। এই প্রক্রিয়াটিকে আরও দু একবার করলে  $\theta$ -এর যে মান পাওয়া যাবে সেটি  $\theta$  -এর নির্ণেয় শুদ্ধ মান হবে।

আদর্শ গ্যাস সমীকরণ থেকে বিচ্যুতিজনিত সংশোধন :—

বাস্তব গ্যাস সাধারণ অবস্থায় আদর্শ গ্যাস সমীকরণ মেনে চলে না। এজন্য বিভিন্ন গ্যাসের ধর্মের উপর নির্ভর করে গাণিতিক উপায়ে বহু বিজ্ঞানী অনেকগুলি অবস্থার সমীকরণ নির্ণয় করেছিলেন। কিন্তু কোন সমীকরণকেই পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে পুরো মেলানো যায়নি। এই অবস্থায় সবচেয়ে নির্ভরযোগ্য উপায় হাল প্রত্যেকটি গ্যাসের জন্য পরীক্ষালব্ধ ফলের ওপর ভিত্তি করে অবস্থার সমীকরণ নির্ণয় করা। এর জন্য বিভিন্ন উষ্ণতা মাপার প্রয়োজন। সেজন্য Kamerling Onnes নিম্নলিখিত সাধারণ সমীকরণটির কথা বলেছিলেন,

$$pv = A + BP + CP^2 + DP^3 + \dots \quad (2.12)$$

A, B, C প্রবকগুলি তাপের অপেক্ষক কিন্তু চাপের ওপর নির্ভরশীল নয়। এগুলির নাম ভিরিয়াল গুণাঙ্ক (virial coefficient)। ভিরিয়াল গুণাঙ্কগুলির মান খুব দ্রুতগতিতে কমতে থাকে। অর্থাৎ A অপেক্ষা B যত কম, B অপেক্ষা C তার থেকে অনেক বেশী কম। কাজে কাজেই গ্যাস থার্মোমিটারে যে চাপের মান পাওয়া যায় সেই চাপে বাস্তব গ্যাসের ক্ষেত্রে দ্বিতীয় ভিরিয়াল গুণাঙ্ক 'B' পর্যন্ত গ্রহণ করলেই যথেষ্ট। অতএব বাস্তব গ্যাসের জন্য আমরা লিখতে পারি,

$$pv = A + Bp \quad (2.13)$$

মনে করি, থার্মোমিটারের গ্যাসের স্থির আয়তনের মান  $V_0$ ,  $0^\circ$ ,  $100^\circ\text{C}$  এবং  $t^\circ\text{C}$ র জন্য আমরা লিখতে পারি

$$\begin{aligned} p_0 V_0 &= A_0 + B_0 P_0 \\ p_{100} V_0 &= A_{100} + B_0 p_{100} \\ p_t V_0 &= A_t + B_t P_t \end{aligned} \quad (2.14)$$

কিন্তু স্থির আয়তনের থার্মোমিটার স্কেলের তাপমাত্রা  $t_g$  কে লেখা যায়,

$$\begin{aligned} t_g &= \frac{P_t - P_0}{P_{100} - P_0} \times 100 \\ &= \frac{(A_t - A_0) + (B_t P_t - B_0 P_0)}{(A_{100} - A_0) + B_{100} P_{100} - B_0 P_0} \times 100 \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$= \frac{A_t - A_o}{(A_{100} - A_o)} \times 100 \left\{ \frac{1 + (B + pt - B_o P_o)/(A_t - A_o)}{1 + (B_{100} P_{100} - B_o P_o)/A_{100} - A_o} \right\}$$

$$= t_{lim} \left\{ 1 + \frac{B_t P_t - B_o P_o}{A_t - A_o} - \frac{B_{100} P_{100} - B_o P_o}{A_{100} - A_o} \right\} \quad (2.16)$$

$\frac{BP_o}{A}$  পদটির মান খুব কম হওয়ায়  $\frac{BP_o}{A}$  এর দ্বিঘাত পদগুলিকে (অর্থাৎ  $\left(\frac{BP_o}{A}\right)^2$  ইত্যাদি পদগুলিকে) অগ্রাহ্য করা হয়েছে।

এখানে  $\frac{A_t - A_o}{A_{100} - A_o} \times 100$  এর স্থানে  $t_{lim}$  বসানো হয়েছে

যদি শুরুতে চাপ খুব কম হয় অর্থাৎ  $p \rightarrow 0$  তখন আমরা (2.13) সমীকরণকে লিখতে পারি  $p\nu = A$  এবং তখন তাপমাত্রার গাণিতিক রূপ হবে  $\frac{A_t - A_o}{A_{100} - A_o} \times 100$ । এই তাপমাত্রাকেই  $t_{lim}$  বলা হয়েছে।

$$\text{এখন (2.16) কে লেখা যায়, } t_{lim} - t_\nu = t_{lim} \left[ \frac{B_{100} P_{100} - B_o P_o}{A_{100} - A_o} - \frac{B_t P_t - B_o P_o}{A_t - A_o} \right] \quad (2.17)$$

উপরের সমীকরণের গ্যাস স্কেলের তাপমাত্রা  $t_\nu$  কে তাপগতীয় স্কেলের তাপমাত্রা  $t_{lim}$  এ পরিবর্তিত করা  $t_{lim}$  কে নির্ণয় করতে ক্রমিক আসন্নয়ন পদ্ধতির সাহায্য নেওয়া হয় কেননা  $t_{lim}$  সমীকরণটির উভয়দিকেই আছে। ক্রমিক আসন্নয়ন পদ্ধতিতে প্রথমে সমীকরণের ডানদিকের  $t_{lim}$  এর স্থানে  $t_\nu$  র মান বসিয়ে বাঁদিকে  $t_{lim}$  এর একটি মান পাওয়া যাবে। দ্বিতীয় বার এই  $t_{lim}$  এর মান ডান দিকে বসিয়ে বাঁদিকে  $t_{lim}$  এর দ্বিতীয় মানটি পাওয়া যাবে। দ্বিতীয় মানটি প্রথমটি অপেক্ষা শুদ্ধতর। আর দু'একবার এই প্রক্রিয়াটি করলে দেখা যাবে  $t_{lim}$  এর মানগুলির (অর্থাৎ তৃতীয়  $t_{lim}$  এবং চতুর্থ  $t_{lim}$  এর মানের) মধ্যে পার্থক্য নেই বললেই চলে। এইটিকেই আমরা  $t_{lim}$  এর যথার্থ মান বলে ধরে নেব। এই প্রক্রিয়াটি সে সব ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য যেখানে শুদ্ধ সমাধান এবং অশুদ্ধ সমাধানের মধ্যে পার্থক্য খুব কম। যেমন এখানে  $(t_{lim} - t_\nu)$  এর মান খুব কম।



স্থির চাপ গ্যাস থার্মোমিটার — এই থার্মোমিটার দ্বারা গৃহীত উষ্ণতাকে  $t_p$  বললে  $t_p$  কে

$$\text{নিম্নলিখিত উপায়ে নির্ণয় করা যায়, } t_p = \frac{\nu_t - \nu_0}{\nu_{100} - \nu_0} \times 100 \quad (2.18)$$

যেখানে  $\nu_t, \nu_0$  এবং  $\nu_{100}, t^\circ\text{C}, 0^\circ\text{C}$  এবং  $100^\circ\text{C}$  এ গ্যাসের আয়তন।

যদি স্থির চাপের মান  $p_0$  হয় এবং (2.18) এর ডান দিকের ভগ্নাংশের উপরও নীচকে  $p_0$  দিয়ে

$$\text{গুণ করা হয় তবে } t_p = \frac{p_0\nu_t - p_0\nu_0}{p_0\nu_{100} - p_0\nu_0} \times 100 \quad (2.19)$$

$$\text{এখন (2.13) কে ব্যবহার করে লেখা যায় } t_p = \frac{(A_t - A_0) + p_0(B_t - B_0)}{(A_{100} - A_0) + p_0(B_{100} - B_0)} \times 100$$

$$= 100 \frac{(A_t - A_0)}{(A_{100} - A_0)} \left[ 1 + p_0 \frac{B_t - B_0}{A_t - A_0} - p_0 \frac{B_{100} - B_0}{A_{100} - A_0} \right]$$

$$\therefore (t_{lim} - t_p) = t_{lim} p_0 \left[ \frac{B_{100} - B_0}{A_{100} - A_0} - \frac{B_t - B_0}{A_t - A_0} \right] \quad (2.20)$$

ওপরের সমীকরণের সাহায্যে আমরা স্থির আয়তনের থার্মোমিটারের স্কেলের মত ক্রমিক আসন্নয়ন পদ্ধতি অবলম্বন করে প্রকৃত  $t_{lim}$  এর মান নির্ধারণ করতে পারব।

আদর্শ গ্যাস স্কেল — গ্যাস থার্মোমিটারের ভিতরের গ্যাসের চাপের মান খুব কম হলে আমরা দেখেছি যে  $t_{lim}$  এর মান স্থির আয়তন এবং স্থির চাপ থার্মোমিটারে একই হয় এবং এই মান হচ্ছে

$$t_{lim} = \frac{A_t - A_0}{A_{100} - A_0} \times 100$$

অতএব আমরা আদর্শ গ্যাস স্কেলের যে কোন তাপমাত্রা  $t$  কে নিম্ন উপায়ে প্রকাশ করতে পারি,

$$t = 100 \frac{\alpha_{p \rightarrow 0}^{im}(p\nu)_t - \alpha_{p \rightarrow 0}^{im}(p\nu)_0}{\alpha_{p \rightarrow 0}^{im}(p\nu)_{100} - \alpha_{p \rightarrow 0}^{im}(p\nu)_0} \quad (2.21)$$

আমরা জানি যে খুব কম চাপে প্রতি একক আয়তনে অণুর সংখ্যা খুব কম হয়। সেক্ষেত্রে

আমরা অণুগুলির মধ্যে পারস্পরিক ক্রিয়াকে অগ্রাহ্য করতে পারি এবং এই কম সংখ্যক অণু বাল্বের মোট আয়তনের খুব ক্ষুদ্র একটি অংশ অধিকার করে থাকে বলে গ্যাসের আয়তনকেও অগ্রাহ্য করা যায়।

সুতরাং অতি অল্প চাপে গ্যাস, আদর্শ গ্যাসের ন্যায় আচরণ করে। সেই কারণে এই অবস্থার (নিম্ন চাপ) ওপর ভিত্তি করে যে উষ্ণতা মাপক স্কেল প্রস্তুত করা হয়েছে তাকে বলা হয় আদর্শ গ্যাস স্কেল।

এই স্কেল এবং তাপগতীয় স্কেল সম্বন্ধে আপনারা তৃতীয় এককে বিস্তারিত জানতে পারবেন।

স্থির আয়তনের থার্মোমিটারকে দৈনন্দিন কাজে ব্যবহারের অনেক অসুবিধা আছে। সেইজন্য আমরা এখন কয়েকটি ব্যবহারযোগ্য থার্মোমিটারের কথা জানবো। এর মধ্যে প্রথমটি হচ্ছে রোধ থার্মোমিটার।

---

## 2.4 রোধ থার্মোমিটার

---

আমরা জানি যে উষ্ণতা বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে ধাতব (পরিবাহী) পদার্থের রোধ বৃদ্ধি পায় কিন্তু অর্ধপরিবাহীর রোধ হ্রাস পায়। রোধ থার্মোমিটারে পদার্থের উপরোক্ত ধর্মগুলির সাহায্য নেওয়া হয়। আমরা প্রথমে আলোচনা করব প্ল্যাটিনাম রোধ থার্মোমিটারের, যেখানে প্ল্যাটিনাম ধাতুকে উষ্ণতামাপক হিসাবে নেওয়া হয়।

### প্ল্যাটিনাম রোধ থার্মোমিটার (Platinum Resistance Thermometer)

কোন বিশুদ্ধ ধাতুকে সীমিত উষ্ণতায় উত্তপ্ত করলে তার রোধের পরিবর্তনের গাণিতিক রূপ নিম্নপ্রকার —

$$R_t = R_0(1 + at + bt^2) \quad (2.22)$$

যেখানে  $R_t$  এবং  $R_0$ ,  $t^\circ\text{C}$  এবং হিমাঙ্কে রোধের মান এবং  $a$  ও  $b$  বিশিষ্ট ধ্রুবক (characteristic constant) উপরোক্ত সূত্রটির আবিষ্কার্তা ক্যালেন্ডার ও গ্রীফিথস (Callender and Griffiths)। তাঁরা বিশুদ্ধ প্ল্যাটিনামকে  $0^\circ\text{C}$  থেকে  $500^\circ\text{C}$  পর্যন্ত উত্তপ্ত করে দেখেন যে প্ল্যাটিনামের রোধের পরিবর্তনকে ওপরের সূত্র দ্বারা প্রকাশ করা যায়। বিশুদ্ধ প্ল্যাটিনামের জন্য

$$a = 3.94 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \text{ এবং } b = -5.8 \times 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}$$

উষ্ণতা নিরূপণের জন্য প্ল্যাটিনামকে বেছে নেওয়ার কারণগুলি নিম্নরূপ :

- (i) প্ল্যাটিনামকে সহজেই বিশুদ্ধ অবস্থায় পাওয়া যায়
- (ii) এই ধাতুর গলনাঙ্কের মান উচ্চ (1772°C)
- (iii) উষ্ণতা পার্থক্যে এই ধাতুর রোধের পার্থক্য যথেষ্ট হয়।
- (iv) এই থার্মোমিটারকে -200°C থেকে 1200°C পর্যন্ত উষ্ণতা মাপার কাজে ব্যবহার করা যায়।

ক্যালেন্ডার আরও দেখান যে  $R_t$  -এর মান থেকে  $t$  নির্ণয় করার জন্য উপরোক্ত দ্বিঘাত সমীকরণের (2.22) সমাধান করা প্রয়োজনীয় নয়। তিনি এই সমীকরণটিকে একটি বিশেষ সহজ রূপ দিয়েছিলেন। ক্যালেন্ডারের অনুযায়ী

$$R_t = R_0(1 + Ct_{pt}) \quad (2.23)$$

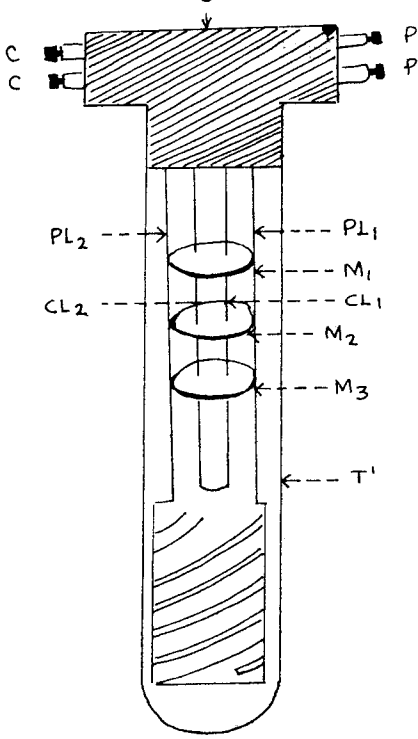
এখানে  $C$  হচ্ছে  $0^\circ\text{C}$  এবং  $100^\circ\text{C}$  এর মধ্যে গড় তাপীয় রোধাঙ্ক (temperature coefficient of resistance) এবং  $t_{pt}$  কে বলা হয় প্ল্যাটিনাম উষ্ণতা যার মান হচ্ছে

$$t_{pt} = \frac{R_t - R_0}{R_{100} - R_0} \times 100 \quad (2.24)$$

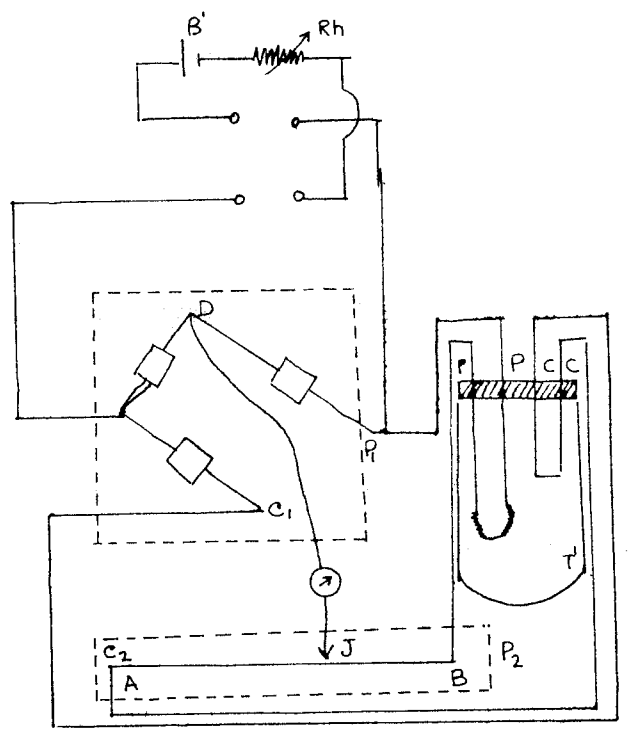
$R_t$ ,  $R_0$  এবং  $R_{100}$  হচ্ছে  $t^\circ\text{C}$ ,  $0^\circ\text{C}$  এবং  $100^\circ\text{C}$  এ প্ল্যাটিনামের রোধ। ( $R_{100} - R_0$ ) কে বলা হয় থার্মোমিটারের মূল অন্তর (fundamental interval)। ক্যালেন্ডার এও দেখিয়েছিলেন যে সঠিক উষ্ণতা  $t$  এবং প্ল্যাটিনাম উষ্ণতা  $t_{pt}$  -এর মধ্যের সম্পর্কের রূপ হচ্ছে

$$t - t_{pt} = \theta \left\{ \left( \frac{t}{100} \right)^2 - \frac{t}{100} \right\} \quad (2.25)$$

যেখানে  $\theta$  তারের বিশেষ উপাদানের ওপর নির্ভরশীল একটি ধ্রুবক। এই  $\theta$ -এর মান (2.22) এবং (2.24) সমীকরণ থেকে নির্ণয় করা যায়। বিশুদ্ধ প্ল্যাটিনামের জন্য  $\theta$ -এর মান 1.5 (2.25) নং সমীকরণ থেকে দেখা যাচ্ছে যে  $0^\circ\text{C}$  এবং  $100^\circ\text{C}$  এই দুই তাপমাত্রাতেই কেবল  $t$  ও  $t_{pt}$  -এর মান সমান হবে। পরীক্ষার সাহায্যে যে উষ্ণতাটি নির্ণয় করা হয় সেটি  $t_{pt}$  সঠিক উষ্ণতা  $t$  নির্ণয় করতে হলে আমাদের (2.25) নং সমীকরণের সাহায্য নিতে হবে এবং ক্রমিক আসন্নয়ন প্রক্রিয়া অবলম্বন করতে হবে।



চিত্র (2.2)



চিত্র (2.3)

একটি প্ল্যাটিনাম রোধ থামোমিটার নিম্নলিখিত উপায়ে নির্মাণ করা হয়।

একটি অল্পর কাঠামোর ওপর বিশুদ্ধ প্ল্যাটিনামের কুন্ডলী আবেশহীনভাবে (noninductive) জড়ানো হয়। কুন্ডলীর দুটি প্রান্ত দুটি তারের সঙ্গে যুক্ত (PL<sub>1</sub> এবং PL<sub>2</sub>)। এই দুটি তারও প্ল্যাটিনামের এবং এদের মোট রোধ C। PL<sub>1</sub> এবং PL<sub>2</sub> -এর ধারে আরও দুটি সংযোজক তার CL<sub>1</sub> এবং CL<sub>2</sub> আছে। এই তার দুটি তলার দিকে পরস্পরের সঙ্গে সংযুক্ত। এই পূরক (compensating) তারদুটিও প্ল্যাটিনামের তৈরী এবং এদের রোধের মান C। পূরক সংযোজক তার (CL<sub>1</sub>, CL<sub>2</sub>) এবং প্ল্যাটিনাম তার (PL<sub>1</sub>, PL<sub>2</sub>) কে কয়েকটি অল্পের পাতের (M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>, M<sub>3</sub>) সাহায্যে তাদের নিজ নিজ জায়গায় ধরে রাখার ব্যবস্থা আছে (চিত্র 2.2)। এই অল্পের পাতগুলির ভিতর ফুটো করা আছে এবং সেই ফুটোর ভিতর দিয়ে প্ল্যাটিনামের তারকে ঢুকিয়ে দেওয়া হয়। প্ল্যাটিনামের কুন্ডলীটি এবং (CL<sub>1</sub>, CL<sub>2</sub>) ও (PL<sub>1</sub>, PL<sub>2</sub>) তারগুলি একটি কাঁচের অথবা পোসিলিনের টিউবের (T') মধ্যে রাখা হয়।

চিত্রে S একটি ইবনাইটের (Ebonite) তৈরী ছিপি। এই ছিপির ভিতর দিয়ে পূরক তার CL<sub>1</sub>, CL<sub>2</sub> কে দুটি স্ক্রু C, C এর (ছিপি S এর সঙ্গে লাগানো) সঙ্গে যুক্ত করা হয়, এবং PL<sub>1</sub>

ও  $PL_2$  তার দুটিকে  $p, p$  স্ক্রু দুটির সঙ্গে যুক্ত করা হয়।  $p, p$  স্ক্রুগুলিও  $S$  ছিপির সঙ্গে লাগানো।

এখন  $T'$  টিউবকে কোন গরম কুণ্ডে ডোবালে প্ল্যাটিনামের কুণ্ডলীটি উত্তপ্ত হবে এবং এর রোধ বৃদ্ধি পাবে।

প্ল্যাটিনাম রোধ থামোমিটারের রোধ মাপার জন্য নিম্নলিখিত যন্ত্রগুলির প্রয়োজন হবে —

(i) পোস্ট অফিস বাক্স, (ii) মিটার ব্রিজ, (iii) ব্যাটারী ( $B'$ ), (iv) রেওস্ট্যাট (Rheostat) ( $Rh$ ), (v) কম্যুটেটর (Commutator), (vi) একটি লম্বিত কুণ্ডলী গ্যালভানোমিটার (suspended coil galvanometer) ( $G$ ) এবং (vii) প্ল্যাটিনাম রোধ থামোমিটার  $T'$ ।

যন্ত্রগুলি দ্বারা প্রস্তুত বর্তনীটি (2.3) নং চিত্রে দেখানো হয়েছে।

$B'$  ব্যাটারীটিকে রেওস্ট্যাটের মধ্য দিয়ে কম্যুটেটরের দুটি কৌণিক চাবিতে যুক্ত করা হল। অন্য দুটি কৌণিক চাবি পোস্ট অফিস বাক্সের প্রথম ও দ্বিতীয় বাহুর দুটি প্রান্তের সঙ্গে যুক্ত হল। প্রথম ও দ্বিতীয় বাহুর সংযোগ স্থল  $D$  এবং মিটার ব্রিজের জকি (Jockey)  $J$  'র মধ্যে গ্যালভানোমিটার লাগানো আছে। একটি অন্তরিত তামার তার থেকে চারটি সমান দৈর্ঘ্যের তার কেটে নেওয়া হল। তারগুলি যথেষ্ট লম্বা হবে যাতে রোধ থামোমিটারটিকে একটি নির্দিষ্ট স্থানে স্থির রেখে তারগুলির এক দিক  $P, P$  অথবা  $C, C$  র সঙ্গে যুক্ত করলে অপর দিককে যে কোন দূরের প্রান্তের (যথা  $C_1$ ) সঙ্গে যুক্ত করা যেতে পারে। চারটি তারের প্রথমটি পোস্ট অফিস বাক্সের প্রথম বাহুর আরম্ভ বিন্দু  $P_1$  এবং প্ল্যাটিনাম তারের ( $P, P$ ) একটি প্রান্তকে যুক্ত করে। প্ল্যাটিনাম তারের ( $P, P$ ) অপর প্রান্ত এবং মিটার ব্রিজের তারের ডান প্রান্ত  $P_2$  কে সংযুক্ত করে দ্বিতীয় তারটি। তৃতীয় তার পোস্ট অফিস বাক্সের তৃতীয় বাহুর  $C_1$  বিন্দুর সঙ্গে পূরক তার প্রান্তের ( $C, C$ ) একটিকে এবং চতুর্থ তারটি মিটার ব্রিজ তারের বাম দিক ( $C_2$ )র সঙ্গে পূরক তারপ্রান্তের ( $C, C$ ) অপরটিকে যুক্ত করে।

চিত্রের ন্যায় বর্তনী তৈরী করার পর  $P, P$  প্রান্ত দুটিকে একটি এবং  $C, C$  প্রান্তদ্বয়কে অপর একটি তার দ্বারা যুক্ত করা হল। পোস্ট অফিস বাক্সে প্রথম ও দ্বিতীয় বাহুতে সমান রোধ এবং তৃতীয় বাহুতে শূন্য রোধ তুলে, ধরা যাক ব্রিজ তারের  $l_0$  দৈর্ঘ্যে নিম্পন্দ বিন্দু (বৈদ্যুতিক মধ্যবিন্দু বা electric midpoint) পাওয়া গেল। অতঃপর  $P, P$  ও  $C, C$  -এর সংযোগ খুলে নিয়ে এবং পোস্ট অফিস বাক্সের তৃতীয় বাহুতে  $r$  রোধ তুলে  $l$  দূরত্বে আর একটি নিম্পন্দ বিন্দু নির্ণয় করা হল। কাজে কাজেই আমরা লিখতে পারি  $R_l = r + 2\rho(l - l_0)$

$\rho$  অর্থাৎ মিটার ব্রিজ তারের একক দৈর্ঘ্যের রোধ জানা থাকলে ওপরের সম্পর্ক থেকে  $R_l$  নির্ণয় করা যায়।

$\rho$  নির্ণয়ের উপায় :— থার্মোমিটার এবং অন্যান্য যন্ত্রাংশকে ঘরের উষ্ণতায় রেখে পোস্ট অফিস বাক্সের তৃতীয় বাহুতে  $(r+m)$  রোধ তুলে মিটার ব্রিজ  $l'$  দূরত্বে একটি নিস্পন্দ বিন্দু নির্ণয় করা হলে আমরা লিখতে পারি,  $\rho = \frac{m}{2(l-l')}$

$\rho$  এর মান নির্ণয় করে আমরা  $R_t$  এর জন্য সমীকরণ থেকে যে কোন তাপমাত্রা  $t^\circ\text{C}$  তে প্ল্যাটিনাম তারের রোধ  $R_t$  নির্ণয় করতে পারি। অতএব (2.24) নং সমীকরণ ব্যবহার করে  $t_{pt}$  নির্ণয় করা যাবে।  $t_{pt}$  র মান থেকে (2.25) নং সমীকরণের সাহায্যে ক্রমিক আসন্নয়ন উপায়ে  $t$  এর মান নির্ণয় করা সম্ভব।

**থার্মিস্টার** — এটিও একটি বিশেষ ধরনের রোধ থার্মোমিটার। থার্মিস্টারের মূল উপাদান হচ্ছে একটি কেলাসিত অর্ধপরিবাহী। উষ্ণতা বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে এর রোধ খুব দ্রুত হ্রাস পায়। অর্থাৎ এটির তাপীয় রোধাঙ্কের মান ঋণাত্মক।

উষ্ণতার সঙ্গে রোধের পরিবর্তনের গাণিতিক রূপটি নিম্নের ন্যায়

$$R_T = A \exp\left(\frac{B}{T}\right) \quad (2.26)$$

এখানে  $R_T = T$  তাপমাত্রার রোধ এবং  $A$  ও  $B$  ধ্রুবক।

$B$  কে বলা যায় বিশিষ্ট তাপমাত্রা (characteristic temperature) এবং এর মান 2000K থেকে 4000K এর মধ্যে।

ধরা যাক  $T_0$  তাপমাত্রায় থার্মিস্টারের রোধ  $R_0$ । তাহলে ওপরের সম্পর্ক থেকে

$$R_0 = A \exp\left(\frac{B}{T_0}\right)$$

$$\text{অতএব } \frac{R_T}{R_0} = \exp\left(\frac{B}{T} - \frac{B}{T_0}\right)$$

$$\therefore R_T = R_0 \exp\left\{B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right\} \quad (2.27)$$

যে সব অর্ধপরিবাহী এই কাজে ব্যবহৃত হয় সেগুলি হল ম্যাঙ্গানিজ, কোবাল্ট, নিকেল, তামা

ইত্যাদি এবং সাধারণ কার্বন নির্মিত রোধ। এই থার্মিস্টারগুলি 1K থেকে 600K পর্যন্ত তাপমাত্রা নির্ণয়ের কাজে ব্যবহার করা যায় এবং যে মান পাওয়া যায় তাতে ত্রুটির পরিমাণ খুবই কম (কয়েক কেলভিন পাঠ পর্যন্ত ত্রুটির পরিমাণ  $10^{-5}k$  এবং ঘরের তাপমাত্রা অথবা তার থেকে বেশী তাপমাত্রার পাঠে  $10^{-3}k$ )। সুগ্রাহিতা ছাড়াও এই থার্মিস্টারের একটি সুবিধা আছে। থার্মিস্টারের আয়তন খুবই ছোট হয়। কিন্তু এটি ব্যবহারের প্রধান অসুবিধা হল যে থার্মিস্টারের রোধের মান নির্ভরযোগ্য নয়। অর্থাৎ একই তাপমাত্রায় এর রোধের মান স্থির থাকে না।

এবার রোধ থার্মিস্টারের ওপর একটি অনুশীলনীর উত্তর নিশ্চয়ই আপনারা দিতে সক্ষম হবেন।

## প্রশ্নাবলি — 2

(a) নিম্নলিখিত বাক্যগুলির মধ্যে শূন্যস্থান পূর্ণ করুন

(i) রোধ থার্মিস্টার নির্মাণে প্ল্যাটিনাম ব্যবহার করা হয়, কারণ, প্ল্যাটিনামের \_\_\_\_\_ উল্লেখযোগ্যভাবে \_\_\_\_\_র সঙ্গে পরিবর্তিত হয়।

(ii) প্ল্যাটিনাম রোধ থার্মিস্টারকে মানক হিসাবে ব্যবহার করা যেতে পারে কারণ এটির \_\_\_\_\_ খুবই নির্ভর যোগ্য।

(iii) থার্মিস্টারের তাপীয় রোধাঙ্কের মান \_\_\_\_\_।

(b) ধরা যাক (2.26) সমীকরণটি দ্বারা একটি নুতন উষ্ণতা নির্ধারক স্কেলের সংজ্ঞা দেওয়া হল। এখন এই স্কেল এবং আদর্শ গ্যাস স্কেলের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করুন।

আপনারা এতক্ষণ রোধ থার্মিস্টার সম্বন্ধে জানলেন। এখন আমরা এমন একটি থার্মিস্টারের কথা পড়ব যেটি ধাতুর একটি বৈদ্যুতিক ধর্মের ওপর ভিত্তি করে তৈরী হয়েছে। সেটি হল তাপযুগ্ম।

## 2.5 তাপযুগ্ম এবং তাপীয় তড়িৎ বর্তনী (Thermocouple)

সীবেক ক্রিয়ার (Seebeck effect) ওপর ভিত্তি করে তাপযুগ্ম তৈরী করা হয়েছে। 1821 খৃষ্টাব্দে সীবেক প্রথম লক্ষ্য করেন যে যদি দুটি বিভিন্ন ধাতুর দুই প্রান্ত পরস্পরের সঙ্গে ঝালাই করে যুক্ত করে একটি সংহত বর্তনী গঠন করা হয় এবং এই অবস্থায় ঐ দুটি সংযোগকে (junction) যদি বিভিন্ন উষ্ণতায় রাখা হয় তবে ঐ বর্তনী দিয়ে একটি তড়িৎ প্রবাহ পাওয়া যায়। দুটি বিভিন্ন ধাতুর সংযোগদ্বয়ের মধ্যে উষ্ণতার ব্যবধানের দরুণ এই তড়িৎপ্রবাহ সৃষ্টির ঘটনাকে সীবেক ক্রিয়া বলা হয়।

দুটি ধাতুর এইরূপ সমবায়কে তাপযুগ্ম এবং ধাতু দুটিকে যুগ্মের উপাদান বলে। একটি তাপযুগ্মের দুই সংযোগের মধ্যে উষ্ণতার পার্থক্য থাকলে যে তড়িৎপ্রবাহ পাওয়া যায় তাকে তাপ - তড়িৎপ্রবাহ (thermo-current) এবং যে বিভব পার্থক্যের জন্য এই তড়িৎ প্রবাহ সম্ভব হয় তাকে তাপ-তড়িচ্চালক বল (thermo emf) বলে। এই তাপ তড়িচ্চালক বল সংযোগ দুটির উষ্ণতার পার্থক্যের ওপর নির্ভর করে এবং তাপযুগ্মের এই ধর্মটি উষ্ণতা নির্ণয়ের কাজে ব্যবহার করা হয়।

তাপ যুগ্মের শীতল সন্ধিটিকে  $0^\circ\text{C}$  এ (গলনশীল বরফের মধ্যে) এবং অন্য সংযোগ বিন্দুটি যে বস্তুর তাপমাত্রা  $t^\circ\text{C}$  নির্ণয় করতে হবে তার মধ্যে রাখলে উদ্ভূত তাপ তড়িচ্চালক বল  $E$  এর মান হবে (সাধারণ উষ্ণতায়) —

$$E = at + bt^2 \quad (2.28)$$

এখানে  $a$ ,  $b$  একটি তাপযুগ্মের জন্য প্র-বক (যেমন তামা, লোহা তাপযুগ্ম) দুটি জ্ঞাত তাপমাত্রায় তাপতড়িচ্চালক বল নির্ণয় করে একটি তাপযুগ্মের  $a$  এবং  $b$  এর মান নির্ণয় করা যায়।

এখন অজানা উষ্ণতার ( $t$ ) উৎসে উষ্ণ সংযোগকে রেখে তাপতড়িচ্চালক বল নির্ণয় করা হয়।

$a$  ও  $b$  -এর মান জানা থাকায়  $e = at + bt^2$  সমীকরণ থেকে অজানা উষ্ণতা নির্ণয় করা যাবে। এই সমীকরণটি সমাধান করলে  $t$  এর দুটি মান পাওয়া যাবে। এদের মধ্যে একটি গ্রহণীয় হবে না এবং অপরটি উৎসের প্রকৃত উষ্ণতা নির্দেশ করবে।

অন্যথায় একটি তাপযুগ্মের উষ্ণ-সংযোগকে বিভিন্ন উষ্ণতায় রেখে তাপ-তড়িচ্চালক বল নির্ণয় করা যেতে পারে এবং তাপতড়িচ্চালক বল বনাম উষ্ণতার একটি লেখচিত্র অঙ্কন করা যেতে পারে (চিত্র 2.3)।

উষ্ণ সংযোগের উষ্ণতা  $t$  ধীরে ধীরে বাড়াতে থাকলে তাপ তড়িচ্চালক বল  $e$  এর মানও বৃদ্ধি পায়। যখন  $t = t_n$  তখন  $e$  এর মান বেড়ে সর্বোচ্চ  $em$  হয়। উষ্ণ সংযোগের যে উষ্ণতায় ( $t_n$ ) তাপতড়িচ্চালক বলের মান সর্বোচ্চ হয় তাকে ঐ যুগ্মের উদাসীন বা নিরপেক্ষ উষ্ণতা (neutral temperature) বলে। উষ্ণ সংযোগের উষ্ণতা আরও বাড়ালে তাপ-তড়িচ্চালক বল কমতে থাকে এবং যখন  $t = t_i$  হয় তখন  $e$  এর মান শূন্য হয়। উষ্ণ সংযোগের উষ্ণতা আরও বাড়ালে ( $t > t_i$ ) তাপতড়িচ্চালক বল অভিমুখ পরিবর্তন করে ফলে তড়িৎপ্রবাহ বিপরীত দিকে চলতে থাকে। এই



উষ্ণতাকে ( $t_1$ ) যুগ্মের উৎক্রম উষ্ণতা বলে। নির্দিষ্ট তাপযুগ্মের জন্য নিরপেক্ষ উষ্ণতা একটি প্রবক। এর মান ঐ যুগ্মের শীতল সংযোগের উষ্ণতার ওপর নির্ভর করে না।

এখন এই লেখটিকে একটি ক্রমাঙ্কন রেখা (calibration curve) হিসেবে ব্যবহার করে যে কোন উৎসের উষ্ণতা নির্ণয় করা যেতে পারে। যে কোন তাপযুগ্মের জন্য উষ্ণ সংযোগের এক ডিগ্রী উষ্ণতা পরিবর্তনের জন্য তাপতড়িচ্চালক বলের যে পরিবর্তন হয় তাকে ঐ তাপযুগ্মের তাপ-তড়িৎ ক্ষমতা (thermo electric power) বলা হয়। এটিকে সাধারণতঃ মাইক্রোভোল্ট  $^{\circ}\text{C}$  তে প্রকাশ করা হয়।

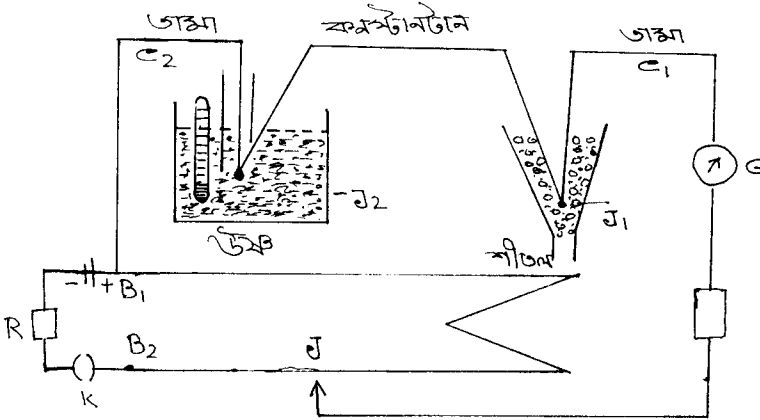
বিভিন্ন ধরনের তাপযুগ্মের সাহায্যে খুব নিম্ন উষ্ণতা থেকে শুরু করে খুব উচ্চ উষ্ণতা পর্যন্ত নির্ণয় করা যেতে পারে। নীচে কয়েকটি বিভিন্ন উষ্ণতায় সাধারণভাবে ব্যবহৃত তাপযুগ্মের একটি তালিকা দেওয়া হল —

#### ব্যবহারিক তাপযুগ্ম

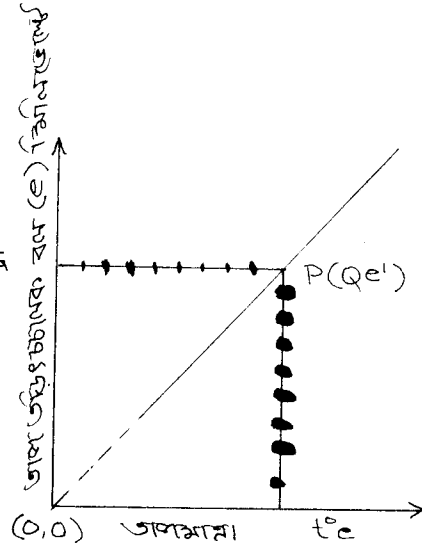
তাপযুগ্ম	উষ্ণতা নির্ণয়ের উর্ধ্বসীমা
1. ক্রোমেল (+) - এ্যালুমেল (-) (Cr + Ni) (Al + Ni)	1300 $^{\circ}\text{C}$
2. লোহা (+) কনস্টানটান (-) (Cu + Ni)	800 $^{\circ}\text{C}$
3. ক্রোমেল (+) কপেল (-) (Ni + Cu)	550 $^{\circ}\text{C}$
4. তামা (+) কনস্টানটান (-)	350 $^{\circ}\text{C}$

পরীক্ষাগারে একটি সাধারণ তামা কনস্টানটাইন তাপযুগ্ম তৈরী করে অজানা উষ্ণতা নির্ণয় করা যেতে পারে। (2.4a) নং চিত্রে এই পরীক্ষা ব্যবস্থা দেখানো হয়েছে।

এখানে একটি পোটেনসিওমিটার ( $B_1B_2$ ) এর সাহায্যে তড়িচ্চালক বলের মান নির্ণয় করা হয়। পোটেনসিওমিটার বর্তনীটি একটি ব্যাটারী B, একটি রোধ বা R এবং একটি চাবি K দ্বারা যুক্ত।



চিত্র 2.4 (a)



চিত্র 2.4 (b)

তাপযুগ্মের ঠান্ডা প্রান্তটি ( $J_1$ ) ঝুঁড়ো করা বরফপূর্ণ একটি পাত্র এবং গরম প্রান্ত ( $J_2$ ) তিন চতুর্থাংশ জলে পূর্ণ একটি বীকারের মধ্যে রাখা আছে। জলের উষ্ণতা মাপার জন্য বীকারে  $\frac{1}{10}^\circ\text{C}$  পর্যন্ত পাঠ নেওয়া যায় এরকম একটি থার্মোমিটার রাখা আছে। গরম প্রান্ত  $J_2$  থেকে নির্গত তাপের তার  $C_2$  কে পোটেনসিওমিটারের ধনাত্মক প্রান্ত  $B_1$  এর সঙ্গে এবং শীতলপ্রান্ত  $J_1$  থেকে নির্গত তাপের তার  $C_1$  কে গ্যালভানোমিটার G এর মধ্য দিয়ে পোটেনসিওমিটারের জকি (Jockey) J এর সঙ্গে যুক্ত করা হয়।

তাপযুগ্মের একটি প্রান্তকে  $0^\circ\text{C}$  এবং অন্যপ্রান্তকে উচ্চতর উষ্ণতায় রাখলে যে তাপতড়িচ্চালক বলের সৃষ্টি হয় তার মান  $e$ । এই তড়িচ্চালক বল পোটেনসিওমিটার তারের  $l$  দৈর্ঘ্যের দুই প্রান্তের বিভব বৈষম্যের সমান হলে গ্যালভানোমিটার কাঁটার কোন বিক্ষেপ হবে না। এখন পোটেনসিওমিটার তারের মোট দৈর্ঘ্য  $L$  এবং প্রতি একক দৈর্ঘ্যের জন্য বিভব হ্রাস (potential drop)  $\rho$  হলে

$$e = \rho l \text{ ভোল্ট} \quad (2.29)$$

ব্যাটারী B এর তড়িচ্চালক বল E, L দৈর্ঘ্যের পোটেনসিওমিটার তারের রোধ R এবং রোধ বাক্সের থেকে তোলা রোধের মান  $R_1$  হলে

$$\rho = \frac{ER}{(R + R_1)L} \text{ ভোল্ট / সেমি} \quad (2.30)$$

(2.29) এবং (2.30) থেকে আমরা পাই,

$$e = \frac{ERL}{(R + R_1)L} \text{ ভোল্ট} \quad (2.31)$$

উষ্ণপ্রাপ্তকে বিভিন্ন উষ্ণতায় রেখে (2.31) নং সমীকরণের সাহায্যে প্রতি ক্ষেত্রে তাপতড়িচ্চালক বল নির্ণয় করে একটি লেখচিত্র আঁকা যেতে পারে যার x অক্ষ বরাবর উষ্ণপ্রাপ্তের তাপমাত্রা  $t^\circ$  সে এবং y অক্ষ বরাবর তাপতড়িচ্চালক বলের মান বসানো হয়। (চিত্র 2.4b)। সাধারণ তাপমাত্রায় (নিরপেক্ষ উষ্ণতা থেকে অনেক কম) লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা হবে। যে কোন অজানা তাপমাত্রা নির্ণয় করতে গেলে তাপযুগ্মের উষ্ণপ্রাপ্তকে অজানা উষ্ণের কুন্ডে রেখে (2.31) সমীকরণ দ্বারা তাপতড়িচ্চালক বল নির্ণয় করে লেখচিত্র থেকে 'e' এর মানের অনুরূপ (corresponding) অজানা উষ্ণতা  $0^\circ\text{C}$  পাওয়া যায়।

তাপযুগ্মের প্রধান সুবিধা হচ্ছে এটি নির্মাণ এবং ব্যবহারের খরচ কম, খুব সহজেই এবং খুব তাড়াতাড়ি এটি অজানা কুন্ডের উষ্ণতায় পৌঁছে যায় এবং সেই কারণে দ্রুত উষ্ণতার পরিবর্তন নির্ণয় করা তাপযুগ্মের দ্বারা সম্ভব।

তাপযুগ্মের অসুবিধাগুলি হোল —

একটি তাপযুগ্মের সুবেদিতা উপাদানের বিশুদ্ধতার ওপর নির্ভর করে। তাপযুগ্মে পেলটিয়াম এবং থমসন ক্রিয়ার জন্য সংশোধন প্রয়োজন। একারণে প্রত্যেকটি তাপযুগ্মের তাপতড়িচ্চালক বল বনাম উষ্ণতার একটি ক্রমাঙ্কন লেখ (calibration curve) দেওয়া থাকে।

রোধ থার্মোমিটার এবং তাপযুগ্মকে এবং তাপযুগ্মকে নিম্নউষ্ণতা নির্ণয়ের কাজেও ব্যবহার করা যায়। তামা-কনস্টানটান এবং লোহা-কনস্টানটান তাপযুগ্মের পাঠ  $-200^\circ\text{C}$  পর্যন্ত অত্যন্ত সুবেদী।  $-200^\circ\text{C}$  এর নীচের উষ্ণতা নির্ণয়ের জন্য সোনা রূপা অথবা রূপা প্ল্যাটিনামের তাপযুগ্ম ব্যবহার করা যায়। হাইড্রোজেনের স্ফুটনাঙ্ক  $20^\circ\text{K}$  এর কম উষ্ণতা মাপার কাজে প্ল্যাটিনাম রোধ থার্মোমিটার সুবেদী নয়। বিশুদ্ধ সীসার তৈরী রোধ থার্মোমিটার  $7^\circ\text{K}$  পর্যন্ত উষ্ণতা মাপার কাজে ব্যবহার করা

যায়। কনস্ট্যানটান থামোমিটারের দ্বারা  $20\text{k}-2\text{k}$  পর্যন্ত নির্ভুলভাবে নির্ণয় করা যায়। কার্বন রোধ থামোমিটারকে  $1^\circ\text{k}$  এর কম উষ্ণতা নিরূপণের কাজে ব্যবহার করা হয় কারণ  $0^\circ\text{k}$  এর কাছাকাছি এর রোধ খুব দ্রুত পরিবর্তিত হয়।

$5\text{k}$  উষ্ণতার নিম্নে ব্যবহৃত উপরোক্ত সব রোধ থামোমিটারকেই হিলিয়াম বাষ্প চাপ থামোমিটারের সাহায্যে ক্রমাঙ্কিত (calibrated) করে নেওয়া হয়।

## 2.6 বাষ্পচাপ থামোমিটার

বাষ্পচাপ থামোমিটার ব্যবহারের প্রধান সুবিধা হল যে কোন কোন উষ্ণতার অন্তরের (temperature intervals) ক্ষেত্রে এই থামোমিটার প্রদত্ত মান অত্যন্ত সুবেদী। আমাদের জানা আছে যে কোন তরলের বাষ্পচাপ কেবলমাত্র উষ্ণতার ওপরই নির্ভর করে। এই তথ্যের ওপর ভিত্তি করেই বাষ্পচাপ থামোমিটার তৈরী করা হয়। প্রত্যেক উষ্ণতাতেই তরলের একটি নির্দিষ্ট বাষ্পচাপ আছে। বাষ্পচাপ থামোমিটারের দ্বারা নির্ণেয় অজ্ঞাত উষ্ণতাতে তরলের বাষ্পচাপ নির্ণয় করা হয়। উষ্ণতা এবং বাষ্পচাপের মধ্যে গাণিতিক সম্পর্ককে নিম্নলিখিত রূপে প্রকাশ করা যায়

$$p = -\frac{A}{T} + B \ln T - CT + D \quad (2.32)$$

এখানে  $p$  = বাষ্পচাপ,  $T$  = পরম উষ্ণতা এবং  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  ধ্রুবক। চারটি জ্ঞাত উষ্ণতায় বাষ্পচাপ  $p$  নির্ণয় করে এই ধ্রুবকগুলির মান নির্ণয় করা যায়।

বাস্তবে বিভিন্ন তরলের জন্য ক্রমাঙ্কন লেখচিত্র দেওয়া থাকে এবং সেগুলি থেকে  $T$  নির্ণয় করা যায়।  $-254^\circ\text{C}$  তাপমাত্রার নীচে হাইড্রোজেন এবং হিলিয়াম বাষ্পচাপ থামোমিটার অপরিহার্য। হিলিয়াম বাষ্পচাপ থামোমিটার দ্বারা  $.75\text{k}$  পর্যন্ত উষ্ণতা মাপা সম্ভব হয়েছে।

## 2.7 বিকিরণ পাইরোমিটার

কোন বস্তুর উষ্ণতা যখন খুব বেশী তখন সেই উষ্ণতা মাপার পদ্ধতিকে পাইরোমিতি (Pyrometry) বলে এবং উষ্ণতা মাপার যন্ত্রটিকে পাইরোমিটার বলা হয়। গ্যাস থামোমিটার, রোধ থামোমিটার, তাপযুগ্ম থামোমিটার, খুব বেশী উষ্ণতায় ব্যবহার করতে গেলে নানারূপ অসুবিধার সম্মুখীন হতে হয়। এই কারণে একটি নির্দিষ্ট সীমার ( $1600^\circ\text{C}$ ) উর্ধ্বে এইসব থামোমিটার ব্যবহার করা হয় না। এই অবস্থায় উত্তপ্ত বস্তুর বিকিরণ মেপে তার উষ্ণতা মাপা হয়। উষ্ণতা মাপার এই পদ্ধতিকে বিকিরণ পাইরোমিতি (radiation pyrometry) বলে। বিকিরণ পাইরোমিটার ব্যবহার করার

জন্য উষ্ণতার কোন উর্ধ্বসীমা থাকে না, বরং উষ্ণতা খুব বেশী হলে বিকিরণের পরিমাণ বাড়ে এবং উষ্ণতা নির্ভুলভাবে জানা সম্ভব হয়।

এই উপায়ে উষ্ণতা স্থির করতে উত্তপ্ত বস্তু হিসাবে একটি কৃষ্ণবস্তু নেওয়া হয় এবং কৃষ্ণ বিকিরণের দুটি বৈশিষ্ট্যের যে কোন একটিকে কাজে লাগানো হয়। পদ্ধতি দুটি হল —

(i) কৃষ্ণ বিকিরণের ক্ষেত্রে স্টিফেন সূত্র প্রযোজ্য। এই সূত্র অনুযায়ী কোন কৃষ্ণবস্তু থেকে মোট বিকিরণ  $E \propto T^4$ । স্টিফানের সূত্র কাজে লাগিয়ে উষ্ণতা মাপতে গেলে সকল তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে মোট বিকিরণ শক্তি স্থির করতে হবে। এই পদ্ধতিতে উষ্ণতা মাপার যন্ত্রকে মোট বিকিরণ পাইরোমিটার (Total radiation pyrometer) বলা হয়।

(ii) অন্যদিকে বিশেষ তরঙ্গদৈর্ঘ্যে (তরঙ্গ দৈর্ঘ্য  $\lambda$  এবং  $\lambda + d\lambda$ -ত্রর মধ্যে) বিকীর্ণ শক্তি মেপে প্ল্যাঙ্ক সূত্রের সাহায্যে উষ্ণতা স্থির করা যায়। এই পদ্ধতিতে উষ্ণতা মাপার যন্ত্রকে আলোক পাইরোমিটার (optical pyrometer) বলা হয়।

স্টিফান এবং প্ল্যাঙ্কের সূত্র কেবলমাত্র কৃষ্ণ বিকিরণের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য কিন্তু কার্যক্ষেত্রে অকৃষ্ণ বস্তুর উষ্ণতা মাপার জন্যও বিকিরণ পাইরোমিটার ব্যবহৃত হয়। সেক্ষেত্রে আমরা বিকিরণের প্রকৃত উষ্ণতার বদলে যে উষ্ণতায় কৃষ্ণ বিকিরক থেকে একই পরিমাণ বিকিরণ নিঃসৃত হয় তার হিসাব পাব। এই উষ্ণতা সব সময় অকৃষ্ণ বস্তুর প্রকৃত উষ্ণতা থেকে কিছুটা কম। বিকিরণ পাইরোমিটারের সাহায্যে অকৃষ্ণ বস্তুর উষ্ণতা মাপলে সেই উষ্ণতাকে কৃষ্ণ বিকিরকের উষ্ণতা (black body temperature) বলা হয়। সাধারণতঃ  $600^\circ\text{C}$  উষ্ণতার কমে বিকিরণ পাইরোমিটার ব্যবহার করা হয় না কারণ ঐ উষ্ণতার কমে যে বিকিরণ নিঃসৃত হয় সেটি মাপবার সময় ভুল হওয়ার যথেষ্ট সম্ভাবনা থাকে। বিকিরণ পাইরোমিটার ব্যবহারের সুবিধা এই যে পাইরোমিটারকে উষ্ণ বস্তুর সংস্পর্শে নেওয়ার অথবা বিকিরকের উষ্ণতায় উত্তপ্ত করার প্রয়োজন হয় না।

আমরা এখানে একটি আলোক পাইরোমিটারের কথা জানব। এই ধরনের পাইরোমিটারে — নির্দিষ্ট তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণের তীব্রতা এবং একটি প্রমাণ আলোক উৎসের তীব্রতা তুলনা করে কৃষ্ণবস্তুর উষ্ণতা মাপা হয়। উষ্ণতা মাপার প্রয়োজনীয় সূত্রটি প্ল্যাঙ্কের শক্তি বন্টন সূত্র থেকে পাওয়া যায়।

শক্তি বন্টন সূত্র অনুযায়ী কৃষ্ণ বিকিরকের উষ্ণতা T হলে, এর পৃষ্ঠতলে প্রতি একক ক্ষেত্র থেকে প্রতি সেকেন্ডে  $\lambda$  এবং  $\lambda+d\lambda$  তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের মধ্যে বিকিরণ

$$E_{\lambda}d\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5 \left( e^{c_2/\lambda T} - 1 \right)} d\lambda$$

অথবা 
$$E_{\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left( e^{c_2/\lambda T} - 1 \right)}$$

$C_1$  এবং  $C_2$  উভয়েই ধ্রুবক।

পরীক্ষা থেকে দেখা যায় যে  $C_2 \approx 1.44$ , লাল বর্ণের আলোর ক্ষেত্রে  $\lambda = 6850 \text{ \AA}$ । কৃষ্ণ বিকিরকের উষ্ণতা  $T = 4000^\circ \text{K}$  ধরলে  $e^{c_2/\lambda T} \approx 230$ ।

এই অবস্থায় প্ল্যাঙ্কের সূত্রকে আমরা লিখতে পারি,

$$E_{\lambda} = c_1 \lambda^{-5} e^{c_2/\lambda T}$$

এটিই কৃষ্ণ বিকিরণে ভিনের (Wien) সূত্র।

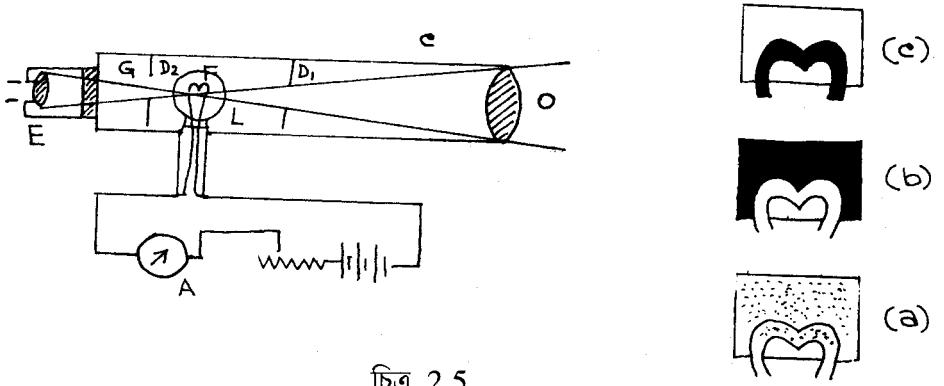
মনে করি  $T_1$  উষ্ণতায় কৃষ্ণ বিকিরকের ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে  $E_{\lambda B} = E$  এবং  $T_2$  উষ্ণতায় প্রমাণ আলোক উৎসের ক্ষেত্রে একই তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে  $E_{\lambda s} = E_2$ । সুতরাং ভিনের সূত্র থেকে

$$\frac{E_2}{E_1} = \exp \left[ \frac{c_2}{\lambda} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right]$$

বিকিরণের তীব্রতার তুলনা করতে নিম্নলিখিত পদ্ধতিটি গ্রহণ করা যেতে পারে।

প্রমাণ আলোক উৎস নিয়ন্ত্রণ করে তার দরুণ আলোকের তীব্রতা, তাপীয় উৎস থেকে আসা, আলোকের তীব্রতার সমান করা হয়। এই পদ্ধতির পাইরোমিটারকে 'disappearing filament type pyrometer' বলা হয়।

চিত্রে এই ধরনের পাইরোমিটার দেখানো হয়েছে।



চিত্র 2.5

সর্বপ্রথম মর্স (Morse) এই ধরনের পাইরোমিটার তৈরী করেন এবং পরবর্তী কালে হবর্ণ (Hoaborn) ও কার্লবার্উমের (Karlblum) চেষ্টায় এটি উন্নতরূপ ধারণ করে। এই পাইরোমিটারটি একটি দূরবীক্ষণ যন্ত্রের মত। কেবল ক্রস ওয়্যার (cross wire) এর পরিবর্তে ঐ জায়গায় প্রমাণ আলোক উৎস রাখা হয়। এই আলোক উৎসের পরিবাহী তারের (filament) উষ্ণতা বর্তনীতে প্রবাহমাত্রা নিয়ন্ত্রণ করে ইচ্ছামত পরিবর্তন করা হয়। এইজন্য বর্হিবর্তনীতে rheostat ব্যবহার করা হয়।

তাপীয় উৎস থেকে বিকিরণ অভিলক্ষ্য (objective) দ্বারা আলোক উৎস L এর ওপর কেন্দ্রীভূত হয় ফলে ঐ স্থানে তাপ প্রতিবিশ্বের সৃষ্টি হয়। এইজন্য লেন্স O কে C নলের মধ্যে প্রয়োজন মত উৎসের দিকে অথবা বিপরীত দিকে ঠেলে দিতে হয়। আলোক উৎস L এর দুইদিকে দুটি আলোক নিয়ন্ত্রক ছিদ্র  $D_1, D_2$  আছে। অভিনেত্রের (eye piece) সামনে লাল কাচের (red filter glass) ভিতর দিয়ে আলোক উৎসকে দেখা হয়। ঐ সময় বর্তনীতে প্রবাহমাত্রা নিয়ন্ত্রণ করে এমন করা হয় যেন তাপ প্রতিবিশ্বের পটভূমিতে বাল্‌বের ফিলামেন্ট বা তার কুন্ডলী F সম্পূর্ণরূপে অদৃশ্য হয় (চিত্র a)। প্রবাহমাত্রা আরও বাড়ালে তারটি উজ্জ্বল মনে হবে। অন্যদিকে প্রবাহমাত্রা কমালে তারটি কালো দেখাবে (চিত্র c এবং b) এবং অভিনেত্রের সামনে লাল কাঁচ থাকায় কেবলমাত্র একটি নির্দিষ্ট তরঙ্গদৈর্ঘ্য (লাল) বিকিরণের তীব্রতার তুলনা করা সম্ভব হল। তাপযুগ্মের সাহায্যে উৎসের উষ্ণতা

মেপে এবং সেই উষ্ণতায় বর্তনীতে প্রবাহমাত্রা জেনে এ্যাম্পিটারটিকে (Ammeter) সরাসরি কেলভিন স্কেলে ক্রমাঙ্কিত করা যায়।

## 2.8 আন্তর্জাতিক ব্যবহারিক তাপীয় স্কেল :—

লর্ড কেলভিন দেখিয়েছিলেন যে আদর্শ গ্যাস স্কেল এবং তাপগতীয় পরম স্কেলের মান একই। কিন্তু বাস্তবে কোনও গ্যাসই আদর্শ গ্যাসের ন্যায় আচরণ করে না এবং গ্যাসকে উষ্ণতা মাপক বস্তু হিসাবে ব্যবহার করাও খুব অসুবিধাজনক। প্রত্যেক গ্যাসের জন্য পাঠের ক্রটি সংশোধনের প্রয়োজন হয়।

ওপরের অসুবিধাগুলির কথা বিবেচনা করে ওজন এবং মাপ নির্ণয়ের জন্য তৈরী আন্তর্জাতিক কমিটির (International Committee on Weights and Measure) 1948 সালের নবম সাধারণ সভায় একটি তাপীয় স্কেল প্রস্তুত করা হয় (1968 সালে এর কিছু পরিবর্তন করা হয়)। এই স্কেলটি হচ্ছে আন্তর্জাতিক ব্যবহারিক তাপীয় স্কেল। এই স্কেলের সাহায্যে খুব সহজেই বৈজ্ঞানিক বা কারিগরী কাজে ব্যবহৃত যে কোন যন্ত্রের ক্রমাঙ্কন করা যায়। এই আন্তর্জাতিক স্কেলের বিশেষত্বগুলি হচ্ছে যে

- (i) এই স্কেলে 11টি নির্দেশবিন্দু বেছে নেওয়া হয়েছে। প্রত্যেকটি বিন্দুকে পরীক্ষালব্ধ সর্বাপেক্ষা নির্ভরযোগ্য তাপগতীয় উষ্ণতার মান দেওয়া হয়।
- (ii) নির্দেশ বিন্দুগুলির মধ্যে ব্যবহার করা যায় এইরূপ কিছু থার্মোমিটার বেছে নেওয়া হয়।
- (iii) ব্যবহারের অন্তর্বর্ধন পদ্ধতি (inter-polation procedure) সম্বন্ধে সহমত প্রকাশ করা হয়েছে।

এই উষ্ণতার মান প্রদত্ত নির্দেশ বিন্দুগুলি নিবাচিত থার্মোমিটারসমূহ এবং অন্তর্বর্ধন পদ্ধতি মিলে একটি প্রায়োগিক স্কেল (empirical scale) তৈরী হয়। এই স্কেলের মান এবং তাপগতীয় উষ্ণতার মান যথাসম্ভব কাছাকাছি রাখার চেষ্টা করা হয়। নীচের তালিকায় আপনারা বিভিন্ন নির্দেশবিন্দু, তাদের উষ্ণতার মান এবং সেই উষ্ণতায় ব্যবহার করা যায় এইরূপ মানক থার্মোমিটার সম্বন্ধে জানতে পারবেন।



ক্রমিক নং	নির্দেশ বিন্দু বা স্থির বিন্দু (Fixed Point)	প্রদত্ত উষ্ণতার মাপ		মানক থার্মোমিটার এবং উষ্ণতা মাপার সীমা
		$T_{68} (^{\circ}\text{k})$	$T_{68} (^{\circ}\text{c})$	
1.	সোনার গলনাঙ্ক	1337.58	1064.43	দীপ্ত পাইরোমিটার (Optical pyrometer) 1337.58 k এর উর্ধ্বে
2.	রূপার গলনাঙ্ক	1235.08	961.43	
3.	দস্তার গলনাঙ্ক	692.73	419.58	
4.	জলের স্ফুটনাঙ্ক	373.15	100	
5.	জলের ত্রিকবিন্দু	273.16	0.01	
6.	তরল অক্সিজেনের স্ফুটনাঙ্ক	90.188	-182.962	তাপযুগ্ম (903.83 - 1337.58k)
7.	অক্সিজেনের ত্রিকবিন্দু	54.361	-218.789	
8.	তরল নিয়নের স্ফুটনাঙ্ক	27.102	-268.048	প্ল্যাটিনাম রোধ থার্মোমিটার
9.	তরল হাইড্রোজেনের স্ফুটনাঙ্ক	20.28	-252.87	(13.81 - 903.89k)
10.	33.360 $\text{Nm}^{-2}$ চাপে তরল এবং বাষ্পীয় হাইড্রোজেনের সাম্যবিন্দু	17.042	-256.108	
11.	হাইড্রোজেনের ত্রিক বিন্দু	13.81	-259.34	

## 2.9 সারাংশ

এই একক পড়ে আমরা কি কি বিষয়ে জানতে পারলাম দেখা যাক —

- কোন তন্ত্র বা বস্তুর উষ্ণতা মাপার জন্য আমরা থার্মোমিটার ব্যবহার করি। এইজন্য এই যন্ত্রটিকে এর তাপগতীয় অবস্থার কোন পরিবর্তন না ঘটিয়ে তন্ত্র অথবা বস্তুর সঙ্গে তাপীয় সাম্যে আনা হয়।
- পরম উষ্ণতা স্কেলে (এটি একটি একবিন্দু উষ্ণতা স্কেল) কোন তন্ত্রের উষ্ণতা নির্ণয় করতে গেলে যে কোন একটি তাপীয় ধর্মের ঐ উষ্ণতায় ধর্মের নির্ণীত মান এবং জলের ত্রিক বিন্দুতে মানের অনুপাতকে 273.16 দিয়ে গুণ করতে হবে।
- তন্ত্রের কোন তাপীয় ধর্মের পরিবর্তনের সাহায্যে উষ্ণতা নির্ণয়ের উদাহরণ হিসাবে স্থির আয়তন গ্যাস থার্মোমিটারকে (যেটি খুব নিম্ন চাপে গ্যাস দ্বারা পূর্ণ) প্রমাণ থার্মোমিটার রূপে ব্যবহার করা যায়। এতে যে তাপীয় স্কেল পাওয়া যায় তাকে আদর্শ গ্যাস স্কেল বলা হয়।

- পরম উষ্ণতা স্কেলের উষ্ণতা ও সেলসিয়াস স্কেলের উষ্ণতার মধ্যের সম্পর্ক নিম্নরূপ

$$T = t + 273.15$$

- গ্যাস থার্মোমিটারের পাঠ খুব সুবেদী ও নির্ভুল। কিন্তু এটির আয়তন খুব বড় এবং যে বস্তুর উষ্ণতা মাপতে হবে সেই উষ্ণতায় আসতে অনেক সময় লাগে। সেইজন্য নিম্ন উষ্ণতা মাপার জন্য সাধারণভাবে এই থার্মোমিটার ব্যবহার করা হয় না।
- উষ্ণতা বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে একটি প্ল্যাটিনামের তারের রোধ বৃদ্ধি হয়। এই তথ্যের ওপর ভিত্তি করে প্ল্যাটিনাম রোধ থার্মোমিটার তৈরী করা হয়। রোধ পরিবর্তনের সূত্রটি হল

$$R_t = R_0(1 + at + bt^2)$$

- থার্মিস্টার একটি অর্ধপরিবাহী। এটির রোধ উষ্ণতার সঙ্গে  $\exp\left(\frac{B}{T}\right)$  সূত্র অনুযায়ী হ্রাস পায়।

- দুটি বিভিন্ন ধাতুর দুইপ্রান্তের সংযোগস্থলগুলিকে বিভিন্ন উষ্ণতায় রাখলে তাপ তড়িৎ বিভবের পরিবর্তন ঘটে। এই ধর্মকে তাপযুগ্মে ব্যবহার করা হয়। বিভব E এবং উষ্ণতা t এর সম্পর্ক নীচের ন্যায়  $E = ct + c_2t^2$ ।

- উচ্চ উষ্ণতা নির্ণয়ের জন্য বিকিরণ পাইরোমিটার ব্যবহার করা হয়। যে বস্তুর উষ্ণতা মাপতে হবে সেই বস্তুর সংস্পর্শে এই যন্ত্রটিকে আনার কোন প্রয়োজন নেই।
- 1968 সালে প্রস্তুত আন্তর্জাতিক ব্যবহারিক তাপীয় স্কেলে কতকগুলি স্থির বিন্দুকে নির্ভুলভাবে নির্দেশ করা আছে। এই স্থির বিন্দুগুলির সাহায্যে যে কোন থার্মোমিটারের ক্রমাঙ্কন (calibration) করা সম্ভব।

## 2.10 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

- (a) ধরা যাক জলের ত্রিক বিন্দুর মান 273.16 ডিগ্রির পরিবর্তে 491.69 ডিগ্রি বলা হল। একটি বস্তুর উষ্ণতা  $T(X)$  এর মান  $X$  এর সাপেক্ষে নির্ণয় করুন। দেওয়া আছে বস্তুর ধর্ম  $X$ , বস্তুর উষ্ণতার সঙ্গে সমানুপাতিক হারে পরিবর্তিত হয়। এই স্কেলের সঙ্গে কেলভিন স্কেলের সম্পর্ক কি? এই স্কেলে হিমাঙ্ক ও বাষ্পাঙ্কের মান নির্ণয় করুন।
- (b) একটি তাপযুগ্মের  $C_1$  ও  $C_2$  -এর মান দেওয়া আছে। সেগুলি হল  $C_1 = 40\mu v^\circ c^{-1}$  এবং  $C_2 = -0.01\mu v^\circ c^{-2}$ । তাপযুগ্মের উষ্ণ প্রান্তের উষ্ণতা শীতল প্রান্ত থেকে  $700^\circ c$  বেশী হলে দুই প্রান্তের মধ্যের তাপ তড়িচ্চালক বলের মান নির্ণয় করুন।
- (c) নীচে প্রদত্ত উষ্ণতাগুলি নির্ণয়ের জন্য উপযুক্ত থার্মোমিটারগুলির নাম লিখুন —  
 (i) 60k (ii) 250k (iii) 1000k (iv) 5000k

## 2.11 উত্তরমালা

### প্রশ্নাবলি — 1

- (a) একটি তরল স্তম্ভের দৈর্ঘ্য, একটি চতুষ্কোণ বস্তুর আয়তন, স্থির আয়তনের পাত্রে অবস্থিত গ্যাসের চাপ।
- (b) (i) যেহেতু এখানে পরম স্কেলের পাঠ  $T$ , সেলসিয়াস স্কেলের পাঠ  $t$  এর 1.5 গুণ অতএব আমরা লিখতে পারি
- $$T = 1.5t = t + 273.15$$
- সমাধান করে আমরা পাই
- $$t = 546.30^\circ C$$
- এবং  $T = 819.45^\circ C$

(ii) এইরূপ ঘটনা অসম্ভব

(c) এখানে উষ্ণতা মাপক ধর্ম হচ্ছে পারদ স্তম্ভের দৈর্ঘ্য। অতএব আমরা লিখতে পারি

$$X_0 = 330\text{cm} \quad X_{100} = 24.87\text{cm} \quad X_T = 1853\text{cm}$$

অতএব আমরা সমীকরণ (2.4) ব্যবহার করে লিখতে পারি

$$T = \frac{18.53 - 3.30}{24.87 - 3.30} \times 100 = 70.6^\circ \text{C}$$

## প্রশ্নাবলি — 2

(a) (i) রোধ, উষ্ণতা

(ii) ক্রমাঙ্কন (calibration)

(iii) ঋণাত্মক

(b) একটি অর্ধপরিবাহীর রোধের মানকে R লিখলে আমরা পাই

$$T = 273.16 \left( \frac{R_T}{R_{T_P}} \right) \quad (2.7 \text{ নং সমীকরণের সাহায্যে})$$

$$= 273.16 \exp \left[ B \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{1P}} \right) \right]$$

$$= 273.16 \exp \left[ B \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{273.16} \right) \right]$$

## সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(a) বস্তুর ধর্ম 'X' উষ্ণতার সঙ্গে সমানুপাতিক ভাবে পরিবর্তিত হলে লেখা যায়

$$X = aT(X)$$

ত্রিক বিন্দুতে  $T(X) = 491.69^\circ$ । অতএব এই উষ্ণতায় X এর মান হবে

$$X_{T_P} = 491.69a$$

নূতন স্কেলটিকে R প্রতীক চিহ্ন দিয়ে চিহ্নিত করলে, আমরা লিখতে পারি

$$T^{\circ}R = \frac{X}{a} = 491.69 \left( \frac{X}{X_{tP}} \right)$$

কেলভিন স্কেলের  $\rho$  সঙ্গে এই স্কেলের সম্পর্ক নির্ণয়ের জন্য

আমরা জানি,

$$T_K = 273.16 \left( \frac{X}{X_{tP}} \right)$$

$$\text{অতএব } \frac{T^{\circ}R}{TK} = \frac{491.69}{273.16} = 1.800$$

নূতন স্কেল

$$\text{হিমাঙ্কের মান} = [273.15 \times 1.8000]^{\circ}R = 491.67^{\circ}R$$

$$\text{বাষ্পাঙ্কের মান} = [373.15 \times 1.8000]^{\circ}R = 671.67^{\circ}R$$

(এই নূতন স্কেলটির প্রকৃত নাম র‍্যাঙ্কিন (Rankine) স্কেল এবং  $1^{\circ}R = 1^{\circ}F$ )

(b) তাপযুগ্মের তাপতড়িৎ বিভব এবং উষ্ণতার মধ্যে সম্পর্ক নিম্নরূপ

$$E = C_1t + C_2t^2$$

$C_1, C_2$  এবং  $t$  এর মান বসিয়ে পাই,

$$E = (40 \times 10^{-6} \times 700 - 0.01 \times 10^{-6} \times 700^2)v = 2.3 \times 10^{-2}v$$

- (c) (i) স্থির আয়তনের গ্যাস থার্মোমিটার, থার্মিস্টার, ক্রোমেল এ্যালুমেল তাপযুগ্ম।  
(ii) স্থির আয়তনের গ্যাস থার্মোমিটার, প্ল্যাটিনাম রোধ থার্মোমিটার, থার্মিস্টার, তাপযুগ্ম।  
(iii) পাইরোমিটার।

## গঠন

### 3.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

### 3.2 মূলতত্ত্ব

#### 3.2.1 বিভিন্ন প্রকার তত্ত্বে কার্যের হিসাব

#### 3.2.2 সূচকচিত্রে নির্দেশিত পথের ওপর কৃতকার্য ও হস্তান্তরিত তাপশক্তির নির্ভরশীলতা

#### 3.2.3 তাপগতীয় চলের পরিবর্তনের সাথে আন্তরশক্তির পরিবর্তন

উদাহরণ

অনুশীলনী — 1

### 3.3 প্রথম সূত্রের প্রয়োগ

অনুশীলনী — 2

### 3.4 সারাংশ

### 3.5 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

### 3.6 উত্তরমালা

---

## 3.1 প্রস্তাবনা

---

বলবিদ্যার প্রাথমিক আলোচনা থেকে আপনারা স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তি সম্পর্কে ধারণা পেয়েছেন। স্থিতিশক্তি থেকে গতিশক্তিতে অথবা গতিশক্তি থেকে স্থিতিশক্তিতে পরিবর্তনের পরিচয়ও সেখানে পেয়েছেন। দম দেওয়া ঘড়ি, অভিকর্ষের প্রভাবে বস্তুর গতি ইত্যাদি ঘটনাকে এই পরিবর্তনের উদাহরণ হিসাবে চিহ্নিত করা যেতে পারে। এছাড়াও বিজ্ঞানের প্রাথমিক আলোচনায় আপনারা নানা প্রকারের শক্তি ও তাদের পারস্পরিক রূপান্তরের অনেক উদাহরণ দেখেছেন। সেখানে আপনারা জেনেছেন যে বিশ্বের মোট শক্তি ধ্রুবক ও শক্তির কেবলমাত্র একরূপ থেকে অন্যরূপে রূপান্তর সম্ভব। এই এককের আলোচনায় আপনারা বিভিন্ন প্রকারের পরিবর্তনে তাপগতিবিদ্যায় ব্যাপক শক্তি সংরক্ষণ সূত্রের প্রয়োগ বুঝতে পারবেন। ব্যাপক শক্তি সংরক্ষণ নীতির প্রকাশ তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রে। প্রাচীন কালের

মানুষদের পাথর ঘষে আগুন তৈরী করা থেকে আধুনিক কালের ইঞ্জিন ও অন্যান্য যন্ত্রের কার্যপ্রণালী নির্ভর করে প্রথম সূত্রের যথার্থ প্রয়োগের ওপর। এছাড়াও প্রথম সূত্র ব্যবহার করে কোন তাপগতীয় অবস্থায় বস্তুর নানারকম ধর্মের আলোচনা করতে পারবেন। এই কারণে তাপগতিবিদ্যার কোন আলোচনায় প্রথম সূত্রের ভূমিকা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ।

**উদ্দেশ্য —**

এই একক পাঠ করে আপনি —

- (1) তাপগতিবিদ্যায় প্রথম সূত্রের ব্যবহার সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- (2) আন্তরশক্তি নামে এক তাপগতীয় অবস্থা অপেক্ষক শক্তির অস্তিত্ব অনুধাবন করতে পারবেন।
- (3) নানাবিধ তাপগতীয় প্রক্রিয়ায় কৃতকার্যের পরিমাপ করতে শিখবেন।
- (4) পদার্থের বিভিন্ন অবস্থায় (যেমন, স্থিরচাপ, স্থির আয়তন, সমোষ্ণ, রুদ্ধতাপ ইত্যাদি) নানাবিধ ধর্মের (উদাহরণস্বরূপ, আপেক্ষিক তাপ, স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক ইত্যাদি) পরিচয় ও তাদের মধ্যে সম্পর্ক জানতে পারবেন।

এই বিশ্বের চারিদিকেই তাপগতিবিদ্যার বিবিধ প্রয়োগ যেহেতু পরিব্যপ্ত রয়েছে, প্রাত্যহিক জীবনের নানা ঘটনাবলী, নানারকম প্রাকৃতিক ঘটনাকে (যেমন, বায়ুমন্ডলের উচ্চতার সাথে উষ্ণতার পরিবর্তন, মানবদেহের কার্যপ্রণালী, যন্ত্রচালিত ইঞ্জিনের কার্যপ্রণালী) প্রথম সূত্রের আলোকে বিচার করতে পারবেন।

---

### 3.2 মূলতত্ত্ব

---

আপনারা ১ নং এবং ২নং এককের আলোচনা থেকে তন্ত্র ও তার পারিপার্শ্বিক জগৎ তাপগতীয় সাম্যাবস্থা ও এই অবস্থা নির্দেশ করার জন্য ব্যবহৃত বিভিন্ন চলের (যেমন চাপ, আয়তন, উষ্ণতা ইত্যাদি) ধারণা পেয়েছেন। সেখানে দেখেছেন নানাবিধ প্রক্রিয়ায় দুটি সাম্যাবস্থার ভিতর পরিবর্তন হতে পারে। রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে তন্ত্র ও তার বাইরের জগতের ভিতর কোনও তাপের আদান-প্রদান হয়না। তন্ত্র তার পারিপার্শ্বিক জগতের ওপর অথবা বাইরের পৃথিবী তন্ত্রের ওপর কাজ করতে পারে। (এখানে মনে রাখা দরকার যে একই তন্ত্রের বিভিন্ন অংশের ভিতর সাম্যের অভাব থাকলে তন্ত্রের এক অংশ অন্য অংশের ওপর যে কাজ করবে তা এই আলোচনায় বিচার্য নয়।) উদাহরণ হিসাবে একটি পিস্টনযুক্ত পাত্রের ভিতর গ্যাস আছে ধরা যাক। পাত্রটাকে আদর্শ তাপ-অন্তরক পদার্থ দিয়ে বাইরের জগৎ থেকে বিচ্ছিন্ন করা হল। যদি গ্যাসের আভ্যন্তরীণ চাপ বাইরের পিস্টনের চাপের থেকে বেশী হয় তবে গ্যাস পিস্টনকে ঠেলে তুলবে যতক্ষণ না বাইরের ও ভিতরের চাপ সমান হয়। বিপরীতভাবে যদি বাইরের পিস্টনের চাপ

গ্যাসের চাপের থেকে বেশী হয় তবে পিস্টনটা গ্যাসকে ঠেলে নীচে নামাবে। যদিও গ্যাসকে এখানে তাপগতীয় তন্ত্র হিসাবে ধরা হয়েছে, এই আলোচনা যে কোন তাপগতীয় তন্ত্রের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। পরীক্ষা করে দেখা গেছে, দুটি নির্দিষ্ট সাম্যাবস্থার মধ্যে রুদ্ধতাপ পদ্ধতিতে যে কাজ হয় তা যে কোন রকমের তাপগতীয় তন্ত্রের ক্ষেত্রে এক হবে। বৈদ্যুতিক কোষ সংযুক্ত কোন বৈদ্যুতিক তার, চৌম্বক ক্ষেত্রে অবস্থিত কোন চৌম্বক পদার্থ ইত্যাদিকে তাপগতীয় তন্ত্র হিসাবে ভাবা যেতে পারে।

পদার্থবিদ্যায় সংরক্ষী বলের প্রভাবে কোন বস্তুর গতিকে (যেমন, মহাকর্ষের প্রভাবে গতি, স্থির তড়িৎ বলের প্রভাবে গতি ইত্যাদি) তাপগতিবিদ্যার রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ার সাথে তুলনা করা যেতে পারে। সংরক্ষী বলের প্রভাবে কোন বস্তুকে এক বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে নিলে যে কাজ করা হয় তার মান কেবলমাত্র দুই বিন্দুর স্থানাঙ্কর ওপর নির্ভর করে, কোন পথ দিয়ে তাকে নেওয়া হয়েছে তার ওপর নির্ভর করেনা। সেখানে বিভব নামে এক বিন্দু অপেক্ষকের ধারণা করা হয় দুটি বিন্দুতে যার মানের পার্থক্য সংরক্ষী বলের প্রভাবে ঐ দুই বিন্দুর ভিতর বস্তুকে স্থানান্তরিত করতে কৃতকার্যের সমান। একইভাবে তাপগতিতত্ত্বেও আমরা আন্তরশক্তি নামে এক অপেক্ষকের ধারণার প্রবর্তন করতে পারি যাকে সাধারণতঃ  $U$  দিয়ে চিহ্নিত করা হয়। একটি নির্দিষ্ট সাম্যাবস্থায়  $U$  এর মান ঐ অবস্থার অন্যান্য তাপগতীয় চলের (যেমন চাপ, আয়তন, উষ্ণতা ইত্যাদি) ওপর নির্ভর করে। দুটি নির্দিষ্ট তাপগতীয় সাম্যাবস্থার মধ্যে  $U$  এর মানের অন্তরফল ঐ দুই অবস্থার মধ্যে রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় কৃতকার্যের সমান। গাণিতিকভাবে একে লিখতে পারি,  $\Delta W = -\Delta U$ , যেখানে  $\Delta W$  কৃতকার্য ও  $\Delta U$  দুটি সাম্যাবস্থার মধ্যে  $U$  এর মানের প্রভেদ।

..... (3.1)

তাপগতিতত্ত্বে তন্ত্র কাজ করলে  $\Delta W > 0$  ও তন্ত্রের ওপর কাজ করা হলে  $\Delta W < 0$  ধরা হয়। কাজেই তন্ত্র কাজ করলে আন্তরশক্তি কমে ও তন্ত্রের ওপর কাজ করা হলে আন্তরশক্তি বাড়ে। (সংরক্ষী বলের প্রভাবে কাজের সাথে সাদৃশ্য লক্ষণীয়) অনু পরিমাণ পরিবর্তনের ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি  $dW = -dU$ .  $U$  কে দুটি স্বাধীন তাপগতীয় চলের অপেক্ষক হিসাবে ভাবলে লিখতে পারি,

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV + \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT \quad \text{..... (3.2)}$$

যেখানে  $U$ কে  $V$  ও  $T$  এর অপেক্ষকরূপে ধরা হয়েছে ও  $dU$ ,  $dV$ ,  $dT$  দুটি নির্দিষ্ট সাম্যাবস্থার মধ্যে অণু পরিবর্তনে  $U$ ,  $V$  ও  $T$  মানের প্রভেদ।  $U$  কে  $P$  ও  $T$  অপেক্ষক হিসাবে ধরলে একইভাবে লেখা যায়,

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_T dP + \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_P dT \quad \text{..... (3.3)}$$



$dU$  কে গণিতের ভাষায় সম্পূর্ণ অবকল বলা হয় এই কারণে যে  $\int_1^2 dU = U_2 - U_1$  কেবলমাত্র প্রথম

ও দ্বিতীয় অবস্থার  $U$  এর মানের ওপর নির্ভর করে। এই আন্তরশক্তি  $U$  এর উৎস সম্পর্কে জিজ্ঞাসা থাকা স্বাভাবিক। যদিও তাপগতিতত্ত্বে আমরা কিভাবে এই তাপগতীয় চলগুলো এল তার বিস্তারিত বিশ্লেষণের মধ্যে যাই না, তবুও মোটামুটি একটা ধারণা পাওয়ার জন্য আন্তরশক্তিকে বস্তুর অণুপরমাণুর গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির সমষ্টিরূপে (কোন নির্দিষ্ট তাপগতীয় অবস্থায়) ভাবতে পারি। (3.1) নং সমীকরণ এই ধারণার সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ। যদি রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় তন্ত্র কাজ করে তবে সেই শক্তি নিশ্চয়ই এসেছে বস্তুর আন্তরশক্তি থেকে খরচ করে। এজন্য সেখানে  $U$  কমে যাবে, ( $\Delta W > 0$ ,  $\Delta U < 0$ ) বিপরীতভাবে তন্ত্রের ওপর কাজ করা হলে সেই শক্তি রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় বস্তুর আন্তরশক্তিকে বাড়িয়ে দেবে ( $\Delta W < 0$ ,  $\Delta U > 0$ ) অর্থাৎ, সমীকরণ (3.1) শক্তিসংরক্ষণ সূত্রের প্রতিফলন রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায়।

এবার মনে করা যাক তাপ-আন্তরক ঢাকনীটা সরিয়ে নেওয়া হল ও একটা তাপ উৎসের সাথে তন্ত্রকে যুক্ত করা হল, যাতে তাপগতীয় পরিবর্তনটা আর রুদ্ধতাপ হবেনা। এর ফলে দুটো বৈশিষ্ট্য লক্ষ্য করা যাবে :— (ক) দুটি নির্দিষ্ট সাম্যাবস্থার মধ্যে পরিবর্তনে কৃতকার্য আর পথ নিরপেক্ষ হচ্ছে না অর্থাৎ বিভিন্ন তাপগতীয় পরিবর্তনে এর মান পাশ্চাতে যাচ্ছে। (খ) আন্তরশক্তির পরিবর্তন ( $\Delta U$ ) ও তন্ত্রের ওপর কৃতকার্য ( $-\Delta W$ ) এর বিয়োগফল শূন্য হবেনা। শক্তিসংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী আমরা একপ্রকার শক্তি  $\Delta Q$  এর অস্তিত্ব স্বীকার করে নেব যা তন্ত্র ও পারিপার্শ্বিক জগতের মধ্যে উষ্ণতার পার্থক্যের জন্য প্রবাহিত হয়। একে তাপগতিতত্ত্বে তাপশক্তি বলা হয়। আমরা লিখতে পারি,

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W \quad \dots (3.4)$$

$$\text{অণু পরিমাণ পরিবর্তনের জন্য, } dQ = dU + dW \quad \dots (3.5)$$

এখানে  $dQ$  ও  $dW$  তে  $d$  এর মাথাটা কেটে দেওয়া হয়েছে  $dQ$  ও  $dW$  অসম্পূর্ণ অবকল বোঝানোর জন্য। দুটি নির্দিষ্ট সাম্যাবস্থার মধ্যে তাপগতীয় পরিবর্তনে  $\Delta Q$  বা  $\Delta W$  এর মান শুধু ঐ দুটি অবস্থার ওপর নির্ভর করেনা, যে পথে উক্ত পরিবর্তন হয়েছে তার ওপরও নির্ভরশীল, (অনুচ্ছেদ 3.32 (খ) এই প্রসঙ্গে দ্রষ্টব্য)। কিন্তু  $\Delta Q - \Delta W = \Delta U$  কেবলমাত্র প্রথম ও অন্তিম সাম্যাবস্থার তাপগতীয় চলগুলির ওপর নির্ভর করে। কাজেই  $Q$  বা  $W$  অবস্থা অপেক্ষক নয়। কোন সাম্যাবস্থায়  $Q$  বা  $W$  এর মান নির্দিষ্ট করার চেষ্টাও অর্থহীন। (3.2.2 ও 3.3 অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য) (3.3) নং সমীকরণ থেকে দুটি সাম্যাবস্থার মধ্যে  $\Delta U$  একই থাকলে  $\Delta Q = \Delta W$  হবে। অর্থাৎ তন্ত্রের একটা নির্দিষ্ট পরিবর্তন যদি শুধু যান্ত্রিক কার্য করে ( $\Delta W$ ) বা তাপশক্তি সরবরাহ করে ( $\Delta Q$ ) হয় তবে  $\Delta Q = \Delta W$  হবে, যদি  $\Delta Q$  ও  $\Delta W$  কে একই এককে প্রকাশ করা হয়। যদি  $\Delta W$  কে যান্ত্রিক একক ও  $\Delta Q$  কে তাপীয় এককে প্রকাশ করা হয়, তবে  $\Delta W = J\Delta Q$  হবে,  $J$  কে তাপের যান্ত্রিক গুণাঙ্ক বলে।  $J$  এর মান সি জি এস এককে 4.2 জুল/ক্যালোরি।

যদি এক পূর্ণ আবর্তনে তন্ত্র ও পারিপার্শ্বিক জগত আবার প্রথম অবস্থায় চলে আসে, তবে  $\oint dQ$

ও  $\oint dW$  পরস্পরের সমান হবে, অর্থাৎ  $\oint dQ = \oint dW$  হবে। সুতরাং কোন পূর্ণ আবর্তনে

$\oint dQ = 0$  হলে  $\oint dW = 0$  বা  $\oint dW = 0$  হলে  $\oint dQ = 0$  হবে। অর্থাৎ কোন তাপ না নিয়ে অবিরামভাবে কোন গতি সম্ভব নয়। শক্তি সংরক্ষণ সূত্রই এই অবিরাম গতিকে নিষিদ্ধ করেছে।

### 3.2.1 বিভিন্ন প্রকার তন্ত্রে কার্যের হিসাব

(ক) গ্যাসীয় তন্ত্র — ধরা যাক, একটি গ্যাসভর্তি আবদ্ধ পাত্রকে পিস্টনের সাথে ঘর্ষণবিহীন ভাবে যুক্ত করা হল। যদি গ্যাসের আভ্যন্তরীণ চাপ বাইরের পিস্টন দ্বারা প্রযুক্ত চাপের থেকে বেশী হয়, তবে গ্যাস পিস্টনকে ঠেলে ওপরে তুলবে। যতক্ষণ না বাইরের চাপ ও ভিতরের চাপ সমান হয়। যদি ভিতরের চাপ ও বাইরের চাপের মধ্যে পার্থক্য খুব কম হয় তবে গ্যাসের প্রসারণ খুব আস্তে হবে এবং সব সময় তাপগতীয় সাম্যাবস্থা বজায় আছে মনে করতে পারি। অণু পরিমাণ প্রসারণে কাজ হবে  $dW = P.Adx = PdV$ , যেখানে  $P$  গ্যাসের চাপ,  $A$  প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল,  $dx$  অণুপ্রসারণ,  $dV$  আয়তনের অণুপরিবর্তন।  $V_1$  থেকে  $V_2$  পর্যন্ত প্রসারণ হলে, মোট কৃতকার্য  $W = \int_1^2 PdV$ , যেখানে আমরা ধরব যে এই সসীম প্রসারণে সবসময় তাপগতীয় সাম্যাবস্থা বজায় আছে।

ক) (1) আদর্শ গ্যাসের আপাতসাম্যীয় সমোষ্ণ প্রসারণে তন্ত্র দ্বারা কৃতকার্য  $\int_{V_1}^{V_2} PdV$ , যেখানে  $V_1, V_2$  যথাক্রমে প্রারম্ভিক ও অন্তিম আয়তন, প্রসারণের প্রতিটি স্তরেই  $PV = nRT$  (যেখানে  $n$  গ্যাসের মোল সংখ্যা) অবস্থার সমীকরণ প্রযোজ্য হবে,

$$\text{সুতরাং কৃতকার্য} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \dots (3.6)$$

ক) (2) আদর্শ গ্যাসের আপাতসাম্যীয় রুদ্ধতাপ প্রসারণে কৃতকার্য  $\int_{V_1}^{V_2} PdV$  এখানে প্রসারণের সময়

$PV^\gamma = \text{ধ্রুবক}$  ( $\gamma$  স্থির চাপে ও স্থির আয়তনে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপের অনুপাত) এই অবস্থার

$$\text{সমীকরণ ধরতে পারি, সুতরাং কৃতকার্য} \int_{V_1}^{V_2} \frac{K}{V^\gamma} dV \quad (k \text{ একটি ধ্রুবক})$$

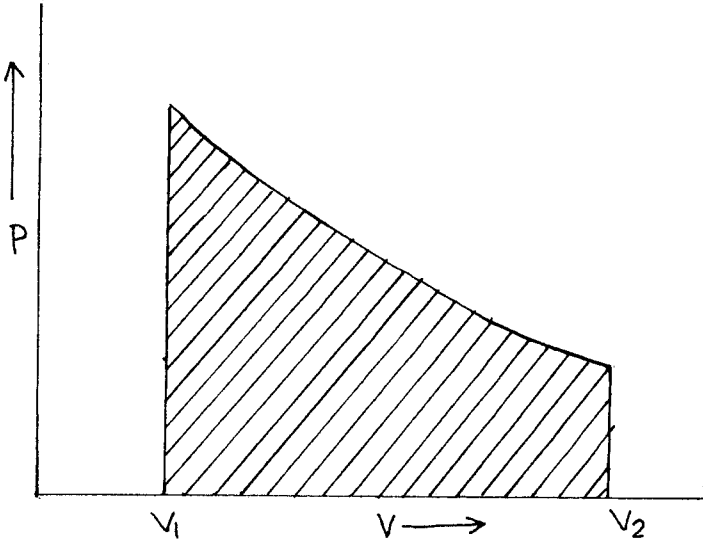
$$= K \left[ \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_{V_1}^{V_2}$$

$$= \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1-\gamma} \quad (K = P_2 V_2^\gamma = P_1 V_1^\gamma) \quad \dots\dots (3.7)$$

ক) (3) আদর্শ গ্যাসের আপাতসাম্যীয় সমচাপ পরিবর্তনে কৃতকার্য =  $\int_{V_1}^{V_2} P dV$ , P স্থির থাকার জন্য

$$\text{কৃতকার্য} = P(V_2 - V_1)$$

ক) (4) সম আয়তন পরিবর্তনে কৃতকার্য শূন্য হবে (যেহেতু  $dV = 0$ ) ওপরের গাণিতিক হিসাব থেকে বুঝতে পারছেন যে আপাতসাম্যীয় পরিবর্তনে প্রসারণ না হয়ে সংকোচন হলে, কৃতকার্য ঋণাত্মক হবে, অর্থাৎ বহির্বিশ্ব সেক্ষেত্রে তন্ত্রের ওপর কার্য করবে, যদি তাপগতীয় পরিবর্তন এমন হয় যে তার জন্য প্রয়োজনীয় অবস্থার সমীকরণকে কোন জানা গাণিতিক সম্পর্ক দিয়ে প্রকাশ করা যাচ্ছে না, তখন আমাদের PV রেখাচিত্রের সাহায্য নিতে হবে। যদি তাপগতীয় সাম্যের শর্ত বজায় থাকে তবে সেই পরিবর্তনে সব সময় অবস্থার সমীকরণ P - V লেখচিত্র দিয়ে বোঝান যাবে। সমাকলনের নিয়মানুসারে কৃতকার্য  $V_1$  ও  $V_2$  আয়তনের মধ্যে রেখাচিত্রের অন্তর্ভুক্ত অংশের ক্ষেত্রফল বোঝাবে। (চিত্র 3.1 দ্রষ্টব্য)



রেখাচিত্রে প্রদর্শিত ক্ষেত্রফল কৃতকার্য বা  $\int_{V_1}^{V_2} P dV$  এর মান বোঝাবে

চিত্র 3.1

অন্যান্য তত্ত্বের ক্ষেত্রে কাজের পরিমাপ :—

(খ) টান দেওয়া তারের ক্ষেত্রে কাজ  $\Delta W = -\int_{l_1}^{l_2} Tdl$  ( $T =$  তারের টান)

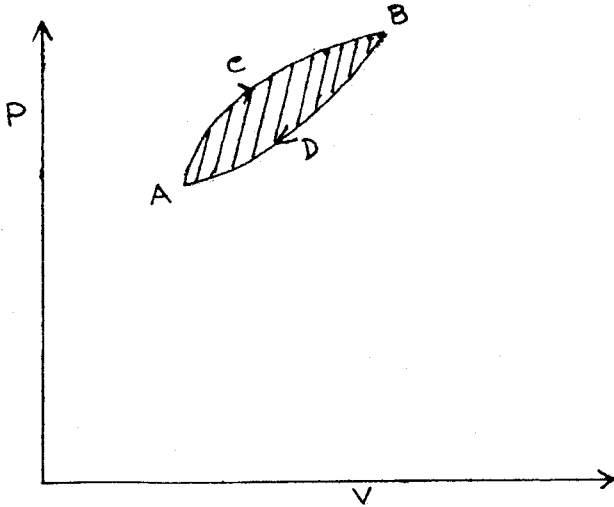
(গ) একটি পৃষ্ঠসরের ক্ষেত্রফল বাড়াতে কৃতকার্য  $= -\int_{A_1}^{A_2} SdA$ , যেখানে  $S$  তরলের পৃষ্ঠটান।

(ঘ) বৈদ্যুতিক কোষে  $t_i$  থেকে  $t_f$  সময়ের মধ্যে  $i$  শক্তির তড়িৎপ্রবাহ পাঠাতে কৃতকার্য  $= -\int_{t_i}^{t_f} E_i dt$ ,

যেখানে কোষের তড়িচ্চালক বল  $E$ ।

(ঙ) একটি চৌম্বক পদার্থে চৌম্বকত্ব বাড়াতে কৃতকার্য  $= -\int_{M_1}^{M_2} VBdM$

যেখানে  $B$  প্রযুক্ত চৌম্বকক্ষেত্র,  $M =$  একক আয়তনে চৌম্বক ভ্রামক। উপরিউক্ত সমস্ত পদ্ধতিই আপাতসাম্যীয় অবস্থায় সম্পন্ন হয়েছে মনে করা হয়েছে। একটি আপাতসাম্যীয় তত্ত্বের পূর্ণ আবর্তনে কৃতকার্য  $P - V$  রেখচিত্রের মধ্যে অন্তর্ভুক্ত ক্ষেত্রফলের মানের সমান হবে। (চিত্র 3.2)

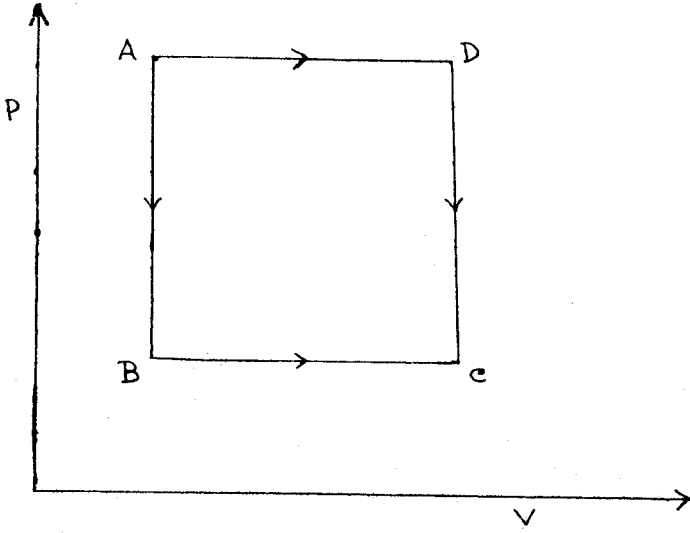


ACBDA পূর্ণ আবর্তনে কৃতকার্য ACBDA বদ্ধ পথে অন্তর্ভুক্ত ক্ষেত্রফল

চিত্র 3.2

### 3.2.2 সূচক চিত্রে নির্দেশিত পথের ওপর কৃতকার্য ও হস্তান্তরিত তাপশক্তির নির্ভরশীলতা :—

পরীক্ষা করে জানা গেছে যে রুদ্ধতাপ পদ্ধতিতে কৃতকার্য কেবলমাত্র প্রাথমিক ও অন্তিম সাম্যাবস্থার ওপর নির্ভর করে, যে পথ দিয়ে এই পরিবর্তন হয়েছে, তার ওপর নির্ভর করেনা। চিত্র (3.3) এ দুটি নির্দিষ্ট সাম্যাবস্থা A ও C এর মধ্যে দুটি ভিন্ন পথ ABC ও ADC দুপ্রকারের তাপগতীয় পরিবর্তন দেখাচ্ছে। এই দুটি পথ রুদ্ধতাপ না হওয়ার জন্য কৃতকার্য পথের ওপর নির্ভর করবে।

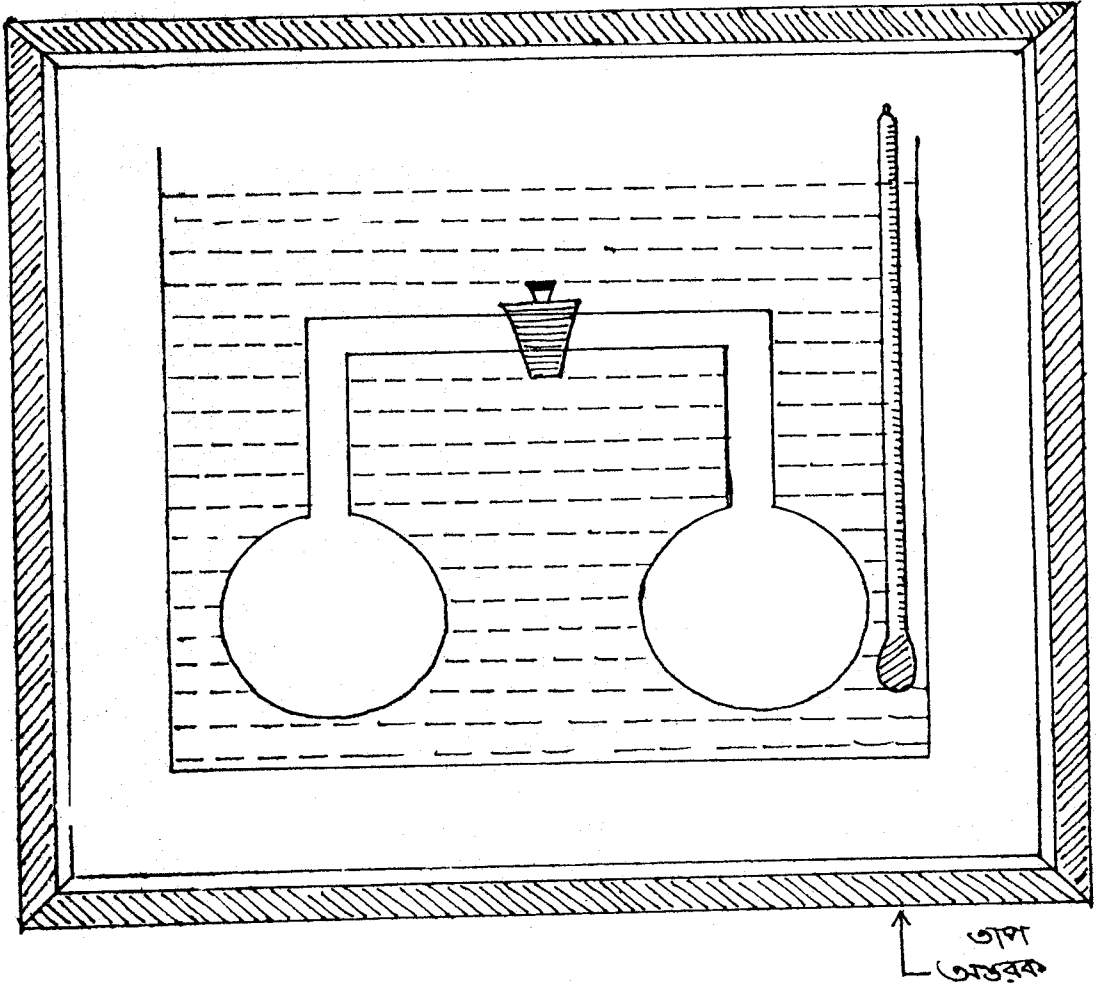


P-V সূচকচিত্রে কৃতকার্য ও শোষিত তাপের পথের ওপর

চিত্র 3.3

ABC পথে কৃতকার্য =  $\int_A^B PdV + \int_B^C PdV$  (এখানে একটা গ্যাসীয় তন্ত্রের আপাতসাম্যীয় পরিবর্তন ধরা হয়েছে) =  $W_{ABC}$  (ধরি)

$\int_A^B PdV = 0$ , যেহেতু AB পথে আয়তনের পরিবর্তন হয়না।



গে-লুসাক ও জুলের পরীক্ষার ব্যবস্থা

চিত্র 3.4

$$\therefore W_{ABC} = \int_B^C PdV = P_B(V_C - V_B) \quad \dots\dots (3.8)$$

একইভাবে ADC পথে কৃতকার্য =  $W_{ADC} = \int_A^D PdV = P_A(V_D - V_A)$

$\therefore V_A = V_B, V_D = V_C, W_{ADC} = P_A(V_C - V_B)$  ..... (3.9)

$\therefore W_{ABC} \neq W_{ADC}$

ABC পথে গৃহীত তাপ  $Q_{ABC} = Q_{AB} + Q_{BC}$

or  $Q_{ABC} = \int_{T_A}^{T_B} C_V dT + \int_{T_B}^{T_C} C_P dT = C_V(T_B - T_A) + C_P(T_C - T_B)$

1 মোল আদর্শ গ্যাস ধরলে  $T_B = \frac{P_B V_B}{R}, T_A = \frac{P_A V_B}{R}, T_C = \frac{P_B V_C}{R}$

$\therefore Q_{ABC} = \frac{C_V V_B}{R}(P_B - P_A) + \frac{C_P P_B}{R}(V_C - V_B)$  ..... (3.10)

অনুরূপভাবে  $Q_{ADC} = \frac{C_V V_C}{R}(P_B - P_A) + \frac{C_P P_A}{R}(V_C - V_B)$  ..... (3.11)

$\therefore Q_{ABC} \neq Q_{ADC}$

$$Q_{ABC} - W_{ABC} = \frac{C_V V_B}{R}(P_B - P_A) + \frac{C_P P_B}{R}(V_C - V_B) - P_B(V_C - V_B)$$

$$= \frac{C_V V_B}{R}(P_B - P_A) + \frac{P_B}{R}(V_C - V_B)(C_P - R)$$

আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে  $C_P - C_V = R$  (এই সূত্র আমরা পরে 3.4 (ক) অনুচ্ছেদে প্রমাণ করব),

( $R =$  গ্যাস ধ্রুবক  $= 8.3$  জুল/মোল/ $^{\circ}$ কেলভিন)

$\therefore Q_{ABC} - W_{ABC} = \frac{C_V}{R}[V_B(P_B - P_A) + P_B(V_C - V_B)]$

$$= \frac{C_V}{R}(P_B V_C - P_A V_B)$$
 ..... (3.12)

$$\begin{aligned}
Q_{ADC} - W_{ADC} &= \frac{C_V V_C}{R} (P_B - P_A) + \frac{C_P P_A}{R} (V_C - V_B) - P_A (V_C - V_B) \\
&= \frac{P_A}{R} (V_C - V_B) (C_P - R) + \frac{C_V V_C}{R} (P_B - P_A) \\
&= \frac{C_V}{R} [P_A (V_C - V_B) + V_C (P_B - P_A)] \\
&= \frac{C_V}{R} (P_B V_C - P_A V_B) \quad \dots (3.13)
\end{aligned}$$

(3.11) এবং (3.12) সমীকরণদ্বয় থেকে দেখা যাচ্ছে যে  $Q_{ABC} - W_{ABC}$  এবং  $Q_{ADC} - W_{ADC}$  পরস্পরের সমান। কিন্তু প্রথম সূত্র থেকে যেহেতু  $\Delta Q - \Delta W = \Delta U$ , সুতরাং ABC ও ADC পথে আন্তরশক্তির পরিবর্তন  $\Delta U$  সমান। A ও C র মধ্যে অন্য যে কোন পথ কল্পনা করলেও একই সিদ্ধান্তে উপনীত হব। এই সহজ উদাহরণ আন্তরশক্তির পরিবর্তনের পথ নিরপেক্ষতা প্রতিষ্ঠিত করে। এই ঘটনার সঙ্গে কোন বলের প্রভাবে বস্তুর গতিকে তুলনা করা যেতে পারে। যদি বলের মধ্যে সংরক্ষী ও অসংরক্ষী দুটো অংশ থাকে তবে সেই বলের প্রভাবে কৃতকার্য দুটি অবস্থার মধ্যে পথের ওপর নির্ভর করে (যা তাপগতীয় পরিবর্তনে কৃতকার্যের সঙ্গে তুলনীয়)। বলের অসংরক্ষী অংশের প্রভাবে কৃতকার্য পথের ওপর নির্ভরশীল (যা অনেকক্ষেত্রে তাপশক্তি হিসাবে উদ্ভূত হয় ও তাপগতিতত্ত্বে যে তাপশক্তি তন্ত্র ও পারিপার্শ্বিকের মধ্যে বিনিময় হয় তার সঙ্গে তুলনীয়)। কিন্তু এই দুটোর বিয়োগফল শুধু সংরক্ষী বলের প্রভাবে কৃতকার্য বোঝাবে, যা পথ নিরপেক্ষ (যার তাপগতিতত্ত্বে আন্তরশক্তির পরিবর্তনের সঙ্গে সাদৃশ্য আছে)।

### 3.2.3 তাপগতীয় চলের সঙ্গে আন্তরশক্তির পরিবর্তন

আন্তরশক্তি U সাধারণভাবে যে কোন দুটি নিরপেক্ষ তাপগতীয় চলের (যেমন P, V, P, T, বা V, T) ওপর নির্ভর করে। Uকে V ও T এর অপেক্ষক ধরলে লিখতে পারি

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV + \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT \quad (\text{অণুপরিমাণ পরিবর্তনের জন্য}) \quad \text{একইভাবে } U = U(P, T) \text{ ধরলে}$$

$$\text{লেখা যায়, } dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_T dP$$

$$U = U(P, V) \text{ ধরলে লিখতে পারি, } dU = \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_V dP + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_P dV$$



দুটি নির্দিষ্ট সাম্যাবস্থার মধ্যে আপাতসাম্যীয় তাপগতীয় পরিবর্তনে আন্তরশক্তির পরিবর্তন বার করতে গেলে ঐ দুই অবস্থার মধ্যে  $dU$ কে সমাকল করতে হবে। কাজেই আমরা দুটি নির্দিষ্ট সাম্যাবস্থার মধ্যে আন্তরশক্তির পরিবর্তন হিসাব করতে পারি। কিন্তু এর জন্য  $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T, \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T$  ইত্যাদি আংশিক অবকল জানার প্রয়োজন। এর পরের এককে আমরা এই অবকলগুলি বার করার জন্য প্রয়োজনীয় তাত্ত্বিক আলোচনা করব। এখন একটা পরীক্ষার দ্বারা (গেলুসীক ও জুলের পরীক্ষা) এই ব্যাপারে কিছুটা আলোকপাত করার চেষ্টা করব।

দুটি বড় বাষ্প নেওয়া হল যার একটিতে কোন গ্যাস, (ধরা যাক, বায়ু) ভর্তি আছে ও অন্যটি বায়ুশূন্য। জলভর্তি একটা ক্যালোরিমিটারের মধ্যে বাল্ব দুটিকে বসান হল ও একটা তাপ-অন্তরক পদার্থ দিয়ে বাইরের জগত থেকে যন্ত্রটাকে বিচ্ছিন্ন করা হল। দুটো বাল্বের সংযোগকারী নলে একটা স্টপকক লাগান আছে যেটা খুললে গ্যাস বায়ুপূর্ণ বাল্ব থেকে বায়ুশূন্য বাষ্পে প্রবাহিত হবে। একটা থার্মোমিটার দিয়ে ক্যালোরিমিটারের জলের উষ্ণতা মাপার ব্যবস্থা করা হল। যেহেতু কোন বাইরের বলের বিপক্ষে এখানে কাজ করা হচ্ছে না, বায়ুর এই প্রসারণকে মুক্ত প্রসারণ বলে। এই প্রসারণে বায়ুর উষ্ণতার কোন তারতম্য হলে জলভর্তি ক্যালোরিমিটারের সাথে তাপীয় সংযোগের ফলে ক্যালোরিমিটারের জলের উষ্ণতার পরিবর্তন হবে এবং তা আমরা থার্মোমিটার দিয়ে মাপতে পারব।

যেহেতু এখানে  $\Delta Q = 0$  এবং মুক্ত প্রসারণে  $\Delta W = 0$ , প্রথম সূত্র প্রয়োগ করে পাই  $(\Delta U)_{\text{বায়ু}} + (\Delta U)_{\text{ক্যালোরিমিটার}} = 0$  যেহেতু ক্যালোরিমিটারের জলের উষ্ণতার কোন পরিবর্তন হয় না এবং এর আয়তনও স্থির থাকে, এর আন্তরশক্তির কোন পরিবর্তন হয়না ধরতে পারি। সুতরাং উপরের সমীকরণ থেকে পাই  $(\Delta U)_{\text{বায়ু}} = 0$  থার্মোমিটারে যেহেতু ক্যালোরিমিটারের জলের উষ্ণতার কোন তারতম্য ধরা পড়েনি, মুক্ত প্রসারণে বায়ুর উষ্ণতা অপরিবর্তিত আছে ধরা যায়। এখানে মনে রাখতে হবে যে মুক্ত প্রসারণ আপাত সাম্যীয় পরিবর্তন নয়। প্রসারণের আগে তাপগতীয় সাম্যাবস্থা ছিল ও প্রসারণের পরে উষ্ণতা পরিমাপের আগে বায়ু ও জলপূর্ণ ক্যালোরিমিটার তাপগতীয় সাম্যাবস্থায় এসেছে ধরে নিচ্ছি। অতএব মুক্ত প্রসারণে লেখা যায়  $\left(\frac{\partial \theta}{\partial V}\right)_U = 0$ । (যেহেতু এখানে স্থির আন্তরশক্তিতে আয়তন পরিবর্তনে উষ্ণতা  $\theta$  অপরিবর্তিত থাকে)।

$$\text{যেহেতু } \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_\theta = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial V}\right)_U \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_V = -C_V \left(\frac{\partial \theta}{\partial V}\right)_U$$

সুতরাং মুক্ত প্রসারণের পরীক্ষা থেকে আমরা পাই,  $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_\theta = 0$

অনুরূপভাবে  $\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_\theta = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_\theta \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_\theta = 0$

ওপরের পরীক্ষা থেকে আমরা যে সিদ্ধান্তে পৌঁছাই তা সর্বতোভাবে ত্রুটিহীন নয়। ক্যালোরিমিটারের তাপগ্রাহিতা বেশী হওয়ায় বায়ুর উষ্ণতার সামান্য হেরফেরে ক্যালোরিমিটারের জলের উষ্ণতার যে তারতম্য হবে তা খুব সুবেদী থার্মোমিটার ছাড়া ধরা পড়বে না। গ্যাসের চাপ খুব কম হলে (যখন যে কোন বাস্তব গ্যাস আদর্শ গ্যাসের মত আচরণ করবে) আধুনিক সুবেদী উষ্ণতামাপক যন্ত্র দিয়েও উষ্ণতার কোন

পার্থক্য লক্ষ্য করা যায়নি। কাজেই আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে আমরা বলতে পারি,  $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_\theta = \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_\theta = 0$

অর্থাৎ, আদর্শ গ্যাসের আন্তরশক্তি কেবলমাত্র উষ্ণতার ওপর নির্ভরশীল। পরে গ্যাসের প্রসারণ সংক্রান্ত অন্য একটা পরীক্ষার (যা জুল-থমসন্ পরীক্ষা বলে খ্যাত ও যার সাথে মুক্ত প্রসারণ পরীক্ষার কিছুটা সাদৃশ্য

রয়েছে) সাহায্যে  $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_\theta$ ,  $\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_\theta$  ইত্যাদি আংশিক অবকলের পরিমাপ করা সম্ভব হয়েছিল। আদর্শ

গ্যাসের ক্ষেত্রে অণু-পরমাণুর মধ্যে বল নেই বলে স্থির উষ্ণতায় কোন পরিবর্তনে স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তির পরিবর্তন হয়না। এই কারণে আদর্শ গ্যাসের আন্তরশক্তি স্থির উষ্ণতায় অপরিবর্তিত আছে ধরা যায়, বাস্তব

গ্যাসের ক্ষেত্রে  $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T < 0$  হবে বলা যায় কারণ প্রসারণের সময় গ্যাসের আন্তরশক্তি খরচ হয় এবং

ফলে U কমে যায় V বাড়লে।

### 3.3 উদাহরণ

(1) কোন অবকল সম্পূর্ণ অবকল হবার শর্ত কি?

উঃ — ধরা যাক  $dZ = M(x,y)dx + N(x,y)dy$  একটি অবকল। যদি  $dZ$  একটি সম্পূর্ণ অবকল হয় তবে  $dZ$  কে  $dZ(x,y)$  রূপে প্রকাশ করতে পারি যেখানে  $z$  কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক  $x$  ও  $y$  এর

অপেক্ষক। এক্ষেত্রে  $\int_1^2 dz = Z(x_2, y_2) - Z(x_1, y_1)$  করে লেখা যাবে এবং এই সমাকলের মান

পথ নিরপেক্ষ হবে।

$$\therefore dZ = M(x,y) dx + N(x,y) dy = \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y dx + \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x dy$$

যেহেতু যে কোন  $dx, dy$  এর জন্য এই সম্পর্ক খাটবে, আমরা লিখতে পারি,

$$\left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_y = M(x,y) \text{ এবং } \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \right)_x = N(x,y)$$

$$\therefore \left. \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right|_x = \left( \frac{\partial M}{\partial y} \right)_x = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$$

$$\text{অনুরূপভাবে } \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right)_y = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$$

কিন্তু  $z(x,y)$  যদি  $x$  ও  $y$  এর একমানের অপেক্ষক হয় তবে প্রমাণ করা যায়,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

$$\text{সুতরাং } dz \text{ সম্পূর্ণ অবকল হবার শর্ত } \left( \frac{\partial M}{\partial y} \right)_x = \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right)_y \text{।}$$

অনুরূপভাবে তিনটি চলের অবকল সম্পূর্ণ অবকল হবার শর্ত হল

$$(dW = M(x,y,z) dx + N(x,y,z) dy + P(x,y,z) dz)$$

$$\left( \frac{\partial M}{\partial y} \right)_{x,z} = \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right)_{y,z}, \quad \left( \frac{\partial M}{\partial z} \right)_{x,y} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{y,z}, \quad \left( \frac{\partial N}{\partial z} \right)_{x,y} = \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{x,z}$$

যেখানে  $M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + P(x,y,z)dz$  টি হল অবকল।

কোন অবকল অসম্পূর্ণ অবকল হলে তাকে কোন সমাকল গুণিতক দিয়ে গুণ করলে অনেক সময় তাকে সম্পূর্ণ অবকলে পরিণত করা যায়। তাপগতিবিদ্যায় সম্পূর্ণ অবকল এবং সমাকল গুণিতকের উদাহরণ আপনারা পরে পাবেন। উদাহরণ স্বরূপ  $dU, dH, dP, dV, dT$  ইত্যাদি সম্পূর্ণ অবকল কিন্তু  $dW, dQ$  অসম্পূর্ণ অবকল।

(2) (ক) মোল গ্যাস, যার অবস্থার সমীকরণ  $P(V-b) = R\theta$ , এর  $V_i$  থেকে  $V_f$  আয়তনে আপাতসাম্যীয় সমোষ্ণ পরিবর্তনে কাজের পরিমাণ বার কর।

(খ) ওপরের গ্যাসের সমীকরণ  $PV = R\theta(1+B'P)$  হলে কাজ কত হবে?

উঃ

$$(ক) \text{ কৃতকার্য} = \int_{V_i}^{V_f} PdU = R\theta \int_{V_i}^{V_f} \frac{dU}{V-b} = R\theta \ln \frac{V_f - b}{V_i - b}$$

$$(খ) \text{ কৃতকার্য} = \int_{V_i}^{V_f} PdV$$

$$PV = R\theta(1+B'P) \text{ হলে } P = \frac{R\theta}{V - RB'\theta}$$

$$\text{সুতরাং কৃতকার্য} = \int_{V_i}^{V_f} \frac{R\theta}{V - RB'\theta} dV = R\theta \ln \left[ \frac{V_f - RB'\theta}{V_i - RB'\theta} \right]$$

(3) কুরী সূত্র মেনে চলে এরকম একটা প্যারা চুম্বক পদার্থের চুম্বকত্ব আপাতসাম্যীয় সমোষ্ণ পরিবর্তনের মাধ্যমে বাড়াতে কৃতকার্য কত হবে?

উঃ — একটা প্যারামেট্রিক পদার্থের চুম্বকত্ব বাড়াতে কৃতকার্য  $= -HdM$ । যেখানে  $H$  চুম্বকক্ষেত্রের প্রাবল্য ও  $M$  পদার্থের মোট চৌম্বক ভ্রামকের চুম্বকক্ষেত্রের দিক উপাংশ। (পদার্থের ওপর কাজ করা হচ্ছে বলে কৃতকার্য ঋণাত্মক) পদার্থের চৌম্বক-প্রাবল্য  $I$  হলে  $M = VI$  যেখানে  $V$  পদার্থের আয়তন। কুরী সূত্র অনুসারে কোন উষ্ণতা  $\theta$  তে  $I = C \frac{H}{\theta}$  যেখানে  $C$  কুরী ধ্রুবক।

$$\text{সুতরাং, মোট কৃতকার্য } (\delta W) = - \int_{M_1}^{M_2} HdM = -V \int_{I_1}^{I_2} HdI$$

$$\therefore \delta W = -V \frac{C}{\theta} \int_{H_1}^{H_2} HdH = \frac{V \cdot C}{2\theta} (H_1^2 - H_2^2)$$

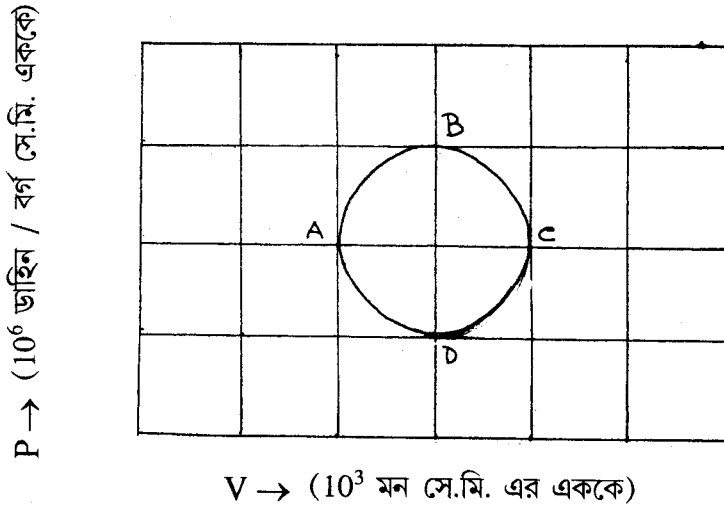
$$\text{অথবা, যেহেতু } H = \frac{I\theta}{C}, \quad \delta W = \frac{\theta}{2C} V (I_1^2 - I_2^2)$$

(4) একটা আদর্শ গ্যাসের স্থির আয়তনে মোলার আপেক্ষিক তাপ  $\frac{3}{2}R$ । এমন একটা গ্যাসের এক গ্রাম অণু-পরিমাণকে একটা আপাতসাম্যীয় প্রক্রিয়ার মধ্য দিয়ে নিয়ে যাওয়া হল যা P-V চিত্রে একটা বৃত্ত দ্বারা নির্দেশিত হয়।

(ক) একটা আবর্তনে মোট কৃতকার্য হিসাব করুন।

(খ) C এবং A অবস্থার মধ্যে আভ্যন্তরীণ শক্তির পার্থক্য বার করুন।

(গ) ABC পথে A থেকে C তে গিয়ে গ্যাস দ্বারা তাপ গ্রহণের পরিমাণ বার করুন।  
(চিত্র নং 3.5)



চিত্র 3.5

উঃ (ক) আবর্তনে কৃতকার্যের পরিমাণ বৃত্তের মধ্যে অন্তর্ভুক্ত ক্ষেত্রফলের সমান হবে। অন্তর্ভুক্ত

$$\text{ক্ষেত্রফলের পরিমাণ} = \frac{22}{7} \times 1^2 \times 10^9 \text{ আর্গ}$$

$$\text{বা কৃতকার্য} = \frac{22}{7} \times 10^2 \text{ জুল} \cong 314 \text{ জুল।}$$

(খ) প্রথম সূত্র থেকে আমরা পাই,  $dU = C_V dT$  (অণু পরিবর্তনের জন্য)

$$\text{সুতরাং A ও C এর মধ্যে আভ্যন্তরীণ শক্তির পার্থক্য} = C_V (T_C - T_A)$$

$$\text{আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ বসিয়ে পাই } T_C - T_A = \frac{2 \times 2}{R} \times 10^2 \text{ জুল}$$

$$\therefore T_C - T_A = \frac{1}{R} P_A (V_C - V_A), P_A = 2 \times 10^6 \text{ ডাইন/বর্গ সেমি,}$$

$$V_C - V_A = 2 \times 10^3 \text{ সেমি}^3$$

$$\therefore \text{আভ্যন্তরীণ শক্তির পার্থক্য} = \frac{3}{2} R \times \frac{4}{R} \times 10^2 \text{ জুল} \cong 600 \text{ জুল}$$

(গ) প্রথম সূত্র প্রয়োগ করে পাই,  $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$

ABC পথে  $\Delta W = ABC$  অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল + ACEF অংশের অন্তর্ভুক্ত ক্ষেত্রফল।

$$\therefore \Delta W = \left( \frac{314}{2} + 2 \times 2 \times 100 \right) \text{ জুল} = 557 \text{ জুল} \quad (1 \text{ জুল} = 10^7 \text{ আর্গ})$$

$\therefore \Delta U = 600$  জুল আভ্যন্তরীণ শক্তির পার্থক্যের পথ নিরপেক্ষতা অনুসারে

$$\Delta U = 600 \text{ জুল} + 557 \text{ জুল} = 1157 \text{ জুল।}$$

(5) একটা রাসায়নিক তন্ত্রের ক্ষেত্রে প্রমাণ করুন,

$$dQ = C_v d\theta + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_\theta + P \right] dV$$

উঃ প্রথম সূত্র থেকে রাসায়নিক তন্ত্রের অণু পরিবর্তনের জন্য  $dQ = dU + PdU$

$$\text{আপাতস্থৈতিক পরিবর্তনে } dU = \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_V d\theta + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_\theta dV \quad (\text{যেখানে } U = U(V, \theta))$$

$$\text{অথবা } dU = C_v d\theta + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_\theta dV$$

$$\text{সুতরাং প্রথম সূত্রে বসিয়ে পাই } dQ = C_v d\theta + \left[ P + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_\theta \right] dV$$

$$\text{অনুসিদ্ধান্ত :— } C_p = \left( \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right)_P = C_v + P \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_P + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_\theta \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_P$$

অথবা  $C_p = C_v + \left[ P + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_\theta \right] V\beta$  যেখানে  $\beta$  স্থির চাপে

$$\text{আয়তন প্রসারণ গুণক বা } \beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_P$$

### অনুশীলনী — 1

- একটি 1.60 ভোল্ট তড়িচ্চালক বলের বৈদ্যুতিক কোষ 2 মিনিট সময় ধরে 100 মিলি অ্যামপিয়ার তড়িতপ্রবাহ পাঠালে কৃতকার্যের পরিমাণ হিসাব করুন।
- একটি তারের দৈর্ঘ্য 80 cms এবং প্রস্থচ্ছেদ  $0.001 \text{ cm}^2$ । স্থির উষ্ণতায় আপাতসাম্যীয় পদ্ধতিতে ওর ওপর টান বৃদ্ধি করে  $10^6$  ডাইনের পরিবর্তে  $10^7$  ডাইন করা হল। নির্দিষ্ট উষ্ণতায় ইয়ং এর গুণক  $2.5 \times 10^{12}$  ডাইন/সেমি<sup>2</sup> হলে কার্য কত হবে?
- একটি তন্ত্র তাপগতীয় পরিবর্তনের পরে আবার প্রথম অবস্থায় ফিরে আসে। আন্তরশক্তির পরিবর্তন কত হবে?
- একটি গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ  $\left( P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$ , যেখানে চিহ্নগুলি স্বাভাবিক অর্থবহ। দেখান যে  $V_f > V_i$  হলে কৃতকার্য ধনাত্মক ও  $V_f < V_i$  হলে কৃতকার্য ঋণাত্মক হবে। (পরিবর্তন সমোষ্ণ ধরে নিন)।
- 1 গ্রাম জল এবং বাষ্পের প্রমাণ বায়ুমন্ডলীয় চাপে আয়তন যথাক্রমে 1 c.c. এবং 1671c.c. (বায়ুমন্ডলীয় চাপ =  $1.013 \times 10^5$  নিউটন / বর্গমিটার)। 1 গ্রাম জলের বাষ্পীভবনে আন্তরশক্তির পরিবর্তন নির্ণয় করুন। (বাষ্পীভবনের লীনতাপ = 540 ক্যালরি / গ্রাম)।

### 3.3 প্রথম সূত্রের প্রয়োগ

(ক) স্থির চাপ ও স্থির আয়তনে আপেক্ষিক তাপের অন্তরফল

$$\text{স্থির চাপে আপেক্ষিক তাপ } C_p = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P$$

প্রথম সূত্র থেকে আমরা পাই  $dQ = dU + PdV$  (কোন গ্যাসীয় তন্ত্রের অণু পরিবর্তনের ক্ষেত্রে)

$$\therefore C_P = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_P + P \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad \text{..... (3.14)}$$

$$\text{স্থির আয়তনে আপেক্ষিক তাপ } C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (\because dV = 0)$$

যেহেতু আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে আন্তরশক্তি  $U$  কেবলমাত্র উষ্ণতার ওপর নির্ভর করে। (গেলুসাক ও জুলের পরীক্ষা থেকে আমরা আগে দেখেছি)  $\left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_P = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$

$$\therefore C_P - C_V = P \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad \text{..... (3.15)}$$

আদর্শ গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ  $PV = nRT$ , যেখানে  $n$  গ্যাসের মোল সংখ্যা

$$\therefore C_P - C_V = P \times \frac{nR}{P} = nR \quad \text{..... (3.16)}$$

অন্য কোন তত্ত্বের ক্ষেত্রে  $P$  ও  $V$  এর পরিবর্তে উপযুক্ত তাপগতীয় চল ব্যবহার করতে হবে। টান দেওয়া তারে  $P$  এর বদলে টান  $T$  ও  $V$  এর বদলে তারের দৈর্ঘ্য  $l$  ব্যবহার করতে হবে। চৌম্বক পদার্থকে তন্ত্র হিসাবে কাজে লাগালে  $P$  এর বদলে চৌম্বক ক্ষেত্রের তীব্রতা ও  $V$  এর পরিবর্তে চৌম্বকত্ব ব্যবহার করা প্রাসঙ্গিক।

### (খ) রুদ্ধতাপ আপাতসাম্যীয় পরিবর্তনে গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ

আপাতসাম্যীয় অণুপরিমাণ রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র প্রয়োগ করলে আমরা পাই,  $dQ = dU + PdV = 0$

$$\text{আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে } dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV = C_V dT \quad \left( \because \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0 \right)$$

$$\therefore \text{ আমরা পাই } C_V dT + PdV = 0$$

1 মোল গ্যাসের ক্ষেত্রে  $PV = RT$  ব্যবহার করে পাওয়া যায়,

$$C_V dT + \frac{RT}{V} dV = 0$$



$$\text{or } \frac{C_V dT}{T} + R \frac{dV}{V} = 0 \quad \dots (3.17)$$

(3.16) কে সমাকল করে আমরা পাই,

$$C_V \ln T + R \ln V = \text{ধ্রুবক}$$

$$T = \frac{PV}{R} \text{ বসিয়ে পাই, } C_V \ln \frac{PV}{R} + R \ln V = \text{ধ্রুবক}$$

$$\text{or } C_V \ln P + C_P \ln V = \text{ধ্রুবক, } (C_P - C_V = R \text{ ব্যবহার করা হল})$$

$$\text{সমাকল করে আমরা পাই } PV^\gamma = \text{ধ্রুবক যেখানে } \gamma = \frac{C_P}{C_V} \quad \dots (3.18), P = \frac{RT}{V} \text{ বসিয়ে}$$

$$\text{আমরা পাই } TV^{\gamma-1} = \text{ধ্রুবক।} \quad \dots (3.17.2)$$

(গ) বায়ুমন্ডলে উচ্চতা বৃদ্ধির সঙ্গে উষ্ণতা হ্রাস

বায়ুমন্ডলে উত্তপ্ত বায়ু হালকা হয়ে ওপরে ওঠে ও এর আয়তন প্রসারণ হয়। বাতাস তাপের কুপরিবাহী বলে উক্ত প্রসারণ রুদ্ধতাপ হয় ধরা যায়।

$$dh \text{ উচ্চতা পার্থক্যের জন্য চাপের তফাত } dP = -9Pdh \quad (3.19)$$

$$\text{বায়ুকে আদর্শ গ্যাস ধরলে } PV = nRT = \frac{m}{M} RT$$

$$\text{অথবা } P = \frac{\rho RT}{M} \quad (\rho = h \text{ উচ্চতায় বায়ুর ঘনত্ব})$$

$$(3.18) \text{ সমীকরণে বসিয়ে পাই } dP = -\frac{9M}{RT} \frac{Pdh}{T}$$

$$\text{বা, } \frac{dP}{P} = -\frac{9M}{RT} dh \quad (3.20)$$

$$\text{রুদ্ধতাপ প্রসারণে চাপ ও উষ্ণতার মধ্যে সম্পর্ক } \frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} = \text{ধ্রুবক}$$

$$(3.17.2 \text{ নং সমীকরণ থেকে } V = \frac{nRT}{P} \text{ বসিয়ে আমরা এই সম্পর্ক পাই)} \quad (3.21)$$

(3.19) থেকে আমরা পাই,  $\gamma \ln T - (\gamma - 1) \ln P = \text{ধ্রুবক}$ ,

$$\text{বা } \frac{\gamma dT}{T} = (\gamma - 1) \frac{dP}{P}$$

(3.19) সমীকরণ থেকে আমরা পাই,  $\frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \frac{dT}{T} = -\frac{9M}{RT} dh$

$$\text{বা } \frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{9M}{R}$$

সমাকলনের সাহায্যে আমরা পাই,  $T_0 - T = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{Mgh}{R}$  ..... (3.22)

যেখানে  $T_0$ ,  $h = 0$  বায়ুমন্ডলের উষ্ণতা।

বায়ুর ক্ষেত্রে  $\gamma = 1.4$ ,  $M = 28.9$ ,  $R = 8.31$  জুল / মোল ডিগ্রী

$$\text{ধরলে } \frac{dT}{dh} = -9.74^\circ \text{C / km}$$

কাজেই এই (3.22) নং সমীকরণ থেকে ভূপৃষ্ঠ এবং  $h$  উচ্চতার কোন জায়গায় মধ্যে বায়ুমন্ডলের উষ্ণতার পার্থক্য বার করা যায়।

### (ঘ) রাসায়নিক বিক্রিয়ার প্রয়োগ

প্রথম সূত্রের আলোকে আমরা আন্তরশক্তির মত এনথালপি নামে একটি ব্যাপক তাপগতীয় চলের ধারণা করতে পারি। একে  $H$  দ্বারা চিহ্নিত করা হয় ও কোন একটা তাপগতীয় অবস্থায়  $H = U - PV$  যেখানে  $U$ ,  $P$  ও  $V$  যথাক্রমে ঐ নির্দিষ্ট অবস্থার আন্তরশক্তি, চাপ ও আয়তন।

কোন আপাতসাম্যীয় অণুপরিবর্তনে  $dH = dU + PdV - VdP = dQ + VdP$  স্থির চাপে  $dH = dQ$ । সুতরাং স্থির চাপে কোন তাপগতীয় পরিবর্তন হলে তদ্রূপ ও বাইরের জগতের মধ্যে যে তাপশক্তির বিনিময় হয় তা তদ্রূপের প্রাথমিক ও অন্তিম অবস্থার মধ্যে এনথালপি অপেক্ষকের পরিবর্তন দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়। অর্থাৎ  $(\Delta Q)_P = \Delta H$ , যেখানে  $(\Delta Q)_P$  স্থির চাপে যে তাপশক্তির বিনিময় হয় তার সমান ও  $\Delta H$  দুটি অবস্থার মধ্যে এনথালপি  $H$  এর পরিবর্তন। যে সমস্ত রাসায়নিক বিক্রিয়া স্থির চাপে হয় সেইগুলিতে তাপ উদ্ভূত না শোষিত হবে তা বিক্রিয়ার আগে ও পরে দুই অবস্থার মধ্যে এনথালপির পরিবর্তন হিসাব করলেই বলতে পারবেন। একইভাবে স্থির আয়তনে কোন বিক্রিয়া হলে  $\Delta U = \Delta Q$ । কাজেই প্রথম ও শেষ অবস্থার মধ্যে আন্তরশক্তির পরিবর্তন ওই বিক্রিয়ায় যে তাপশক্তির বিনিময় হবে তাকে নির্দেশ করে।

1. প্রমাণ করুন,  $C_P - C_V = \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$
2. তাপ-অন্তরিত তন্ত্রের ক্ষেত্রে প্রথম সূত্রের গাণিতিক রূপ কি হবে? এই সূত্রটি সংক্ষেপে ব্যাখ্যা করুন।
3. কোন আদর্শ গ্যাসের  $C_P = 160$  জুল / মোল / ° কেলভিন।  $C_P$  ও  $C_V$  এর অনুপাত বার করুন।
4. নিম্নলিখিত পদ্ধতিগুলি কি প্রকারের হবে বলুন (গ্যাসীয় তন্ত্রের ক্ষেত্রে) :  
(ক)  $\delta Q = \delta U$  হলে, (খ)  $\delta U = -\delta W$  হলে, (গ)  $\delta Q = \delta W$  হলে।
5. একটি তাপ-অন্তরিত পাত্রে জল নাড়ান হল। কোন উত্তরগুলি সঠিক?  
(ক) তাপ প্রবাহ হয়, (খ) কাজ করা হয়, (গ) উষ্ণতা কমে যায়, (ঘ) আন্তরশক্তি বাড়ে।

### 3.4 সারাংশ

(ক) কোন তন্ত্র ও পারিপার্শ্বের মধ্যে উষ্ণতার পার্থক্যের জন্য যে শক্তির বিনিময় হয় তাকে তাপশক্তি বলে। কোন তাপগতীয় পরিবর্তনে তন্ত্র ও পারিপার্শ্বিক জগতের মধ্যে তাপশক্তি ও যান্ত্রিক শক্তির বিনিময় হতে পারে। তন্ত্র বাইরের জগতের ওপর অথবা বাইরের জগত তন্ত্রের ওপর কার্য করতে পারে। বিভিন্ন আপাতসাম্যীয় তাপগতির পরিবর্তনে কৃতকার্যের হিসাব নিম্নরূপ।

(খ) (1) গ্যাসীয় তন্ত্রের ক্ষেত্রে কৃতকার্য  $= \int_1^2 PdV$ , যেখানে 1 ও 2 যথাক্রমে প্রাথমিক ও অন্তিম অবস্থা। আদর্শ গ্যাসের সমোষ্ণ পরিবর্তনে  $n$  মোলের জন্য কৃতকার্য  $= nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$ । রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে কৃতকার্য  $= \frac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{\gamma - 1}$ , যেখানে চিহ্নগুলি স্বাভাবিক অর্থবহ।

(2) টান দেওয়া তारे কৃতকার্য  $= - \int_1^2 Td\ell$ , যেখানে  $T$  তারের টান।

$$(3) \text{ পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল বাড়াতে কৃতকার্য} = -\int_1^2 S dA, \text{ যেখানে } S \text{ দুই মাধ্যমের}$$

সংযোগস্থলের পৃষ্ঠটান।

$$(4) \text{ বৈদ্যুতিক কোষে কৃতকার্য} = -\int_1^2 E i dt, \text{ যেখানে } E \text{ বৈদ্যুতিক কোষের তড়িচ্চালক}$$

বল,  $i$  তড়িতপ্রবাহের পরিমাপ।

$$(5) \text{ চৌম্বক পদার্থে চুম্বকত্ব বাড়াতে কৃতকার্য} = -\int_1^2 V B dM, \text{ যেখানে } V \text{ পদার্থের}$$

আয়তন,  $B$  চৌম্বক ক্ষেত্রের তীব্রতা,  $M$  একক আয়তনে চৌম্বক ড্রামক।

### গৃহীত বা বর্জিত তাপের হিসাব

কোন তন্ত্রের ক্ষেত্রে স্থির চাপ ও স্থির আয়তনে সম্পন্ন কোন তাপগতীয় পরিবর্তনে গৃহীত বা বর্জিত

তাপ যথাক্রমে  $\int_1^2 C_p dT$  ও  $\int_1^2 C_v dT$ । যেখানে  $C_p$  ও  $C_v$  যথাক্রমে স্থিরচাপ ও স্থির আয়তনে

পদার্থের আপেক্ষিক তাপ। গ্যাসীয় ছাড়া অন্যান্য তন্ত্রে গৃহীত বা বর্জিত তাপের পরিমাণ বার করতে হলে  $C_p$  ও  $C_v$  এর জায়গায় সেই তন্ত্রের উপযুক্ত আপেক্ষিক তাপ বসাতে হবে।

(গ) সাধারণভাবে, কৃতকার্য অথবা গৃহীত বা বর্জিত তাপের পরিমাণ কেবলমাত্র প্রথম ও অন্তিম অবস্থার ওপর নির্ভর করে না, যে পথ দিয়ে পরিবর্তন হয়েছে তার ওপরও নির্ভরশীল, কিন্তু গৃহীত বা বর্জিত তাপ ও কৃতকার্যের বিয়োগফল শুধুমাত্র প্রথম ও শেষ সাম্যাবস্থার উপর নির্ভর করে, যে ভাবে ওই পরিবর্তন হয়েছে তার ওপর নির্ভরশীল নয়। এই অন্তরফলকে প্রথম ও দ্বিতীয় সাম্যাবস্থার আন্তরশক্তির পরিবর্তন বলে। গাণিতিক সূত্রের আকারে প্রকাশ করলে আমরা লিখতে পারি,  $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$ । যেখানে চিহ্নগুলি স্বাভাবিক অর্থবহ। রুদ্ধতাপ পরিবর্তনের ক্ষেত্রে  $\Delta Q = 0$  কাজেই সেখানে কৃতকার্যের পরিমাণ দুই সাম্যাবস্থার আন্তরশক্তির পরিবর্তনের সমান হয় এবং এই কারণে কেবলমাত্র দুটি সাম্যাবস্থার তাপগতীয় চলার ওপর নির্ভর করে, এইভাবে আমরা তাপগতিতত্ত্বে আন্তরশক্তির ধারণা আনতে পারি। অণুপরিমাণ পরিবর্তনের ক্ষেত্রে প্রথম সূত্রের গাণিতিক রূপ হবে

$dQ = dU + dW$  ( $dQ$  ও  $dW$  অসম্পূর্ণ অবকল বলে এদের মাথা কেটে দেওয়া হয়েছে)। এই সূত্র তাপগতিবিদ্যায় শক্তিসংরক্ষণ সূত্রের প্রয়োগ।

(ঘ) তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র প্রয়োগ করে আমরা পাই ,

(1) মোল আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে  $C_p - C_v = R$  (এটা প্রমাণ করতে আমরা আদর্শ গ্যাসের

জন্য  $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T = 0$  বা আন্তরশক্তি শুধু উষ্ণতার ওপর নির্ভরশীল ধরা হয়েছে,

যা গেলুসাক ও জুলের মুক্ত প্রসারণ পরীক্ষা থেকে আপনারা দেখেছেন)।

(2) রুদ্ধতাপ আপাত সাম্যীয় পরিবর্তনে আদর্শ গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ  $PV^\gamma = \text{ধ্রুবক}$ । এই সমীকরণকে উষ্ণতা  $T$ , চাপ  $P$  অথবা উষ্ণতা  $T$ , আয়তন  $V$  এর ভিতর সম্পর্ক রূপেও আপনারা লিখতে পারবেন। এ ছাড়াও —

(3) বায়ুমন্ডলের উচ্চতার সাথে উষ্ণতার পরিবর্তন হিসাব করতে পারবেন।

(4) এনথালপি ( $H = U + PV$ ) নামে একটা তাপগতীয় অবস্থা অপেক্ষকের ধারণা করতে পারবেন, রাসায়নিক বিক্রিয়ায় উদ্ভূত বা শোষিত তাপের পরিমাণ বার করতে যার ব্যবহার হয়। এইভাবে ভৌত রসায়নেও প্রথম সূত্রের প্রয়োগ করতে পারবেন।

### 3.5 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

#### সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি

1. একটা স্থির আয়তন ক্যালোরিমিটারের মধ্যে জ্বালানী ও অক্সিজেনের মিশ্রণকে দহন করা হল। ক্যালোরিমিটারের জলের উষ্ণতা বাড়তে দেখা গেল। জ্বালানী ও অক্সিজেনের মিশ্রণকে তদ্ব হিসাবে ধরলে বলুন,

- (ক) তাপ সঞ্চালিত হয়েছে কি?
- (খ) কাজ কি করা হয়েছে?
- (গ) আন্তরশক্তির পরিবর্তন হয়েছে কি?

2. একটা তরলকে তাপ-অন্তরক পাত্রের মধ্যে ভালভাবে নাড়ান হল। তরলকে তদ্ব ধরলে বলুন,

- (ক) তাপ সঞ্চালিত হয়েছে কি?

(খ) কাজ কি করা হয়েছে?

(গ) আন্তরশক্তির পরিবর্তন হয়েছে কি?

3. একটা স্থির আয়তন তাপ-অন্তরিত পাত্রকে একটা দেয়াল দিয়ে দুভাগে ভাগ করা হয়েছে, দেয়ালকে হঠাৎ সরিয়ে দিলে প্রমাণ করুন যে আন্তরশক্তি অপরিবর্তিত থাকবে।
4. একটা আদর্শ গ্যাসকে সমোষ্ণভাবে প্রসারিত করা হল, আন্তরশক্তির পরিবর্তন কত হবে?
5. এক ব্যক্তি রোজ  $10^4$  জুল পরিমাণ শক্তি আহার থেকে পান। তিনি রোজ  $1.2 \times 10^4$  জুল শক্তি কাজের মাধ্যমে ব্যয় করুন। প্রতিদিন তার আন্তরশক্তির পরিবর্তন কত হবে?
6. এই এককে বিভিন্ন তাপগতীয় তন্ত্রে কার্যের গাণিতিক হিসাব দেওয়া হয়েছে। এই হিসাব তাপগতীয় পরিবর্তনের প্রকৃতি সম্পর্কে কিছু ধরা হয়েছে কি?

অন্যান্য প্রশ্নাবলি :—

1. নিম্নলিখিত অবকলগুলি সম্পূর্ণ অবকল কিনা বলুন :

(ক)  $(x^2 - y^2) dx - 2(x - 1) y dy$

(খ)  $2x \sin y dx - x^2 \cos y dy$

2. নিম্নলিখিত পথ বরাবর সমাকলগুলির মান নির্ণয় করুন :

(ক)  $\int_0^1 \int_0^1 [(x^2 + y^2) dx - 2xy dy]$

(i) সরলরেখা  $y = x$ , (ii) অধিবৃত্ত  $y = x^2$  বরাবর

3. (ক) 100 গ্রাম ভরের একটা ধাতুখন্ডের ওপর চাপ আপাতসাম্যীয় সমোষ্ণ পদ্ধতিতে শূন্য থেকে 1000 বায়ুমন্ডলীয় চাপ পর্যন্ত বাড়ান হল। কৃতকার্যের পরিমাণ হিসাব করুন। (ঘনত্ব = 10.0 গ্রাম/ঘন সেমি, স্থির উষ্ণতার আয়তন স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক =  $1.50 \times 10^{12}$  ডাইন/বর্গ সেমি)

(খ) একটা তারের টানকে আপাতসাম্যীয় সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় বাড়ান হল। প্রমাণ করুন, কৃতকার্য  $= -\frac{L}{2AY}(T_f^2 - T_i^2)$ , যেখানে T যে কোন অবস্থায় তারের টান, L, A ও Y যথাক্রমে তারের দৈর্ঘ্য, প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল ও উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক।

4. (ক) এক মোল ভ্যান-ডার-ওয়াল্‌স গ্যাসের ক্ষেত্রে অবস্থার সমীকরণ  $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(v - b) = RT$  এবং আন্তরশক্তি  $U = CT - \frac{a}{V}$ , যেখানে a, b, c এবং R ধ্রুবক। স্থিরচাপ ও স্থির আয়তনে তাপগ্রাহিতা নির্ণয় করুন।

(খ) একটা আদর্শ প্যারাচুম্বক পদার্থের ক্ষেত্রে প্রমাণ করুন,

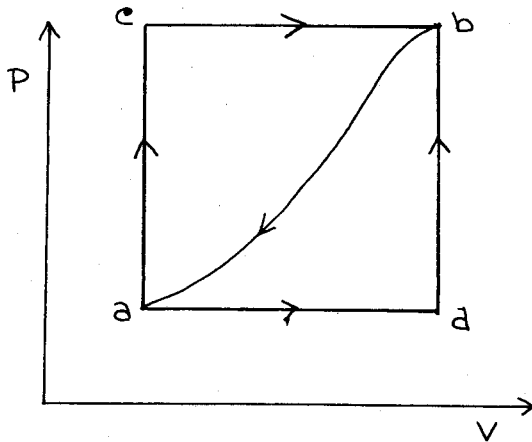
$$C_B - C_M = \frac{KB^2}{T^2}, \text{ যেখানে } C_B = \left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_B \text{ এবং } C_M = \left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_M$$

5. প্রদত্ত চিত্রানুসারে (চিত্র নং 3.6) একটা তন্তুকে a অবস্থা থেকে b তে a c b পথে নিয়ে যাওয়া হলে 80 ক্যালরি তাপ গৃহীত হয় ও তন্তু 30 ক্যালরি কাজ করে।

(ক) a d b পথ বরাবর কার্য 10 ক্যালরি হলে এই পথে কত তাপ গৃহীত হয়?

(খ) b → a বক্রাকার পথে তন্তুর ওপর 20 ক্যালরি কার্য করা হলে তন্তু কত তাপ গ্রহণ বা বর্জন করে?

(গ) যদি  $V_a = 0$  এবং  $V_d = 40$  ক্যালরি হয়, তবে a d ও d b পথে কত তাপ গৃহীত হয়?



চিত্র 3.6

### 3.6 উত্তরমালা

অনুশীলনী —

1. কৃতকার্য = তড়িচ্চালক বল  $\times$  প্রবাহিত আধান

$$= 1.60 \times \frac{100}{1000} \times 120$$

$$= 19.2 \text{ জুল।}$$

2. কৃতকার্য =  $\int_{l_1}^{l_2} T dl$

তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক  $Y = \frac{TL}{Al}$

$$\text{সুতরাং কৃতকার্য} = \int_{l_1}^{l_2} \frac{AY}{L} l dl$$

$$= \frac{YA}{2L} (l_2^2 - l_1^2)$$

$$= \frac{YA}{2L} \frac{L^2 (T_2^2 - T_1^2)}{A^2 Y^2}$$

$$= \frac{L}{2} \frac{(T_2^2 - T_1^2)}{AY} \text{ যেখানে } T_2 \text{ ও } T_1, \text{ যথাক্রমে অন্তিম ও প্রারম্ভিক টান।}$$

মান বসাইয়া পাই, কৃতকার্য =  $\frac{80(10^{14} - 10^{12})}{2 \times 0.001 \times 2.5 \times 10^{12}}$

$$= 16 \times 99 \times 10^3$$

$$= 1.58 \times 10^6 \text{ আর্গ}$$

3. আন্তরশক্তি যেহেতু তাপগতীয় অবস্থার চলরাশির ওপর নির্ভর করে, তাপগতীয় পরিবর্তনের পর প্রথম অবস্থায় ফিরে এলে আন্তরশক্তি একই থাকবে।



$$4. \quad \text{কৃতকার্য} = \int_{V_i}^{V_f} PdV$$

$$\text{অবস্থার সমীকরণ থেকে পাই, } P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

$$\begin{aligned} \text{সুতরাং, কৃতকার্য} &= \int_{V_i}^{V_f} \left( \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) dV \\ &= RT \ln \frac{V_f - b}{V_i - b} + a \left( \frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_i} \right) \end{aligned}$$

যদি  $V_f = V_i + \Delta V$  ধরা যায়  $b \ll V_f$  বা  $V_i$  হয়, তবে

$$\begin{aligned} \text{কৃতকার্য} &= RT \ln \left( \frac{V_i + \Delta V}{V_i} \right) + a \left( \frac{1}{V_i + \Delta V} - \frac{1}{V_i} \right) \\ &\cong RT \frac{\Delta V}{V_C} - \frac{a \Delta U}{V_i^2} \end{aligned}$$

$$\text{যেহেতু } \frac{a}{V^2} \ll \frac{RT}{V}, \quad a \ll RTV$$

সুতরাং  $\Delta V > 0$  হলে কৃতকার্য ধনাত্মক ও  $\Delta V < 0$  হলে কার্য ঋণাত্মক হবে।

5. বাষ্পীভবনে। গ্রাম জল দ্বারা গৃহীত তাপ = 540 ক্যালরি =  $540 \times 4.2$  জুল

কৃতকার্য =  $P(V_2 - V_1)$ , যেখানে  $P$  বায়ুমন্ডলীয় চাপ,  $V_2 - V_1$  দশা পরিবর্তনে 1 গ্রাম জলের আয়তনের পরিবর্তন।

$$\text{সুতরাং কৃতকার্য} = 1.013 \times 10^6 \times 1670 \times 10^{-7}$$

$$= 1.013 \times 167 \text{ জুল (1 জুল} = 10^7 \text{ আর্গ)}$$

(বায়ুমন্ডলীয় চাপ = 76 সেমি পারদস্তম্ভের চাপের সমান)

$$= 76 \times 13.6 \times 980 \text{ ডাইন / বর্গ সেমি}$$

$$= 1.013 \times 10^6 \text{ ডাইন / বর্গ সেমি}$$

## অনুশীলনী — 2

$$1. \quad C_p = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P \text{ প্রথম সূত্র থেকে পাই,}$$

$$C_p = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_P + P \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad 3.21$$

U কে V ও T এর অপেক্ষক ধরলে,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_P &= \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \\ &= C_V + \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \end{aligned}$$

3.21 নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$C_p - C_V = \left[ P + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

2. তাপ-অন্তরিত অবস্থায় যেহেতু  $\delta Q = 0$ , প্রথম সূত্রের গাণিতিক রূপ হবে,

$$\delta U + \delta W = 0$$

$$\therefore \delta U = -\delta W$$

অতএব তন্ত্রের ওপর কার্য করা হলে  $\delta W < 0$  এবং  $\delta U > 0$  হবে, অর্থাৎ আন্তরশক্তি বাড়বে।

অনুরূপভাবে তন্ত্র কাজ করলে  $\delta W > 0$  এবং  $\delta U < 0$ , অর্থাৎ তন্ত্রের আন্তরশক্তি কমবে।

3. আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে  $C_p - C_V = 8.3$  জুল / মোল / ডিগ্রী কেলভিন,

এখানে  $C_p = 160$  জুল / মোল / ডিগ্রী কেলভিন,

$$\therefore C_V = 160 - 8.3 = 151.7 \text{ জুল / মোল / } ^\circ\text{কেলভিন}$$

$$\therefore C_\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{160}{151.7}$$

$$\therefore \gamma = 1.05$$

4. (ক)  $\delta Q = \delta U$  হলে  $\delta W = 0$  হবে প্রথম সূত্রানুসারে।

সুতরাং যেহেতু  $\delta W = P\delta V$ ,  $\delta V = 0$ , হবে,

অতএব আয়তনের পরিবর্তন হবেনা।

(খ)  $\delta U = -\delta W$  হলে  $\delta Q = 0$ , অর্থাৎ পরিবর্তনটি রুদ্ধতাপ হবে,

(গ)  $\delta Q = \delta W$  হলে  $\delta U = 0$  হবে, অর্থাৎ যদি গ্যাসটি আদর্শ গ্যাস হয়, তবে পরিবর্তনটি সমোষ্ণ হবে কারণ সমোষ্ণ পরিবর্তনে আদর্শ গ্যাসের আন্তরশক্তি অপরিবর্তিত থাকে। যে কোন তন্ত্রের ক্ষেত্রে আমরা সাধারণভাবে বলতে পারি, তন্ত্রটি পূর্ণ আবর্তন করলে যে কোন পরিবর্তনেই  $\delta U = 0$  হবে কারণ প্রারম্ভিক ও অন্তিম অবস্থা এক আছে।

5. তাপ-অন্তরিত পাত্রে জল নাড়ালে তন্ত্রও বাইরের পৃথিবীর মধ্যে তাপপ্রবাহ হয়না। কিন্তু তন্ত্রের ওপর কাজ করা হয়, তন্ত্রের উষ্ণতা ও আন্তরশক্তি উভয়ই বাড়ে। সুতরাং (ক) ও (গ) এর উত্তরগুলি ঠিক নয়, কিন্তু (খ) ও (ঘ) এর উত্তরগুলি সঠিক।

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি :

1. (ক) বাইরের কোন তাপ-উৎস থেকে তন্ত্রে তাপ সঞ্চালিত হয়েছে।

(খ) যেহেতু আয়তন স্থির আছে, কোন কাজ করা হয়নি।

(গ) প্রথম সূত্র অনুযায়ী  $\Delta U = \Delta Q - \Delta W$ । যেহেতু আলোচ্য প্রশ্নে  $\Delta Q > 0$ ,  $\Delta W = 0$ ,  $\Delta U > 0$ । সুতরাং আন্তরশক্তি বেড়েছে।

2. (ক) এখানে তরলকে যেহেতু তাপ-অন্তরক পদার্থ দিয়ে ঘিরে রাখা হয়েছে, বাইরের থেকে কোন তাপসঞ্চালন হয়নি।

(খ) আলোড়ক দিয়ে নাড়ানর ফলে তরলের ওপর কাজ করা হয়েছে।

(গ) প্রথম সূত্র অনুসারে এখানেও তন্ত্রের আন্তরশক্তি বাড়বে।

3. পাত্রটা তাপ-অন্তরিত ও স্থির আয়তন হবার জন্য কোন তাপ সঞ্চালিত হয়নি বা কোন কাজ করা হয়নি। সুতরাং আন্তরশক্তির কোন পরিবর্তন হয়নি।

4. আদর্শ গ্যাসের আন্তরশক্তি যেহেতু উষ্ণতার ওপর নির্ভর করে, স্থির উষ্ণতায় আয়তন প্রসারণে এর আন্তরশক্তি অপরিবর্তিত থাকবে। এর কারণ আদর্শ গ্যাসে অণু-পরমাণুর মধ্যে আভ্যন্তরীণ বলের অনুপস্থিতি।

5. মানবদেহকে একটা তাপীয় তন্ত্র ধরলে প্রতিদিন আহাৰ থেকে মানুষ যে শক্তি পায় তাকে  $\Delta Q$  এবং সে যে কাজ করে তাকে  $\Delta W$  এর সমান ধরতে পারি। সুতরাং প্রদত্ত প্রশ্নানুসারে  $\Delta U = \Delta Q - \Delta W$

$$\text{অর্থাৎ } \Delta U = 10^4 - 1.2 \times 10^4$$

$$= -2 \times 10^3 \text{ জুল।}$$

অতএব, রোজ সেই ব্যক্তির আন্তরশক্তি  $2 \times 10^3$  জুল হারে কমে যাবে।

6. এখানে আলোচিত বিভিন্ন তাপগতীয় পরিবর্তনে আপাতসাম্যীয় অবস্থা বজায় আছে ধরে নেওয়া হয়েছে। একটা সসীম তাপগতীয় পরিবর্তনকে আমরা অসংখ্য অণুপরিবর্তনের সমষ্টি হিসাবে ধরতে পারি, যার প্রতিটি স্তরেই তাপগতীয় সাম্যের শর্ত পূরণ করা হয়েছে। এই কারণে পরিবর্তনের সময় সর্বদাই আমরা তাপগতীয় সাম্যাবস্থায় প্রযোজ্য অবস্থার সমীকরণ প্রয়োগ করে সমাকল করতে পারি।

$$\text{উদাহরণস্বরূপ রাসায়নিক তন্ত্রের ক্ষেত্রে } \Delta W = \int_1^2 PdV,$$

যেখানে  $\Delta W$  তন্ত্রের। এবং নং অবস্থার মধ্যে পরিবর্তনের জন্য কৃতকার্য। এই সমাকলন প্রক্রিয়াটা করতে গেলে আলোচ্য পরিবর্তনে অবস্থার সমীকরণ  $f(P, V, T) = 0$  জানতে হবে। সাম্যাবস্থা না থাকলে এই সমীকরণ প্রয়োগ করা যাবেনা। অন্যান্য তাপগতীয় তন্ত্রের ক্ষেত্রেও (টানা তার, প্রসারিত পৃষ্ঠতল, তড়িতকোষ, চুম্বকপদার্থ ইত্যাদি) একই মন্তব্য খাটবে।

অন্যান্য প্রশ্নাবলি

1. (ক) ধরি  $(x^2 - y^2) dx - 2(x - 1) y dy = M dx + N dy$

$$\text{যেখানে } M = x^2 - y^2, \quad N = -2(x - 1)y$$

$$\left( \frac{\partial M}{\partial y} \right)_x = -2y, \quad \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right)_y = -2y$$

$$\text{যেহেতু } \left( \frac{\partial M}{\partial y} \right)_x = \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right)_y, \text{ আলোচ্য অবকলটি একটি সম্পূর্ণ অবকল,}$$

এখানে  $(x^2 - y^2) dx - 2(x-1)y dy$  কে  $d\left(\frac{x^3}{3} - xy^2 + y^2\right)$  ভাবে লেখা যাবে,

(খ) ধরি,  $2x \sin y dx - x^2 \cos y dy = Mdx + Ndy$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = 2x \cos y, \quad \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y = -2x \cos y$$

যেহেতু  $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x \neq \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y$ ,  $Mdx + Ndy$  একটি অসম্পূর্ণ অবকল।

(1,1)

2. (ক)  $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 dx + y^2 dy) = I$  ধরি,

(i) সরলরেখার সমীকরণ  $y = x$  হলে,  $I = \int_0^1 (x^2 + x^2) dx$

$$\text{অর্থাৎ } I = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

(ii) অধিবৃত্ত  $x = y^2$  বরাবর সমাকল করতে গেলে  $x = y^2$  বসাই,

$$\therefore I = \int_0^1 (2y^4 \cdot y + y^2) dy$$

$$= \int_0^1 (2y^5 + y^2) dy$$

$$= \frac{2}{3}$$

যেহেতু এক্ষেত্রে  $x^2 dx + y^2 dy$  একটা সম্পূর্ণ অবকল,  $I$  এর মান পথ-নিরপেক্ষ। কাজেই দুটো সমাকলের মান একই হচ্ছে।

(খ) (i)  $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2) dx - 2xy dy = I$  (ধরি)

সরলরেখা  $y = x$  বরাবর  $I = \int_0^1 (2x^2 - 2x^2) dx$   
 $= 0$

(ii) অধিবৃত্ত  $y = x^2$  বরাবর,  $I = \int_0^1 [(x^2 + x^4) - 2x^3(2x)] dx$

অথবা  $I = \int_0^1 (x^2 - 3x^4) dx = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} = -\frac{4}{15}$

এখানে যেহেতু  $(x^2 + y^2) dx - 2xy dy$  একটা অসম্পূর্ণ অবকল,  
 $=$  এর মান পথের ওপর নির্ভর করছে।

3. (ক) ধাতুখন্ডের ওপর কৃতকার্য  $= \int_1^2 PdV = W$  (ধরি)

সমোষ্ণ স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক  $B = -V \frac{dP}{dV}$

সুতরাং  $W = - \int_1^2 \frac{VPdP}{B} = - \frac{V}{2B} (P_2^2 - P_1^2)$

বা,  $W = - \frac{100}{2 \times 10 \times 1.50 \times 10^{12}} (P_2^2 - P_1^2)$

$P_1 = 0$ ,  $P_2 = 1000$  বায়ুমন্ডলীয় চাপ  $= 1000 \times 76 \times 13.6 \times 980$  ডাইন / বর্গ  
সেমি

$$\text{বা, } W = -\frac{5}{1.50 \times 10^{12}} \times 10^6 (76 \times 13.6 \times 980)^2$$

$$= -\frac{5}{1.50} \times (7.6 \times 1.36 \times 98)^2 \quad \text{আর্গ}$$

এখানে যেহেতু তন্ত্রের ওপর কাজ করা হয়েছে কৃতকার্য ঋণাত্মক হয়েছে।

$$(খ) \quad \text{কৃতকার্য} = -\int_1^2 T dl = W \quad (\text{ধরি}) \quad (\text{ধরি})$$

উপাদানের ইয়ং গুণক  $Y = \frac{T/A}{\ell/L}$ , যেখানে তারের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি,

$$\therefore W = -\int_1^2 \frac{AY \ell dl}{L}$$

$$\text{বা } W = -\frac{AY}{2L} (\ell_2^2 - \ell_1^2)$$

$$\text{এখন } \ell_2 = \frac{T_f L}{AY}, \quad \ell_1 = \frac{T_i L}{AY}$$

$$\text{বা } W = -\frac{L}{2AY} (T_f^2 - T_i^2)$$

$$4. \quad C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_U$$

যেহেতু  $U = C\theta - aV$ ,  $C_V = C$

$$C_P = \left( \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right)_P = \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_P + P \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_P$$

অবস্থার সমীকরণ হল  $\left( P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = R\theta$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_P = C$$

$$\text{অথবা } P = \frac{R\theta}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{R} \left( P + \frac{a}{V^2} \right) (V-b)$$

$$\text{অথবা } \left(\frac{\partial \theta}{\partial V}\right)_P = \frac{1}{R} \left[ \left( P + \frac{a}{V^2} \right) - \frac{2a}{V^3} (V-b) \right]$$

$$\text{বা, } \left(\frac{\partial \theta}{\partial V}\right)_P = \frac{1}{R} \left( P - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3} \right)$$

$$\text{বা, } \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_P = \frac{R}{P - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3}}$$

$$\therefore C_P = C + \frac{RP}{P - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3}}$$

(খ) একটি প্যারাচুম্বক পদার্থের ক্ষেত্রে  $\delta Q = \delta U - VB \delta I$ , যেখানে  $V$  পদার্থের আয়তন,  $I$  পদার্থের চৌম্বক প্রাবল্য।

বস্তুর চৌম্বক-ভ্রামক  $M$  হলে  $M = IU$

$$\therefore \delta Q = \delta U - B \delta M$$

$$\text{অথবা } C_M = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_M = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M$$

আদর্শ প্যারাচুম্বক পদার্থের ক্ষেত্রে যেহেতু  $\left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T = 0$

$$C_B = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_B = C_M - B \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B$$



$$\text{যেহেতু } M = \frac{C \cdot B}{T} V \text{ যেখানে 'C' পদার্থের কুরী ধ্রুবক, } \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_B = -\frac{CB}{T^2} V$$

$$\text{অথবা } C_B - C_M = -B \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_B = \frac{CB^2}{T^2} V = \frac{KB^2}{T^2}, \text{ যেখানে } K = CV$$

5. acb পথে গৃহীত তাপ ৪০ ক্যালরি ও কৃতকার্য 30 ক্যালরি। সুতরাং, আন্তরশক্তির পরিবর্তন = (80 - 30) ক্যালরি = 50 ক্যালরি।

(ক) আন্তরশক্তির পরিবর্তন যেহেতু কেবলমাত্র প্রাথমিক ও অন্তিম সাম্যাবস্থার ওপর নির্ভর করে, মধ্যবর্তী পথের ওপর নির্ভরশীল নয়, adb পথেও আন্তরশক্তির পরিবর্তন 50 ক্যালরি হবে, সুতরাং adb পথে গৃহীত তাপের পরিমাণ = (50 + 10) ক্যালরি = 60 ক্যালরি।

(খ) b → a বক্রাকার পথে আন্তরশক্তির পরিবর্তন = -50 ক্যালরি।

সুতরাং গৃহীত তাপ = -20 - 50 = -70 ক্যালরি।

সুতরাং b → a বক্রাকার পথে তদ্ব 70 ক্যালরি পরিমাণ তাপ বর্জন করে।

(গ) db পথে যেহেতু আয়তন স্থির থাকে, কৃতকার্য শূন্য হবে। এখন  $U_d - U_a = 40$  ক্যালরি। যেহেতু  $U_b - U_a = 50$  ক্যালরি,  $U_d - U_b = -10$  ক্যালরি।

সুতরাং db পথে গৃহীত তাপ = 10 ক্যালরি। (প্রথম সূত্র অনুসারে), a → d পথে কৃতকার্য = 10 ক্যালরি। (প্রশ্নের শর্তানুসারে যেহেতু adb পথে কৃতকার্য = 10 ক্যালরি ও db পথে কোন কাজ হয় না) সুতরাং ad পথে গৃহীত তাপ = (40 + 10) ক্যালরি = 50 ক্যালরি।

গঠন

4.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

4.2 মূলতত্ত্ব

4.2.1 কেলভিন-প্লাঙ্ক ও ক্লসিয়াসের বিবৃতির সমতুল্যতা

4.3 উৎক্রমণীয় ও অনুৎক্রমণীয় পরিবর্তন

4.3.1 আদর্শ গ্যাস কার্নো ইঞ্জিন

4.3.2 কার্নো উপপাদ্য

4.4 উষ্ণতা পরিমাপের পরম বা কেলভিন স্কেল

4.5 উদাহরণ

4.5.1 অনুশীলনী —1

4.6 এনট্রপি

4.6.1 ক্লসিয়াসের উপপাদ্য ও এনট্রপির সংজ্ঞা

4.6.2 এনট্রপি বৃদ্ধি নীতি

4.6.3 কয়েকটি প্রাকৃতিক ঘটনায় এনট্রপির পরিবর্তনের হিসাব

4.7 এনট্রপি ও শক্তির কার্যকারিতা

4.8 এনট্রপি ও তাপগতীয় সম্ভাবনা

4.9 ক্যারাথিওডোরির উপপাদ্যের প্রয়োগ

4.10 উদাহরণ

4.10.1 অনুশীলনী —2

## 4.1 প্রস্তাবনা

আপনারা আগের এককে তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রের সাথে পরিচিত হয়েছেন যা প্রকৃতপক্ষে তাপগতিবিদ্যায় শক্তিসংরক্ষণ সূত্রের প্রয়োগের প্রতিফলন। সেখানে আপনারা দেখেছেন যে একটি পূর্ণ-আবর্তনে তন্ত্র দ্বারা গৃহীত বা বর্জিত তাপশক্তি যথাক্রমে তন্ত্র দ্বারা বা তন্ত্রের ওপর কৃতকার্যের সমান হয়। এই সূত্র অনুসারে অন্য কোন পরিবর্তন না করে একটা তাপ উৎসের আন্তরশক্তিকে সম্পূর্ণভাবে যান্ত্রিক শক্তিতে বা অনুরূপভাবে যান্ত্রিক শক্তিকে পুরোপুরি তাপশক্তিতে পরিণত করায় কোন বাধা নেই। কিন্তু বাস্তবে দেখা যায় যে একটা নির্দিষ্ট উষ্ণতার তাপ উৎস থেকে তাপ গ্রহণ করে অন্য কোন পরিবর্তন ছাড়া তাকে সম্পূর্ণভাবে যান্ত্রিকশক্তিতে রূপান্তরিত করা সম্ভব নয়। এই প্রসঙ্গে তাপ ইঞ্জিনের কার্যপ্রণালী উল্লেখ করা যেতে পারে। অন্য কোন অপেক্ষাকৃত কম উষ্ণতার তাপগ্রাহকে কিছু শক্তি বর্জন করে তবেই অবশিষ্ট তাপশক্তিকে যান্ত্রিকশক্তিতে পরিণত করা সম্ভব। অবশ্য মনে রাখতে হবে যে অন্য কোন পরিবর্তন ছাড়া যান্ত্রিক শক্তিকে সম্পূর্ণভাবে তাপশক্তিতে পরিণত করা সম্ভব। যেমন, দুখন্ড পাথরকে ঘষলে যে যান্ত্রিক শক্তি ব্যয় করা হয় তাকে কোন পরিবর্তন ছাড়াই পুরোপুরি তাপশক্তিতে পরিণত করা যায় অথবা একটা বৈদ্যুতিক তারের ভিতর দিয়ে তড়িৎপ্রবাহ পাঠাতে যে কার্য করা হয় তাকে সম্পূর্ণভাবে তাপশক্তিতে রূপান্তরিত করা যায়। সুতরাং প্রথম সূত্রে মেনে নিয়েও কেবলমাত্র একটা তাপীয় উৎসের আন্তরশক্তিকে সম্পূর্ণভাবে যান্ত্রিক শক্তিতে পরিণত করার এই বাস্তব সমস্যা প্রথম সূত্রের সীমাবদ্ধতাকেই নির্দেশ করে।

অন্য একপ্রকার তাপগতীয় পরিবর্তনের কথা ভাবা যাক। দুটি ভিন্ন উষ্ণতার বস্তুর মধ্যে তাপীয় সংযোগ করে এই যৌথ ব্যবস্থাকে পারিপার্শ্বিক থেকে তাপ-বিচ্ছিন্ন করলে দুটি বস্তুর মধ্যে তাপের আদান প্রদান হবে। তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র অনুসারে গৃহীত ও বর্জিত তাপ পরস্পরের সমান হবে। কোন বস্তুটি তাপ গ্রহণ করবে বা কোনটি তাপ বর্জন করবে, প্রথম সূত্র এই বিষয়ে সম্পূর্ণ নীরব, কিন্তু বাস্তবে আপনারা দেখতে পান যে বেশী উষ্ণতার বস্তু তাপ বর্জন করে ও অপেক্ষাকৃত কম উষ্ণতার বস্তু তাপ গ্রহণ করে। সুতরাং তাপপ্রবাহের দিকনির্দেশ সম্পর্কেও প্রথম সূত্রের সীমাবদ্ধতা লক্ষণীয়।

প্রথম সূত্রের এই অসম্পূর্ণতার পরিপ্রেক্ষিতে তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের প্রবর্তন এই কারণে এক যুগান্তকারী পদক্ষেপ। কেলভিন - প্লাঙ্ক, ক্লসিয়াস এই সূত্রে ব্যক্ত করেছেন আপাতভিন্ন আঙ্গিকে, যদিও দুটি ভাষ্যই মূলতঃ অভিন্ন ও তাপগতিবিদ্যায় কোন পরিবর্তনের দিক নির্দেশ করে। পরে আমরা এনট্রপি নামে এক তাপগতীয় অপেক্ষকের সংজ্ঞা দেব। একটা তাপগতীয় প্রক্রিয়ায় এনট্রপির মোট

পরিবর্তন সেই প্রক্রিয়া কোন দিকে হবে তা ব্যাখ্যা করে। দুটি বস্তুর তাপীয় সংযোগে তাপপ্রবাহ কোন দিকে হবে, একটি রাসায়নিক বিক্রিয়া ঘটানোর প্রবণতা কোন দিকে, বৈদ্যুতিক বর্তনীতে তড়িতপ্রবাহ কোন দিকে হবে সবই বিশ্লেষণ করা যায় এই দ্বিতীয় সূত্রের আলোকে। তাপগতিবিদ্যার প্রয়োগ যেহেতু পরিব্যপ্ত প্রায় সমস্ত প্রাকৃতিক পরিবর্তনে, দ্বিতীয় সূত্রের ব্যবহারও তাই সর্বব্যাপী।

**উদ্দেশ্য :—** এই এককটি পাঠ করে আপনি —

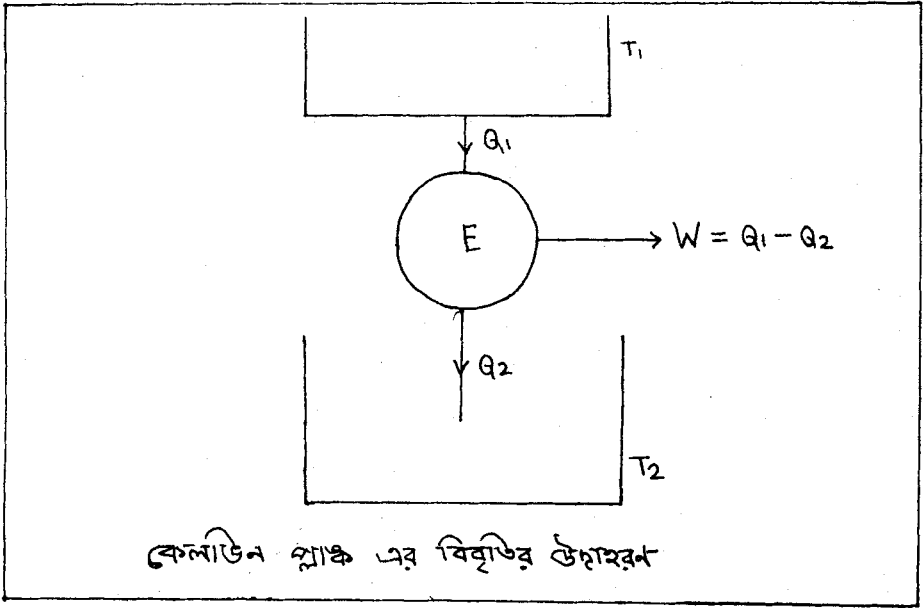
- তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের সাথে পরিচিত হবেন।
- প্রাকৃতিক পরিবর্তনের সম্ভাব্যতা বিচার করতে শিখবেন ও নিজেই নানাবিধ প্রক্রিয়ায় দ্বিতীয় সূত্রকে প্রয়োগ করতে শিখবেন।
- ইঞ্জিন ও হিমায়কের কার্যপ্রণালীর সাথে পরিচিত হবেন।
- উৎক্রমণীয় ও অনুৎক্রমণীয় পরিবর্তন সম্পর্কে সম্যক জ্ঞান লাভ করবেন।
- একটা তাপগতীয় পরিবর্তনে সর্বাপেক্ষা বেশী কত কার্য পাবেন তার পরিমাপ করতে পারবেন।
- এনট্রপি নামে এক গুরুত্বপূর্ণ তাপগতীয় অপেক্ষকের সাথে পরিচিত হবেন ও বিভিন্ন তাপগতীয় পরিবর্তনে এনট্রপির পরিবর্তন হিসাব করতে পারবেন।

## 4.2 মূলতত্ত্ব

আপনারা এই এককের প্রস্তাবনা শীর্ষক অনুচ্ছেদে দেখেছেন, প্রাকৃতিক ঘটনার দিক নির্দেশ করায় তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রের সীমাবদ্ধতা। প্রথম সূত্রের বৈধতা লঙ্ঘন না করেও এমন অনেক প্রাকৃতিক পরিবর্তন হওয়া সম্ভব যা বাস্তবে দেখা যায়না। উদাহরণস্বরূপ কেবলমাত্র একটি তাপ-উৎসের আন্তরশক্তিকে কাজে লাগিয়ে পুরোপুরি যান্ত্রিক শক্তিতে পরিণত করা যায়না, (একেই পদার্থবিদ্যার পরিভাষায় বলে দ্বিতীয় প্রকার অবিরাম গতির অসম্ভাব্যতা) তাপ ইঞ্জিনের কার্যপ্রণালী প্রমাণ করে একটি তাপ উৎস থেকে তাপ গ্রহণ করে তার কিছু অংশ পরিপার্শ্বে বর্জন করে অবশিষ্ট তাপশক্তিকে কার্যে পরিণত করা সম্ভব। অনুরূপভাবে দুটি ভিন্ন উষ্ণতার তাপ উৎসের মধ্যে তাপীয় সংযোগ করলে তাপ স্বতঃপ্রণোদিতভাবে বেশী উষ্ণতার উৎস থেকে কম উষ্ণতার দিকে প্রবাহিত হয়, এটাই আমাদের বাস্তব অভিজ্ঞতা। প্রাকৃতিক পরিবর্তনের এই দিক নির্দেশ করার জন্য দ্বিতীয় সূত্রের প্রবর্তন করা হয়েছিল যা কেলভিন-প্লাঙ্ক, ক্লসিয়াসের হাতে চূড়ান্ত রূপ পেয়েছিল। পরে এনট্রপি নামে এক গুরুত্বপূর্ণ তাপগতীয় অপেক্ষকের সাথে আপনারা পরিচিত হবেন যার মাধ্যমেও প্রাকৃতিক পরিবর্তনের দিক সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়। এখন আমরা দ্বিতীয় সূত্র সম্পর্কে কেলভিন-প্লাঙ্ক ও ক্লসিয়াসের বিবৃতি আলোচনা করব। কেলভিন-প্লাঙ্ক এর বিবৃতি — “এমন কোনও যান্ত্রিক ব্যবস্থা করা সম্ভব নয় যা, কোন পূর্ণ আবর্তনে

কেবলমাত্র একটি নির্দিষ্ট উষ্ণতার তাপ উৎস থেকে তাপগ্রহণ করবে ও অন্য কোন ও পরিবর্তন না করে গৃহীত তাপশক্তিকে সম্পূর্ণভাবে যান্ত্রিক শক্তিতে পরিণত করবে।”

এখানে “অন্য কোনও পরিবর্তন না করে” কথাটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। প্রসঙ্গতঃ আমরা একটা আদর্শ গ্যাসের সমোষ্ণ প্রসারণের কথা ভাবতে পারি। প্রসারণের সময় গ্যাসটি একটি নির্দিষ্ট উষ্ণতার তাপীয় উৎসের সাথে যুক্ত ছিল। যেহেতু গেলুসাক ও জুলের সূত্র অনুসারে সমোষ্ণ পরিবর্তনে আদর্শ গ্যাসের আন্তরশক্তির পরিবর্তন হয়না, সুতরাং প্রথম সূত্র প্রয়োগ করে পাই,  $\Delta Q = \Delta W$ , অর্থাৎ প্রসারণে কৃতকার্য গৃহীত তাপশক্তির সমান। মনে হতে পারে, কেলভিন-প্লাঙ্কের নিষেধাজ্ঞা এখানে প্রযোজ্য হচ্ছে না। কিন্তু এখানে গ্যাসের ও তাপ উৎসের অবস্থা এক থাকছে না। পরিবর্তনের পরে গ্যাসের আয়তন বাড়বে, চাপ কমবে বয়েলের সূত্র অনুযায়ী। ফলে এই তাপগতীয় প্রক্রিয়া বন্ধ হয়ে যাবে যখন বাইরের চাপ ও ভিতরের চাপ সমান হবে। কাজেই এখানে দ্বিতীয় সূত্রের বৈধতা লঙ্ঘিত হচ্ছে না।



কেলভিন - প্লাঙ্ক এর বিবৃতির উদাহরণ

চিত্র — 4.1

কেলভিন-প্লাঙ্কের বিবৃতি অনুসারে ইঞ্জিনের কার্যপ্রণালী ওপরের চিত্রে দেখান হল। একটা পূর্ণ আবর্তনে (যাতে পরিবর্তনের আরম্ভে ও শেষে তন্ত্র ও পারিপার্শ্বিকের অবস্থা একই থাকে) ইঞ্জিনটি বেশী উষ্ণতার ( $T^o$ ) উৎস থেকে  $Q_1$  তাপ গ্রহণ করে ও কম উষ্ণতার তাপগ্রাহকে  $Q_2$  তাপ বর্জন করে।

প্রথম সূত্র অনুযায়ী কৃতকার্য  $W = Q_1 - Q_2$  ( $\Delta Q = W + \Delta U$  এবং  $\Delta U = 0$ )

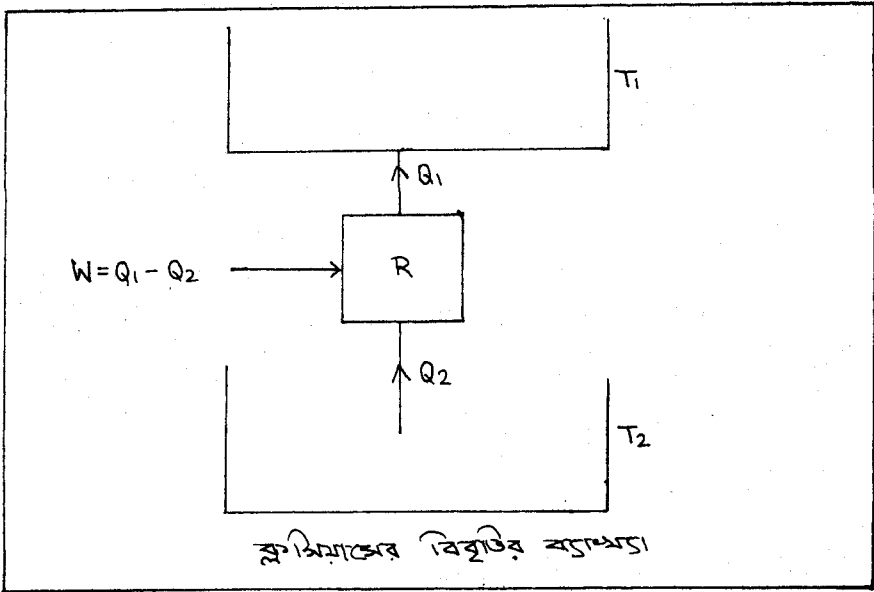
$$\text{সুতরাং ইঞ্জিনের যান্ত্রিক দক্ষতা} = \frac{\text{কৃতকার্য}}{\text{শোষিত তাপশক্তি}} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

কেলভিন-প্লাঙ্কের বিবৃতি থেকে আপনারা দেখতে পেলেন যে, তাপ-ইঞ্জিনের যান্ত্রিক দক্ষতা সর্বদাই 1 থেকে কম হবে। হিমায়কের কার্যক্রম ইঞ্জিনের কার্যক্রমের সম্পূর্ণ বিপরীত। এখানে নিম্ন উষ্ণতার তাপ উৎস থেকে তাপ শোষিত হয় এবং হিমায়কের ওপর কৃতকার্যের ফলে উচ্চতর উষ্ণতায় তাপ বর্জিত হয়। একটি পূর্ণ আবর্তনে প্রথম সূত্র প্রয়োগ করে আমরা পাই,

$$Q_2 - Q_1 = -W, \text{ অথবা } Q_1 = Q_2 + W$$

$$\text{সুতরাং, হিমায়কের কৃতি-গুণাঙ্ক} = \frac{\text{তন্ত্র কর্তৃক গৃহীত তাপ}}{\text{তন্ত্রের ওপর সম্পাদিত কার্য}} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

নীচের চিত্রে হিমায়কের কার্যপ্রণালী দেখান হল।



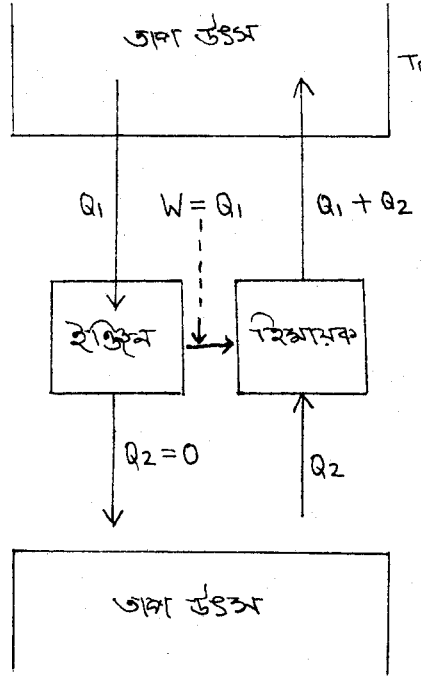
রুসিয়াসের বিবৃতির ব্যাখ্যা

চিত্র — 4.2

হিমায়কের কার্যপ্রণালী সম্পর্কে আলোকপাত করে তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র সম্পর্কে ক্লসিয়াসের ভাষ্য। ক্লসিয়াসের বিবৃতি অনুযায়ী এমন কোন যান্ত্রিক ব্যবস্থা সম্ভব নয় যার পূর্ণ আবর্তনে অন্য কোথাও কিছু পরিবর্তন না করে স্বতঃপ্রণোদিতভাবে কম উষ্ণতা থেকে বেশী উষ্ণতায় জলপ সঞ্চালিত করে। এই জন্য একটি পূর্ণ আবর্তনে কম উষ্ণতা থেকে বেশী উষ্ণতায় তাপ সরবরাহ করতে হিমায়কের ওপর কার্য করতে হবে। কেলভিন-প্লাঙ্ক ও ক্লসিয়াসের বিবৃতি আপাতদৃষ্টিতে ভিন্ন মনে হলেও প্রকৃতপক্ষে তারা সমতুল্য। এবার আমরা এই দুটি বিবৃতির তুল্যতা সম্পর্কে আলোচনা করব।

#### 4.2.1 কেলভিন-প্লাঙ্ক ও ক্লসিয়াসের বিবৃতির তুল্যতা

দুটি বিবৃতি সমতুল্য বলতে আমরা বুঝব — (1) একটি বিবৃতি সত্য হলে অন্যটিও সত্য হবে, (2) একটি অসত্য হলে অন্যটিও অসত্য হবে। দুটি বিবৃতির তুল্যতার এই সংজ্ঞা অনুসরণ করেই আমরা কেলভিন-প্লাঙ্ক ও ক্লসিয়াসের বিবৃতির তুল্যতা প্রমাণ করব।

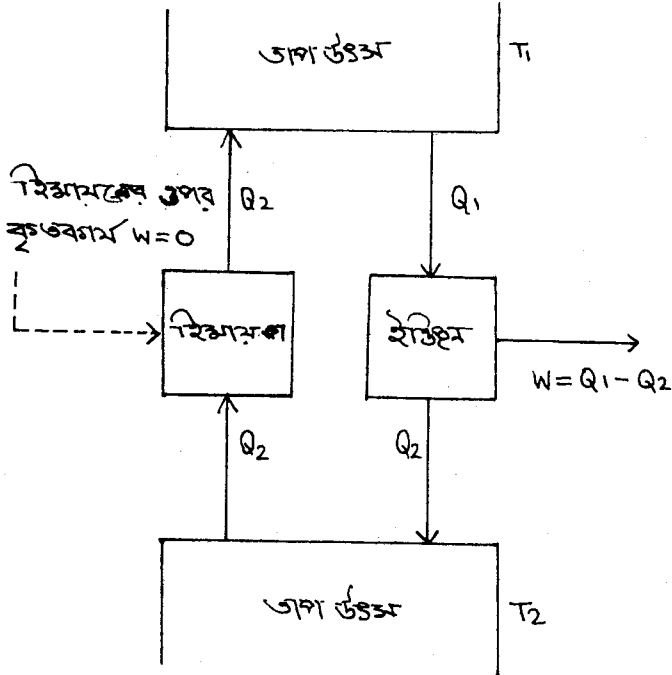


কেলভিন - প্লাঙ্ক বিবৃতিটি বাঁদিকের ইঞ্জিনটি লঙ্ঘন করছে। যৌথ ব্যবস্থাটি ক্লসিয়াসের ভাষ্য লঙ্ঘন করছে।

চিত্র — 4.3

চিত্র নং 4.3 তে প্রদর্শিত তাপগতীয় প্রক্রিয়ায় কার্যরত যথাক্রমে একটি ইঞ্জিন ও একটি হিমায়ককে দেখান হয়েছে। কার্যকরী বস্তুর প্রকৃতি, পরিমাণ ও তত্ত্বদুটিকে আমরা এমনভাবে স্থির করলাম যাতে ইঞ্জিন

ও হিমায়ক দুটি যুগপৎ একই সময়ে একটি পূর্ণ আবর্তন সম্পন্ন করে। ধরি, ইঞ্জিনটি কেলভিন-প্লাঙ্কের বিবৃতি লঙ্ঘন করে কিন্তু হিমায়কটি ক্লসিয়াসের বিবৃতি মেনে চলে। ধরি, একটি পূর্ণ চক্রে ইঞ্জিনটি একটি উচ্চতর উষ্ণতার ( $T_1^\circ$ ) উৎস থেকে  $Q_1$  তাপ গ্রহণ করে ও কম উষ্ণতা  $T_2^\circ$  তে কোন তাপ বর্জন না করে তাকে সম্পূর্ণভাবে কার্যে পরিণত করে। অন্যদিকে হিমায়ক R কে আমরা এমনভাবে কল্পনা করি যাতে একটি পূর্ণ আবর্তনে এটি  $T_2^\circ$  উষ্ণতার তাপ উৎস থেকে  $Q_2$  তাপ গ্রহণ করে ও ইঞ্জিন প্রদত্ত  $Q_1$  কার্যের সাহায্যে  $Q_1 + Q_2$  পরিমাণ তাপ  $T_1^\circ$  উষ্ণতার তাপ উৎসে বর্জন করে। অর্থাৎ হিমায়কটি ক্লসিয়াসের বিবৃতি মেনে চলে। ইঞ্জিন E ও হিমায়ক R কে যুক্ত করলে আমরা এমন এক যৌথ ব্যবস্থা পাব (চিত্র 4.3 এ দেখান হয়েছে) যা একটি পূর্ণ আবর্তনে  $T_2^\circ$  উষ্ণতার তাপ উৎস থেকে  $Q_2$  তাপ গ্রহণ করে ও বাইরের কোন কার্য ছাড়াই সম্পূর্ণ তাপ  $Q_2$  কে বেশী উষ্ণতার উৎসে ( $T_1^\circ$ ) বর্জন করছে। এই ব্যবস্থায় যেহেতু অন্য কোনও পরিবর্তন হচ্ছে না, সুতরাং এই যুক্ত ব্যবস্থা ক্লসিয়াসের সূত্র লঙ্ঘন করছে। সুতরাং দেখা যাচ্ছে, কেলভিনের সূত্র অসত্য হলে আমরা এমন এক ব্যবস্থা পাব যা ক্লসিয়াসের সূত্রের বৈধতা মানবে না।



চিত্র — 4.4

চিত্র নং 4.4 এ দেখান হয়েছে একটা যান্ত্রিক ব্যবস্থা যেখানে একটি পূর্ণ আবর্তনে ইঞ্জিন E বেশী



উষ্ণতা  $T_1^1$  থেকে  $Q_1$ , তাপ গ্রহণ করে, কম উষ্ণতা  $T_2^2$  তে  $Q_2$  তাপ বর্জন করে ও অবশিষ্ট  $Q_1 - Q_2$  তাপকে কার্যে পরিণত করে। অপরদিকে হিমায়ক R একই সময়ে একটি পূর্ণ চক্রে  $T_2^2$  উষ্ণতার উৎস থেকে  $Q_2$  তাপ গ্রহণ করে ও কোন রকম কার্য ছাড়াই একই পরিমাণ তাপ বেশী উষ্ণতার উৎসে ( $T_1^1$ ) বর্জন করে। অর্থাৎ ইঞ্জিন E দ্বিতীয় সূত্রের কেলভিন-প্লাঙ্ক বিবৃতি মেনে চলে কিন্তু হিমায়ক R ক্লসিয়াসের বিবৃতি লঙ্ঘন করে। চিত্র 4.4 এ ইঞ্জিন ও হিমায়ককে যুক্ত করে একটা যৌথ ব্যবস্থার কল্পনা করা হল যা একটি পূর্ণ চক্রে বেশী উষ্ণতার উৎস ( $T_1^1$ ) থেকে  $Q_1 - Q_2$  তাপ গ্রহণ করে ও  $T_2^2$  উষ্ণতার উৎসে কোন তাপ বর্জন না করে এই তাপকে পুরোপুরি কার্যে পরিণত করে। অন্য কোনও পরিবর্তন না করে। কাজেই এই যৌথ ব্যবস্থা কেলভিন-প্লাঙ্কের সূত্র অমান্য করছে। সুতরাং ক্লসিয়াসের সূত্র অসত্য হলে আমরা এমন এক যৌথ ব্যবস্থা পাব যা কেলভিন-প্লাঙ্কের সূত্রের বৈধতা মানবে না।

ওপরে বর্ণিত দুটি ব্যবস্থা থেকে দেখতে পাচ্ছি যে কেলভিন-প্লাঙ্ক ও ক্লসিয়াসের বিবৃতি দুটির মধ্যে একটি ভ্রান্ত হলে অন্যটিও ভ্রান্ত হবে। সুতরাং দুটি বিবৃতির সমতুল্যতার সংজ্ঞা অনুসারে কেলভিন-প্লাঙ্ক ও ক্লসিয়াসের বিবৃতি দুটি পরস্পর সমতুল্য।

#### 4.3 উৎক্রমণীয় ও অনুৎক্রমণীয় পরিবর্তন

যদি প্রাথমিক ও অন্তিম সাম্যাবস্থার মধ্যে একটি তাপগতীয় পরিবর্তন এমনভাবে সম্পন্ন হয় যাতে পরিবর্তনের পরে তন্ত্র ও পরিপার্শ্বকে অন্য কোন পরিবর্তন ছাড়াই আবার আগের অবস্থায় ফিরিয়ে আনা যায় তবে সেই পরিবর্তনটিকে বলব উৎক্রমণীয়। যদি এটা সম্ভব না হয় (অর্থাৎ বিপরীতক্রমে পদ্ধতিটা চালিয়ে তন্ত্র ও পরিপার্শ্বকে আগের অবস্থায় ফিরিয়ে আনতে হলে অন্য কোথাও পরিবর্তন অবশ্যসত্ত্বাবী হয়), তবে পরিবর্তনটিকে বলব অনুৎক্রমণীয়।

ধরি, একটি গ্যাস ভর্তি পাত্রের সাথে পিস্টন যোগ করা আছে। গ্যাসটিকে একটি তাপগ্রাহকের সাথে তাপীয় সংযোগে রাখা হল (তাপগ্রাহকটি বুনসেন বাণার হতে পারে) যাতে গ্যাসটিতে তাপ ঢুকতে পারে বা প্রয়োজনে গ্যাস থেকে তাপ বেরিয়েও যেতে পারে। ধরি  $Q$  পরিমাণ তাপ তাপগ্রাহক থেকে গ্যাসে প্রবেশ করে যার ফলে গ্যাস উত্তপ্ত হয় ও তার চাপ বাড়ে। যদি গ্যাসের আভ্যন্তরীণ চাপ বাইরের পিস্টনের চাপ থেকে বেশী হয় তবে গ্যাস পিস্টনকে ঠেলে তুলে কার্য করবে যতক্ষণ না বাইরের চাপ ও ভিতরের চাপ সমান হয়। ধরি, প্রসারণের ফলে গ্যাস দ্বারা কৃতকার্য  $W$ । এই পরিবর্তনটি সম্পন্ন হবার পর ধরি পদ্ধতিটা বিপরীতক্রমে চালান হল যাতে একই পরিমাণ কার্য  $W$  গ্যাসটির ওপর করা হল। এর ফলে যদি  $Q$  তাপ গ্যাস থেকে বেরিয়ে তাপগ্রাহকে প্রবেশ করে, তবে তন্ত্র ও পরিপার্শ্ব অন্য পরিবর্তন ছাড়াই আগের অবস্থায় ফিরে আসবে। (এখানে তন্ত্র বলতে গ্যাসকে ও পরিপার্শ্বিক বলতে পিস্টন ও

তাপগ্রাহককে বলা হয়েছে)। এই ক্ষেত্রে পরিবর্তনটি উৎক্রমণীয় হবে। আমরা নীচে দুটি উদাহরণের সাহায্যে দেখাব কোন পরিবর্তন আপাতসাম্যিকভাবে না হলে অথবা শক্তি বিনাশকারী বল (যেমন, ঘর্ষণজনিত বল) থাকলে পরিবর্তনটি উৎক্রমণীয় হবে না পরে আমরা প্রমাণ করব কিভাবে দ্বিতীয় সূত্র প্রমাণ করে যে বিশ্বে ঘটমান সব পরিবর্তনই অনুৎক্রমণীয়।

ধরা যাক, আগের উদাহরণের মত গ্যাস ভর্তি পাত্রের সাথে একটা পিস্টন যুক্ত আছে, পিস্টনের চাপ  $P_1$  থেকে কমিয়ে  $P_2$  করা হল। ফলে গ্যাসটি প্রসারিত হবে এবং গ্যাস দ্বারা কৃতকার্য  $= P_2(V_2 - V_1)$ , যেখানে  $V_1, V_2$  প্রারম্ভিক ও অন্তিম আয়তন। যদি প্রসারণটি সমোষ্ণ হয় তবে একই পরিমাণ তাপ তাপউৎস থেকে গ্যাস গ্রহণ করবে। এইবার গ্যাসকে আবার আগের অবস্থায় ফিরিয়ে আনতে পিস্টনের চাপ আবার  $P_1$  করা হল। এর ফলে গ্যাসের ওপর কৃতকার্যের পরিমাণ  $P_1(V_2 - V_1)$  সংনমন প্রক্রিয়াটি সমোষ্ণ হতে গেলে একই পরিমাণ তাপ  $P_1(V_2 - V_1)$  গ্যাস থেকে বেরিয়ে তাপ উৎসে যেতে হবে। এর ফলে তাপ উৎস একটি পূর্ণ আবর্তনে যে পরিমাণ তাপ গ্রহণ করবে তা হল  $(P_1 - P_2)(V_2 - V_1)$ । অর্থাৎ গ্যাসটা আগের অবস্থায় ফিরে এলেও তাপউৎসটি আগের অবস্থায় ফিরে আসেনি। সুতরাং পরিবর্তনটা অনুৎক্রমণীয়। যদি প্রক্রিয়াটি আপাত স্থির পদ্ধতিতে করা যেত তবে  $P_1, P_2$  ও  $V_1, V_2$  এর পার্থক্য অণুপরিমাণ হত। সুতরাং তাপগ্রাহক দ্বারা গৃহীত তাপের পরিমাণ প্রায় শূন্য হত ও এর ফলে তন্ত্র এবং পরিপার্শ্ব একটি পূর্ণ আবর্তনে আবার আগের অবস্থায় ফিরে যেত।

এখন দেখা যাক শক্তি অপচয়ী কোন প্রভাব ক্রিয়াশীল হলে (যেমন, ঘর্ষণজনিত বল, সান্দ্রতাক্কজনিত বল ইত্যাদি) অবস্থাটা কি হয়। ধরা যাক, গ্যাসটি সমোষ্ণ প্রসারণের সময় তাপ উৎস থেকে  $Q = W + h$  পরিমাণ তাপ গ্রহণ করল,  $W$  পরিমাণ যান্ত্রিক কার্য করল ও  $h$  পরিমাণ শক্তি পিস্টন ও দেয়ালের সংযোগস্থলে উপস্থিত ঘর্ষণ বলের বিপক্ষে কাজ করতে ব্যয় হল। এই  $h$  পরিমাণ শক্তি তাপশক্তিরূপে উদ্ভূত হল, গ্যাসটাকে আগের অবস্থায় ফিরিয়ে আনতে পিস্টনটা  $W + h$  পরিমাণ কার্য করবে যার মধ্যে  $W$  কাজ গ্যাসকে প্রাথমিক অবস্থায় সংনমিত করিয়ে আনতে খরচ হয় ও অবশিষ্ট  $h$  পরিমাণ কার্য ঘর্ষণ বলের বিরুদ্ধে কার্য করতে খরচ হয়। পরিবর্তনের পর  $W$  পরিমাণ কার্য গ্যাসের ওপর করা হয় ও  $h$  পরিমাণ কার্য ঘর্ষণ বলের বিরুদ্ধে করা হয় যা তাপশক্তি হিসাবে দেয়ালের গায়ে উদ্ভূত হয়। এই  $W$  পরিমাণ কাজ গ্যাসের ওপর করার জন্য গ্যাসের আন্তরশক্তি বেড়ে যায়। সমোষ্ণ সংনমন হতে গেলে এই  $W$  পরিমাণ শক্তি গ্যাস থেকে বের করে তাপ উৎসে ফিরিয়ে দিতে হবে। তাপ উৎস  $W + h$  তাপ বর্জন করল কিন্তু  $W$  তাপ গ্রহণ করল বিপরীত প্রক্রিয়ায়। ঘর্ষণ বলের বিরুদ্ধে কাজ করার জন্য  $h$  পরিমাণ তাপশক্তি উদ্ভূত হল প্রসারণ ও সংনমন দুটি পরিবর্তনেই। যদি কোন ইঞ্জিন এই  $2h$  পরিমাণ তাপ গ্রহণ করে একটি পূর্ণ আবর্তনে  $h$  পরিমাণ কার্য তন্ত্রকে ফিরিয়ে দেয় ও অবশিষ্ট  $h$  পরিমাণ কার্য তাপ উৎসে ফিরিয়ে দেয় তবে পরিবর্তনের শেষে তন্ত্র ও তাপ উৎস আবার আগের অবস্থায় ফিরে যাবে। কিন্তু

যেহেতু পাত্র ও উৎস একই উষ্ণতায় থাকে এই রকম ইঞ্জিনের কার্যপ্রণালী কেলভিন-প্লাঙ্কের দ্বিতীয় সূত্রের বিবৃতির বিরোধিতা করছে। সুতরাং এই পদ্ধতিটা অনুৎক্রমণীয়।

ওপরের দুটি উদাহরণ প্রমাণ করছে যে যদি কোন তাপগতীয় পরিবর্তন আপাত স্থিরভাবে না সম্পন্ন হয় (প্রথম উদাহরণে গ্যাস ও পিস্টনের চাপের পার্থক্য সসীম থাকার জন্য প্রসারণ অথবা সংনমন প্রক্রিয়াটি দ্রুত হয়) কিংবা শক্তিবিনাশী বল থাকে (যেমন দ্বিতীয় উদাহরণে ঘর্ষণ বল উপস্থিত আছে) তবে পরিবর্তনটা অনুৎক্রমণীয় হবে। যদি ওপরের দুটি উদাহরণে যথাক্রমে চাপের পার্থক্য অতিক্ষুদ্র হত এবং ঘর্ষণজাত বল অনুপস্থিত থাকত তবে উভয় প্রক্রিয়াই উৎক্রমণীয় হত। যদি কোন পরিবর্তন আপাত-সাম্যভাবে সম্পন্ন হয় এবং অপচয়ী বল না থাকে তবে পরিবর্তনের প্রত্যেক স্তরেই তাপগতীয় সাম্য বজায় থাকবে ধরতে পারি। তখন আমরা তাপগতীয় চলার অণুপরিবর্তন করে প্রক্রিয়াটিকে বিপরীতক্রমে চালাতে পারব, অন্য কোথাও কিছু পরিবর্তন না করে। একটা সসীম পরিবর্তনকে আমরা অসংখ্য অণুপরিমাণ পরিবর্তনের সমষ্টি হিসাবে ভাবতে পারি। একটা সসীম চাপের পরিবর্তনকে ( $P_1$  থেকে  $P_2$  ধরি) আমরা  $P_1 \rightarrow P_1 - dP$ ,  $P_1 - dP \rightarrow P_1 - 2dP$ , .....  $p_2 + dp \rightarrow p_2$  এইভাবে অসংখ্য অণুপরিবর্তনের ভিতর দিয়ে নিয়ে যাওয়া হয়েছে বলে ভাবতে পারি। অনুরূপভাবে একটা সসীম উষ্ণতার পরিবর্তন  $T_1^\circ$  থেকে  $T_2^\circ$  কে  $T_1^\circ - T_1^\circ - dT$ ,  $T_1^\circ - dT \rightarrow T_1^\circ - 2dT$  .....  $T_2^\circ + dT \rightarrow T_2^\circ$  এইরকম অসংখ্য ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের সমাহার হিসাবে কল্পনা করতে পারি। যদি শক্তিবিনাশী বল অনুপস্থিত থাকে তবে এই পরিবর্তনের প্রতিটি সময়েই তাপগতীয় সাম্যের শর্ত পূরণ হচ্ছে এবং প্রক্রিয়াটি উৎক্রমণীয় হবে। (তাপগতিতত্ত্বে একটি তাপগ্রাহককে অসীম তাপগ্রাহিতা সম্পন্ন বলে ধরতে পারি যা কোন সসীম পরিমাণ তাপ গ্রহণ বা বর্জন করতে পারে কোন তাপগতীয় চলার প্রায় কোন পরিবর্তন না করে এবং উৎক্রমণীয়ভাবে) এইবার আমরা नीচে কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে দেখাব দ্বিতীয় সূত্র প্রমাণ করে যে বিশ্বের সকল প্রাকৃতিক পরিবর্তনই অনুৎক্রমণীয়।

1) তাপ পরিবহন — ধরা যাক  $T_1^\circ$  ও  $T_2^\circ$  দুটি ভিন্ন উষ্ণতার তাপ উৎসের মধ্যে ( $T_1 > T_2$ )  $Q_1$  পরিমাণ তাপ পরিবাহিত হচ্ছে। যদি এই তাপ প্রবাহটি উৎক্রমণীয় হয় তবে পরিবহনের পরে অন্য কোন পরিবর্তন না করে কম উষ্ণতার ( $T_2^\circ$ ) তাপ উৎস থেকে বেশী উষ্ণতার ( $T_1^\circ$ ) তাপ উৎসে তাপ চালনা করা যাবে। কিন্তু ক্লসিয়াসের দ্বিতীয় সূত্রের বিবৃতি অনুসারে এই বিপরীত তাপগতীয় প্রক্রিয়াটি অসম্ভব। সুতরাং তাপ পরিবহন একটি অনুৎক্রমণীয় পদ্ধতি,

2) মুক্ত প্রসারণ — মুক্ত প্রসারণ বাইরের কোন কার্য ছাড়াই গ্যাস একটি প্রাথমিক আয়তন  $V_1$  থেকে অন্তিম আয়তন  $V_2$  তে প্রসারিত হয়। যদি প্রসারণের পরে গ্যাসটিকে আবার আগের অবস্থায় ফিরিয়ে আনতে হয় তবে গ্যাসের ওপর বাইরের থেকে কার্য করে একে প্রাথমিক আয়তন  $V_1$  এ সংনমিত করতে হবে। এর ফলে গ্যাসের আন্তরশক্তি বেড়ে যাবে। গ্যাসের অবস্থা অপরিবর্তিত রাখতে গেলে এই

আন্তরশক্তিকে গ্যাস থেকে বার করে দিতে হবে ও তাকে কোন তাপ উৎসে স্থানান্তরিত করতে হবে। পারিপার্শ্বিককে একই রাখতে হলে এই নির্দিষ্ট উষ্ণতার তাপ উৎস থেকে তাপ সংগ্রহ করে তাকে সমপরিমাণ কার্যে রূপান্তরিত করতে হবে। কিন্তু এই প্রক্রিয়া কেলভিন-প্লাঙ্কের তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের বিবৃতির পরিপন্থী। কাজেই এই মুক্ত প্রসারণ পরিবর্তনটিও অনুক্রমণীয়।

অনুরূপভাবে বৈদ্যুতিক তারের ভিতর দিয়ে তড়িতপ্রবাহ পাঠিয়ে তারটি উত্তপ্ত করার ঘটনা অথবা একটি তরলকে আলোড়ক দিয়ে আলোড়িত করার ঘটনা অনুক্রমণীয়, কারণ এই পরিবর্তনগুলি উৎক্রমণীয় হতে গেলে একটি নির্দিষ্ট উষ্ণতার তাপ উৎস থেকে তাপ সংগ্রহ করে অন্য কোথাও কিছু পরিবর্তন না করে তাকে কার্যে পরিণত করতে হবে। কিন্তু তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে তা অসম্ভব। এই ঘটনাগুলি পর্যবেক্ষণ করলে দেখা যাবে এই অনুক্রমণীয়তার মূলে রয়েছে আপাতসাম্যীয় অবস্থার অনুপস্থিতি ও শক্তিবিনাশী বলের প্রভাব। যেহেতু বাস্তবে কোন ঘটনাই আপাত স্থিরভাবে করা যায় না এবং শক্তিবিনাশী বলও প্রায় সর্বত্র বিদ্যমান সুতরাং যে কোন ঘটনাই অনুক্রমণীয়।

### 4.3.1 কার্নো ইঞ্জিন

দ্বিতীয় সূত্র থেকে আপনাদের দেখানো যায় যে কোন ইঞ্জিন-এর মূল লক্ষ্য তাপকে যান্ত্রিক কার্যে রূপান্তরিত করা। কিন্তু ঐ সূত্রানুসারে কোন তাপীয় উৎস থেকে তাপগ্রহণ করে তাকে সম্পূর্ণ রূপে কার্যে পরিণত করা অসম্ভব। সেক্ষেত্রে তাপীয় উৎস থেকে সংগৃহীত শক্তির একটি অংশের বিনিময় কার্য সম্পাদিত হয় এবং বাকী অংশ নিম্ন তাপমাত্রার তাপগ্রাহকে বর্জন করা হয়। অর্থাৎ প্রত্যেকটি ইঞ্জিনই তিনটি বিশেষ অংশের দ্বারা গঠিত এবং ওরা (i) উষ্ণতর তাপীয় উৎস, ii) নিম্ন উষ্ণতার তাপীয় উৎস বা তাপ গ্রাহক, iii) কার্যকরী বস্তু। এক্ষেত্রে কার্যকরী বস্তু তাপীয় উৎস থেকে  $Q_1$  তাপ গ্রহণ করে এবং  $W = Q_1 - Q_2$  কার্য পূর্ণ আবর্তনে সম্পন্ন করে  $Q_2$  তাপ তাপগ্রাহকে বর্জন করে। এক্ষেত্রে ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা  $\eta$  নিম্নরূপে নির্ণয় করা সম্ভব।

প্রথম সূত্র অনুসারে  $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$

পূর্ণ আবর্তনে তন্ত্র প্রাথমিক অবস্থায় ফিরে আসায়  $\Delta U = 0$ । চিহ্ন রীতি ধরে  $W = Q_1 - Q_2$

$$\therefore \eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad 4.1$$

এই যান্ত্রিক দক্ষতা  $\eta$  নিম্নলিখিত বিষয়গুলির ওপর নির্ভর করে —

- i) কার্যকরী তন্ত্রের প্রকৃতি,
- ii) তাপীয় উৎসদ্বয়ের উষ্ণতা,

এবং iii) ইঞ্জিনের পূর্ণ আবর্তনে কার্যকরী তন্ত্রের সম্ভাব্য পরিবর্তন।

উল্লেখ্য দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে  $Q_2 \neq 0$  হওয়ায়  $\eta$  এর মান সর্বদা এক অপেক্ষা কম।

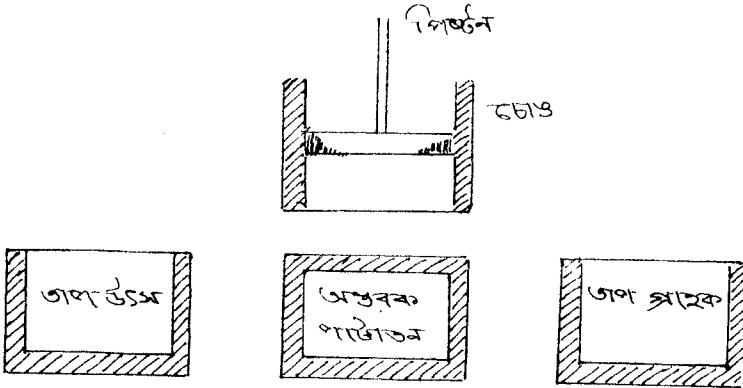
কার্নো তাত্ত্বিক আলোচনার সাহায্যে যে আদর্শ ইঞ্জিনের ধারণা দেন তাতে ইঞ্জিনের পূর্ণ আবর্তনের প্রতিটি পর্যায় কার্যকরী তন্ত্রের পরিবর্তন উৎক্রমণীয় পদ্ধতিতে হয়। কার্যকরী তন্ত্রের ওপর কোন বিধিনিষেধ না থাকলেও আমরা আদর্শ গ্যাসকে কার্যকরী তন্ত্র ধরে কার্নো ইঞ্জিনের যান্ত্রিক দক্ষতা নির্ণয় করব। এর কার্যপ্রণালী বোঝার জন্য আপনারা নিম্নলিখিত যন্ত্রাংশের কথা কল্পনা করুন :

ক) একটি উচ্চতর উষ্ণতার ( $T_1$ ) তাপ উৎস।

খ) একটি নিম্নতর উষ্ণতার ( $T_2$ ) তাপগ্রাহক।

গ) একটি কুপরিবাহী বা অন্তরক পাটাতন।

ঘ) একটি আদর্শ গ্যাসপূর্ণ চোঙ যা একটি ঘর্ষণহীন ভাবে চলাচলকারী পিস্টন দ্বারা আবদ্ধ। চোঙের দেওয়াল কুপরিবাহী কিন্তু তলদেশ সুপরিবাহী পদার্থের। (চিত্র 4.5) এই ইঞ্জিনের কার্যকরী তন্ত্র চারটি পর্যায়ে পূর্ণ আবর্তন সম্পন্ন করে। সূচক চিত্রে (4.6) এই চক্রটিকে দেখানো হয়েছে।



চিত্র 4.5 আদর্শ কার্নো ইঞ্জিন

1) তাপ উৎসের উষ্ণতায় উৎক্রমণীয় পরিবর্তন :

গ্যাসপূর্ণ চোঙটি তাপ উৎসে রেখে উৎক্রমণীয় সমোষ্ণ প্রসারণ ঘটালে আদর্শ গ্যাস তাপ উৎস থেকে  $Q_1$  তাপ গ্রহণ করে ওর প্রাথমিক সাম্যবস্থা ( $P_1, V_1, T_1$ ) থেকে ( $P_2, V_2, T_1$ ) সাম্যবস্থা প্রাপ্ত হবে।  $p-v$  সূচকচিত্রে এই প্রক্রিয়াকে AB রেখা দ্বারা দেখানো হয়েছে।

এক্ষেত্রে  $\Delta U = 0$  কিন্তু

$$Q_1 = W_1 = \int_{V_1}^{V_2} P dv = RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dv}{v}$$
$$= RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

2) রুদ্ধতাপ উৎক্রমণীয় প্রসারণ :

গ্যাসপূর্ণ চোঙটিকে অন্তরক পাটাতন- এর ওপর বসিয়ে উৎক্রমণীয় পথে  $(P_2, V_2, T_1)$  প্রসারিত করে  $(P_3, V_3, T_2)$  সাম্যাবস্থায় নিয়ে যাওয়া হয়। এক্ষেত্রে BC রেখা সূচক চিত্রে এই পরিবর্তন সূচিত করে।

এই পর্যায়  $\Delta Q = 0$

$$\therefore W_2 = C_V(T_2 - T_1) \text{ (আগের একক দেখুন)}$$

3) তাপগ্রাহকের উষ্ণতায় সমোষ্ণ সংকোচন :

এই পর্যায় চোঙটিকে তাপগ্রাহকের ওপর বসিয়ে উৎক্রমণীয় পথে  $(P_3, V_3, T_2)$  অবস্থা থেকে  $(P_4, V_4, T_2)$  অবস্থাতে নেওয়া হয়। CD রেখা দ্বারা এই পর্যায় সূচিত হয়েছে।

এক্ষেত্রেও  $\Delta U = 0$  এবং কার্যকরী তন্ত্র কর্তৃক তাপগ্রাহকে বর্জিত তাপ

$$Q_2 = W_3 = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$$

4) রুদ্ধতাপ উৎক্রমণীয় সংকোচন :

আবারও চোঙটিকে অন্তরক পাটাতনের ওপর বসিয়ে উৎক্রমণীয়ভাবে গ্যাসকে সংকুচিত করলে তন্ত্রের ওপর কার্য করা হয় এবং DA রেখা সূচক চিত্রে এই রুদ্ধতাপ উৎক্রমণীয় সংকোচন সূচিত করে যেখানে সাম্যাবস্থা  $(P_4, V_4, T_2)$  থেকে  $(P_1, V_1, T_1)$  পরিণত হয়ে আবর্তন চক্র পূর্ণ করে।

$$\text{এক্ষেত্রে } Q = 0 \text{ কিন্তু } W_4 = -C_V(T_1 - T_2)$$

$$\text{এখন পূর্ণচক্রে মোট কার্য } W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

$$= Q_1 + C_V(T_1 - T_2) - Q_2 - C_V(T_1 - T_2)$$

$$= Q_1 - Q_2$$

$$= RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$$

সুতরাং কার্নো ইঞ্জিনের যান্ত্রিক দক্ষতা

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

$$= 1 - \frac{T_2 \ln V_3/V_4}{T_1 \ln V_2/V_1}$$

4.2

B ও C একই রুদ্ধতাপ লেখচিত্রে হওয়ায়  $T_1 V_2^{r-1} = T_2 V_3^{r-1}$  বা  $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{r-1}$

অনুরূপে D ও A একই রুদ্ধতাপ রেখায় থাকায়,  $T_2 V_4^{r-1} = T_1 V_1^{r-1}$  বা  $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{r-1}$

$$\text{বা } \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1} \text{ বা } \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}$$

$$\text{সুতরাং } \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

4.3

সুতরাং  $\eta$  কেবলমাত্র তাপ উৎস ও তাপগ্রাহকের উষ্ণতার ওপরই নির্ভরশীল, কার্যকরী তন্ত্রের প্রকৃতির ওপর নয়। এই প্রসঙ্গে লক্ষ্য করুন কার্যকরী তন্ত্র আদর্শ গ্যাস ছাড়াও অন্য বস্তু হতে পারে।

$\eta$  রাশিমালা থেকে দেখা যায়  $T_2 = 0$  হলে  $\eta = 1$  হয়। উল্লেখ করা যেতে পারে চরম উষ্ণতা শূন্য বাস্তবে পাওয়া যায়না। ফলে  $\eta$  এর মান সর্বদা এক অপেক্ষা কম।

অনুরূপ কয়েকটি কার্ণো চক্রের কার্যপ্রণালী দেখান হল।

(ক) উৎক্রমণীয় কোষ কার্ণো-চক্র :— (1)  $a \rightarrow b$ , বাইরের বর্তনীতে  $-$  থেকে  $+$  এ উৎক্রমণীয় রুদ্ধতাপ তড়িৎপ্রবাহ যার ফলে কোষের ওপর কার্য করা হয় ও এর উষ্ণতা  $T_1^\circ$  পর্যন্ত বাড়ে।

(2)  $b \rightarrow c$ , বাইরের বর্তনীতে  $+$  থেকে  $-$  এ উৎক্রমণীয় সমোষ্ণ তড়িৎপ্রবাহ, এতে কোষ  $Q_1$  তাপ গ্রহণ করে।

(3)  $c \rightarrow d$ , বাইরের বর্তনীতে  $+$  থেকে  $-$  এ উৎক্রমণীয় তড়িৎপ্রবাহ রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় যাতে কোষ কার্য করে ও এর উষ্ণতা কমে  $T_1^\circ$  থেকে  $T_2^\circ$  তে।

(4)  $d \rightarrow a$  বাইরের বর্তনীতে  $-$  থেকে  $+$  এ সমোষ্ণ উৎক্রমণীয় তড়িৎপ্রবাহ যাতে  $Q_2$  পরিমাণ তাপ কোষ বর্জন করে, উৎক্রমণীয় কোষের কার্যপ্রণালীতে কার্ণোচক্রের কার্যকরী দক্ষতার সূত্র লাগিয়ে আমরা দেখাতে পারি,  $e = N + T \frac{de}{dT}$ , যেখানে  $e$  তড়িৎকোষের তড়িচ্চালক বল,  $N$  হচ্ছে রাসায়নিক প্রক্রিয়া দ্বারা কোষের অভ্যন্তরে উদ্ভূত তাপ যখন একক আধান কোষের ভিতর দিয়ে প্রবাহিত হয়।

(খ) প্যারাচুম্বক বস্তু কার্ণো-চক্র :

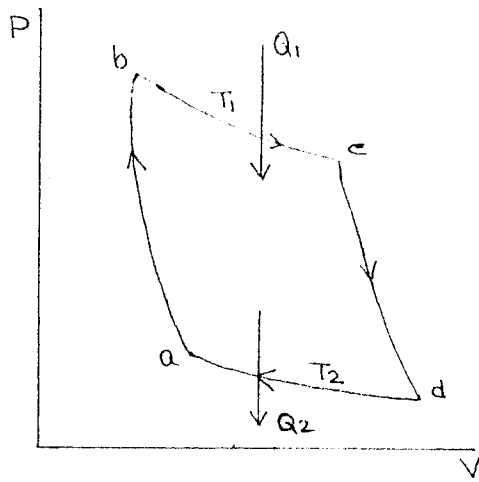
(1)  $a \rightarrow b$  একটি রুদ্ধতাপ উৎক্রমণীয় চৌম্বকীকরণ। এই সময়ে তন্ত্রের ওপর কার্য করা হবে এবং এর উষ্ণতা বাড়বে।

(2)  $b \rightarrow c$ , সমোষ্ণ উৎক্রমণীয় নিশ্চৌম্বকীকরণ। এতে তন্ত্র কার্য করে ও বাইরের থেকে তাপ সংগ্রহের ফলে উষ্ণতা স্থির থাকে।

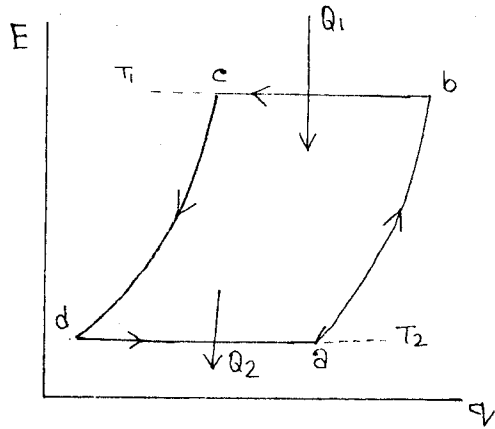
(3)  $c \rightarrow d$ , রুদ্ধতাপ উৎক্রমণীয় নিশ্চৌম্বকীকরণ। এই পর্যায়ে তন্ত্র কার্য করার ফলে এর উষ্ণতা কমে যাবে।

(4)  $d \rightarrow a$  সমোষ্ণ উৎক্রমণীয় চৌম্বকীকরণ। এই প্রক্রিয়ায় তন্ত্রের ওপর কার্য করা হবে এবং উষ্ণতা স্থির রাখতে গেলে তাপ তন্ত্র থেকে বার করে দিতে হবে।

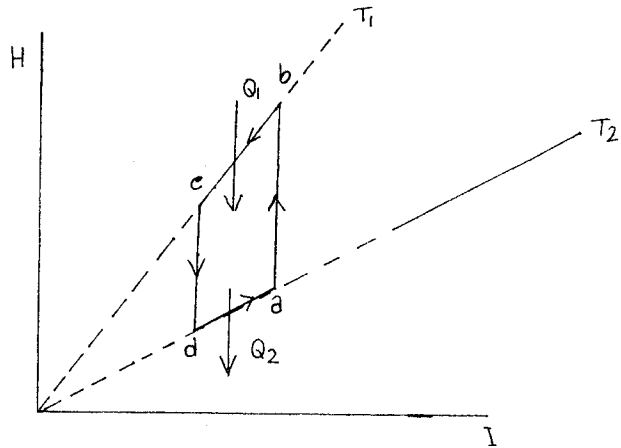




চিত্র 4.6 আর্দশ গ্যাস কানো-ইঞ্জিন



চিত্র 4.6 (b) উৎক্রমণীয় কোষ কানো-ইঞ্জিন



চিত্র 4.6 (c) প্যারাচুম্বক কানো-ইঞ্জিন

এই ইঞ্জিনগুলির কার্যপ্রণালীর বিবরণ 4.3.1 অনুচ্ছেদে দেওয়া আছে

### 4.3.2 কার্নো উপপাদ্য

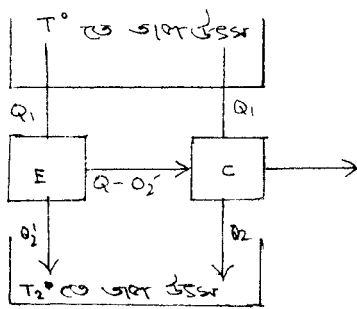
তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র থেকে পাওয়া যায় কোন ইঞ্জিনের কার্যকরী দক্ষতা এক এর চেয়ে কম হবে। এখন প্রশ্ন হচ্ছে, দুটি নির্দিষ্ট উষ্ণতার উৎসের মধ্যে কার্যরত কোন ইঞ্জিনের সর্বাধিক দক্ষতা কত হতে পারে। অনুরূপভাবে দুটি নির্দিষ্ট উষ্ণতার মধ্যে কার্যরত কোন হিমাঙ্কের কৃতি-গুণাঙ্ক সর্বাধিক বেশী কত হতে পারে। ইঞ্জিন অথবা হিমাঙ্কের ব্যবহারকারীদের ক্ষেত্রে এই প্রশ্ন অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। স্পষ্টতঃই এটা বোঝা যায় যে শক্তির অপচয় যত কম হবে যন্ত্রের দক্ষতাও তত বাড়বে। কাজেই উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের দক্ষতা স্বভাবতঃই অনুৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের দক্ষতার থেকে বেশী হবে যদি তন্ত্র ও পারিপার্শ্বিক অপরিবর্তিত থাকে। এই ধারণাটিকেই সঠিক বিবৃতির আকারে প্রকাশ করা হয় কার্নো উপপাদ্যের মাধ্যমে। এই উপপাদ্যের বিস্তৃতি দুটি ভাগে বিভক্ত করা যায়।

- 1) দুটি নির্দিষ্ট উষ্ণতার মধ্যে কার্যরত উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের দক্ষতা সর্বাধিক।
- 2) দুটি নির্দিষ্ট উষ্ণতার মধ্যে কার্যরত সকল উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের দক্ষতা সমান।

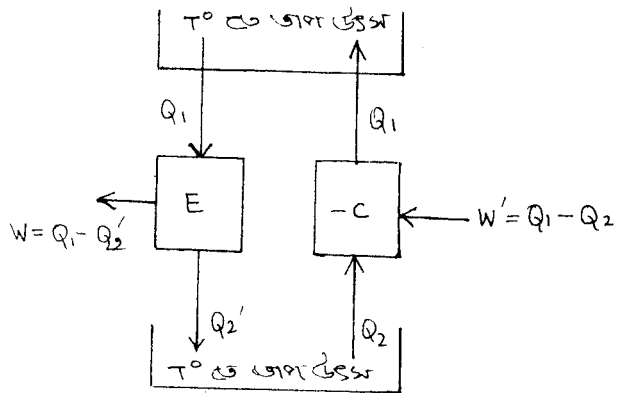
ধরা থাক, দুটি নির্দিষ্ট উষ্ণতা  $T_1$  ও  $T_2$  এর মধ্যে কার্যরত দুটি ইঞ্জিনের মধ্যে একটি উৎক্রমণীয় ও অন্যটি অনুৎক্রমণীয়। দুটি ইঞ্জিনের কার্যকরী তন্ত্রে ব্যবহৃত পদার্থের ধর্ম ও পরিমাণ এমনভাবে নির্দিষ্ট করা হল যে একটি পূর্ণ আবর্তন প্রত্যেকটিই একই সময়ে সম্পন্ন করে। একটি আবর্তনে উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনটি  $T_1$  উষ্ণতার উৎস থেকে  $Q_1$  তাপ শোষণ করে ও  $T_2$  উষ্ণতায়  $Q_2$  তাপ বর্জন করে। অনুৎক্রমণীয় ইঞ্জিনটি একই সময়ে  $T_1$  উষ্ণতার উৎস থেকে  $Q_1$  তাপ শোষণ করে ও  $T_2$  উষ্ণতায়  $Q_2$  তাপ বর্জন করে। (চিত্র 4.7 দ্রষ্টব্য)

ধরা থাক,  $\eta_E > \eta_C$  যেখানে  $\eta_E$  ও  $\eta_C$  যথাক্রমে অনুৎক্রমণীয় ইঞ্জিন E ও উৎক্রমণীয় ইঞ্জিন C এর দক্ষতা।

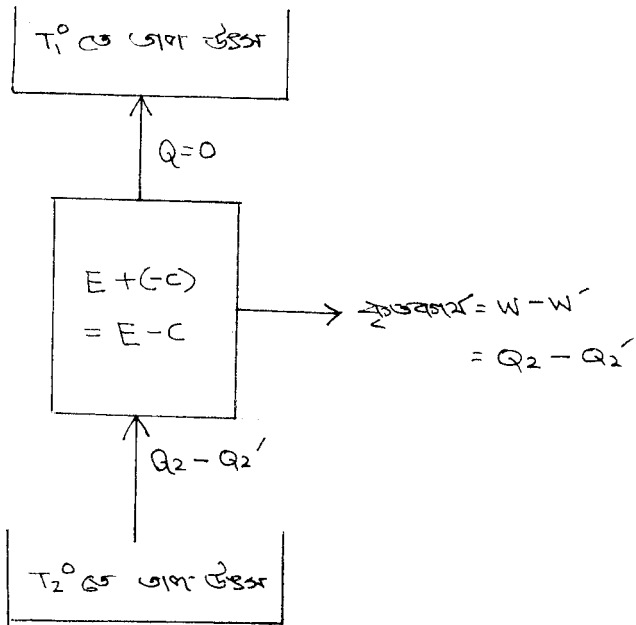
$$\text{অর্থাৎ } 1 - \frac{Q_2}{Q_1} > 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \text{ বা } Q_2 < Q_2$$



চিত্র - 4.7



চিত্র - 4.7 (a)



চিত্র - 4.7 (b)

কার্নো উপপাদ্যের ব্যাখ্যা। 4.7 (a) চিত্রে E ও C কে বিচ্ছিন্নভাবে ও 4.7(b) চিত্রে E ও C কে যৌথভাবে দেখান হয়েছে। প্রমাণ করা যায়,  $\eta_E \leq \eta_C$

যেহেতু C একটি উৎক্রমণীয় ইঞ্জিন, অন্য কোথাও কিছু পরিবর্তন না করেই একে বিপরীতক্রমে হিমায়কভাবে চালান যাবে। তখন একটা পূর্ণ আবর্তনে C ইঞ্জিনটি  $T_2$  উষ্ণতার উৎস থেকে  $Q_2$  তাপ নেবে, বেশী উষ্ণতার উৎসে  $Q_1$  তাপ বর্জন করবে ও এর জন্য প্রয়োজনীয় কার্য  $Q_1 - Q_2$ । যদি C ও E কে মিলিত করা যায় তবে আমরা একটা যুক্ত ব্যবস্থা পাব যা একটা পূর্ণ আবর্তনে  $T_2$  উষ্ণতার উৎস থেকে  $Q_2 - Q_2$  পরিমাণ তাপ শোষণ করবে ও  $T_1$  উষ্ণতার উৎসে কোন তাপ বর্জন না করেই  $(Q_1 - Q_2) - (Q_1 - Q_2)$  বা  $Q_2 - Q_2$  পরিমাণ কার্য দেবে। কিন্তু এইরকম প্রক্রিয়া দ্বিতীয় সূত্রের কেলভিন-প্লাঙ্ক ভাষ্যের বিরোধিতা করছে। সুতরাং  $\eta_E \leq \eta_C$  (চিত্র 4.7 (a) ও 4.7 (b) দ্রষ্টব্য)। ধরা যাক, E ও C দুটিই উৎক্রমণীয় ইঞ্জিন। সুতরাং এই ক্ষেত্রে E ইঞ্জিনকে হিমায়করূপে বিপরীতক্রমে চালান যাবে। সুতরাং E কে ইঞ্জিন ও C কে হিমায়করূপে চালালে আমরা প্রমাণ করতে পারি  $\eta_E \leq \eta_C$  আবার C কে ইঞ্জিন ও E কে হিমায়করূপে চালালে আমরা প্রমাণ করতে পারব  $\eta_C \leq \eta_E$ । সুতরাং দুটি সিদ্ধান্তই যুগপৎ সঠিক হলে আমরা পাব  $\eta_E = \eta_C$ । এখন যেহেতু E ও C যে কোন দুটি উৎক্রমণীয় ইঞ্জিন সুতরাং প্রমাণিত হল যে দুটি নির্দিষ্ট উষ্ণতার মধ্যে কার্যরত সকল উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের দক্ষতা সমান। যদি ইঞ্জিন E টি অনুৎক্রমণীয় হত এবং  $\eta_E = \eta_C$  হত তবে  $Q_2 - Q_2 = 0$ । সুতরাং একটি পূর্ণ আবর্তনের মোট ফল শূন্য। অর্থাৎ একটি পূর্ণ আবর্তনে E কে ইঞ্জিন হিসাবে কাজ করালে যা পরিবর্তন হবে উৎক্রমণীয় ইঞ্জিন C কে হিমায়কভাবে বিপরীতক্রমে চালালে তা প্রশমিত হবে অর্থাৎ যুক্ত ব্যবস্থাটি একটি উৎক্রমণীয় পূর্ণচক্র সম্পন্ন করবে। কিন্তু যেহেতু ইঞ্জিন E টি অনুৎক্রমণীয় যুক্ত ব্যবস্থাটি উৎক্রমণীয় হতে পারেনা, সুতরাং  $\eta_E = \eta_C$  হতে পারে না। অর্থাৎ দুটি নির্দিষ্ট উষ্ণতার মধ্যে কার্যরত অনুৎক্রমণীয় ও উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের মধ্যে উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের দক্ষতা অনুৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের থেকে সবসময় বেশী হবে।

যেহেতু কার্নো উপপাদ্য অনুসারে দুটি নির্দিষ্ট উষ্ণতার মধ্যে কার্যরত কোন উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের কার্যদক্ষতা কেবলমাত্র উষ্ণতা দুটির ওপর নির্ভরশীল সুতরাং আমরা যে কোন কার্যকরী তন্ত্র ব্যবহার করে কোন উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের কার্যদক্ষতা হিসাব করলে তাই হবে ওই দুটি উষ্ণতার মধ্যে যে কোন কার্যরত উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের কার্যদক্ষতা। আদর্শ গ্যাসকে কার্যকরী তন্ত্র হিসাবে ব্যবহার করলে কোন উৎক্রমণীয়

ইঞ্জিনের যে কার্যদক্ষতা হবে তা গাণিতিকভাবে বার করা সহজ কারণ আদর্শ গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ সকলেরই জানা আছে। এইবার আমরা আদর্শ গ্যাসকে কার্যকরী তত্ত্ব হিসাবে ব্যবহার করে কোন উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের কার্যদক্ষতা হিসাব করব।

#### 4.4 উষ্ণতা পরিমাপের পরম বা কেলভিন স্কেল

আপনারা উষ্ণতা পরিমাপের বিভিন্ন স্কেলের সাথে পরিচিত আছেন। প্রতিটি স্কেলই উষ্ণতার সাথে তত্ত্ব ব্যঞ্জিত পদার্থের কোন ভৌত ধর্মের পরিবর্তনের ওপর প্রতিষ্ঠিত। উদাহরণস্বরূপ, গ্যাস থার্মোমিটার উষ্ণতার সাথে গ্যাসের চাপ বা আয়তনের পরিবর্তনের নীতির ওপর, রোধ থার্মোমিটার উষ্ণতার সাথে রোধের পরিবর্তনের সূত্রের ওপর নির্ভরশীল। কিন্তু তাপগতিতত্ত্বে আপনারা উষ্ণতার এমন এক স্কেলের সাথে পরিচিত হবেন যা তত্ত্বের ধর্ম-নিরপেক্ষ ও কেবলমাত্র পূর্ণ আবর্তনে ক্রিয়াশীল কোন উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের গৃহীত ও বর্জিত তাপের পরিমাণের ওপর নির্ভর করে। আমরা দেখব তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের একটা বিরাট সাফল্য এই যে, এইটি তত্ত্ব নিরপেক্ষ একটি উষ্ণতা মাপক স্কেলের পরিচয় দেয় যা অনেকাংশে বাস্তবে রূপায়িত করা সম্ভব।

কার্নো উপপাদ্য অনুসারে দুটি নির্দিষ্ট উষ্ণতার মধ্যে কার্যরত একটি কার্নো ইঞ্জিনের দক্ষতা কেবলমাত্র দুটি উষ্ণতার ওপর নির্ভরশীল। সুতরাং  $Q_1$  ও  $Q_2$  যথাক্রমে  $\theta_1$  ও  $\theta_2$  উষ্ণতায় ( $\theta_1$  ও  $\theta_2$  যে কোন স্কেলে মাপা উষ্ণতা) গৃহীত ও বর্জিত তাপ হলে —

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} = f(\theta_1, \theta_2) \quad [f \text{ একটি অপেক্ষক}]$$

$$\text{অর্থাৎ} \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{1 - f(\theta_1, \theta_2)} = \phi(\theta_1, \theta_2) \quad (\phi \text{ অপর একটি অপেক্ষক})$$

ধরা যাক,  $n$  কার্নো ইঞ্জিনকে ক্রমান্বয়ে এমনভাবে সাজান আছে যাতে একটি পূর্ণ আবর্তনে একটি ইঞ্জিন নিম্ন উষ্ণতার উৎসে যে তাপ বর্জন করে, পরের ইঞ্জিনটি সেই একই পরিমাণ তাপ গ্রহণ করে, তার একটি আবর্তনে। মনে করা যাক যে সব আবর্তনগুলি একই সময়ে সম্পন্ন হয়।

$$\text{প্রথম কার্নো ইঞ্জিনের জন্য } \frac{Q_1}{Q_2} = \phi(\theta_1, \theta_2)$$

$$\text{দ্বিতীয় কার্নো ইঞ্জিনের জন্য } \frac{Q_2}{Q_3} = \phi(\theta_2, \theta_3)$$

তৃতীয়, চতুর্থ ..... n তম কার্নো ইঞ্জিনের ক্ষেত্রেও একইরকম সমীকরণ পাওয়া যাবে, সবগুলি সমীকরণ গুণ করলে পাই,

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{Q_n} &= \frac{Q_1}{Q_2} \times \frac{Q_2}{Q_3} \times \dots \times \frac{Q_{n-1}}{Q_n} \\ &= \phi(\theta_1, \theta_2) \times \phi(\theta_2, \theta_3) \times \dots \times \phi(\theta_{n-1}, \theta_n) \end{aligned}$$

কিন্তু এই n সংখ্যক কার্নো ইঞ্জিন যৌথভাবে কার্য করা একটি কার্নো ইঞ্জিনের এককভাবে কার্য করার সমতুল্য যা একটি পূর্ণ আবর্তনে  $\theta_1$  উষ্ণতাকে  $Q_1$  তাপ শোষণ করে,  $\theta_n$  উষ্ণতায়  $Q_n$  তাপ বর্জন করে এবং  $Q_1 - Q_n$  পরিমাণ কার্য করে যেহেতু মধ্যবর্তী তাপউৎসগুলির তাপগতীয় অবস্থা অপরিবর্তিত থাকে এবং কৃতকার্য  $Q_1 - Q_n$  সংখ্যক কার্নো ইঞ্জিনের প্রত্যেকটির দ্বারা কৃতকার্য যথাক্রমে

$Q_1 - Q_2, Q_2 - Q_3, \dots, Q_{n-1} - Q_n$  এর যোগফলের সমান হয়। (চিত্র 4.7 (a) ও (b) দ্রষ্টব্য)

সুতরাং আমরা লিখতে পারি :—

$$\frac{Q_1}{Q_n} = \phi(\theta_1, \theta_n) = \phi(\theta_1, \theta_2) \times \phi(\theta_2, \theta_3) \times \dots \times \phi(\theta_{n-1}, \theta_n) \quad 4.4$$

$$\text{আমরা জানি } \frac{Q_1}{Q_2} = \phi(\theta_1, \theta_2) = \Psi(\theta_1) \times \xi(\theta_2)$$

$$\text{অনুরূপে } \frac{Q_2}{Q_3} = \phi(\theta_2, \theta_3) = \Psi(\theta_2) \times \xi(\theta_3)$$

$$\therefore \frac{Q_1}{Q_3} = \Psi(\theta_1) \times \xi(\theta_2) \times \Psi(\theta_2) \times \xi(\theta_3) \quad 4.5$$

$$\text{কিন্তু } \frac{Q_1}{Q_3} = \phi(\theta_1, \theta_3) = \Psi(\theta_1) \times \xi(\phi_3) \quad 4.6$$

$$\therefore \Psi(\theta_2) \times \xi(\theta_2) = 1 \text{ বা } \xi(\theta_2) = \frac{1}{\Psi(\theta_2)} \quad 4.7$$

সুতরাং এই সমীকরণ সিদ্ধ হতে গেলে  $\frac{Q_1}{Q_2} = \phi(\theta_1, \theta_2)$  কে  $\frac{\Psi(\theta_1)}{\Psi(\theta_2)}$  ভাবে প্রকাশ করতে হবে।

$$\Psi(\theta) = K \text{ ধরলে পাই, } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{k_1}{k_2} \quad 4.8$$

এই সমীকরণ থেকে আমরা লিখতে পারি,  $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} = \frac{k_1 - k_2}{k_2}$  4.9

সমীকরণ 4.8 থেকে পাই,  $Q_1 > Q_2$  হলে  $k_1 > k_2$  হবে। যেহেতু অন্য যে কোন স্কেলে মাপা উষ্ণতা  $\theta$  বাড়লে  $Q$  ও বাড়বে ( $\theta_1 > \theta_2$  হলে  $Q_1 > Q_2$  হবে), সুতরাং  $\theta_1 > \theta_2$  হলে  $k_1 > k_2$  হবে। এই কারণে তাপগতীয় স্কেলে মাপা উষ্ণতা  $k$  অন্য যে কোন স্কেলে মাপা উষ্ণতা  $\theta$  এর ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক হবে। এই দুটি সমীকরণ (4.8) ও (4.9) থেকে আমরা পাই যে যদি দুটি উষ্ণতায় যথাক্রমে গৃহীত ও বর্জিত তাপ  $Q_1, Q_2$  এবং যে কোন একটির মান (ধরি  $k_2$ ) অথবা  $Q_1, Q_2$  এবং দুটি উষ্ণতার অন্তরফল নির্দিষ্ট করা যায় তবে এই স্কেলে অন্য যে কোন উষ্ণতাও নির্ধারণ করা যাবে। যদি একটা উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনকে যে কোন উষ্ণতা  $k_1$  ও হিমাক্ষ  $k_2$  এর মধ্যে চালান হয় এবং  $k_2$  এর মান  $273^\circ$  ধরা হয় তবে সমীকরণ (4.8) থেকে পাই,  $k = 273 \times \frac{Q_1}{Q_2}$

সুতরাং পরম উষ্ণতামাপক স্কেলে গৃহীত বা বর্জিত তাপ  $Q$  অন্য থার্মোমিটার স্কেলে ব্যবহৃত পদার্থের ভৌত ধর্মের ভূমিকা পালন করছে। ওপরের সমীকরণ থেকে এই স্কেলে যে কোন উষ্ণতা  $k$  পাব, অনুরূপভাবে সমীকরণ (4.9) থেকে আমরা দেখতে পাচ্ছি যে  $k_1 - k_2$  কে  $100^\circ k$  ধরলে (তাপগতীয় স্কেলে মাপা যে কোন উষ্ণতাকে  $^\circ k$  এ প্রকাশ করছি) যেখানে  $k_1$  ও  $k_2$  তাপগতীয় স্কেলে হিমাক্ষ ও স্ফুটনাঙ্কের অন্তরফল ও এই অন্তরফলকে 100 টি সমানভাগে ভাগ করে প্রতিটি ভাগকে  $1^\circ$  ধরলেও যে কোন উষ্ণতা এই স্কেলে নিরূপণ করা যাবে।

সমীকরণ 4.8 থেকে আমরা পাই যে,  $k_2 = 0^\circ \text{k}$  হলে  $Q_2 = 0$  হবে। সুতরাং কোন উৎক্রমণীয়

ইঞ্জিন একটি পূর্ণ আবর্তনে কোন উষ্ণতা  $k_1$  ও  $0^\circ$  এর মধ্যে কার্যরত হলে সেটি নিম্ন উষ্ণতার উৎসে

কোন তাপই বর্জন করবে না। উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের এইরকম কার্য দ্বিতীয় সূত্রের পরিপন্থী। কাজেই বাস্তবে

পরম শূন্যর সমান উষ্ণতায় পৌঁছান সম্ভব নয়। একে পরম শূন্যের অসম্ভাব্যতা বলে। (তাপগতিবিদ্যার

তৃতীয় সূত্রে এই অসম্ভাব্যতার নীতিকে বিশদভাবে বিবৃত করা হয়েছে)।  $\frac{Q_1}{Q_2}$  যেহেতু ধনাত্মক, সুতরাং

তাপগতীয় স্কেলে মাপা যে কোন উষ্ণতাই ধনাত্মক হবে।

আদর্শ গ্যাস কার্নো ইঞ্জিনের নীতি থেকে আমরা পাই,  $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$ , যেখানে  $T_1$  ও  $T_2$  আদর্শ গ্যাস

স্কেলে মাপা উষ্ণতা। আবার যেহেতু  $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{k_1}{k_2}$ , সুতরাং আমরা পাই  $\frac{K_1}{K_2} = \frac{T_1}{T_2}$ । এখন

$K_2 = T_2 = 273^\circ \text{k}$  ধরলে  $K_1 = T_1$  হবে। অর্থাৎ হিমাক্ষের উষ্ণতা দুটি স্কেলে একই ধরলে অন্য যে

কোন উষ্ণতাও দুটি স্কেলে একই হবে। অর্থাৎ দুটি স্কেলই অভিন্ন হবে। (অনুরূপভাবে দুটি স্কেলেই নিম্ন

স্থিরাঙ্ক ও উচ্চ স্থিরাঙ্কের মধ্যে অন্তরফল  $100^\circ$  ধরলে ও একে 100 টি সমানভাগে ভাগ করে প্রতিটি

ভাগকে  $1^\circ$  ধরলেও দুটি স্কেলের অভিন্নতা প্রমাণিত হয়)। বাস্তব গ্যাসকে অত্যন্ত নিম্নচাপে নিয়ে গেলে

তা আদর্শ গ্যাসের মত আচরণ করে। সুতরাং অতি নিম্নচাপের বাস্তব গ্যাসকে কার্যকরী তন্ত্র হিসাবে

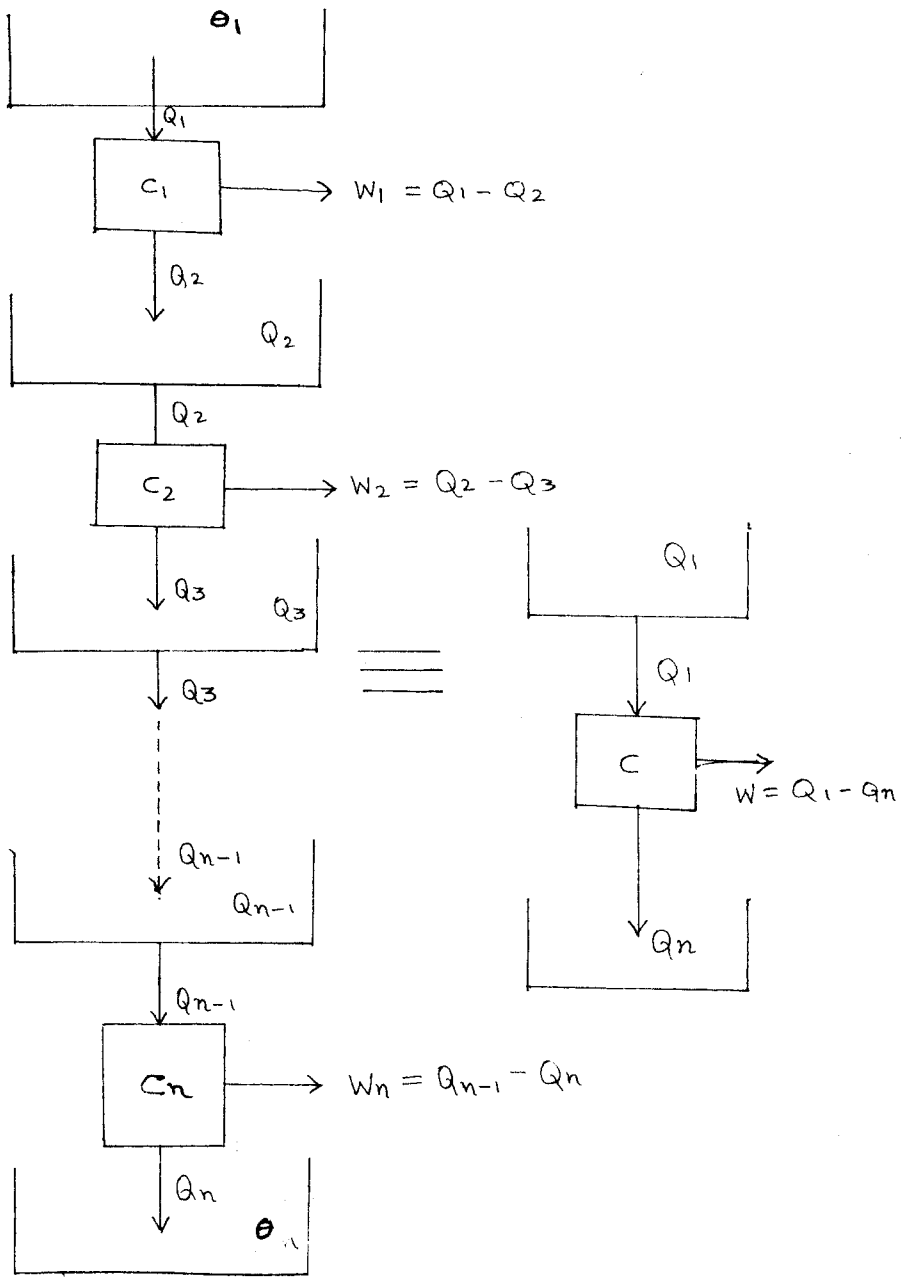
ব্যবহার করে কোন থার্মোমিটার তৈরী করলে তা পরম স্কেল থার্মোমিটারের সাথে প্রায় অভিন্ন হবে।

আবার তাপগতিবিদ্যার সূত্রের থেকে পাওয়া জুল-থমসন প্রক্রিয়ায় ব্যবহৃত নীতিকে কাজে লাগিয়ে

আমরা সাধারণ গ্যাস থার্মোমিটারের পাঠে সংশোধন করেও পরম স্কেলের উষ্ণতা নিরূপণ করতে পারি।

কিন্তু এই প্রসঙ্গে আমরা এই আলোচনায় যাবনা।





চিত্র — 4.8  $n$  সংখ্যক উৎক্রমণীয় ইঞ্জিন 4.8 (a) নং চিত্র অনুসারে যুগপৎ কার্য করা চিত্র 4.8 (b) অনুযায়ী একটি উৎক্রমণীয় ইঞ্জিন কার্য করার সমতুল্য।

## 4.5 উদাহরণ

1) কার্নো ইঞ্জিনের তাপ-প্রদায়ক ও খাদের উষ্ণতা যথাক্রমে  $527^{\circ}\text{C}$  ও  $127^{\circ}\text{C}$ , ঐ ইঞ্জিনের ক্ষমতা 750 watt, প্রতি মিনিটে উৎস থেকে কি পরিমাণ তাপ গৃহীত হয়েছে। ঐ সময়ে খাদে কত তাপ নিক্ষিপ্ত হয়েছে?

উত্তর — প্রতি মিনিটে ইঞ্জিন কর্তৃক কৃতকার্য =  $750 \times 60 = 45,000$  জুল,

$$\text{ইঞ্জিনের দক্ষতা} = 1 - \frac{(273 + 127)}{(273 + 527)} = 1 - \frac{400}{800} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$  প্রতি মিনিটে ইঞ্জিন উৎস থেকে যে পরিমাণ তাপ গ্রহণ করছে তার পরিমাণ =  $45,000 \times 2 = 90,000$  জুল। খাদে নিক্ষিপ্ত তাপের পরিমাণ =  $90,000 - 45,000 = 45,000$  জুল।

2) একটি হিমায়কের কৃতি-গুণাঙ্ক কার্নো-হিমায়কের কৃতি গুণাঙ্কের অর্ধেক।  $200^{\circ}\text{K}$  উষ্ণতার তাপীয় উৎস থেকে 1000 cal. তাপ সংগ্রহ করে  $400^{\circ}\text{K}$  উষ্ণতার উৎসে তাপ নিক্ষিপ্ত হল। উষ্ণতার উৎসে নিক্ষিপ্ত তাপের পরিমাণ কত? হিমায়কটির কৃতি-গুণাঙ্ক হিসাব কর।

$$\text{উত্তর — হিমায়কের কৃতি-গুণাঙ্ক} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

$$\text{বা } \frac{1000}{Q_1 - 1000} = \frac{200}{400 - 200} = 1$$

$$\text{বা } Q_1 = 2000 \text{ cal.}$$

$$\text{কৃতি-গুণাঙ্ক} = \frac{200}{400 - 200} = 1$$

3) প্রমাণ কর যে দুটি আপাতসাম্যীয় রুদ্ধতাপ রেখা পরস্পর ছেদ করতে পারেনা।

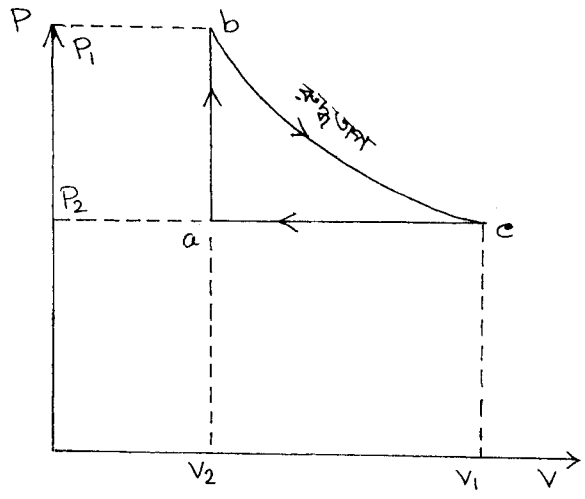
উত্তর — দুটি আপাতসাম্যীয় রুদ্ধতাপ রেখাকে একটি সমোষ্ণ রেখা দিয়ে যুক্ত করলাম। চিত্রে (4.9

চিত্র) প্রদর্শিত পথে একটা পূর্ণ আবর্তন চিন্তা করলাম। যেহেতু রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় কোন তাপ বিনিময় হয়

না। কেবলমাত্র সমোষ্ণ পথেই তাপ হস্তান্তরিত হচ্ছে যা কৃতকার্যের সমান, যেহেতু একটি পূর্ণ চক্রে আন্তরশক্তির পরিবর্তন শূন্য। সুতরাং যন্ত্রটি একটি উষ্ণতর তাপ উৎস থেকে তাপ গ্রহণ করে তাকে সম্পূর্ণভাবে কার্যে পরিণত করেছে। এই যন্ত্রটির কার্যপ্রণালী তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের বিরোধী। এই কারণে দুটি রুদ্ধতাপ রেখা ছেদ করতে পারেনা।

4) চিত্রে একটি কাল্পনিক আদর্শ গ্যাস ইঞ্জিনের পূর্ণ-আবর্তন কার্যপ্রণালী দেখান হল। প্রমাণ কর যে,

ইঞ্জিনটির কার্যকরী ক্ষমতা  $\eta = 1 - \gamma \frac{(V_1/V_2) - 1}{(P_1/P_2) - 1}$



চিত্র — 4.1

উত্তর —  $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$ , যেখানে  $Q_2$  ও  $Q_1$  যথাক্রমে একটি পূর্ণ আবর্তনে ইঞ্জিন কর্তৃক বর্জিত ও গৃহীত তাপ।

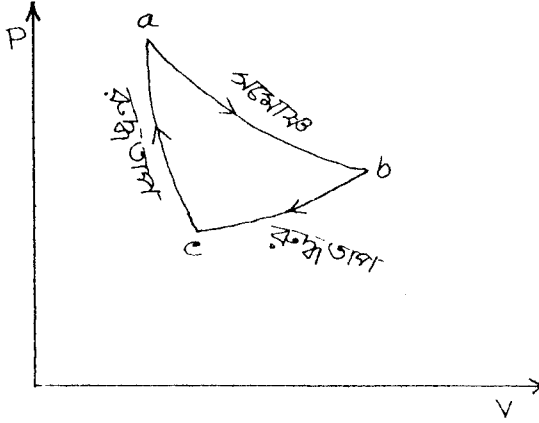
$Q_2 = ca$  পথে বর্জিত তাপ  $= C_p(T_c - T_a)$ , যেখানে  $T_c$  ও  $T_a$  যথাক্রমে c ও a অবস্থার উষ্ণতা।

1. মোল গ্যাসের জন্য  $T_c = \frac{P_2 V_1}{R}$  এবং  $T_a = \frac{P_2 V_2}{R}$

অনুরূপভাবে  $Q_1 = ab$  পথে গৃহীত তাপ  $C_v(T_b - T_a)$

1 মোল গ্যাসের জন্য  $T_b = \frac{P_1 V_2}{R}$  এবং  $T_a = \frac{P_2 V_2}{R}$  মানগুলি  $\eta$  র সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\eta = 1 - \gamma \frac{P_2(V_1 - V_2)}{V_2(P_1 - P_2)} = 1 - \gamma \cdot \frac{(V_1/V_2) - 1}{(P_1/P_2) - 1}$$



চিত্র — 4.9

দুটি রুদ্ধতাপ পথ সূচক চিত্রে যে ছেদ করতে পারেনা তার প্রমাণ।

### 4.5.1 অনুশীলনী — 1

1. কার্নো হিমাযকে ব্যবহৃত 1000 ওয়াট মোটরের যান্ত্রিক দক্ষতা 60%। ঐ হিমাযকের সাহায্যে 9gms জলকে বরফে পরিণত করতে যে সময় লাগে তা হিসাব করুন। জলের উষ্ণতা  $20^\circ\text{C}$  ধরুন।

2. একটি গ্যাসের অবস্থা সমীকরণ  $P(v-b) = R\theta$ , যেখানে  $P$ ,  $V$  এক মোল গ্যাসের চাপ ও আয়তন,  $b$  ধ্রুবক ও  $\theta$  উষ্ণতা। গ্যাসটিকে কার্নো চক্রের একটি পূর্ণ আবর্তনের মধ্য দিয়ে নিয়ে যাওয়া হল। প্রমাণ করুন যে ইঞ্জিনের কার্যকরী দক্ষতা  $= 1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}$  যেখানে  $\theta_1$  ও  $\theta_2$  স্বাভাবিক অর্থবহ।

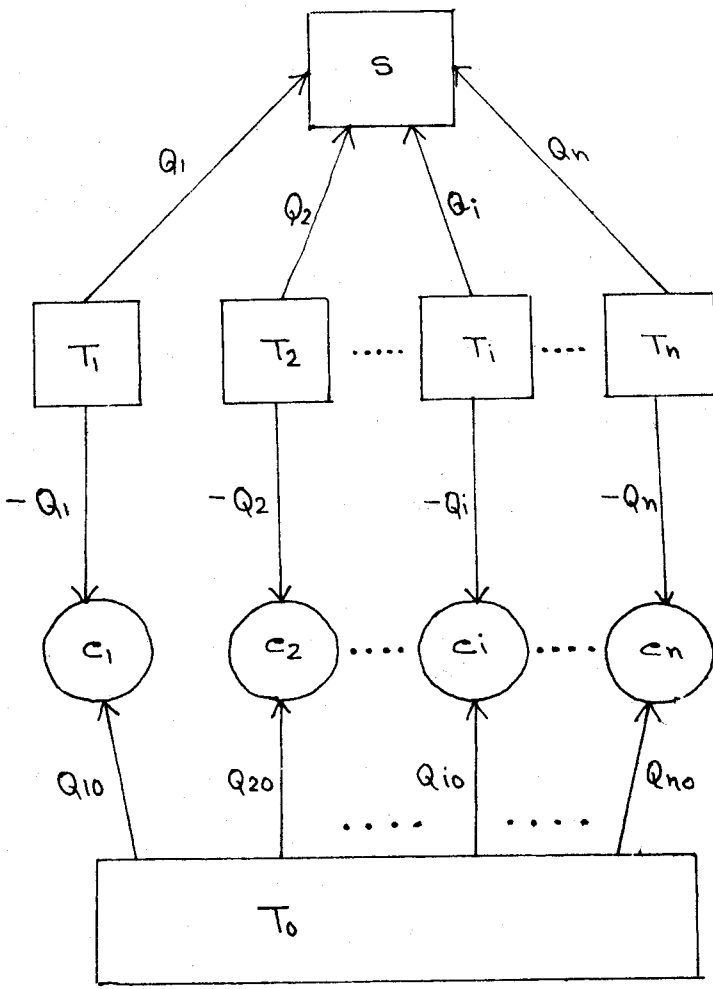
3. কার্নো ইঞ্জিনের তাপ-প্রদায়ক ও খাদের উষ্ণতা যথাক্রমে  $527^\circ\text{C}$  ও  $127^\circ\text{C}$ । ইঞ্জিনটির ক্ষমতা 750 ওয়াট। প্রতি মিনিটে উৎস থেকে কি পরিমাণ তাপ গৃহীত হয়? ঐ সময়ে খাদে কি পরিমাণ তাপ বর্জিত হয়?

## 4.6 এনট্রপি

দ্বিতীয় সূত্রের আলোচনার সূচনায় আপনারা দেখেছেন তাপগতীয় পরিবর্তনের সম্ভাব্য দিক সম্পর্কে এই সূত্র আমাদের কিভাবে আলোকিত করে। কেলভিন-প্লাঙ্ক ও ক্লসিয়াসের বিবৃতিগুলি তাপগতীয় প্রক্রিয়ার একটি নির্দিষ্ট দিকে হওয়ার প্রবণতাকেই নির্দেশ করে। এই অনুচ্ছেদের আলোচনায় আপনারা দেখবেন যে দ্বিতীয় সূত্র এনট্রপি নামে একটি গুরুত্বপূর্ণ তাপগতীয় অপেক্ষকের ধারণা দেয় যার মাধ্যমেও কোন প্রাকৃতিক পরিবর্তন সম্ভব কি না (বা প্রক্রিয়াটি উৎক্রমণীয় অথবা অনুৎক্রমণীয়) তা ব্যাখ্যা করা যায়। দ্বিতীয় সূত্রকে এনট্রপি পরিবর্তনের নীতির মাধ্যমে কিভাবে প্রকাশ করা যায় তাও আপনারা এই অনুচ্ছেদে দেখবেন।

### 4.6.1 ক্লসিয়াসের উপপাদ্য এবং এনট্রপির সংজ্ঞা

মনে করি,  $n$  সংখ্যক তাপ উৎসের সাথে একটি তন্ত্র  $S$  তার একটি পূর্ণ আবর্তনে তাপ বিনিময় করে। তাপ উৎসগুলির উষ্ণতা  $T_1^{\circ}k - T_n^{\circ}k$  ও তন্ত্রটি উৎক্রমণীয় বা অনুৎক্রমণীয় দুই প্রকারেই তাপ বিনিময় করতে পারে। আবার ধরা যাক,  $n$  সংখ্যক উৎক্রমণীয় ইঞ্জিন  $C_1, \dots, C_n$   $T_1^{\circ}k, \dots, T_n^{\circ}k$  এর তাপ উৎস ও  $T_0^{\circ}k$  উষ্ণতার একটি তাপ উৎসের সাথে একই সময়ে তাপ বিনিময় করে একটি পূর্ণচক্র সম্পন্ন করে। তন্ত্র  $S$  ও  $n$  সংখ্যক উৎক্রমণীয় ইঞ্জিন  $C_1, \dots, C_n$  এর কার্যপ্রণালী এমনভাবে নির্ধারণ করা হল যে,  $T_1^{\circ}k, \dots, T_n^{\circ}k$  এর তাপ উৎসগুলির তাপগতীয় অবস্থা অপরিবর্তিত থাকে। অর্থাৎ যদি  $S$   $T_1^{\circ}k$  ( $n = 1, \dots, n$ ) উষ্ণতার  $i$  তম উৎসে  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) পরিমাণ তাপ বর্জন (বা শোষণ) করে তবে  $C_i$  এই একই উৎসের থেকে  $Q_i$  তাপ শোষণ বা বর্জন করে। (চিত্র 4.10 দ্রষ্টব্য) কাজেই  $S$  তন্ত্র ও  $C_1, \dots, C_n$  এই  $n$  সংখ্যক উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের যুগপৎ তাপগতীয় প্রক্রিয়ার মোট ফল এই যে একটি পূর্ণ চক্রে  $T_0^{\circ}k$  উষ্ণতার তাপ উৎস থেকে কিছু পরিমাণ তাপ শোষিত হয় এবং যেহেতু একটি পূর্ণচক্র পরিবর্তনে কোন আন্তরশক্তির পরিবর্তন হয়না সুতরাং একই পরিমাণ কার্য সম্পন্ন হয়।



চিত্র — 4.10

ক্লসিয়াসের উপপাদ্যের ব্যাখ্যা। উৎক্রমণীয় ইঞ্জিন  $C_1, \dots, C_n$  যথাক্রমে  $-Q_1, -Q_2, \dots, -Q_n$  তাপ তাপউৎস থেকে শোষণ করার অর্থ উক্ত তাপ উৎসগুলিতে  $Q_1, \dots, Q_n$  তাপ বর্জন করা।

এখন উৎক্রমণীয় কার্নো ইঞ্জিনের সূত্র থেকে পাই  $\frac{Q_i}{T_i} = \frac{Q_{i0}}{T_0}$ , যেখানে  $Q_i$  ও  $Q_{i0}$  যথাক্রমে

$T_i$  ও  $T_0$  উষ্ণতাতে যে তাপশক্তি বিনিময় হয়  $C_i$  উৎক্রমণীয় ইঞ্জিন দ্বারা তার সমান। সুতরাং  $C_1, \dots, C_n$  এই  $n$  উৎক্রমণীয় ইঞ্জিন  $T_0$  এর উৎসের সাথে যে তাপ বিনিময় করে তার মোট

পরিমাণ  $\sum_i Q_{io}$  বা  $T_0 \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$  যা কৃতকার্যের সমান। কিন্তু তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে অন্য

কোন পরিবর্তন ছাড়া কেবলমাত্র একটি উষ্ণতার উৎস থেকে তাপগ্রহণ করে তাকে সম্পূর্ণরূপে কার্যে

রূপান্তরিত করা সম্ভব নয়। কাজেই  $W = T_0 \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$  হবে। ( $W = T_0 \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$ , কেন দ্বিতীয়

সূত্রকে বিরোধিতা করে না তা পাঠকের বিবেচনার জন্য রাখলাম। উত্তরের জন্য অন্যান্য প্রশ্নাবলীর উত্তর

দেখুন।) সুতরাং আমরা পাই  $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$ , যেখানে  $T_i$  তাপ উৎসের উষ্ণতা। ..... 4.10 (a)

যদি S তন্ত্রটি উৎক্রমণীয়ভাবে কার্য করে তবে অন্য কোন পরিবর্তন ছাড়াই এই তন্ত্রটি বিপরীতক্রমে তার কার্য সম্পন্ন করতে পারবে। বিপরীতভাবে কার্য সম্পাদন করার সময় হস্তান্তরিত তাপের চিহ্ন

বিপরীত হবে অর্থাৎ  $Q_i$  এর জায়গায়  $-Q_i$  বসাতে হবে। পূর্বে যে যুক্তি দেওয়া হয়েছে তা অনুসরণ

করে আমরা পাই  $\sum_i -\frac{Q_i}{T_i} \leq 0$  (4.10 b) সমীকরণ (4.10 a) এবং (4.10 b) যুগপৎ সিদ্ধ হতে গেলে

আমরা পাই, যে কোন উৎক্রমণীয় পূর্ণ চক্রের ক্ষেত্রে  $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0$  কিন্তু অনুৎক্রমণীয় চক্রাকার

পরিবর্তনের ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি  $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} < 0$ ,  $T_i$  তাপউৎসের পরম স্কেলে মাপা উষ্ণতা কিন্তু

উৎক্রমণীয় পরিবর্তনের ক্ষেত্রে যেহেতু আপাতসাম্যীয় অবস্থা বজায় থাকবে, তন্ত্রের উষ্ণতা ও তাপ

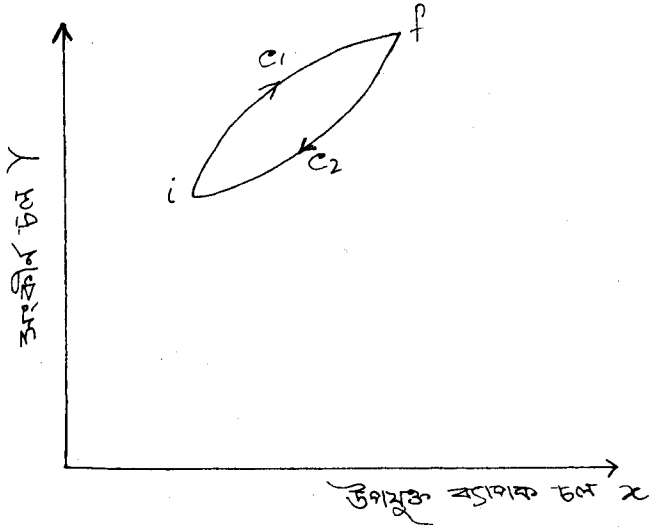
উৎসের উষ্ণতার পার্থক্য অণুপরিমাণ হবে। সুতরাং সেক্ষেত্রে  $T_i$  কে তন্ত্রের উষ্ণতাও বলতে পারি। কিন্তু

অনুৎক্রমণীয় পরিবর্তনের ক্ষেত্রে  $T_i$  i তম উৎসের উষ্ণতা বোঝাবে। যদি তাপ উৎসগুলির পার্থক্য

অণুপরিমাণ হয় তবে তন্ত্রটি নিরবচ্ছিন্নভাবে বন্ডিত তাপউৎসগুলির সাথে তাপ বিনিময় করবে। সেক্ষেত্রে

আমরা লিখতে পারি  $\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$  ..... (4.11)।

এই অসমীকরণকে আমরা বলি ক্লসিয়াসের উপপাদ্য।



চিত্র — 4.11 এনট্রপির সংজ্ঞার ব্যাখ্যা

ধরা যাক,  $i$  ও  $f$  একটি তত্ত্বের প্রাথমিক ও অন্তিম তাপগতীয় সাম্যাবস্থা নির্দেশ করে।  $X$  ও  $Y$  দুটি তাপগতীয় চল (চিত্র 4.11 দ্রষ্টব্য)। (গ্যাসের ক্ষেত্রে  $X$  আয়তন ও  $Y$  চাপ বোঝায়, টানা তারের ক্ষেত্রে  $X$  তারের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি,  $Y$  তারের টান বোঝায়, চৌম্বক পদার্থের ক্ষেত্রে  $X$  চৌম্বক পদার্থের চুম্বকত্ব ও  $Y$  চুম্বক ক্ষেত্রের তীব্রতা বোঝাবে)। ধরা যাক, একটি পূর্ণচক্র উৎক্রমণীয় পরিবর্তনে তন্ত্র উৎক্রমণীয়  $C_1$  পথে  $i$  থেকে  $f$  সাম্যাবস্থায় পৌঁছায় ও উৎক্রমণীয়  $C_2$  পথে  $f$  থেকে  $i$  সাম্যাবস্থায় প্রত্যাবর্তন করে।

ক্লসিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে, উৎক্রমণীয় পূর্ণচক্র পরিবর্তনের ক্ষেত্রে  $\oint \frac{dQ}{T} = 0$

$$\text{or, } C_1 \int_i^f \frac{dQ}{T} + C_2 \int_f^i \frac{dQ}{T} = 0$$



$$\text{or, } C_1 \int_i^f \frac{dQ}{T} = -C_2 \int_i^f \frac{dQ}{T} = C_2 \int_i^f \frac{dQ}{T}$$

সুতরাং  $\int_i^f \frac{dQ}{T}$  এই সমাকলটির মান  $C_1$  ও  $C_2$  দুটি উৎক্রমণীয় পরিবর্তনের ক্ষেত্রে সমান। যেহেতু

$C_1$  ও  $C_2$  যে কোন দুটি উৎক্রমণীয় পথ নির্দেশ করে সুতরাং আমরা লিখতে পারি যে  $R \int_i^f \frac{dQ}{T}$  এর

মান যে কোন উৎক্রমণীয় পরিবর্তন  $R$  এর ক্ষেত্রে একই হবে। এই সমাকলের মান কেবলমাত্র প্রাথমিক

ও অন্তিম সাম্যাবস্থা  $i$  ও  $f$  এর ওপর নির্ভর করে। গণিতের ভাষায়  $\frac{dQ}{T} R$  কে আমরা সম্পূর্ণ অবকল

বলতে পারি। প্রাথমিক ও অন্তিম সাম্যাবস্থা  $i$  ও  $f$  এর মধ্যে  $R \int_i^f \frac{dQ}{T}$  এর মানকে লিখতে পারি,

$$R \int_i^f \frac{dQ}{T} = S_f - S_i \dots\dots\dots (4.12a) \text{ যেখানে } R \text{ } i \text{ ও } f \text{ সংযোগকারী যে কোন উৎক্রমণীয় পথ নির্দেশ}$$

করে ও  $S$  একটি তাপগতীয় অবস্থা অপেক্ষক, প্রথম ও শেষ সাম্যাবস্থার মধ্যে যার মানের পার্থক্য

$$R \int_i^f \frac{dQ}{T} \text{ এর মানের সমান হয়। কাজেই আপনারা দেখতে পেলেন যে তাপগতিতত্ত্বের দ্বিতীয় সূত্র}$$

তাপগতীয় অপেক্ষক এনট্রপির সাথে আমাদের পরিচিত করে। আন্তরশক্তির মত আমরা দুটি সাম্যাবস্থার

মধ্যে এনট্রপির পরিবর্তন হিসাব করতে পারি। কোন একটি সাম্যাবস্থায় এনট্রপির পরম মান নিরূপন

করতে গেলে তাপগতিবিদ্যার তৃতীয় সূত্রের সাহায্য নিতে হয়, তবে আমরা এই এককে এই আলোচনার

ভিতরে যাব না। বিভিন্ন তাপগতীয় পরিবর্তনে এনট্রপির পরিবর্তন হিসাব করা, তাপগতিতত্ত্বে এনট্রপির

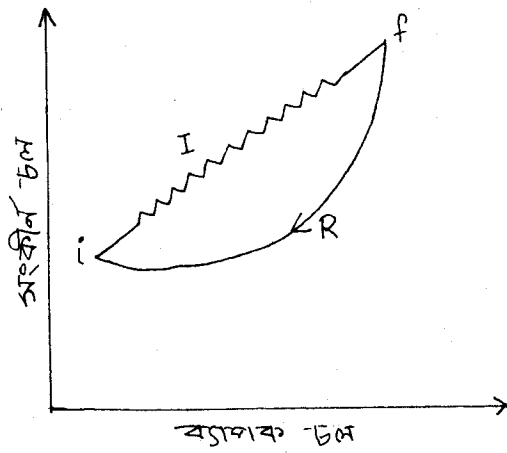
গুরুত্ব ইত্যাদিই আমাদের পরবর্তী আলোচনার উপজীব্য বিষয়।

### 4.6.2 এনট্রপি বৃদ্ধি নীতি

ধরা যাক, একটি তন্ত্র অনুৎক্রমণীয়  $I$  পথে  $i$  থেকে  $f$  সাম্যাবস্থায় যায় এবং উৎক্রমণীয়  $R$  পথে

$f$  থেকে  $i$  তে ফিরে আসে। অনুৎক্রমণীয় পূর্ণচক্র পরিবর্তনের ক্ষেত্রে ক্লসিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0 \text{ (চিত্র নং 4.13 দ্রষ্টব্য)}$$



চিত্র — 4.13 অনুক্রমণীয় ক্ষেত্রে এনট্রপির ঘটনার পরিবর্তনের ব্যাখ্যা

$$\text{বা } I \int_i^f \frac{dQ}{T} + R \int_f^i \frac{dQ}{T} < 0$$

$$\text{বা } I \int_i^f \frac{dQ}{T} + S_i - S_f < 0$$

$$\text{বা } S_f - S_i > I \int_i^f \frac{dQ}{T}$$

রুদ্ধতাপ অনুক্রমণীয় পরিবর্তনের ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি  $S_f > S_i$ । উৎক্রমণীয় রুদ্ধতাপ পরিবর্তনের ক্ষেত্রে  $S_f = S_i$ । অর্থাৎ উৎক্রমণীয় রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে এনট্রপি অপরিবর্তিত থাকে ও

অনুক্রমণীয় রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে এনট্রপি বৃদ্ধি পায়, সাধারণভাবে  $S_f - S_i \geq \int_i^f \frac{dQ}{T}$ । 4.12b

বিশ্বের যে কোন প্রাকৃতিক পরিবর্তনে তন্ত্র ও তার পরিপাশ্ব অংশগ্রহণ করে। এই দুটিকে যুক্ত করলে আমরা যা পাব তা হল তাপগতীয় পরিবর্তনে সামগ্রিক বিশ্ব। এই যৌথ ব্যবস্থাটি মিলিতভাবে একটি বিচ্ছিন্ন তন্ত্র হিসাবে কার্য করবে। এই বিচ্ছিন্ন তন্ত্রে যে কোন তাপগতীয় পরিবর্তন রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় সম্পন্ন হবে। সুতরাং যে কোন তাপগতীয় পরিবর্তনের ক্ষেত্রে বিশ্বের মোট এনট্রপির পরিবর্তন হিসাব করতে আমরা সমীকরণ (4.12a) কে ব্যবহার করতে পারি। সমীকরণ (4.12b) থেকে আমরা পাই,

$S_f - S_i \geq 0$  (যেহেতু সমগ্র বিশ্বটি একটি বিচ্ছিন্ন তন্ত্র হিসাবে কার্য করেছে  $dQ = 0$ )। যেখানে  $>$  চিহ্নটি অনুৎক্রমণীয় পরিবর্তনের ক্ষেত্রেও = চিহ্নটি উৎক্রমণীয় পরিবর্তনের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। সুতরাং আপনারা দেখতে পেলেন যে উৎক্রমণীয় পরিবর্তনের ক্ষেত্রে বিশ্বের মোট এনট্রপি ধ্রুবক থাকে ও অনুৎক্রমণীয় পরিবর্তনে বিশ্বের মোট এনট্রপি বাড়ে। একে এনট্রপি বৃদ্ধি নীতি বলে। তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র থেকে আপনারা যেহেতু দেখেছেন যে বিশ্বে ঘটমান যে কোন প্রাকৃতিক পরিবর্তনই অনুৎক্রমণীয় সুতরাং সাধারণভাবে আমরা লিখতে পারি যে, বাস্তবে সমস্ত পরিবর্তনেই বিশ্বের মোট এনট্রপি বৃদ্ধি পায়।

কোন বিচ্ছিন্ন তন্ত্রের তাপগতীয় পরিবর্তনে, যা অনুৎক্রমণীয়, এনট্রপি বৃদ্ধি পায় ও তাপগতীয় সাম্যাবস্থায় তা চরম মান পায়। যেহেতু এনট্রপি একটি তাপগতীয় অপেক্ষক, তাপগতীয় সাম্যাবস্থায় অন্যান্য তাপগতীয় চলরাশি, যেমন, চাপ, আয়তন, উষ্ণতা ইত্যাদিও তাপগতীয় সাম্যাবস্থায় উপযুক্ত মান লাভ করে। এ বিষয়ে বিস্তারিত বিবরণ আমরা পরের এককে আলোচনা করব। এনট্রপি বৃদ্ধির নীতি যে তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের কেলভিন-প্লাঙ্ক ও ক্লসিয়াসের বিবৃতির সাথে সঙ্গতিপূর্ণ তা সহজেই প্রমাণ করা যায়। কেলভিন-প্লাঙ্ক - এর বিবৃতি মেনে কোন ইঞ্জিন কাজ করলে তা বেশী উষ্ণতার উৎস ( $T_1^\circ$ ) থেকে  $Q_1$  তাপ গ্রহণ করবে ও অপেক্ষাকৃত কম উষ্ণতার তাপগ্রাহকে ( $T_2^\circ$ )  $Q_2$  তাপ বর্জন করবে। এনট্রপি বৃদ্ধির নীতি অনুযায়ী যে কোন ইঞ্জিনের কার্যপ্রণালীর ক্ষেত্রে বিশ্বের মোট এনট্রপি ধ্রুবক থাকবে (উৎক্রমণীয় হলে) অথবা বাড়বে (অনুৎক্রমণীয় হলে)। তাপ ইঞ্জিনের কার্যপ্রণালীর ক্ষেত্রে বিশ্বের মোট এনট্রপির পরিবর্তন হিসাব করা যাক।

তাপগতিবিদ্যায় কোন তাপ উৎস তাপগ্রহণ বা বর্জন করলে তা করে উৎক্রমণীয়ভাবে।  $T_1^\circ$  উষ্ণতার

তাপউৎস  $Q_1$  তাপ বর্জন করলে এনট্রপির পরিবর্তন হয়  $\int_i^f \frac{dQ}{T}$  (i ও f যথাক্রমে প্রাথমিক ও অন্তিম

অবস্থা) বা  $\frac{-Q_1}{T_1}$ । অনুরূপভাবে  $T_2^\circ$  উষ্ণতার তাপগ্রাহক  $Q_2$  তাপ গ্রহণ করলে এনট্রপির পরিবর্তন হয়

$\frac{Q_2}{T_2}$ । সুতরাং বিশ্বের এনট্রপির মোট পরিবর্তন  $\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1}$ । এনট্রপির বৃদ্ধির নীতি অনুযায়ী

$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} \geq 0$ , অথবা  $\frac{Q_2}{Q_1} \geq \frac{T_2}{T_1}$ । সুতরাং ইঞ্জিনের কার্যদক্ষতা  $1 - \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$ , যা আমরা

আগেও প্রমাণ করেছি। ইঞ্জিনটি যদি কোন তাপ  $T_2^\circ$  তে বর্জন না করত, অর্থাৎ যদি  $Q_2 = 0$  হত তবে

বিশ্বের এনট্রপির মোট পরিবর্তন হত  $\frac{-Q_1}{T_1}$  অর্থাৎ ঋণাত্মক। কাজেই এই কার্যপ্রণালী এনট্রপি বৃদ্ধির

নীতির বিরোধী এবং দ্বিতীয় সূত্রেরও পরিপন্থী হত। একইভাবে, কোন হিমায়ক যদি ক্লসিয়াসের দ্বিতীয় সূত্রের বিবৃতি লঙ্ঘন করত তবে তা স্বতঃপ্রণোদিতভাবে কম উষ্ণতার উৎস ( $T_2^\circ$ ) থেকে  $Q$  পরিমাণ তাপ

বেশী উষ্ণতার উৎস ( $T_1^\circ$ ) তে হস্তান্তরিত করত। এর ফলে বিশ্বের এনট্রপির মোট পরিবর্তন হত

$$Q \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) < 0$$

স্পষ্টতঃই এই কার্যপ্রণালী এনট্রপি বৃদ্ধির নীতি ও দ্বিতীয় সূত্র উভয়েরই বিরোধী।

ক্লসিয়াসের বিবৃতি মেনে চললে এনট্রপির মোট পরিবর্তন হয়  $\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}$  এবং এনট্রপি বৃদ্ধির নীতি

অনুসারে  $\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \geq 0$  যা উৎক্রমণীয় অথবা অনুৎক্রমণীয় হিমায়কের কৃতি গুণাক্ষের সূত্রের সাথে

সামঞ্জস্যপূর্ণ।

এনট্রপি বৃদ্ধির নীতির অনেক উদাহরণ বাস্তবে দেখা যায়। আপনারা দেখেছেন যে ঘর্ষণের বিপক্ষে কোন বস্তু চললে সে আস্তে আস্তে থেমে যাবে। বস্তুর গতিশক্তি ঘর্ষণের বিরুদ্ধে কার্য করতে ব্যয় হবে যা অপচরী তাপশক্তিতে রূপান্তরিত হবে, যেহেতু গতিশক্তির বিনিময়ে তাপশক্তির উদ্ভব এনট্রপি বৃদ্ধির নীতির সাথে সুসামঞ্জস্য। সুতরাং এই প্রাকৃতিক ঘটনা এনট্রপির নীতিকে সমর্থন করে। অনুরূপভাবে আরও নানাবিধ ঘটনা (যেমন গ্যাসের অনুৎক্রমণীয় রুদ্ধতাপ মুক্ত প্রসারণ, কোন রাসায়নিক বিক্রিয়া একটি বিশিষ্ট দিকে হবার প্রবণতা, বৈদ্যুতিক কোষের কোন বিশেষ দিকে তড়িত প্রবাহ পাঠানোর ঘটনা ইত্যাদি) এই এনট্রপি বৃদ্ধির নীতির সাথে সাযুজ্যপূর্ণ। এনট্রপি বৃদ্ধির এই নীতিকে অনেক সময়ে তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের গাণিতিক রূপ বলা হয়।

#### 4.6.3 কয়েকটি প্রাকৃতিক ঘটনায় এনট্রপির পরিবর্তনের হিসাব

এনট্রপির পরিবর্তন কোন তাপগতীয় পদ্ধতিতে নিরূপণ করতে গেলে আমাদের যে সূত্র ব্যবহার

করতে হবে তা হল  $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$ । কিন্তু এখানে 1 নং এবং 2 নং সাম্যাবস্থার সংযোগকারী পথটি

উৎক্রমণীয় হতে হবে (উৎক্রমণীয় বোঝাতে R চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে)। প্রকৃতিতে ঘটমান তাপগতীয় পরিবর্তন যেহেতু সাধারণভাবে অনুৎক্রমণীয়, প্রাথমিক ও অন্তিম অবস্থার সংযোগকারী পথটিও অনুৎক্রমণীয়। এই অনুৎক্রমণীয় পথে এনট্রপির পরিবর্তন নির্ধারণ করতে গেলে আমরা কল্পনা করে নেব একটি উৎক্রমণীয় পথের অস্তিত্ব যা এই দুইটি নির্দিষ্ট সাম্যাবস্থাকে যুক্ত করেছে। এই উৎক্রমণীয় পথে আমরা সহজেই এনট্রপি পরিবর্তনের সূত্র কাজে লাগিয়ে এনট্রপির পরিবর্তন হিসাব করতে পারি। যেহেতু দুটি নির্দিষ্ট সাম্যাবস্থার মধ্যে এনট্রপির পরিবর্তন পথ - নিরপেক্ষ ও কেবলমাত্র দুটি সাম্যাবস্থার ওপর নির্ভরশীল, অনুৎক্রমণীয় পথে এনট্রপির পরিবর্তন কাল্পনিক উৎক্রমণীয় পথে নিরূপিত পরিবর্তনের সমান হবে। নীচে কয়েকটি ক্ষেত্রে এনট্রপির পরিবর্তনের পরিমাপ দেওয়া হল।

### (1) আদর্শ গ্যাসের সমোষ্ণ প্রসারণ বা সংকোচন

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র অনুসারে  $dQ = du + dW$ । যেহেতু সমোষ্ণ পরিবর্তনে আদর্শ গ্যাসের

ক্ষেত্রে  $dU = 0$ ,  $dQ = dW$ । সুতরাং  $(\Delta S)_1 = \int_1^2 \frac{dW}{T} = \int_1^2 \frac{Pdv}{T}$  ( $\Delta S$ )<sub>1</sub> = আদর্শ গ্যাসের এনট্রপির পরিবর্তন)

$$\text{বা } (\Delta S)_1 = \int_1^2 nR \frac{dV}{V} = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

যদি ধরা যায় যে তাপ উৎসটি উৎক্রমণীয়ভাবে তাপ বর্জন করছে, তবে তাপ উৎস কর্তৃক বর্জিত তাপ

$$= nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \left( \because \Delta Q = \Delta W = \int_{V_1}^{V_2} nRT \frac{dv}{v} \right)। \text{ যেহেতু এই তাপ বর্জিত হয়েছে স্থির উষ্ণতা } T \text{ তে,}$$

$$\text{তাপ উৎসের এনট্রপির পরিবর্তন } (\Delta S)_2 = \frac{-nRT \ln \frac{V_2}{V_1}}{T} \left( \because (\Delta S)_2 = -\int \frac{dQ}{T} = -\frac{\Delta Q}{T} \right)।$$

$$= -nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

∴ মোট বিশ্বের এনট্রপির পরিবর্তন  $= (\Delta S)_1 + (\Delta S)_2 = 0$ , এই উত্তরটি প্রত্যাশিত কারণ সম্পূর্ণ তাপগতীয় পরিবর্তনটি হয়েছে উৎক্রমণীয়ভাবে।

(2) গ্যাসের রুদ্ধতাপ পরিবর্তন :

উৎক্রমণীয় রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে গ্যাসের এনট্রপির পরিবর্তন শূন্য হবে কারণ  $\Delta S = \int_i^f \frac{dQ}{T}$  এবং

$dQ = 0$ । কিন্তু অনুৎক্রমণীয় রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে  $\Delta S > \int_i^f \frac{dQ}{T}$  বা  $\Delta S > 0$  অর্থাৎ তন্ত্রের এনট্রপি বৃদ্ধি পাবে। আমরা নীচে একটা অনুৎক্রমণীয় রুদ্ধতাপ পরিবর্তনের উদাহরণ দিলাম।

(3) আদর্শ গ্যাসের রুদ্ধতাপ মুক্ত প্রসারণ :

মুক্ত প্রসারণে গ্যাসটি বাইরের কোন কার্য ছাড়াই সমোষ্ণভাবে একটি তাপগতীয় অবস্থা  $(P_1, V_1, T)$  থেকে অপর একটি তাপগতীয় অবস্থা  $(P_2, V_2, T)$  তে পৌঁছায়, যেহেতু  $\Delta U = 0$  এবং আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে  $\Delta U = C_V \Delta T$ ,  $\Delta T = 0$ , রুদ্ধতাপ মুক্ত প্রসারণ যেহেতু অনুৎক্রমণীয় পরিবর্তন। এই প্রসারণে এনট্রপির পরিবর্তন হিসাব করার জন্য আমরা দুটি সাম্যাবস্থা সংযোগকারী একটা উৎক্রমণীয় পথ কল্পনা করে নেব। এই কাল্পনিক উৎক্রমণীয় পথে আদর্শ গ্যাসটি সমোষ্ণভাবে প্রসারিত হবে। সুতরাং

$$\Delta Q = \Delta W = \int_1^2 \frac{Pdv}{T} \quad \text{এনট্রপির পরিবর্তন} \quad \Delta S = \int_1^2 \frac{Pdv}{T}$$

$$\text{সুতরাং মুক্ত প্রসারণে আদর্শ গ্যাসের এনট্রপির পরিবর্তন} \quad \Delta S = \int_1^2 \frac{Pdv}{T} = \int_1^2 \frac{R\pi}{\pi} \frac{dV}{V} = R \ln \frac{V_2}{V_1} > 0$$

সুতরাং তন্ত্রের এনট্রপি বাড়বে। যেহেতু পরিবর্তনটি রুদ্ধতাপভাবে হচ্ছে, মোট বিশ্বের এনট্রপির পরিবর্তনও  $R \ln \frac{V_2}{V_1}$  হবে। অর্থাৎ এই অনুৎক্রমণীয় মুক্ত প্রসারণে বিশ্বের মোট এনট্রপি বাড়বে। এখানে

উল্লেখ করা প্রয়োজন যে যেকোন বাস্তব গ্যাসের ক্ষেত্রেও রুদ্ধতাপ মুক্ত প্রসারণে বিশ্বের এনট্রপির পরিবর্তন  $= \int_1^2 \frac{Pdv}{T} > 0$ ।

#### (4) আদর্শ গ্যাসের এনট্রপি :

কোন তাপগতীয় সাম্যাবস্থায় আদর্শ গ্যাসের এনট্রপির হিসাব করতে গেলে আমরা ধরে নেব যে একটি কাল্পনিক উৎক্রমণীয় পথে আদর্শ গ্যাসটি কোন প্রারম্ভিক সাম্যাবস্থা থেকে নির্দিষ্ট সাম্যাবস্থায় এসে উপনীত হয়েছে।

$$\text{এখন } dQ = dU + PdV = C_V dT + PdU$$

$$\text{সুতরাং } \Delta S = S_f - S_i = \int_i^f \left( \frac{C_V dT + PdV}{T} \right)$$

$$\text{অথবা } S_f - S_i = C_V \ln \frac{T_f}{T_i} + R \ln \frac{V_f}{V_i} \quad (1 \text{ মোলের ক্ষেত্রে})$$

$$\therefore S_f = C_V \ln T_f + R \ln V_f + S_i - C_V \ln T_i - R \ln V_i$$

4.13

$$\text{অনুরূপভাবে } \Delta Q = C_V dT + PdV = C_p dT - Vdp$$

(1 মোল আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে  $C_p - C_V = R$  এবং  $PV = RT$  এই দুটি সূত্রকে ব্যবহার করা হয়েছে)।

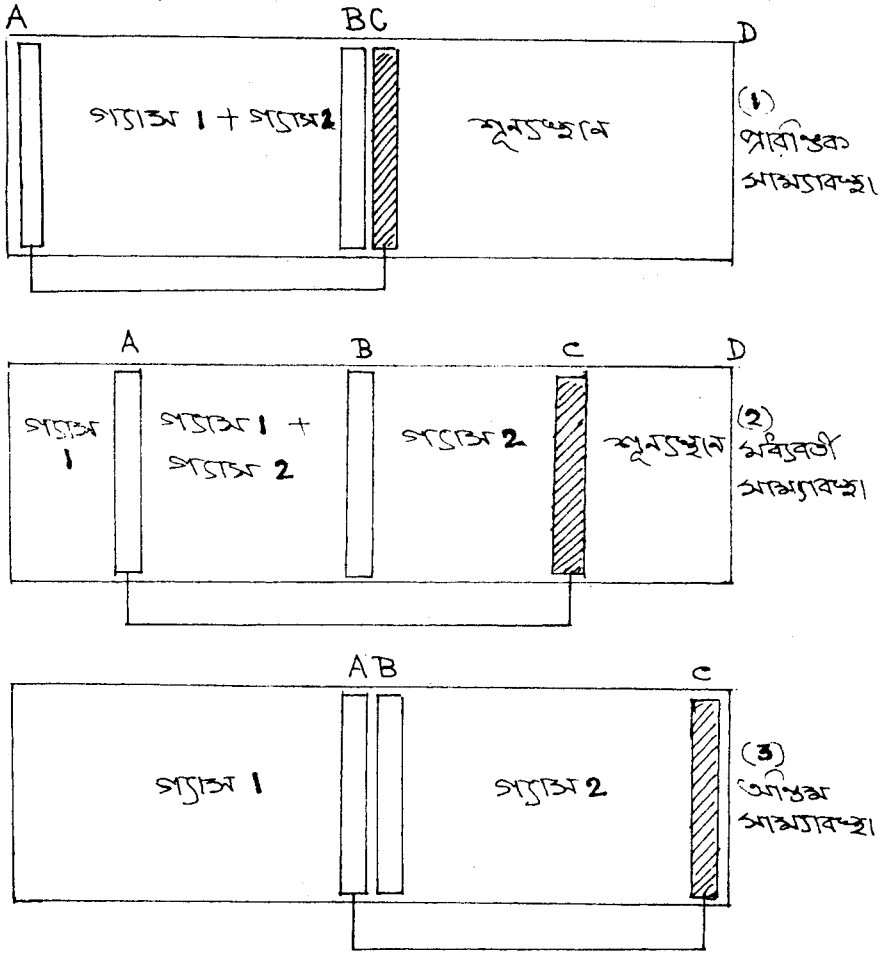
$$\text{বা } S_f - S_i = \int_i^f \frac{(C_p dT - Vdp)}{T} = C_p \ln \frac{T_f}{T_i} - R \ln \frac{P_f}{P_i}$$

$$\text{বা } S_f = C_p \ln T_f - R \ln P_f + S_i - C_p \ln T_i + R \ln P_i$$

#### (5) ব্যাপনের ফলে আদর্শ গ্যাসের এনট্রপির পরিবর্তন :

ধরা যাক, গ্যাস 1 ও গ্যাস 2 এর মিশ্রণ AB অঞ্চলে আবদ্ধ আছে ও CD অঞ্চল গ্যাসশূন্য। A, B ও C প্রান্তে তিনটি স্তম্ভক যুক্ত আছে। ধরা যাক, A ও C স্তম্ভকদুটি যুগ্মভাবে চলাচল করতে পারে ও অপরদিকে B স্তম্ভকটি কোনভাবেই চলতে পারেনা। A ও B স্তম্ভকদুটি অর্ধপ্রবেশ্য বিল্লী দিয়ে এমনভাবে তৈরী যাতে A ও B এর ভিতর দিয়ে যথাক্রমে 1 নং ও 2 নং গ্যাস প্রবেশ করতে পারে। অন্যদিকে C

সুস্বকটির উপাদান এইরকম যে এর ভিতর দিয়ে কোন গ্যাসই ঢুকতে পারেনা। নীচের তিনটি চিত্র যথাক্রমে প্রারম্ভিক, মধ্যবর্তী ও অন্তিম অবস্থা বোঝাচ্ছে। (চিত্র 4.14 দ্রষ্টব্য)।



চিত্র — 4.14

গিবস্ উপপাদ্যের ব্যাখ্যা। অর্ধপ্রবেশ্য ঝিল্লীর সাহায্যে দুটি আদর্শ নিষ্ক্রিয় গ্যাসের সমোষ্ণ উৎক্রমণীয় পৃথকীকরণ।

অন্তিম অবস্থায় A সুস্বকের বাঁদিকের অঞ্চল কেবলমাত্র 1 নং গ্যাস ও B সুস্বকের ডানদিকের অঞ্চল কেবলমাত্র 2 নং গ্যাস দিয়ে পূর্ণ আছে। এইভাবে আমরা একটি গ্যাস মিশ্রণ থেকে আরম্ভ করে দুটি গ্যাসকে আলাদা করতে পেরেছি। মনে করি, যুগ্ম ব্যবস্থার চলাচলে নীচের শর্তগুলি পূরণ হয়েছে।



(ক) ঘর্ষণ বল অনুপস্থিত।

(খ) যুগ্মসুস্তুকের গতি অত্যন্ত ধীর গতিতে হচ্ছে যাতে সর্বক্ষণ ঝিল্লীর সাম্যাবস্থা বজায় আছে।

(গ) সম্পূর্ণ ব্যবস্থাটি একটি নির্দিষ্ট উষ্ণতায় রয়েছে।

(ক), (খ) ও (গ) এই তিনটি শর্ত পূরণ হলে আমরা নিশ্চিতভাবে বলতে পারি যে তাপগতীয় প্রক্রিয়াটি সমোষ্ণ উৎক্রমণীয় পথে সম্পন্ন হয়েছে।

মধ্যবর্তী কোন অবস্থার (চিত্র নং 4.13 দেখুন) কথা আলোচনা করা যাক। ধরা যাক,  $p_1$  ও  $p_2$  যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় গ্যাসের মিশ্রণে আংশিক চাপ।  $p_1$  কেবলমাত্র প্রথম ও  $p_2$  কেবলমাত্র দ্বিতীয় গ্যাসের চাপ।

$$\text{যুগ্মসুস্তুক ব্যবস্থার ওপর বাঁদিকে বল} = (p_1 + p_2) \times A$$

$$\text{যুগ্মসুস্তুক ব্যবস্থার ওপর ডানদিকে বল} = (P_1 + P_2) \times A$$

যেখানে  $A$  প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল।

$$\text{যেহেতু ঝিল্লীর সাম্যাবস্থা বজায় আছে, } p_1 = P_1 \text{ এবং } p_2 = P_2$$

সুতরাং যুগ্ম ব্যবস্থায় কোন দিকেই কোন অপ্রশমিত বল নেই। ফলতঃ বাইরের কৃতকার্য শূন্য হবে, যেহেতু উষ্ণতা স্থির আছে, আদর্শ গ্যাসের আন্তরশক্তিও একই থাকবে। সুতরাং হস্তান্তরিত তাপশক্তি  $Q$  শূন্য হবে। এক্ষেত্রে  $Q = T(S_f - S_i)$ , যেখানে  $S_f$  ও  $S_i$  যথাক্রমে অন্তিম ও প্রারম্ভিক অবস্থায় এনট্রপি। যেহেতু  $Q = 0$ ,  $S_f = S_i$ । এখন  $S_i$  প্রারম্ভিক অবস্থার এনট্রপি, যখন দুটি গ্যাস একত্রে  $T$  উষ্ণতায়  $V$  আয়তন অধিকার করেছিল ও  $S_f$  অন্তিম অবস্থার এনট্রপি যখন প্রত্যেকটি গ্যাস আলাদাভাবে একই উষ্ণতা  $T$  তে  $V$  আয়তন অধিকার করেছে ও এই আয়তনে থেকে আংশিক চাপ প্রয়োগ করছে। যদি অন্তিম অবস্থায় প্রতিটি গ্যাসের এনট্রপিকে তার উষ্ণতা, আয়তন ও আংশিক চাপ দ্বারা নির্দিষ্ট সাম্যাবস্থার আংশিক এনট্রপি বলি তবে আমরা এই সিদ্ধান্তে পৌঁছাই যে উষ্ণতা স্থির রাখলে দুটি গ্যাসের মিশ্রণের মোট এনট্রপি তাদের আংশিক এনট্রপির যোগফলের সমান হবে, যেহেতু উপযুক্ত সংখ্যায় নির্দিষ্ট উপাদান দিয়ে তৈরী অর্ধপ্রবেশ্য ঝিল্লীর সাহায্যে আমরা যে কোন সংখ্যক গ্যাসকেই আলাদা করতে পারি, সুতরাং আমাদের ওপরের সিদ্ধান্ত যে কোন সংখ্যক আদর্শ গ্যাসের মিশ্রণের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য হবে, এই উপরোক্ত সিদ্ধান্তকেই গিব্‌সের উপপাদ্য বলে।

ধরা যাক,  $n_1$  মোল A গ্যাস,  $n_2$  মোল B গ্যাস ইত্যাদি পৃথকভাবে T উষ্ণতায় প্রত্যেকে P চাপে V আয়তন অধিকার করে। তাদের দৃঢ় কোন দেয়াল দিয়ে পরস্পরের থেকে আলাদা করে রাখা হয়েছে। এই অবস্থায় মোট এনট্রপি (সমীকরণ 4.14 অনুসারে)

$$S_i = \sum_r n_r (C_{pr} \ln T - R \ln P + S_{io})$$

এবার দেয়ালগুলো সরিয়ে নিলে গ্যাসগুলি পরস্পরের সাথে মিশ্রিত হবে। মিশ্রিত অবস্থায় মোট এনট্রপি গিব্‌সের উপপাদ্য অনুযায়ী তাদের আংশিক এনট্রপির যোগফলের সমান হবে। এই অবস্থায় মিশ্রণের চাপ ও উষ্ণতা মিশ্রণের আগে বিচ্ছিন্ন অবস্থায় তাদের চাপ ও উষ্ণতার সমান হবে।

$$S_f = \sum_r n_r (C_{pr} \ln T - R \ln P_r + S_{io})$$

দুটি ক্ষেত্রেই ধরা হয়েছে যে একটি নির্দিষ্ট প্রাথমিক অবস্থা (যার প্রতি মোলের এনট্রপি  $S_{io}$ ) থেকে উক্ত অবস্থায় আনা হয়েছে কোন কাল্পনিক উৎক্রমণীয় পথে।

$$\therefore S_f - S_i = R \sum_r n_r \ln \frac{P}{P_r} = R \sum_r n_r \ln \frac{n}{n_r} \quad (\text{যেখানে } n = \sum_r n_r)$$

যদি দুটি 1 মোল পরিমাণ গ্যাসকে সমান চাপ ও উষ্ণতায় মিশ্রিত করা যায় তবে এনট্রপির বৃদ্ধি  $= 2R \ln 2$ । এই সূত্রটি ভিন্ন বা অভিন্ন যে কোন প্রকার গ্যাসের মিশ্রণের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য হবে।

কিন্তু গ্যাসগুলি অভিন্ন হলে মিশ্রণের ফলে তাপগতীয় অবস্থার কোন পরিবর্তন হয়না। সুতরাং এনট্রপি একটি তাপগতীয় অপেক্ষক হওয়ার জন্য তা অপরিবর্তিত থাকা উচিত অভিন্ন গ্যাসের মিশ্রণের পর। যুক্তিটাকে একটু অন্যভাবেও উপস্থাপিত করা যায়। দুটি অভিন্ন গ্যাসকে ধরা যাক একটা দৃঢ় দেয়াল দিয়ে পৃথক করা হয়েছে। দেয়ালটি সরিয়ে নিলেই গ্যাসদুটি মিশ্রিত হবে। আবার মিশ্রণের পরে দেয়ালটি আগের জায়গায় বসিয়ে দিলে আমরা প্রারম্ভিক তাপগতীয় অবস্থায় পৌঁছে যাব যখন গ্যাস দুটি বিচ্ছিন্ন ছিল পরস্পর থেকে। এতে অন্য কোথাও কিছু পরিবর্তন হয়না। কাজেই অভিন্ন গ্যাসের মিশ্রণ পদ্ধতিটি একটি উৎক্রমণীয় পরিবর্তন। সুতরাং মোট এনট্রপির কোন পরিবর্তন হওয়া উচিত নয়। কিন্তু গিব্‌সের উপপাদ্য অনুযায়ী আমরা আগে পেয়েছি যে মিশ্রণের ফলে এনট্রপি বেড়ে যাচ্ছে। এই সমস্যাকে গিব্‌স কুট বলা হয়।

সনাতন তাপগতিবিদ্যার সীমার মধ্যে এই সমস্যার সমাধান সম্ভব নয়। অবশ্য এটা বোঝা যাচ্ছে যে গ্যাস দুটি অভিন্ন হলে অর্ধপ্রবেশ্য ঝিল্লী দিয়ে তাদের পৃথক করা অসম্ভব কারণ গ্যাসদুটিকে আলাদাভাবে চেনার কোন উপায় নেই। কাজেই গিব্‌সের উপপাদ্য যা অর্ধপ্রবেশ্য ঝিল্লীর কার্যনীতির ওপর নির্ভরশীল আর প্রয়োগ করা যাবে না। কিন্তু গিব্‌সের কুটের তাত্ত্বিক সমাধান গাণিতিক ভাবে করা সম্ভব পরিসংখ্যান তাপগতিবিদ্যায় যার আলোচনায় আমরা যাবনা।

6) বস্তু কর্তৃক তাপ গ্রহণের ক্ষেত্রে সম্পূর্ণ তন্ত্রে এনট্রপির পরিবর্তন :

মনে করি,  $T_1$  উষ্ণতার কোন বস্তু A,  $T_2$  উষ্ণতার তাপীয় উৎস R থেকে তাপ সংগ্রহ করে এবং ওর অন্তিম উষ্ণতা  $T_2$  হয়। এখানে তাপীয় উৎসের তাপগ্রাহীতা অসীম ধরা হয় বলে উৎস তাপগ্রহণ বা বর্জন করলেও ওর উষ্ণতার কোন পরিবর্তন ঘটে না।

বস্তুর ভর  $m$  ও আপেক্ষিক তাপ  $s$  হলে এই পরিবর্তনে বস্তুর এনট্রপির পরিবর্তন

$\Delta S(A) = \int_{T_1}^{T_2} ms \frac{dT}{T} = ms \ln T_2/T_1$  এবং A কর্তৃক গৃহীত তাপ  $= ms(T_2 - T_1) =$  উৎস কর্তৃক বর্জিত তাপ।

$$\text{সূত্রাং উৎসের এনট্রপি পরিবর্তন} = -\frac{ms(T_2 - T_1)}{T_2}$$

বস্তু ও উৎস নিয়ে এখানে বিশ্ব হওয়ায়  $T$  বিশ্বের মোট এনট্রপি পরিবর্তন  $\Delta S = \Delta S(A) + \Delta S(R)$

$$= ms \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{ms(T_2 - T_1)}{T_2}$$

$$= ms \left[ \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{(T_2 - T_1)}{T_2} \right]$$

X ধনাত্মক সংখ্যার জন্য  $e^{x-1} > x$

বা  $x - 1 > \ln x$

$$\text{বা } \ln \frac{1}{x} > 1 - x$$

$$\text{সুতরাং } x = \frac{T_1}{T_2} \text{ ধরলে } \ln \frac{T_2}{T_1} > 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

অর্থাৎ  $\Delta S$  একটি ধনাত্মক রাশি এনট্রপি বৃদ্ধি নির্দেশ করে। লক্ষ্য করুন এই প্রক্রিয়াটি অনুক্রমণীয়।

7) পৃথক উষ্ণতার দুটি বস্তুর মধ্যে তাপ পরিবহন :

ধরা যাক, A বিচ্ছিন্ন বস্তু  $T_1$  উষ্ণতায় আছে এবং অপর একটি বিচ্ছিন্ন বস্তু B  $T_2$  উষ্ণতায় আছে। ওদেরকে পরিবাহী বস্তু দ্বারা যুক্ত করলে A থেকে B এর দিকে তাপ পরিবাহিত হবে যদি  $T_1 > T_2$ । এক্ষেত্রে A, Q তাপ  $T_1$  উষ্ণতায় বর্জন করে এবং B, Q তাপ  $T_2$  উষ্ণতায় গ্রহণ করে।

$$\therefore \Delta S(A) = -\frac{Q}{T_1}$$

$$\Delta S(B) = \frac{Q}{T_2}$$

সুতরাং সম্পূর্ণ তন্ত্রে এনট্রপির পরিবর্তন  $\Delta S = \frac{Q}{T_2} - \frac{Q}{T_1}$ ,  $T_1 > T_2$  বলে  $\Delta S > 0$ । এই অনুক্রমণীয় পরিবহন পদ্ধতিতেও এনট্রপি বৃদ্ধি পায়।

8) অবস্থার রূপান্তরে এনট্রপি পরিবর্তন :

কোন m ভরের বস্তু T উষ্ণতায় এক অবস্থা থেকে অন্য অবস্থায় রূপান্তরিত হলে তা  $m_2$  পরিমাণ তাপ গ্রহণ বা বর্জন করে কিন্তু উষ্ণতার পরিবর্তন ঘটে না। L পদার্থের অবস্থার পরিবর্তনে লীনতাপ।

সুতরাং ঐ বস্তুর এই পরিবর্তনকালে এনট্রপি পরিবর্তন

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{mL}{T}$$

প্রথম অবস্থা থেকে দ্বিতীয় অবস্থায় পরিবর্তনে  $\Delta S$  ধনাত্মক হলে দ্বিতীয় অবস্থা থেকে প্রথম অবস্থায় আসার সময়  $\Delta S$  ঋণাত্মক হয়।

9) ভ্যান-ডার ওয়াল্‌স গ্যাসের এনট্রপি :

তাপগতিবিদ্যার প্রথম ও দ্বিতীয় সূত্রের সমন্বয় আপাত সাম্য প্রক্রিয়ায় সামান্য পরিবর্তনে  
 $dQ = Tds = C_v dT + dW$

1 gm অণু ভ্যান-ডার ওয়াল্‌স গ্যাসের ক্ষেত্রে এটি  $Tds = C_v dT + \left(P + \frac{a}{v}\right) dv$

$$ds = C_v \frac{dT}{T} + \frac{\left(P + \frac{a}{v}\right)}{T} dv$$

$$= \frac{C_v dT}{T} + R \frac{dv}{v-b} \quad \left[ \because \left(p + \frac{a}{v^2}\right) (v-b) = RT \right]$$

অতএব i ও f এই দুই সাম্যাবস্থায় এনট্রপির প্রভেদ

$$S_f - S_i = C_v \ln \frac{T_f}{T_i} + R \ln \frac{V_f - b}{V_i - b}$$

#### 4.7 এনট্রপি ও শক্তির কার্যকারিতা

এনট্রপি বৃদ্ধির নীতি থেকে আমরা পাই যে অনুক্রমণীয় পরিবর্তনে বিশ্বের মোট এনট্রপি বৃদ্ধি পায়। কোন অনুক্রমণীয় তাপগতীয় পদ্ধতিতে যেহেতু শক্তির অপচয় হয় সুতরাং অনুক্রমণীয় প্রক্রিয়ায় স্বাভাবিকভাবেই কার্যকরী শক্তির পরিমাণ কমে যাবে। স্বাভাবিকভাবেই এনট্রপির মোট পরিবর্তনের সাথে কার্যকরী শক্তির সম্পর্ক থাকবে। নীচে আমরা একটা উদাহরণের সাহায্যে এই সম্পর্ক প্রতিষ্ঠিত করার চেষ্টা করব।

ধরা যাক, একটি উৎক্রমণীয় কার্নো ইঞ্জিন  $T_1$  উষ্ণতা ও অপেক্ষাকৃত কম উষ্ণতা  $T_0$  র মধ্যে কার্য করছে।  $T_1$  উষ্ণতার তাপউৎস থেকে  $Q$  তাপ সংগ্রহ করে ইঞ্জিনটি যে কার্য করবে তার পরিমাণ  $Q \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right)$ । ধরা যাক  $T_1$  ও  $T_2$  ( $T_2 < T_1$ ) উষ্ণতার তাপ উৎসের মধ্যে  $Q$  পরিমাণ তাপ পরিবাহিত হল।  $T_2$  উষ্ণতায়  $Q$  তাপ সঞ্চালিত হবার পর ধরা যাক,  $T_2$  ও  $T_0$  উষ্ণতার মধ্যে একই

উৎক্রমণীয় ইঞ্জিন চালান হল যা  $T_2$  উষ্ণতার তাপ উৎস থেকে  $Q$  পরিমাণ তাপ গ্রহণ করবে ও

$Q\left(1 - \frac{T_0}{T_2}\right)$  পরিমাণ কার্যকরী শক্তি দেবে। সুতরাং তাপ সঞ্চালনের পরে যে পরিমাণ শক্তির অপচয়

হচ্ছে তা হল  $Q\left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right) - Q\left(1 - \frac{T_0}{T_2}\right)$  বা  $T_0 Q\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$ । এখন  $Q\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$  হল

পরিবহনের ফলে বিশ্বের এনট্রপির পরিবর্তন। সুতরাং পরিবহন হবার পর যে পরিমাণ শক্তিকে কার্যে রূপান্তরিত করা যাচ্ছে না তা হল  $T_0(\Delta S)$  বিশ্ব। পরিবহনের ক্ষেত্রে যে সিদ্ধান্তে আমরা পৌঁছেছি তা সাধারণভাবেও প্রযোজ্য। সুতরাং যে কোন অনুৎক্রমণীয় পরিবর্তনের জন্য আমরা লিখতে পারি, অপচিত শক্তির পরিমাণ =  $T_0 \times$  বিশ্বের মোট এনট্রপির পরিবর্তন। যেখানে মনে করি  $T_0$  সর্বাপেক্ষা ঠান্ডা তাপউৎসের উষ্ণতা। যেহেতু বিশ্বের যে কোন পরিবর্তনই অনুৎক্রমণীয় সুতরাং ঘটমান সমস্ত প্রক্রিয়াতেই শক্তির অপচয় হচ্ছে। এখানে মনে রাখতে হবে শক্তি সংরক্ষণ সূত্র সর্বদাই খাটছে। কেবলমাত্র শক্তির এক অংশ এমন এক প্রকারে রূপান্তরিত হচ্ছে যা আর কার্যকরী থাকছে না আর এই পরিবর্তন হয়েছে অনুৎক্রমণীয় পরিবর্তন চলার সময়।

#### 4.8 এনট্রপি ও তাপগতীয় সম্ভাবনা

ওপরের আলোচনা থেকে আমরা পাই যে কোন তন্ত্র তাপ গ্রহণ করলে তার এনট্রপি বাড়ে। তাপ গ্রহণ করলে তন্ত্রের আন্তরশক্তি বাড়ে, এর ফলে অণুগুলির অবিন্যস্ত গতিও বেড়ে যায়, শক্তিবৃদ্ধির সাথে অণুগুলির বিভিন্ন উচ্চতর শক্তিস্তরে উত্তেজিত হবার সম্ভাবনাও বৃদ্ধি পায়। যেখানে কম উষ্ণতায় অল্পসংখ্যক শক্তিস্তরের মধ্যে তন্ত্রটি থাকার সম্ভাবনা সীমাবদ্ধ থাকে সেখানে বেশী শক্তিতে তন্ত্রটি অনেক বেশী শক্তিস্তরের মধ্যে বিচরণ করতে পারে। সাধারণভাবে বলা যায়, যে তন্ত্রটি সুশৃঙ্খল অবস্থা থেকে বিশৃঙ্খল অবস্থার দিকে যাবে। এইজন্য বলা হয় যে তন্ত্রের এনট্রপি তার বিশৃঙ্খলার পরিমাপ। যেহেতু এনট্রপি বৃদ্ধি পাওয়া মানে তন্ত্রটির আরও বেশী শক্তিস্তরে থাকার সম্ভাবনার সৃষ্টি হওয়া। সুতরাং এনট্রপি বাড়লে তন্ত্র যে সমস্ত আণুবীক্ষণিক অবস্থায় থাকতে পারে তার সংখ্যাও বেড়ে যাবে। পদার্থবিজ্ঞানের ভাষায় এর তাপগতীয় সম্ভাবনা বেড়ে যাবে।

এখন এই তাপগতীয় সম্ভাবনার বিষয়টা একটু আলোচনা করা যাক। ধরা যাক, একটি মুদ্রা  $A$  কে

টস্ করা হল। মাটিতে পড়ার পর এই মুদ্রা দুটি অবস্থায় থাকতে পারে। (1) A এর মাথা ওপরে। (2) A এর মাথা নীচে। কাজেই এর তাপগতীয় সম্ভাবনা দুই। অনুরূপভাবে B মুদ্রাকে টস্ করলেও এটি দুটি অবস্থায় থাকতে পারে, কাজেই এর তাপগতীয় সম্ভাবনাও দুই। কিন্তু A ও B এই দুটি মুদ্রাকে একই সময়ে টস্ করলে এই যৌথ ব্যবস্থার তাপগতীয় সম্ভাবনা চার।

(1) A এর মাথা ওপরে, B এর মাথা ওপরে (2) A ও B এর মাথা নীচে, (3) A এর মাথা ওপরে, B এর মাথা নীচে, (4) A র মাথা নীচে, B র মাথা ওপরে। কাজেই A ও B যৌথ ব্যবস্থার তাপগতীয় সম্ভাবনা A ও B এর পৃথকভাবে ধরলে প্রত্যেকটির তাপগতীয় সম্ভাবনার গুণফল। এই সম্পর্কটা যে কোন দুটি স্বাধীন তন্ত্রের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য, গাণিতিক সমীকরণে প্রকাশ করলে  $W_{AB} = W_A \times W_B$ , যেখানে W কোন অবস্থার তাপগতীয় সম্ভাবনা।

যেহেতু এনট্রপি একটি ব্যাপক চল দুটি বিচ্ছিন্ন তন্ত্র A ও B এর এনট্রপি যদি যথাক্রমে  $S_A$  ও  $S_B$  হয় তবে যৌথ ব্যবস্থা AB এর জন্য এনট্রপি হবে  $S_A + S_B$ । আবার যেহেতু তাপগতীয় সম্ভাবনার ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি  $W_{AB} = W_A \times W_B$ । সুতরাং এনট্রপি ও তাপগতীয় সম্ভাবনা W এর মধ্যে সম্পর্ককে আমরা প্রকাশ করতে পারি  $S = k \ln W$  ভাবে। যেখানে k একটি ধ্রুবক। (দেখান যায় যে k বোল্টস্ম্যান ধ্রুবকের সমান) পরম শূন্য উষ্ণতায় তন্ত্রটি একটি অবস্থায় অর্থাৎ নিম্নতম শক্তিস্তরে থাকতে পারে, সুতরাং W সেখানে হয় 1 ফলতঃ পরম শূন্য উষ্ণতায় আমরা লিখতে পারি  $S \rightarrow 0$ । এটা তাপগতিবিদ্যার তৃতীয় সূত্রের অন্যতম বিচার্য বিষয়, যদিও এখন আমরা এই আলোচনার ভিতরে যাবনা। ( $S = k \ln W$  সম্পর্কের প্রমাণ নীচে দেওয়া হল)।

আমরা এর আগে দেখেছি যে এনট্রপি একটি তাপগতীয় অপেক্ষক, একটি তাপগতীয় সাম্যাবস্থায় যার একটি নির্দিষ্ট মান আছে। কিন্তু  $S = k \ln W$  এই সম্পর্কটা সাধারণভাবে যে কোন অবস্থায়, যেখানে তাপগতীয় সাম্য বজায় থাকছে না, সেখানেও প্রযোজ্য হবে।

$S = k \ln W$  সম্পর্কের প্রমাণ :—

ধরা যাক, কোন তন্ত্রকে দুটি অংশ A ও B তে ভাগ করা হল। এনট্রপি একটি ব্যাপক চল বলে মোট এনট্রপি  $S = S_A + S_B$ । আবার দুটি অংশ পরস্পর নিরপেক্ষ বলে মোট তাপগতীয় সম্ভাবনা  $W = W_A W_B$ ।

∴ ওপরে বিবৃত যুক্তি অনুযায়ী  $f(W_A W_B) = f(W_A) + f(W_B)$ । এটি যেহেতু  $W_A$  ও  $W_B$  এর যে কোন মানের জন্য প্রযোজ্য ধরা যাক,  $W_A = x$  এবং  $W_B = 1 + \epsilon$ , যেখানে  $\epsilon$  একটি অণুরাশি। ওপরের সমীকরণে বসিয়ে পাই,  $\therefore f(x + x\epsilon) = f(x(1 + \epsilon)) = f(x) + f(1 + \epsilon)$ ।

$\epsilon$  খুব ছোট বলে আমরা লিখতে পারি,  $f(x) + x\epsilon \frac{df}{dx} = f(x) + f(1) + \epsilon f'(1)$   $\epsilon = 0$  বসিয়ে

পাই  $f(1) = 0$ । সুতরাং  $x \frac{df}{dx} = f'(1) = k$ , যেখানে  $k$  যে কোন ধ্রুবক। ওপরের সমীকরণ থেকে পাই

$$\frac{df}{dx} = \frac{k}{x} \text{ বা } f = k \ln x + C$$

সুতরাং এনট্রপির ক্ষেত্রে লিখতে পারি  $S = k \ln W + C$ , যেখানে  $C$  সমাকল ধ্রুবক যেহেতু

$$S(W_A W_B) = S(W_A) + S(W_B), C = 0 \text{। সুতরাং } S = k \ln W \text{।} \quad 4.15$$

## 4.9 ক্যারাথিওডোরির উপপাদ্যের প্রয়োগ

আগের আলোচনা থেকে দেখেছেন যে, কেলভিন-প্লাঙ্ক, ক্লসিয়াস ইত্যাদি পদার্থবিদদের হাতে তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র যে চূড়ান্ত রূপ পেয়েছিল তা মূলতঃ তাপ ইঞ্জিন ও হিমায়কের কার্যনীতির ওপর প্রতিষ্ঠিত। পরে এই ধ্যানধারণার ফলশ্রুতি হিসাবে আমরা পাই এনট্রপি নামে এক গুরুত্বপূর্ণ তাপগতীয় চলার অস্তিত্ব। এর ফলে দ্বিতীয় সূত্রকে গাণিতিকভাবে আমরা প্রকাশ করতে পারি  $ds = \frac{dQR}{T}$  রূপে, যেখানে চিহ্নগুলি স্বাভাবিক অর্থবহ। গণিতবিদ ক্যারাথিওডোরির একটি গাণিতিক উপপাদ্যের অনুসরণে তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রকে এমনভাবে উপস্থাপিত করেন যাতে তাপগতীয় অপেক্ষক এনট্রপির অস্তিত্ব খুব সহজেই প্রমাণিত হয়। নীচে দ্বিতীয় সূত্রের এই বিকল্প ব্যাখ্যার সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দেওয়া হল।

দুটি চলার একটি অবকল হয় সম্পূর্ণ অবকল অথবা কোন সমাকল-গুণিতক দিয়ে গুণ করে তাকে সম্পূর্ণ অবকলে পরিণত করা যায়। দুই এর বেশী চলার অবকল কখন সম্পূর্ণ অবকল হবে সেই বিষয়ে ক্যারাথিওডোরি আলোকপাত করেন। তিনি প্রমাণ করেন, যে কোন একটি বিন্দু  $P_0$  র কাছে অনেক বিন্দু থাকবে যারা  $P_0$  থেকে  $A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz = 0$  সমীকরণের সমাধান রেখা দ্বারা পৌঁছান যাবে না যদি  $A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz = \lambda(x, y, z)$



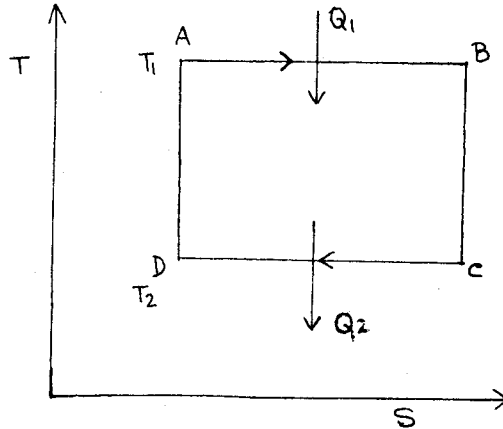
$dF(x,y,z)$  হয়, অর্থাৎ যদি একটি সমাকল গুণিতক  $\lambda(x, y, z)$  থাকে যাতে  $dF(x, y, z)$  একটি সম্পূর্ণ অবকল হয়। এই উপপাদ্যের (প্রমাণ এখানে দেওয়া হল না) অনুসরণে দ্বিতীয় সূত্রের একটি বিকল্প বিবৃতি নিম্নরূপ :

একটি যে কোন প্রাথমিক তাপগতীয় অবস্থা  $P_0$  র কাছে আরও অনেক অবস্থা থাকে যারা  $P_0$  থেকে আপাতসাম্যীয় রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়া দিয়ে পৌঁছান যাবে না যদি  $dQ = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz = T(x, y, z)ds(x, y, z)$  হয়। এখানে  $(x, y, z)$  তাপগতীয় অবস্থার চলরাশি বোঝাবে (যেমন চাপ, আয়তন ইত্যাদি) অর্থাৎ  $\frac{1}{T}$  সমাকল গুণিতক যা দিয়ে  $dQ$  কে গুণ করলে তা একটি সম্পূর্ণ অবকল  $ds$  -এ পরিণত হয়। এইভাবে এনট্রপি অপেক্ষক  $S$  এর অস্তিত্ব গাণিতিকভাবে প্রতিষ্ঠিত হয়।

#### 4.10 উদাহরণ

1. উষ্ণতা এনট্রপি লেখচিত্রে থেকে কার্নোচক্রের কার্যদক্ষতা নির্ণয় করুন।

উ :— উষ্ণতা-এনট্রপি লেখচিত্রে কার্নো চক্রটি একটি আয়তক্ষেত্র হয়। (চিত্র 4.15 দ্রষ্টব্য)।



চিত্র 4.15

সমোষ্ণ AB পথে শোষিত তাপ =  $T_1(S_B - S_A) = Q_1$

সমোষ্ণ CD পথে বর্জিত তাপ =  $T_2(S_C - S_D) = Q_2$

$\therefore$  কার্নো চক্রের কার্যকরী দক্ষতা =  $1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

$$(যেহেতু, S_B - S_A = S_C - S_D)$$

P-V লেখচিত্রে কানোচক্রের সূচক চিত্রের মধ্যে অন্তর্ভুক্ত ক্ষেত্রফল একটি উৎক্রমণীয় পূর্ণ আবর্তনে কৃতকার্য বোঝায়। অনুরূপভাবে, T-S লেখচিত্রে কানোচক্রের সূচক চিত্রের মধ্যে অন্তর্ভুক্ত ক্ষেত্রফল উৎক্রমণীয় পূর্ণ আবর্তনে শোষিত তাপের পরিমাণ বোঝাবে।

2. 273°k উষ্ণতায় 1 কিলোগ্রাম জলকে 373°k উষ্ণতার একটি তাপউৎসের সাথে যুক্ত করা হল। যখন জলের উষ্ণতা 373°k হয় তখন জল, তাপউৎস ও বিশ্বের মোট এনট্রপি পরিবর্তন হিসাব করুন।

$$\text{উ:— জলের এনট্রপির পরিবর্তন} = \int_{273}^{373} ms \frac{dT}{T} \text{ (কাল্পনিক উৎক্রমণীয় পথে হিসাব করে)}$$

$$= 1000 \times \ln \frac{373}{273} \text{ ক্যালোরি / } ^\circ\text{k} = \Delta S \text{ (ধরি)}$$

$$\text{মোট বর্জিত তাপ} = 1000 (373 - 273) = 10^4 \text{ ক্যালোরি,}$$

তাপউৎসটি উৎক্রমণীয়ভাবে উষ্ণতা স্থির রেখে তাপ বর্জন করে ধরতে পারি।

$$\text{সুতরাং তাপউৎসের এনট্রপির পরিবর্তন} = -\frac{10^4}{373} \text{ ক্যালোরি / } ^\circ\text{k} = \Delta S_2 \text{ (ধরি)}$$

$$\text{বিশ্বের মোট এনট্রপির পরিবর্তন} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 117.09 \text{ ক্যালরি / } ^\circ\text{k}।$$

3. একটি ইঞ্জিন  $T_1$  উষ্ণতার একটি বস্তুর ও  $T_2$  উষ্ণতার তাপগ্রাহকের ( $T_1 > T_2$ ) মধ্যে কাজ করে। এর ফলে বস্তুর উষ্ণতা  $T_1$  থেকে  $T_2$  তে নামে। প্রমাণ কর যে ইঞ্জিন কর্তৃক সর্বাপেক্ষা বেশী যে কাজ পাওয়া যায়, তার পরিমাণ  $W = Q - T_2(S_1 - S_2)$ , যেখানে Q বস্তু থেকে শোষিত তাপ,  $S_1$  ও  $S_2$  যথাক্রমে বস্তুর প্রারম্ভিক ও অন্তিম উষ্ণতা।

উ:— ইঞ্জিনটি  $T_2$  উষ্ণতার তাপগ্রাহকে ( $Q - W$ ) পরিমাণ তাপ বর্জন করে। যেহেতু তাপগ্রাহকের

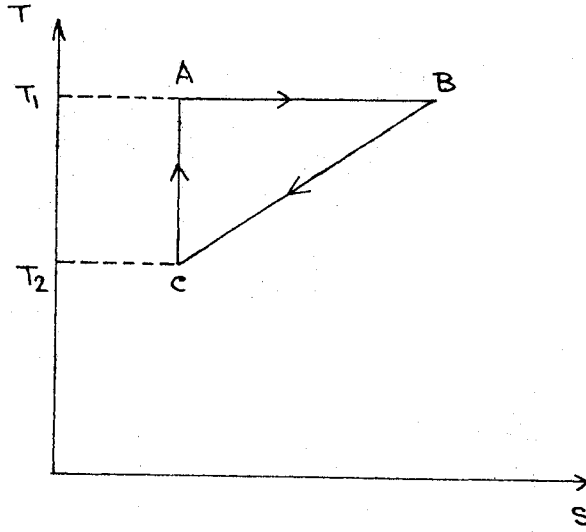
উষ্ণতা স্থির থাকে, তাপগ্রাহকের এনট্রপির পরিবর্তন  $= \frac{Q-W}{T_2} = (\Delta S)$  তাপগ্রাহক।

এনট্রপির বৃদ্ধির নীতি অনুযায়ী বিশ্বের মোট এনট্রপির পরিবর্তন  $= S_2 - S_1 + \frac{Q-W}{T_2} > 0$ ।

সুতরাং সর্বাপেক্ষা বেশী প্রাপ্ত কার্য  $W = Q - T_2(S_1 - S_2)$ , যা ইঞ্জিনটি উৎক্রমণীয়ভাবে কাজ করলে আমরা পাব।

#### 4.10.1 অনুশীলনী — 2

1) উষ্ণতা-এনট্রপি লেখচিত্রে (চিত্র 4.16 দ্রষ্টব্য) প্রদর্শিত পূর্ণ-আবর্তন প্রক্রিয়াটির কার্যদক্ষতা হিসাব করুন।



চিত্র 4.16

2)  $m$  গ্রাম জলকে ( $T_1$  উষ্ণতায়) স্থির চাপে ও রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ার একই ভরের  $T_2$  উষ্ণতার জলের সাথে মিশ্রিত করা হল। প্রমাণ কর যে বিশ্বের মোট এনট্রপির পরিবর্তন  $2mc_p \ln \frac{(T_1 + T_2)/2}{\sqrt{T_1 T_2}}$ ।

$T_1$  ও  $T_2$  প্রায় সমান হলে কি হবে আলোচনা করুন।

3) দুটি একই রকমের বস্তুকে যথাক্রমে  $T_1^{\circ}$  ও  $T_2^{\circ}$  উষ্ণতার তাপউৎস ও তাপগ্রাহক হিসাবে ব্যবহার করা হয়েছে ( $T_2 < T_1$ )। যদি বস্তু দুটি স্থির চাপে থাকে ও তাদের অবস্থার কোন পরিবর্তন না হয়, তবে প্রমাণ কর যে প্রাপ্ত কার্যের পরিমাণ  $W = C_p(T_1 + T_2 - 2T_f)$ , যেখানে  $T_f$  অন্তিম উষ্ণতা ও  $C_p$  স্থির চাপে আপেক্ষিক তাপ, সর্বাপেক্ষা বেশী প্রাপ্ত কার্যের পরিমাণ কত হবে হিসাব করুন।

## 4.11 সারাংশ

(1) প্রাকৃতিক পরিবর্তনের দিক নির্ধারণ প্রসঙ্গে তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র বিশেষ তাৎপর্যপূর্ণ। এই সূত্র সম্পর্কে কেলভিন-প্লাঙ্ক ও ক্লসিয়াসের বিবৃতি দুটি নিম্নরূপ।

(2) কেলভিন-প্লাঙ্কের বিবৃতি এমন কোন যান্ত্রিক ব্যবস্থা উদ্ভাবন করা সম্ভব নয় যা একটি তাপ উৎস থেকে তাপ গ্রহণ করে অন্য কোথাও কিছু পরিবর্তন না করে তাকে সম্পূর্ণভাবে কার্যে রূপান্তরিত করবে। ক্লসিয়াসের বিবৃতি — এমন কোন ব্যবস্থা সম্ভব নয় যা অন্য কোন পরিবর্তন না করে কেবলমাত্র কম উষ্ণতা থেকে বেশী উষ্ণতায় তাপ পরিচালিত করবে।

কেলভিন-প্লাঙ্ক ও ক্লসিয়াসের বিবৃতি যথাক্রমে ইঞ্জিন ও হিমায়কের কার্যপ্রণালী সম্পর্কে আলোকপাত করে। কেলভিন-প্লাঙ্ক - এর বিবৃতি অনুযায়ী একটি পূর্ণ আবর্তনে কোন ইঞ্জিন  $T_1$ , উষ্ণতার উৎস থেকে  $Q_1$  তাপ গ্রহণ করে ও  $T_2$  উষ্ণতার তাপগ্রাহকে  $Q_2$  তাপ বর্জন করে। ইঞ্জিন দ্বারা কৃতকার্য  $= Q_1 - Q_2$  এবং কার্যকরী দক্ষতা  $= \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$

ক্লসিয়াসের বিবৃতি অনুসারে একটি পূর্ণ আবর্তনে কোন হিমায়ক  $T_2$  উষ্ণতার তাপ উৎস থেকে  $Q_2$  তাপ গ্রহণ করে ও বাইরের থেকে  $W$  কাজ যন্ত্রের ওপর করার ফলে  $Q_1 = Q_2 + W$  পরিমাণ তাপ উচ্চতর উষ্ণতার ( $T_1^{\circ}$ ) উৎসে বর্জন করে।

$$\text{হিমায়কের কৃতি গুণাঙ্ক} = \frac{Q_2}{W},$$

দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী ইঞ্জিনের কার্যকরী দক্ষতা 1 এর থেকে কম হবে এবং হিমায়কের কৃতি গুণাঙ্ক ও অসীম হতে পারেনা।

ইঞ্জিনের সর্বাপেক্ষা বেশী দক্ষতা কত হতে পারে, তা জানতে গেলে উৎক্রমণীয় ও অনুৎক্রমণীয় পদ্ধতি সম্পর্কে পরিচিত হওয়া প্রয়োজন।

(3) যদি কোন তাপগতীয় পরিবর্তনের শেষে অন্য কোন পরিবর্তন ছাড়া তন্ত্র ও পারিপার্শ্বিককে আবার আগের অবস্থায় ফিরিয়ে আনা যায় তবে সেই পরিবর্তন হচ্ছে উৎক্রমণীয়, অন্যথা তাকে বলা হয় অনুৎক্রমণীয়, উৎক্রমণীয় পরিবর্তনের যে কোন স্তরে তাপগতীয় সাম্য বজায় থাকবে এবং ফলে তাপগতীয় চলার অণুপরিবর্তনেই প্রক্রিয়াটি বিপরীতক্রমে চালান যাবে। উৎক্রমণীয় পরিবর্তনের ক্ষেত্রে শক্তি অপচয়কারী বল শূন্য হবে এবং প্রক্রিয়াটি আপাত স্থিরভাবে সম্পাদন করতে হবে, দ্বিতীয় সূত্র থেকে প্রমাণ করা যায় যে বিশ্বের সকল প্রাকৃতিক পরিবর্তনই অনুৎক্রমণীয়।

(4) কার্নোর উপপাদ্য অনুসারে দুটি নির্দিষ্ট উষ্ণতার মধ্যে কার্যরত ইঞ্জিনগুলির মধ্যে উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনে দক্ষতা সর্বাধিক ও উষ্ণতা দুটি স্থির থাকলে সকল উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের দক্ষতা সমান।

(5) কার্নো উপপাদ্যের ওপর ভিত্তি করে লর্ড কেলভিন উষ্ণতার একটি পরম স্কেল প্রবর্তন করেন যা তন্ত্রের ধর্ম নিরপেক্ষ ও যার কার্যপ্রণালী নির্ভর করে ঐ দুটি উষ্ণতার মধ্যে ক্রিয়াশীল একটি উৎক্রমণীয় কার্নো ইঞ্জিনের কার্যের ওপর। উষ্ণতার এই পরম স্কেল আদর্শ গ্যাস স্কেলের সাথে অভিন্ন ও সাধারণ গ্যাস স্কেলের পাঠকেও উপযুক্ত সংশোধন করে উষ্ণতার পরম স্কেলের পাঠে পরিণত করা যায়।

(6) তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র থেকে এনট্রপি নামে এক গুরুত্বপূর্ণ তাপগতীয় অপেক্ষকের ধারণা

পাই, কোন উৎক্রমণীয় পদ্ধতিতে যার মানের পরিবর্তন সেই প্রক্রিয়ায়  $\int_i^f \frac{dQ}{T}$  এর সমান হবে যেখানে

$i$  ও  $f$  যথাক্রমে প্রারম্ভিক ও অন্তিম সাম্যাবস্থা। দুটি অবস্থার মধ্যে এনট্রপির পরিবর্তন একটি ব্যাপক রাশি। কোন অনুৎক্রমণীয় পরিবর্তনে এনট্রপির পার্থক্য হিসাব করতে হলে এই প্রক্রিয়াকে সম্ভব হলে একটা কাল্পনিক উৎক্রমণীয় পথ দিয়ে প্রতিস্থাপিত করব। এনট্রপি যেহেতু একটি অবস্থা-অপেক্ষক, দুটি নির্দিষ্ট সাম্যাবস্থার মধ্যে তার মানের পার্থক্য কেবলমাত্র দুটি অবস্থার ওপর নির্ভরশীল, দুটি অবস্থা-সংযোজক পথের ওপর নয়। সুতরাং কাল্পনিক উৎক্রমণীয় পথে এনট্রপির পরিবর্তনই প্রদত্ত অনুৎক্রমণীয় পথে এনট্রপির পরিবর্তনের সমান হবে। আগের আলোচনায় (অনুচ্ছেদ 4.6.3 দ্রষ্টব্য) কয়েকটি তাপগতীয় প্রক্রিয়ায় এনট্রপির পরিবর্তন হিসাব করা হয়েছে।

(7) যে কোন অনুৎক্রমণীয় পরিবর্তনে বিশ্বের এনট্রপি বাড়বে ও উৎক্রমণীয় তাপগতীয় পদ্ধতিতে বিশ্বের মোট এনট্রপি স্থির থাকবে। একে এনট্রপি বৃদ্ধির নীতি বলা হয়। এনট্রপি বৃদ্ধির এই নীতি তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের অন্যতম বিকল্প বিবৃতি বলে পরিচিত। এই বিবৃতি তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের অন্য দুটি বিবৃতির সাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ। এই নীতি অনুযায়ী কোন বিচ্ছিন্ন তন্ত্রের এনট্রপি তাপগতীয় পরিবর্তনে বৃদ্ধি পাবে ও সাম্যাবস্থায় চরম মান পাবে।

(8) এনট্রপি কোন তন্ত্রের অবস্থার বিশৃঙ্খলার পরিমাপ। উদাহরণস্বরূপ, কোন বস্তু তাপগ্রহণ করলে

তার অণুগুলির বিক্ষিপ্ত গতি বৃদ্ধি পায় এবং এনট্রপিও বাড়ে। আবার তাপগ্রহণের ফলে বস্তুর আন্তরশক্তি বাড়লে বিভিন্ন শক্তিস্তরে বস্তুটি থাকার সম্ভাবনাও বাড়ে। পরিসংখ্যান তাপগতিবিদ্যার পরিভাষায় আমরা বলি যে বস্তুর তাপগতীয় সম্ভাবনাও বাড়ে। বোল্জমান এনট্রপির সংজ্ঞা দেন  $S = k \ln W$ , যেখানে  $k$  বোল্জমান ধ্রুবক,  $W$  তাপগতীয় সম্ভাব্যতা। এই সংজ্ঞা তাপগতীয় সাম্যের অনুপস্থিতিতেও আমাদের এনট্রপির ধারণা দেয়। বিচ্ছিন্ন তন্ত্রের ক্ষেত্রে সাম্যাবস্থায়  $W$  সর্বাপেক্ষা বেশী এবং এনট্রপিও চরম মান লাভ করে।

(9) অনুক্রমণীয় পরিবর্তনে শক্তির কার্যকারিতা কমে যায় এবং অকার্যকরী শক্তির পরিমাণ ঐ পরিবর্তনে বিশ্বের মোট এনট্রপির পরিবর্তনের সাথে সমানুপাতিক।

10. গণিতবিদ ক্যারাথিওডোরির উপপাদ্য অনুসারে দ্বিতীয় সূত্রের একটি বিকল্প ভাষ্য দেওয়া যায় যা থেকে তাপগতীয় অপেক্ষক এনট্রপির ধারণা গাণিতিকভাবে খুব সহজেই প্রতিষ্ঠা করা যায়।

## 4.12 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

### সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি :

1. একটি হিমায়ককে বেশী কার্যকরী দক্ষতায় চালাতে গেলে যে বস্তুগুলির উষ্ণতা কমাতে হবে তাদের প্রাথমিক উষ্ণতা কি রকম হওয়া উচিত?
2. একটি প্যারাচুস্ক পদার্থের আন্তরশক্তি আদর্শ গ্যাসের ন্যায় কেবলমাত্র উষ্ণতার ওপর নির্ভরশীল ধরি। সমোষ্ণ নিশ্চেষ্টীকরণে পরিপার্শ্ব থেকে তাপ শোষিত হয়ে সম্পূর্ণভাবে কার্যে রূপান্তরিত হয়। এই ঘটনা কি তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের বৈধতা লঙ্ঘন করে?
3. তাপগতিবিদ্যায় গৃহীত বা বর্জিত তাপ, কৃতকার্য অথবা কোন তাপগতীয় চল্লের পরিবর্তন হিসাব করতে হলে সূচক চিত্রে নির্দেশিত পথটি কি আপাতসাম্যীয় হওয়া উচিত?
4. ব্যাটারী দিয়ে কোন পরিবাহীতে তড়িতপ্রবাহ হলে পরিবাহীটি উত্তপ্ত হয়। এই পরিবর্তনটি কি উৎক্রমণীয়?

### অন্যান্য প্রশ্নাবলি :

1.  $2100^\circ\text{k}$  ও  $700^\circ\text{k}$  উষ্ণতার দুটি তাপীয় উৎসের মধ্যে আবর্তিত একটি ইঞ্জিনের যান্ত্রিক দক্ষতা 40%। ঐ দুটি উৎসের মধ্যে সর্বাধিক যান্ত্রিক দক্ষতা সম্পন্ন ইঞ্জিনের সাথে ঐ ইঞ্জিনের যান্ত্রিক দক্ষতা তুলনা করুন।

2. কোন একটি পাত্রস্থিত বরফ প্রতি ঘন্টায় 10 kgm পরিমাণে গলে জল হয়। হিমায়কের সাহায্যে

বরফকে গলন থেকে রক্ষা করতে মোটরের ন্যূনতম ক্ষমতা কি হওয়া দরকার? বায়ুমন্ডলের উষ্ণতা  $27^{\circ}\text{C}$ ।

3. এনট্রপি বৃদ্ধি নীতি থেকে প্রমাণ করুন যে  $T_1^{\circ}\text{K}$  ও  $T_2^{\circ}\text{K}$  উষ্ণতার মধ্যে কার্যরত কোন ইঞ্জিনের সর্বাধিক কার্যদক্ষতা  $1 - \frac{T_2}{T_1}$ ।

4. 2 গ্রাম নাইট্রোজেন গ্যাসকে  $50^{\circ}\text{C}$  থেকে  $100^{\circ}\text{C}$  এ উত্তপ্ত করা হল, এর ফলে গ্যাসের আয়তন চারগুণ বৃদ্ধি পায়। এনট্রপির পরিবর্তন হিসাব করুন। (নাইট্রোজেনের স্থির আয়তনে মোলার আপেক্ষিক তাপ  $\frac{5}{2}R$  ক্যালরি ধরুন)।

5. জলের প্রারম্ভিক উষ্ণতা  $20^{\circ}\text{C}$ । 10 gm. জলকে উত্তপ্ত করে  $250^{\circ}\text{C}$  উষ্ণতায় অতিতাপিত বাষ্পে পরিণত করা হল। এনট্রপির পরিবর্তন হিসাব করুন।

$$C_p (\text{জল}) = 4180 \text{ জুল / কেজি / }^{\circ}\text{C}$$

$$C_p (\text{বাষ্প}) = (1670 + 0.494 T + 1.86 \times 10^{-6} T^{-2}) \text{ জুল / কেজি / }^{\circ}\text{C}$$

$$L = 22.6 \times 10^5 \text{ জুল / কেজি}$$

6. ক্রসিয়াসের উপপাদ্যে (4.6.1 অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য)  $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} < 0$  দ্বিতীয় সূত্রের সাথে সুসমঞ্জস বলা হয়েছিল। এটি ব্যাখ্যা করুন।

---

## 4.13 উত্তরমালা

---

### অনুশীলনী — 1

1.  $20^{\circ}\text{C}$  উষ্ণতায় 9 gms জলকে বরফে পরিণত করতে এর থেকে যে পরিমাণ তাপ নিষ্কাশন করতে হবে তার পরিমাণ  $9 \times 20 + 9 \times 80$  ক্যালরি

(জলের আপেক্ষিক তাপ 1 এবং গলনের লীনতাপ = 80 ক্যালরি / গ্রাম)

∴ মোট বর্জিত তাপ = 900 ক্যালরি = 900 × 4.2 জুল = 3780 জুল।

হিমায়কে ব্যবহৃত মোটরের কার্যকরী দক্ষতা =  $1000 \times \frac{60}{100} = 600$  ওয়াট।

∴ গলনের জন্য সময় লাগবে  $\frac{3780}{600} = 6.3$  সেকেন্ড।

2. সমোষ্ণ পরিবর্তনের ক্ষেত্রে  $dQ = Pdv$  ( $dQ = C_v d\theta + Pdv$  এবং  $d\theta = 0$ )

∴ AB সমোষ্ণ পরিবর্তনে গৃহীত তাপ (চিত্র 4.17 দ্রষ্টব্য)

$$\int_A^B Pdv = \int_A^B R\theta_1 \frac{dV}{V-b} = R\theta_1 \ln\left(\frac{V_B - b}{V_A - b}\right)$$

$$= Q_1 \text{ (ধরি)}$$

অনুরূপভাবে CD সমোষ্ণ পথে বর্জিত তাপের পরিমাণ

$$\int_D^C Pdv = R\theta_2 \int_D^C \frac{dv}{V-b} = R\theta_2 \ln\left(\frac{V_c - b}{V_D - b}\right) = Q_2 \text{ (ধরি)}$$

$$\text{কার্নো ইঞ্জিনের কার্যকরী দক্ষতা} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} \left[ \frac{\ln\left(\frac{V_c - b}{V_D - b}\right)}{\ln\left(\frac{V_B - b}{V_A - b}\right)} \right] \quad 4.16$$

B এবং C দুটি একটি রুদ্ধতাপ রেখা BC এর ওপর অবস্থান করে। রুদ্ধতাপ উৎক্রমণীয় পরিবর্তনে

$$C_v d\theta + Pdv = 0$$

$$\text{অথবা } C_v d\theta + \frac{R\theta}{V-b} dv = 0$$

$$\text{সমাকল করে পাই } \int C_v \frac{d\theta}{\theta} + R \int \frac{dv}{v-b} = \text{ধ্রুবক।}$$

$$\text{অথবা, } C_v \ln\theta + R \ln(V-b) = \text{ধ্রুবক}$$

$$\therefore \theta(V-b)^{R/C_v} = \text{ধ্রুবক}$$

$$\therefore \theta_1(V_B - b)^{R/C_v} = \theta_2(V_c - b)^{R/C_v} \quad 4.17$$



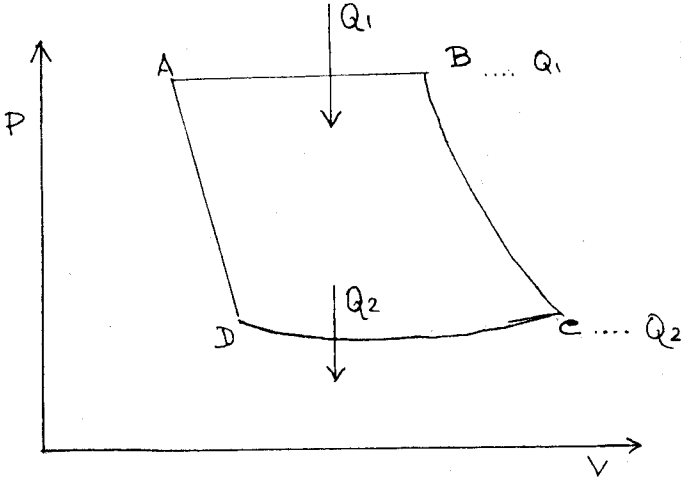
অনুরূপভাবে, AD রুদ্ধতাপ রেখার ক্ষেত্রে লিখতে পারি,

$$\theta_1(V_A - b)^{R/C_v} = \theta_2(V_D - b)^{R/C_v}$$

4.18

সমীকরণ 4.17 কে 4.18 দ্বারা ভাগ করলে পাই  $\ln\left(\frac{V_C - b}{V_D - b}\right) = \ln\left(\frac{V_B - b}{V_A - b}\right)$

সমীকরণ 4.16 এ বাসিয়ে পাই দক্ষতা  $= 1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}$



চিত্র 4.17

3. কার্নো হিমাযকের কার্যনীতি অনুসারে  $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$ , যেখানে  $Q_2$  ও  $Q_1$  যথাক্রমে  $T_2$  ও  $T_1$

উষ্ণতায় গৃহীত ও বর্জিত তাপ।

সুতরাং,  $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{273+127}{273+527} = \frac{1}{2}$

প্রতি মিনিটে কৃতকার্য (হিমাযকের ওপর)  $W = 750 \times 1 \times 60 = 45,000$  জুল।

$\therefore Q_1 - Q_2 = 45,000$

$$\text{বা } 2Q_2 - Q_2 = 45,000$$

$$\therefore Q_2 = 45,000 \text{ জুল} = \left( \frac{45,000}{4.2} \right) \text{ ক্যালরি} \simeq 10714.3 \text{ ক্যালরি}$$

$$Q_1 = 2 \times 45,000 = 90,000 \text{ জুল} = \left( \frac{90,000}{4.2} \right) \text{ ক্যালরি} \simeq 21428.6 \text{ ক্যালরি}$$

সুতরাং প্রতি মিনিটে 0 উৎস থেকে 10714.3 ক্যালরি তাপ গৃহীত হয় এবং খাদে 21428.6 ক্যালরি তাপ বর্জিত হয়।

অনুশীলনী — 2

$$1. \text{ AB পথে গৃহীত তাপ} = \int T ds = T_1(S_B - S_A)$$

BC পথের সমীকরণ  $Q_1$

$$(T - T_1) = \left( \frac{T_1 - T_2}{S_B - S_C} \right) (S - S_B)$$

$$\text{BC উৎক্রমণীয় পথে বর্জিত } Q_2 \text{ তাপ} = \int_B^C T ds$$

$$= \int_C^B \left[ T_1 - S_B \frac{(T_1 - T_2)}{(S_B - S_C)} + S \left( \frac{T_1 - T_2}{S_B - S_C} \right) \right] ds$$

$$= T_1(S_B - S_C) - S_B(T_1 - T_2) + \frac{(T_1 - T_2)}{(S_B - S_C)} \left( \frac{S_B^2 - S_C^2}{2} \right)$$

$$= T_1(S_B - S_C) - S_B(T_1 - T_2) + \frac{(S_B + S_C)}{2} (T_1 - T_2)$$

$$= \frac{S_B}{2}(T_1 + T_2) - \frac{S_C}{2}(T_1 + T_2)$$

$$\therefore S_C = S_A, \quad Q_2 = \frac{1}{2}[T_1(S_B - S_A) + T_2(S_B - S_A)] = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)(S_B - S_A)$$

$$\therefore \text{দক্ষতা} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_1 + T_2}{2T_1} = \frac{T_1 - T_2}{2T_1}$$

2. প্রথম সূত্র ব্যবহার করে পাই, গৃহীত তাপ = বর্জিত তাপ।

যদি T চূড়ান্ত উষ্ণতা হয়,  $mC_p(T_1 - T) = mC_p(T - T_2)$

$$\text{সুতরাং } T = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

মিশ্রণ প্রক্রিয়াটিকে কাল্পনিক উৎক্রমণীয় পথ দিয়েই প্রতিস্থাপিত করলে পাই, মোট বিশ্বের এনট্রপির

$$\text{পরিবর্তন } (\Delta S)_{\text{বিশ্ব}} = \int_{T_1}^T mC_p \frac{dT}{T} + \int_{T_2}^T mC_p \frac{dT}{T}$$

$$= mC_p \ln \frac{T^2}{T_1 T_2} = 2 mC_p \ln \frac{(T_1 + T_2)}{\sqrt{T_1 T_2}} \quad (T \text{ এর মান বসিয়ে পাই})$$

যদি  $T_1$  ও  $T_2$  প্রায় সমান হয়  $(\Delta s)_{\text{বিশ্ব}} \approx 0$

$T_1$  ও  $T_2$  পরস্পর প্রায় সমান হলে প্রক্রিয়াটি আনুমানিক উৎক্রমণীয় হবে, সুতরাং  $(\Delta s)_{\text{বিশ্ব}}$  শূন্য হবে।

3. বস্তু দুটির অবস্থার পরিবর্তন না হলে কৃতকার্য  $W =$  গৃহীত তাপ — বর্জিত তাপ

গৃহীত তাপ  $Q_1 = C_p(T_1 - T_f)$  এবং বর্জিত তাপ  $Q_2 = C_p(T_f - T_2)$

যেখানে 1 মোল গ্যাস নেওয়া হয়েছে এবং  $C_p$  মোলার আপেক্ষিক তাপ।

সুতরাং প্রথম সূত্র ব্যবহার করে পাই,  $W = C_p(T_1 + T_2 - 2T_f)$  সর্বাপেক্ষা বেশী কার্য পাওয়া যাবে যখন প্রক্রিয়াটি উৎক্রমণীয় হবে, এক্ষেত্রে বিশ্বের মোট এনট্রপি পরিবর্তন শূন্য হবে।

$$\therefore \int_{T_1}^{T_f} C_p \frac{dT}{T} + \int_{T_2}^{T_f} C_p \frac{dT}{T} = 0$$

$$\therefore T_f = \sqrt{T_1 T_2}$$

$$\text{সুতরাং সর্বাপেক্ষা বেশী প্রাপ্ত কার্যের } \frac{\text{পরিমাণ}}{W_{\max}} = C_p (T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2})$$

$$\therefore W_{\max} = C_p (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2$$

সর্বশেষ প্রশ্নাবলি :

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি

1. একটি হিমায়কের কৃতি-গুণাক্ষ =  $\frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ , যেখানে  $T_1$  ও  $T_2$  যথাক্রমে উষ্ণ ও

শীতল উৎসের উষ্ণতা।

সুতরাং  $T_1 - T_2$  যত কম হবে কৃতি-গুণাক্ষের মান তত বেশী হবে।

হিমায়ককে বেশী কার্যকরী দক্ষতায় চালাতে গেলে স্পষ্টতঃই যে বস্তুগুলির উষ্ণতা কমাতে হবে তাদের প্রাথমিক উষ্ণতা পারিপার্শ্বের উষ্ণতার প্রায় সমান হওয়া উচিত।

2. সমোষ্ণ নিশ্চৌম্বকীকরণে প্যারাচুম্বক পদার্থের ও পারিপার্শ্বিকের অবস্থার পরিবর্তন হবে। সুতরাং এখানে তন্ত্র ও পারিপার্শ্বের অবস্থা অপরিবর্তিত রেখে তাপশক্তিকে সম্পূর্ণভাবে কার্যে পরিণত করা যাবে না। এই কারণেই এক্ষেত্রে তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের বৈধতা লঙ্ঘন করা হচ্ছে না।

3. তাপগতিবিদ্যায় গৃহীত বা বর্জিত তাপ, কৃতকার্য অথবা কোন তাপগতীয় চলার পরিবর্তন সূচক চিত্রে নির্দেশিত পথ বরাবর সমাকল করে হিসাব করতে হবে। এর জন্য সসীম পরিবর্তনের প্রতিটি স্তরেই তাপগতীয় সাম্য বজায় থাকতে হবে, সুতরাং নির্দেশিত পথটিতে আপাতসাম্যীয়ভাবে তাপগতীয় প্রক্রিয়া সম্পন্ন করতে হবে।

4. পরিবর্তনটি উৎক্রমণীয় হতে গেলে উত্তপ্ত পরিবাহী থেকে তাপ শোষণ করে অন্য কোন পরিবর্তন ব্যতীত তাকে সম্পূর্ণভাবে কার্যে পরিণত করতে হবে। কিন্তু এই প্রক্রিয়া তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের পরিপন্থী। সুতরাং এই পরিবর্তনটি অনুৎক্রমণীয়।

অন্যান্য প্রস্তাবলি :—

1. দুটি নির্দিষ্ট উষ্ণতার মধ্যে কার্যরত ইঞ্জিনের সর্বাধিক দক্ষতা ঐ দুটি উষ্ণতার মধ্যে কার্যরত উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের দক্ষতার সমান। এক্ষেত্রে এই দক্ষতা  $= 1 - \frac{700}{2100} = \frac{2}{3} = 66.67\%$ , যেখানে প্রদত্ত ইঞ্জিনটির দক্ষতা  $= 40\%$ ।

2. মোটরের ক্ষমতা ন্যূনতম হবে যখন তা উৎক্রমণীয়ভাবে কার্য করবে। এখানে বরফকে গলন থেকে রক্ষা করতে যে তাপ নিষ্কাশিত করতে হবে, তার পরিমাণ  $= 10 \times 10^3 \times 80 = 8 \times 10^5$  ক্যালরি।

$$\text{উৎক্রমণীয় হিমায়কের সূত্রানুসারে } \frac{Q_2}{W} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{273}{300 - 273}$$

$$\text{বা } W = 8 \times 10^5 \times \frac{27}{273} \times \frac{1}{4.2} \text{ জুল।}$$

$$\begin{aligned} \text{সুতরাং মোটরের ন্যূনতম ক্ষমতা} &= \frac{8 \times 10^5 \times 270}{42 \times 273 \times 3600} \text{ ওয়াট।} \\ &\approx 5.24 \text{ ওয়াট} \end{aligned}$$

$T_1^\circ \text{K}$  ও  $T_2^\circ \text{K}$  এর দুটি তাপ উৎসের মধ্যে কোন ইঞ্জিন কার্য করলে মোট বিশ্বের এনট্রপির পরিবর্তন  $= \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1}$

$$\text{এনট্রপি বৃদ্ধি নীতি অনুসারে } \frac{Q_2}{T_2} \geq \frac{Q_1}{T_1}$$

$$\text{অথবা } \frac{Q_2}{Q_1} \geq \frac{T_2}{T_1}$$

$$\text{ইঞ্জিনের কার্যকরী দক্ষতা} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \text{ বা } \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

সুতরাং  $T_1^o$  ও  $T_2^o$  উষ্ণতার মধ্যে কার্যরত কোন ইঞ্জিনের সর্বাধিক দক্ষতা  $1 - \frac{T_2}{T_1}$ । (এখানে

স্পষ্টতঃই = চিহ্নটি উৎক্রমণীয় পরিবর্তনের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য)।

4. অণুপরিমাণ আপাতসাম্যীয় পরিবর্তনের জন্য  $dQ = C_v dT + Pdv$ , যেখানে  $C_v$  হল 2 গ্রাম নাইট্রোজেনের আপেক্ষিক তাপ।

$$\text{সুতরাং কাল্পনিক উৎক্রমণীয় পথে } ds = \frac{C_v dt + Pdv}{T}$$

$$PV = nRT, \text{ যেখানে } n = \text{মোল সংখ্যা} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$$

$$C_v = \frac{5}{2} R \times \frac{1}{14} = \frac{5}{28} R$$

$$\therefore \text{মোট এনট্রপির পরিবর্তন} = \frac{5}{28} R \times \int_{(273+50)}^{(273+100)} \frac{dT}{T} + \frac{1}{14} \times R \times \int_V^{4V} \frac{dV}{V}$$

$$= \frac{5}{28} R \times \ln \frac{373}{323} + \frac{R}{14} \ln 4$$

$$= \frac{R}{28} \left( 5 \ln \frac{373}{323} + 2 \ln 4 \right) \text{ ক্যালরি / } ^o \text{কেলভিন}$$

$$= 0.249 \text{ ক্যালরি / } ^o \text{কেলভিন।}$$

5.  $20^o\text{C}$  থেকে  $100^o\text{C}$  উষ্ণতা বৃদ্ধির জন্য জলের এনট্রপির পরিবর্তন  $\Delta S_1$

$$= \int_{293}^{373} \frac{10}{1000} \times 4180 \times \frac{dT}{T} = 41.8 \ln \frac{373}{293} \text{ জুল / } ^o \text{কে}$$

$100^o\text{C}$  উষ্ণতায় জল  $100^o\text{C}$  এ বাষ্পে পরিণত হওয়ার জন্য এনট্রপির পরিবর্তন

$$= \left( \frac{10}{1000} \times 22.6 \times 10^5 \right) / 273 = \frac{22.6 \times 10^3}{373} \text{ জুল / } ^\circ\text{কে} = \Delta S_2 \text{ (ধরি)}$$

100°C উষ্ণতা থেকে 250°C উষ্ণতায় অতিতাপিত হওয়ার জন্য বাষ্পের এনট্রপির পরিবর্তন

$$= \int_{373}^{523} \frac{10}{1000} (1670 + 0.494T + 1.86 \times 10^{-6} T^{-2}) \frac{dT}{T}$$

$$= 16.7 \ln \frac{523}{373} + 0.00494(523 - 373) + 0.93 \times 10^4 \times \left( \frac{1}{(373)^2} - \frac{1}{(523)^2} \right) \text{ জুল / } ^\circ\text{কে}$$

$$= \Delta S_3 \text{ (ধরি)}$$

সুতরাং বিশ্বের মোট এনট্রপির পরিবর্তন =  $\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3$

$$\approx 194.19 \text{ জুল / } ^\circ\text{কে}$$

6.  $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$  এর অর্থ হল, মোট সম্পাদিত কার্য  $W = T_0 \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$  অর্থাৎ মোট চক্রাকার

আবর্তনের ফল হল যে S তন্ত্রের ওপর W কার্য করা হবে এবং সম পরিমাণ তাপ  $T_0$  উষ্ণতার তাপগ্রাহকে বর্জিত হবে অন্য কোন পরিবর্তন ব্যতীত। স্পষ্টতঃ এই প্রক্রিয়া তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের বিরোধী নয়।

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

5.2 মূলতত্ত্ব

5.3 তাপগতীয় বিভব

5.4 তাপগতীয় সাম্যাবস্থা

5.5 ম্যাক্সওয়েলের তাপগতীয় সমীকরণ

(a) প্রথম TdS সমীকরণ

(b) দ্বিতীয় TdS সমীকরণ

(c) আন্তরশক্তি পরিবর্তনের সমীকরণ

(d) স্থির চাপে ও আয়তনে তাপগ্রাহিতার অন্তর

(e) স্থির চাপে ও আয়তনে তাপগ্রাহিতার অনুপাত।

(f) স্থির উষ্ণতায় আয়তনের সহিত  $C_V$  এর পরিবর্তন।

(g) স্থির উষ্ণতায় চাপের সহিত  $C_p$  এর পরিবর্তন।

5.6 উদাহরণ

5.7 অনুশীলনী — 1

5.8 তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের প্রয়োগ

(a) দশা পরিবর্তন

(b) উৎক্রমণীয় কোষের কার্যপ্রণালী

(c) তাপতড়িৎ ক্রিয়া

(d) তাপ ইঞ্জিন

(e) জুল-থমসন প্রক্রিয়া

5.9 অনুশীলনী —2

5.10 সারাংশ

5.11 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

5.12 উত্তরমালা



## 5.1 প্রস্তাবনা

আপনারা আগের এককে তাপগতীয় পরিবর্তনে তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের ভূমিকা সম্পর্কে সম্যক ধারণা পেয়েছেন। সেখানে আপনারা এনট্রপি নামে এক গুরুত্বপূর্ণ তাপগতীয় অপেক্ষকের সঙ্গে পরিচিত হয়েছেন, বিশ্বে ঘটমান সমস্ত অনুক্রমণীয় পরিবর্তনে যার মোট মান ক্রমশ বেড়ে চলেছে। প্রচলিত বৈজ্ঞানিক ভাষায় এই কারণে বলা হয় যে সময় ও এনট্রপি দুইই যুগপৎ বাড়ছে। একক 3 এ আপনারা প্রথম সূত্রের আলোকে আন্তরশক্তি নামে এক তাপগতীয় অপেক্ষকের পরিচয় পেয়েছেন। এই এককে আমরা আরও কয়েকটি তাপগতীয় অপেক্ষকের (তাপগতীয় বিভব নামেও এদের অভিহিত করা হয়) ধারণা দেব ও বিভিন্ন ধরনের তাপগতীয় পরিবর্তনে এদের প্রয়োগ আলোচনা করব। এই তাপগতীয় বিভবগুলির মাধ্যমে আমরা ম্যাক্সওয়েলের তাপগতীয় সমীকরণগুলিতে উপনীত হব ও বিভিন্ন বাস্তব তাপগতীয় পরিবর্তনে এই সমীকরণগুলির প্রয়োগ করব। উৎক্রমণীয় কোষের কার্যপ্রণালী, তাপতড়িৎ ক্রিয়া, পদার্থের দশা পরিবর্তন ও তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের মাধ্যমে সংক্ষেপে ব্যাখ্যা করব। এছাড়াও বাস্তব ক্ষেত্রে ব্যবহৃত কিছু ইঞ্জিনের কার্যপ্রণালী দ্বিতীয় সূত্রের আলোকে বিশ্লেষণ করব। দ্বিতীয় সূত্রের এই প্রয়োগগুলিই বর্তমান এককের উপজীব্য বিষয়।

উদ্দেশ্য —

এই এককটি পাঠ করে

- আপনি বিভিন্ন তাপগতীয় বিভবের সঙ্গে পরিচিত হবেন ও বিভিন্ন প্রাকৃতিক পরিবর্তনে এদের প্রয়োগ করতে পারবেন।
- তাপগতীয় সাম্যাবস্থা সম্পর্কে ধারণা পাবেন। ম্যাক্সওয়েলের তাপগতিতত্ত্বের সমীকরণগুলির সঙ্গে পরিচিত হবেন ও বাস্তবে ঘটমান বিভিন্ন প্রক্রিয়ায় এদের প্রয়োগ করতে শিখবেন।
- নানা প্রকার তাপগতীয় প্রক্রিয়ায় (উদাহরণস্বরূপ কিছু প্রচলিত ইঞ্জিন, উৎক্রমণীয় কোষ, তাপতড়িৎ ক্রিয়া, পদার্থের দশা পরিবর্তন) দ্বিতীয় সূত্রের প্রয়োগ করতে পারবেন।

## 5.2 মূলতত্ত্ব

সনাতনী বলবিদ্যায় আপনারা দেখেছেন যে, প্রকৃতিতে ঘটমান যে কোনো পরিবর্তনের প্রবণতা উঁচু বিভব থেকে নীচু বিভবের দিকে হওয়ার। অভিকর্ষের প্রভাবে কোনো বস্তুর উঁচু জায়গা থেকে নীচু জায়গায় পড়ার প্রবণতা, স্থিরতড়িৎবিদ্যায় বিপরীত আধানদের পরস্পরের দিকে যাবার বা সমধর্মী আধানদের পরস্পরের থেকে দূরে সরে যাবার প্রবণতাও এই বিভবপ্রভেদের আলোকে ব্যাখ্যা করা যায়। সংরক্ষী বলের প্রভাবে কোনো গতিতে বিভবের ন্যূনতম মান বলবিদ্যার সুস্থিত সাম্যাবস্থা নির্দেশ করে।

অনুরূপভাবে এই এককে আপনারা তাপগতিবিদ্যায় প্রচলিত কয়েকটি অবস্থা-অপেক্ষকের পরিচয় পাবেন, যাদের মানের পরিবর্তন তাপগতীয় প্রক্রিয়ার দিক নির্দেশ করে। উদাহরণস্বরূপ, কোনো বিচ্ছিন্ন তন্ত্রের পরিবর্তনে এনট্রপির বৃদ্ধি হয় ও সুস্থিত সাম্যাবস্থায় তার মান চরম হয়। এই এককে আপনারা হেল্মহোল্টজ মুক্ত অপেক্ষকের ( $F = U - TS$ , যেখানে  $F$  হেল্মহোল্টজ মুক্ত অপেক্ষক ও  $U, T, S$  স্বাভাবিক অর্থবহ) পরিচয় পাবেন। কোনো সমোষ্ণ ও স্থির আয়তনের অনুক্রমণীয় পরিবর্তনে  $F$  এর মান কমে ও এইপ্রকার অণুপরিমাণ তাপগতীয় প্রক্রিয়ায় পাওয়া অন্যান্য অবস্থার তুলনায় সুস্থিত সাম্যাবস্থায় তা অবম মান পায়। অনুরূপে আমরা গিবস অপেক্ষকের ( $G = U + PV - TS$ ) পরিচয় পাব, কোনো সমোষ্ণ ও স্থির চাপে সংঘটিত কোনো পরিবর্তনে যা কমে ও সাম্যাবস্থায় অবম মান পায়। এছাড়াও এনথালপি ( $H = U + PV$ ) নামে একটি তাপগতীয় অপেক্ষকের পরিচয় পাবেন। রাসায়নিক পরিবর্তনে যার ভূমিকা উল্লেখযোগ্য। এই অপেক্ষকগুলির মাধ্যমে আমরা ম্যাক্সওয়েলের বিখ্যাত তাপগতীয় সমীকরণগুলিতে উপনীত হব। পরে তাপগতিবিদ্যার প্রথম ও দ্বিতীয় সূত্রের সঙ্গে এই সমীকরণগুলিকে মিলিতভাবে প্রয়োগ করে পদার্থের বিভিন্ন ধর্মের ব্যাখ্যা করব ও নানাপ্রকার পরিবর্তনে চলগুলির পরিবর্তন নিরূপণ করতে পারব। তাপগতিবিদ্যার সূত্রগুলির প্রয়োগ বিবিধ ক্ষেত্রে বিস্তৃত। উদাহরণস্বরূপ, আমরা তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের আলোকে কিছু প্রচলিত ইঞ্জিন, উৎক্রমণীয় কোষ, তাপতড়িৎ ক্রিয়ার কার্যপ্রণালী ও দশা পরিবর্তনের মতো ঘটনার সংক্ষেপে আলোচনা করব।

### 5.3 তাপগতীয় বিভব

তাপগতিবিদ্যায় তাপগতীয় সাম্যাবস্থা নির্ধারণের এক উল্লেখযোগ্য ভূমিকা আছে। এই এককে আমরা কয়েকটি তাপগতীয় অপেক্ষকের পরিচয় পাব, তাপগতীয় সাম্যাবস্থা নির্ধারণ ও তাপগতীয় পরিবর্তনের দিক নিরূপণে যাদের আলোচনা অত্যন্ত প্রাসঙ্গিক। বলবিদ্যার সঙ্গে সাদৃশ্যের জন্য এই অপেক্ষকদের তাপগতীয় বিভব বলে। এই অপেক্ষকগুলির প্রয়োগ তাপগতিবিদ্যার বিবিধ পরিবর্তনের ক্ষেত্রে বিস্তৃত। তাপগতীয় সাম্যাবস্থার সাধারণ সর্ত বিশ্লেষণ করার আগে আমরা এই বিভবগুলি সম্পর্কে আলোচনা করব।

(1) **আন্তরশক্তি (U)** — প্রথম সূত্রের আলোচনা প্রসঙ্গে আপনারা আন্তরশক্তির সাথে আগেই পরিচিত হয়েছেন। তন্ত্রে কণার সংখ্যা পরিবর্তিত হলে অণুপরিমাণ উৎক্রমণীয় পরিবর্তনের জন্য আমরা লিখতে পারি,  $dU = TdS - dW + \mu dN$  .....(5.1)। রাসায়নিক তন্ত্রের জন্য  $dW = PdV$ । সুতরাং

$$dU = TdS - PdV + \mu dN \text{ (সম্পূর্ণরূপে বিচ্ছিন্ন তন্ত্রের জন্য } dU = 0 \text{ বা আন্তরশক্তি } U \text{ ধ্রুবক থাকে।) ..... (5.1)}$$

সমীকরণ (5.1) থেকে,

$$\text{সমীকরণ (5.1) থেকে } T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,N}, \quad P = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,N}, \quad \mu = \left( \frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,U}$$

U একটি ব্যাপক কিন্তু  $\mu$  একটি সস্কীর্ণ চল।  $\mu$  কে রাসায়নিক বিভব বলে।  $\mu$  সম্পর্কে আমরা পরে আলোচনা করব।

(2) মোটতাপ বা এনথাল্পি (H) :—  $H = U + PV$  একটি গুরুত্বপূর্ণ তাপগতীয় অপেক্ষক।  
 $dH = dU + PdV + VdP$  এবং (5.1) ব্যবহার করে পাই,

$$dH = TdS + VdP + \mu dN \quad (5.2)$$

স্থির চাপ ও অণুসংখ্যায়  $dH = TdS$

অর্থাৎ, কোনো উৎক্রমণীয় তাপগতীয় প্রক্রিয়ায় এনথাল্পির পরিবর্তন গৃহীত বা বর্জিত তাপের পরিমাণ নির্দেশ করে।

$$\text{বা } T = \left( \frac{\partial H}{\partial S} \right)_{P,N}, \quad V = \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_{S,N}, \quad \mu = \left( \frac{\partial H}{\partial N} \right)_{S,P}$$

(3) হেল্মহোল্টজ মুক্ত অপেক্ষক  $F = U - TS$

(5.1) সমীকরণ থেকে পাই, অণুপরিমাণ উৎক্রমণীয় পরিবর্তনে

$$dF = dU - TdS - SdT = -PdV - SdT + \mu dN \quad (5.3)$$

$$\text{বা, } S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N}, \quad P = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N}, \quad \mu = \left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{V,T}$$

$$\text{অথবা } F = U + T \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N} \quad (5.4)$$

এই সমীকরণ গিবস-হেল্মহোল্টজ সমীকরণ নামে খ্যাত। স্থির উষ্ণতা ও অণুসংখ্যার দুটি সাম্যাবস্থার মধ্যে উৎক্রমণীয় পরিবর্তনে F এর হ্রাস তদ্রূপে দ্বারা কৃতকার্যের সমান হয়। F একটি ব্যাপক চল।

(4) গিবস মুক্ত অপেক্ষক  $G = U + PV - TS$

অণুপরিমাণ উৎক্রমণীয় পরিবর্তনের জন্য লিখতে পারি,

$$dG = dU + PdV + VdP - TdS - SdT$$

$$= VdP - SdT + \mu dN \quad (5.5)$$

$$\text{বা, } V = \left( \frac{\partial G}{\partial P} \right)_{T,N}, S = - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P,N}, \mu = \left( \frac{\partial G}{\partial N} \right)_{P,T}$$

$$\text{অথবা, } G = U + PV + T \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P,N} = H + T \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P,N}$$

G একটি ব্যাপক চল।

## 5.4 তাপগতীয় সাম্যাবস্থা

ধরা যাক, কোনো তন্ত্র পারিপার্শ্বিকের সঙ্গে তাপীয় সংযোগে থাকার ফলে  $dQ$  তাপ বিনিময় হয়। তন্ত্র ও পারিপার্শ্বিক মিলিতভাবে একটি বিচ্ছিন্ন সমবায় গঠন করে। যেহেতু কোনো উৎক্রমণীয় পরিবর্তনে বিশ্বের মোট এনট্রপি স্থির থাকে ও অনুৎক্রমণীয় পরিবর্তনে এনট্রপি বাড়ে, সুতরাং আমরা সাধারণভাবে লিখতে পারি,  $ds + ds_0 \geq 0$ , যেখানে  $ds$  ও  $ds_0$  যথাক্রমে তন্ত্র ও পারিপার্শ্বিকের এনট্রপির পরিবর্তন। ( $>$  এবং  $=$  চিহ্নদ্বয় যথাক্রমে অনুৎক্রমণীয় ও উৎক্রমণীয় পরিবর্তনে প্রযোজ্য)। যদি পারিপার্শ্বিক

$$T \text{ উষ্ণতায় } \delta Q \text{ তাপ বর্জন করে, } ds_0 = - \frac{\bar{d}Q}{T} \text{।}$$

সুতরাং আমরা লিখতে পারি  $dS - \frac{dQ}{T} \geq 0.1$ , যেহেতু  $(dQ = dU + dW)$ । আমরা পাই,

$$dS - \frac{(dU + \bar{d}W)}{T} \geq 0.1 \text{ এখন } \bar{d}W = \bar{d}W' + PdV \text{।}$$

যেখানে  $dW'$ ,  $PdV$  ছাড়াও অন্যান্য কার্যের পরিমাণ নির্দেশ করে। উদাহরণস্বরূপ চৌম্বক পদার্থকে তন্ত্র হিসাবে নিলে  $\delta W' = HdI$ , যেখানে  $H$  চৌম্বক ক্ষেত্রের তীব্রতা,  $I$  চৌম্বকত্বের প্রাবল্য ও উৎক্রমণীয় কোষের ক্ষেত্রে  $\delta W' = \xi dq$ , যেখানে  $\xi$  তড়িৎকোষের তড়িচ্চালক বল,  $q$  আধানের পরিমাণ। সুতরাং কোনো পরিবর্তনের সাধারণ শর্ত হল (অণুসংখ্যা স্থির)  $TdS \geq dU + PdV + dW'$ ।

$$(5.6)$$

কয়েকটি বিশেষ তাপগতীয় পরিবর্তনে এই শর্তের প্রয়োগ আলোচনা করা যাক।

(a) বিচ্ছিন্ন তন্ত্র :— তন্ত্রটির পারিপার্শ্বিকের সঙ্গে তাপীয় সংযোগ বিচ্ছিন্ন করলে (5.6) সমীকরণটির ডানপক্ষটি (যা তন্ত্র ও পারিপার্শ্বিকের মধ্যে হস্তান্তরিত তাপ  $dQ$  এর সমান) শূন্য হবে। সুতরাং বিচ্ছিন্ন তন্ত্রের ক্ষেত্রে  $dS > 0.1$  ফলে বাস্তবে যে কোনো অনুৎক্রমণীয় পরিবর্তনে বিচ্ছিন্ন তন্ত্রের

এনট্রপি বাড়তে থাকবে ও সাম্যাবস্থায় তা চরম মান পাবে। স্পষ্টতই সাম্যাবস্থা একাধিক থাকতে পারে। যে কোনো অণুপরিমাণ তাপগতীয় পরিবর্তনের প্রবণতা হবে বিচ্ছিন্ন তন্ত্রকে কোনো অবস্থা থেকে নিকটবর্তী কোনো সাম্যাবস্থার দিকে নিয়ে যাবার। যদি কোন সাম্যাবস্থার সাপেক্ষে তার নিকটস্থ কোন সাম্যাবস্থায় এনট্রপির মান বেশি হয় তবে প্রথম সাম্যাবস্থা থেকে কোনো পরিবর্তনে (তা সসীম হতে পারে) তন্ত্রটি দ্বিতীয় সাম্যাবস্থার দিকে চালিত হবে, একাধিক সাম্যাবস্থার মধ্যে যেটিতে এনট্রপির মান সর্বাপেক্ষা বেশি, সেটিই পরম সুস্থির সাম্যাবস্থা নির্দেশ করবে। অর্থাৎ কোন পরিবর্তনই তন্ত্রকে সাম্যাবস্থা থেকে অন্য কোনো অবস্থায় নিতে পারবে না। সুতরাং সাম্যাবস্থায় কোনো বিচ্ছিন্ন তন্ত্রের ক্ষুদ্র পরিবর্তনের শর্তকে লিখতে পারি  $d^2s=0$  এবং  $ds < 0$ । ( $ds$  এবং  $d^2s$  যথাক্রমে অণুপরিমাণ ও বৃহত্তর পরিবর্তনের জন্য এনট্রপি পরিবর্তন)। উদাহরণস্বরূপ, দুটি ভিন্ন উষ্ণতার তন্ত্রের ( $T_1$  ও  $T_2$  ধরি দুটি উষ্ণতা) যৌথ ব্যবস্থাকে বাইরের থেকে তাপীয় সংযোগ বিচ্ছিন্ন করলে বেশী উষ্ণতা থেকে কম উষ্ণতার দিকে তাপপ্রবাহ হবে।

সুতরাং,  $\Delta S =$  এই তাপপ্রবাহের ফলে এনট্রপির পরিবর্তন

$$= \Delta Q \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) > 0, \text{ যেখানে } T_2 < T_1$$

$T_1$  ও  $T_2$  অসমান হবার জন্য এনট্রপি বাড়বে ও সাম্যাবস্থায় যখন দুটি বস্তুর উষ্ণতা সমান হয় তখন  $\Delta S = 0$  হয় এবং যৌথ ব্যবস্থায় এনট্রপি চরম মান পাবে।

অনুরূপভাবে (5.6) থেকে পাই,  $dU \leq TdS - dW$ , যেখানে  $dW$  মোট কৃতকার্যের পরিমাণ বোঝায়।

যদি  $S, V$  স্থির থাকে ও  $dW'$  শূন্য হয় তবে  $dU \leq 0$  হবে, সুতরাং অনুক্রমণীয় পরিবর্তনে আন্তরশক্তি কমবে ও সাম্যাবস্থায় তা ন্যূনতম পরিবর্তনে আন্তরশক্তি কমবে ও সাম্যাবস্থায় তা ন্যূনতম মান পাবে। যদি অণুসংখ্যা পরিবর্তিত হয় তবে এনট্রপি বৃদ্ধি নীতি থেকে দেখানো যায় যে, বেশি রাসায়নিক বিভব থেকে কম রাসায়নিক বিভবের দিকে অণুর গতি হয় ও যখন দুটি তন্ত্রের রাসায়নিক বিভব সমান হয় তখন সাম্যাবস্থার সৃষ্টি হয়।

(b) স্থির উষ্ণতা ও স্থির আয়তনে তন্ত্রের পরিবর্তন :— 5.6 সমীকরণ থেকে লক্ষ্য করুন যে তন্ত্রের যে সকল পরিবর্তনে উষ্ণতা ও আয়তন স্থির থাকে সেখানে  $TdS - dU \geq dW'$

$$d(TS - U) \geq dW'$$

বা  $dF \leq -dW'$  যেখানে  $F = U - TS$ । এটি নির্দেশ করে যে মুক্তশক্তি  $F$  এর হ্রাস মোট প্রাপ্ত কার্যের চরম মান দেবে। যদি মোট কার্যের পরিমাণ শূন্য হয় তবে,  $dF \leq 0$  অর্থাৎ  $F$  এর মান কমবে

এবং সাম্যাবস্থায় অবম হবে। বাস্তব পরিবর্তনে অর্থাৎ অনুক্রমণীয় পরিবর্তনে  $dF < 0$ । সুস্থির সাম্যাবস্থার সেক্ষেত্রে শর্ত হল কাল্পনিক পরিবর্তনে  $dF = 0$ ,  $d^2F > 0$  (5.7)

F এর স্থির উষ্ণতা ও স্থির আয়তনে তাপগতীয় বিভব বলে।

(c) স্থির উষ্ণতা ও স্থির চাপে তন্ত্রের পরিবর্তন :- এই জাতীয় তন্ত্রের পরিবর্তনে (5.6) সমীকরণ থেকে লেখা যায়।

$$dU + PV - TdS \leq -dW'$$

$$d(U + PV - TS) \leq -dW'$$

বা  $dG \leq -dW'$  যেখানে  $G = U + PV - TS$

সুতরাং স্থির চাপে কোনো সমোষ্ণ পরিবর্তনে গিবস মুক্ত অপেক্ষক G এর হ্রাস PdV ব্যতীত অন্যপ্রকার কার্যের চরম মান দেবে। কেবলমাত্র উষ্ণতা স্থির থাকলে G এর হ্রাস মোট কার্যের সর্বোচ্চ মান বোঝাবে। যদি মোট কার্যের পরিমাণ শূন্য হয় তাহলে  $dG \leq 0$

অর্থাৎ G এর মান অণুপরিবর্তনে কমবে এবং সুস্থিত সাম্যাবস্থার শর্ত হিসেবে বলা যায়

$$dG = 0, \quad d^2G < 0 \quad (5.8)$$

G স্থির উষ্ণতা ও স্থির চাপে তাপগতীয় বিভব বা গিবস মুক্ত অপেক্ষক।

## 5.5 ম্যাক্সওয়েলের তাপগতীয় সমীকরণ

তাপগতিতন্ত্রের প্রথম ও দ্বিতীয় সূত্র একত্রিত করলে যে কোনো তাপগতীয় তন্ত্রের উৎক্রমণীয় অণুপরিবর্তনে এক সাম্যাবস্থা থেকে অন্য সাম্যাবস্থায় গেলে (স্থির অণুসংখ্যার ক্ষেত্রে)

$$TdS = dv + dw$$

এই সূত্রের প্রয়োগে যে সকল আংশিক অবকল গুণাঙ্ক আসে তাদেরকে সর্বদা মাপনযোগ্য রাশির সঙ্গে চিহ্নিত করা যায়না। যে চারটি সমীকরণের সাহায্যে এটা সম্ভব সেগুলিকে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ বলা হয়। এই জাতীয় সমীকরণ সকল তন্ত্রের ক্ষেত্রেই ওর নিরপেক্ষ চল ও ঐ চলের তাপগতীয় অপেক্ষক দ্বারা প্রকাশ করা যায়। আপনারা এখানে রাসায়নিক তন্ত্রের নিরপেক্ষ চল অর্থাৎ P, V ও T এর মধ্যে দুটিকে ব্যবহার করবেন। এবং এই নিরপেক্ষ চলের তাপগতীয় অপেক্ষক হবে,

i) আন্তরশক্তি U ও এনট্রপি S

ii) এনথ্যালপি  $H = U + PV$

iii) হেলমহোল্টজ অপেক্ষক  $F = U - TS$  এবং

iv) গিব্‌স অপেক্ষক  $G = U + PV - TS$

$$= H - TS$$

তন্ত্রের অবস্থার অণুপরিবর্তনে অপেক্ষকগুলির পরিবর্তন হবে এক একটি সম্পূর্ণ অবকল। আপনারা প্রথম এককে দেখেছেন যে  $Z$ ,  $M$ ,  $N$  রাশিমালাগুলি  $x$  ও  $y$  নিরপেক্ষ চলার অপেক্ষক হলে এবং

$dZ = Mdx + Ndy$  একটি সম্পূর্ণ অবকল হলে,

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y \quad (5.9)$$

(1) এখন তাপগতিতন্ত্রের প্রথম ও II সূত্রের সম্মিলিত রূপ যে দেখুন আন্তরশক্তির পরিবর্তন,

$$dU = TdS - PdV$$

এখানে  $U$ ,  $T$  ও  $P$  কে এনট্রপি  $S$  ও আয়তন  $V$  এর অপেক্ষক ধরা হয়েছে।  $dU$  সম্পূর্ণ অবকল হওয়ায়,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \quad (5.10)$$

(2) রাসায়নিক তন্ত্রে,  $H = U + PV$  থেকে যে কোনো অণুপরিবর্তনে পাই,

$$\begin{aligned} dH &= dU + PdV + VdP \\ &= TdS + VdP \end{aligned}$$

অর্থাৎ  $H$ ,  $T$  ও  $V$  প্রত্যেকেই  $S$  ও  $P$  এর অপেক্ষক অর্থাৎ,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P \quad (5.11)$$

(3) হেলমহোল্টজ মুক্ত শক্তি অপেক্ষক  $F = U - TS$  থেকে যে কোনো অণু পরিবর্তনে পাই,

$$\begin{aligned} dF &= dU - TdS - SdT \\ &= -PdV - SdT \end{aligned}$$

এখানে F, P ও S নিরপেক্ষ চল V ও T এর অপেক্ষক এবং dF সম্পূর্ণ অবকল হওয়ায়

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \quad (5.12)$$

(4) অণুপরিবর্তনে গিবস অপেক্ষক  $G = U + PV - TS$  এর পরিবর্তন

$$\begin{aligned} dG &= dU + PdV + VdP - TdS - SdT \\ &= VdP - SdT \end{aligned}$$

G, V ও S প্রত্যেকেই নিরপেক্ষ চল P ও T এর অপেক্ষক এবং dG সম্পূর্ণ অবকল বলে,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \quad (5.13)$$

(5.10) থেকে (5.13) সমীকরণগুলিকে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ বলে। এই সমীকরণগুলি তন্ত্রের সাম্যাবস্থায় প্রযোজ্য। এই সমীকরণগুলির সাহায্যে আমরা সাম্যাবস্থায় তন্ত্রের কিছু ভৌত ধর্মের ব্যাখ্যা, কোনো উৎক্রমণীয় পরিবর্তনে গৃহীত বা বর্জিত তাপ, আন্তরশক্তির পরিবর্তন ইত্যাদির পরিমাপ করতে পারি। পরবর্তী কালে এই বিষয়গুলির ওপর আলোকপাত করা হবে। সামান্য পরিবর্তনে এই

সমীকরণগুলিকে অনেক ক্ষেত্রেই বাস্তব প্রয়োজনে ব্যবহার করা যায়। যেমন  $\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$  কে

নিম্নরূপে ব্যবহার করা যায়। T দ্বারা উভয় পক্ষে গুণ করে পাই,

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

উৎক্রমণীয় অণুপরিবর্তনে,  $(dQ)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P (dP)_T$

এই সমীকরণ থেকে স্থির উষ্ণতায় অণুপরিবর্তনে তন্ত্রের তাপ বিনিময়ের পরিমাণ হিসাব করতে

পারবেন। যে সকল তন্ত্রে  $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$  ধনাত্মক সেখানে উষ্ণতা স্থির রেখে সংনমনের ফলে তন্ত্রে তাপ বর্জন

করে।



অন্যথায়  $0^\circ\text{C}$  থেকে  $4^\circ\text{C}$  এর মধ্যে জলের  $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$  ঋণাত্মক হওয়ায় তদ্রূপ স্থির উষ্ণতায় সংনমনের ক্ষেত্রে তা তাপ গ্রহণ করে।

আবার, (5.11) থেকে  $\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S$  থেকে পাই  $\frac{1}{T}\left(\frac{\partial v}{\partial S}\right)_P = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S$

বা  $\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial V}{\partial Q}\right)_P = \frac{1}{C_P}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

সুতরাং উৎক্রমণীয় অণু পরিবর্তনে  $(\partial T)_S = \frac{T}{C}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P (\partial P)_P$

অর্থাৎ উৎক্রমণীয় রুদ্ধতাপ সংনমনে যে সকল তদ্রূপে  $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$  ধনাত্মক তাদের উষ্ণতা বৃদ্ধি পায়

কিন্তু ঋণাত্মক  $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$  যুক্ত তদ্রূপে ( $0^\circ\text{C}$  থেকে  $4^\circ\text{C}$  এর জলের ক্ষেত্রে) উষ্ণতা হ্রাস পায়।

অনুরূপে 5.12 থেকে,  $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$  সমীকরণের উভয় পক্ষে  $T$  দ্বারা গুণ করে পাই,

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \quad \text{বা} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \bar{\theta}\left(\frac{dQ}{dV}\right)_T$$

কোন পদার্থের দশা পরিবর্তনে উষ্ণতা ও চাপ অপরিবর্তিত থাকলে তদ্রূপে বিভিন্ন চাপে অবস্থার পরিবর্তনের সময়কার উষ্ণতার পরিবর্তন এই সমীকরণ থেকে হিসাব করা যায়।

অবস্থার পরিবর্তনের সময় চাপের অণু পরিবর্তনে,  $(\partial Q)_T = L$  (একক ভরের লীনতাপ) ও

$(\partial v)_T = v_2 - v_1$ । একক ভরের আয়তন পরিবর্তন ধরে,  $(\partial p)_v = \frac{L}{v_2 - v_1} (\partial T)_v$  এটাই ক্ল্যাপেরন এর সমীকরণ।

### 5.5 (a) প্রথম TdS সমীকরণ

একটি রাসায়নিক তন্ত্রের এনট্রপি S কে উষ্ণতা T ও আয়তন V এর অপেক্ষক বলে (স্থির অনুসংখ্যায়) লিখতে পারি,

$$\begin{aligned} Tds &= T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_v dT + T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV \\ &= T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_v dT + T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v dV \quad (\text{ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ 5.12 থেকে})। \end{aligned}$$

$$\text{সুতরাং} \quad TdS = C_v dT + T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v dV \quad (5.14)$$

এই সমীকরণটি প্রথম TdS সমীকরণ নামে খ্যাত।

প্রয়োগ — 1 মোল ভ্যান-ডার-ওয়াল্‌স গ্যাসের ক্ষেত্রে

$$TdS = C_v dT + T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v dV, \text{ যেখানে } C_v \text{ মোলার আপেক্ষিক তাপ}$$

$$\text{সমোষ্ণ অবস্থায় } dT = 0 \text{ ধরে, } TdS = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v dV$$

ভ্যান-ডার-ওয়াল্‌স গ্যাসের ক্ষেত্রে  $P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$  ধরলে (যেখানে a ও b ভ্যান-ডার-ওয়াল্‌স

$$\text{প্র-বক) } \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \frac{R}{V-b}$$

সুতরাং এক মোল ভ্যান-ডার-ওয়াল্‌স গ্যাসের সমোষ্ণ প্রসারণের জন্য মোট হস্তান্তরিত তাপ

$$= \int_{v_i}^{v_f} \frac{RT}{V-b} dv = RT \ln \frac{V_f - b}{V_i - b} \quad 5.15$$

(b) দ্বিতীয় TdS সমীকরণ

রাসায়নিক তন্ত্রের এনট্রপি S কে উষ্ণতা T ও চাপ P এর অপেক্ষক ধরলে (স্থির অণুসংখ্যায়)

$$\text{লিখতে পারি, } TdS = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P dT + T \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T dP$$

$$= T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P dT - T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dP \quad (\text{ম্যাক্সওয়েলের চতুর্থ সমীকরণ থেকে})$$

এই সমীকরণটি দ্বিতীয় TdS সমীকরণ নামে খ্যাত।

5.16

$$\text{প্রয়োগ (1) — 1 মোল ভ্যান-ডার-ওয়াল্‌স্ গ্যাসের ক্ষেত্রে } p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

এই সমীকরণ প্রয়োগ করে  $\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P$  কে P এর অপেক্ষকরূপে নিরূপণ করতে পারি। এরপর

(5.16) সমীকরণ থেকে সমাকল করে কোনো উৎক্রমণীয় সমোষ্ণ পরিবর্তনের ক্ষেত্রে চাপ বৃদ্ধির জন্য মোট হস্তান্তরিত তাপ পরিমাপ করতে পারি। এই গাণিতিক হিসাবটি কিছুটা জটিল ও অনেকক্ষেত্রে (বিশেষতঃ কঠিন ও তরল পদার্থের জন্য) অপ্রয়োজনীয়।

$$\text{উৎক্রমণীয় সমোষ্ণ পরিবর্তনের ক্ষেত্রে } TdS = -\beta V T dP$$

যেখানে  $\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$  পদার্থটির স্থির চাপে আয়তন গুণাঙ্ক। কঠিন ও তরল পদার্থের জন্য V

ও  $\beta$  চাপ পরিবর্তনে প্রায় স্থির থাকে।

এই প্রকার উৎক্রমণীয় পরিবর্তনে মোট হস্তান্তরিত তাপ

$$\Delta Q = -TV\bar{\beta} \int_P^{P_f} dP = -TV\bar{\beta}(P_f - P_i), \text{ যেখানে } \bar{V}, \bar{\beta} \text{ যথাক্রমে গড় আয়তন ও আয়তন}$$

গুণাঙ্ক,  $P_i$  ও  $P_f$  প্রাথমিক ও অন্তিম চাপ। সুতরাং  $\bar{\beta}$  ধনাত্মক হলে সমোষ্ণ পরিবর্তনের চাপ বৃদ্ধির ক্ষেত্রে তন্ত্রটি তাপ বর্জন করবে।  $\bar{\beta}$  ঋণাত্মক হলে (যেমন,  $0^\circ\text{C}$  ও  $4^\circ\text{C}$  এর মধ্যে জল) সমোষ্ণ চাপ বৃদ্ধির জন্য তন্ত্রটি তাপ শোষণ করবে। ধনাত্মক আয়তন গুণাঙ্ক বিশিষ্ট কোনো পদার্থের ক্ষেত্রে সাধারণত চাপ বৃদ্ধির জন্য যে কার্য করা হয় তার মান বর্জিত তাপের মান অপেক্ষা কম হয় এবং এর ফলে আন্তরশক্তি হ্রাস হয়। ঋণাত্মক আয়তন গুণাঙ্কের ক্ষেত্রে (উদাহরণস্বরূপ  $0^\circ\text{C}$  ও  $4^\circ\text{C}$  এর মধ্যে জল) তাপ গৃহীত হয় এবং এর ফলে আন্তরশক্তি বৃদ্ধি পায়।

(2) রুদ্ধতাপ উৎক্রমণীয় চাপ পরিবর্তনের ক্ষেত্রে (5.16) সমীকরণ থেকে

$$TdS = 0 = C_p dT - T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dP$$

$$\text{বা, } dT = \frac{T}{C_p} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dP = \frac{TV\beta}{C_p} dP$$

আয়তন গুণাঙ্ক  $\beta > 0$  হলে চাপবৃদ্ধিতে উষ্ণতা বৃদ্ধি পাবে ও  $\beta < 0$  হলে চাপবৃদ্ধিতে উষ্ণতা কমবে।

(c) আন্তরশক্তি পরিবর্তনের সমীকরণ :

দুটি সাম্যাবস্থার মধ্যে অণুপরিমাণ উৎক্রমণীয় পরিবর্তনের জন্য লিখতে পারি,

$dU = TdS - dW = TdS - PdV$  (রাসায়নিক তন্ত্রের ক্ষেত্রে ও অণুসংখ্যা স্থির থাকলে)। সমীকরণ

(5.14) প্রয়োগ করে পাই,  $dU = C_v dT + \left[ T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right] dV$ ।  $U$  কে  $T$  ও  $V$  এর অপেক্ষক ধরলে

$$dU = C_v dT + \left[ T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right] dV \quad \text{। ওপরের দুটি সমীকরণ তুলনা করলে পাই}$$

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \quad 5.17$$

(1) আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে  $P = \frac{nRT}{V}$  এবং ফলতঃ  $\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = \frac{nRT}{V} - P = 0$ । অনুরূপে

$\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T = 0$ । এই কারণে আদর্শ গ্যাসের আন্তরশক্তি স্থির উষ্ণতায় চাপ বা আয়তনের ওপর নির্ভর

করে না।

$$(2) \text{ ভ্যান-ডার-ওয়াল্‌স গ্যাসের জন্য } P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b} \text{ এবং } \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{RT}{V-b} - P = \frac{a}{V^2}$$

$$\text{সুতরাং } dU = C_v dT + \frac{a}{V^2} dV$$

$$\text{সমাকল করে পাই, } U = \int C_v dT - a/v + \text{ধ্রুবক।}$$

সমোষ্ণ পরিবর্তনের আয়তন বাড়লে ভ্যান-ডার-ওয়াল্‌স গ্যাসের ক্ষেত্রে আন্তরশক্তি বাড়ে।

(d) স্থির চাপে ও আয়তনে তাপগ্রাহিতার অন্তর :

প্রথম ও দ্বিতীয় TdS সমীকরণ প্রয়োগ করে পাই,

$$C_p dT - T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP = C_v dT + T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV$$

$$\text{অথবা, } dT = \frac{1}{(C_p - C_v)} \left[ T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV + T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP \right] \quad 5.18$$

উষ্ণতা T কে চাপ ও আয়তনের অপেক্ষক ধরলে পাই,

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV \quad 5.19$$

(5.18) এবং (5.19) সমীকরণ দুটি থেকে পাই,

$$\frac{T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V}{C_p - C_v} = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P$$

$$\text{অথবা } C_p - C_v = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad 5.20$$

আবার, অবস্থার সমীকরণ  $f(P, V, T) = 0$  থেকে পাই,  $\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T$

$$(5.20) \text{ সমীকরণে ওপরের সম্পর্ক ব্যবহার করে পাই, } C_p - C_v = -T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p^2 \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T$$

স্থির চাপে আয়তন গুণক  $\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$  এবং সমোষ্ণ সংনম্যতা  $K_T = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$  বসিয়ে

$$\text{পাই, } C_p - C_v = \frac{TV\beta^2}{K_T} \quad 5.21$$

$$(1) 4^\circ\text{C এ জলের জন্য } \beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = 0, \text{ সুতরাং } C_p = C_v$$

$$(2) T \rightarrow 0 \text{ হলে } C_p \rightarrow C_v$$

$$(3) \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T < 0 \text{ হবার জন্য } K_T > 0, \text{ সুতরাং সাধারণভাবে সকল পদার্থের জন্য } C_p > C_v$$

(4) আদর্শ গ্যাসের জন্য  $PV = nRT$ , যেখানে চিহ্নগুলি স্বাভাবিক অর্থবহ।

$$P = \frac{nRT}{V} \text{ থেকে } \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \frac{nR}{V} \text{ এবং } \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{nR}{P}$$

$$\text{সুতরাং } C_p - C_v = T \times \frac{n^2 R^2}{PV} = nR \quad 5.22$$

(e) স্থির চাপ ও স্থির আয়তনে তাপগ্রাহিতার অনুপাত :

$$\text{সমীকরণ (5.14) থেকে স্থির এনট্রপি } S \text{ এ } C_v dT_s = -T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v dV_s \quad 5.23$$

সমীকরণ (5.16) থেকে স্থির এনট্রপি S এ  $C_p dT_s = T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_V dP_s$  5.24

(5.24) ও (5.23) থেকে পাই,  $\frac{C_p}{C_v} = - \frac{\left[ \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \right]}{\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v} \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_s$

বন্ধনীর ভিতরের রাশিটি  $-\left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$  এর সমান।

সুতরাং ওপরের সমীকরণ থেকে পাই,  $\frac{C_p}{C_v} = \frac{\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_s}{\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T}$  5.25

সংজ্ঞা অনুসারে রুদ্ধতাপ সংনম্যতা  $K_s = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_s$  এবং সমোষ্ণ সংনম্যতা  $K_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$ ।

সুতরাং (5.25) থেকে পাই,  $\frac{C_p}{C_v} = \frac{K_T}{K_s}$  5.26

$0^\circ\text{C}$  এবং 1 বায়ুমণ্ডলীয় চাপে পারদের জন্য  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1.14$

$K_T = 3.88 \times 10^{-12}$  সেমি<sup>2</sup> / ডাইন।

সুতরাং  $K_s = \frac{3.88 \times 10^{-12}}{1.14} = 3.41 \times 10^{-12}$  সেমি<sup>2</sup> / ডাইন।

(f) স্থির উষ্ণতায় আয়তনের সঙ্গে  $C_v$  - এর পরিবর্তন :

উৎক্রমণীয় পরিবর্তনের জন্য  $C_v = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V$

$$\therefore \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = T \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$$

ম্যাক্সওয়েলের তৃতীয় সমীকরণ থেকে পাই,  $\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$

$$\text{সুতরাং} \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = T \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V$$

5.27

আদর্শ গ্যাসের জন্য  $PV = nRT$

$$\therefore \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{nR}{V}, \left( \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V = 0$$

$$\therefore \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = 0$$

(g) স্থির উষ্ণতায় চাপের সঙ্গে  $C_p$  এর পরিবর্তন :

$$\text{উৎক্রমণীয় পরিবর্তনের জন্য} C_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P$$

$$\therefore \left( \frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = T \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial T}$$

ম্যাক্সওয়েলের চতুর্থ সমীকরণ থেকে পাই,  $\left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$

$$\text{সুতরাং} \left( \frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = T \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = -T \left( \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right)_P$$

আদর্শ গ্যাসের জন্য  $V = \frac{nRT}{P}$



$$\therefore \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{nR}{P}, \left( \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right)_p = 0$$

$$\therefore \left( \frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = 0$$

## 5.6 উদাহরণ

(1) কোনো আদর্শ গ্যাসের 1 গ্রাম অণুকে  $0^\circ\text{C}$  থেকে  $100^\circ\text{C}$  পর্যন্ত উত্তপ্ত করা হল। নিম্নলিখিত দুটি ক্ষেত্রে F ও G এর পরিবর্তন হিসাব করুন —

(i) গুর আয়তন 1 লিটার এ স্থির ছিল।

(ii) গুর চাপ 1 বায়ুমন্ডলের সমান ছিল।

উত্তর — (i) অণু পরিমাণ উৎক্রমণীয় পরিবর্তনে F এর পরিবর্তন  $dF = d(U - TS) = dU - TdS - SdT$ ।

$TdS = dU + PdV$  ব্যবহার করে পাই,  $dF = -PdV - SdT = -SdT$

যেহেতু আয়তন স্থির ছিল।

5.51

এখন  $dS = C_v \frac{dT}{T}$  ( $dV = 0$ ) ব্যবহার করে পাই,  $S = C_v \ln T + S_0$ , যেখানে  $S_0$  1 গ্রাম

অণু গ্যাসের 1 লিটার আয়তনের জন্য কোনো প্রারম্ভিক অবস্থার এনট্রপি।

(5.51) সমীকরণকে সমাকল করে পাই,

$$F \text{ এর পরিবর্তন } \Delta F = - \int_{T_0}^T SdT = - \int_{273}^{373} (C_v \ln T + S_0) dT$$

$$\Delta F = -C_v [373 \ln 373 - 273 \ln 273 - 100S_0] \text{ ক্যালরি।}$$

[ $\int \ln T dT = T \ln T - T$  ব্যবহার করা হয়েছে]

সুতরাং 1 গ্রাম অণুর জন্য  $C_v$  এবং  $S_0$ র মান বসালে  $\Delta F$  পাব।

$$\text{অনুরূপভাবে, } \Delta G = \int_{T_1}^{T_2} d(U + PV - TS) = \int_{T_1}^{T_2} (VdP - SdT)$$

আদর্শ গ্যাসের সূত্র প্রয়োগ করে পাই,  $VdP = RdT$  ( $PV = RT$  ধরলে)  
 $PdV - VdP - RdT$ ,  $dV = 0$  হলে  $VdP = RdT$ )

$$\text{সুতরাং } \Delta G = \int_{T_1}^{T_2} (R - S) dT = \int_{273}^{373} (R - C_v \ln T - S_0) dT$$

$$= 100(R - S_0) - C_v(373 \ln 373 - 273 \ln 273) \text{ ক্যালরি।}$$

(ii) চাপ স্থির থাকলে (5.51) সমীকরণ প্রয়োগ করে পাই,

$$dF = -PdV - SdT = -(R + S)dT$$

(যেহেতু  $PV = RT$  থেকে  $PdV = RdT$ , চাপ স্থির থাকলে),

$$\text{সুতরাং } \Delta F = - \int_{T_1}^{T_2} (R + S) dT = - \int_{273}^{373} (R + C_v \ln T + S_0) dT$$

$$\text{বা } \Delta F = -100(R + S_0) - C_v[373 \ln 373 - 273 \ln 273 - 100] \text{ ক্যালরি}$$

আবার  $\Delta G$   $\int_{T_1}^{T_2} (Vdp - SdT)$  ব্যবহার করে  $dP = 0$  বসিয়ে পাই,

$$\Delta G = - \int_{T_1}^{T_2} (C_v \ln T + S_0) dT$$

$$-C_v [300 \ln 373 - 200 \ln 273 + 100 S_0] \text{ ক্যালরি।}$$

$$2. \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \text{ থেকে প্রমাণ করুন যে, } 4^\circ\text{C উষ্ণতার কমে সংনমনের সময় জল}$$

পারিপার্শ্বিক মাধ্যম থেকে তাপ গ্রহণ করলে ওর উষ্ণতা স্থির থাকবে।

$$\text{উত্তর — গৃহীত তাপ} = T\Delta S = - \int T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dP$$

$$\text{উষ্ণতা স্থির থাকলে গৃহীত তাপ} = -T \int \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dP = \Delta Q$$

$$4^\circ\text{C উষ্ণতার কমে } \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \text{ ঋণাত্মক, সুতরাং } \Delta Q > 0, \text{ যেহেতু } dP > 0 \text{। সুতরাং}$$

পারিপার্শ্বিক মাধ্যম থেকে তাপ সংগ্রহ করলে তবেই জলের উষ্ণতা স্থির থাকবে।

$$3. \text{ প্রমাণ করুন (i) } \frac{\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_S}{\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P} = \frac{1}{1-\gamma}$$

$$\text{(ii) } C_p = T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_S$$

$$\text{(iii) } \frac{\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_S}{\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V} = \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

$$\text{উত্তর — (i) } \frac{\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_S}{\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P} = - \frac{\left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_V}{\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P} \text{ (ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ থেকে } \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_V \text{)}$$

$$\text{বা, বামপক্ষ} = -\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P} = \frac{T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V}{T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P} = \frac{C_V}{C_V - C_P} = \frac{1}{1 - \gamma}$$

$$\left( C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \text{ এবং } \gamma = \frac{C_P}{C_V} \text{ বসিয়ে পাই } \right) \text{ প্রমাণিত}$$

$$(ii) C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

$$\text{বা, } C_P = T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left/ \left(\frac{\partial S}{\partial S}\right)_P \right.$$

$$\text{বা, } C_P = \frac{T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S} = T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S \text{ প্রমাণিত। (ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ থেকে পাই)}$$

$$(iii) \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S}{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V} = \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P}{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V} \text{ (ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ থেকে পাই)}$$

$$\text{বা } \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S}{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V} = \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V} = \frac{C_P}{C_P - C_V}$$

$$\left[ \because C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \text{ এবং } C_P - C_V = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \right]$$

$$\text{বা } \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S}{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V} = \frac{1}{1-1/\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \text{ প্রমাণিত।}$$

## 5.7 অনুশীলনী — (1)

(1) 200 গ্রাম জলের ওপর চাপ সমোষণ উৎক্রমণীয়ভাবে  $0^\circ\text{C}$  এ 1 থেকে 3000 বায়ুমণ্ডল পর্যন্ত বাড়ানো হল।

(i) কী পরিমাণ তাপ হস্তান্তরিত হল?

(ii) কৃতকার্যের পরিমাণ হিসাব করুন।

(iii) আন্তরশক্তির পরিবর্তন হিসাব করুন।

(সমচাপের আয়তন গুণাঙ্ক  $\beta = -67 \times 10^{-6} / ^\circ\text{কে}$ )

সমোষণ সংনম্যতা  $k = 43 \times 10^{-12}$  সেমি<sup>2</sup> / ডাইন)

(2) দেখান যে ভ্যান-ডার-ওয়াল্‌স গ্যাসের ক্ষেত্রে (1 মোল)  $C_P - C_V \approx R \left(1 + \frac{2a}{RTV}\right)$ । যেখানে

চিহ্নগুলি স্বাভাবিক অর্থবহ।

(3) (ক) গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ  $\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{B(T)}{V}$  হলে প্রমাণ করুন

$$C_V = -\frac{RT}{V} \frac{d^2}{dT^2}(BT) + (C_V)_{V=\infty}$$

(খ) গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ  $\frac{PV}{RT} = 1 + B(T)P$  হলে দেখান যে,

$$C_P = -RTP \frac{d^2}{dT^2}(BT) + (C_P)_{P=0}$$

## 5.8 তাপগতিতত্ত্বের দ্বিতীয় সূত্রের প্রয়োগ

(a) দশা পরিবর্তন :

দশা পরিবর্তনের সময় (ধরা যাক, তরল বাষ্প বা কঠিন তরল) একাধিক দশা সাম্যাবস্থায় থাকে ও প্রতিটি দশার চাপ, উষ্ণতা স্থির থাকে। ধরা যাক, একক ভরের এনট্রপি ও আন্তরশক্তি দুটি দশায় যথাক্রমে  $S_1, U_1$  ও  $S_2, u_2$  দশা পরিবর্তনের সময় মোট ভর, আয়তন ও আন্তরশক্তি স্থির থাকবে। সুতরাং অণুপরিমাণ দশা পরিবর্তনের জন্য

$$\delta M = \delta m_1 + \delta m_2 = 0 \quad (5.29 \text{ (ক)})$$

$$\delta V = (m_1 \delta v_1 + m_2 \delta v_2) + (v_1 \delta m_1 + v_2 \delta m_2) = 0 \quad (5.29 \text{ (খ)})$$

$$\delta U = (m_1 \delta u_1 + m_2 \delta u_2) + (u_1 \delta m_1 + u_2 \delta m_2) = 0 \quad (5.29 \text{ (গ)})$$

যেহেতু দশাগুলির মিলিত অবস্থা একটি বিচ্ছিন্ন তন্ত্রের সাম্যাবস্থা নির্দেশ করে,  $\delta s = 0$

অণুপরিমাণ আপাতস্থির পরিবর্তনের ক্ষেত্রে

$$\begin{aligned} \delta s &= (m_1 \delta s_1 + m_2 \delta s_2) + (S_1 \delta m_1 + S_2 \delta m_2) \\ &= m_1 \left( \frac{\delta u_1 + P_1 \delta V_1}{T_1} \right) + m_2 \left( \frac{\delta u_2 + P_2 \delta V_2}{T_2} \right) + S_1 \delta m_1 + S_2 \delta m_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

(5.30) এবং (5.29) সমীকরণগুলি প্রয়োগ করলে পাই,

$$\left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) m_1 \delta u_1 + \left( \frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2} \right) m_1 \delta v_1 + \left[ S_1 - S_2 + \frac{u_2 - u_1}{T_2} + \frac{P_2 (v_2 - v_1)}{T_2} \right] \delta m_1 = 0$$

যেহেতু অণুপরিবর্তন  $\delta u_1, \delta v_1, \delta m_1$  পরস্পর নিরপেক্ষ,

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} \text{ অথবা } T_1 = T_2 = T$$

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \text{ অথবা } P_1 = P_2 = P$$

$$S_1 - \frac{u_1 + P_1 U_1}{T_1} = S_2 - \frac{u_2 + P_2 V_2}{T_2}$$

$$\text{সুতরাং } TS_1 - (U_1 + P_1 V_1) = TS_2 - (u_2 + P_2 V_2)$$

$$\text{বা } g_1 = g_2 \quad (5.31)$$

অর্থাৎ প্রতি একক ভরে গিব্‌স অপেক্ষক দুটি দশাতেই এক হবে। স্পষ্টতই যে কোনো সংখ্যক দশা পরস্পর সাম্যাবস্থায় থাকলে আমরা ওপরের সিদ্ধান্তগুলিতে উপনীত হব।

সুতরাং দুটি দশা একটি উষ্ণতা ও চাপে সাম্যাবস্থায় থাকবে ও প্রতি একক ভরের গিব্‌স অপেক্ষকের মান দশা পরিবর্তনে অপরিবর্তিত থাকে। যেহেতু চাপ ও উষ্ণতা সমান থাকে, দশা পরিবর্তনের সাপেক্ষে সুস্থিত সাম্যাবস্থায় গিব্‌স অপেক্ষকের মান অবম হবে।

$T + dT$  উষ্ণতা ও  $P + dP$  চাপে দশা পরিবর্তনের জন্য  $\theta$

$$g_1 + dg_1 = g_2 + dg_2 \quad (5.32)$$

$$(5.31) \text{ এবং } (5.32) \text{ থেকে পাই, } dg_1 = dg_2$$

চাপ ও উষ্ণতার অণুপরিমাণ উৎক্রমণীয় পরিবর্তনের জন্য

$$dg_1 = v_1 dp - S_1 dT \text{ এবং } dg_2 = v_2 dp - S_2 dT$$

$$\text{অথবা } v_1 dp - S_1 dT = v_2 dp - S_2 dT$$

যেহেতু দশা দুটি একত্রে সাম্যাবস্থায় সংপৃক্ত অবস্থায় থাকে, ওপরের সমীকরণ থেকে আমরা লিখতে পারি,  $(S_2 - S_1)dT = (v_2 - v_1)dp$

$$\text{বা } \left( \frac{dp}{dT} \right)_{\text{সংপৃক্ত}} = \frac{S_2 - S_1}{V_2 - V_1}$$

প্রতি একক ভরের দশা পরিবর্তনে  $L$  পরিমাণ লীনতাপ উৎক্রমণীয়ভাবে হস্তান্তরিত হয়,

$$S_2 - S_1 = \Delta S \int \frac{dQ}{T} = L/T$$

$$\text{বা } \left( \frac{dp}{dT} \right) = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}$$

5.33

এই সমীকরণটি ক্লসিয়াস ক্ল্যাপেরণের সমীকরণ নামে অভিহিত হয়।

ম্যাক্সওয়েলের তৃতীয় সমীকরণ থেকেও ওপরের সমীকরণটি প্রমাণ করা যায়। ম্যাক্সওয়েলের তৃতীয়

$$\text{সমীকরণ থেকে } \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

দশা পরিবর্তনের সময় একাধিক দশা সাম্যাবস্থায় সংপৃক্ত অবস্থায় থাকে।

$$\text{আবার যেহেতু } T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \frac{L}{V_2 - V_1}, \text{ যেখানে } L \text{ প্রতি একক ভরে গৃহীত বা বর্জিত লীনতাপ,}$$

$v_2 - v_1$  প্রতি একক ভরের আয়তনের পরিবর্তন দশা রূপান্তরের জন্য। সুতরাং ম্যাক্সওয়েলের তৃতীয়

$$\text{সমীকরণকে লিখতে পারি, } \left( \frac{dP}{dT} \right)_{\text{sat}} = \frac{L}{T(v_2 - v_1)} \text{। এখানে } \left( \frac{dP}{dT} \right)_{\text{sat}} \text{ আয়তনের ওপর প্রায়}$$

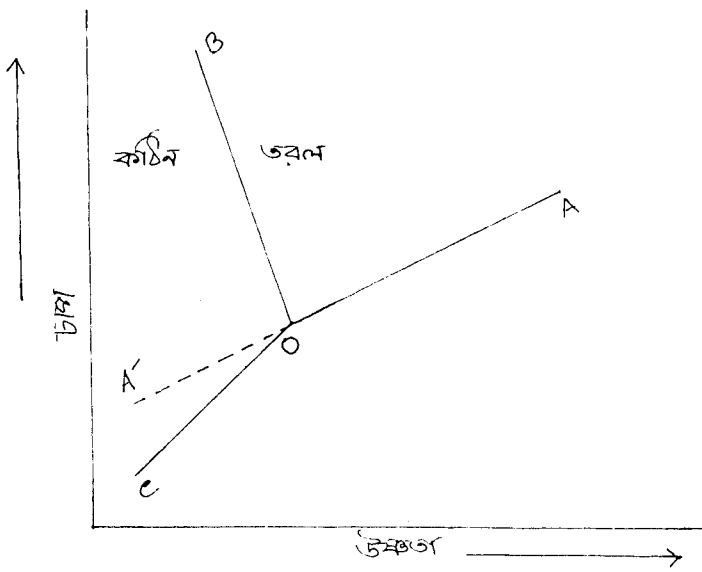
নির্ভর করে না।

5.33

ক্লসিয়াস-ক্ল্যাপেরণের সমীকরণের সাহায্য নিয়ে চাপ পরিবর্তনে গলনাঙ্ক বা স্ফুটনাঙ্কের পরিবর্তন নির্ধারণ করতে পারি। তরল-বাষ্প রূপান্তরে আয়তন বৃদ্ধি পায়, সুতরাং চাপ বৃদ্ধি করলে স্ফুটনাঙ্ক বাড়ে ও চাপ কমালে স্ফুটনাঙ্ক কমে। জল থেকে বাষ্প পরিবর্তনে প্রতি 27 মিমি বায়ুমণ্ডলীয় চাপ পরিবর্তনে স্ফুটনাঙ্ক  $1^\circ\text{C}$  পরিবর্তিত হয়। গলনের ফলে যদি আয়তন বাড়ে তবে পারিপার্শ্বিক চাপ বাড়ালে গলনাঙ্ক বাড়ে, কমালে কমে। কিন্তু যদি গলনের ফলে আয়তন কমে (বরফ থেকে জলে রূপান্তরে) তবে চাপ বাড়ালে গলনাঙ্ক কমে। অবশ্য এ ক্ষেত্রে আয়তনের পরিবর্তন কম হবার জন্য  $\frac{dP}{dT}$  বেশি হবে। প্রতি

অ্যাটমসফিয়ার চাপ বাড়লে বরফের গলনাঙ্ক  $0.007^\circ\text{C}$  হ্রাস পায়।





O বিন্দু ত্রৈধবিন্দু। OA, OB ও OC যথাক্রমে তরল বাষ্প, কঠিন তরল ও কঠিন বাষ্প দশাযুগ্মের সাম্যাবস্থা বোঝাবে।

চিত্র 5.1

জল, বরফ ও জলীয় বাষ্প এই তিনটি দশা একত্রে একটি নির্দিষ্ট চাপ ও উষ্ণতায় সাম্যাবস্থায় থাকে, এই অবস্থাটি চাপ-উষ্ণতা রেখচিত্রে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দ্বারা নির্দেশ করা যায়। এই বিন্দুকে ত্রৈধবিন্দু বলে। স্পষ্টতই এই ত্রৈধবিন্দুর স্থানাঙ্কের মান বস্তুর ভর-নিরপেক্ষ। কার্বন ডাই - অক্সাইডের ক্ষেত্রেও অনুরূপ ত্রৈধবিন্দুর অস্তিত্ব প্রমাণ করা যায়। তিনটি দশা একত্রে সাম্যাবস্থায় থাকতে হলে চাপ ও উষ্ণতা নির্দিষ্ট থাকবে, কোনো নিরপেক্ষ চল থাকবে না।

চিত্র 5.1 এ ত্রৈধবিন্দুর উপস্থিতি চাপ উষ্ণতা রেখচিত্রে নির্দেশিত হয়েছে। OA, OB ও OC রেখা তিনটি যথাক্রমে জল-বাষ্প, জল-বরফ ও বরফ-বাষ্প দশাদুটির সাম্যাবস্থা নির্দেশ করে। O বিন্দুতে তিনটি দশাই একত্রে সাম্যাবস্থায় থাকে। এই কারণে O বিন্দুটি ত্রৈধবিন্দু বোঝাবে।

(b) উৎক্রমণীয় কোষের কার্যপ্রণালী :

একটি কোষের ভিতর যে রাসায়নিক বিক্রিয়া হয় তা কোষের তড়িচ্চালক বলের উৎস। রাসায়নিক বিক্রিয়ার ফলে যে তাপশক্তির উদ্ভব হয় তা কোষকে বর্তনীতে তড়িতপ্রবাহ পাঠানোর জন্য প্রয়োজনীয় শক্তি সরবরাহ করে। এই বিক্রিয়াগুলি তাপউদগারী ও উৎপন্ন তাপশক্তিকে বিক্রিয়া তাপ বলে। ধরা যাক, কোষটি কোনো বহির্বর্তনীতে (মনে করা যাক, পোটেনসিওমিটার) তড়িৎপ্রবাহ পাঠাচ্ছে। যদি কোষের

তড়িচ্চালক বল পোটেনসিওমিটারের দুই প্রান্তের বিভবপ্রভেদের চেয়ে বেশি হয় তবে বিক্রিয়া একটি নির্দিষ্ট দিকে হয়। কিন্তু তড়িচ্চালক বল প্রান্তিক বিভবপ্রভেদের থেকে কম বলে বিক্রিয়াটি বিপরীত দিকে ঘটে ও তড়িৎপ্রবাহের দিক পাল্টে যায়। উদাহরণস্বরূপ, ড্যানিয়েল কোষে দস্তার পাত জিঙ্ক সালফেট দ্রবণের মধ্যে ও তামার পাত রূপার সালফেট দ্রবণে ডোবানো থাকে। যখন কোষটি তড়িৎপ্রবাহ পাঠায় তখন জিঙ্ক দ্রবণের ভিতর আয়নিত জিঙ্করূপে যায় ও তামা তামার পাতে জমা হয়। বিক্রিয়াটি যেভাবে সংঘটিত হয় তা হল  $Z_n + C_u^{++} \rightarrow Z_n^{++} + C_u$ । বিপরীত অভিমুখে তড়িৎপ্রবাহ হলে বিক্রিয়াটি হয়  $Z_n^{++} + C_u \rightarrow Z_n + C_u^{++}$ । সুতরাং যদি সাম্যাবস্থার সাপেক্ষে তড়িচ্চালক বলের পরিবর্তন করা যায়, তবে পরিবর্তনের দিক পাল্টালেই বিক্রিয়ার দিক ও তড়িৎপ্রবাহের অভিমুখ পরিবর্তিত করা যায়। এই কারণে তড়িৎকোষের কার্যপ্রণালী উৎক্রমণীয় বলা যায়। অবশ্য তড়িৎপ্রবাহ পাঠালে যে তাপের উদ্ভব হয় তা তড়িৎপ্রবাহের বর্গের সমানুপাতিক এবং সেই কারণে অনুৎক্রমণীয়। কিন্তু যদি তড়িৎপ্রবাহের মান কম হয় তবে জুলতাপকে উপেক্ষা করা যায় এবং তড়িৎকোষের কার্যপ্রণালী উৎক্রমণীয় হয়।

উৎক্রমণীয় কোষের ক্ষেত্রে তাপগতিবিদ্যার সূত্র প্রয়োগ করা হয়। উৎক্রমণীয় কোষের ক্ষেত্রে (5.17) সমীকরণের সদৃশ সমীকরণ প্রয়োগ করতে হলে V এর জায়গায় Z ও P এর জায়গায়  $-\varepsilon$  বসাতে হবে, যেখানে Z চালিত আধানের মান ও  $\varepsilon$  তড়িচ্চালক বল। সুতরাং আমরা লিখতে পারি,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial Z}\right)_T = \varepsilon - T \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_Z$$

। যেহেতু  $\varepsilon$  কেবলমাত্র উষ্ণতা T এর ওপর নির্ভরশীল,  $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_Z$  এর

পরিবর্তে আমরা  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}$  লিখতে পারি। সুতরাং আমরা পাই,  $\varepsilon - T \frac{d\varepsilon}{dT} = \left(\frac{\partial U}{\partial Z}\right)_T$  (5.34)

প্রথম TdS সমীকরণ (5.14) কে উৎক্রমণীয় কোষের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করে পাই,

$$Tds = C_z dT - T \frac{d\varepsilon}{dT} dz$$
 (5.35)

সমোষ্ণ ও উৎক্রমণীয়ভাবে আধান পাঠালে পারিপার্শ্বিকের সঙ্গে যে তাপ বিনিময় হয় তার পরিমাণ

$$Q = -\frac{Td\varepsilon}{dT} (z_f - z_i)$$
 (5.35 নং সমীকরণ থেকে পাই), যেখানে  $z_f - z_i$  চালিত আধানের পরিমাণ

বোঝায়। স্পষ্টতঃ কোষটি যখন বাইরের বর্তনীতে তড়িৎ পাঠাবে,  $z_f - z_i < 0$ ,  $Q < 0$ , যদি  $\frac{d\varepsilon}{dT} > 0$  হয়। কোষের তড়িচ্চালক বল উষ্ণতার সঙ্গে বাড়লে কোষটি পারিপার্শ্বিকে তাপ বর্জন করবে।

বিপরীতভাবে  $\frac{d\varepsilon}{dT} < 0$  হলে কোষটি বাইরের থেকে তাপ নেবে।

কোষ দ্বারা কৃতকার্য  $W = -\varepsilon(z_f - z_i)$ ।

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র থেকে পাই,

$$\text{আন্তরশক্তির পরিবর্তন } U_f - U_i = \varepsilon(z_f - z_i) - T \frac{d\varepsilon}{dT} (z_f - z_i)$$

বা  $U_f - U_i = -jF \left( \varepsilon - T \frac{d\varepsilon}{dT} \right)$ , যেখানে  $jF$  কুলম্ব আধান ধনাত্মক পাত থেকে ঋণাত্মক পাতে

হস্তান্তরিত হয়। ( $j$  যোজ্যতা ও  $F$  ফ্যারাডে ধ্রুবক) যদি কোষটি উৎক্রমণীয়ভাবে আধান পাঠায় এবং পদ্ধতিটি স্থির চাপ ও প্রায় স্থির আয়তনে হয়, তবে এন্থালপির পরিবর্তনের জন্য লিখতে পারি,

$dH = dU + PdV + VdP \approx dU$  সমীকরণ (5.36) প্রয়োগ করে পাই,

$$H_f - H_i = -jF \left( \varepsilon - T \frac{d\varepsilon}{dT} \right) = \Delta H$$

$$\text{অথবা } \varepsilon = -\frac{\Delta H}{jF} + T \frac{d\varepsilon}{dT} \quad (5.37)$$

সমীকরণ (5.37) কে হেল্মহোল্টজ সমীকরণ বলা হয়।

যখন  $\frac{d\varepsilon}{dT} = 0$ ,  $\varepsilon = -\frac{\Delta H}{jF}$ ,  $\Delta H$  কে বিক্রিয়া তাপ নামে অভিহিত করা হয়। কোষের ভিতর

রাসায়নিক বিক্রিয়ায় উদ্ভূত তাপই  $\Delta H$  এর সমান হবে। সুতরাং যখন  $\frac{d\varepsilon}{dT} = 0$ ,  $\Delta H = -jF\varepsilon$  অর্থাৎ

বিক্রিয়া দ্বারা উদ্ভূত তাপ কোষ দ্বারা কৃতকার্যের সমান হয়।

ড্যানিয়েল কোষের ক্ষেত্রে  $\frac{d\varepsilon}{dT} \approx 0$ । তামা ও দস্তা উভয়ের ক্ষেত্রেই  $j=2$  এবং  $2F$  পরিমাণ

তড়িৎপ্রবাহের জন্য কোষের ভিতর মুক্ত তাপের পরিমাণ 50,130 ক্যালরি।

$$\text{সুতরাং ড্যানিয়েল কোষের তড়িচ্চালক বল } \varepsilon = \frac{50130 \times 4.18}{2 \times 96500} \approx 1.09 \text{ ভোল্ট}$$

যদি  $\frac{d\varepsilon}{dT} > 0$  হয় তবে,  $\varepsilon > -\frac{\Delta H}{jF}$  (সমীকরণ (5.37) থেকে পাই)।

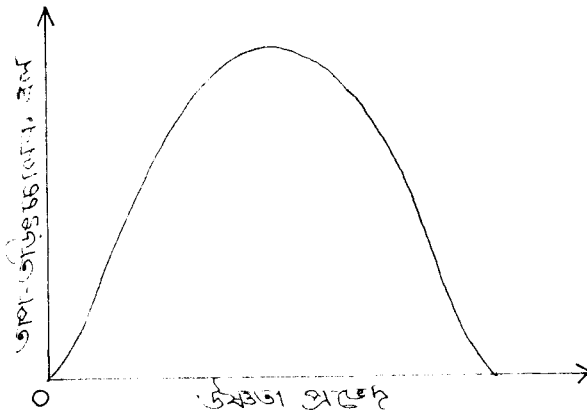
সুতরাং বিক্রিয়া থেকে উৎপন্ন তাপ তড়িৎপ্রবাহ পাঠানোর জন্য প্রয়োজনীয় কার্যের চেয়ে কম হয়। এর ফলে কোষের আন্তরশক্তি ব্যয় করে শক্তি সরবরাহ করা হয় এবং কোষটি ঠাণ্ডা হয়।

যদি  $\frac{d\varepsilon}{dT} < 0$  হয় তবে  $\varepsilon < \frac{-\Delta H}{jF}$ । সুতরাং এক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় আভ্যন্তরীণ রাসায়নিক বিক্রিয়ায়

উদ্ভূত তাপ কোষের প্রয়োজনীয় কার্যের চেয়ে বেশি হয়। এর ফলে কোষটি উত্তপ্ত হয়। হেল্মহোল্টজ সমীকরণের আর একটি প্রয়োগ হল, এটি বিক্রিয়ায় উদ্ভূত তাপ H পরিমাপ করতে সাহায্য করে।

(c) তাপতড়িৎ ক্রিয়া — তাপতড়িৎ ক্রিয়া তাপশক্তি থেকে তড়িৎশক্তিতে রূপান্তরের একটি উদাহরণ। এই ক্রিয়াকে সাধারণত তিনটি ভাগে ভাগ করা হয়। এই অনুচ্ছেদে আমরা এই তিনটি ভাগ সম্পর্কে আলোচনা করব। এই ক্রিয়ার আণুবীক্ষণিক কারণ সম্পর্কিত কোনো ব্যাখ্যা আমরা করবনা। তাপতড়িৎক্রিয়া ও তাপগতিবিদ্যার পারস্পরিক সম্পর্কই হবে এই অনুচ্ছেদের উপজীব্য বিষয়।

(1) সিবেক ক্রিয়া — দুটি ভিন্ন পদার্থের তৈরি একটি তাপযুগ্মের দুই প্রান্ত যদি বিভিন্ন উষ্ণতায় রাখা হয় তবে এই তাপযুগ্ম দ্বারা গঠিত বন্ধবর্তনীতে তড়িৎপ্রবাহ হবে। এই তড়িৎপ্রবাহ ব্যাখ্যা করা যায় যদি তাপযুগ্মের সন্ধিস্থানে একটি তাপ-তড়িচ্চালক বলের উপস্থিতি কল্পনা করা যায়। এই তড়িচ্চালক বলের মান ও দিক নির্ধারণ ধাতব পরিবাহীর ইলেকট্রন-তত্ত্বের ওপর নির্ভরশীল। এই বলের মান ও দিক তাপযুগ্মের পদার্থদুটির ধর্ম ও সন্ধিস্থানের উষ্ণতার ওপর নির্ভর করে। বর্তনীতে মোট তড়িচ্চালক বল তাপযুগ্মের দুটি প্রান্তে উপস্থিত দুটি তাপ তড়িচ্চালক বলের লব্ধির সমান। চিত্র 5.3 এ সন্ধিদুটির উষ্ণতার প্রভেদের সঙ্গে তাপ-তড়িচ্চালক বলের পরিবর্তন দেখানো হল।



চিত্র — 5.3 উষ্ণতা প্রভেদের সঙ্গে তাপ-তড়িচ্চালক বলের পরিবর্তনের রেখচিত্র।

(2) পেন্টিয়ার ক্রিয়া — যদি একটি তাপযুগ্মের দুই প্রান্তকে একই উষ্ণতায় রেখে বর্তনীতে তড়িৎপ্রবাহ পাঠানো হয় তবে একটি প্রান্ত উত্তপ্ত ও অন্যটি শীতল হয়। তাপযুগ্মের যে প্রান্তটিকে উত্তপ্ত করলে সিবেক ক্রিয়ার জন্য উৎপন্ন তড়িৎপ্রবাহ বাইরের কোষ দ্বারা পাঠানো প্রবাহের একই দিকে হয় সেই প্রান্তটি শীতল হয় (অর্থাৎ সেই প্রান্ত থেকে তাপ গৃহীত হয়) ও অন্যপ্রান্ত উত্তপ্ত হয় (অর্থাৎ সেই প্রান্তে তাপ বর্জিত হয়)। বাইরের প্রবাহের দিক পরিবর্তন হলে পূর্বের উত্তপ্ত সন্ধি শীতল ও শীতল সন্ধিটি উত্তপ্ত হবে। এই উৎক্রমণীয় ঘটনাটিকে পেন্টিয়ার ক্রিয়া বলে। কোনো সন্ধিস্থানের পেন্টিয়ার তড়িচ্চালক বল  $\pi$  হলে ওই প্রান্ত দিয়ে  $i$  তড়িৎপ্রবাহ হলে একক সময়ে গৃহীত বা বর্জিত তাপের পরিমাণ  $\pi i$ । পেন্টিয়ার সহগ  $\pi$  ধাতুর উপাদান ও সন্ধিস্থানের উষ্ণতার ওপর নির্ভরশীল। তাপযুগ্মের দুপ্রান্তে তড়িচ্চালক বল দুটি বিপরীতমুখী। যদি উষ্ণ ও শীতল প্রান্তদ্বয়ে পেন্টিয়ার বল যথাক্রমে  $\pi_2$  ও  $\pi_1$  হয় তবে মোট লব্ধি তড়িচ্চালক বল  $e = \pi_2 - \pi_1$ । উপরন্তু জুল ক্রিয়ার জন্য উদ্ভূত তাপের পরিমাণ একক সময়ে  $i^2 R$  এর সঙ্গে সমানুপাতিক ও এই কারণে অনুৎক্রমণীয়।  $i$  খুব ছোট হলে জুল প্রক্রিয়াকে উপেক্ষা করা যায় এবং পদ্ধতিটি তখন উৎক্রমণীয় হয়। পেন্টিয়ার প্রক্রিয়াকে একটি উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের কার্যপ্রণালীর সাথে তুলনা করা যায় যা উত্তপ্ত প্রান্ত (উষ্ণতা =  $T_2^\circ\text{K}$ ) থেকে  $\pi_2 i$  হারে তাপ গ্রহণ করে ও শীতল প্রান্তে (উষ্ণতা =  $T_1^\circ\text{k}$ )  $\pi_1 i$  হারে তাপ বর্জন করে। উৎক্রমণীয় ইঞ্জিনের কার্যনীতি অনুসারে

$$\frac{\pi_2 i}{\pi_1 i} = \frac{T_2}{T_1}$$

বর্তনীতে পেন্টিয়ার ক্রিয়ার জন্য কার্যকরী তড়িচ্চালক বল

$$e = \pi_2 - \pi_1 = \pi_1 \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \quad (5.38)$$

সুতরাং পেন্টিয়ার ক্রিয়ার জন্য তড়িচ্চালক বল উষ্ণতার পার্থক্য  $T_2 - T_1$  এর সঙ্গে সমানুপাতিক। কিন্তু তড়িচ্চালক বলের উষ্ণতার সঙ্গে পরিবর্তন লক্ষ্য করলেই বোঝা যাবে যে, এই বল উষ্ণতার প্রভেদের সঙ্গে সমানুপাতিক নয়।

লর্ড কেলভিন তখন এই সিদ্ধান্তে পৌঁছান যে, পেন্টিয়ার তড়িচ্চালক বলই বর্তনীতে একমাত্র ক্রিয়াশীল বল নয়। একটি পরিবাহীর ভিতরে বিভিন্ন অঞ্চলের উষ্ণতার বৈষম্যের জন্য তিনি একটি তড়িচ্চালক বলের অস্তিত্ব কল্পনা করেন। এই বল থমসন বল নামে খ্যাত। যদি  $\sigma$  থমসন গুণাঙ্ক হয় তবে প্রতি একক উষ্ণতার প্রভেদের জন্য থমসন বলের পরিমাণ  $\sigma$  হবে, পরিবাহীর দুপ্রান্তের মধ্যে ক্রিয়াশীল

থমসন বল =  $\int_{T_1}^{T_2} \sigma dT$ , যেখানে  $T_1$  ও  $T_2$  দুপ্রান্তের উষ্ণতা। যদি এই বিভব প্রভেদের অভিমুখ কম

উষ্ণতা থেকে বেশি উষ্ণতার দিকে হয় তবে  $\sigma$  কে ধনাত্মক ও বিপরীতমুখী হলে  $\sigma$  কে ঋণাত্মক ধরা হয়।  $\sigma$  ধাতুর উপাদান ও গড় উষ্ণতার ওপর নির্ভরশীল। যদি থমসন ক্রিয়ার জন্য তড়িৎপ্রবাহ বাইরের তড়িৎচালক বলের অভিমুখে হয় তবে তাপ ধাতু থেকে গৃহীত হয় এবং তড়িৎপ্রবাহ বাইরের তড়িৎচালক বলের বিপরীতমুখী হলে ধাতু থেকে তাপ বর্জিত হয়। স্পষ্টতই থমসন ক্রিয়া উৎক্রমণীয়। চিত্রে প্রদর্শিত বর্তনীতে পেন্টিয়ার ও থমসন ক্রিয়ার জন্য মোট তড়িৎচালক বল

$$e = \pi_2 - \pi_1 + \int_1^2 (\sigma_B - \sigma_A) dT \quad (5.39)$$

সন্ধিদ্ধয় ও পরিবাহীতে যে তাপ বিনিময় হবে তা হল,

$$(1) T + dT \text{ উষ্ণতার প্রান্ত থেকে গৃহীত তাপ} = \left( \pi + \frac{d\pi}{dT} dT \right) dq$$

$$(2) \text{পরিবাহী A তে হস্তান্তরিত তাপ} = \sigma_A dT dq$$

$$(3) T \text{ উষ্ণতার প্রান্তে বর্জিত তাপ} = \pi dq$$

$$(4) \text{পরিবাহী B তে হস্তান্তরিত তাপ} = \sigma_B dT dq$$

পরিবাহীর প্রবাহমাত্রা, প্রবাহকাল ও রোধ কম হলে অনুৎক্রমণীয় জুল তাপের পরিমাণ কম হয়। উৎক্রমণীয় চক্রে দ্বিতীয় সূত্র ব্যবহার করে পাই,

$$\frac{\left( \pi + \frac{d\pi}{dT} dT \right) dq}{T + dT} - \frac{\sigma_A dT dq}{T + \frac{dT}{2}} - \frac{\pi dq}{T} + \frac{\sigma_B dT dq}{T + dT/2} = 0$$

$dT \ll T$  হলে আমরা লিখতে পারি,

$$\left( T \frac{d\pi}{dT} - \pi \right) / T^2 = (\sigma_A - \sigma_B) / T$$

$$\text{অথবা } \frac{d\pi}{dT} - \pi/T = \sigma_A - \sigma_B$$

$$\text{অথবা, } \sigma_A - \sigma_B = T \frac{d}{dT} \left( \frac{\pi}{T} \right) \quad (5.40)$$

ধরা যাক, একটি তাপযুগ্মের দুটি প্রান্ত  $T_1^{\circ}k$  ও  $T_2^{\circ}k$  উষ্ণতায় আছে এবং এই যুগ্মের ভিতর দিয়ে  $dq$  পরিমাণ আধান প্রবাহিত হয়। তাপযুগ্মটিকে অসীম সংখ্যক ছোট ছোট তাপযুগ্মের সমষ্টি হিসাবে কল্পনা করতে পারি। এই তাপযুগ্মগুলির সন্ধিস্থলের উষ্ণতা  $T_1$  থেকে  $T_2$  পর্যন্ত আছে। প্রতিটি ক্ষুদ্র তাপযুগ্মের জন্য আমরা উৎক্রমণীয় কার্নো ইঞ্জিনের সূত্র ব্যবহার করতে পারি। এইভাবে প্রতিটি অণু কার্নো ইঞ্জিনের জন্য আমরা (5.40) সমীকরণের সদৃশ একটা সমীকরণ পাব। সবগুলি সমীকরণ যোগ করলে সমগ্র তাপযুগ্মটির জন্য আমরা লিখতে পারি,

$$\frac{\pi_2}{T_2} - \frac{\pi_1}{T_1} - \int_1^2 \frac{(\sigma_A - \sigma_B)}{T} dT = 0 \quad (5.41)$$

যেহেতু সমগ্র তাপযুগ্মটিতে ক্রিয়াশীল বল অণুযুগ্মগুলিতে সক্রিয় তড়িচ্চালক বলগুলির সমষ্টি, আমরা লিখতে পারি যে, 1 নং (প্রথম) এবং 2 নং (শেষ) প্রান্তদুটির মধ্যে বর্তমান তাপ-তড়িচ্চালক বল

$$= \int_1^2 \frac{de}{dT} dT = \pi_2 - \pi_1 - \int_1^2 (\sigma_A - \sigma_B) dT \quad (5.42)$$

$$\text{অথবা, } \frac{de}{dT} = \frac{d\pi}{dT} - (\sigma_A - \sigma_B) \quad (\text{যেহেতু } \pi_2 - \pi_1 = \int_1^2 \frac{d\pi}{dT} dT \text{ এবং যে কোনো উষ্ণতায় } T_1$$

ও  $T_2$  এর জন্য (5.42) প্রযোজ্য)।

সমীকরণ (5.40) ব্যবহার করে আমরা পাই,

$$\frac{de}{dT} = \frac{d\pi}{dT} - T \frac{d}{dT} \left( \frac{\pi}{T} \right)$$

$$= \frac{d\pi}{dT} - T \left[ \frac{1}{T} \frac{d\pi}{dT} - \frac{\pi}{T^2} \right]$$

$$= \frac{\pi}{T}$$

$$\text{বা } \pi = T \frac{de}{dT}$$

(5.43)

(5.41), (5.42) ও (5.43) সমীকরণত্রয় তাপযুগ্ম বিশ্লেষণে ব্যবহৃত হয়।

বাস্তবে তাপতড়িৎক্রিয়া একটি অনুৎক্রমণীয় ঘটনা। কারণ উষ্ণতার বৈষম্যের জন্য তাপ পরিবহন এবং তড়িৎপ্রবাহের জন্য জুল-তাপ উপেক্ষা করা যায় না। তড়িৎপ্রবাহ ও তাপপ্রবাহকে যৌথভাবে বিবেচনা করে অসাম্যাবস্থা-তাপগতিতত্ত্বের (যা আমাদের আলোচনার বাইরে) সূত্র প্রয়োগ করেও তাপতড়িৎক্রিয়ার সম্পর্কগুলিতে উপনীত হওয়া যায়।

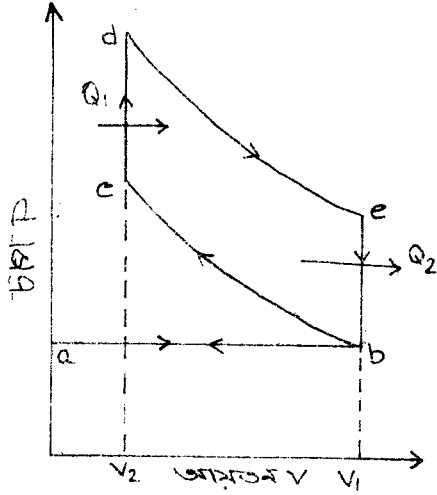
**d) তাপ-ইঞ্জিন** — তাপ ইঞ্জিন তাপশক্তিকে যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তরের একটি উদাহরণ। এর মূল কার্যনীতি দ্বিতীয় সূত্র আলোচনার প্রারম্ভে সংক্ষেপে ব্যাখ্যা করা হয়েছে। প্রচলিত ইঞ্জিনগুলিতে একটি গ্যাস বা একাধিক গ্যাসের মিশ্রণকে কয়েকটি তাপগতীয় পরিবর্তনের মাধ্যমে একটি চক্রাকার আবর্তন করানো হয়। এর জন্য গ্যাসটিকে উচ্চ উষ্ণতায় উত্তপ্ত করা হয় এবং তাপগতীয় প্রক্রিয়াগুলির ফলে গ্যাস কার্য করে। দু'ধরনের ইঞ্জিন প্রচলিত আছে —

(1) **অন্তর্দহন ইঞ্জিন** — এখানে দহন প্রক্রিয়াটি গ্যাস পাত্রের ভিতর হয় যেমন, পেট্রোল বা ডিজেল ইঞ্জিন। (2) **বহির্দহন ইঞ্জিন** — এখানে দহন প্রক্রিয়া গ্যাস পাত্রের বাইরে সম্পন্ন হয় — যেমন, বাষ্প ইঞ্জিন। এখানে আমরা দু-প্রকারের অন্তর্দহন ইঞ্জিন সম্পর্কে আলোচনা করব। অটো চক্র ও ডিজেল চক্র। এইগুলি যথাক্রমে পেট্রোল ইঞ্জিন ও ডিজেল ইঞ্জিনের আদর্শ রূপ। এখানে দহনের জন্য রাসায়নিক গঠনের পরিবর্তন অথবা ইঞ্জিনের কার্যে যে সমস্ত অনুৎক্রমণীয় ঘটনা ঘটে সেগুলি আমরা উপেক্ষা করব। (উদাহরণস্বরূপ, ঘর্ষণজনিত বল অনুপস্থিত ধরা হবে)। কার্যকরী পদার্থ দুটি ইঞ্জিনের ক্ষেত্রেই বায়ু যা আদর্শ গ্যাসের সূত্র মানে ধরব। ইঞ্জিনের তাপগতীয় পরিবর্তনে তাপগতীয় সাম্যাবস্থা বজায় আছে মনে করি। এই অবস্থায় কার্যকরী পদার্থের তাপগতীয় অবস্থার পরিবর্তন রেখচিত্রে নির্দেশ করা যায়।

**(i) অটো-চক্র** — অটো চক্র যোহেতু ডিজেল ইঞ্জিনের আদর্শ রূপ, সেই কারণে আমরা ডিজেল ইঞ্জিনের প্রক্রিয়াগুলি আলোচনা করব। (a) **জ্বালানী গ্রহণের ঘাত** — গ্যাসোলিন বাষ্প ও বায়ুর মিশ্রণকে দহন-প্রকোষ্ঠে প্রবেশ করানো হয়। এই প্রকোষ্ঠে বাষ্প এবং বায়ুর মিশ্রণ বাইরের বায়ুমণ্ডলের চেয়ে বেশি চাপে থাকে। এই প্রক্রিয়াটিকে 5.4 (a) চিত্রে  $a \rightarrow b$  পথ দ্বারা সূচিত হয়।  $a \rightarrow b$  পথে

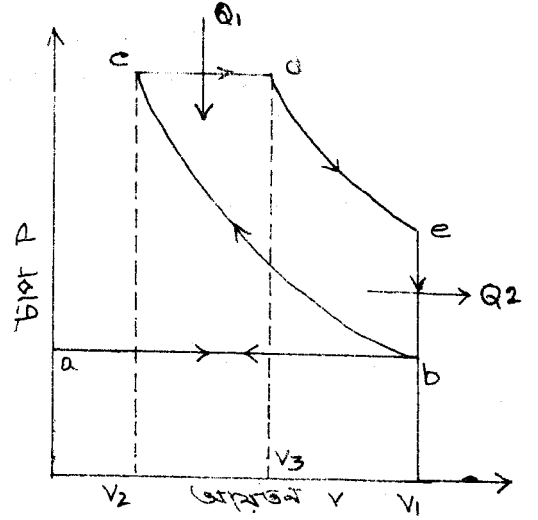


চাপ বায়ুমণ্ডলের চাপের সমান ও পদ্ধতিটি আপাত স্থির থাকে ধরি। বায়ুকে আদর্শ গ্যাস কল্পনা করার জন্য উষ্ণতা আয়তন পরিবর্তন  $P_0 V = nR\theta$  দ্বারা নির্দেশিত হয়। যেখানে  $P_0$  বায়ুমণ্ডলের চাপ ও  $\theta$  বাইরের বায়ুর উষ্ণতা।



অটো চক্র

চিত্র — 5.4(a) অটো চক্র



ডিজেল চক্র

চিত্র — 5.4(b) ডিজেল চক্র

(b) সংনমন ঘাত —  $b \rightarrow c$  পথটি  $n$  মোল বায়ুর আপাতস্থির রুদ্ধতাপ সংনমনকে নির্দেশ করে। তাপগতীয় সাম্যাবস্থাতে উষ্ণতাবৃদ্ধি সমীকরণ  $\theta_b V_1^{\gamma-1} = \theta_c V_2^{\gamma-1}$  দ্বারা বোঝানো যাবে, যেখানে  $\gamma$  স্থির চাপ ও স্থির আয়তনে আপেক্ষিক তাপের অনুপাত।

(c) দহন ও বিস্ফোরণ — এই প্রক্রিয়াটি  $c \rightarrow d$  পথ দ্বারা সূচিত হয়। এই পদ্ধতিতে  $b \rightarrow c$  পথে সংনমিত  $n_1$  মোল বায়ুর উৎক্রমণীয়ভাবে স্থির আয়তনে উষ্ণতা ও চাপের পরিবর্তন হয়। এই উষ্ণতা চাপ পরিবর্তন ( $c \rightarrow d$  রেখা দিয়ে বোঝানো হয়েছে) আদর্শ গ্যাসের সূত্র অনুসারে হয়। এই পদ্ধতিতে তন্ত্র  $Q_1$  পরিমাণ তাপ পারিপার্শ্বিক থেকে গ্রহণ করে।

(d) প্রসারণ বা কার্যকরী ঘাত —  $d \rightarrow e$  পথটি  $n_1$  মোল বায়ুর আপাতস্থির রুদ্ধতাপ প্রসারণ নির্দেশ করে। এই পদ্ধতিতে তাপশক্তি যান্ত্রিক শক্তিতে পরিণত হয় ও ইঞ্জিন কার্য করে। উষ্ণতার হ্রাস  $\theta_d V_2^{\gamma-1} = \theta_e V_1^{\gamma-1}$  সূত্র দ্বারা পরিচালিত হয়।

(e) আংশিক বিতাড়ন ঘাত — এই প্রক্রিয়াটি  $e \rightarrow b$  পথ দ্বারা সূচিত হয়। এক্ষেত্রে  $n_1$  মোল বায়ুর আপাতস্থিরভাবে স্থির আয়তন পরিবর্তন হয়। এর ফলে চাপ ও উষ্ণতা কমে। এই পদ্ধতিতে তন্ত্র  $Q_2$  তাপ বর্জন করে।

(f) বিতাড়ন ঘাত — এই পর্যায়েটি  $b \rightarrow a$  পথ দ্বারা সূচিত হয়। এই পদ্ধতিতে দৃশ্যবশিষ্ট বায়ু ও পেট্রল বাষ্পের মিশ্রণ নির্গম নলের ভিতর দিয়ে নির্গত হয়।  $b \rightarrow a$  পথটি আপাতস্থিরভাবে স্থিরচাপে নির্গমন নির্দেশ করে। উষ্ণতা স্থির থাকে, আয়তন ও মোল সংখ্যা আদর্শ গ্যাসের সূত্র অনুসারে প্রারম্ভিক মানে ফিরে যায়। ইঞ্জিনটি পরবর্তী চক্র আরম্ভ করার জন্য প্রস্তুত হয়।

$$c \rightarrow d \text{ পথে গৃহীত তাপ } Q_1 = \int_c^d C_v d\theta = C_v(\theta_d - \theta_c)$$

$$e \rightarrow b \text{ পথে বর্জিত তাপ } Q_2 = - \int_{\theta_c}^{\theta_b} C_v d\theta = C_v(\theta_c - \theta_b)$$

যেখানে  $C_v$  ধ্রুবক ধরি।

$$\text{সুতরাং অটো চক্রের দক্ষতা } \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \left( \frac{\theta_c - \theta_b}{\theta_d - \theta_c} \right)$$

$b \rightarrow c$  ও  $d \rightarrow e$  পথ দুটি রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়া নির্দেশ করে,

$$\theta_b V_1^{\gamma-1} = \theta_c V_2^{\gamma-1} \quad (5.45)$$

$$\theta_c V_1^{\gamma-1} = \theta_d V_2^{\gamma-1} \quad (5.46)$$

$$\text{সুতরাং } (\theta_b - \theta_c) V_1^{\gamma-1} = (\theta_c - \theta_d) V_2^{\gamma-1}$$

$$\text{বা, } \frac{\theta_c - \theta_b}{\theta_d - \theta_c} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}$$

$$\text{বা, দক্ষতা } \eta = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}} \quad (5.47)$$

$$(5.45) \text{ ও } (5.46) \text{ সমীকরণদ্বয় থেকে লিখতে পারি, } \frac{\theta_b}{\theta_c} = \frac{\theta_c}{\theta_d} \text{ এবং } \frac{\theta_b}{\theta_c} = \frac{\theta_c}{\theta_d} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}$$

$$\text{সুতরাং অটোচক্রের যান্ত্রিক দক্ষতা } \eta = 1 - \frac{\theta_b}{\theta_c} = 1 - \frac{\theta_c}{\theta_d}$$

চক্রের ন্যূনতম উষ্ণতা  $\theta_b$  ও চরম উষ্ণতা  $\theta_d$ । এই দুটি উষ্ণতার মধ্যে কার্যরত কার্নো-চক্রের দক্ষতা  $\eta' = 1 - \frac{\theta_b}{\theta_d}$ । সুতরাং  $\eta < \eta'$ , এর কারণ, অটোচক্রে তাপ গ্রহণ ও বর্জন নির্দিষ্ট উষ্ণতায় হয় না।

(ii) ডিজেল চক্র — ডিজেল চক্রের কার্যপ্রণালী অটোচক্রের অনুরূপ। প্রভেদ শুধু, এই চক্রে (যা ডিজেল ইঞ্জিনের কার্যের আদর্শ রূপ) জ্বালানী গ্রহণ খাতে বায়ুকে বাইরের থেকে নেওয়া হয়। এই বায়ুকে রুদ্ধতাপ সংনমন প্রক্রিয়ায় উত্তপ্ত করা হয় যতক্ষণ না এর উষ্ণতা ডিজেল জ্বালানীর দহন উষ্ণতায় পৌঁছয়। পরে জ্বালানী তেল মিশ্রিত করে সমচাপে দহন করা হয়। অর্থাৎ অটোচক্রে যেখানে তাপগ্রহণ স্থির আয়তনে হয় সেখানে ডিজেল চক্রে তাপগ্রহণ স্থির চাপে হয়। চিত্রে  $a \rightarrow b$ ,  $b \rightarrow c$ ,  $d \rightarrow e$ ,  $e \rightarrow b$ ,  $b \rightarrow a$  অটোচক্রের মতো যথাক্রমে জ্বালানী গ্রহণ, রুদ্ধতাপ সংনমন, রুদ্ধতাপ প্রসারণ (কার্যকরী খাত), স্থির আয়তন পরিবর্তন (আংশিক বিতাড়ন ঘাত) ও বিতাড়ন ঘাত বোঝাবে।  $c \rightarrow d$  স্থির চাপে তাপগ্রহণ নির্দেশ করে।

$$c \rightarrow d \text{ পথে গৃহীত তাপ } Q_1 = \int_{\theta_c}^{\theta_d} C_p d\theta = C_p(\theta_d - \theta_c)$$

$$e \rightarrow b \text{ পথে বর্জিত তাপ } Q_2 = C_v(\theta_c - \theta_b)$$

$$\text{কার্যকরী দক্ষতা } \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{(\theta_c - \theta_b)}{(\theta_d - \theta_c)} \quad (5.48)$$

রুদ্ধতাপ প্রসারণের অবস্থা সমীকরণ ব্যবহার করে আমরা লিখতে পারি

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{\left(\frac{1}{\gamma_E}\right)^\gamma - \left(\frac{1}{\gamma_C}\right)^\gamma}{\left(\frac{1}{\gamma_E} - \frac{1}{\gamma_C}\right)} \right], \text{ যেখানে } \gamma_E = \frac{V_c}{V_d}, \gamma_C = \frac{V_b}{V_c}$$

এখানেও প্রমাণ করা যায় যে, অটোচক্রের মতো ডিজেল চক্রের কার্যকরী দক্ষতাও চক্রের অবম ও চরম উষ্ণতা দুটির মধ্যে ক্রিয়াশীল কার্নো-ইঞ্জিনের দক্ষতার থেকে কম। যদিও ডিজেল চক্রকে উৎক্রমণীয় ধরা হয়েছে। উৎক্রমণীয় কার্নো চক্রের দক্ষতার থেকে এর দক্ষতা কম হবার কারণ এই চক্রের তাপগ্রহণ ও তাপবর্জন প্রক্রিয়া দুটি কার্নো ইঞ্জিনের মতো স্থির উষ্ণতায় হয়না। এই চক্রে তাপগ্রহণ পদ্ধতিটি স্থির চাপে ও তাপবর্জন স্থির আয়তনে সম্পন্ন হয়। সুতরাং দুটি ইঞ্জিনের কার্যপ্রণালীর পার্থক্যগুলি নিম্নরূপ

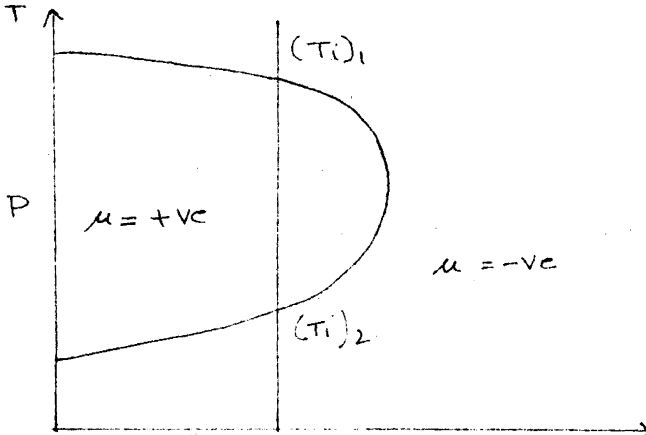
- 1) ডিজেল চক্রে চালিত ইঞ্জিনের দক্ষতা অটো চক্র অপেক্ষা বেশি।
- 2) অটো চক্রে সংনমন একটি সীমা অতিক্রম করলে স্পার্ক পাঠাবার আগেই গ্যাস মিশ্রণে বিস্ফোরণ পারে, ডিজেল চক্রে এ ঘটনা দেখা যায় না।
- 3) অটো চক্রে তাপগ্রহণ ও তাপবর্জন স্থির আয়তনে ঘটে কিন্তু ডিজেল চক্রে ওরা স্থির চাপে ঘটে। যদিও চেম্বারের আয়তন বেশি হয়ে যাওয়ার সম্ভাবনা রুখতে ডিজেল চক্রে তাপ স্থির আয়তনেই বর্জন করা হয় (5.4(b) চিত্রে eb পথে)।
- 4) বাইরে থেকে স্পার্ক এর সাহায্যে গ্যাসের দহন অটোচক্রে ঘটানো হয়। কিন্তু ডিজেল চক্রে সংনমন সম্পূর্ণ হওয়ার পর জ্বালানীর সাহায্যে গ্যাসের দহন হয়।

5) ডিজেল ইঞ্জিনের আকার ও চাপ সহ্যের ক্ষমতা অটো ইঞ্জিন অপেক্ষা বেশি।

2) জুল থমসন প্রক্রিয়া — গে লুসাক ও জুলের পরীক্ষা (যা 3 নং এককে আলোচিত হয়েছে) থেকে দেখা গেছে যে রুদ্ধতাপ মুক্ত প্রসারণে গ্যাসের উষ্ণতার কোনো পরিবর্তন হয়না। আদর্শ গ্যাসের অণুগুলির ভিতর আকর্ষণ শূন্য, কাজেই রুদ্ধতাপ মুক্ত প্রসারণে আদর্শ গ্যাস কোনো কার্য করে না। এই কারণে গ্যাসের আন্তরশক্তির কোনো পরিবর্তন হয়না। যেহেতু আদর্শ গ্যাসের আন্তরশক্তি কেবলমাত্র গতিশক্তির প্রকাশ। আবার গ্যাসের গতিতত্ত্ব অনুযায়ী গতিশক্তি যেহেতু উষ্ণতার পরিমাপ, সেই কারণে আদর্শ গ্যাসের আন্তরশক্তি স্থির থাকলে উষ্ণতা অপরিবর্তিত থাকবে। কিন্তু বাস্তব গ্যাসের ক্ষেত্রে যেহেতু অণুগুলির ভিতর আকর্ষণ বল বর্তমান, সেইজন্য প্রসারণে উষ্ণতার পরিবর্তন হওয়া স্বাভাবিক। কিন্তু উষ্ণতার পরিবর্তন সামান্য হওয়ার জন্য তা সাধারণ উষ্ণতামাপক যন্ত্রে ধরা পড়ে না, হয়তো গে - লুসাক

ও জুলের পরীক্ষায় ব্যবহৃত উষ্ণতামাপক যন্ত্রটি খুব সঠিক ছিল না বলেই এই উষ্ণতার তারতম্য মাপা যায়নি। পরে জুল থমসনের পরীক্ষায় একটি উচ্চচাপে সংনমিত গ্যাসকে নিম্নচাপের বিরুদ্ধে প্রসারিত করিয়ে কার্য করানো হয়। এই পরীক্ষায় গ্যাসের উষ্ণতার পরিবর্তন লক্ষ্য করা যায়। নীচে সংক্ষেপে এই পরীক্ষা সম্পর্কে আলোচনা করা হল।

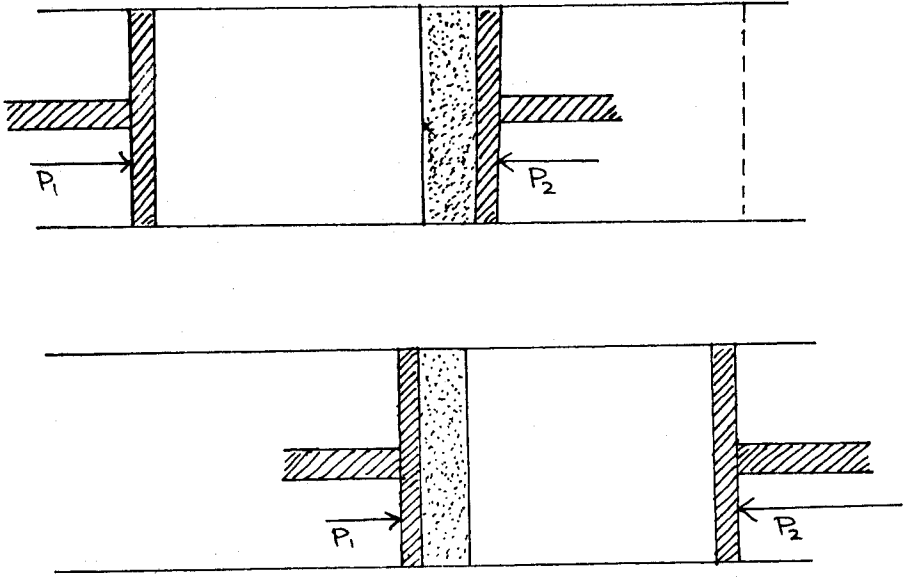
উচ্চচাপে গ্যাসকে প্রথমে তাপস্থাপিতে নিমজ্জিত তামার সর্পিল নলের মধ্যে পাঠানো হয়। এই তাপস্থাপির উষ্ণতা ইচ্ছামত নিয়ন্ত্রণ করে গ্যাসকে যে কোনো উষ্ণতায় রাখা যায়। সর্পিল নল থেকে বের হয়ে গ্যাস মূল নল A তে প্রবেশ করে (চিত্র 5.5) এবং ওপরের দিকে ওঠে। মূল নলের কিছু অংশে দুটি তারের জালির মধ্যে সিল্ক বা তুলা আটকানো আছে (B অংশ)। এটিই সচ্ছিদ্র ঢাকনির কাজ করে। নলের এই অংশকে ঘিরে রয়েছে মোটা টিনের নল C। দুটি নলের অন্তর্বর্তী স্থান তাপ কুপরিবাহী বস্তু যেমন অ্যাসবেস্টস দ্বারা ভর্তি। এটি তাপস্থাপি থেকে তাপ পরিবহন বন্ধ করে। সচ্ছিদ্র ঢাকনিকে গ্যাস অতিক্রম করার আগে ও পরে ওর উষ্ণতা  $R_1$  ও  $R_2$  দ্বারা মাপা হয়। সর্পিল নলের সঙ্গে যুক্ত গেজের সাহায্যে গ্যাসের প্রারম্ভিক চাপ  $P_1$  মাপা হয়। অন্তিম চাপ বায়ুমণ্ডলীয় চাপের সমান। এই পরীক্ষার তত্ত্ব নিম্নলিখিত সরল পরীক্ষা ব্যবস্থার কল্পনা থেকে ব্যাখ্যা করা যায়।



চিত্র — 5.5 জুল পরীক্ষা ব্যবস্থা

একটি তাপ-অন্তরক দেয়াল বিশিষ্ট কোনো স্তম্ভককে সচ্ছিদ্র ছিপি দ্বারা দুভাগে বিভক্ত করা হয় (চিত্র 5.6 দ্রষ্টব্য)। ছিপিটির বাঁদিকে একটি পিস্টন দ্বারা আবদ্ধ গ্যাস আছে। ছিপিটির ডানদিকে অপর একটি পিস্টন আটকানো আছে। ধরা যাক, বাঁদিকের ও ডানদিকের পিস্টন দুটি যথাক্রমে  $P_1$  ও  $P_2$  চাপ দেয় ( $P_1 > P_2$ ) এবং বাঁদিকের গ্যাস  $V_1$  আয়তন অধিকার করে। বাঁদিকের পিস্টন দ্বারা সংনমিত গ্যাস ছিপির ভিতর দিয়ে প্রসারিত হয়।

$$\text{পিস্টন দ্বারা গ্যাসের ওপর কৃতকার্য} = \int PdV = P_1 V_1$$



চিত্র — 5.6 জুল থমসন প্রক্রিয়ার প্রাথমিক ও অন্তিম অবস্থা

(প্রসারণ ও সংনমনের সময় চাপ ধ্রুবক ধরি) ডানদিকের পিস্টনের চাপের বিরুদ্ধে প্রসারিত গ্যাস

দ্বারা মোট কৃতকার্য =  $P_2 V_2$

সুতরাং, মোট কৃতকার্য =  $P_2 V_2 - P_1 V_1 = U_1 - U_2$  যেহেতু তাপ-অন্তরিত অবস্থায়

$$\Delta W = -\Delta U$$

সুতরাং,  $U_1 + P_1 V_1 = U_2 + P_2 V_2$

অর্থাৎ, প্রারম্ভিক ও অন্তিম সাম্যাবস্থায় গ্যাসের এনথালপি  $H = U + PV$  ধ্রুবক থাকে।

$$\text{জুল-থমসন গুণাঙ্ক } \mu = \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = - \left( \frac{\partial T}{\partial H} \right)_P \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T$$

$$\text{এখন, } \left( \frac{\partial T}{\partial H} \right)_P = \frac{1}{\left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P} = \frac{1}{C_P} \quad [\because dH = dU + PdV + VdP = dQ \text{ যখন } dP = 0]$$

$$\text{সুতরাং, } \mu = -\frac{1}{C_p} \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{C_p} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_T + \frac{\partial}{\partial P} (PV)_T \right]$$

( $\mu < 0$  হলে গ্যাসটি উত্তপ্ত ও  $\mu > 0$  হলে গ্যাস শীতল হবে।)

দুটি সাম্যাবস্থার মধ্যে উৎক্রমণীয় পরিবর্তনে  $dH = dU + PdV + VdP = TdS + VdP$ ।

যেহেতু জুল-থমসন প্রক্রিয়ায় H স্থির থাকে  $dH = 0$ ।

$$\text{বা, } Tds + VdP = T \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T dP \right] + VdP = 0$$

$$\therefore T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = C_p, \text{ আমরা পাই,}$$

$$C_p dT = \left[ T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P - V \right] dP \quad [ \because \text{ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ অনুসারে } \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P ]$$

$$\text{বা, } \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = \frac{1}{C_p} \left[ T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P - V \right] \quad (5.50)$$

আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে  $PV = nRT$  ব্যবহার করে পাই,

$$\mu = \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = 0$$

অর্থাৎ আদর্শ গ্যাসের জুল - থমসন পরীক্ষায় কোনো উষ্ণতার পরিবর্তন হয়না। কোনো বাস্তব গ্যাসের ক্ষেত্রে কোনো নির্দিষ্ট চাপে একটি উষ্ণতার (উৎক্রম উষ্ণতা) নীচে জুল - থমসন প্রক্রিয়ায় গ্যাসটির উষ্ণতা কমবে। সাধারণ তাপমাত্রায় হাইড্রোজেন, হিলিয়ামকে বাদ দিলে বাকি সব গ্যাসের জুল - থমসন প্রক্রিয়ায় উষ্ণতা হ্রাস হয়। হাইড্রোজেন ও হিলিয়ামের ক্ষেত্রে উৎক্রম উষ্ণতা যথাক্রমে  $-167^\circ\text{C}$

ও  $-254^{\circ}\text{C}$ । যেহেতু এই উষ্ণতাগুলি পরীক্ষাগারে স্বাভাবিক উষ্ণতার থেকে অনেক কম, সেইজন্য স্বাভাবিক উষ্ণতায় কোনো চাপেই এই দুটি গ্যাসকে জুল-থমসন প্রক্রিয়ার সাহায্যে শীতল করা যায় না। জুল-থমসন প্রক্রিয়ার আরও বিস্তৃত বিবরণ নিম্ন তাপমাত্রা সম্পর্কিত আলোচনায় পরে পাবেন। এই আলোচনায় ইতি টানার আগে একটি বিষয়ের দিকে পাঠকদের দৃষ্টি আকর্ষণ করছি।

$$\mu = -\frac{1}{C_P} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_T + \frac{\partial}{\partial P} (PV)_T \right]$$

সূত্রটি থেকে দেখা যাচ্ছে যে  $\mu$  দুটি রাশির সমষ্টি।

$$\left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_T \text{ এর মান [ আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে গে-লুসাক ও জুলের সূত্র থেকে } \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_T = 0 \text{ ] বাস্তব}$$

গ্যাসের জুলের সূত্র থেকে বিচ্যুতির পরিমাণ নির্দেশ করে। অনুরূপভাবে  $\frac{\partial}{\partial P} (PV)_T$  বয়েলের সূত্র থেকে

$$\text{বাস্তব গ্যাসের বিচ্যুতি নির্দেশ করে। } \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_T < 0 \text{ (পাঠকরা চিন্তা করলেই কারণ বার করতে পারবেন)}$$

কিন্তু  $\frac{\partial}{\partial P} (PV)_T$  ঋণাত্মক বা ধনাত্মক দুই-ই হতে পারে। দ্বিতীয় পদটির জন্যই কিছু গ্যাসের ক্ষেত্রে জুল-থমসন প্রক্রিয়ায় গ্যাসের উষ্ণতা বাড়ে।

$$\text{পরীক্ষার নির্দিষ্ট চাপ ও উষ্ণতায় } \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_T = -\frac{\partial}{\partial P} [PV]_T \text{ হলে } \mu = 0 \text{ হয় এবং ঐ অবস্থায়}$$

গ্যাসের উষ্ণতার কোনো পরিবর্তন হয় না। নির্দিষ্ট চাপে যে উষ্ণতায় এই শর্ত পালিত হয় তাকে উৎক্রম উষ্ণতা বলে। এই পরীক্ষায় ব্যবহৃত গ্যাস ভ্যান-ডার-ওয়ালসের সমীকরণ মেনে চললে আপনারা দেখবেন

নির্দিষ্ট চাপে দুটি উষ্ণতায়  $\mu = 0$  হবে।

$$1 \text{ gm অণু ভ্যান-ডার-ওয়াল গ্যাসের জন্য, } (P + a/v^2) (v - b) = RT$$

$$PV + \frac{a}{v} - Pb - \frac{ab}{v^2} = RT$$

$$\therefore \left( P - \frac{a}{v^2} + \frac{2ab}{v^3} \right) \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = R$$

$$\text{বা } \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{R}{P - \frac{a}{v^2} + \frac{2ab}{v^3}}$$



$$= \frac{RV^3(v-b)}{RTV^3 - 2a(v-b)^2} \quad (5.51)$$

সূত্রাং 5.50 সমীকরণ থেকে,

$$\begin{aligned} \therefore \mu &= \frac{1}{C_P} \left[ T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P - V \right] \\ &= \frac{1}{C_P} \left[ \frac{RTV^3(v-b)}{RTV^3 - 2a(v-b)^2} - v \right] \\ &= \frac{1}{C_P} \left[ \frac{2av(v-b)^2 - RTbv^3}{RTV^3 - 2a(v-b)^2} \right] \\ &= \frac{1}{C_P} \left[ \frac{2a/R T \left(1 - \frac{b}{v}\right)^2 - b}{1 - \frac{2a}{RTV} \left(1 - \frac{b}{v}\right)^2} \right] \end{aligned} \quad (5.52)$$

a ও b উভয়েই ক্ষুদ্র মানের, এই অবস্থায় T খুব বেশি হলে  $\mu$  এর আসন্ন মান

$$\mu \approx \frac{1}{C_P} \left( \frac{2a}{RT} - b \right) \quad (5.53)$$

$\therefore T_i = \frac{2a}{bR}$  হলে  $\mu = 0$  হয় অর্থাৎ  $T_i$  উৎক্রম উষ্ণতা এবং  $\frac{2a}{RT} < b$  হলে  $\mu$  ঋণাত্মক রাশি

অর্থাৎ গ্যাস উত্তপ্ত হয়।

অপরপক্ষে  $\frac{2a}{RT} > b$  হলে  $\mu$  ধনাত্মক হওয়ায় গ্যাস শীতল হয়।

কিন্তু এই আসন্ন মান না ধরলে 5.52 ব্যবহার করে পাই,

$$\mu = \frac{1}{C_P} \left[ \frac{\frac{2a}{RT}(1-b/v)^2 - b}{1 - \frac{2a}{RTV}(L - b/v)^2} \right]$$

অর্থাৎ  $\mu = 0$  যখন  $T_i = \frac{2a}{Rb} \left(1 - \frac{b}{v}\right)^2$

অতএব উৎক্রম উষ্ণতায় ভ্যান-ডার-ওয়ালস্ গ্যাসের চাপ ও আয়তনের সম্পর্ক

$$P = \frac{a}{b} \left( \frac{2}{v} - \frac{3b}{v^2} \right)$$

এটি  $V$  এর দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং নির্দিষ্ট চাপে  $\mu = 0$  হওয়ার জন্য গ্যাসের দুটি পৃথক আয়তন থাকতে পারে অর্থাৎ দুটি পৃথক উষ্ণতায়  $\mu = 0$  হয়। চিত্র (5.5a)।  $P$  কখনোই ঋণাত্মক নয়।  $P = 0$

হলে উৎক্রম উষ্ণতায়  $V = \alpha$  বা  $V = \frac{3b}{2}$

এখন  $V = \alpha$  হলে  $T_i = \frac{2a}{bR}$

এবং  $V = \frac{3b}{2}$  হলে  $T_i = \frac{2a}{9bR}$

চাপ বৃদ্ধিতে প্রথম  $T_i$  বৃদ্ধি পায় কিন্তু দ্বিতীয়  $T_i$  হ্রাস পায়। সুতরাং উৎক্রম উষ্ণতার সর্বোচ্চ মান

$$T_i = \frac{2a}{bR} \text{।}$$

## 5.9 অনুশীলনী — 2

- (1) ডিজেল ইঞ্জিনের রুদ্ধতাপ সংনমন অনুপাত = 17 এবং রুদ্ধতাপ প্রসারণ অনুপাত  $5 \gamma = 1.4$  ধরে ইঞ্জিনটির যান্ত্রিক দক্ষতা হিসাব করুন।
- (2) একটি আদর্শ গ্যাসকে জুল-টমসন প্রক্রিয়ায় 100 বায়ুমণ্ডলীয় চাপে সংনমিত করার পর 1 বায়ুমণ্ডলীয় চাপের বিরুদ্ধে প্রসারিত করা হল। প্রারম্ভিক উষ্ণতা  $20^\circ$  সে হলে অন্তিম উষ্ণতা কত হবে? উৎক্রমণীয় পদ্ধতিতে (রুদ্ধতাপে) ওই প্রসারণে উষ্ণতার কী পরিবর্তন হত? ( $\gamma = 1.4$  ধরুন)
- (3) প্রমাণ চাপে বেঞ্জিনের স্ফুটনাঙ্ক  $80^\circ$  সে এবং বাষ্পীভবনের লীনতাপ 380 জুল। স্ফুটনাঙ্কে বেঞ্জিন বাষ্পের ঘনত্ব 0.4 গ্রাম / সি সি এবং তরল অবস্থায় ওর ঘনত্ব 0.9 গ্রাম / সি সি। 80 সেমি পারদ চাপে বেঞ্জিনের স্ফুটনাঙ্ক কী হবে?

## 5.10 সারাংশ

এই এককে তাপগতিতত্ত্বের দ্বিতীয় সূত্রের কয়েকটি প্রয়োগ সম্পর্কে আলোকপাত করা হয়েছে। বিশ্বে ঘটমান তাপগতীয় পরিবর্তনগুলির দিক যেহেতু তাপগতীয় সাম্যাবস্থার শর্ত দ্বারা নিয়ন্ত্রিত হয়, সেই কারণে এই এককে প্রথমে সাম্যাবস্থা সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। তাপগতীয় সাম্য নির্ধারণে তাপগতীয় বিভবগুলির গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা আছে, সেইজন্য প্রথমে বিভবগুলি সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। এই বিভবগুলির সাহায্যে আমরা ম্যাক্সওয়েলের বিখ্যাত সমীকরণগুলি প্রমাণ করেছি। পরে এই সমীকরণগুলির সাহায্যে বিভিন্ন তাপগতীয় প্রক্রিয়ায় তাপগতীয় চলগুলির পরিবর্তন বিভিন্ন প্রকার কার্য ও তাপের গাণিতিক হিসাব করেছি। সর্বশেষে (1) দশা পরিবর্তন, (2) উৎক্রমণীয় কোষের কার্যপ্রণালী ব্যাখ্যায়, (3) তাপতড়িৎ ক্রিয়ার আলোচনায়, (4) তাপ ইঞ্জিনের কার্যনীতি বর্ণনায় ও (5) জুল থমসন প্রক্রিয়ায়, এই তাপগতিবিদ্যার সূত্রগুলির প্রয়োগ বিশ্লেষণ করেছি।

### তাপগতীয় বিভব

(ক) আন্তরশক্তি  $U$  :— আন্তরশক্তি একটি ব্যাপক চল। অণুপরিমাণ উৎক্রমণীয় পরিবর্তনের জন্য আমরা লিখতে পারি,

$dU = TdS - PdV + \mu dN$ , যেখানে  $\mu$  কে রাসায়নিক বিভব বলে

$\mu \left( = \left( \frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S, V = \text{ধ্রুবক}} \right)$  একটি সঙ্কীর্ণ চল।

(খ) এন্থালপি  $H = U + PV$  একটি ব্যাপক চল। অণুপরিমাণ উৎক্রমণীয় পরিবর্তনের জন্য  $dH = TdS + VdP + \mu dN$ । স্থির চাপ ও অণু সংখ্যায় দুটি অবস্থার মধ্যে তাপগতীয় পরিবর্তনে গৃহীত বা বর্জিত তাপের পরিমাণ ঐ দুটি অবস্থার এন্থালপির পরিবর্তনে সমান হয়,

(গ) হেলমহোল্টজ মুক্ত অপেক্ষক  $F = U - TS$  একটি ব্যাপক চল। স্থির উষ্ণতা ও অণুসংখ্যায় কোন উৎক্রমণীয় পরিবর্তনে  $F$  এর হ্রাস সেই পরিবর্তনে কৃতকার্যের পরিমাণ বোঝায়।  
( $\therefore dt = -SdT - PdV + \mu dN$ )

(ঘ) গিব্স মুক্ত অপেক্ষক  $G = U + PV - TS$  একটি ব্যাপক চল। দশা পরিবর্তনে  $G$  এর ভূমিকা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ।

তাপগতীয় সাম্যাবস্থা :— তন্ত্র ও পারিপার্শ্বিক মাধ্যমের মিলিত সমবায়কে একটি বিচ্ছিন্ন তন্ত্র ধরলে যে কোনো তাপগতীয় পরিবর্তনের শর্ত হল  $T\delta S > \delta U + P\delta V + \delta W'$ , যেখানে  $\delta W'$  উক্ত পরিবর্তনে  $PdV$  ছাড়া অন্যান্য কার্যের পরিমাণ ও  $T$  পারিপার্শ্বিকের উষ্ণতা বোঝায়।  $>$  ও  $=$  চিহ্নদ্বয় যথাক্রমে অনুৎক্রমণীয় ও উৎক্রমণীয় পরিবর্তন নির্দেশ করে। বিভিন্ন প্রকার তাপগতীয় পরিবর্তনে এই শর্তের প্রয়োগ নিম্নরূপ।

(ক) বিচ্ছিন্ন তন্ত্র :— বিচ্ছিন্ন তন্ত্র তাপগতীয় পরিবর্তনের শর্ত হল  $\delta S \geq 0$  অর্থাৎ কোনো স্বাভাবিক পরিবর্তনে তন্ত্রের এনট্রপি বাড়বে ও সাম্যাবস্থায় তা চরম মান পাবে। সুস্থিত সাম্যাবস্থার শর্তকে লিখতে পারি  $\delta S = 0$ ,  $\delta^2 S < 0$  এইভাবে।

(খ) সমোষ্ণ কোনো পরিবর্তনে মোট কৃতকার্যের পরিমাণ শূন্য হলে (মোট কৃতকার্য  $= P\delta V + \delta W'$  যেখানে  $\delta W'$  অন্য প্রকার কার্যের পরিমাণ বোঝায়) কোনো পরিবর্তনের শর্ত হল  $\delta F < 0$ , অর্থাৎ কোনো স্বাভাবিক পরিবর্তনে  $F$  এর মান কমবে ও সাম্যাবস্থায় তা অবম মান পাবে। সুস্থিত সাম্যাবস্থার শর্ত হল  $\delta F = 0$ ,  $\delta^2 F > 0$ ।

(গ) সমোষ্ণ ও সমচাপে সংঘটিত কোন পরিবর্তনের মোট কৃতকার্যের পরিমাণ শূন্য হলে কোনো পরিবর্তনের শর্ত হল  $\delta G < 0$ । অর্থাৎ কোনো স্বাভাবিক পরিবর্তনে  $G$  এর মান কমবে ও সাম্যাবস্থায় তার মান ন্যূনতম হবে। সুস্থিত সাম্যাবস্থার শর্ত হল  $\delta G = 0$ ,  $\delta^2 G > 0$ ।

ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ :—  $U$ ,  $H$ ,  $F$  ও  $G$  কে তাপগতীয় অপেক্ষক ধরলে  $dU$ ,  $dH$ ,  $dF$  ও  $dG$  সম্পূর্ণ অবকল হবে। স্থির অণুসংখ্যায় সম্পূর্ণ অবকলের শর্ত প্রয়োগ করে আমরা

নীচের চারটি ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ পাই বিভিন্ন তাপগতীয় পরিবর্তনে যাদের প্রয়োগ করা হবে।

$$(ক) \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_{S,N} = - \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_{V,N}, \quad (খ) \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_{S,N} = \left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_{P,N},$$

$$(গ) \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{T,N} = \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V,N} \quad \text{ও} \quad (ঘ) \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_{T,N} = - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P,N} ।$$

অণুসংখ্যা পরিবর্তিত হলে নিরপেক্ষ চলরাশির সংখ্যা বাড়বে এবং সম্পূর্ণ অবকল হবার শর্ত প্রয়োগ করার ফলে ম্যাক্সওয়েলের তাপগতীয় সমীকরণগুলির সংখ্যাও বাড়বে। এই এককে সমীকরণগুলির কিছু প্রয়োগ বর্ণনা করা হয়েছে। তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের বিবিধ প্রয়োগের কয়েকটি নীচে উল্লেখ করা হল।

(1) দশা পরিবর্তন — দশা পরিবর্তনের ক্ষেত্রে আমরা পাই,  $\left( \frac{dP}{dT} \right)_{\text{সংপৃক্ত}} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}$ , যেখানে

$\left( \frac{dP}{dT} \right)_{\text{সংপৃক্ত}}$  দুটি দশার সাম্যাবস্থায় উষ্ণতার সঙ্গে চাপের পরিবর্তন বোঝায়। (চিহ্নগুলি এককে ব্যাখ্যা করা হয়েছে) এই সমীকরণ প্রয়োগ করে পারিপার্শ্বিকের চাপের সঙ্গে দশা পরিবর্তনের উষ্ণতার (যেমন গলনাঙ্ক, স্ফুটনাঙ্ক ইত্যাদি) পরিবর্তন পরিমাপ করতে পারি। পরের এককে দশা পরিবর্তন বিশদভাবে আলোচনা করা হয়েছে।

(2) উৎক্রমণীয় কোষ তাপগতিবিদ্যার সূত্রগুলি ও ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি প্রয়োগ করে আমরা পাই,  $\xi = - \frac{\Delta H}{jF} + T \frac{d\xi}{dT}$  (একে হেল্মহোল্টজ সমীকরণ বলা হয় এবং এর চিহ্নগুলি এককে ব্যাখ্যা করা হয়েছে)। এই সমীকরণটি কোষের ভিতর রাসায়নিক বিক্রিয়ায় উদ্ভূত তাপের পরিমাপ করতে সাহায্য করে। উপরন্তু, এই সমীকরণের সাহায্যে তড়িৎপ্রবাহ পাঠালে তড়িৎকোষটি গরম না ঠাণ্ডা হবে তা বলা যাবে।

(3) তাপতড়িৎ ক্রিয়া — তাপযুগ্মের ক্ষেত্রে তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র প্রয়োগ করে পাই,  $\pi = T \frac{d\xi}{dT}$

এবং  $\sigma_A - \sigma_B = T \frac{d}{dT} \left( \frac{\pi}{T} \right)$ , যেখানে  $\pi$  এবং  $\sigma_A - \sigma_B$  যথাক্রমে পেন্টিয়ার ও থমসন সহগ,  $e$  তড়িচ্চালক বল)। তাপতড়িৎ ক্রিয়ার আলোচনায় এটি ব্যবহৃত হয়।

(4) তাপ ইঞ্জিন — অটো ও ডিজেল চক্রের (যারা যথাক্রমে পেট্রল ও ডিজেল ইঞ্জিনের আদর্শ রূপ) কার্যপ্রণালীতে তাপগতিবিদ্যার সূত্র প্রয়োগ করে যান্ত্রিক দক্ষতা নিরূপণ করা হয়েছে এই এককে।

(5) জুল-থমসন ক্রিয়া—উচ্চ চাপে সংনমিত গ্যাসকে নিম্নচাপের বিরুদ্ধে প্রসারিত করলে গ্যাসের উষ্ণতার পরিবর্তন হয়। হাইড্রোজেন ও হিলিয়াম বাদে অন্য সব গ্যাসের উষ্ণতা সাধারণত জুল -

থমসন প্রক্রিয়ায় কমে। চাপের সঙ্গে উষ্ণতার পরিবর্তন  $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{1}{C_p} \left[ T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - V \right]$  এই

সমীকরণ দ্বারা নির্ধারিত হয়, যেখানে চিহ্নগুলি এককে ব্যাখ্যা করা হয়েছে। আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে উষ্ণতার কোনো পরিবর্তন হয়না।

### 5.11 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(1) একটি আদর্শ গ্যাসের স্থির চাপে মোলার আপেক্ষিক তাপ  $C_p = a + bT$ , যেখানে  $a$  ও  $b$  ধ্রুবক (ক) এই গ্যাসের  $C_v$  কি হবে? (খ) এই আদর্শ গ্যাসটির মোলার এনট্রপি ও এনথালপি নির্ণয় করুন।

(2)  $n$  মোল আদর্শ গ্যাসের গিব্‌স মুক্তশক্তি অপেক্ষক  $G = U(T) - nTR \ln \left( VT^{3/2} \right) + PV$

সাম্যাবস্থায় আয়তন পরিবর্তন সাপেক্ষে  $G$  এর পরিবর্তন শূন্য হলে প্রমাণ করুন যে সাম্যাবস্থায় আয়তন হবে  $nRT/P$  এবং এই আয়তনের জন্য  $G$  এর মান ন্যূনতম হবে।

(3) বরফের গলনাঙ্ক  $1^\circ\text{C}$  কমাতে কত চাপ লাগবে? গলনের জন্য আয়তনের পরিবর্তন 9% এবং গলনের লীনতাপ = 80 ক্যালরি / গ্রাম।

(4) একটি পদার্থের অবস্থার সমীকরণ  $V = \frac{RT}{P} - \frac{C}{P^3}$ , যেখানে  $C$  ধ্রুবক ও অন্যান্য চিহ্নগুলি

স্বাভাবিক অর্থবহ। এই পদার্থের স্থির উষ্ণতায় চাপের সঙ্গে  $C_p$  এর পরিবর্তন কী হবে হিসাব করুন।

## অনুশীলনী-2

- (1) প্রমাণ করুন যে ভ্যান - ডার - ওয়ালস গ্যাসের ক্ষেত্রে  $C_p - C_v \approx R \left( 1 + \frac{2a}{RTV} \right)$  যেখানে  $a$  ভ্যান-ডার-ওয়ালস ধ্রুবক এবং অন্যান্য চিহ্নগুলি স্বাভাবিক অর্থবহ।
- (2) একটি আদর্শ গ্যাসের স্থির চাপে মোলার আপেক্ষিক তাপ  $C_p = a + bT$  যেখানে  $a$  ও  $b$  ধ্রুবক।  
(ক) এই গ্যাসের  $C_v$  কি হবে? (খ) এই আদর্শ গ্যাসটির মোলার এনট্রপি ও এনথালপি নির্ণয় করুন।
- 3)  $n$  মোল আদর্শ গ্যাসের গিবস অপেক্ষক  $G = U(T) - nTR \ln(VT^{3/2}) + PV$ । সাম্যাবস্থায় আয়তন পরিবর্তনের ক্ষেত্রে  $G$  এর পরিবর্তন শূণ্য হলে প্রমাণ করুন যে সাম্যাবস্থায় আয়তন হবে  $\frac{nRT}{P}$  এই আয়তনের জন্য এ ন্যূনতম মান পাবে প্রমাণ করুন। (সুস্থির সাম্যাবস্থার সর্ত অনুযায়ী)
- (4) বরফের গলনাঙ্ক  $1^\circ\text{C}$  কমাতে কত চাপ লাগবে? (গলনের লীনতাপ  $80$  ক্যালরি / গ্রাম ও আয়তনের পরিবর্তন  $90\%$ )
- (5) একটি পদার্থের অবস্থা সমীকরণ  $V = \frac{RT}{P} - \frac{C}{T^3}$ , যেখানে  $C$  ধ্রুবক ও অন্যান্য চিহ্নগুলি স্বাভাবিক অর্থবহ, এই পদার্থের স্থির উষ্ণতায় চাপের সাথে  $C_p$  এর পরিবর্তন কি হবে হিসাব করুন।
- (6) অটো ও ডিজেল চক্রের  $S - T$  লেখচিত্র অঙ্কন করুন ও তা থেকে উভয় ক্ষেত্রে দক্ষতা নির্ণয় করুন।

---

### 5.12 উত্তরমালা — অনুশীলনী — (1)

---

- 1) a) দ্বিতীয় Tds সমীকরণ (5.16) থেকে পাই,  $TdS = -T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dp$  (যেহেতু  $dT = 0$ )।

সুতরাং সমোষ্ণ উৎক্রমণীয় চাপ পরিবর্তনের জন্য গৃহীত তাপ  $\int TdS = -TV\bar{\beta}(p_f - p_i)$

যেখানে  $\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -67 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$  কে  $V = 200$  সি.সি.,  $P_i = 1$  বায়ুমন্ডল

ও  $P_f = 3000$  বায়ুমন্ডলের সমান চাপ।

সুতরাং, গৃহীত চাপ  $Q = -273 \times 200(-67 \times 10^{-6}) \times 3000 \times 76 \times 13.6 \times 980$  আর্গ

1 ক্যালরি =  $4.2 \times 10^7$  আর্গ ব্যবহার তবে পাই,

$$Q = \frac{1.11}{4.2} \times 10^{-2} = 0.0026 \text{ জুল।}$$

$$(b) \text{ কৃতকার্য } W = \int P dV = \int_{P_i}^{P_f} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T P dP$$

$$\text{বা } W = - \int_{P_i}^{P_f} \nu k P dP = - \frac{\nu K}{2} (P_f^2 - P_i^2)$$

$$\text{বা } W = - \frac{200 \times 43 \times 10^{-12} (3000^2 - 1^2) \times (76 \times 980 \times 13.6)^2}{2 \times 4.2 \times 10^7} \text{ ক্যালরি,}$$

$$\text{বা } W = 945.40 \text{ ক্যালরি।}$$

(c) আন্তরশক্তির পরিবর্তন  $\Delta U = 0 - Q - W$  ক্যালরি

$$\text{বা } \Delta U = Q - W = -945.4 \text{ ক্যালরি}$$

(2) (5.2) সমীকরণ প্রয়োগ করে পাই,

$$C_p - C_v = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

1 মোল ভ্যান-ডার-ওয়াল্‌স গ্যাসের ক্ষেত্রে অবস্থার সমীকরণ

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \text{ থেকে পাই,}$$

$$\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{R}{v-b} \text{ এবং } \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = \frac{1}{R} \left[ \left( P + \frac{a}{v^2} \right) - \frac{2a(v-b)}{v^3} \right]$$



$$\text{বা } \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = \frac{1}{R} \left[ \frac{RT}{v-b} - \frac{2a(v-b)}{v^3} \right]$$

$$\text{বা } C_P - C_V = \frac{RT}{(v-b)} \times \frac{RV^3(v-b)}{[RTV^3 - 2a(v-b)^2]}$$

যেহেতু  $b \ll v$   $2a(v-b)^2 \ll RTV^3$ , আমরা পাই,

$$C_P - C_V = R \left[ 1 - \frac{2a(v-b)^2}{RTV^3} \right]^{-1} \approx R \left[ 1 + \frac{2a}{RTV} \right] \text{ প্রমাণিত।}$$

$$(3) (a) \text{ সমীকরণ (5.27) থেকে পাই, } \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V$$

$$\text{অবস্থার সমীকরণ } P = \frac{RT}{V} \left( 1 + \frac{B(T)}{V} \right) \text{ বসিয়ে পাই,}$$

$$\left( \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V = RZ^2 \frac{d^2}{dT^2} (BT), \text{ যেখানে } Z = \frac{1}{V}$$

$$\text{যেহেতু } \left( \frac{\partial C_V}{\partial z} \right)_T = -Z^2 \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T \text{ আমরা লিখতে পারি,}$$

$$\left( \frac{\partial C_V}{\partial z} \right)_T = -RT \frac{d^2}{dT^2} (BT) \text{ সমাকল করে পাই,}$$

$$\text{বা } C_V = -\frac{RT}{V} \frac{d^2}{dT^2} (BT) + (C_V)_{z=0}$$

$$\text{বা } C_V = -\frac{RT}{V} \frac{d^2}{dT^2} (BT) + (C_V)_{z=\infty} (\because z=0 \text{ মানে } v \rightarrow \infty)$$

(b) সমীকরণ (5.28) ব্যবহার করে পাই,  $\left(\frac{\partial C_p}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_P$

প্রশ্নে প্রদত্ত অবস্থার সমীকরণ প্রয়োগ করে পাই,

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_P = -RT \frac{d^2}{dT^2} [B(T)P] \text{। সমাকল করে পাই,}$$

$$C_p = (C_p)_{p=0} - RTP \frac{d^2}{dT^2} (BT)$$

অনুশীলনী — (2)

(1) ডিজেল ইঞ্জিনের যান্ত্রিক দক্ষতার সূত্র (সমীকরণ 5.44) প্রয়োগ করে পাই,

$$\text{যান্ত্রিক দক্ষতা } \eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\left[\left(\frac{1}{\gamma_E}\right)^\gamma - \left(\frac{1}{\gamma_C}\right)^\gamma\right]}{\left[\left(\frac{1}{\gamma_E}\right) - \left(\frac{1}{\gamma_C}\right)\right]}, \text{ যেখানে } \gamma_E, \gamma_C$$

ইঞ্জিনের আলোচনা প্রসঙ্গে ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

$$\gamma_E = \text{রুদ্ধতাপ প্রসারণ অনুপাত} = 5$$

$$\gamma_C = \text{রুদ্ধতাপ সংনমন অনুপাত} = 17$$

$$\text{সুতরাং } \eta = 1 - \frac{1}{1.4} \frac{\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{1.4} - \left(\frac{1}{17}\right)^{1.4}\right]}{\left[\left(\frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{17}\right)\right]}$$

(2) জুল-থমসন গুণাঙ্ক  $\mu = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{1}{C_p} \left[ T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - V \right]$

আদর্শ গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ  $PV = nRT$  ধরলে  $\mu = 0$  পাই। সুতরাং আদর্শ গ্যাসের

ক্ষেত্রে জুল-থমসন প্রক্রিয়ায় উষ্ণতার কোনো পরিবর্তন দেখা যাবে না।

উৎক্রমণীয় রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে গ্যাসের তাপের পরিবর্তন,

$T_1^\gamma P_1^{1-\gamma} = T_2^\gamma P_2^{1-\gamma}$  দ্বারা নির্ধারিত হয় যেখানে  $T_1$  ও  $T_2$ ,  $P_1$  ও  $P_2$  চিহ্নগুলি স্বাভাবিক অর্থবহ। (প্রথম সূত্রের আলোচনায় একক 3 এ বলা হয়েছে)।

সুতরাং রশিগুলির মান বসিয়ে পাই,

$$293^{1.4} \times (100)^{(1-1.4)} = T_2^{1.4} 1^{(1.4)}$$

$$\text{বা } \left(\frac{T_2}{293}\right)^{1.4} = 100^{-0.4}$$

বা অন্তিম উষ্ণতা  $T_2 = 0.27^\circ \times 293 \approx 78.60^\circ$  কে।

(3) ক্লিয়াস-ক্ল্যাপেরনের সূত্র থেকে পাই,  $\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}$  যেখানে

প্রদত্ত প্রশ্নে  $L = 380$  জুল,  $T = (273 + 80)^\circ = 358^\circ$  কে

$$v_1 = \frac{1}{0.9} \text{ সি সি } \text{ ও } v_2 = \frac{1}{0.4} \text{ সিসি}$$

$$\therefore \frac{dP}{dT} = \frac{380}{358\left(\frac{5}{2} - \frac{10}{9}\right)} = \frac{380 \times 18}{358 \times 25} \times 10^7 \text{ ডাইন / সেমি}^2 \text{ } ^\circ\text{কে}$$

$\Delta P = (80 - 76) = 4$  সেমি পারদের চাপ

$$= 4 \times 13.6 \times 980 \text{ ডাইন / সেমি}^2$$

$$\text{অথবা, } \Delta T = \frac{4 \times 13.6 \times 980}{380 \times 18 \times 10^7} \times 358 \times 25$$

$$= 6.98 \times 10^{-3} \text{ কে}$$

সুতরাং স্ফুটনাঙ্কের পরিবর্তন  $= 6.98 \times 10^{-3} \text{ কে}$ ।

উত্তরমালা :—

সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(1) সমীকরণ (5.20) থেকে পাই,  $C_p - C_v = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$

ভ্যান-ডার-ওয়ালস গ্যাসের ক্ষেত্রে  $P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$

সুতরাং  $\left( \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{R}{v-b} \right)$

$T = \frac{(v-b)}{R} \left( P + \frac{a}{v^2} \right)$  থেকে  $\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = \frac{P}{R} - \frac{a}{RV^2} + \frac{2ab}{RV^3}$

অথবা  $C_p - C_v = \left[ \frac{\frac{RT}{v-b}}{\frac{P}{R} - \frac{a}{RV^2} + \frac{2ab}{RV^3}} \right] = \left[ \frac{\frac{RT}{v-b}}{\frac{T}{v-b} - \frac{2a}{RV^2} + \frac{2ab}{RV^3}} \right]$

বা  $C_p - C_v = \left[ \frac{\frac{RT}{v-b}}{\frac{T}{(v-b)} \left\{ 1 - \frac{2a(v-b)}{RTV^2} \right\}} \right] \cong R \left[ 1 + \frac{2a}{RTV} \right]$

( $\because b \ll v$  অন্যান্য পদগুলি উপেক্ষা করা হল)

(2) (a) আদর্শ গ্যাসের জন্য  $C_v = C_p - nR = a + bT - nR$

(b) 1 মোল আদর্শ গ্যাসের জন্য

$$\Delta s = \int \left( \frac{C_v dT + PdV}{T} \right) = \int (a + bT - nR) \frac{dT}{T} + \int nR \frac{dU}{V}$$

$$\text{বা } \Delta S = (a - nR) \ln \frac{T}{T_0} + b(T - T_0) + nR \ln \frac{V}{V_0} = S - S_0$$

যেখানে  $T_0, V_0, S_0$  প্রারম্ভিক অবস্থায় কোনো আদর্শ গ্যাসের যথাক্রমে উষ্ণতা, আয়তন ও এনট্রপি।

সুতরাং  $T, V$  তাপগতীয় চলের জন্য এনট্রপি

$$S = S_0 + (a - nR) \ln \frac{T}{T_0} + b(T - T_0) + nR \ln \frac{V}{V_0}$$

অণুপরিমাণ পরিবর্তনের জন্য আমরা লিখতে পারি,

$$dH = d(U + PV) = TdS + VdP = C_v dT + PdV + VdP$$

$$\text{সুতরাং মোলার এনথালপির পরিবর্তন } \Delta H = \int_{T_0}^T (a + bT - nR) dT + \int d(PV)$$

$$\text{অথবা } \Delta H = a(T - T_0) + \frac{b}{2}(T^2 - T_0^2) - nR(T - T_0) + (PV - P_0V_0)$$

সুতরাং  $T, P, V$  তাপগতীয় চলের জন্য মোলার এনথালপি

$$H = H_0 + (a - nR)(T - T_0) + \frac{b}{2}(T^2 - T_0^2) + (PV - P_0V_0)$$

যেখানে তাপগতীয় চলসমূহ  $P_0, V_0, T_0$  বিশিষ্ট কোনো প্রারম্ভিক সাম্যাবস্থার জন্য মোলার এনথালপি  $H_0$

(3) সাম্যাবস্থায় কেবলমাত্র আয়তন পরিবর্তনের সাপেক্ষে সৃষ্টিত সাম্যাবস্থার জন্য গিব্‌স অপেক্ষকের

$$\text{অবম মান হবে। অর্থাৎ } \left( \frac{\partial G}{\partial V} \right)_{P,T} = 0, \text{ যেহেতু } G = U(T) - nR \ln \left( VT^{3/2} \right) + PV,$$

$$\text{আমরা } \left( \frac{\partial G}{\partial V} \right)_{P,T} = 0 \text{ থেকে পাই, } P = \frac{nRT}{V} \text{ অর্থাৎ সাম্যাবস্থায় আয়তন হবে}$$

$$V = \frac{nRT}{P} \left( \frac{\partial^2 G}{\partial V^2} \right)_{P,T} > 0 \text{ বলে এই আয়তনে } G \text{ এর মান অবম হবে।}$$

(4) ক্লসিয়াস-ক্ল্যাপেরনের সূত্র অনুযায়ী

$$\frac{dP}{dT} = \frac{80 \times 4.2 \times 10^7}{273(1-1.09)}, \quad \Delta T = -1^\circ$$

$$\text{অথবা } \Delta P = \frac{8 \times 4.2}{273 \times 0.09} \times 10^8 \text{ ডাইন / সেমি}^2,$$

1 বায়ুমণ্ডল চাপ =  $76 \times 13.6 \times 980$  ডাইন / সেমি<sup>2</sup> বসালে পাই,

$$\Delta P = \frac{8 \times 4.2 \times 10^8}{9 \times 273 \times 76 \times 13.6 \times 980} = 135 \text{ বায়ুমণ্ডলের চাপ}$$

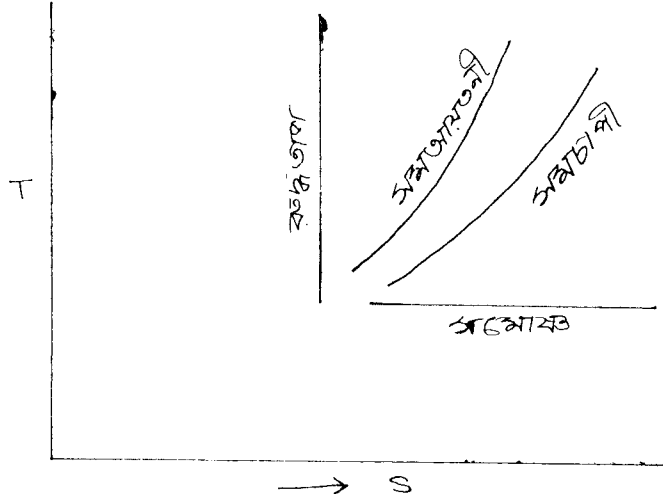
(5) সমীকরণ (5.28) থেকে পাই,  $\left( \frac{\partial C_P}{\partial P} \right)_T = -T \left( \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} \right)_P$

অবস্থার সমীকরণ  $V = \frac{RT}{P} - \frac{C}{T^3}$  থেকে পাই,

$$\left( \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right)_P = -\frac{12C}{T^5}$$

$$\text{সুতরাং } \left( \frac{\partial C_P}{\partial P} \right)_T = -\frac{12C}{T^4}$$

(6) T-S লেখচিত্রে x অক্ষ বরাবর এনট্রপি S ও y অক্ষ বরাবর উষ্ণতা T কে নির্দেশ করে, রুদ্ধতাপ সমোষ্ণ, সমচাপ ও সমআয়তনে উৎক্রমণীয় প্রক্রিয়ায় তন্ত্রের পরিলেখচিত্র নির্দেশিত হয়েছে। চিত্র (5.7)



চিত্র 5.7

অটোচক্রের চিত্র (5.8) ক্ষেত্রে B-C সমআয়তন প্রক্রিয়ায় গৃহীত তাপ প্রথম TdS সমীকরণ থেকে

$$Q_1 = \int_B^C dQ = \int_B^C \left\{ C_v dT + T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v dv \right\}$$

$$= C_v (T_C - T_B) \quad [\because dv = 0]$$

অনুরূপ, D-A পথে বর্জিত তাপ

$$Q_2 = \int_{T_A}^{T_D} C_v dT = C_v (T_D - T_A)$$

$$\therefore \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

$$B-C \text{ পথে এনট্রপি পরিবর্তন } S_C - S_B = \int_{T_B}^{T_C} C_v \frac{dT}{T} = C_v \ln \frac{T_C}{T_B}$$

অনুরূপে,  $S_D - S_A = \int_{T_A}^{T_D} C_V dT = C_V \ln \frac{T_D}{T_A}$

কিন্তু  $S_A = S_B$  ও  $S_C = S_D$   $\therefore \frac{T_C}{T_B} = \frac{T_D}{T_A}$

বা  $\frac{T_D}{T_C} = \frac{T_A}{T_B} = \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$

$\therefore \eta = 1 - \frac{T_A}{T_B}$       A B রুদ্ধতাপ লেখচিত্র হওয়ায়,

$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$       অথবা  $\frac{T_A}{T_B} = \left( \frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = \frac{1}{\rho^{\gamma-1}}$

$\therefore \eta = 1 - \frac{1}{\rho^{\gamma-1}}$        $\rho = \frac{V_A}{V_B}$  প্রসারণ অনুপাত।

ডিজেল চক্রের ক্ষেত্রে চিত্র (5.9) B-C পথে গৃহীত তাপ দ্বিতীয় TdS সমীকরণ থেকে

$$Q_1 = \int TdS = \int \left\{ C_P dT - T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dp \right\}$$

$$= \int_{T_B}^{T_C} C_P dT = C_P (T_C - T_B) \quad [\because dp = 0]$$

অপরপক্ষে D-A পথে বর্জিত তাপ  $Q_2 = \int_{T_A}^{T_D} C_V dT$

$$= C_V (T_D - T_A)$$

B-C পথে এনট্রপি পরিবর্তন  $S_C - S_B = \int_{T_B}^{T_C} C_P \frac{dT}{T} = C_P \ln \frac{T_C}{T_B}$

অনুরূপে D-A এনট্রপি পরিবর্তন  $S_D - S_A = C_V \ln \frac{T_D}{T_A}$



কিন্তু  $S_C = S_D$  এবং  $S_B = S_A$  বলে,

$$C_P \ln \frac{T_C}{T_B} = C_V \ln \frac{T_B}{T_A}$$

$$\left( \frac{T_C}{T_B} \right)^2 = \left( \frac{T_D}{T_A} \right)$$

$$\text{যান্ত্রিক দক্ষতা } \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{C_V T_D - T_A}{C_P T_C - T_B}$$

$$= 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_A}{T_B} \left( \frac{T_D/T_A - 1}{T_C/T_B - 1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{T_A}{T_B} \right) \left\{ \frac{\left( \frac{T_C}{T_B} \right)^\gamma - 1}{\frac{T_C}{T_B} - 1} \right\}$$

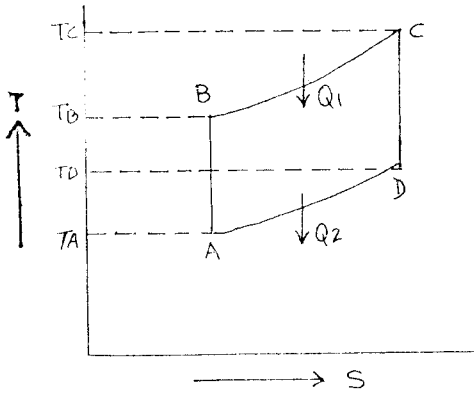
সংনমন অনুপাত  $\gamma_1 = \frac{V_A}{V_B}$  ও প্রসারণ অনুপাত  $\gamma_2 = \frac{V_D}{V_C}$  হলে এবং AD ও CD রুদ্ধতাপ

লেখচিত্রের সাহায্যে

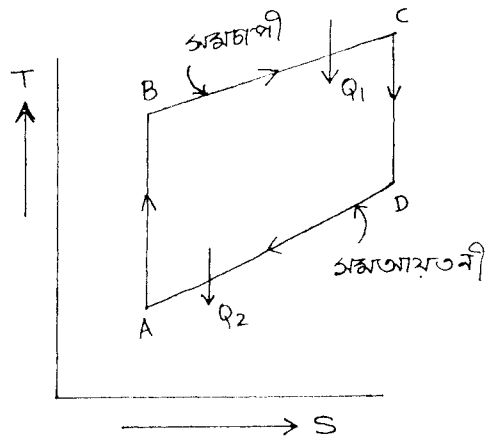
$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{\left( \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)^{\gamma-1} - 1}{\gamma_1^{\gamma-1} \left( \frac{\gamma_1}{\gamma_2} - 1 \right)} \right\}$$

T-S লেখচিত্রে x অক্ষ বরাবর এনট্রপি TS ও y অক্ষ বরাবর উষ্ণতা Tকে প্রকাশ করা হয়। কোনো তত্ত্বের এক সাম্যাবস্থা থেকে অপর সাম্যাবস্থার উৎক্রমণীয় পরিবর্তন রুদ্ধতাপ, সমোষ্ণ, সমআয়তন বা সমচাপে ঘটলে তাদের লেখচিত্র T-S লেখে কীরূপ হবে তা চিত্র ( ) নির্দেশ করে। এখানে রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় S প্রবক থাকায় ও সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় উষ্ণতা প্রবক থাকায় ওরা যথাক্রমে T ও S অক্ষের সমান্তরাল রেখা দ্বারা নির্দেশিত হয়। অপরপক্ষে সমআয়তনের পরিবর্তনে T-S লেখচিত্রের নতি সমচাপে T-S লেখচিত্রের নতি অপেক্ষা বেশি হয়।

অটোচক্র ও ডিজেল চক্রের T-S লেখচিত্র চিত্র (5.8 , 5.9) দেখানো হল।



চিত্র 5.8 অটোচক্রের T-S লেখ



চিত্র 5.9 ডিজেল চক্রের T-S লেখ

অটো চক্রের ক্ষেত্রে B-C পথে তাপ গ্রহণ  $Q_1 C_V = (T_C - T_B)$

D-A পথে তাপ বর্জন  $Q_2 = C_V(T_D - T_A)$

সম্পূর্ণ চক্রে কার্য  $W = Q_1 - Q_2 = C_V(T_C - T_B) - C_V(T_D - T_A)$

$$\text{দক্ষতা } \eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

A ও B বিন্দু একই রুদ্ধতাপ লেখচিত্রে থাকায়

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \quad \text{or} \quad \frac{T_A}{T_B} = \left( \frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1}$$

অনুরূপে C ও D একই রুদ্ধতাপ লেখচিত্রে থাকায়

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \quad \text{or} \quad \frac{T_C}{T_D} = \left( \frac{V_D}{V_C} \right)^{\gamma-1} = \left( \frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1}$$

$$\therefore \left( \frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_A}{T_B} = \frac{T_D}{T_C} = \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

$$\therefore \eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = 1 - \left( \frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = 1 - \frac{1}{\rho^{\gamma-1}}$$

$$\rho = \frac{V_B}{V_A} =$$

## গঠন

- 6.1 প্রস্তাবনা  
উদ্দেশ্য
- 6.2 মূলতত্ত্ব
- 6.3 অসমসত্ত্ব তত্ত্বের সাম্যাবস্থা
- 6.4 দশা রূপান্তরের সাধারণ সমীকরণ
- 6.5 প্রথম ও দ্বিতীয় ক্রমের দশা রূপান্তর।
- 6.6 প্রথম ক্রমের দশা সম্পর্কিত আলোচনা
- 6.7 ত্রৈধবিন্দু
- 6.8 দ্বিতীয় ক্রমের দশা-পরিবর্তন
- 6.9 উদাহরণ  
অনুশীলনী
- 6.10 রাসায়নিক সাম্য
- 6.11 সারাংশ
- 6.12 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি
- 6.13 উত্তরমালা

---

## 6.1 প্রস্তাবনা

---

আগের এককে (একক নং 5) আপনারা তত্ত্বের সাম্যাবস্থা নির্ধারণে ও কোন তাপগতীয় পরিবর্তনের দিক নিরূপণে দ্বিতীয় সূত্রের প্রয়োগ সম্পর্কে পরিচিত হয়েছেন এবং নির্দিষ্ট বাধ্যবাধকতায় কোন তাপগতীয় চল পরিবর্তনের সাপেক্ষে সুস্থিত সাম্যাবস্থার শর্ত সম্পর্কে জানতে পেরেছেন, (এ প্রসঙ্গে অনুচ্ছেদ 5.3 দ্রষ্টব্য) 5.8 সংখ্যক অনুচ্ছেদে দশা রূপান্তরে দ্বিতীয় সূত্রের প্রয়োগ সম্পর্কে ধারণা পেয়েছেন। বর্তমান এককে দশা পরিবর্তন ও একাধিক দশার সাম্যাবস্থা সম্পর্কে বিস্তৃত আলোচনা করা হয়েছে। উদাহরণস্বরূপ, কঠিন, তরল, বাষ্প এই তিনটি দশার সাম্যাবস্থা ও পারস্পরিক রূপান্তর,

হিলিয়ামের দুটি অবস্থার মধ্যে রূপান্তর, সাধারণ পরিবাহী থেকে অতিপরিবাহী অবস্থায় রূপান্তর, রাসায়নিক বিক্রিয়া ইত্যাদিকে দশা-সাম্যাবস্থা ও দশা পরিবর্তনের প্রয়োগ হিসাবে চিহ্নিত করা যেতে পারে। আমরা এই এককে দশা রূপান্তরের সাধারণ বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে আলোচনা করব। পরে, কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে এই রূপান্তরের সূত্রগুলির প্রয়োগ সম্পর্কে আলোকপাত করব।

উদ্দেশ্য —

এই এককটি পাঠ করে আপনি —

- বিভিন্ন প্রকার দশার সাম্যাবস্থায় একত্রে থাকার সর্ত ও তাদের পারস্পরিক রূপান্তর সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- বিভিন্ন প্রকার তাপগতীয় তন্ত্রে দশা সাম্যাবস্থা ও দশা রূপান্তরের শর্তগুলি (উদাহরণস্বরূপ, কঠিন-তরল-গ্যাস পদার্থের এই তিনটি দশার সহাবস্থানের সাম্যাবস্থা ও পারস্পরিক পরিবর্তন, রাসায়নিক বিক্রিয়ায় রাসায়নিক সাম্যাবস্থা ইত্যাদি) যে মূলতঃ একই সূত্র দ্বারা নিয়ন্ত্রিত তা বুঝতে পারবেন।
- দশা সাম্যাবস্থার ওপর বিভিন্ন তাপগতীয় চলের পরিবর্তনের প্রভাব সম্পর্কে ধারণা পাবেন।

## 6.2 মূলতত্ত্ব -

আগের এককে (একক নং 5) তাপগতীয় সাম্যাবস্থা সম্পর্কিত আলোচনা প্রসঙ্গে আপনারা দেখেছেন যে অণু পরিবর্তনের সাপেক্ষে সুস্থিত সাম্যাবস্থার জন্য —

- (1) বিচ্ছিন্ন তন্ত্রের ক্ষেত্রে, এনট্রপির মান চরম হবে।
- (2) স্থির আয়তন ও উষ্ণতায় হেল্মহোল্টজ মুক্ত শক্তি অপেক্ষক অবম মান পাবে।
- (3) স্থির চাপ ও উষ্ণতার গিব্‌স মুক্তশক্তি অপেক্ষকের মান অবম হবে। দশা সাম্যাবস্থা ও দশা রূপান্তরে আমরা এই সূত্রগুলি প্রয়োগ করব। প্রতিটি দশা তার নিজস্ব ভৌত ও রাসায়নিক ধর্মের দ্বারা অন্য দশা থেকে স্বতন্ত্র। (উদাহরণস্বরূপ, বরফ, জল ও জলীয় বাষ্প যথাক্রমে জলের কঠিন, তরল ও গ্যাসীয় অবস্থা ও এরা তিনটি দশা নির্দেশ করে।) যে কোন প্রকার দশা সাম্যাবস্থার ক্ষেত্রে তাপগতিবিদ্যার সূত্র ব্যবহার করে প্রমাণ করা যায় যে দশা রূপান্তরে চাপ ও উষ্ণতার মান ধ্রুবক থাকবে ও এর ফলে গিব্‌স অপেক্ষকের মান অবম থাকবে। এর থেকে আমরা দেখাতে পারব যে বিভিন্ন দশাতে একক ভরের গিব্‌স অপেক্ষকের ও রাসায়নিক বিভবের মান সমান হবে। আমরা এই এককে বিভিন্ন ক্রমের দশা রূপান্তর ও অসমসত্ত্ব তন্ত্রে দশা সাম্যাবস্থা আলোচনা করব। দশা সাম্যাবস্থার ওপর বিভিন্ন তাপগতীয় চলের পরিবর্তনের প্রভাব সম্পর্কেও এই প্রসঙ্গে আলোকপাত করব।

### 6.3 অসমসত্ত্ব তন্ত্ৰৰ সাম্যাবস্থা

অসমসত্ত্ব তন্ত্ৰ বিভিন্ন দশায় উপস্থিত বিভিন্ন উপাদানের সমন্বয়ে গঠিত এক তন্ত্ৰ। গিব্‌স এই অসমসত্ত্ব তন্ত্ৰৰ সাম্যাবস্থায় থাকার শর্ত নিরূপণ করেছিলেন। তার নীতিকে গিব্‌স দশা নীতি বলা হয়। এই নীতি যে কোন প্রকার তন্ত্ৰের দশা সাম্যাবস্থার ওপর তাপগতীয় চলগুলির পরিবর্তনের প্রভাব বিশ্লেষণে সাহায্য করে। এই নীতি ব্যাখ্যা করার আগে দশা সাম্যাবস্থার আলোচনায় ব্যবহৃত কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ পদের সংজ্ঞা দেব।

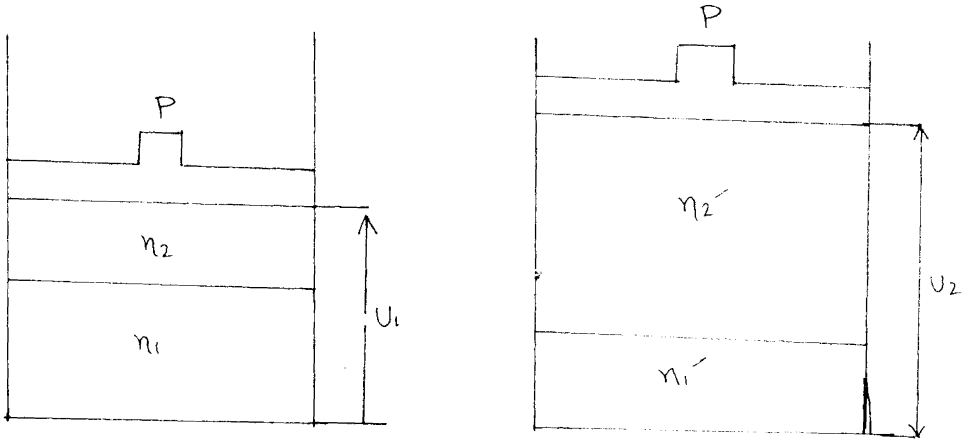
**দশা** — দশা তন্ত্ৰের একটি সমসত্ত্ব অংশ বোঝায় যেখানে ভৌতধর্ম (যেমন চাপ, উষ্ণতা ইত্যাদি) সর্বত্র সমান থাকে। একটি দশা রাসায়নিক দিক থেকে সমসত্ত্ব নাও হতে পারে। উদাহরণস্বরূপ, একটি আবদ্ধ পাত্রে লবণের দ্রবণ তার উপরিভাগে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের সাথে সাম্যাবস্থায় থাকে। এখানে লবণের দ্রবণে যদিও লবণ ও জলের অণু উভয়ই বর্তমান, দ্রবণটি কিন্তু একটি দশাতেই (তরল দশা) থাকবে। সুতরাং এই তন্ত্ৰে দশার সংখ্যা দুই (তরল দ্রবণ ও বাষ্প)। অনুরূপভাবে জল যখন কঠিন, তরল ও বাষ্প এই তিনটি অবস্থাতে সাম্যাবস্থায় সহাবস্থান করে, তখন রাসায়নিক দিক থেকে এক প্রকারের অণু হলেও ভৌতধর্মের বিচারে এক্ষেত্রে তিনটি দশা বর্তমান। একইভাবে দুটি মিশ্রণীয় তরল রাসায়নিক দিক থেকে ভিন্ন হলেও একটি দশা নির্দেশ করে।

**অবয়ব** — কোন দশার সাম্যাবস্থা তার চাপ, উষ্ণতা ও উপাদানগুলির আনুপাতিক ঘনত্ব দ্বারা নির্ধারিত হয়। যে কটি নিরপেক্ষ উপাদান দ্বারা কোন দশার রাসায়নিক গঠন নির্ণয় করা যায় সেই সংখ্যাকে দশার অবয়ব সংখ্যা বলে।

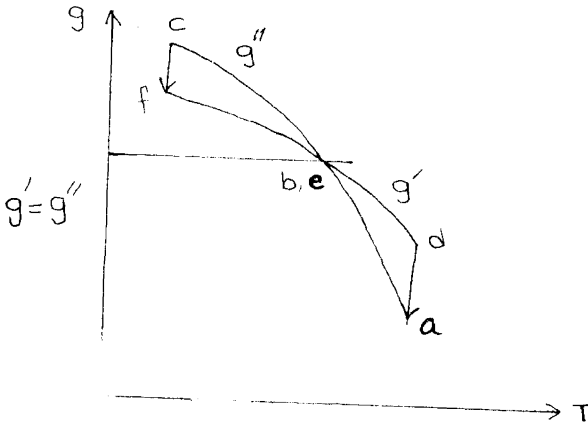
**উদাহরণ** — (1) ধরা যাক, কোন আবদ্ধ পাত্রে নির্দিষ্ট পরিমাণ জল ও সংপৃক্ত বাষ্প পরস্পর সাম্যাবস্থায় আছে। এক্ষেত্রে জলই একমাত্র রাসায়নিক উপাদান যার ঘনত্ব জানলে দশার রাসায়নিক সংস্থিতি নির্ণয় করা যায়। এখানে দশা সংখ্যা দুই কিন্তু অবয়ব সংখ্যা এক।

(2) ধরা যাক, কোন গ্যাসীয় মিশ্রণে হাইড্রোজেন, অক্সিজেন ও তাদের সমন্বয়ে গঠিত জলের অণু নির্দিষ্ট চাপ ও উষ্ণতায় সাম্যাবস্থায় আছে। হাইড্রোজেন, অক্সিজেন ও জল এই তিন প্রকার অণু থাকলেও রাসায়নিক সাম্যাবস্থায় যে কোন দুপ্রকার অণুর ঘনত্ব জানা থাকলে তৃতীয়টির ঘনত্ব স্থির হয়ে যায়। সুতরাং এখানে অবয়ব সংখ্যা স্বতন্ত্র অণুর সংখ্যার সমান অর্থাৎ দুই। যদি মিশ্রণে রাসায়নিক সাম্যাবস্থা তন্ত্ৰে প্রতিষ্ঠিত না হয় তবে জল, হাইড্রোজেন ও অক্সিজেন এই তিনপ্রকার অণুর সংখ্যা মিশ্রণে জানতে হবে। অর্থাৎ এখানে দশা সংখ্যা এক হলেও অবয়ব সংখ্যা তিন।

(3) লবণের (সোডিয়াম ক্লোরাইড) দ্রবণের দশা সংখ্যা এক (তরল দশা) কিন্তু অবয়ব সংখ্যা দুই (সোডিয়াম ক্লোরাইড ও জলের অণু)। একটি তন্ত্রে যে উপাদানগুলিকে অবয়ব হিসাবে নেওয়া যাবে তারা নির্দিষ্ট নয় কিন্তু তাদের সংখ্যা স্থির। রাসায়নিক সাম্যাবস্থায় হাইড্রোজেন, অক্সিজেন ও জলের মধ্যে যে কোন দুটিকে অবয়ব বলা যাবে।



চিত্র 6.1



চিত্র 6.2

চিত্র 6.1 দশা পরিবর্তনকে বোঝান হয়েছে।  $n_1$  ও  $n_2$  দুটি দশার মোলসংখ্যা যারা দশারূপান্তর চলাকালীন পরিবর্তিত হবে। কিন্তু সংপৃক্ত চাপ P অপরিবর্তিত থাকবে।

চিত্র 6.2 উষ্ণতার গিব্‌স অপেক্ষক রেখচিত্র cha ও fed যথাক্রমে দুটি দশার আপেক্ষিক গিব্‌স অপেক্ষকে-পরিবর্তন বোঝায়। b অথবা e বিন্দুতে দুটি দশা একত্রে সাম্যাবস্থায় থাকে।  $g'$  ও  $g''$  দুটি দশার আপেক্ষিক গিব্‌স অপেক্ষক।

স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা — সর্বাপেক্ষা বেশী যে কয়টি তাপগতীয় চলকে স্বাধীনভাবে পরিবর্তিত করলেও তন্ত্র সাম্যাবস্থায় থাকে সেই সংখ্যাকে তন্ত্রের স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা বলে।

উদাহরণ :— (1) জল ও জলীয় বাষ্পের সংপৃক্ত মিশ্রণ একটা নির্দিষ্ট চাপে একটি উষ্ণতায় সাম্যাবস্থায় থাকে, চাপকে পান্টালে সাম্যাবস্থার উষ্ণতার পরিবর্তন হয় কিন্তু সাম্যাবস্থা বজায় থাকে। সুতরাং এখানে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা এক।

(2) একটা নির্দিষ্ট পরিমাণ জল, বরফ ও জলীয় বাষ্প একটা নির্দিষ্ট চাপ ও উষ্ণতায় সাম্যাবস্থায় থাকে। চাপ-উষ্ণতা রেখচিত্রে এই বিন্দুকে ত্রৈধ বিন্দু বলে, এখানে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা শূন্য।

(3) তরল ও তার উপরিভাগের বাষ্প যদি একত্রে সাম্যাবস্থায় না থাকে, তবে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা দুটি চাপ ও উষ্ণতা। উদাহরণ — বাতাসে মুক্ত পাত্রের জল ও তার উপরিভাগের বাষ্প যে কোন চাপ ও উষ্ণতাতে সহাবস্থান করে। তন্ত্র যদি স্থির চাপ ও উষ্ণতায় রাসায়নিক সাম্যাবস্থায় থাকে তবে মোট গিব্‌স অপেক্ষকের মান ন্যূনতম হবে। আগের এককের (5.6) সমীকরণ থেকে লিখতে পারি,

$$dG = -SdT + VdP + \sum_r \sum_k \mu_k^{(r)} dn_k^{(r)},$$

যেখানে k ও r যথাক্রমে রাসায়নিক অবয়ব ও দশা

সংখ্যা নির্দেশ করে। স্থির চাপ ও উষ্ণতায়  $dG = \sum_{r,k} \mu_k^{(r)} dn_k^{(r)}$  যদি তন্ত্রে একটি অবয়ব দুটি দশায়

থাকে,  $dG = \mu_1^{(1)} dn_1^{(1)} + \mu_1^{(2)} dn_1^{(2)}$ , যদি অবয়বগুলির মধ্যে কোন রাসায়নিক বিক্রিয়া না হয় তবে  $n_1^{(1)} + n_1^{(2)}$  ধ্রুবক থাকে। সুতরাং  $dn_1^{(1)} = -dn_1^{(2)}$  এবং  $dG = (\mu_1^{(1)} - \mu_1^{(2)}) dn_1^{(1)}$ .

দশা রূপান্তরে G এর মান কমবে অর্থাৎ  $dG < 0$  হবে। অর্থাৎ  $dn_1^{(1)} > 0$  হলে  $\mu_1^{(1)} < \mu_1^{(2)}$  হবে, অর্থাৎ বেশী রাসায়নিক বিভব থেকে কম রাসায়নিক বিভবসম্পন্ন দশার দিকে অণুর প্রবাহ হবে। সাম্যাবস্থায় G এর মান অবম অর্থাৎ  $dG = 0$  হবে এবং তখন  $\mu_1^{(1)} = \mu_1^{(2)}$  হবে।

ধরা যাক, কোন অসমসত্ত্ব তন্ত্রের C অবয়ব আছে এবং প্রতিটি অবয়ব p সংখ্যক দশায় বর্তমান। তখন মোট গিব্‌স অপেক্ষক প্রতিটি দশার গিব্‌স অপেক্ষক G এর মানের যোগফল হবে। কোন রাসায়নিক বিক্রিয়া না হলে এখানেও আমরা লিখতে পারি যে সবগুলি দশার জন্য প্রতিটি অবয়বের মোট মোল সংখ্যা প্রুবক ও সাম্যাবস্থায় মোট গিব্‌স অপেক্ষকের মান ন্যূনতম। এই দুটি শর্তকে যুগপৎ সিদ্ধ করে আমরা দেখাতে পারি (প্রমাণটি একটি অবয়ব ও দুটি দশার ক্ষেত্রে আগে দেওয়া প্রমাণের অনুরূপ) যে কোন অবয়বের রাসায়নিক বিভব সকল দশাতেই সমান থাকবে। অর্থাৎ আমরা লিখতে পারি,

$$\begin{aligned}\mu_1^1 &= \mu_1^2 = \dots = \mu_1^p \\ \mu_2^1 &= \mu_2^2 = \dots = \mu_2^p \\ \mu_c^1 &= \mu_c^2 = \dots = \mu_c^p\end{aligned}\quad \dots (6.1)$$

সুতরাং মোট  $(p-1)c$  সমীকরণ হবে। আবার প্রতিটি দশায় উপস্থিত সবগুলি অবয়বের মোট মোল ভগ্নাংশ 1 হবে। এইরকম p সংখ্যক সমীকরণের শর্ত পূরণ করতে হবে। সুতরাং মোট সমীকরণের সংখ্যা  $c(p-1) + p$ .

আবার, সাম্যাবস্থায় যে কোন দশাতে c সংখ্যক অবয়বের জন্য c সংখ্যক মোল ভগ্নাংশ জানতে হবে। এছাড়াও সাম্যাবস্থায় তন্ত্রের চাপ ও উষ্ণতা জানতে হবে। সুতরাং, মোট জ্ঞাতব্য চলের সংখ্যা  $cp + 2$ .

সুতরাং, স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা = জ্ঞাতব্য চলের সংখ্যা - সমীকরণের সংখ্যা

$$\begin{aligned}&= cp + 2 - [c(p-1) + p] \\ &= c - p + 2\end{aligned}\quad \dots (6.2)$$

যদি কোন দশায় কিছু অবয়ব না থাকে তবে জ্ঞাতব্য চল ও যে সমীকরণগুলি সিদ্ধ হতে হবে এই উভয়েরই সংখ্যা একই হারে কমবে। ফলে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা  $c - p + 2$  এর সমানই থাকবে। যদি তন্ত্রটিতে অবয়বগুলির মধ্যে r সংখ্যক নিরপেক্ষ রাসায়নিক বিক্রিয়া হয় তবে দেখান যায় যে,

$$\text{স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা} = (c - r) - p + 2 \quad \dots (6.3)$$

(6.2) এবং (6.3) সমীকরণদুটিকে গিব্‌সের দশনীতি বলে।

রাসায়নিক বিক্রিয়াবিহীন অবস্থায় গিব্‌সের দশনীতির প্রয়োগ নীচের কয়েকটি উদাহরণে দেওয়া হল



(1) জল, বরফ ও জলীয় বাষ্প যদি দশারূপান্তরে পরস্পর সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে অবয়ব সংখ্যা 1 এবং দশা সংখ্যা 3। সুতরাং গিবস দশানীতি (6.2) সমীকরণ প্রয়োগ করে পাই, স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা শূন্য। এই কারণেই, একটা নির্দিষ্ট উষ্ণতা ও চাপেই কেবলমাত্র তিনটি দশা সাম্যাবস্থায় থাকতে পারে। চাপ উষ্ণতা রেখচিত্রে সাম্যাবস্থা নির্দেশক এই বিন্দুকে ত্রৈধবিন্দু বলে। এই বিন্দুটি সম্পর্কে আমরা পরে বিস্তারিত আলোচনা করব।

(2) যদি তরল ও তার উপরিভাগের বাষ্প পরস্পর সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে অবয়ব সংখ্যা 1 এবং দশা সংখ্যা 2। সুতরাং

স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা = 1 — 2 + 2 = 1, উষ্ণতা ও চাপের মধ্যে যে কোন একটিকে স্বাধীন চল নেওয়া যেতে পারে। যদি উষ্ণতা স্থির রেখে পারিপার্শ্বিক চাপকে ঐ উষ্ণতায় সংপৃক্ত বাষ্পচাপের থেকে বেশী রাখা যায় তবে অতিরিক্ত বাষ্প ঘনীভূত হয়ে তরলে রূপান্তরিত হবে এবং বাষ্প চাপ সংপৃক্ত বাষ্পচাপের সমান হয়ে তন্ত্রে সাম্যাবস্থা প্রতিষ্ঠিত হবে। পারিপার্শ্বিক চাপকে যদি ঐ উষ্ণতার সংপৃক্ত বাষ্পচাপের থেকে কম রাখা যায় তবে বাষ্পীভবন হতে থাকবে যতক্ষণ তন্ত্রে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি না হয়।

## 6.4 দশা রূপান্তরের সাধারণ সমীকরণ

যদিও এই সমীকরণটি আগের এককে (5.8 অনুচ্ছেদ দেখুন) আলোচিত হয়েছে। তবুও পাঠকদের অবগতির জন্য ও আলোচনার ধারাবাহিকতার জন্য আমরা এই আলোচনা এখানে সংক্ষেপে বর্ণনা করব। দশা রূপান্তরে একাধিক দশা সাম্যাবস্থায় থাকে। প্রতিটি দশার চাপ, উষ্ণতা ও দশা পরিবর্তনে অবয়বগুলির মোট ভর, আয়তন ও আন্তরশক্তি স্থির থাকবে। সুতরাং অণুপরিমাণ দশা পরিবর্তনের জন্য

$$\delta M = \delta m_1 + \delta m_2 = 0 \quad \dots (6.4a)$$

$$\delta V = (m_1 \delta v_1 + m_2 \delta v_2) + (v_1 \delta m_1 + v_2 \delta m_2) = 0 \quad \dots (6.4b)$$

$$\delta U = (m_1 \delta u_1 + m_2 \delta u_2) + (u_1 \delta m_1 + u_2 \delta m_2) = 0 \quad \dots (6.4c)$$

যেখানে  $m_1, m_2$  যথাক্রমে দুটি দশায় উপস্থিত অবয়বগুলির ভর,  $u_1$  ও  $u_2$  প্রতি একক ভরের অবয়বের আন্তরশক্তি।

যেহেতু দশা দুটি যৌথভাবে একটা বিচ্ছিন্ন তন্ত্রের সাম্যাবস্থা নির্দেশ করে, অণু পরিমাণ আপাতস্থির পরিবর্তনের জন্য  $\delta S = 0$  যেখানে S দুটি তন্ত্রের মোট এনট্রপি।

$$\begin{aligned}
\text{সুতরাং } \delta S &= (m_1 \delta s_1 + m_2 \delta s_2) + (s_1 \delta m_1 + s_2 \delta m_2) \\
&= m_1 \left( \frac{\delta u_1 + P_1 \delta v_1}{T_1} \right) + m_2 \left( \frac{\delta u_2 + P_2 \delta v_2}{T_2} \right) + s_1 \delta m_1 + s_2 \delta m_2 \\
&= 0 \qquad \dots (6.5)
\end{aligned}$$

(6.5) এবং (6.4) সমীকরণগুলি থেকে পাই,

$$\left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) m_1 \delta u_1 + \left( \frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2} \right) m_1 \delta v_1 + \left[ (s_1 - s_2) + \frac{u_2 - u_1 + P_2(v_2 - v_1)}{T_2} \right] \delta m_1 = 0$$

যেহেতু অণু পরিবর্তনের জন্য  $\delta u_1, \delta v_1$  ও  $\delta m_1$  পরস্পর নিরপেক্ষ

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2}, \text{ অথবা } T_1 = T_2 = T$$

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}, \text{ অথবা } P_1 = P_2 = P$$

$$s_1 - \left( \frac{u_1 + P_1 v_1}{T_1} \right) = s_2 - \left( \frac{u_2 + P_2 v_2}{T_2} \right)$$

$$\text{বা, } TS_1 - (u_1 + P_1 v_1) = TS_2 - (u_2 + P_2 v_2)$$

$$\text{অথবা, } g_1 = g_2 \qquad (6.6)$$

অর্থাৎ, প্রতি একক ভরের গিব্‌স অপেক্ষকের মান দুটি দশাতে সাম্যাবস্থায় সমান হবে। দুই এর বেশী দশার পারস্পরিক সাম্যাবস্থার ক্ষেত্রেও একই সিদ্ধান্ত প্রযোজ্য হবে। অনুচ্ছেদ (6.3) এ দেখেছি যে দশা সাম্যাবস্থায় দুটি দশায় অবয়বের রাসায়নিক বিভবের মান এক হবে। অর্থাৎ সাম্যাবস্থায় শর্ত হল, (দুটি দশার জন্য)

$$g_1 = g_2 \text{ এবং } \mu_1(T, P) = \mu_2(T, P)$$

## 6.5 প্রথম ও দ্বিতীয় ক্রমের দশা রূপান্তর

দশা সাম্যাবস্থার শর্ত হল  $g_1 = g_2$

নির্দিষ্ট মোলসংখ্যার অবয়বের দশা পরিবর্তনের জন্য

$$dg_1 = \nu_1 dp - s_1 dT \text{ এবং}$$

$$dg_2 = \nu_2 dp - s_2 dT$$

$$\text{বা, } \nu_1 = \left( \frac{\partial g_1}{\partial p} \right)_T, \quad \nu_2 = \left( \frac{\partial g_2}{\partial p} \right)_T$$

$$S_1 = - \left( \frac{\partial g_1}{\partial T} \right)_p, \quad S_2 = - \left( \frac{\partial g_2}{\partial T} \right)_p \quad \dots (6.7)$$

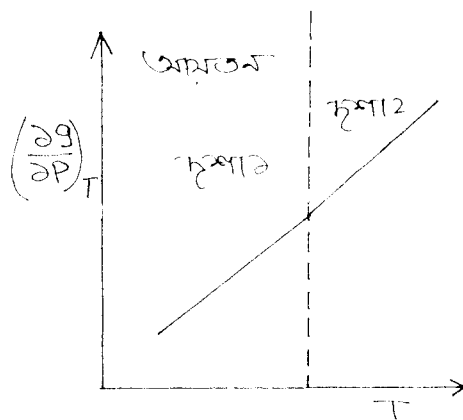
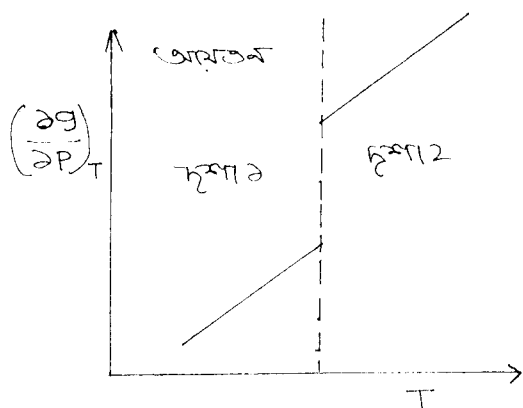
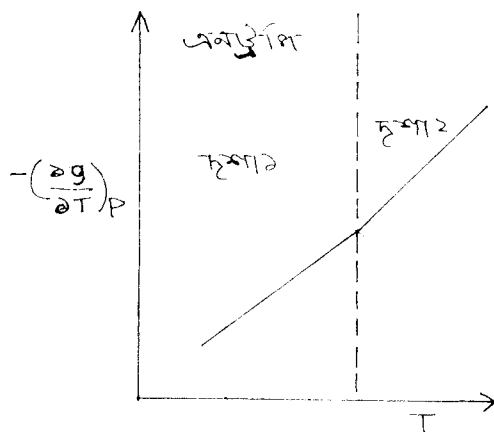
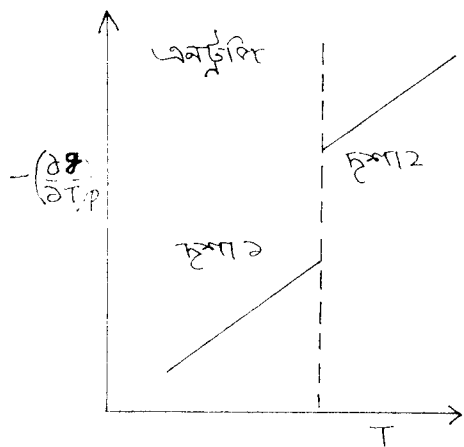
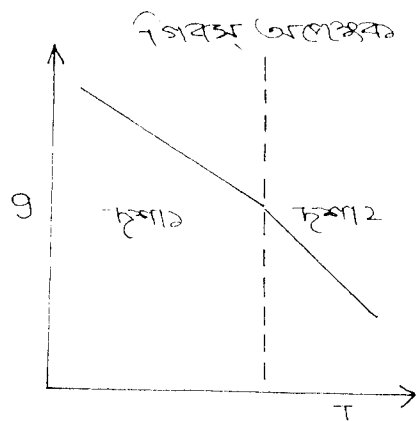
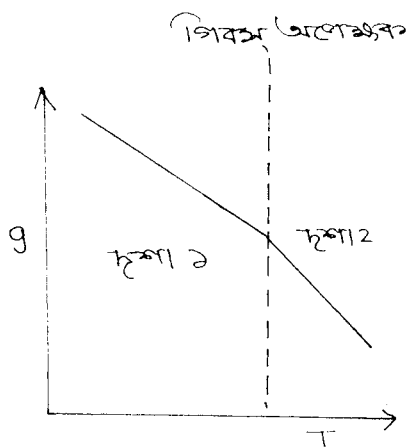
যদি দশা রূপান্তরে আপেক্ষিক গিব্‌স অপেক্ষক অপরিবর্তিত থাকে কিন্তু উষ্ণতা অথবা চাপের সাপেক্ষে গিব্‌স অপেক্ষকের প্রথম আংশিক অবকলের মানের অসম্মত পরিবর্তন হয় তবে দশা পরিবর্তনটিকে প্রথম ক্রমের দশা রূপান্তর বলে। অর্থাৎ (6.7) সমীকরণ দুটি থেকে বলতে পারি যে এক্ষেত্রে আপেক্ষিক আয়তন ও এনট্রপি (যথাক্রমে  $\nu_1, \nu_2$  ও  $s_1, s_2$ ) দুটি দশাতে সমান হবে না। যেহেতু  $S_2 - S_1 \neq 0$ , সুতরাং  $T(S_2 - S_1)$  এর সমান মানের আপেক্ষিক লীনতাপ দশা রূপান্তরে গৃহীত বা বর্জিত হয়। সঙ্কট তাপমাত্রার নীচে কোন উষ্ণতায় তরল বাষ্পের রূপান্তর, কঠিন-তরল অথবা কঠিন বাষ্প দশার পারস্পরিক রূপান্তর প্রথম ক্রমের দশা পরিবর্তনের উদাহরণ।

দ্বিতীয় ক্রমের দশা পরিবর্তনে আপেক্ষিক গিব্‌স অপেক্ষক ও উষ্ণতা অথবা চাপের সাপেক্ষে আপেক্ষিক গিব্‌স অপেক্ষকের প্রথম আংশিক অবকলের মান স্থির থাকে কিন্তু ঐ চলগুলির সাপেক্ষে আপেক্ষিক

গিব্‌স অপেক্ষকের দ্বিতীয় আংশিক অবকল দশা রূপান্তরে পরিবর্তিত হয়। অর্থাৎ  $\left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p, \left( \frac{\partial \nu}{\partial T} \right)_p$

ইত্যাদি রাশিগুলির মানের অসম্মত পরিবর্তন হয়। নিম্নলিখিত দশা রূপান্তরগুলি দ্বিতীয় ক্রমের দশা পরিবর্তনের উদাহরণ।

- (1) তরল হিলিয়াম -1 থেকে তরল হিলিয়াম -2 অবস্থায় রূপান্তর।
- (2) চৌম্বকক্ষেত্রের অনুপস্থিতিতে অডি পরিবাহী অবস্থা থেকে সাধারণ পরিবাহীতে পরিবর্তন।
- (3) কুরী উষ্ণতায় অয়শেচৌম্বকত্ব থেকে পরাচৌম্বকত্বে রূপান্তর, প্রথম ক্রমের ও দ্বিতীয় ক্রমের দশা রূপান্তর 6.3 নং চিত্রে দেখান হয়েছে। দুটি ভিন্ন মোলার আয়তনের তরল ও বাষ্পের মধ্যে সাম্যাবস্থা যথাক্রমে চিত্র নং 6.1 এবং 6.2 এ দেখান হয়েছে। a-b-c ও d-e-f প্রদর্শিত পথে যথাক্রমে তরল ও বাষ্পের আপেক্ষিক গিব্‌স অপেক্ষকের উষ্ণতার সাপেক্ষে পরিবর্তন দেখান হয়েছে চিত্র নং 6.2- এ।



চিত্র 6.3 প্রথম ও দ্বিতীয় ক্রমের দশা রূপান্তর

## 6.6 প্রথম ক্রমের দশা পরিবর্তন

প্রথম ক্রমের দশা রূপান্তরের শর্ত থেকে পাই,

চাপ  $P$  ও উষ্ণতা  $T$  তে দশা পরিবর্তনের জন্য  $g_1 = g_2$

চাপ  $P + dP$  ও উষ্ণতা  $T + dT$  তে দশা পরিবর্তনের জন্য  $g_1 + dg_1 = g_2 + dg_2$

সুতরাং  $dg_1 = dg_2$

অথবা  $v_1 dp - S_1 dT = v_2 dp - S_2 dT$

বা,  $\frac{dp}{dT} = \frac{S_2 - S_1}{V_2 - V_1} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}$ , যেখানে  $S_2 - S_1 =$  আপেক্ষিক এনট্রপির পরিবর্তন  $= L/T$

( $L = T$  উষ্ণতায় দশা রূপান্তরের জন্য) প্রয়োজনীয় গৃহীত বা বর্জিত লীনতাপ  $L$ । সুতরাং আমরা লিখতে পারি,

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{সংপৃক্ত}} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)} \quad (\text{যেহেতু দশা রূপান্তরের সময় দুটি দশা একত্রে সংপৃক্ত অবস্থায় থাকে})$$

আমরা  $\frac{dp}{dT} = \left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{সংপৃক্ত}}$  (6.7) সম্পৃক্ত বসিয়েছি তরলের বাষ্পীভবনে  $v_2 > v_1$  হয়। সুতরাং

এক্ষেত্রে  $\frac{dp}{dT} > 0$  বা উষ্ণতার সাথে সংপৃক্ত বাষ্পচাপ বাড়ে। জল থেকে জলীয় বাষ্প রূপান্তরে

$v_2 > v_1$  ( $v_1 = 1$  সি. সি. ,  $v_2 = 1640$  সি. সি.)  $T = 373^\circ$  (কে  $L = 540$  ক্যালরি বসিয়ে পাই,

$\frac{dp}{dT} \approx 27$  মি. মি. পারদের চাপ / $^\circ$  কে। 1 অর্থাৎ বায়ুমন্ডলের চাপ 27 মি. মি বাড়লে তরলের স্ফুটনাঙ্ক

$1^\circ$  সে বৃদ্ধি পায়। কঠিন পদার্থের তরলীভবনে যদি আয়তন বাড়ে তবে গলনাঙ্ক চাপের সাথে বাড়ে ও বিপরীতক্রমে আয়তন কমলে চাপ বৃদ্ধি পেলে গলনাঙ্ক কমবে। উদাহরণস্বরূপ বরফের গলনাঙ্ক চাপ বৃদ্ধির সাথে কমে, যেহেতু কঠিন-তরল দশা রূপান্তরে আয়তনের পরিবর্তন বাষ্পীভবনে ( বাষ্পের তরলীভবনে)

আয়তনের পরিবর্তনের থেকে অনেক কম হয়। চাপের পরিবর্তনের সাথে গলনাঙ্কের পরিবর্তনের হার খুব কম। সংপৃক্ত চাপ 1 বায়ুমন্ডলের সমান পরিবর্তনের জন্য বরফের গলনাঙ্কের পরিবর্তন হয় মাত্র

$0.007^\circ\text{C}$  এর কাছাকাছি।

## উষ্ণতার সাথে সংপৃক্ত বাষ্পচাপের পরিবর্তন

তরলের বাষ্পীভবনের ক্ষেত্রে  $v_g \gg v_l$ , যেখানে  $v_g$  ও  $v_l$  যথাক্রমে বাষ্পীয় ও তরল অবস্থায় আপেক্ষিক আয়তন। সুতরাং এই ক্ষেত্রে ক্লসিয়াস ক্ল্যাপেরনের সূত্র প্রয়োগ করে পাই।

$$\frac{dP}{dT} \sim \frac{L}{Tv_g}$$

বাষ্পকে আদর্শ গ্যাসের মত আচরণ করে ধরলে এক মোল সংপৃক্ত বাষ্পের জন্য আমরা লিখতে পারি,  $v_g = \frac{RT}{P}$

ওপরের সমীকরণে বসিয়ে পাই  $\frac{dP}{dT} = \frac{LMP}{RT^2}$ , যেখানে M আণবিক ভর ও L একক ভরের জন্য প্রয়োজনীয় বাষ্পীভবনের লীনতাপ।

$$\text{সুতরাং } \frac{dP}{P} = \frac{LM}{RT^2} dT$$

সমাকল করে পাই  $\ln P = A + \frac{B}{T}$ , যেখানে A ও B ধ্রুবক।

$\left( B = -\frac{ML}{R} \right)$ । এই সমীকরণকে ইয়ং এর সমীকরণ বলে। উষ্ণতার সাথে লীনতাপের পরিবর্তন

বিবেচনা করলে উষ্ণতার সাথে সংপৃক্ত বাষ্পচাপের পরিবর্তনের যে সম্পর্ক পাওয়া যায় তা পরীক্ষালব্ধ উপাত্তের সাথে বেশী সঙ্গতিপূর্ণ। যদি  $L = C + DT$  ধরা যায়, যেখানে C ও D ধ্রুবক তবে ক্লসিয়াস ক্ল্যাপেরনের সমীকরণে বসিয়ে সমাকল করে পাই,

$$\ln P = A + \frac{B}{T} + C \ln T, \text{ যেখানে } A, B \text{ ও } C \text{ ধ্রুবক।} \quad \dots (6.8)$$

এই সমীকরণকে কিরশফের সূত্র বলে।

## উষ্ণতার সাথে লীনতাপের পরিবর্তন

স্থির উষ্ণতায় দশা রূপান্তরে  $\frac{L}{T} = S_2 - S_1$ , (যেখানে L আপেক্ষিক লীনতাপ,)  $S_2$  ও  $S_1$  দুটি দশায় আপেক্ষিক এনট্রপি।

$$\text{অথবা, } \frac{d}{dT} \left( \frac{L}{T} \right) = \frac{1}{T} \frac{dL}{dT} - \frac{L}{T^2} = \frac{dS_2}{dT} - \frac{dS_1}{dT}$$

বা,  $\frac{dL}{dT} - \frac{L}{T} = T \left( \frac{dS_2}{dT} - \frac{dS_1}{dT} \right) = C_{S_2} - C_{S_1}$  যেখানে  $C_{S_2}$  ও  $C_{S_1}$  যথাক্রমে T উষ্ণতায় দ্বিতীয়

ও প্রথম দশার আপেক্ষিক তাপ। (দুটি দশাই এখানে সংপৃক্তভাবে সাম্যাবস্থায় আছে)..... (6.9)

$$\text{এখন } \left( \frac{dS}{dT} \right)_{\text{সংপৃক্ত}} = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p + \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T \left( \frac{dP}{dT} \right)_{\text{সংপৃক্ত}}$$

অথবা  $C_S = C_p - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{L}{(V_2 - V_1)}$  (ম্যাক্সওয়েলের তাপগতীয় সমীকরণ ও ক্লসিয়াস

ক্ল্যাপেরনের সমীকরণ ব্যবহার করে)

ওপরের সমীকরণটি (6.9) সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{dL}{dT} = \frac{L}{T} + C_{p_2} - C_{p_1} - \frac{L}{(V_2 - V_1)} \left[ \left( \frac{\partial V_2}{\partial T} \right)_p - \left( \frac{\partial V_1}{\partial T} \right)_p \right] \quad (6.10)$$

0° সে — এ বরফ জল দশা পরিবর্তনে আমরা লিখতে পারি,

$(C_p)_2 =$  জলের আপেক্ষিক তাপ = 1 ক্যালরি,

$(C_p)_1 =$  বরফের আপেক্ষিক তাপ = 0.505 ক্যালরি,

$L =$  গলন লীনতাপ = 80 ক্যালরি/গ্রাম,

$v_2 = 1$  গ্রাম জলের আয়তন = 1 সি. সি.

$v_1 = 1$  গ্রাম বরফের আয়তন = 1.09 সি.সি

$\left( \frac{dv_2}{dT} \right)_p = -0.00006$  সিসি/°সে,  $\left( \frac{dv_1}{dT} \right)_p = -0.00011$  সি. সি./°সে। এই মানগুলি সমীকরণ

(6-10) তে বসিয়ে পাই,  $\frac{dL}{dT} = 0.64$  ক্যালরি/°সে

সুতরাং যদি বাইরের বায়ুমন্ডলের চাপ নিয়ন্ত্রিত করে বরফকে  $-1^\circ\text{C}$  এ অতিশীতল করা যায়, তবে গলনের লীনতাপ  $0^\circ\text{C}$  এর তুলনায়  $-1^\circ\text{C}$  এ 0.64 ক্যালরি/গ্রাম কমে যাবে।

## সংপৃক্ত বাষ্পের আপেক্ষিক তাপ

পূর্ব আলোচনা থেকে পাই,  $100^{\circ}\text{C}$ এ সংপৃক্ত জলের আপেক্ষিক তাপ

$$(C_s)_1 = (C_p)_1 - \frac{L}{v_2 - v_1} \frac{dv_1}{dT},$$

যেখানে চিহ্নগুলি স্বাভাবিক অর্থবহ। জলের ক্ষেত্রে  $L = 540$  ক্যালরি,  $v_2 - v_1 \approx 1674$  সি. সি. (প্রায়),  $\frac{dv_1}{dT} = 0.001$  সি. সি./ $^{\circ}\text{C}$  (প্রায়),  $100^{\circ}\text{C}$  উষ্ণতায় জলের ক্ষেত্রে  $(C_p)_1$  আনুমানিক 1.007 ক্যালরি ধরলে  $(C_s)_1$  ও প্রায় 1.007 ক্যালরি হয় কারণ দ্বিতীয় পদটির মান প্রথমটির সাপেক্ষে প্রায় উপেক্ষণীয়।

ক্রসিয়াসের সমীকরণ (6.9) থেকে পাই,

$$(C_s)_2 = (C_s)_1 + \frac{dL}{dT} - \frac{L}{T}$$

$$= 1.007 - 0.64 - \frac{540}{373}$$

$\approx -1.07$  ক্যালরি। অর্থাৎ ঋণাত্মক।

$100^{\circ}\text{C}$  উষ্ণতায় জলীয় বাষ্পের (সংপৃক্ত অবস্থায়) আপেক্ষিক তাপ ঋণাত্মক হবার কারণটা বিশ্লেষণ করা যাক।

ধরা যাক, জলীয় বাষ্পকে  $100^{\circ}$  সে থেকে  $101^{\circ}$  সে. এ উত্তপ্ত করা হল সমচাপে।  $100^{\circ}$  সে. সংপৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ 760 মি. মি. পারদস্তম্ভের চাপের সমান ও  $101^{\circ}$  সে. এ সংপৃক্ত বাষ্পের চাপ 787 মি. মি. পারদস্তম্ভের চাপের সমান। কাজেই,  $101^{\circ}$  সে. এ উত্তপ্ত করলে জলীয় বাষ্প অসংপৃক্ত হয়ে যায়। সুতরাং জলীয় বাষ্পকে সংপৃক্ত রাখতে হলে এর ওপর চাপ বাড়াতে হবে অর্থাৎ উত্তপ্ত জলীয় বাষ্পকে সংনমিত করতে হবে। যদি রুদ্ধতাপ অবস্থায় সংনমন করা হয় তবে জলীয় বাষ্প অতিতাপিত হবে। উষ্ণতা স্থির রাখতে হলে তন্ত্রকে অতিরিক্ত তাপ বর্জন করতে হবে। এই কারণে, জলীয় বাষ্পকে  $100^{\circ}$  সে. থেকে  $101^{\circ}$  সে. উষ্ণতা বাড়াতে তাপ দিতে হবে আবার জলীয় বাষ্পের সংপৃক্ত অবস্থা বজায় থাকতে গেলে তন্ত্রকে অতিরিক্ত তাপ বর্জন করতে হবে।  $100^{\circ}\text{C}$  এ জলীয় বাষ্পের ক্ষেত্রে বর্জিত তাপ গৃহীত তাপের থেকে বেশী হয়।

সুতরাং সংপৃক্ত জলীয় বাষ্পের ক্ষেত্রে মোট গৃহীত তাপ ঋণাত্মক এবং মূলতঃ আপেক্ষিক তাপ ঋণাত্মক।



## 6.7 ত্রৈধবিন্দু

অসমসত্ত্ব তত্ত্বের সাম্যাবস্থা আলোচনা প্রসঙ্গে (অনুচ্ছেদ 6.2 দ্রষ্টব্য) আপনারা দেখেছেন যে জলের তিনটি দশা (জল, বরফ ও জলীয় বাষ্প) কেবলমাত্র একটি চাপ ও উষ্ণতায় পরস্পর সাম্যাবস্থায় থাকতে পারে। P-T রেখচিত্রে এই সাম্যাবস্থা একটি বিন্দু দিয়ে নির্দেশিত হয়। এই বিন্দুকে জলের ত্রৈধবিন্দু বলে। এই ত্রৈধবিন্দুর মান নির্ধারণ করা যাক। চাপ-উষ্ণতা রেখচিত্রে (চিত্র 6.4) তরল বাষ্প, কঠিন-তরল ও কঠিন-বাষ্প দশাগুলির সাম্যাবস্থা যথাক্রমে OA, OC এবং OB রেখাত্রয়ী দিয়ে নির্দেশ করা হয়েছে। রেখা তিনটির নতি ক্লসিয়াস - ক্ল্যাপেরন সমীকরণ ব্যবহার করে নিরূপণ করা যায়।

$$0^\circ\text{C উষ্ণতায় OA রেখার নতি} = \frac{L_1}{T_1(\nu_g - \nu_l)}, \text{ যেখানে } L_1 \text{ } 0^\circ\text{C উষ্ণতায় বাষ্পীভবনের}$$

লীনতাপ = 607 ক্যালরি/গ্রাম,  $T_1 = 273^\circ$  কে,  $\nu_l = 1$  সি. সি. এবং  $\nu_g - \nu_l \approx 21 \times 10^4$  সি. সি.।

$$\text{মানগুলি বসিয়ে পাই, } \frac{dP}{dT} = \frac{607 \times 4.2 \times 10^7}{273 \times 21 \times 10^4} \approx 0.337 \text{ মি. মি. পারদ স্তম্ভের চাপ /}^\circ\text{সে।}$$

$$0^\circ\text{C উষ্ণতায় OB রেখার নতি} = \frac{L_2}{T_2(\nu_g - \nu_s)}, \text{ যেখানে } 0^\circ\text{C উষ্ণতায় উর্ধ্বপাতনের লীনতাপ}$$

$L_2 = 687$  ক্যালরি/গ্রাম,  $T_2 = 273^\circ$  কে  $\nu_g - \nu_s \approx 21 \times 10^4$  সি. সি.। মানগুলি বসিয়ে পাই,

$$\frac{dP}{dT} = \frac{687 \times 4.2 \times 10^7}{273 \times 21 \times 10^4} \approx 0.376 \text{ মি. মি. পারদস্তম্ভের চাপ/}^\circ\text{সে।}$$

$$0^\circ\text{C উষ্ণতায় OC রেখার নতি} = \frac{L_3}{T_3(\nu_l - \nu_s)}, \text{ যেখানে } 0^\circ\text{C উষ্ণতায়}$$

গলনের লীনতাপ  $L_3 = 80$  ক্যালরি/গ্রাম,  $T_3 = 273^\circ$  কে,  $\nu_l - \nu_s \approx -0.09$  সি. সি. মানগুলি বসিয়ে পাই,

$$\frac{dP}{dT} = -\frac{80 \times 4.2 \times 10^7}{273 \times 0.09} \approx -9.7 \times 10^4 \text{ মি. মি. পারদস্তম্ভের চাপ/}^\circ\text{সে।}$$

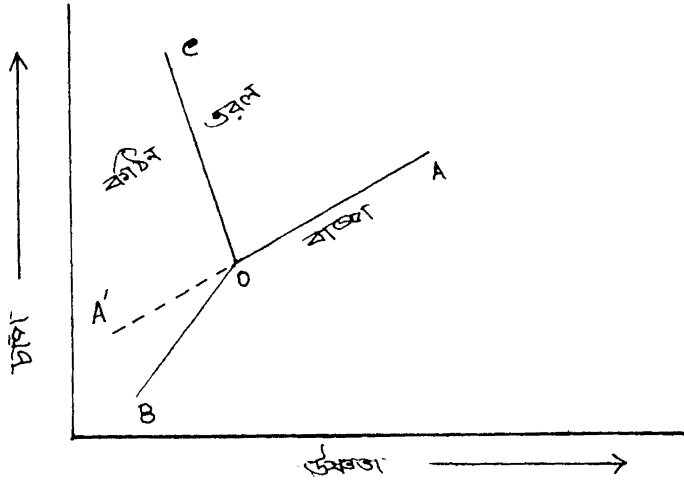
P-T রেখচিত্রে OC রেখার নতি, এই কারণে অন্য দশা - রূপান্তর রেখাগুলির সাপেক্ষে অনেক বেশী দেখান হয়েছে।

OA রেখার সমীকরণ  $g_v = g_l$ , যেখানে  $g_v$  ও  $g_l$  যথাক্রমে বাষ্প অবস্থায় ও তরল অবস্থায় আপেক্ষিক গিব্‌স অপেক্ষকের মান। অনুরূপভাবে OB ও OC রেখার সমীকরণ  $g_s = g_v$  ও  $g_s = g_l$ , যেখানে  $g_s$  কঠিন অবস্থার আপেক্ষিক গিব্‌স অপেক্ষকের মান। স্পষ্টতঃই যে কোন দুটি রেখার সমীকরণ থেকে তৃতীয় রেখাটির সমীকরণ বার করা যাচ্ছে। এই তিনটি রেখার একটি ছেদবিন্দু যে থাকবে তা বোঝা যাচ্ছে। এই ছেদবিন্দুটিই জলের ত্রৈধবিন্দু।

এখন  $0^\circ\text{C}$  উষ্ণতায় জলের সংপৃক্ত বাষ্পচাপ 4.58 মি. মি. পারদস্তম্ভের চাপের সমান এবং বরফের গলনের সংপৃক্ত চাপ 760 মি. মি. পারদস্তম্ভের চাপের সমান। জল-বরফের দশা রূপান্তরের রেখার নতির (P-T রেখচিত্রে) মান  $9.7 \times 10^4$  মি. মি. পারদস্তম্ভের চাপ/ $^\circ\text{C}$  বসিয়ে পাই যে 4.58 মি. মি. পারদস্তম্ভের চাপের সমান মান সংপৃক্ত অবস্থায় গলনের চাপের সমান হতে গেলে প্রয়োজনীয় উষ্ণতার পরিবর্তন প্রায়  $0.0075^\circ\text{C}$ । যেহেতু বাষ্পীভবন রেখা OA এবং উর্ধ্বপাতন রেখার নতি  $\frac{dP}{dT}$  প্রায় উপেক্ষণীয়, সুতরাং আমরা ধরতে পারি যে  $0.0075^\circ\text{C}$  উষ্ণতাতেও সংপৃক্ত বাষ্পচাপ বা উর্ধ্বপাতন চাপ প্রায় 4.58 মি. মি. পারদস্তম্ভের চাপের সমান থাকবে। অতএব, আমরা বলতে পারি যে জলের ক্ষেত্রে ত্রৈধবিন্দুর উষ্ণতা ও চাপ যথাক্রমে  $0.0075^\circ\text{C}$  ও 4.58 মি. মি. পারদস্তম্ভের চাপের সমান।

ত্রৈধবিন্দুতে  $S_2 - S_1 = \frac{L_{12}}{T}$ ,  $S_3 - S_2 = \frac{L_{23}}{T}$ ,  $S_3 - S_1 = \frac{L_{31}}{T}$ , যেখানে  $S_1$ ,  $S_2$  ও  $S_3$  যথাক্রমে ত্রৈধবিন্দুতে তিনটি দশার আপেক্ষিক এনট্রপি ও  $L_{12}$ ,  $L_{23}$ ,  $L_{31}$  যথাক্রমে  $1 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 3$  ও  $3 \rightarrow 1$  দশারূপান্তরের জন্য প্রয়োজনীয় আপেক্ষিক লীনতাপ। সুতরাং ওপরের তিনটি সমীকরণ থেকে আমরা লিখতে পারি,  $L_{31} = L_{12} + L_{23}$ । আবার যেহেতু ত্রৈধবিন্দুতে তিনটি দশা একত্রে সাম্যাবস্থায় থাকে,  $\mu_1(P_0, T_0) = \mu_2(P_0, T_0) = \mu_3(P_0, T_0)$ , যেখানে  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  ত্রৈধবিন্দু  $(P_0, T_0)$  তে তিনটি দশার আপেক্ষিক রাসায়নিক বিভব। ত্রৈধবিন্দুর যে কোন একটি স্থানাঙ্ক (ধরি, উষ্ণতা) স্থির রেখে অন্যটি পরিবর্তিত করলে একটি দশা থেকে অন্য একটি দশায় সরাসরি রূপান্তর সম্ভব তৃতীয় দশার ভিতর দিয়ে না গিয়েও।

জলের মত কার্বন-ডাই-অক্সাইডও কঠিন তরল ও বাষ্প এই তিন দশা একত্রে ত্রৈধ বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় থাকতে পারে। এই ত্রৈধ বিন্দুর উষ্ণতা ও চাপ যথাক্রমে  $56.7^{\circ}\text{C}$  ও  $5.1$  বায়ুমন্ডলের চাপ (প্রায়)। অনেক পদার্থের একাধিক কেলাস গঠন থাকতে পারে। সেখানে পদার্থের একাধিক ত্রৈধবিন্দু থাকতে পারে। এই ত্রৈধবিন্দুগুলি তিনটি কেলাস গঠনের পারস্পরিক সাম্যাবস্থা, দুটি কেলাস রূপ ও একটি তরল দশা বা দুটি কেলাস রূপ ও একটি গ্যাসীয় দশার মধ্যে সাম্যাবস্থা নির্দেশ করবে। জলের ত্রৈধবিন্দুর যেহেতু একটি নির্দিষ্ট মান আছে সুতরাং এই বিন্দুকে উষ্ণতা পরিমাপের প্রসঙ্গে একটি প্রামাণিক উষ্ণতা হিসাবে নেওয়া হয়।



চিত্র 6.4

O বিন্দু এখানে ত্রৈধবিন্দু। OA, OB ও OC রেখাত্রয়ী যথাক্রমে তরল-বাষ্প, কঠিন-তরল ও কঠিন-বাষ্প দশাযুগ্মের সাম্যাবস্থা নির্দেশ করে। OA' রেখা অতিশীতল তরলের বাষ্পচাপ নির্দেশ করে।

## 6.8 দ্বিতীয় ক্রমের দশা পরিবর্তন

অনুচ্ছেদ 6.3 এ আপনারা দ্বিতীয় ক্রমের দশা পরিবর্তনের সাধারণ বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে পরিচিত হয়েছেন। গাণিতিক ভাষায় এই বৈশিষ্ট্যগুলিকে প্রকাশ করা যায় এইভাবে —

$$g_2 - g_1 = 0 \quad (6.11)$$

$$-\left(\frac{\partial g_2}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial g_1}{\partial T}\right)_p = S_2 - S_1 = 0 \quad (6.12)$$

$$\left(\frac{\partial g_2}{\partial p}\right)_T - \left(\frac{\partial g_1}{\partial p}\right)_T = \nu_2 - \nu_1 = 0 \quad (6.13)$$

$$\text{আবার } C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = T \frac{\partial}{\partial T} \left[ - \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p \right]_p = -T \left(\frac{\partial^2 g}{\partial T^2}\right)_p$$

$$k\nu = - \left(\frac{\partial \nu}{\partial p}\right)_T = - \frac{\partial}{\partial p} \left[ \left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_T \right]_T = - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}\right)_T$$

$$\alpha\nu \left(\frac{\partial \nu}{\partial T}\right)_p = \frac{\partial}{\partial T} \left[ \left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_T \right]_p = \frac{\partial^2 g}{\partial T \partial p} \text{ যেখানে}$$

$k =$  সমোষ্ণ সংনমতা ও  $\alpha =$  আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক।

যেহেতু আপেক্ষিক গিবস অপেক্ষকের দ্বিতীয় ক্রমের অবকলগুলি দশা পরিবর্তনে অসম্ভবভাবে পান্টায়,

আমরা লিখতে পারি,

$$\left(\frac{\partial^2 g_2}{\partial T^2}\right)_p - \left(\frac{\partial^2 g_1}{\partial T^2}\right)_p = \frac{C_{P_1} - C_{P_2}}{T} \quad (6.14)$$

$$\left(\frac{\partial^2 g_2}{\partial p^2}\right)_T - \left(\frac{\partial^2 g_1}{\partial p^2}\right)_T = \nu(k_1 - k_2) \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial T \partial p} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial T \partial p} = \nu(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (6.16)$$

আপেক্ষিক এনট্রপির দুটি দশায় একই মান থাকবে।

সুতরাং  $S_1 = S_2$  (উষ্ণতা  $T$  ও চাপ  $P$  তে)

আবার  $S_1 + dS_1 = S_2 + dS_2$  (উষ্ণতা  $T + dT$  ও চাপ  $P + dP$  তে)

$$\text{সুতরাং } dS_1 = dS_2 \quad (6.17)$$

S কে T ও P এর অপেক্ষক ধরলে

$$\text{যেহেতু } dS = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T dp = \frac{C_P}{T} dT - \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P dp,$$

$$\frac{C_{P1}}{T} dT - \nu \alpha_1 dp = \frac{C_{P2}}{T} dT - \nu \alpha_2 dp \quad (\text{আয়তন } \nu \text{ স্থির ধরে ও (6.17) ব্যবহার করে)}$$

$$\text{সুতরাং } \frac{dp}{dT} = \frac{C_{P2} - C_{P1}}{T\nu(\alpha_2 - \alpha_1)} \quad (6.18)$$

অনুরূপভাবে যেহেতু আয়তনও দ্বিতীয় ক্রমের দশা পরিবর্তনে এক থাকবে,  $\nu_1 = \nu_2$  (উষ্ণতা T ও চাপ P তে)

$$\nu_1 + d\nu_1 = \nu_2 + d\nu_2 \quad (\text{উষ্ণতা } T+dT \text{ ও চাপ } P+dP \text{ তে})$$

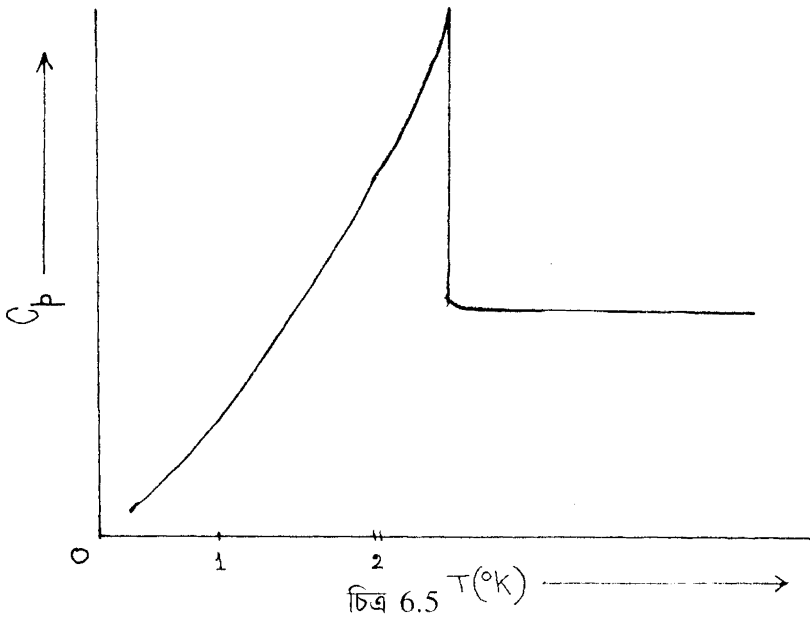
$$\text{সুতরাং } d\nu_1 = d\nu_2$$

$$\text{যেহেতু } d\nu = \left( \frac{\partial \nu}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial \nu}{\partial P} \right)_T dp = \nu \alpha dT - \nu k dp, \text{ আমরা পাই}$$

$$\nu \alpha_1 dT - \nu k_1 dp = \nu \alpha_2 dT - \nu k_2 dp$$

$$\text{বা, } \frac{dp}{dT} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{k_2 - k_1} \quad (6.19)$$

(6.18) এবং (6.19) সমীকরণদ্বয়কে এরেনফেস্ট সমীকরণ বলা হয়। (6.14), (6.15) এবং (6.16) সমীকরণত্রয়ী থেকে দেখা যাচ্ছে যে, দ্বিতীয় ক্রমের দশা পরিবর্তনে পদার্থের কিছু ভৌত চলার মানের (যেমন, যথাক্রমে স্থির চাপে মোলার আপেক্ষিক তাপ, সমোষ্ণ আয়তন সংনম্যতা, স্থির চাপে আয়তন উষ্ণতা গুণাঙ্ক) অসন্তত পরিবর্তন হয়। 2.19<sup>0</sup>k উষ্ণতা তরল হিলিয়ামের দুটি দশা (হিলিয়াম 2 এবং হিলিয়াম 1) সাম্যাবস্থায় সহাবস্থান করে। 2.19<sup>0</sup>k এর নীচে হিলিয়াম-2 এবং 2.19<sup>0</sup>k এর ওপরে হিলিয়াম -1 দশা থাকে। 6.5 নং চিত্রে 2.19<sup>0</sup>k উষ্ণতায় হিলিয়ামের মোলার আপেক্ষিক তাপের অসন্তত পরিবর্তন দেখান হয়েছে।



দ্বিতীয় ক্রমের দশা রূপান্তরে হিলিয়ামের স্থির চাপে আপেক্ষিক তাপ ও উষ্ণতার রেখচিত্র।

## 6.9 উদাহরণ

(1) হিমমিশ্রণ — যদি বায়ুমণ্ডলীর চাপে বরফ, লবণ ও জল  $0^{\circ}\text{C}$  উষ্ণতায় মিশ্রিত হয়, তবে বরফ গলে এবং লবণ বরফ সংলগ্ন জলে দ্রবীভূত হয়। বরফের গলন ও বরফ সংলগ্ন জলে লবণের দ্রবীভবন চলতে থাকে যতক্ষণ না  $-23^{\circ}\text{C}$  উষ্ণতা নামে। (পুরো প্রক্রিয়াটা এক তাপ-নিরোধক পাত্রে করা হয়েছে) এই উষ্ণতায় বরফ, কঠিন লবণ, লবণের দ্রবণ ও সংলগ্ন বাষ্প এই চারটি দশা একত্রে সাম্যাবস্থায় থাকে। যেহেতু এখানে অবয়ব সংখ্যা দুই (লবণ ও জল) দশা সংখ্যা চার (দ্রবণ, বরফ, কঠিন  $\text{NaCl}$ ,  $2\text{H}_2\text{O}$  সংপৃক্ত বাষ্প) গিব্‌সের দশানীতি অনুসারে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা শূন্য। সুতরাং বায়ুমণ্ডলীয় চাপে কেবলমাত্র  $-22^{\circ}\text{C}$  উষ্ণতাতেই হিমমিশ্রণ সাম্যাবস্থায় থাকতে পারে।

(2) নিম্নলিখিত উপাত্তসমূহ থেকে জলের বাষ্পীভবনের লীনতাপ হিসাব করুন—

$100^{\circ}\text{C}$  উষ্ণতায় জলের আপেক্ষিক আয়তন = 1 সি. সি.

$100^{\circ}\text{C}$  উষ্ণতায় জলীয় বাষ্পের আপেক্ষিক আয়তন = 1674 সি. সি.

সংপৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপের প্রভেদ = 5.5 সে. মি.

পারদস্তস্তের চাপের সমান যখন উষ্ণতার প্রভেদ =  $2^{\circ}$  সে.

1 বায়ুমণ্ডলের চাপ =  $1.013 \times 10^6$  ডাইন/বর্গ সে. মি.।

উত্তর — ক্লসিয়াস-ক্ল্যাপেরনের সূত্র থেকে  $\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}$

এখানে  $T = 373^\circ$  কে,  $V_2 - V_1 = 1673$  সি. সি.

$\Delta P = 5.5$  সে. মি. Hg এর চাপের সমান

$$= \frac{5.5}{76} \times 1.013 \times 10^6 \text{ ডাইন/বর্গ সে. মি.}$$

$$\text{সুতরাং } \Delta T = \frac{373 \times 1673 \times 5.5 \times 1.013 \times 10^6}{76L} = 2$$

অথবা  $L = 545$  ক্যালরি/গ্রাম।

(3) গলনের পর কোন কঠিন বস্তুর আয়তন  $\frac{1}{6}$  অংশ হ্রাস পায়। গলনের লীনতাপ 40 ক্যালরি/গ্রাম ও প্রমাণ চাপে গলনাঙ্ক  $27^\circ\text{C}$ । কঠিন অবস্থায় ওর ঘনত্ব 1.2 গ্রাম/সি. সি.। বায়ুমণ্ডলীয় চাপ বৃদ্ধিতে গলনাঙ্কের কি পরিবর্তন হবে?

উত্তর — ভর সংরক্ষণের সূত্র থেকে  $d_1 V_1 = d_2 V_2$ , যেখানে  $d_1$  ও  $d_2$  যথাক্রমে দুটি দশার ঘনত্ব।  
যেহেতু  $V_2 = \frac{V_1}{6}$ ,  $d_2 = 6d_1$ । আপেক্ষিক আয়তন  $= \frac{1}{1.2}$  সি. সি. (কঠিন অবস্থায়) ও  $= \frac{1}{7.2}$  সি. সি. (তরল অবস্থায়)। ক্লসিয়াস-ক্ল্যাপেরনের সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(v_2 - v_1)}$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{40 \times 4.2 \times 10^7}{300 \times \left( \frac{1}{7.2} - \frac{1}{1.2} \right)} \text{ ডাইন/বর্গ সে.মি/}^\circ\text{সে}$$

$$\text{সুতরাং } \Delta T = \frac{76 \times 13.6 \times 980 \times 300}{4 \times 4.2 \times 10^8} \times \left( \frac{1}{7.2} - \frac{1}{1.2} \right)$$

$$= -0.1256^\circ \text{ সে}$$

সূত্রাং, গলনাক্ষের হ্রাস  $0.1256^\circ$  সে.

### অনুশীলনী

মারকিউ আয়োডাইডের দশা রূপান্তরের (লাল থেকে হলুদ বর্ণের প্রকৃতি) উষ্ণতা  $127^\circ$  সে। গৃহীত লীনতাপ 3,150 ক্যালরি/ মোল এবং আয়তনের হ্রাস 5.4 সি. সি./ মোল। দশা পরিবর্তনের উষ্ণতায়

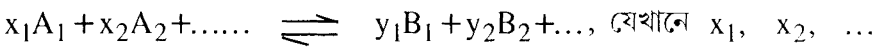
$\frac{dp}{dT}$  হিসাব করুন।

### রাসায়নিক সাম্য

রাসায়নিক বিক্রিয়ায় বিক্রিয়ক পদার্থগুলি থেকে নূতন পদার্থের সৃষ্টি হয় আবার বিক্রিয়াজাত পদার্থ থেকে বিপরীতমুখী বিক্রিয়ায় বিক্রিয়ক পদার্থ গঠিত হয়। রাসায়নিক বিক্রিয়ার হার, উষ্ণতা, পারিপার্শ্বিক চাপ ও বিক্রিয়ায় অংশগ্রহণকারী পদার্থগুলির আণবগুরুত্বের ওপর নির্ভরশীল। যেমন হাইড্রোজেন ও ক্লোরিনের মধ্যে বিক্রিয়া দ্রুতগতিতে হয় কিন্তু হাইড্রোজেন ও আয়োডিনের পারস্পরিক বিক্রিয়ার হার খুব কম। চূড়ান্ত অবস্থায় রাসায়নিক বিক্রিয়ায় এক গতিশীল সাম্যাবস্থার সৃষ্টি হয় যখন কোন উভমুখী বিক্রিয়ায় দুইদিকের বিক্রিয়ার হার সমান হয়। রাসায়নিক বিক্রিয়ায় সুস্থিত সাম্যাবস্থার শর্তও দশা পরিবর্তনের সাম্যাবস্থার শর্তের অনুরূপ। (অর্থাৎ দুটি ক্ষেত্রেই গিবস অপেক্ষকের মান অবম থাকে স্থির চাপে ও সমোষ্ণ অবস্থায়) রাসায়নিক বিক্রিয়ায় তাপগতিবিদ্যার প্রয়োগের সংক্ষিপ্ত আলোচনাই এই অনুচ্ছেদের উপজীব্য বিষয়।

তাপগতীয় সাম্যাবস্থায় অনুপরিমাণ পরিবর্তনের জন্য  $dG = d(U + PV - TS) = \sum dP - SdT$

স্থির চাপ ও উষ্ণতায় সংঘটিত কোন রাসায়নিক বিক্রিয়ায় গিবস অপেক্ষকের পরিবর্তন  $\Delta G = 0$ । উদাহরণস্বরূপ, আমরা এই রাসায়নিক বিক্রিয়াটি বিবেচনা করি।



এবং  $y_1, y_2, \dots$  যথাক্রমে বিক্রিয়ক ও বিক্রিয়াজাত পদার্থগুলির মোল সংখ্যা।

$$\text{সূত্রাং } \Delta G = \sum y_r G_{B_r} - \sum x_r G_{A_r} = 0, \text{ যেখানে } G_{A_r} \text{ ও } G_{B_r} \text{ যথাক্রমে } A_r \text{ ও } B_r$$

অণুদ্বয়ের একক মোলের জন্য গিবস অপেক্ষক।

..... (6.20)



যেহেতু  $G = U + PV - TS = H - TS$  ( $H =$  এনথালপি অপেক্ষক),

সমীকরণ (6.20) থেকে লিখতে পারি,

$$\sum_r x_r S_{A_r} - \sum_r y_r S_{B_r} = \frac{1}{T} \left( \sum_r x_r H_{A_r} - \sum_r y_r H_{B_r} \right) \quad \dots\dots (6.20A)$$

স্থির চাপে কোন রাসায়নিক বিক্রিয়ায় বিক্রিয়াজাত তাপ  $Q_p = -\Delta(U + PV) = -\Delta H$

$$\text{সুতরাং আমরা লিখতে পারি, } \sum_r x_r S_{A_r} - \sum_r y_r S_{B_r} = \frac{Q_p}{T} \quad \dots\dots (6.21)$$

এক্ষেত্রে  $\Delta S = \int C_p \frac{dT}{T} - \int \frac{V dp}{T}$  সমীকরণটি ব্যবহার করে লিখতে পারি,  $S_{A_r} = C_{p,A_r} \ln T - R \ln p_{A_r} + R \ln i_{A_r}$ , যেখানে  $p_{A_r}$  মিশ্রণে  $A_r$  অণুর আংশিক চাপ ও  $i_{A_r}$ ,  $A_r$  অণুর কোন প্রারম্ভিক প্রামাণিক সাম্যাবস্থার তাপগতীয় চলগুলির অপেক্ষক। রাসায়নিক বিক্রিয়ার প্রসঙ্গে গুরুত্বপূর্ণ দুটি চিহ্ন হল,

$$K_p = \frac{\prod p_{B_r}^{y_r}}{\prod p_{B_r}^{x_r}} = \frac{p_{B_1}^{y_1} p_{B_2}^{y_2} \dots\dots}{p_{A_1}^{x_1} p_{A_2}^{x_2} \dots\dots} \quad \text{এবং} \quad I = \frac{\prod i_{B_r}^{y_r}}{\prod i_{A_r}^{x_r}} = \frac{i_{B_1}^{y_1} i_{B_2}^{y_2} \dots\dots}{i_{A_1}^{x_1} i_{A_2}^{x_2} \dots\dots}$$

সমীকরণ (6.21) এবং ওপরের চিহ্নগুলি যুগপৎ ব্যবহার করে আমরা লিখতে পারি,

$$\ln K_p = \frac{Q_p}{RT} + \frac{\ln T}{R} \Delta C_p + \ln I \quad \dots\dots\dots (6.22)$$

এই সমীকরণটি ব্যবহার করে আমরা রাসায়নিক বিক্রিয়ার ওপর তাপগতীয় চলগুলির পরিবর্তনের প্রভাব ব্যাখ্যা করতে পারি। রাসায়নিক বিক্রিয়ার হার বিক্রিয়ক পদার্থগুলির সক্রিয় ভর বা আণব গুরুত্বের সমানুপাতিক। এই নীতি ভর-ক্রিয়ার সূত্র নাম পরিচিত।

সুতরাং ওপরের বিক্রিয়ার ক্ষেত্রে সম্মুখের বিক্রিয়ার হার (অর্থাৎ  $A_1, A_2, \dots$  পদার্থগুলি যে হারে মিলিত হয়ে  $B_1, B_2, \dots$  পদার্থগুলি গঠন করে)  $A_1, A_2, \dots$  পদার্থগুলির আণব গুরুত্বের সমানুপাতিক, অর্থাৎ  $R_1 = K_1 [A_1] [A_2] \dots$ , যেখানে  $R_1$  সম্মুখের বিক্রিয়ার হার এবং  $[A_1], [A_2]$  ইত্যাদি

যথাক্রমে  $A_1, A_2$  ইত্যাদির সক্রিয় ভর, অনুরূপে  $R_2 = K_2[B_1][B_2] \dots$  যেখানে  $R_2$  পশ্চাত্মুখী বিক্রিয়ার হার। সাম্যাবস্থায়  $R_1 = R_2$ , অর্থাৎ  $K_1[A_1][A_2] \dots = K_2[B_1][B_2] \dots$

$$\text{বা, } K_c = \frac{K_1}{K_2} = \frac{[B_1][B_2] \dots}{[A_1][A_2] \dots} = \frac{\nu_{B_1}^{y_1} \nu_{B_2}^{y_2} \dots}{\nu_{A_1}^{x_1} \nu_{A_2}^{y_2} \dots}$$

$P_{B_1}, P_{B_2}, \dots, P_{A_1}, P_{A_2}, \dots$  বিক্রিয়ক বা বিক্রিয়াজাত পদার্থের মিশ্রণে আংশিক চাপ। আদর্শ গ্যাসের সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$K_p = (\nu RT)^{\Delta \lambda} K_c, \text{ যেখানে}$$

$$\Delta \lambda = (y_1 + y_2 + \dots) - (x_1 + x_2 + \dots) \quad \dots (6.23)$$

সমীকরণ (6.23) ও (6.22) মিলিতভাবে প্রয়োগ করে পাই,

$$\left( \frac{\partial}{\partial T} \ln K_c \right)_P = \frac{\Delta H}{RT^2} \quad (\because \Delta C_p = R\Delta \lambda \text{ এবং (6.23) থেকে পাই —}$$

$$\ln K_c = \ln K_p - \Delta \lambda \ln(\nu RT) \quad \dots (6.24)$$

$$\text{অনুরূপভাবে (6.23) থেকে পাই, } \left( \frac{\partial}{\partial P} \ln K_c \right)_T = \left( \frac{\partial}{\partial P} \ln K_p \right)_T$$

$$(6.20) (A) \text{ সমীকরণ থেকে লিখতে পারি, } \sum_r x_r S_{A_r} - \sum_r y_r S_{B_r} = -\frac{\Delta W}{T} \mid$$

সাধারণ পরিবর্তনের ক্ষেত্রে (সমোষ্ণ নাও হতে পারে) (6.22) এর পরিবর্তে আমরা যে সমীকরণ পাব তা হল,

$$\ln K_p = -\frac{\Delta H}{RT} + \frac{\ln T}{R} \Delta C_p + \ln I \dots \quad \dots (6.25)$$

$$(6.24) \text{ ব্যবহার করে, আমরা এক্ষেত্রে পাব } \left( \frac{\partial}{\partial P} \ln K_c \right)_T = - \frac{\Delta V}{RT} \quad \dots\dots (6.26)$$

রাসায়নিক বিক্রিয়ার ওপর উষ্ণতার প্রভাব (স্থির চাপ)

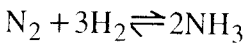
$$(6.24) \text{ কে সমাকল করে পাই, } \Delta(\ln K_c) = \frac{\Delta H}{R} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

$$\text{বা, } \ln \frac{(K_c)_1}{(K_c)_2} = - \frac{\Delta H}{R} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \quad \dots\dots (6.27)$$

$(K_c)_1$  ও  $(K_c)_2$  যথাক্রমে  $T_1$  ও  $T_2$  উষ্ণতায় সাম্য ধ্রুবক।  $T_1 > T_2$  হলে  $(K_c)_1 > (K_c)_2$  হবে যদি  $\Delta H > 0$  (তাপগ্রাহী বিক্রিয়া) ও  $(K_c)_1 < (K_c)_2$  হবে যদি  $\Delta H < 0$  (তাপ-উদগারী বিক্রিয়া)। অর্থাৎ উষ্ণতা বাড়লে তাপগ্রাহী বিক্রিয়ার ধ্রুবক বাড়বে ও তাপ বিক্রিয়ার কমবে। এর ফলে উষ্ণতা বৃদ্ধিতে তাপগ্রাহী বিক্রিয়ায় বিক্রিয়াজাত পদার্থের পরিমাণ বাড়বে ও তাপউদ্ধারী বিক্রিয়ায় উৎপন্ন পদার্থের পরিমাণ হ্রাস পাবে।

রাসায়নিক বিক্রিয়ার ওপর চাপের প্রভাব (স্থির উষ্ণতা)

যদি আয়তন বৃদ্ধি পায় তবে  $\Delta V > 0$  এবং এর ফলে চাপ বাড়লে সাম্য ধ্রুবক কমবে। পক্ষান্তরে আয়তন হ্রাস পেলে  $\Delta V < 0$  এবং এর ফলে চাপ কমলে সাম্য ধ্রুবক বাড়বে। এর ফলে চাপ বৃদ্ধিতে যে সব বিক্রিয়ায় মোট আয়তন বৃদ্ধি পায় সেইগুলিতে বিক্রিয়াজাত পদার্থের পরিমাণ কমবে ও বিপরীতক্রমে যে সব বিক্রিয়ায় মোট আয়তন হ্রাসে পায় সেইগুলিতে উৎপন্ন পদার্থের পরিমাণ বাড়বে। উদাহরণস্বরূপ আমরা নীচের বিক্রিয়াটি লক্ষ্য করি,



এখানে বিক্রিয়ার ফলে মোট আয়তন কমে ও এই কারণে চাপ বৃদ্ধি করলে উৎপন্ন অ্যামোনিয়ার পরিমাণ বৃদ্ধি পাবে।

## 6.11 সারাংশ

দশা রূপান্তর প্রসঙ্গে কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা হল —

- (1) **দশা** — চাপ ও উষ্ণতা সাপেক্ষে তন্ত্রের একটি সমসত্ত্ব অংশকে দশা বলে। যদিও একটি দশায় চাপ ও উষ্ণতা সর্বত্র সমান থাকে, রাসায়নিক দিক দিয়ে তা সমসত্ত্ব নাও হতে পারে। কোন তরলের বাষ্পীভবনে যে কোন দশায় চাপ, উষ্ণতা ও রাসায়নিক উপাদান সর্বত্র সমান থাকে। কিন্তু লবণের দ্রবণের দশা সাম্যাবস্থায় লবণ ও জল দুপ্রকারের পদার্থই উপস্থিত থাকে।
- (2) **অবয়ব** — ন্যূনতম যে কয়টি নিরপেক্ষ উপাদানের সাহায্যে কোন দশার রাসায়নিক সংস্থিতি নির্ধারিত হয় তাকে তন্ত্রের অবয়ব সংখ্যা বলে। যদি কোন দশায় হাইড্রোজেন, অক্সিজেন এবং তাদের সমন্বয়ে গঠিত জল পরস্পর সাম্যাবস্থায় থাকে তবে দশার সংখ্যা এক কিন্তু অবয়ব সংখ্যা দুই কারণ এদের মধ্যে যে কোন দুটির পরিমাণ জানলেই তৃতীয়টি স্থির হয়ে যায়।
- (3) **স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা** — সর্বাপেক্ষা বেশী যে কটি তাপগতীয় চলকে স্বাধীনভাবে পরিবর্তিত করলেও দশা সাম্যাবস্থা বজায় রাখা যায় তাকে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা বলে। জল ও সংপৃক্ত জলীয় বাষ্পের মিশ্রণের ক্ষেত্রে সংপৃক্ত বাষ্পচাপ বা উষ্ণতা যে কোন একটিকে পরিবর্তন করা যায় কিন্তু অন্যটির মান সাম্যাবস্থায় নির্দিষ্ট হয়ে যায়। সুতরাং এক্ষেত্রে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা এক।
- (4) মোট গিবস অপেক্ষকের মান সমোষ্ণ ও স্থির চাপে সংঘটিত কোন পরিবর্তনের সাপেক্ষে (দশা রূপান্তরে চাপ ও উষ্ণতা স্থির থাকে কিন্তু অবয়ব এক দশা থেকে অন্য দশায় পরিণত হয়) অবম হয়। এর থেকে প্রমাণ করা যায় যে কোন অবয়বের আপেক্ষিক রাসায়নিক বিভব যে কোন দশাতেই এক থাকবে। এর থেকে গিবসের দশাসূত্র অর্থাৎ স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা  $f = c - p + 2$  প্রমাণ করা যায় যেখানে  $c$  অবয়ব সংখ্যা ও  $p$  দশাসংখ্যা। ত্রৈধবিন্দুতে  $c = 1$ ,  $p = 3$  (জলের ক্ষেত্রে) সুতরাং  $f = 0$ , অর্থাৎ কেবলমাত্র একটি চাপ ও উষ্ণতাতেই জলের তিনটি দশা সাম্যাবস্থায় থাকবে। ত্রৈধবিন্দুতে উষ্ণতা  $0.0075^\circ$  সে ও চাপ 4.58 মি. প্যারদস্তস্তের চাপের সমান।
- (5) প্রথম ক্রমের দশা রূপান্তরে আপেক্ষিক গিবস অপেক্ষক স্থির থাকে কিন্তু গিবস অপেক্ষকের প্রথম আংশিক অবকলের অসন্তত পরিবর্তন হয়। যেহেতু গিবস অপেক্ষকের চাপ ও উষ্ণতা

সাপেক্ষে আংশিক অবকল যথাক্রমে আয়তন ও এনট্রপির সমান হয়, সুতরাং প্রথম ক্রমের দশা পরিবর্তনে (উদাহরণস্বরূপ, কঠিন, তরল বা বাষ্পীয় দশার পারস্পরিক রূপান্তর) আপেক্ষিক আয়তন ও এনট্রপির অসম্মত পরিবর্তন হয় এবং এর ফলে লীনতাপ গৃহীত বা বর্জিত হয়। দ্বিতীয় ক্রমের দশা রূপান্তরে আপেক্ষিক গিব্‌স অপেক্ষকের প্রথম আংশিক অবকলের পরিবর্তন হয়না কিন্তু দ্বিতীয় আংশিক অবকলের অসম্মত পরিবর্তন হয়। উদাহরণ, তরল হিলিয়ামের দুটি রূপের (হিলিয়াম 1 এবং হিলিয়াম 2) পারস্পরিক রূপান্তর বা সাধারণ পরিবাহী ও অতিপরিবাহী অবস্থায় রূপান্তর।

- (6) প্রথম ক্রমের দশা পরিবর্তনে উষ্ণতার সাথে সাম্যাবস্থায় সংপৃক্ত চাপের পরিবর্তন ক্লসিয়াস-ক্ল্যাপেরন সমীকরণ

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{সংপৃক্ত}} = \frac{L}{T(v_2 - v_1)} \text{ দ্বারা নির্ধারিত হয়, (যেখানে } L \text{ আপেক্ষিক লীনতাপ, } v_1$$

ও  $v_2$  যথাক্রমে দুটি দশার আপেক্ষিক আয়তন। এই সমীকরণ ব্যবহার করে গলনাঙ্ক বা স্ফুটনাঙ্কের ওপর চাপের পরিবর্তনের প্রভাব নির্ণয় করা যায়। এই সমীকরণ থেকে উষ্ণতার সাথে লীনতাপের পরিবর্তন বা সংপৃক্ত বাষ্পচাপের পরিবর্তনও ব্যাখ্যা করা যায়। এর থেকে প্রমাণ করা যায় যে সংপৃক্ত জলীয় বাষ্পের আপেক্ষিক তাপ ঋণাত্মক (প্রায়  $-1.07$  ক্যালরি/গ্রাম)।

- (7) দ্বিতীয় ক্রমের দশা পরিবর্তন এরেনফেস্ট সমীকরণ দ্বারা নিয়ন্ত্রিত হয়।

এই সমীকরণগুলি হল —

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{সংপৃক্ত}} = \frac{C_{p2} - C_{p1}}{Tv(\alpha_2 - \alpha_1)} \text{ এবং } \left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{সংপৃক্ত}} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{k_2 - k_1}$$

যেখানে  $\alpha$  = সমচাপে আয়তন প্রসারণ গুণক এবং  $k$  = সমোষ্ণ সংনম্যতা,

- (8) রাসায়নিক বিক্রিয়ায় বিক্রিয়ক পদার্থ ও বিক্রিয়াজাত পদার্থের মধ্যে সাম্যাবস্থার শর্ত দশা সাম্যাবস্থার অনুরূপ। অর্থাৎ স্থির চাপ ও উষ্ণতায় সংঘটিত বিক্রিয়ায় গিব্‌স অপেক্ষকের মান অবম থাকে। এই ক্ষেত্রেও রাসায়নিক বিক্রিয়ার হারের ওপর চাপ বা উষ্ণতার পরিবর্তনের প্রভাব নির্ণয় করা যায়। উষ্ণতা বৃদ্ধিতে তাপগ্রাহী বিক্রিয়ায় বিক্রিয়াজাত পদার্থের পরিমাণ বাড়বে ও তাপউদ্ধারী বিক্রিয়ায় পরিমাণ কমবে। অনুরূপে যে সব

বিক্রিয়ায় মোট আয়তন বৃদ্ধি পায় চাপ বাড়লে সেইগুলিতে বিক্রিয়াজাত পদার্থের পরিমাণ কমবে ও যে সব বিক্রিয়ায় মোট আয়তন কমে চাপ বাড়লে সেইগুলিতে বিক্রিয়াজাত পদার্থের পরিমাণ বাড়বে।

## 6.12 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(1) হিলিয়াম (তরল) এর একটি দশা থেকে অন্যটিতে রূপান্তরে কোন লীনতাপ গৃহীত বা বর্জিত হবে কি?

(2) নিম্নলিখিত রাশিতথ্য থেকে ইথারের বাষ্পের স্ফুটনাঙ্কে আপেক্ষিক আয়তন হিসাব করুন।

$$\text{স্ফুটনাঙ্ক} = 34.6^\circ \text{C} \text{ (প্রমাণ বায়ুমন্ডলীয় চাপে)}$$

$$\text{তরলের ঘনত্ব} = 0.71 \text{ গ্রাম/সি.সি.}$$

$$\text{লীনতাপ} = 86 \text{ ক্যাল / গ্রাম}$$

$$\frac{dP}{dT} = 27 \text{ মি.মি. পারদের চাপ / }^\circ \text{সে.}$$

$$\text{পারদের ঘনত্ব} = 13.6 \text{ গ্রাম/সি.সি.}$$

## 6.13 উত্তরমালা

### অনুশীলনী

$$\text{রুসিয়াস-ক্ল্যাপেরনের সূত্র অনুসারে } \frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(v_2 - v_1)} \text{ এখানে } L = 3,150 \text{ ক্যালরি / মোল,}$$

$$T = (273 + 127)^\circ \text{কে.} = 400^\circ \text{কে, } v_2 - v_1 = 5.4 \text{ সি.সি. / মোল}$$

$$\therefore \frac{dP}{dT} = \frac{3150 \times 4.2 \times 10^7}{400 \times 5.4} \text{ ডাইন / বর্গ সে.মি. / }^\circ \text{কে}$$

### সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

(1) তরল হিলিয়ামের এক দশা থেকে অপর দশায় রূপান্তর দ্বিতীয় ক্রমের দশা পরিবর্তনের উদাহরণ। এই দশা পরিবর্তনে এনট্রপির কোন পরিবর্তন হয়না। সুতরাং লীনতাপ গৃহীত বা বর্জিত হয়না।

(2) ক্লসিয়াস - ক্ল্যাপেরনের সূত্র অনুসারে,

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}, \text{ যেখানে চিহ্নগুলি স্বাভাবিক অর্থবহ}$$

$$\text{বা, } \frac{dP}{dT} = \frac{86 \times 4.2 \times 10^7}{(273 + 34.6)(v_2 - 0.71)} = 2.7 \times 13.6 \times 980$$

$$\text{বা, } v_2 - 0.71 = \frac{86 \times 4.2 \times 10^7}{307.6 \times 2.7 \times 13.6 \times 980} \text{ সি. সি.}$$

$$\text{বা, } v_2 = 326.71 \text{ সি. সি.}$$

গঠন

7.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

7.2 তাপীয় বিকিরণ মাপার যন্ত্র

7.3 বিকিরণের প্রকৃত ধর্ম

7.4 পদার্থের মধ্য দিয়ে বিকিরণের চলন

7.5 প্রিভস্টের শক্তি বিনিময়ের তত্ত্ব

7.6 বিকিরণ সম্বন্ধীয় প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা

7.7 তাপীয় বিকিরণের ক্ষেত্রে পদার্থ ও বিকিরণের মধ্যে শক্তির বিনিময়; কিরশফের সূত্র

7.8 বিকিরণের চাপ

7.9 কৃষ্ণকায় বিকিরক থেকে মোট বিকিরণের পরিমাণ স্টিফান বোলৎজম্যান সূত্র

7.10 কৃষ্ণকায় বস্তুর বিকিরণ বর্ণালীতে শক্তির বিভাজন

7.11 বিকিরণ পাইরোমিতি — বিকিরণের সাহায্যে উচ্চ উষ্ণতার পরিমাপ

7.12 সারাংশ

7.13 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

7.14 উত্তরমালা



## 5.7 বিকিরণ

### 7.1 প্রস্তাবনা

তাপ বস্তুমাধ্যম ছাড়াই সঞ্চালিত হতে পারে। উষ্ণতর বস্তু শূন্যস্থানে অবস্থিত হলেও তার থেকে তাপ নির্গত হয়। একটি সাধারণ ঘটনার দিকে আপনাদের দৃষ্টি আকর্ষণ করি। বাড়িতে যে বৈদ্যুতিক বাতি জ্বলে তার ফিলামেন্ট থাকে একটি বায়ুশূন্য বাস্কের ভিতরে। ফিলামেন্টে তড়িৎ প্রবাহিত হলে তা অত্যন্ত উত্তপ্ত হয়ে আলো দেয়। বাস্কের বায়ুশূন্য স্থানকে অতিক্রম করে ফিলামেন্ট থেকে তাপ যে বাস্কের বাইরে চলে আসছে তা বাস্কের কাছে গেলেই টের পাওয়া যায়।

তাপের পরিবহন (conduction) ও পরিচলন (convection) বস্তুমাধ্যম ছাড়া হয়না। সুতরাং বস্তুমাধ্যম ব্যতিরেকে তাপশক্তির সঞ্চালনের প্রক্রিয়াটি পরিবহন ও পরিচলন থেকে পৃথক। এই প্রক্রিয়াকে বলা হয় বিকিরণ (radiation)।

শূন্যস্থানে সঞ্চালনের সময় বিকিরণের অস্তিত্ব প্রকট হয়না। পদার্থের ওপর পতিত হলে বিকিরণ পদার্থকে উত্তপ্ত করে এবং তখনই বিকিরণের অস্তিত্ব অনুভূত হয়। পদার্থের তাপতড়িৎ প্রক্রিয়াকে (thermoelectric effect) কাজে লাগিয়ে বিকিরণ শক্তি মাপার বিভিন্ন সুবেদী অন্বেষণক (detector) উদ্ভাবিত হয়েছে। তাদের সাহায্যে অসংখ্য পরীক্ষার মাধ্যমে প্রমাণিত হয়েছে যে তাপসঞ্চার বিকিরণের প্রকৃতি তড়িৎচুম্বকীয় তরঙ্গ এবং আলোর অনুরূপ।

তাপের জন্য যে বিকিরণ ঘটে তাকে তাপীয় বিকিরণ (thermal radiation) বলা হয়।

এই অধ্যায়ে আমরা তাপীয় বিকিরণের বিষয় বিচার করব।

উত্তপ্ত বস্তুর তাপীয় বিকিরণের বর্ণালী পর্যবেক্ষণ ও তার বিশ্লেষণ এবং বর্ণালীর প্রকৃতি ও উষ্ণতার সম্বন্ধ নিরূপণের চেষ্টা বিজ্ঞানের পক্ষে খুবই ফলপ্রসূ হয়েছে এবং এভাবেই বর্ণালীবীক্ষণ বিদ্যা (Spectroscopy) ও জ্যোতির্পদার্থবিদ্যা (Astrophysics)-র সূত্রপাত হয়েছে এবং বিকিরণ কণিকার (radiation quanta) অস্তিত্বের ধারণা ও প্রমাণ থেকে ক্রমে কোয়ান্টাম বলবিদ্যার (Quantum mechanics) জন্ম হয়েছে। বস্তুত আধুনিক পদার্থবিদ্যার সূত্রপাত বহুলাংশে বিকিরণের পর্যালোচনা থেকেই।

**উদ্দেশ্য :**

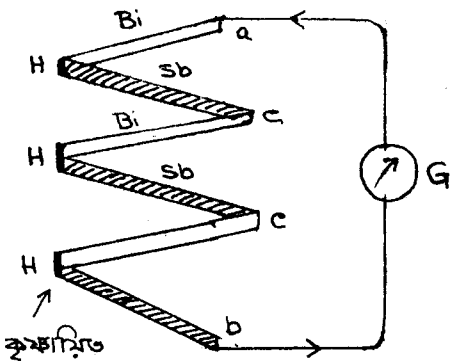
বর্তমান এককটি পাঠ ও পর্যালোচনা করে আপনাদের তাপ বিকিরণ সম্বন্ধে একটা সামগ্রিক ধারণা হবে। বিশ্লেষণাত্মক দিক থেকে বিচার করলে বলা যায়, আপনারা জানবেন —

- তাপ বিকিরণ মাপার যন্ত্রের বর্ণনা ও ব্যবহার;
- বিকিরণের প্রকৃত ধর্ম;
- পদার্থের মধ্য দিয়ে বিকিরণ কীভাবে অগ্রসর হয়;
- প্রিভস্টের শক্তি বিনিময় তত্ত্ব;
- কিরসফের তত্ত্ব ও তার প্রতিপাদ্য বিষয়;
- বিকিরণের চাপ;
- সম্পূর্ণ ও বাস্তব কৃষ্ণকায় বিকিরক কী এবং তা থেকে বিকীর্ণ শক্তি বিষয়ক স্টিফান - বোলৎজম্যান সূত্র;
- কৃষ্ণকায় বস্তু কর্তৃক বিকীর্ণ শক্তির বর্ণালী;
- বিকিরণ পাইরোমিতি — তত্ত্ব ও প্রয়োগ।

## 7.2 তাপীয় বিকিরণ মাপার কয়েকটি যন্ত্র

তাপীয় বিকিরণের প্রকৃতি ও ধর্ম জানতে প্রথমেই চাই মাপার কিছু যন্ত্র। তাপতড়িৎ প্রক্রিয়াকে কাজে লাগিয়েই এই সব যন্ত্র নির্মিত হয়েছে। বিকিরণ মাপার যন্ত্রাদির মধ্যে থার্মোপাইল (Thermopile), রেডিওমাইক্রোমিটার (radiomicrometer) ও বোলোমিটার (Bolometer) উল্লেখযোগ্য। এখানে প্রথম দুটি যন্ত্রের বর্ণনা দেওয়া হল।

### থার্মোপাইল



চিত্র 1 থার্মোপাইল

মেলোনি (Melloni) প্রথম বিকিরণ মাপতে থার্মোপাইল ব্যবহার করেন। বিসমথ (Bi) এবং এন্টিমনি (Sb)-র একাধিক দণ্ড নিয়ে তাদের প্রান্তগুলি পরপর জুড়ে দেওয়া হয় যেমন চিত্র 1 এ দেখানো হয়েছে। একদিকের প্রান্তমুখগুলি কৃষ্ণায়িত করা হয়। বিকিরণ ঐ প্রান্তে আপতিত হলে শোষিত হয় ও প্রান্তটি উষ্ণ হয়ে ওঠে। ঐ প্রান্তটি উষ্ণপ্রান্ত (H)। অন্য প্রান্তমুখগুলিকে আচ্ছাদিত করে রাখা হয়। ঐ প্রান্তটি শীতল প্রান্ত (C)। মুক্ত প্রান্তদ্বয় a ও b কে একটি সুবেদী গ্যালভানোমিটারের (G) সঙ্গে যুক্ত করা হয়।

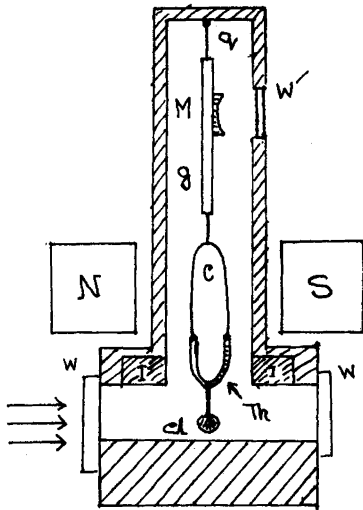
H প্রান্তে বিকিরণ শোষিত হলে বর্তনীতে তাপতড়িৎ প্রবাহিত হয় এবং G তে নির্দেশক (pointer) বিক্ষিপ্ত হয়। বিক্ষেপের পরিমাণ বিকিরণের শক্তির পরিমাপক। রকসল্ট (Rocksalt)-এর জানালা বিশিষ্ট একটি বায়ুশূন্য কাঁচের আধারে থার্মোপাইলিট রাখা হয় যাতে ঐ জানালা দিয়ে বিকিরণ H প্রান্তে এসে পড়ে (তাপীয় বিকিরণের ক্ষেত্রে রকসল্ট মোটামুটি স্বচ্ছ, কাঁচ তাপীয় বিকিরণ বহুলাংশে শোষণ করে)।

যন্ত্রটিকে সুবেদী করতে নিম্নলিখিত বিশেষ ব্যবস্থাগুলি নেওয়া হয় :

- (i) এমন তাপযুগ্ম চয়ন করা হয় যা সবচেয়ে বেশি সুবেদী;
- (ii) H প্রান্তকে কৃষ্ণায়িত করা হয় যাতে আপতিত বিকিরণ প্রায় পুরোটাই শোষিত হয়;
- (iii) পরিচলনের মাধ্যমে যাতে তাপশক্তি হ্রাস না পায় তারজন্য বায়ুশূন্য আধারে রাখা হয়;
- (iv) বায়ুশূন্য আধারে প্রবেশ করবার সময় যাতে শোষণ না হয় সেজন্য প্রবেশদ্বারটি রকসল্টের পাতলা পাত দিয়ে করা হয়;
- (v) এমন গ্যালভানোমিটার নেওয়া হয় যার আভ্যন্তরীণ রোধ কম এবং যেটি বিভব-সুবেদী।

বর্তমানে থার্মোপাইলিট ও গ্যালভানোমিটারের মধ্যে উপযুক্ত বিবর্ধক যুক্ত করে যন্ত্রটির সুবেদীতা অনেকগুণ বাড়ানো সম্ভব।

রেডিওমাইক্রোমিটার :



চিত্র ২ বয়ের

রেডিওমাইক্রোমিটার

বয়েস (Boys) পরিকল্পিত এই যন্ত্রটি মূলত একটি তাপযুগ্ম সম্বলিত গ্যালভানোমিটার। রূপোর তারের একপাক কুণ্ডলী C অবস্থিত শক্তিশালী স্থায়ী চুম্বকের দুই মেরু NS-এর মধ্যে, যেমন থাকে সাধারণ তার কুণ্ডলী গ্যালভানোমিটারে। C-এর নিচের প্রান্তদ্বয়ের সঙ্গে বদ্ধ বর্তনীতে যুক্ত আছে Bi ও Sb-র সরু তারের তাপযুগ্ম Th। তাপযুগ্মের অংশটি চুম্বকের আওতার বাইরে আছে। Bi-এর ডায়াচৌম্বকত্ব যাতে অসুবিধার সৃষ্টি না করে সেজন্য তাপযুগ্মটি কাঁচা লোহা (Soft iron)-র পিণ্ড I দিয়ে বেষ্টিত। C ওপরের দিকে যুক্ত আছে সরু ও হাল্কা কাঁচের দণ্ড g -এর সঙ্গে। g আবার ঝুলছে কোয়ার্টজের সূতা (q) -এর প্রান্ত থেকে। কাঁচের দণ্ডে একটি ছোট দর্পণ M লাগানো আছে। তাপযুগ্মের নিচে একটি ছোট কৃষ্ণায়িত চাকতি d লাগানো। সমস্ত জিনিসটি একটি পিতলের আধার B -এর মধ্যে রাখা আছে। B কে বায়ুশূন্য করা হয়।

বিকিরণ আনুভূমিক ভাবে ফ্লুরাইট (fluorite) বা রকসল্ট (rock salt)-এর জানালা w দিয়ে প্রবেশ করে চাকতি d -এর ওপর পড়ে এবং শোষিত হয়। তাপযুগ্মের একটি প্রান্ত তার ফলে উত্তপ্ত হলে C বর্তনীতে তাপতড়িৎ প্রবাহিত হয়। NS চুম্বকের প্রভাবে C কুণ্ডলীটি ঘুরে যায়। ল্যাম্প ও স্কেলের সাহায্যে M দর্পণের বিক্ষেপ মাপা হয়। দর্পণের বিক্ষেপ বিকিরণের তীব্রতার পরিমাপক।

q থেকে d পর্যন্ত পুরো সমাবেশটি খুব হাল্কা করা হয়। এই যন্ত্রটি খুবই সুবেদী। একটি মাত্র অসুবিধা বিকিরণকে আনুভূমিক ভাবে d -এর ওপরে ফেলতে হয়।

### 7.3 বিকিরণের প্রকৃতি ও ধর্ম

এই সব সাধারণ যন্ত্র দিয়ে নানা পরীক্ষা করে এটা দেখানো সম্ভব যে, তাপীয় বিকিরণ ও আলো যে সব নিয়ম মেনে চলে তারা অভিন্ন এবং উভয়ের প্রকৃতি একই প্রকার।

তাপীয় বিকিরণ :

1. আলোর সমান দ্রুতগামী;
2. সরল পথে চলে ও বস্তুর পিছনে ছায়া ফেলে জ্যামিতিক আলোকবিজ্ঞানের নিয়ম মেনে;
3. প্রতিফলিত ও প্রতিসৃত হয়, আলোর ক্ষেত্রে প্রতিফলন ও প্রতিসরণের যে সূত্রগুলি রয়েছে তাদের মেনে;
4. সমবর্তিত হয়;
5. ব্যস্তবর্গের সূত্রটি মেনে চলে;

পরীক্ষালব্ধ এই সব তথ্য থেকে এই সিদ্ধান্তে আসা যায় যে তাপীয় বিকিরণ ও আলো অভিন্ন। যদি সূর্যের আলোকে একটি প্রিজম দিয়ে বিচ্ছুরিত করা হয় তবে যে বর্ণালী দেখা যায় তার একপ্রান্ত শেষ হয় লালে ও অন্যপ্রান্তে বেগুনিতে। বর্ণালীর লাল ও বেগুনির মধ্যে সীমাবদ্ধতা কিন্তু আপাত কেননা লাল প্রান্তের পরেও থার্মোপাইল রাখলে তাতে বিক্ষেপ হয়, বেগুনি প্রান্তের পরের অংশ ফটোগ্রাফিক কাগজকে কালো করে। অর্থাৎ সূর্য থেকে আসা বিকিরণের বর্ণালী অনেক বিস্তৃত তার অল্প অংশই চোখে দেখা যায়। এই দৃশ্যমান অংশকেই আমরা আলো বলে থাকি। অতএব বিকিরণ হচ্ছে সাধারণ নাম, তার ক্ষুদ্র একটি অংশের বিশেষ নাম আলো।

## 7.4 পদার্থের মধ্য দিয়ে বিকিরণের চলন

যখন বিকিরণ পদার্থের ওপর এসে পড়ে তখন তার কিছু অংশ বিচ্ছুরিত, কিছু অংশ শোষিত এবং বাকিটা পদার্থের মধ্য দিয়ে গিয়ে নিসৃত হয়।

যদি,

$r$  = মোট শক্তির বিচ্ছুরিত অংশ,

$a$  = মোট শক্তির শোষিত অংশ,

$t$  = মোট শক্তির নিসৃত অংশ হয়

তবে

$$1 = r + a + t \quad (1)$$

$r$ ,  $a$  ও  $t$  তিনটিই বিভিন্ন তরঙ্গদৈর্ঘ্যে বিভিন্ন। তরঙ্গদৈর্ঘ্য  $\lambda$  -এর ক্ষেত্রে কোনো বস্তুর বিচ্ছুরণ ক্ষমতাকে সূচিত করা হবে  $r_\lambda$  দিয়ে, এবং শোষণ গুণাঙ্ককে  $a_\lambda$  দিয়ে।

যে সমস্ত বস্তু দৃশ্য আলোর ক্ষেত্রে স্বচ্ছ তারা অবলোহিত বিকিরণের ক্ষেত্রে অনচ্ছ হতে পারে। একটি কাচের পাত দিয়ে যদি গনগনে উনুনকে আড়াল করা যায় দেখা যাবে গরম অনেক কম লাগছে অথচ উনুনকে দেখতে আগের মতই গনগনে লাগছে।

যে সমস্ত বস্তুর  $r = 0$ ,  $t = 0$  এবং  $a = 1$  তাদের আদর্শ কৃষ্ণকায় বস্তু (ideal black body) বলা হবে। পুরো বিকিরণ এরা শোষণ করে বলে এদের কালো দেখায়। ভূষো কালির  $a \approx 0.96$  এবং প্ল্যাটিনাম ব্ল্যাক (platinum black) -এর  $a = 0.98$ । তবে কোনো বাস্তব বস্তুই পুরোপুরি কৃষ্ণকায় নয়। আদর্শ কৃষ্ণকায় বস্তু একটি বিমূর্ত ধারণা।

## 7.5 প্রিভস্টের শক্তি বিনিময়ের তত্ত্ব

প্রিভস্টের শক্তির বিনিময় তত্ত্ব (theory of exchanges) অনুযায়ী —

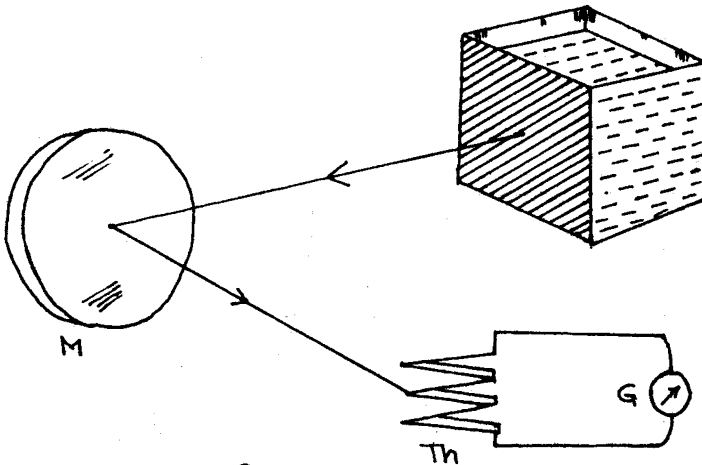
- (i) বস্তুর উষ্ণতা যাই হোক না কেন প্রত্যেক বস্তু থেকেই বিকিরণ নির্গত হয়।
- (ii) উষ্ণতা বাড়লে বিকিরিত শক্তির পরিমাণও বাড়ে।
- (iii) কোনো বস্তু থেকে বিকিরিত শক্তির পরিমাণ তার চারপাশের অন্যবস্তুর উপস্থিতির ওপর নির্ভর করে না।

আগুনের পাশে দাঁড়ালে আমাদের গরম লাগে। আমাদের শরীরও একটি বিকিরক। আমাদের দেহের উষ্ণতা আগুনের থেকে কম বলে, শরীর থেকে বিকিরণের ফলে যতখানি শক্তি আমরা হারাই তার থেকে অনেক বেশি বিকিরণ শক্তি আমাদের শরীর আগুনের কাছ থেকে লাভ করে। আমাদের গরমের অনুভূতি এজন্যই।

আবার আমরা যখন বরফের চাঁই-এর পাশে দাঁড়াই, বরফ থেকে আমরা যতখানি বিকিরণ শক্তি লাভ করি তার থেকে বেশি শক্তি আমরা হারাই বিকিরণের ফলে, কারণ আমাদের দেহের উষ্ণতা (প্রায়  $37^{\circ}\text{C}$ ) বরফের উষ্ণতা ( $0^{\circ}\text{C}$ ) থেকে বেশি। শরীরের শক্তি হ্রাস হওয়ায় উষ্ণতা হ্রাস পায় এবং আমাদের ঠাণ্ডার অনুভূতি হয়।

### তপ্তবস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা

আশাকরি আপনাদের কাছে এটা স্পষ্ট হয়েছে যে, প্রত্যেক বস্তু থেকেই, তার উষ্ণতা হেতু, বিকিরণ হয়। এবার দেখা দরকার এই বিকিরণের পরিমাণ বস্তুর প্রকৃতি ও তার উষ্ণতার ওপর কীভাবে নির্ভর করে। এই পরীক্ষাটি সহজেই করা সম্ভব। একটি লেসলী ঘন (এটি ধাতব পাত দিয়ে তৈরি একটি ফাঁকা বাস্তু) প্রায়  $100^{\circ}\text{C}$  উষ্ণতার জল দিয়ে ভর্তি করা হল। ঘনটির বাইরের তলগুলি নানা রকমের, চকচকে পালিশ করা, প্রদীপের কালি দিয়ে ঢাকা, সাদা চক দিয়ে রঙ করা ইত্যাদি। যে কোনো একটি তল থেকে বিকিরণ একটি অবতল দর্পণ M দিয়ে একটি থার্মোপাইলের (Th) ওপর ফোকাস করা হল (চিত্র 3 দেখুন)। বিকিরণের পরিমাণ গ্যালভানোমিটার G-এর বিক্ষিপ্ত থেকে মাপা যাবে। এভাবে পরপর তলগুলি থেকে বিকিরণ মাপা হলে দেখা যাবে যে, (a) চকচকে পালিশ করা তল



চিত্র 3

থেকে সবচেয়ে কম এবং কালো তল থেকে সবচেয়ে বেশি বিকিরণ হয়। অন্যান্য বস্তুর প্রলেপ দেওয়া তল থেকে বিকিরণের পরিমাণ এই দুই-এর মধ্যবর্তী।

(b) কোনো বস্তুর শোষণ ক্ষমতা ও বিকিরণ ক্ষমতা অঙ্গাঙ্গীভাবে যুক্ত। বস্তুত, যে সমস্ত বস্তু ভালো শোষক, তারা ভালো বিকিরকও বটে। যারা শোষণ করে কম, তাদের থেকে বিকিরণও হয় কম।

সাধারণ পরীক্ষা থেকে পাওয়া ওপরের সিদ্ধান্তগুলির যথাযথ রূপ দিয়েছিলেন কিরশফ (Kirchhoff)। কিরশফের সূত্র সম্বন্ধে বিশদ আলোচনার আগে বিকিরণ সম্বন্ধীয় কিছু সংজ্ঞা নির্দিষ্ট করা প্রয়োজন।

## 7.6 বিকিরণ সম্বন্ধীয় প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা

কোনো বস্তুকে উত্তপ্ত করলে বস্তুর তল থেকে সব তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের বিকিরণ সবদিকে নির্গত হয়। এই বিকিরণের প্রকৃতি অবশ্যই বস্তুর ভৌত প্রকৃতির ওপরও নির্ভরশীল।

**বিকিরণ ক্ষমতা (emissive power) :** ধরা যাক তরঙ্গ দৈর্ঘ্য  $\lambda$  ও  $\lambda+d\lambda$  -এর মধ্যে প্রতি একক বর্গক্ষেত্র থেকে লম্বভাবে প্রতি একক ঘন কোণ দিয়ে ঘনকোণের অক্ষ বরাবর প্রতি সেকেন্ডে বিকিরিত শক্তির পরিমাণ (শক্তির এককে) কে  $e_\lambda d\lambda$  দিয়ে সূচিত করা হল।  $e_\lambda$  কে বলা হবে বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা।  $e_\lambda$  বিভিন্ন বস্তুর ক্ষেত্রে বিভিন্ন এবং একই বস্তুর ক্ষেত্রে বিভিন্ন তরঙ্গ দৈর্ঘ্য ও উষ্ণতায় বিভিন্ন হতে পারে।

এখন বস্তুর  $dA$  ক্ষেত্রফল থেকে লম্বভাবে  $d\omega$  ঘনকোণে  $dt$  সময়ে যদি  $dR_\lambda$  পরিমাণ বিকিরণ শক্তি নির্গত হয় তবে,

$$e_\lambda d\lambda = \frac{dR_\lambda}{dA d\omega dt} \quad (2)$$

### শোষণ ক্ষমতা (absorptive power)

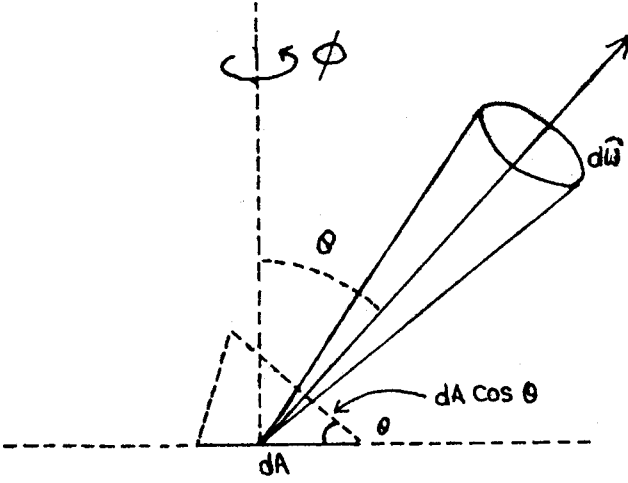
একই রকমভাবে যদি  $\lambda$  ও  $\lambda+d\lambda$  -এর মধ্যে বস্তুর ওপর  $dQ_\lambda$  বিকিরণ শক্তি এসে পড়ে এবং তার থেকে  $a_\lambda dQ_\lambda$  অংশ বস্তুদ্বারা শোষিত হয় তবে  $a_\lambda$  কে  $\lambda$  ও  $\lambda+d\lambda$  -এর অন্তর্বর্তী তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের বিকিরণের ক্ষেত্রে শোষণ ক্ষমতা বলা হবে।

কোনো বস্তুতল থেকে মোট বিকিরণের হার :

কোনো বস্তুতলের  $dA$  অংশ থেকে একক সময়ে মোট কত বিকিরণ নির্গত হয় এবার তা নির্ণয় করা যাক। প্রথমে দেখা যাক  $d\omega$  ঘনকোণ (চিত্র 4) বরাবর কত বিকিরণ হয়। এখানে ঘনকোণটি  $(\theta, \phi)$  অক্ষের দিকে এবং তার মান হল  $d\omega = \sin\theta d\theta d\phi$

$\therefore dA$  থেকে প্রতি সেকেন্ডে  $d\omega$  ঘনকোণ বরাবর বিকিরণের পরিমাণ

$$= e_{\lambda} d\lambda (dA \cos \theta) (\sin \theta d\theta d\phi)$$



চিত্র 4

$\therefore$   $dA$  থেকে প্রতি সেকেন্ডে  $\lambda$  ও  $\lambda + d\lambda$ -এর মধ্যে মোট বিকিরণের পরিমাণ

$$= e_{\lambda} d\lambda dA \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$= \pi e_{\lambda} d\lambda dA$$

কাজেই  $\lambda$  ও  $\lambda + d\lambda$ -এর মধ্যে একক ক্ষেত্রফল থেকে বিকিরণের হার

$$= \pi e_{\lambda} d\lambda \quad (3a)$$

$$\therefore \text{একক ক্ষেত্রফল থেকে মোট বিকিরণের হার} = \pi \int_0^{\infty} e_{\lambda} d\lambda \quad (3b)$$

একটি উদাহরণ : ধরা যাক,  $dA$  বস্তুতল থেকে বিকিরণ নির্গত হচ্ছে (চিত্র 5)।  $dA$  থেকে  $r$  দূরত্বে অবস্থিত অপর একটি বস্তুতল  $dA'$ -এর ওপর  $dA$  থেকে নির্গত কী পরিমাণ বিকিরণ একক সময়ে পড়বে?

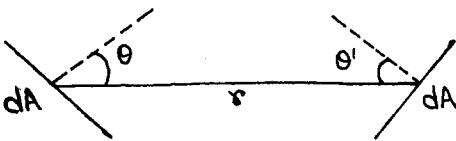
$dA$  ও  $dA'$ -এর ওপর লম্বদুটি  $r$ -এর সঙ্গে যথাক্রমে  $\theta$  ও  $\theta'$  কোণ করেছে।  $dA$  তে  $dA'$  যে ঘনকোণ উৎপন্ন করেছে তা হল

$$d\omega = \frac{dA' \cos \theta'}{r^2}$$

$\therefore$   $dA$  থেকে  $dA'$  ওপর একক সময়ে আপতিত বিকিরণের পরিমাণ

$$= e_{\lambda} \omega_{\lambda} (dA \cos \theta) \left( \frac{dA' \cos \theta'}{r^2} \right)$$

$$= e_{\lambda} d\lambda \left( \frac{dA \cos \theta}{r^2} \right) dA' \cos \theta' \quad (4)$$



চিত্র 5



## 7.7 তাপীয় বিকিরণের ক্ষেত্রে পদার্থ ও বিকিরণের মধ্যে শক্তির বিনিময় : কিরশফের সূত্র

কিরশফের সূত্র :

যে কোনো নির্দিষ্ট তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের বিকিরণের ক্ষেত্রে একই উষ্ণতা প্রাপ্ত সব বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা ও শোষণ ক্ষমতার অনুপাত একই এবং তা কৃষ্ণকায় বস্তুর ঐ একই উষ্ণতা ও তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে বিকিরণ ক্ষমতার সমান।

অর্থাৎ যে কোনো তরঙ্গ দৈর্ঘ্য  $\lambda$  -এর ক্ষেত্রে

$$\frac{e_{\lambda}}{a_{\lambda}} = \text{ধ্রুবক (সব বস্তুর ক্ষেত্রে)} = e_{\lambda}^b \text{ (কৃষ্ণকায় বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা)} \quad (5)$$

কিরশফ সূত্রের প্রমাণ :

একটি ফাঁকা আবেষ্টনীর (enclosure) দেওয়ালকে সুস্থ উষ্ণতায় এনে তার পারিপার্শ্ব থেকে তাপরুদ্ধ করে দেওয়া হল যাতে আবেষ্টনীর তাপ বাড়তে বা কমতে না পারে। ধরা যাক, আবেষ্টনীর দেওয়াল সব তরঙ্গের বিকিরণের ক্ষেত্রেই অনচ্ছ।

আবেষ্টনীর দেওয়াল থেকে যে তাপীয় বিকিরণ নিগত হবে ক্রমে তা আবেষ্টনীর ভিতরের সমস্ত জায়গা ভরে ফেলবে। আবেষ্টনীর সমস্ত তাপশক্তির একটি অংশ হল এই বিকিরণের শক্তি। একটি ছোট বস্তুখণ্ড A কে আবেষ্টনীর ভিতরে দেওয়াল থেকে দূরে রাখা হল। যখন সাম্যাবস্থা স্থাপিত হবে তখন এনট্রপির মান ঐ অবস্থায় সর্বোচ্চ হবে। অর্থাৎ A বস্তুটি ও আবেষ্টনীর দেওয়াল একই উষ্ণতা প্রাপ্ত হবে, A বস্তুটির প্রাথমিক উষ্ণতা যাই হোক না কেন। A বস্তুটি যেমন পদার্থেরই হোক না কেন সাম্যাবস্থায় তার উষ্ণতা দেওয়ালের উষ্ণতার সমান হবে।

এবার ধরা যাক, বস্তুটি অনেক রকম পদার্থ দিয়ে তৈরি। প্রতিটি পদার্থের  $e_{\lambda}$  ও  $a_{\lambda}$  বিভিন্ন হবে। যেহেতু সাম্যাবস্থায় বস্তুটির উষ্ণতা স্থির থাকবে অতএব বস্তুটি মোট যত পরিমাণ শক্তি শোষণ করবে, ঠিক ততটাই বিকিরণ করবে। কিন্তু প্রিভস্টের সূত্রানুসারে বিকিরিত শক্তি পারিপার্শ্বিকের ওপর নির্ভর করেনা। অতএব আবেষ্টনীর দেওয়ালের সাপেক্ষে বস্তুটির স্থান ও দিক পরিবর্তন করলেও কিছু এসে যাবে না, বস্তুটি একই পরিমাণ বিকিরণ শক্তি শোষণ করবে। এটা তখনই সম্ভব যখন আবেষ্টনীর মধ্যে বিভিন্ন দিকগামী বিকিরণের পরিমাণ ও প্রকৃতি একই রকম। অর্থাৎ অভ্যন্তরস্থ বিকিরণ দিক নিরপেক্ষ (isotropic)।

এখন আমরা প্রমাণ করব যে, স্থির উষ্ণতার আবেষ্টনীর মধ্যস্থ বিকিরণ আবেষ্টনীর দেওয়াল বা তার ভিতরে অবস্থিত কোনো বস্তুর প্রকৃতি বা আকৃতির ওপর নির্ভর করেনা।

বস্তুটি থেকে একক সময়ে মোট বিকিরিত শক্তির পরিমাণ (চিত্র 6 দেখুন)

$$= \pi \sum dA \int_0^{\infty} e_{\lambda} d\lambda \quad (6)$$

এবং আবেষ্টনীর দেওয়াল থেকে এবং A বস্তুটি দ্বারা শোষিত শক্তির পরিমাণ ( $E_{\lambda}$  আবেষ্টনীর দেওয়ালের বিকিরণ ক্ষমতা)

$$= \sum_A \iint a_{\lambda} E_{\lambda} d\lambda \frac{dA' \cos \theta'}{r^2} dA \cos \theta$$

$$= \sum_A dA \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} a_{\lambda} E_{\lambda} d\lambda$$

(কেননা  $\frac{dA' \cos \theta'}{r^2} = d\hat{\omega} = \sin \theta d\theta d\phi$ )

$$= \pi \sum dA \int_0^{\infty} a_{\lambda} E_{\lambda} d\lambda \quad (7)$$

সাম্যাবস্থায় A বস্তুটি দ্বারা শোষণ ও বস্তুটি থেকে বিকিরণ সমান হতে হবে। কাজেই (6) ও (7) থেকে

$$\int_0^{\infty} e_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} a_{\lambda} E_{\lambda} d\lambda \quad (8)$$

বিকিরণ বর্ণালীর প্রতিটি অংশেই এই সমতা থাকতে হবে। অতএব

$$e_{\lambda} = a_{\lambda} E_{\lambda} \quad (9a)$$

এবার বস্তু A কে অন্য পদার্থ দিয়ে তৈরি দেওয়ালের আর একটি আবেষ্টনীর মধ্যে রাখা হল। ধরা যাক, সাম্যাবস্থায় নতুন আবেষ্টনীর দেওয়ালের উষ্ণতা আগের আবেষ্টনীর সমান এবং দেওয়ালের

বিকিরণ ক্ষমতা  $E'_\lambda$ । A বস্তুটি যেহেতু একই আছে এবং উষ্ণতাও এক, বস্তুটির  $e_\lambda$  ও  $a_\lambda$  একই থাকবে। নতুন পরিবেশে

$$e_\lambda = a_\lambda E'_\lambda \quad (9b)$$

$$\therefore E_\lambda = E'_\lambda \quad (9c)$$

প্রমাণিত হল যে,

একই উষ্ণতায় রাখা সব আবেষ্টনীর দেওয়ালের বিকিরণ ক্ষমতা সমান, আবেষ্টনীর দেওয়ালের প্রকৃতির ওপর তা নির্ভর করেনা।

যদি A বস্তুটি একটি কৃষ্ণকায় বস্তু হয় (অর্থাৎ  $a_\lambda^b = 1$ )

$$\text{তবে } e_\lambda^b = a_\lambda^b E_\lambda = E_\lambda$$

অর্থাৎ A বস্তুটি যে কোনো পদার্থেরই হোক না কেন, তার  $e_\lambda$  ও  $a_\lambda$  -এর অনুপাত

$$\frac{e_\lambda}{a_\lambda} = E_\lambda = e_\lambda^b = \text{ধ্রুবক} \quad (5)$$

কিরশফের সূত্র প্রমাণিত হল।

এই বিশ্লেষণ থেকে তিনটি গুরুত্বপূর্ণ সিদ্ধান্তে আসা গেল :

(1) একটি ফাঁকা আবেষ্টনীর ভিতরে যে বিকিরণ আবেষ্টনীর দেওয়ালের সঙ্গে সাম্যাবস্থায় থাকে তার প্রকৃতি দেওয়ালের আকৃতি বা প্রকৃতির ওপর নির্ভর করেনা।

(2) একই উষ্ণতায় একটি কৃষ্ণকায় বস্তু যে বিকিরণ করে এবং ফাঁকা আবেষ্টনীর মধ্যে সাম্যাবস্থায় যে বিকিরণ পাওয়া যায় তারা সর্বাংশে অভিন্ন।

(3) নির্দিষ্ট উষ্ণতা ও তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের জন্য সব বস্তুরই

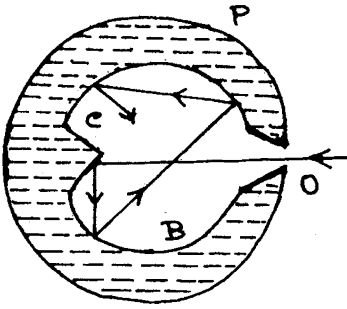
$$e_\lambda / a_\lambda = \text{একটি ধ্রুবক}$$

এবং এই ধ্রুবকের মান হল সেই উষ্ণতা ও তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে কৃষ্ণকায় বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা  $e_\lambda^b$  -এর সমান।

## 7.7.1 পরীক্ষাগারে ব্যবহৃত কৃষ্ণকায় বস্তু

‘যদি কোনো আবেষ্টনীকে একটি নির্দিষ্ট উষ্ণতায় রাখা যায় তবে তার ভিতরটি পূর্ণ হবে কৃষ্ণকায় বিকিরণ দিয়ে’ — এটিই হল প্রযুক্তির দৃষ্টিকোণ থেকে কিরশফের বিশ্লেষণের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ সিদ্ধান্ত। এই সিদ্ধান্তে কিরশফ উপনীত হয়েছিলেন 1858 খ্রিঃ। এই সিদ্ধান্ত প্রয়োগ করে পরীক্ষাগারে ব্যবহার করার জন্য বিভিন্ন আদর্শ কৃষ্ণকায় বস্তু উদ্ভাবিত হয়েছে। এদের মধ্যে উল্লেখযোগ্য ফেরি (Fery) ও ভীনের (Wien) কৃষ্ণকায় কক্ষগুলি।

### ফেরি উদ্ভাবিত কৃষ্ণকায় কক্ষ

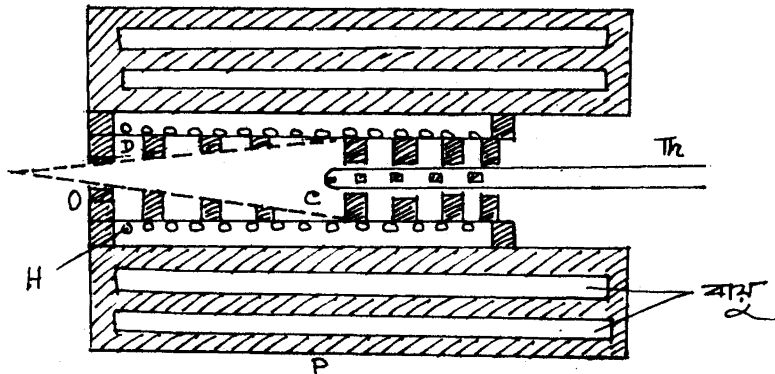


চিত্র 7

এটি একটি দুই দেওয়াল বিশিষ্ট খাতব গোলাকার কক্ষ (চিত্র 7)। ভিতরের দেওয়াল B ভূষোকালি দিয়ে কৃষ্ণায়িত। বাইরের দেওয়াল P মসৃণ ও চকচকে পালিশ করা, নিকেলের প্রলেপ দেওয়া। দেওয়ালে একটি ছোট ছিদ্র O আছে এবং O -এর ঠিক বিপরীতে ভিতরের দেওয়ালটি শঙ্কুর মতো উঁচু। ফলে ভিতর থেকে সরাসরি বিকিরণ প্রতিফলিত হয়ে O দিয়ে বাইরে যেতে পারেনা। বাইরে থেকে বিকিরণ ভিতরে ঢুকলে আর বাইরে ফিরে আসতে পারেনা। ফলে কক্ষটি একটি আদর্শ কৃষ্ণকায় শোষকের মতো আচরণ করে।

### ভীনের কৃষ্ণকায় কক্ষ :

যে কৃষ্ণকায় কক্ষটি বর্তমানে পরীক্ষাগারে ব্যবহৃত হয় সেটি ভীন (Wien) ও লামার (Lummer) 1895 খ্রিঃ উদ্ভাবন করেছেন। এর গঠনে পরে অনেক পরিমার্জন হয়েছে। ভীনের কক্ষটির মূল অংশ হল একটি লম্বা ফাঁকা খাতব চোঙ C (চিত্র 8)। উষ্ণতার ওপর নির্ভর করে চোঙটি পিতল বা প্ল্যাটিনামের



চিত্র 8 ভীনের কৃষ্ণকায় কক্ষ

নেওয়া হয়। এই চোঙটি H কুণ্ডলীতে (প্ল্যাটিনাম পাতের) তড়িৎপ্রবাহ পাঠিয়ে উত্তপ্ত করা হয়। একটি তাপযুগ্ম Th দিয়ে ভিতরের উষ্ণতা মাপা হয়। চোঙের ভিতরটি কৃষ্ণায়িত করা হয় যাতে কক্ষটি দ্রুত তাপগতীয় সাম্যাবস্থায় পৌঁছায়। চোঙটিকে ঘিরে রাখে আরো দুটি পোসেলিনের ফাঁপা সমাক্ষ চোঙ। কক্ষের ভিতর থেকে কৃষ্ণ বিকিরণ কতগুলি মধ্যচ্ছদা (D) দিয়ে অবশেষে বাইরে আসে। ভীনের কক্ষ কৃষ্ণকায় বিকিরক হিসাবে ব্যবহৃত হয়।

## 7.7.2 কিরশফের সূত্রের প্রয়োগ

কিরশফের সূত্রের দুটি তাৎপর্য আছে। গুণগত তাৎপর্য হচ্ছে যে কোনো বস্তু নির্দিষ্ট তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের বিকিরণ শোষণ করলে বস্তু থেকে সেই বিকিরণ (আংশিক) নির্গতও হবে। শোষণ করবে কিন্তু ঐ বিকিরণ একেবারেই নির্গত হবেনা এমনটি হবেনা। মানগত তাৎপর্য হল যে, এই নির্গমন ও শোষণ এর অনুপাত সববস্তুর ক্ষেত্রেই এক হবে। অর্থাৎ বেশি শোষণ করলে বেশি বিকিরণ নির্গত হবে।

অসংখ্য পর্যবেক্ষণ এই তাৎপর্যগুলিকে সমর্থন করে। দু-একটি সাধারণ উদাহরণ দেওয়া যাক।

উদাহরণ 1. একটি চকচকে ধাতব গোলকের ওপর প্ল্যাটিনাম ব্ল্যাক দিয়ে ছোট ফুটকি এঁকে দেওয়া হল। গোলকটিকে প্রায়  $1000^{\circ}\text{C}$  পর্যন্ত উত্তপ্ত করে অন্ধকার ঘরে নিয়ে গেলে কালো ফুটকিটাকে অনুজ্জ্বল ধাতব গোলকের ওপর জ্বলজ্বল করতে দেখা যাবে। কারণ প্ল্যাটিনাম ব্ল্যাক অনেক বেশী শোষণ করে বলে বিকিরণও করে অনেক বেশি আর চকচকে ধাতব গোলকটি শোষণ করে কম সুতরাং বিকিরণও করে কম।

উদাহরণ 2. সবুজ কাচের টুকরো সবুজ দেখায় তার কারণ হল ঐ কাচ লাল আলো শোষণ করে আর সবুজ আলোকে কাচের মধ্য দিয়ে যেতে দেয়। এবার ঐ কাচের টুকরোটি চুল্লীতে যথেষ্ট উত্তপ্ত করে চুল্লীর বাইরে আনলে দেখা যাবে কাচটি জ্বলজ্বল করে লাল আলো দিচ্ছে।

কিরশফ সূত্র পদার্থবিদ্যায় একটি অতি মূল্যবান সূত্র। এই সূত্র যে শোষণ ও বিকিরণের বহু ঘটনাকেই বুঝতে সাহায্য করেছে তাই নয়, বর্ণালীবীক্ষণ ও বিশ্লেষণবিদ্যা (spectroscopy) ও জ্যোতির্পদার্থবিদ্যা (Astrophysics) নামে পদার্থবিদ্যার দুটি প্রধান শাখারও কার্যত জন্ম হয়েছে কিরশফের সূত্র থেকে।

কিরশফ কর্তৃক ফ্রাউনহোফার রেখার ব্যাখ্যা :

1680 খ্রীঃ নিউটন প্রিজমের সাহায্যে সূর্যের আলোর বর্ণালী দেখেছিলেন। 1801 খ্রীঃ ফ্রাউনহোফার (Fraunhofer) উন্নততর যন্ত্র দিয়ে সূর্যের আলোর বর্ণালী আবার পরীক্ষা করতে গিয়ে বিস্ময়ের সঙ্গে

দেখতে পেলেন যে, সূর্যের বর্ণালী অবিচ্ছিন্ন নয়, মাঝে মাঝে কালো রেখা দেখা যাচ্ছে। ফ্রাউনহোফার এরকম 500 টি কালো রেখা দেখতে পান। এদের ফ্রাউনহোফার রেখা বলা হয়। ধারা বর্ণালী (continuous spectrum) -এর ওপর এরকম কালো রেখা বর্ণালী কেন হল ফ্রাউনহোফার তা বুঝতে পারেননি। বহু পরে ফিজু (Fizeau) ও আরো কিছু পদার্থবিদ লক্ষ করেন যে, হাইড্রোজেন, সোডিয়াম প্রভৃতি কিছু মৌলের বিকিরণ বর্ণালীও (emission spectrum) রেখা বর্ণালী এবং সূর্যের কালো রেখা বর্ণালীর পাশাপাশি রাখলে দেখা যায় যে ফ্রাউনহোফার রেখাগুলির অনেকগুলিই হাইড্রোজেন, সোডিয়াম ও অন্যান্য মৌলের উজ্জ্বল বিকিরণ রেখাবর্ণালীর রেখাগুলির একই জায়গায় অবস্থিত অর্থাৎ তাদের কম্পাঙ্ক বা তরঙ্গদৈর্ঘ্য এক।

কিরশফ তাঁর সূত্রের সাহায্যে এ ঘটনার যে ব্যাখ্যা দিলেন তাতে বিষয়টি স্পষ্ট হল। তিনি অনুমান করলেন যে, সূর্যের অভ্যন্তরটি একটি দীপ্ত জড়পিণ্ড (ফোটোস্ফিয়ার) যা থেকে ধারা বর্ণালী নির্গত হচ্ছে। এই বর্ণালীতে কোনো কালো রেখা নেই। সূর্যের অভ্যন্তর অত্যন্ত উত্তপ্ত। তাকে ঘিরে রয়েছে অপেক্ষাকৃত কম উষ্ণতার একটি আবরণ (ক্রোমোস্ফিয়ার) যা গ্যাসীয় অবস্থায় Na, Cu ইত্যাদি অনেক মৌল দিয়ে গঠিত। কিরশফের সূত্রানুযায়ী এই মৌলগুলি গ্যাসীয় অবস্থায় যে রেখাবর্ণালী বিকিরণ করে তা শোষণও করবে। কাজেই দীপ্ত পিণ্ড থেকে বিকিরণ বাইরের অপেক্ষাকৃত ঠাণ্ডা গ্যাসীয় আবরণীর মধ্য দিয়ে যাবার সময় ধারা বর্ণালীর সেই সব অংশ শোষিত হবে যা ঐ আবরণীতে গ্যাসীয় অবস্থায় থাকা মৌলেরা উজ্জীবিত হলে বিকিরণ করে। ফলে ধারা বর্ণালীর ঐ সব অংশ বাদ যাবে। যে সব অংশ বাদ যাবে ধারা বর্ণালীর পটভূমিকায় সেই সব অংশকে কালো দেখাবে। এভাবেই ফ্রাউনহোফার রেখাগুলির সৃষ্টি হয়েছে।

ফ্রাউনহোফার রেখার ব্যাখ্যা করতে গিয়ে কিরশফ যে কথা স্পষ্ট করে বললেন তা হল :

‘প্রতিটি পৃথক ধরনের পরমাণু উজ্জীবিত হলে যে সব তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের আলো বিকিরণ করে তারা ঐ পরমাণুর বিশেষত্বসূচক।’ একটি নির্দিষ্ট পরমাণুকে চেনা যাবে, যে বিশেষ রেখা বর্ণালী পরমাণুটি বিকিরণ করে তা দিয়ে। এই সিদ্ধান্তটি থেকেই জন্ম নিয়েছে বর্ণালীবীক্ষণবিদ্যা (spectroscopy) যার উদ্দেশ্যই হল বিশেষত্বসূচক রেখা বর্ণালী দেখে মৌলদের চিহ্নিত করা। বহু নতুন মৌল এভাবে আবিষ্কৃত হয়েছে।

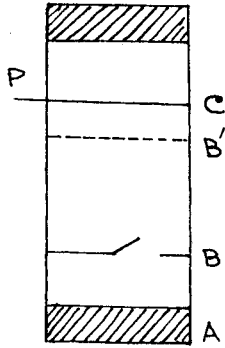
নক্ষত্রদের থেকে আসা আলোর বর্ণালী বিশ্লেষণ থেকে জানা যায় সেসব নক্ষত্রে কী কী মৌল রয়েছে, তাদের আনুপাতিক পরিমাণ, তাদের গঠন, জন্মবৃত্তান্ত ইত্যাদি। এভাবে জন্ম হয়েছে জ্যোতির্পদার্থবিদ্যার।

## 7.8 বিকিরণের চাপ

আলো যে পদার্থ কণিকার ওপর চাপ প্রয়োগ করে তা প্রথম অনুমান করেছিলেন কেপলার (Keplar)। ধূমকেতুর গতিবিধি পর্যবেক্ষণ করতে গিয়ে কেপলার দেখতে পান যে, ধূমকেতুর পুচ্ছটি

সবসময়ই ধূমকেতুর যে পাশে সূর্য অবস্থিত তার বিপরীত দিকে মুখ করে ঘুরে যায় এবং ধূমকেতু যত সূর্যের নিকটবর্তী হয় তার পুচ্ছের দৈর্ঘ্যও তত বাড়তে থাকে। সূর্যের আলো সব বস্তুকণার ওপরই চাপ প্রয়োগ করে এটা ধরে নিয়ে কেপলার এই ঘটনার ব্যাখ্যা দিয়েছিলেন। ধূমকেতুর একটি গ্যাসীয় বহিরাবরণ আছে যা ক্ষুদ্র বস্তুকণা দিয়ে গঠিত। সূর্যের আলোর চাপে, চাপের দিকে সরে গিয়ে এই বস্তুকণাগুলি ধূমকেতুর পুচ্ছ সৃষ্টি করে। সূর্যের নিকটে এলে আলোর চাপ বাড়ে, কাজেই পুচ্ছের দৈর্ঘ্যও বাড়ে। কেপলারের সময়ে পরীক্ষাগারে আলোর চাপ প্রমাণিত না হওয়ায় কেপলারের ব্যাখ্যাটি পরিত্যক্ত হয়েছিল এখন আমরা জানি যে কেপলার ঠিকই অনুমান করেছিলেন।

### (A) বাতোলির প্রমাণ



চিত্র 9

তাপগতিবিদ্যা প্রয়োগ করে একটি চমৎকার কাল্পনিক পরীক্ষার মাধ্যমে বাতোলি (Bartoli) প্রমাণ করেন যে, বিকিরণের চাপ আছে।

কল্পনা করা যাক যে ABCD চোঙের তলগুলি আদর্শ প্রতিফলক এবং A ও D প্রান্ত দুটিকে বন্ধ করে দেওয়া হয়েছে দুটি আদর্শ পরিবাহক দিয়ে যাদের ভিতরের তলদুটি কৃষ্ণায়িত এবং এরা দুটি তাপ সংরক্ষককে স্পর্শ করে আছে যাদের উষ্ণতা  $T$  ও  $T'$  ( $T < T'$ )। B ও C দুটি আদর্শ প্রতিফলক বিল্লি। B তে একটি একমুখী কপাটক (V) আছে। P হাতল দিয়ে টেনে C বিল্লিটিকে পাশে সরিয়ে নেওয়া যায়।

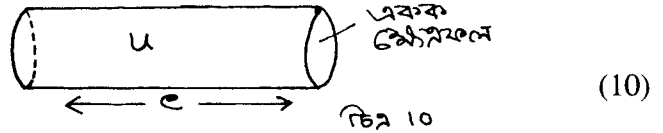
কপাটক V কে খোলা রেখে ও C কে যথাস্থানে রেখে শুরু করা হল। AC স্থানটি  $T'$  উষ্ণতায় কৃষ্ণকায় বস্তুর সঙ্গে সাম্যাবস্থায় থাকা বিকিরণে পূর্ণ হবে, একইভাবে CD স্থানটি  $T'$  উষ্ণতায় কৃষ্ণকায় বস্তুর সঙ্গে সাম্যাবস্থায় থাকা বিকিরণে পূর্ণ হবে। কপাটক V কে বন্ধ করে B বিল্লিকে  $B'$  স্থানে নেওয়া হল যাতে  $B'C$  আয়তন খুবই ছোট হয়। ফলে  $B'C$  -এর মধ্যস্থ বিকিরণের ঘনত্ব, CD স্থানে বিকিরণের ঘনত্ব থেকে অনেক বেশি হয়ে যাবে। এবার P হাতলের সাহায্যে C বিল্লিকে টেনে সরিয়ে দিলে  $B'C$  ও CD স্থানের বিকিরণ  $B'D$  জায়গা অধিকার করবে।  $B'D$  তে বিকিরণের ঘনত্ব, আগে CD তে বিকিরণের যে ঘনত্ব ছিল তার থেকে বেশি হবে, অর্থাৎ  $T'$  উষ্ণতার কৃষ্ণবস্তুর সঙ্গে সাম্যাবস্থায় থাকবার পক্ষে যতটুকু দরকার তার থেকে বেশি। D তে  $T'$  উষ্ণতার কৃষ্ণকায় বস্তুটি এবার বিকিরণ শোষণ করতে থাকবে যতক্ষণ না আবার সাম্যাবস্থা ফিরে আসে। এই সব প্রক্রিয়ার

সাহায্যে আসলে একটি কম উষ্ণ বস্তু থেকে তাপশক্তি আর একটি উষ্ণতর বস্তুতে স্থানান্তরিত করা হয়েছে। তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী এটা কেবল কিছু কার্য করার মাধ্যমেই সম্ভব। কাজেই B কে B' স্থানে সরিয়ে নেবার সময়ই এই কার্যটি হয়েছে। তার মানে B কে সরাতে হয়েছে কোনো চাপের বিরুদ্ধে। BC স্থানে বিকিরণ ছাড়া আর কিছু ছিলনা। অতএব চাপটি বিকিরণেরই।

### (B) ম্যাক্সওয়েলের তড়িৎচৌম্বকীয় তত্ত্ব ও আলোর চাপ :

1900 খ্রীঃ ম্যাক্সওয়েল (Maxwell) আলোর তড়িৎচৌম্বকীয় তত্ত্ব উপস্থাপিত করেন। এই তত্ত্বের সাহায্যে ম্যাক্সওয়েল প্রমাণ করেন যে, আলো চাপ প্রয়োগ করবে এবং এই চাপ সমান্তরাল রশ্মিগুচ্ছের বেলায় তড়িৎচৌম্বকীয় ক্ষেত্রের শক্তি ঘনত্বের সমান।

সমান্তরাল রশ্মিগুচ্ছের ক্ষেত্রে প্রতি সেকেন্ডে একক বর্গক্ষেত্রের ওপর লম্বভাবে যে আলোকশক্তি আপতিত হয় তা হল আলোর তীব্রতা I। আলোর বেগ C হলে স্পষ্টতই C দৈর্ঘ্যের এবং একক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি চোঙের মধ্যে অবস্থিত আলোকশক্তির পরিমাণই হল I। অতএব আলোকশক্তির ঘনত্ব u হলে,



$$uc = I$$

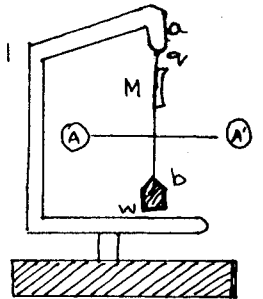
অতএব ম্যাক্সওয়েলের তত্ত্ব অনুযায়ী, সমান্তরাল রশ্মিগুচ্ছের ক্ষেত্রে বিকিরণ চাপ

$$p = u = I/c \quad (11)$$

সূর্যালোকের ক্ষেত্রে এই চাপ কত হতে পারে তা গণনা করে দেখা যাক।

$$I = \text{সৌর ধ্রুবক} = 1.349 \times 10^3 \text{ Wm}^{-2}$$

$$\therefore p = \frac{1.349 \times 10^3}{3 \times 10^8} = 4.497 \times 10^{-6} \text{ Nm}^{-2} = 4.5 \times 10^{-5} \text{ dyne cm}^{-2}$$



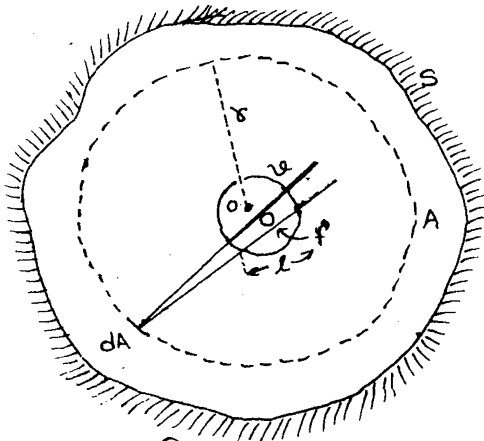
চিত্র - 11

অর্থাৎ প্রায়  $4.6 \times 10^{-8} \text{ g}$  ভরের ওজনের সমান বল  $1 \text{ cm}^2$  ওপর। এক্ষেত্রে দেখা যাচ্ছে আলোর চাপ নগণ্য।

### (C) বিক্ষিপ্ত বিকিরণের শক্তির ঘনত্ব ও চাপ :

বিক্ষিপ্ত বিকিরণের বেলায় শক্তির ঘনত্ব ও চাপের মধ্যে সম্বন্ধটি অন্যরকম। প্রথমে বিক্ষিপ্ত বিকিরণের শক্তির ঘনত্ব নির্ণয় করা যাক।





চিত্র 12

যে কোনো আকৃতির ও সুসমভাবে উত্তপ্ত একটি আবেষ্টনী S নেওয়া যাক (চিত্র 12)। এর ভিতরে ছোট একটি আয়তন  $\vartheta$ ।  $\vartheta$  -এর মধ্যে যে কোনো একটি বিন্দু O কে কেন্দ্র করে S -এর ভিতরে একটি গোলক A কল্পনা করা যাক যার ব্যাসার্ধ r। আবেষ্টনী S থেকে যে বিকিরণ  $\vartheta$  -এর দিকে আসছে তা A গোলককে অতিক্রম করে যাবে। অতএব  $\vartheta$  র দিকে যে বিকিরণ আসছে তা A গোলকের তল থেকে আসছে ধরা যেতে পারে।

ধরা যাক, A গোলক তলের একটি ক্ষুদ্র অংশ dA -এর মধ্য দিয়ে যাওয়া বিকিরণ A র ব্যাসার্ধ বরাবর অগ্রসর হয়ে  $\vartheta$  -এর মধ্য দিয়ে যাবার সময়  $\vartheta$  -এর মধ্যে  $l$  দূরত্ব অতিক্রম করেছে। dA কে শীর্ষবিন্দু ও ব্যাসার্ধ কে অক্ষ নিয়ে একটি ছোট শঙ্কু কল্পনা করা যাক। ব্যাসার্ধের সাপেক্ষে  $\vartheta$  র ভিতরে যার লম্ব প্রস্থচ্ছেদ হল  $f$ । শীর্ষবিন্দুতে শঙ্কুর ঘন কোণ হল  $f/r^2$ । শঙ্কু বরাবর যাবার সময় বিকিরণ  $\vartheta$  কে অতিক্রম করবে  $l/c$  সময়ে। কাজেই ঐ শঙ্কুর জন্য  $\vartheta$  -এর মধ্যে যতটুকু বিকিরণ থাকবে তার পরিমাণ হল (যেহেতু সব সময়েই  $\theta \approx 0$ )

$$= K \left( \frac{f}{r^2} \right) \left( \frac{l}{c} \right) (dA) \quad (12)$$

কোনো দিকে একক ঘনকোণে, একক সময়ে, একক ক্ষেত্রফল অতিক্রম করে যে বিকিরণ যায় তার পরিমাণকে K দিয়ে সূচিত করা হয়েছে। K কে বলা হয় বিকিরণের আপেক্ষিক তীব্রতা (specific intensity of radiation)।

dA থেকে আসা যে পরিমাণ বিকিরণ  $\vartheta$  তে আছে তা হল

$$= \frac{K}{C} \frac{dA}{r^2} \sum f l = \frac{K}{C} \cdot \frac{dA}{r^2} \cdot \vartheta \quad (13)$$

সম্পূর্ণ আবেষ্টনী S থেকে (বা সম্পূর্ণ গোলক A থেকে) আসা  $\vartheta$  -এর মধ্যস্থ বিকিরণের

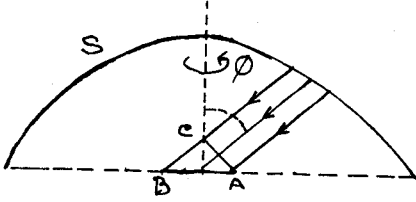
$$\text{পরিমাণ} = \frac{K}{C} \vartheta \sum \frac{dA}{r^2} = \frac{K}{C} \vartheta \cdot 4\pi \quad (14)$$

কেননা,  $\frac{dA}{r^2}$  হল  $dA$  তলটি  $O$  বিন্দুতে যে ঘনকোণ উৎপন্ন করে তার মান।

$$\therefore \text{বিক্ষিপ্ত বিকিরণের ঘনত্ব } u = \frac{4\pi}{c} K \quad (15)$$

বিকিরণের চাপ

AB একটি তল যার ওপর বিকিরণ এসে পড়ছে ও চাপ প্রয়োগ করছে (চিত্র 13)। AB -এর ওপর



চিত্র 13

যে বিক্ষিপ্ত বিকিরণ এসে পড়তে পারে তা আসবে AB -এর পার্শ্বস্থ অর্ধগোলক S কে অতিক্রম করে। ধরা যাক, AB -এর লম্বের সঙ্গে  $\theta$  কোণ করে ছোট ঘনকোণ  $d\omega(\theta, \phi)$  বরাবর বিকিরণ AB র ওপর এসে পড়ছে।  $d\omega$  ঘনকোণ বরাবর বিকিরণের তীব্রতা হবে  $k d\omega$ ।  $d\omega$  খুব কম হলে  $d\omega$  -এর মধ্য দিয়ে আসা বিকিরণকে সমান্তরাল রশ্মিগুচ্ছ বলে ধরে নেওয়া যাবে। অতএব ঐ দিকের লম্বভাবে অবস্থিত

তলের ওপর (অর্থাৎ AC -এর ওপর) বিকিরণের চাপ হবে  $\frac{K d\omega}{C}$ ।

$\therefore$  AC -এর ওপর বল  $(AC) \frac{k d\omega}{c} = AB$  -এর ওপর বল (AB -এর ওপর বল পড়ছে

তির্যকভাবে)  $d\omega$  ঘনকোণ দিয়ে আসা বিকিরণের AB -এর ওপর লম্বভাবে প্রযুক্ত বল

$$= (AC) \frac{K d\omega}{C} \cos \theta = (AB) \frac{K d\omega}{C} \cos^2 \theta$$

$\therefore$  AB -এর ওপর অর্ধগোলক থেকে আসা বিকিরণের জন্য চাপ

$$p = \frac{K}{C} \iint \cos^2 \theta d\omega = \frac{K}{C} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$p = \frac{2\pi K}{C} \int_0^1 x^2 dx = \frac{2\pi K}{C} \cdot \frac{1}{3} \quad (16)$$

এক্ষেত্রে AB -এর নিকটে বিকিরণের ঘনত্ব  $u$  হবে কেবলমাত্র অর্ধগোলক S এর জন্য

$$\text{অর্থাৎ, } u = \frac{2\pi K}{C} \quad (17)$$

$$\therefore \text{ বিক্ষিপ্ত বিকিরণের ক্ষেত্রে } p = \frac{u}{3} \quad (18)$$

কৃষ্ণকায় বিকিরণের তাপগতীয় অবস্থা পরিপূর্ণভাবে নির্দিষ্ট হচ্ছে তার চাপ  $p$ , বিকিরণের আয়তন  $V$  এবং বিকিরণ যে আবেষ্টনীর দেওয়ালের সঙ্গে সাম্যাবস্থায় আছে তার উষ্ণতা  $T$  দিয়ে। এই উষ্ণতাকেই বিকিরণের উষ্ণতা (radiation temperature) বলা হয়।

## 7.9 কৃষ্ণকায় বিকিরক থেকে মোট বিকিরণের পরিমাণ : স্টিফান-বোলৎজমান সূত্র

সমসাময়িক বহু পরীক্ষার ফল পর্যালোচনা করে 1879 খ্রীঃ স্টিফান এই সিদ্ধান্তে আসেন যে কোন উত্তপ্ত বস্তু থেকে মোট বিকিরণের পরিমাণ তার পরম উষ্ণতার চতুর্থঘাতের সমানুপাতিক। বোলৎজমান এই সূত্রটির একটি তাত্ত্বিক ব্যাখ্যা দেন 1884 খ্রীঃ। তাপগতিবিদ্যার সাহায্যে তিনি প্রমাণ করেন যে, কৃষ্ণকায় বস্তুর বিকিরণের ক্ষেত্রেই সূত্রটি কেবলমাত্র সঠিকভাবে প্রযোজ্য। স্টিফানের সিদ্ধান্তটি একটু পরিবর্তিত আকারে বর্তমানে স্টিফান-বোলৎজমান সূত্র নামে পরিচিত। এই সূত্রানুসারে,

‘যদি কোন কৃষ্ণকায় বস্তুর পরম উষ্ণতা  $T$  হয় এবং তাকে চতুর্দিকে পরিবেষ্টন করে রাখে অন্য একটি কৃষ্ণকায় বস্তু যার পরম উষ্ণতা  $T_0$ , তবে প্রথমটির প্রতি একক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট তল থেকে প্রতি সেকেন্ডে শক্তিক্ষয়  $E$  -এর পরিমাণ হবে

$$E = \sigma(T^4 - T_0^4) \quad (19)$$

যেখানে  $\sigma$  স্টিফান ধ্রুবক (Stefan constant) নামে পরিচিত।

$\sigma$  'র পরীক্ষালব্ধ মান হল  $5.6703 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{k}^{-4}$

সূত্রটির প্রমাণ :

এই সূত্রটি প্রমাণ করতে আমরা একটি কৃষ্ণকায় আবেষ্টনীর মধ্যে বিকিরণের ক্ষেত্রে তাপগতিবিদ্যার সিদ্ধান্তগুলি প্রয়োগ করব। ধরা যাক, আবেষ্টনীর পরম উষ্ণতা  $T$ , আয়তন  $V$ , শক্তিঘনত্ব  $u$  এবং বিকিরণচাপ  $p$ ।  $u$  এবং  $p$   $\left( = \frac{u}{3} \right)$  কেবলমাত্র পরম উষ্ণতা  $T$  -এর উপর নির্ভরশীল

হবে।  $u$  কীভাবে উষ্ণতা  $T$  -এর ওপর নির্ভর করে প্রথমে তা নির্ণয় করা যাক। আবেষ্টনীর ভিতরে মোট বিকিরণ শক্তির পরিমাণ  $U = uV$

তাপগতিবিদ্যার সূত্রানুসারে

$$dU = Tds - pdv \quad (20a)$$

$$\therefore \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T - p \quad (20b)$$

$$\text{ম্যাক্সওয়েলের সম্বন্ধ} \quad \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad (21)$$

$$\text{ব্যবহার করে} \quad \left( \frac{\partial uV}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_V - \frac{u}{3}$$

$$\text{অথবা} \quad u = \frac{T}{3} \frac{du}{dT} - \frac{u}{3}$$

$$\text{অতএব} \quad T \frac{du}{dT} = 4u$$

$$\text{কাজেই} \quad \frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T} \quad (22)$$

সমাকলন করলে,  $\ln u = 4 \ln T + \ln a$

$a$  একটি ধ্রুবক

$$\therefore u = aT^4 \quad (23)$$

এই আবেষ্টনীর ভিতর অবস্থিত কোনো তলের একক বর্গক্ষেত্রের ওপর প্রতি সেকেন্ডে আপতিত মোট বিকিরণ শক্তির পরিমাণ হবে (চিত্র 13 দেখুন)

$$= \frac{1}{AB} \iiint K(AB) (\cos \theta) d\omega = K \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \pi K \quad (K \text{ বিকিরণের আপেক্ষিক তীব্রতা})$$

$T$  উষ্ণতার এই কক্ষকায় আবেষ্টনীর ভিতরে ধরা যাক  $T$  উষ্ণতার একটি কক্ষকায় বস্তু রাখা

হল। ঐ কৃষ্ণকায় বস্তুর প্রতি একক বর্গক্ষেত্রে প্রতি সেকেন্ডে আপতিত বিকিরণ শক্তির পরিমাণ হবে  $\pi K$  এবং এই শক্তি সম্পূর্ণ শোষিত হবে। যেহেতু বস্তু ও আবেষ্টনী একই উষ্ণতায় আছে, উভয়ে সাম্যাবস্থায় থাকবে এবং কৃষ্ণকায় বস্তুটির একক বর্গক্ষেত্র থেকে এক সেকেন্ডে সমপরিমাণ অর্থাৎ  $\pi K$  বিকিরণশক্তি নির্গত হবে।

$$\text{যেহেতু } \frac{4\pi K}{c} = u = aT^4$$

$$\therefore \pi K = \frac{ca}{4} T^4 = \sigma T^4 \quad \text{যেখানে } \sigma = \frac{ca}{4} = \text{ধ্রুবক}$$

অর্থাৎ কৃষ্ণকায় বস্তুটি পরম উষ্ণতা  $T$  তে থাকলে তার একক বর্গক্ষেত্র থেকে একক সময়ে নির্গত বিকিরণের পরিমাণ ( $\pi K$ ) শুধুমাত্র  $T$  -এর ওপরে নির্ভর করবে এবং প্রিভস্টের প্রকল্পানুসারে অন্য কোনো বস্তুর উপস্থিতির ওপর নির্ভর করবে না।

অতএব  $T$  উষ্ণতার একটি কৃষ্ণকায় বস্তুর প্রতি একক বর্গক্ষেত্র থেকে বিকিরণের হার

$$Q = \sigma T^4 \quad (24)$$

কৃষ্ণকায় বস্তুটির মোটশক্তি বাড়বে না কমবে তা নির্ভর করবে তাকে ঘিরে অন্য কী বস্তু আছে এবং তাদের উষ্ণতা কত তার ওপরে।

(i) যদি কৃষ্ণকায় বস্তুটি একক ভাবে থাকে, তবে তার প্রতি একক বর্গক্ষেত্র থেকে শক্তি ক্ষয়ের হার  $E$  হবে

$$E = \sigma T^4 \quad (T \text{ কৃষ্ণকায় বস্তুটির উষ্ণতা})$$

(ii) পরম উষ্ণতা  $T$  -এর কৃষ্ণকায় বস্তুটি যদি অন্য একটি কৃষ্ণকায় বস্তু দ্বারা পরিবেষ্টিত হয় যার পরম উষ্ণতা  $T_0$  তবে কৃষ্ণকায় বস্তুটির একক বর্গক্ষেত্র থেকে প্রতি সেকেন্ডে  $\sigma T^4$  শক্তি নির্গত হবে এবং তার প্রতি বর্গক্ষেত্রের ওপর প্রতি সেকেন্ডে  $\sigma T_0^4$  শক্তি আপতিত হবে ও শোষিত হবে। এক্ষেত্রে সামগ্রিক ভাবে কৃষ্ণকায় বস্তুটির প্রতি একক বর্গক্ষেত্র থেকে শক্তি ক্ষয়ের হার  $E$  হবে

$$E = \sigma(T^4 - T_0^4) \quad 19$$

স্টিফান বোলৎজমান সূত্র প্রমাণিত হল।

(ii) যদি কৃষ্ণকায় বস্তুটি সম উষ্ণতার আর একটি কৃষ্ণকায় বস্তু দিয়ে পরিবেষ্টিত হয় তবে সামগ্রিকভাবে ঐ কৃষ্ণকায় বস্তুটির কোনো শক্তিক্ষয় হবেনা।

উদাহরণমালা :

1. একটি কৃষ্ণায়িত তামার গোলককে একটি বায়ুশূন্য আবেষ্টনীতে রাখা হল। আবেষ্টনীর দেওয়ালের উষ্ণতা  $100^{\circ}\text{C}$ । গোলকটির উষ্ণতা  $110^{\circ}\text{C}$  থেকে  $105^{\circ}\text{C}$  তে নেমে আসতে কত সময় লাগবে? গোলকের ব্যাসার্ধ  $0.02\text{m}$ , তামার ঘনত্ব  $= 8.9 \times 10^3 \text{kgm}^{-3}$  এবং আপেক্ষিক তাপ  $= 3.8 \times 10^{-3} \text{J}(\text{kg})^{-1} \text{K}^{-1}$  গোলকের ভর  $m$ , গোলকতলের ক্ষেত্রফল  $A$  এবং তামার আপেক্ষিক তাপ  $S$  হলে

$$-mS \frac{dT}{dt} = \text{তাপ মোচনের হার} = \frac{A\sigma(T^4 - T_0^4)}{1} \approx \frac{A\sigma 4T_0^3}{1}(T - T_0)$$

(শক্তির এককে)

$$\therefore -\frac{dT}{dt} = \frac{(A\sigma 4T_0^3)}{mS}(T - T_0) = C(T - T_0)$$

$$\frac{dT}{T - T_0} = \frac{d\theta}{\theta - \theta_0} = -C dt \quad (\theta = \text{সেন্টিগ্রেড স্কেলে উষ্ণতা})$$

$$\text{সমাকলনের ফলে } \ln(\theta - \theta_0) = -ct + c_0 \quad c_0 = \text{একটি ধ্রুবক।}$$

$$t = 0 \text{ তে } \theta = 110^{\circ}\text{C}, \theta_0 = 100^{\circ}\text{C}$$

$$\therefore \ln 10 = c_0$$

$$t = t \text{ তে } \theta = 105^{\circ}\text{C} \quad \therefore \ln 5 = -ct + \ln 10$$

$$\therefore t = \frac{1}{c} \ln 2$$

$$\text{এখানে } C = \frac{A\sigma 4T_0^3}{mS} = \frac{4\pi r^2 \sigma 4T_0^3}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho s} = \frac{12T_0^3 \sigma}{r\rho s} \quad (\rho = \text{তামার ঘনত্ব})$$

$$= \frac{12 \times (373)^3 \text{ k}^3 \times 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ k}^{-4}}{.02 \text{ m} \times 8.9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \times 3.8 \times 10^3 \text{ J (kg)}^{-1} \text{ k}^{-1}}$$

$$= 5.22 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$$

$$\therefore t = \frac{\ln 2}{5.22 \times 10^{-5}} \text{ sec} = 1.328 \times 10^4 \text{ sec} = 221.3 \text{ min}$$

2. একটি অ্যালুমিনিয়ামের (ঘনত্ব  $\rho_{AC} = 2.7 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ) এবং অপরটি তামার (ঘনত্ব  $\rho_{cu} = 8.9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ) সম আকারের ছোট দুটি গোলককে রেশমের সুতোয় বেঁধে গলস্ত বরফের চাহি-এর একটি বড় গহ্বরের মধ্যে ঝুলিয়ে রাখা হল।  $3^\circ\text{C}$  থেকে  $1^\circ\text{C}$  এ উষ্ণতা নেমে আসতে অ্যালুমিনিয়াম ও তামার গোলকদ্বয়ের যথাক্রমে সময় লাগল 50 ও 70 মিনিট। ধাতু দুটির আপেক্ষিক তাপের অনুপাত কত?

গোলকের আয়তন  $\vartheta$ , তলের ক্ষেত্রফল  $A$ , গোলকের ঘনত্ব  $\rho$  এবং আপেক্ষিক তাপ  $S$  হলে

$$-\vartheta \rho s \frac{dT}{dt} = A \sigma 4 T_0^3 (T - T_0)$$

$$\rho s \frac{d\theta}{dt} = - \left( \frac{A \sigma 4 T_0^3}{\vartheta} \right) (\theta - \theta_0) = -C(\theta - \theta_0) \quad \text{দুটি গোলকের ক্ষেত্রেই } \vartheta \text{ সমান}$$

$$\text{অতএব } \rho s \ln(\theta - \theta_0) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = -ct \Big|_0^t$$

$$\therefore \rho s \frac{\ln(\theta_2 - \theta_0)}{(\theta_1 - \theta_0)} = -ct$$

$$\ln \frac{\theta_2 - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \text{ দুইটি গোলকের ক্ষেত্রেই সমান} = \ln \frac{3}{1} = \ln 3$$

$$\therefore \frac{P_{AL} S_{AL}}{P_{cu} S_{cu}} = \frac{t_{AL}}{t_{cu}}$$

$$\therefore \frac{S_{AL}}{S_{cu}} = \frac{t_{AL}}{t_{cu}} \times \frac{\rho_{cu}}{\rho_{AL}} = \frac{50}{70} \times \frac{8.9 \times 10^3}{2.7 \times 10^3} = 2.354$$

3. সূর্যকে একটি কৃষ্ণকায় বস্তু ধরলে তার উষ্ণতা কত হবে? দেওয়া আছে সূর্যের ব্যাসার্ধ  $r = 7 \times 10^8 \text{ m}$ , পৃথিবী থেকে সূর্যের দূরত্ব  $R = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$  স্টেফান ধ্রুবক  $= 5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{k}^{-4}$  এবং সৌর ধ্রুবক  $S = 1.349 \times 10^3 \text{ Wm}^{-2}$

ধরা যাক, সূর্যের পরম উষ্ণতা  $= T_s$

সূর্যতলের একক ক্ষেত্রফল থেকে বিকিরিত শক্তির হার  $E = \sigma T_s^4$

সূর্যতল থেকে প্রতি সেকেন্ডে বিকিরিত শক্তি  $= \sigma T_s^4 \cdot 4\pi r^2$

$\therefore$  সূর্য ধ্রুবক  $S =$  সূর্যের বিকিরণ রশ্মির সঙ্গে লম্বভাবে অবস্থিত পৃথিবীতলে একক বর্গক্ষেত্রের ওপর প্রতি সেকেন্ডে যে বিকিরণ শক্তি সূর্য থেকে এসে পড়ে তার পরিমাণ।

$$= \frac{\sigma T_s^4 \cdot 4\pi r^2}{4\pi R^2} = \sigma T_s^4 \left( \frac{r}{R} \right)^2$$

$$T_s^4 = \frac{S \left( \frac{R}{r} \right)^2}{\sigma} = \frac{1.349 \times 10^3 \text{ Wm}^{-2}}{5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{k}^{-4}} \left( \frac{1.5 \times 10^{11}}{7 \times 10^8} \right)^2$$

$$= 8.206 \times 10^{14} \text{ k}^4$$

$$\therefore T_s = 5352 \text{ k}$$

4. টাংস্টেন ধাতুর আপেক্ষিক বিকিরণ মাত্রা প্রায়  $0.35$ ।  $9 \times 10^{-3} \text{ m}$  ব্যাসার্ধের ঐ ধাতুর একটি গোলককে একটি বড় বায়ুশূন্য আবেষ্টনীর ভিতর বুলিয়ে রাখা হল। আবেষ্টনীর উষ্ণতা  $373 \text{ k}$  হলে গোলকটিকে  $2273 \text{ k}$  এ রাখতে প্রতি সেকেন্ডে কত শক্তি যোগাতে হবে?

$$\text{টাংস্টেনের আপেক্ষিক বিকিরণ মাত্রা } e = \frac{\text{টাংস্টেনের বিকিরণ মাত্রা}}{\text{সম উষ্ণতায় কৃষ্ণকায় বস্তুর বিকিরণ মাত্রা}}$$

$$= 0.35$$



$$\text{ব্যাসার্ধ } r = 9 \times 10^{-3} \text{ m, } T_1 = 373 \text{ k} \quad T_2 = 2273 \text{ k}$$

গোলকে শক্তি সরবরাহের হার = গোলক তল থেকে বিকিরণের জন্য শক্তিক্ষয়ের হার

$$= 4\pi r^2 e \sigma (T_2^4 - T_1^4)$$

$$= 4\pi (9 \times 10^{-3} \text{ m})^2 \times 0.35 \times 5.672 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ k}^{-4} (2227^4 - 373^4) \text{ k}^4$$

$$= 539 \text{ w}$$

## 7.10 কৃষ্ণকায় বস্তুর বিকিরণ বর্ণালীতে শক্তির বিভাজন

স্টিফান বোলৎজমান সূত্র থেকে আমরা জানতে পেরেছি যে, কৃষ্ণকায় বিকিরকের মোট বিকিরণ শক্তি কেবলমাত্র বিকিরকের পরম উষ্ণতার ওপর নির্ভর করে। কিন্তু কোনো বস্তু থেকে বিকিরণ কেবলমাত্র একটি তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে সীমাবদ্ধ থাকে না, ধারাবর্ণালীতে ছড়িয়ে থাকে। স্বভাবতই প্রশ্ন ওঠে, এই ধারাবর্ণালীর বিভিন্ন তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে বিকিরণের মোটশক্তি কীভাবে বিভাজিত হয়।

এই মূল প্রশ্নের সঠিক তাত্ত্বিক বিচার ও পরীক্ষার মাধ্যমে তার মূল্যায়নের দীর্ঘ নিরলস প্রচেষ্টা পদার্থবিদ্যার ইতিহাসে এক অবিস্মরণীয় অধ্যায়। তাপগতিবিদ্যা ও তড়িৎচৌম্বক তত্ত্বের সনাতন ধারণাবলীর সাহায্যে ভীন এবং র্যালো ও জীনস বহুলাংশে সফল হলেও ম্যাক্স প্ল্যাঙ্ক বিকিরণ কণিকা বা কোয়ান্টার ধারণা উপস্থাপিত করার পরই বিকিরণ কীভাবে পদার্থ মাধ্যম থেকে নির্গত হয় বা পদার্থ মাধ্যমে শোষিত হয় তার সঠিক পদ্ধতি বোঝা সম্ভব হয়েছে এবং মূল প্রশ্নের সন্তোষজনক ও সামগ্রিক ব্যাখ্যা দেওয়া গেছে।

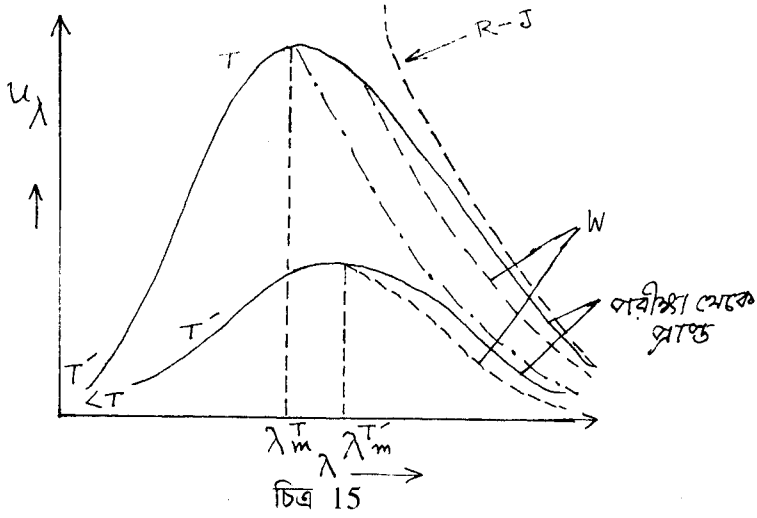
### 7.10.1 ভীনের সূত্র (Wien's Law)

1893 খ্রীঃ ভীন উপরোক্ত মূল প্রশ্নের উত্তর দেবার চেষ্টা করেন। আমরা ভীনের বিশ্লেষণের মধ্যে না গিয়ে তিনি যে সিদ্ধান্তে উপনীত হয়েছিলেন তার উল্লেখ করব।

বিভাজন সূত্র নিম্নরূপ —

$$u_\lambda d\lambda = \frac{A}{\lambda^5} e^{-C_2/\lambda T} d\lambda$$

(31)



ভীনের সূত্রটির মূলে কিছু ধারণা ছিল যেগুলির তাত্ত্বিক তাৎপর্য সন্দেহাতীত এবং সূত্রটির সকল তরঙ্গে পরীক্ষালব্ধ  $u_\lambda$  ওর সংগে মেলে না।

### 7.10.2 র্যায়ে ও জীনসের সূত্র (Rayleigh-Jeans Law)

দীর্ঘ তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের ক্ষেত্রে ভীনের সূত্রের ব্যর্থতা দেখে র্যায়ে ও জীনস সম্পূর্ণ অন্য দৃষ্টিকোণ থেকে সমস্যাটির বিচার করেন।

তারা প্রমাণ করেন যে, কৃষ্ণকায় আবেষ্টনীর মধ্যে সীমাবদ্ধ বিকিরণ তড়িৎচুম্বকীয় তরঙ্গ হলে কম্পাঙ্ক  $\nu$  ও  $\nu + d\nu$  এর মধ্যে সম্ভব সুসংগত তরঙ্গ রূপের সংখ্যা  $\frac{8\pi\nu^2 d\nu}{C^3}$  এবং প্রতি তরঙ্গ রূপে (mode of vibration) গড় শক্তির পরিমাণ  $kT$ । অতএব

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{C^3} kT \quad (32)$$

এই সম্বন্ধ র্যায়ে-জীনসের সূত্র নামে পরিচিতি।

কম্পাঙ্কের বদলে তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে প্রকাশিত করা হলে (যেহেতু  $d\nu = -\frac{C}{\lambda^2} d\lambda$ )

$$u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} d\lambda \quad (33)$$

যেহেতু  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $u_\lambda \rightarrow \infty$  হয়, র্যায়ে ও জীনস নিজেরাই জানতেন যে, কেবলমাত্র দীর্ঘ তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের ক্ষেত্রেই তাঁদের সূত্র প্রযোজ্য হতে পারে। বস্তুত তাই দেখা গেল (চিত্র 15)। স্বল্প দৈর্ঘ্যের ক্ষেত্রে এই সূত্র একেবারেই অবাস্তব ফল দেয়।

### 7.10.3 প্ল্যাঙ্কের বিকিরণ সূত্র (Planck's Law of Radiation)

তিন এবং র্যালের ও জীনসের সূত্র দুটির আংশিক সাফল্য ও ব্যর্থতা দেখে প্ল্যাঙ্ক এমন একটি সূত্রের সন্ধান করতে থাকেন (টীকা দেখুন) যেটি কৃষ্ণকায় বিকিরণের বর্ণালীর সর্বাংশে সন্তোষজনক ভাবে প্রযোজ্য হবে। তেমন একটি সূত্র প্ল্যাঙ্ক খুঁজে পান 1900 খীঃ। প্ল্যাঙ্কের সূত্রটি হল

$$u_{\lambda}d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda \quad (34)$$

এই সূত্রটি যে ক্ষুদ্র তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে তিনের সূত্রে এবং দীর্ঘ তরঙ্গের ক্ষেত্রে র্যালের ও জীনসের সূত্রে পর্যবসিত হয় তা সহজেই দেখা যায়।

(i) যখন  $\lambda$  খুব ছোট এবং  $\frac{hc}{\lambda kT} > 1$  তখন  $e^{hc/\lambda kT} - 1 \approx e^{hc/\lambda kT}$

অতএব  $u_{\lambda}d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} e^{-hc/\lambda kT} d\lambda$ ,  $\frac{hc}{k}$  কে  $C_2$  ধরলে,

$$= \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot e^{-C_2/\lambda T} d\lambda \text{ যেটা তিনের সূত্র।}$$

(ii) যখন  $\lambda$  বড় এবং  $\frac{hc}{\lambda kT} < 1$  তখন  $e^{hc/\lambda kT} - 1 \approx \left(1 + \frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1$

$$\approx \frac{hc}{\lambda kT}$$

অতএব  $u_{\lambda}d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{\lambda kT}{hc} d\lambda$

$$= \frac{8\pi kT}{\lambda^4} d\lambda \text{ যেটা র্যালের ও জীনসের সূত্র।}$$

টীকা : প্ল্যাঙ্ক এমন একটি সূত্র খুঁজছিলেন যেটি ক্ষুদ্র তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে তিনের সূত্রে এবং দীর্ঘ তরঙ্গের ক্ষেত্রে র্যালের ও জীনসের সূত্রে পর্যবসিত হবে। এরকম প্রচেষ্টা থেকেই প্ল্যাঙ্কের স্বনামধন্য সূত্রটি লেখা হয়েছিল। সূত্রটি প্রথম লেখা হয় এবং অনেক পরে, বহু প্রচেষ্টায়, প্ল্যাঙ্ক সূত্রটির প্রমাণ দিতে সমর্থ হন।

## প্ল্যাঙ্কের সূত্রের প্রমাণ :

প্ল্যাঙ্ক যখন তাঁর সূত্রের প্রমাণ দেন তখন বিকিরণের কোয়ান্টাম তত্ত্ব জানা ছিলনা। বস্তুত কৃষ্ণকায় বিকিরণের ওপর প্ল্যাঙ্কের অনুসন্ধানের ফলেই এই কোয়ান্টাম তত্ত্বের জন্ম। কাজেই প্রচলিত ধ্যান-ধারণার ওপর নির্ভর করেই প্ল্যাঙ্ককে অগ্রসর হতে হয়েছিল। কিন্তু এভাবে অগ্রসর হতে গিয়ে প্ল্যাঙ্ক দেখলেন যে, কিছু ধারণার ক্ষেত্রে আমূল পরিবর্তন না করলে বিকিরণ বর্ণালীর সম্যক বর্ণনা সম্ভব নয়।

বিকিরণের ক্ষেত্রে প্ল্যাঙ্ককে যে মূল সমস্যাগুলির সম্মুখীন হতে হয়েছিল তারা হল :

(a) বিকিরণ ও পদার্থের মধ্যে শক্তি বিনিময়ের মাধ্যমেই কেবল বিকিরণের উৎসতার ধারণাটি আনা সম্ভব;

(b) প্রচলিত ধারণা অনুযায়ী কিন্তু গ্যাসীয় অণু ও বিকিরণের মধ্যেও সরাসরি শক্তি বিনিময় সম্ভব ছিলনা। (গ্যাসীয় অণুতে বিকিরণের শোষণ ও নির্গমনের বোরের তত্ত্ব (Bohr's theory) তখনও আবিষ্কৃত হয়নি)।

প্রথম সমস্যার সমাধান হিসাবে প্ল্যাঙ্ক ধরে নিলেন যে, কৃষ্ণকায় বিকিরণ যে কক্ষে রয়েছে সেখানে বিকিরণ ছাড়াও রয়েছে আদর্শ গ্যাসের অণুরা। দ্বিতীয় সমস্যার নিরসনে তিনি ধরে নিলেন যে, সেখানে আণবিক আকারের অণুনাডক রয়েছে যাদের মাধ্যমে গ্যাস অণু ও বিকিরণের মধ্যে শক্তি বিনিময় ঘটে। এই অণুনাডকেরা বিকিরণ থেকে শক্তি শোষণ করে এবং গ্যাস অণুর সঙ্গে সংঘর্ষ হলে শোষিত শক্তির পুরোটা বা কিছু অংশ গ্যাস অণুকে দিয়ে দেয়। এভাবে অসংখ্য দ্বিস্তর শক্তি বিনিময়ের মাধ্যমে বিকিরণ, অণুনাডক ও গ্যাস অণুর মধ্যে তাপগতীয় সাম্য প্রতিষ্ঠিত হয়।

প্ল্যাঙ্ক প্রমাণ করেন যে,

$$u_{\nu} d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{C^3} E_{\nu} \quad (35)$$

যে সমস্ত অণুনাডক থেকে  $\nu$  কম্পাঙ্কের বিকিরণ নির্গত হয়,  $E_{\nu}$  হল তাদের গড় শক্তির পরিমাণ।

প্ল্যাঙ্ক যেভাবে সমীকরণ (35) প্রমাণ করেছিলেন তা জটিল। আমরা এই প্রমাণে যাবনা। সমীকরণ (35) ধরে নিলে বাকি থাকে অণুনাডকদের গড় শক্তির পরিমাণ নির্ণয় করা।

যদি অণুনাদকের সম্ভাব্য শক্তির ওপর কোনো নিষেধাজ্ঞা না থাকে অর্থাৎ অণুনাদকের শক্তি যে কোনো মানের হতে পারে তবে তাপগতিবিদ্যার প্রচলিত ধারণায় শক্তির সমবিভাজন সূত্র (Law of equipartition of energy) অনুসারে  $E_\nu = kT$  হতে হবে এবং তাহলে

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{C^3} kT$$

অর্থাৎ আমরা র‍্যালের ও জীনসের সূত্রই আবার পাব। কিন্তু এই সূত্র তো খুবই অসফল। এর কারণ অনুসন্ধান করতে গিয়ে প্ল্যাঙ্ক দেখলেন যে, সমবিভাজন সূত্রটি প্রয়োগ করবার সময় ধরে নেওয়া হয়েছে যে, অণুনাদকগুলি যে কোনো কম্পাঙ্কের বিকিরণই শোষণ করতে বা বর্জন করতে পারে। যতক্ষণ এই ধারণাটি বলবৎ থাকবে ততক্ষণ  $E_\nu = kT$  -ই হবে। প্ল্যাঙ্ক এবার একটি বৈপ্রবিক পদক্ষেপ গ্রহণ করলেন। তিনি অণুনাদক থেকে যে কোনো শক্তির বিকিরণ নির্গত হবার সম্ভাবনাটিই বাতিল করলেন। এর পরিবর্তে তিনি দাবি করলেন যে, অণুনাদক থেকে তখনই শক্তি বিকিরিত হবে যখন অণুনাদকের দ্বারা শোষিত শক্তির পরিমাণ কোনো ক্ষুদ্রতম পরিমাণ  $E$  বা তার কোনো অখণ্ড গুণিতক হবে এবং  $E$  পরিমাণ শক্তির বিকিরণ পাওয়া যাবে সেই সব অণুনাদক থেকেই যাদের শক্তির পরিমাণ  $E, 2E, 3E, \dots, rE$  ইত্যাদি। এরকম অণুনাদকদের গড় শক্তির পরিমাণ কত?

ধরা যাক,  $rE$  শক্তির অণুনাদকের সংখ্যা  $N_r$ । ম্যাক্সওয়েলের বিশ্লেষণ থেকে আমরা জানি যে, কোনো অণুনাদকে  $rE$  শক্তি পাবার সম্ভাব্যতা হল  $e^{-rE/kT}$ । অতএব  $N_r = N_0 e^{-rE/kT}$ । কাজেই  $E$  পরিমাণ বিকিরণ নির্গত হবে এমন অণুনাদকের মোট সংখ্যা  $N$  এবং তাদের মোটশক্তি  $E$  হলে

$$N = N_0 + N_0 e^{-E/kT} + N_0 e^{-2E/kT} + \dots \quad (36a)$$

$$\text{এবং } E = (EN_0 e^{-E/kT} + 2E)N_0 e^{-2E/kT} + \dots \quad (36b)$$

$$e^{-E/kT} = y \text{ ধরলে}$$

$$N = N_0(1 + y + y^2 + \dots) = N_0 \frac{1}{1-y} \quad (37a)$$

$$\text{এবং } E = EN_0(1 + 2y + 3y^2 + \dots) = EN_0 \frac{y}{(1-y)^2} \quad (37b)$$

∴ ঐ সব অণুনাটকের গড় শক্তির পরিমাণ

$$E_{\epsilon} = \frac{E}{N} = \epsilon \frac{y}{1-y} = \frac{\epsilon e^{-\epsilon/kT}}{1 - e^{-\epsilon/kT}}$$

$$\therefore E_{\epsilon} = \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} \quad (38)$$

প্ল্যাঙ্ক দাবি করলেন যে,  $\nu$  কম্পাঙ্কের ক্ষেত্রে ন্যূনতম শক্তি  $\epsilon$  কে কম্পাঙ্ক  $\nu$  -এর সমানুপাতিক হতে হবে, অর্থাৎ

$$\epsilon = h\nu$$

$h$  কে প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক (Planck constant) বলা হয়।

$$\text{ফলে } u_{\nu} d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{C^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (40)$$

তরঙ্গদৈর্ঘ্য  $\lambda$  -এর সাপেক্ষে প্রকাশ করলে

$$u_{\lambda} d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda \quad (34)$$

প্ল্যাঙ্কের সূত্রটি প্রমাণিত হল।

আমরা আগেই দেখেছি যে, প্ল্যাঙ্কের সূত্র থেকে ক্ষুদ্র তরঙ্গদৈর্ঘ্যে ভীনের সূত্রটি এবং দীর্ঘ তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে র্যালের ও জীনসের সূত্রটি পাওয়া যায়। প্ল্যাঙ্কের সূত্র থেকে আরো কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়।

(i) ভীনের সারণ সূত্র :

$\frac{\partial u_{\lambda}}{\partial \lambda} = 0$  থেকে আমরা নির্ণয় করতে পারি সেই তরঙ্গদৈর্ঘ্য  $\lambda_m$  যাতে  $u_{\lambda}$  সর্বোচ্চ হয়।

$$0 = \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)}$$

$$= \frac{-5}{\lambda^6 (e^{hc/\lambda kT} - 1)} - \frac{1}{\lambda^5} \frac{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \left( -\frac{hc}{kT} \frac{1}{\lambda^2} \right)}{(e^{hc/\lambda kT} - 1)^2}$$

$\frac{hc}{\lambda_m kT} = x$  ধরলে, আমাদের সমাধান করতে হবে

$$\frac{x e^x}{e^x - 1} = 5$$

অথবা  $x = 5(1 - e^{-x})$  এই সমীকরণটি (41)

দেখা যাচ্ছে  $x$  -এর মান প্রায় 5 -এর মতো। লেখের সাহায্যে বা সংখ্যাগত পদ্ধতিতে (numerical methods) পাওয়া এর সমাধান হল

$$x = 4.9651$$

অথবা  $\lambda_m T = \frac{hc}{k \cdot 4.9651} = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m.k} =$  একটি প্রুবক

এটাই ভীনের সাধারণ সূত্র।

(ii) স্টিফান-বোলৎজমান সূত্র :

$$\text{আমরা জানি } u = \int_0^\infty u_x d\lambda = \frac{4\pi k}{c}$$

$$\text{এবং } \pi k = \sigma T^4$$

$$\therefore u = \left( \frac{4\sigma}{c} \right) T^4 = aT^4 \quad (43)$$

প্ল্যাঙ্কের সূত্র থেকে

$$u = \int_0^\infty \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda$$

$$\frac{hc}{\lambda kT} = x \text{ ধরলে } \lambda = \frac{hc}{kT} \cdot \frac{1}{x} \text{ এবং } d\lambda = -\frac{hc}{kT} \cdot \frac{dx}{x^2}$$

$$u = \frac{8\pi(kT)^4}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \text{ প্রমাণ করা যায়।}$$

$$= \frac{8\lambda^5 k^4}{15(hc)^3} \cdot T^4 = aT^4$$

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15(hc)^3} = 7.56 \times 10^{-16} \text{ Jm}^{-3} \text{ k}^{-4}$$

$$\text{এবং } \sigma = \text{স্টিফান ধ্রুবক} = \frac{a \cdot c}{4} = 5.669 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ k}^{-4}$$

$$\text{স্টিফান ধ্রুবকের পরীক্ষালব্ধ সর্বোত্তম মান} = 5.6703 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ k}^{-4}$$

প্ল্যাঙ্কের তাত্ত্বিক সূত্র থেকে নির্গত ও পরীক্ষালব্ধ স্টিফান ধ্রুবকের মানের অতি চমৎকার সাযুজ্য প্ল্যাঙ্কের তত্ত্বের যথার্থতা প্রমাণ করে।

#### 7.10.4 প্ল্যাঙ্কের তত্ত্বের সুদূরপ্রসারী প্রভাব

বিকিরণের বর্ণালী বিশ্লেষণ করতে গিয়ে প্ল্যাঙ্ক এমন কিছু ধারণার সাহায্য নিয়েছিলেন যেগুলি সমসাময়িক ধারণায় ছিল একেবারেই নতুন এবং অদ্ভুত। 'বিকিরণের নির্গত হবার প্রক্রিয়াটি অবিচ্ছিন্ন ভাবে না হয়ে হতে হবে বিচ্ছিন্নভাবে, বিকিরণের শক্তিকণিকারূপে; বিকিরণের কম্পাঙ্ক  $\nu$  হলে এই শক্তি কণিকার পরিমাণ হবে  $h\nu$ ' শক্তিকণিকার ধারণাটি পুষ্টিলাভ করেছে পরবর্তী নানা পরীক্ষায় আইনস্টাইনের (1906) ফটোইলেকট্রিক প্রক্রিয়ায় (কণিকার শক্তি  $h\nu$ ), কম্পটনের এক্স রশ্মির বিক্ষেপণ

থেকে (কণিকার ভরবেগ  $h\frac{\nu}{c}$ ) এবং বোরের পরমাণু থেকে বর্ণালী নির্গমনের তত্ত্বে (1913)। বিকিরণ

শক্তির তরঙ্গ রূপ (তরঙ্গের দৈর্ঘ্য  $\lambda$ , কম্পাঙ্ক  $\nu$  এবং বেগ  $c = \lambda\nu$ ), এবং কণিকারূপ (কণিকার শক্তি  $h\nu$ , ভরবেগ  $h\nu/c$ ) এই দ্বৈতরূপের প্রশ্ন থেকেই জন্ম হয়েছে কণিকা গতিবিদ্যার এবং বস্তুত পক্ষে আধুনিক পদার্থবিদ্যার।



## 7.10.5 বিকিরণ সম্বন্ধে বর্তমান ধারণা

বর্তমান ধারণা অনুযায়ী কৃষ্ণকায় বিকিরণ বহুলাংশে আদর্শ গ্যাসের মতো। আদর্শ গ্যাস বস্তুকণা বা অণুর সমষ্টি। অণুর নির্দিষ্ট ভর  $m$  আছে, অণুর গতিবেগ  $v$  শূন্য থেকে আলোকের গতিবেগ  $C$  পর্যন্ত যে কোনো মানের হতে পারে। গ্যাসে অণুরা বিক্ষিপ্তভাবে চতুর্দিকে ছোটাছুটি করে। অণুর গতিশক্তি ও ভরবেগ আছে। এজন্য গ্যাসের চাপ আছে। আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে এই চাপ হচ্ছে  $\frac{2}{3}$  শক্তির ঘনত্ব।

অনুরূপভাবে, বিকিরণকে একটি তাপগতীয় তন্ত্র হিসাবে ধরা যায় যা বিকিরণ কণিকা বা ফোটনের (photon) সমষ্টি। ফোটনের কম্পাঙ্ক  $\nu$  শূন্য থেকে অসীম হতে পারে। আবেষ্টনীর মধ্যে ফোটনেরা সম্ভাব্য সকল দিকে ছুটছে আলোর গতিবেগে। ফোটনের শক্তি ( $h\nu$ ) এবং ভরবেগ ( $h\nu/c$ ) আছে এবং তা কম্পাঙ্ক  $\nu$ -এর ওপর নির্ভরশীল। বিক্ষিপ্ত বিকিরণের চাপ আছে এবং তা হল  $\frac{1}{3}$  শক্তির ঘনত্ব। আদর্শ গ্যাসের মতোই বিকিরণের তাপগতীয় অবস্থা তার চাপ  $p$ , আয়তন  $v$  এবং যে পদার্থের সঙ্গে বিকিরণ সাম্যাবস্থায় আছে তার উষ্ণতা  $T$  দিয়ে নির্দিষ্ট হয়।

ম্যাক্সওয়েল আদর্শ গ্যাসে কত সংখ্যক অণুর বেগ  $\nu$  থেকে  $\nu + d\nu$  র মধ্যে আছে তা নির্ণয় করেছিলেন। এটি ম্যাক্সওয়েলের বেগের বিভাজন সূত্র নামে পরিচিত।

কৃষ্ণকায় বস্তুর বিকিরণ বর্ণালীতে শক্তির বিভাজন নির্ণয় করার সমস্যাটি অনুরূপভাবে একক আয়তনে কম্পাঙ্ক  $\nu$  ও  $\nu + d\nu$  এর মধ্যে কতগুলি ফোটন আছে তার সংখ্যা নির্ণয় করা। যদি এই সংখ্যা  $N(\nu)d\nu$  হয় তবে

$$u_\nu d\nu = h\nu N(\nu)d\nu$$

1925 খ্রীঃ আচার্য সত্যেন্দ্রনাথ বসু অত্যন্ত স্বল্প ও সুন্দরভাবে ফোটনের ক্ষেত্রে  $N(\nu)d\nu$  সংখ্যাটি গণনা করেন। গণনার এই পদ্ধতির সঙ্গে আপনারা ভবিষ্যতে পরিচিত হবেন।

## 7.11 বিকিরণ পাইরোমিতি — বিকিরণের সাহায্যে উচ্চ উষ্ণতার পরিমাপ

বিকিরণ পাইরোমিতির উদ্দেশ্য হল কোনো বস্তুর বিকিরণ মেপে তার উষ্ণতা নির্ণয় করা। মুখ্যত দুভাবে এটা করা যায়।

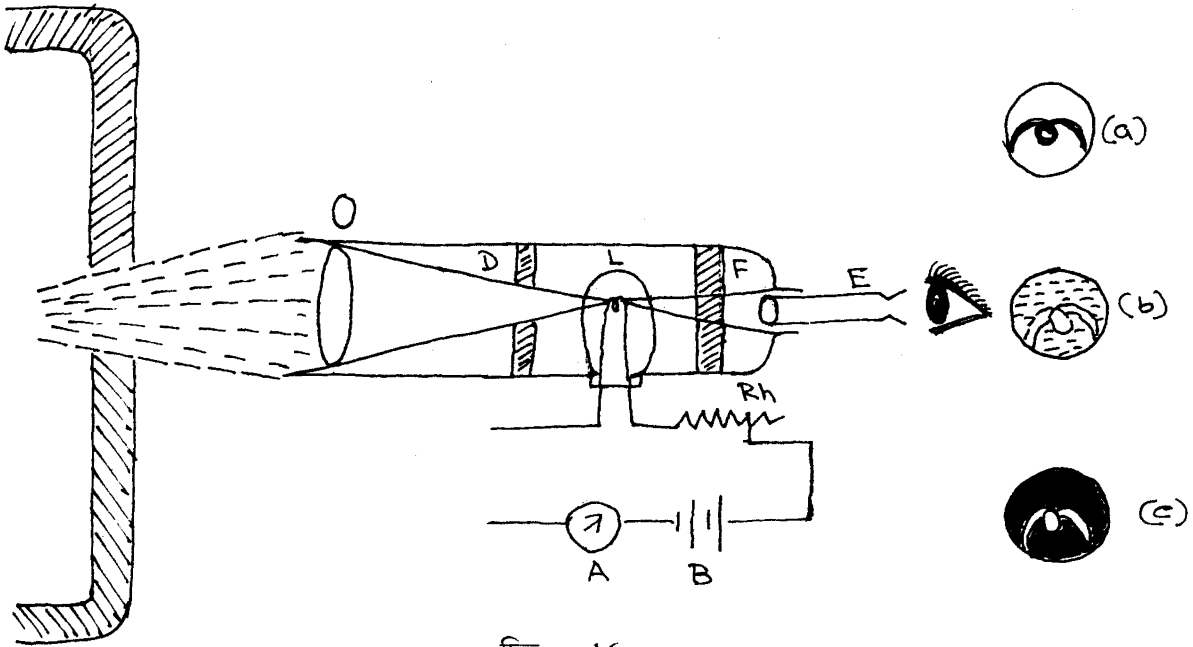
(a) বস্তু থেকে আগত বিকিরণের পুরো বর্ণালী ব্যবহার করে এবং স্টিফান সূত্র ( $T \propto E^{1/4}$ ) ব্যবহার করে। এদের সমগ্র বিকিরণ পাইরোমিটার (Total radiation pyrometer) বলা হয়।

(b) বর্ণালীর সীমিত অংশে ( $\lambda$  থেকে  $\lambda + d\lambda$  -এর মধ্যে) বিকিরিত শক্তি মেপে এবং উষ্ণতা নির্ধারণে প্ল্যাঙ্কের সূত্র প্রয়োগ করে। এদের অপটিক্যাল পাইরোমিটার (optical pyrometer) বলা হয়।

পাইরোমিটারদের মধ্যে সবচেয়ে বেশি প্রচলিত অদৃশ্য ফিলামেন্ট পাইরোমিটার (disappearing filament pyrometer)। এটি অপটিক্যাল পাইরোমিটার গোত্রের।

### অদৃশ্য ফিলামেন্ট পাইরোমিটার :

এ ধরনের যন্ত্রে উৎস থেকে আসা বিকিরণের সঙ্গে তুলনা করা হয় একটি দীপ্যমান দীপের। এটি আসলে একটি দূরবীক্ষণ যার ক্রসতার - এর জায়গায় ব্যবহার করা হয় একটি দীপ L (চিত্র 16)।



চিত্র - 16

উত্তপ্ত বস্তু H -এর প্রতিবিশ্বকে অভিলক্ষ্য (objective) O দিয়ে L দীপের ফিলামেন্টের ওপর ফেলা হয়। অভিনেত্র (eyepiece) E কে এমনভাবে ফোকাস করা হয় যাতে ফিলামেন্ট এবং H এর প্রতিবিশ্ব একই তলে থাকে। এবার রিওস্ট্যাট  $R_h$  -এর রোধ পরিবর্তন করে ফিলামেন্টে তড়িৎপ্রবাহ  $i$  পরিবর্তন করা হয়। এবার এভাবে L দীপের দীপ্তি বাড়ানো কমানো যায়। L ও অভিনেত্রের মাঝে ফিল্টার F ব্যবহার করা হয়। ফিল্টারটি যদি  $\lambda$  থেকে  $\lambda + d\lambda$  মধ্যের বিকিরণকে যেতে দেয় তবে ঐ তরঙ্গদৈর্ঘ্যেই H ও ফিলামেন্ট দেখা যাবে। এতে যন্ত্রের সুবেদীতা বাড়ে।

যখন  $i$  কম তখন কুণ্ডলীকে কালো দেখাবে (চিত্র 16a)। যখন  $i$  বেশি কুণ্ডলীটি জ্বলজ্বল করে উঠবে (চিত্র 16c)।  $i$ -এর কোনো মানে কুণ্ডলীকে  $H$ -এর প্রতিবিশ্ব থেকে আলাদা করে চেনা যাবে না (চিত্র 16b), কুণ্ডলী অদৃশ্য হবে। প্রথমে কয়েকটি নির্ধারিত উষ্ণতায়, কুণ্ডলী অদৃশ্য অবস্থায় এনে  $i$  মাপা হয় এবং  $i-T$  লেখ তৈরি করা হয় বা  $T = a + bi + ci^2$  সমীকরণের  $a, b, c$ -এর মান নির্ণয় করা হয়। এবার উষ্ণতা জানা নেই এমন কোনো উৎসের ক্ষেত্রে কুণ্ডলী অদৃশ্য করার জন্য প্রয়োজনীয়  $i$  মাপলেই উৎসের উষ্ণতা  $T$  জানা যাবে। অনেকক্ষেত্রে অ্যামিটারের স্কেলই সরাসরি উষ্ণতায় দেওয়া থাকে।

## 7.12 সারাংশ

এই এককে আপনি জানতে পারছেন —

- তাপ সঞ্চালনের অন্য পদ্ধতিগুলির সঙ্গে বিকিরণের মূল ও বিশেষ পার্থক্য কোথায়। মাধ্যমের সাহায্য ছাড়াই এই পদ্ধতিতে তাপ চলাচল করতে পারে।
- তাপীয় বিকিরণ বাস্তবে কীভাবে মাপা হয় তার বিভিন্ন পদ্ধতি ও বৈশিষ্ট্য।
- বিকিরণের প্রকৃতি কী এবং সাধারণ আলোর সঙ্গে এর সাদৃশ্য বা বৈসাদৃশ্য কোথায়। বিকিরণ শক্তিকে কোন পদার্থ কীভাবে শোষণ করে, কীভাবে বা প্রতিফলিত বা নিঃসৃত করে তার কথাও বলা হয়েছে। গৃহীত তাপ বস্তু কীভাবে ছাড়ে তার কথাও।
- শোষণ ও বিকিরণ সম্পর্কিত নানা তথ্য ও সূত্র সন্নিবেশিত করা হয়েছে। বাস্তবে আদর্শ কৃষ্ণবস্তু না পাওয়া গেলে কীভাবে তার বিকল্প পাওয়া সম্ভব তা কেরীর কৃষ্ণবস্তু প্রসঙ্গে আলোচনা করা হয়েছে। বিভিন্ন সূত্রের প্রয়োগে জ্যোতির্বিজ্ঞানের অনেক প্রশ্নের সমাধান সম্ভব হয়েছে।
- বিকিরণের চাপ, ম্যাক্সওয়েলের তড়িৎচৌম্বকীয় তত্ত্ব ও আলোর চাপের রাশিমালা উৎপাদন করা হয়েছে।
- কৃষ্ণবস্তু থেকে মোট বিকীর্ণ তাপের আলোচনায় স্টিফান-বোলৎজমান সূত্র আলোচনা ও প্রমাণ করা হয়েছে।
- কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণ বর্ণালীতে শক্তির বন্টন এবং এই সঙ্গে ভীনের সূত্র র্যাল-জীনসের সূত্র এবং প্ল্যাঙ্কের সূত্র বিশদ বর্ণনা ও প্রমাণ করা হয়েছে। সেইসঙ্গে সূত্রগুলির পারস্পরিক সম্বন্ধও আলোচনা করা হয়েছে।

সবশেষে প্ল্যাঙ্কের তত্ত্বের সুদূরপ্রসারী প্রভাব এবং বিকিরণ সম্বন্ধে বর্তমান ধারণা সংযোজিত করা

হয়েছে। সেই সঙ্গে বিকিরণ শক্তি মেপে কীভাবে সুদূরস্থিত বস্তুর তাপমাত্রা নির্ণয় করা সম্ভব, তাও বলা হয়েছে।

## 7.13 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

প্রশ্নমালা :

1. সংক্ষেপে উত্তর দিন :

(i) তাপীয় বিকিরণের শূন্যস্থানে গতিবেগ কত?

(ii) 1000 মিলি মাইক্রন তরঙ্গদৈর্ঘ্য বিশিষ্ট তাপীয় বিকিরণের কম্পাঙ্ক কত? ঐ কম্পাঙ্কের ফোটনের শক্তি ও ভরবেগ কত? ( $h = 6.626 \times 10^{-34}$  J. S)

(iii) একটি ক্ষুদ্র কৃষ্ণকায় বস্তু থেকে 10m দূরে তার তাপীয় বিকিরণের যে তীব্রতা, 20m দূরে তার তীব্রতা কতগুণ কমবে?

(iv) কোনো তরঙ্গদৈর্ঘ্য  $\lambda$  তে আদর্শ কৃষ্ণকায় বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা ধরা যাক = 0.8 SI এককে ঐ তরঙ্গদৈর্ঘ্যে ভূষোকালির  $a_\lambda = 0.96$  এবং  $t_\lambda = 0$  এবং সাদা চকের  $r_\lambda = 0.95$  এবং  $t_\lambda = 0$ । ভূষোকালি ও সাদা চকের আপেক্ষিক বিকিরণ ক্ষমতা কত?

2. নীচের বক্তব্যগুলি ঠিক না ভুল? ভুল হলে সঠিক বক্তব্যটি লিখুন।

(i) একই উষ্ণতায় রাখা আবেষ্টনীগুলির দেওয়ালের প্রকৃতি বিভিন্ন হলে তাদের বিকিরণ ক্ষমতাও ভিন্ন হবে।

(ii) কোনো আবেষ্টনী ও তার মধ্যে রাখা বহুপদার্থ দিয়ে তৈরি কোনো বস্তুখণ্ড নির্দিষ্ট উষ্ণতায় সাম্যাবস্থায় আছে। বস্তুখণ্ডটির অবস্থান বা দিক পরিবর্তন করলে আবেষ্টনীর অভ্যন্তরস্থ শক্তি ঘনত্ব পরিবর্তিত হবে।

(iii) বিকিরণের শক্তিঘনত্ব  $u = \sigma T^4$  যেখানে  $\sigma =$  স্টিফান ধ্রুবক।

(iv) স্টিফান ধ্রুবক  $\sigma$ -এর মান হল  $5.67 \times 10^{-8}$  J m<sup>-2</sup> K<sup>4</sup>

3. তাপীয় বিকিরণের ক্ষেত্রে কোনো বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা ও শোষণ ক্ষমতার সংজ্ঞা লিখুন। কোনো বস্তুতল থেকে মোট বিকিরণের হার নির্ণয় করুন।

4. আদর্শ কৃষ্ণকায় বস্তু কাকে বলে? কিরশফের সূত্রটি লিখুন ও কোনো নির্দিষ্ট উষ্ণতায় রাখা একটি ফাঁকা আবেষ্টনীর ক্ষেত্রে সূত্রটি প্রমাণ করুন।

5. বিকিরণের চাপ আছে এটা তাপগতিবিদ্যার ধারণা থেকে প্রমাণ করুন। সমান্তরাল বিকিরণ ও বিক্ষিপ্ত বিকিরণের ক্ষেত্রে চাপ ও বিকিরণ শক্তির ঘনত্বের মধ্যে সম্বন্ধ লিখুন।

6. আপেক্ষিক বিকিরণ তীব্রতা  $K$  -এর সংজ্ঞা লিখুন। প্রমাণ করুন যে, একটি কৃষ্ণকায় আবেষ্টনী মধ্যস্থ বিক্ষিপ্ত বিকিরণের ক্ষেত্রে বিকিরণ শক্তির ঘনত্ব

$$u = \frac{4\pi}{c} K$$

7. ধরা যাক কোনো চোঙ  $C$  -এর মধ্যে একটি পিস্টন  $P$  লাগানো আছে। চোঙ ও পিস্টন দুটির তলই আদর্শ প্রতিফলক। চোঙটি তাপীয় কৃষ্ণ বিকিরণ দিয়ে পূর্ণ। যদি এক্ষেত্রে বিকিরণ চাপ

$$p = \frac{u}{3} \text{ হয় ( } u = \text{ বিকিরণ শক্তির ঘনত্ব) তবে প্রমাণ করুন যে } u = a T^4, \text{ } a \text{ একটি ধ্রুবক।}$$

8. একটি 3000K উষ্ণতার দেওয়াল বিশিষ্ট কক্ষে যে বিকিরণ রয়েছে তার আয়তন উষ্ণতা অপরিবর্তিত রেখে 0.5 থেকে  $1m^3$  করা হল।

(a) কী পরিমাণ তাপ আবেষ্টনীর দেওয়ালে সঞ্চালিত হবে?

(b) বিকিরণের শক্তি কতখানি পরিবর্তিত হবে?

(c) কী পরিমাণ কার্য করা হয়েছে?

(d) যদি আয়তন বৃদ্ধি তাপরুদ্ধ ভাবে করা হয় তবে চূড়ান্ত উষ্ণতা কত হবে?

9. কৃষ্ণকায় বস্তুর বিকিরণবর্ণালীর ক্ষেত্রে প্ল্যাঙ্কের সূত্রটি লিখুন। কৃষ্ণকায় বস্তুর  $T$  ও  $T'$  ( $T > T'$ ) দুটি উষ্ণতায়  $u_\lambda$  বনাম  $\lambda$  লেখটি যতদূর সম্ভব পরিষ্কারভাবে অঙ্কন করুন। লেখের গুণগত দিকগুলি যেন ঠিক থাকে।

10. প্ল্যাঙ্কের সূত্র থেকে ভীনের সূত্র এবং র্যালের ও জীনের সূত্র প্রমাণ করুন। প্ল্যাঙ্কের সূত্র থেকে স্টিফানের সূত্রটিও প্রমাণ করুন। স্টিফান ধ্রুবকের মান নির্ণয় করুন।

## 11. সংক্ষিপ্ত টীকা লিখুন :

(a) রেডিও মাইক্রোমিটার।

(b) বর্ণালীবিক্ষণবিদ্যা ও জ্যোতির্পদার্থবিদ্যায় কিরশফের সূত্রের প্রয়োগ।

(c) অদৃশ্য ফিলামেন্ট পাইরোমিটার।

12.  $6000\text{Å}$  ( $1\text{Å} = 10^{-10}\text{m}$ ) তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিকিরণের ক্ষেত্রে ফোটনের শক্তি ও ভরবেগ নির্ণয়

করুন। শক্তির মান ইলেকট্রনভোল্ট (eV) এককেও প্রকাশ করুন।

13. মুলার ও ক্রন (Miiller and Kron) সূর্যের বর্ণালী বিশ্লেষণ করে  $\lambda_m$  -এর মান নির্ণয়

করেছিলেন  $4680\text{Å}$ । সূর্যকে একটি কৃষ্ণকায় বিকিরক ধরে নিয়ে সূর্যের উষ্ণতা নির্ণয় করুন।

## 7.14 উত্তরমালা

$$1 \text{ (i) } 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \text{ (ii) কম্পাঙ্কন} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{10^{-6} \text{ m}} = 3 \times 10^{14} \text{ Hz (1 Hz=1 cycle sec);}$$

ফোটনের শক্তি  $h\nu = 1.988 \times 10^{-19} \text{ J}$ ; ফোটনের ভরবেগ  $= 6.626 \times 10^{-28} \text{ kg m s}^{-1}$

$$\text{(iii) কৃষ্ণকায় বস্তু থেকে তাপীয় বিকিরণের হার } Q \text{ হলে, } 10\text{m} \text{ দূরে তীব্রতা} = I_{10} = \frac{Q}{4\pi(10)^2}$$

$$\text{এবং } 20\text{m} \text{ দূরে তীব্রতা} = I_{20} = \frac{Q}{4\pi(20)^2} \quad \therefore \frac{I_{20}}{I_{10}} = \frac{(10)^2}{(20)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{(iv) } \lambda \text{ তরঙ্গদৈর্ঘ্যে কোনো বস্তুর আপেক্ষিক বিকিরণ ক্ষমতা } \epsilon_\lambda = \frac{e_\lambda}{e_\lambda^b} = a_\lambda; \text{ ভূমোকালির}$$

$$\epsilon_\lambda = 0.96; \text{ সাদা চকের } \epsilon_\lambda = a_\lambda = 1 - r_\lambda = 0.05$$

2. (i) ভুল; বিকিরণ ক্ষমতা এক হবে। (ii) ভুল; বস্তুখণ্ডটির দিক বা অবস্থান পরিবর্তন করলে

শক্তি ঘনত্ব পরিবর্তিত হবে না। (iii) ভুল;  $u = \frac{4\sigma}{c} T^4 = aT^4$  (iv) ভুল,  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$

3. 5.7.6 দেখুন।

4. 5.7.4 ও 5.7.7 দেখুন।

5. 5.7.8 দেখুন।

6. 5.7.8 (D) দেখুন।

7. বিকিরণের অবস্থা  $p\left(=\frac{u}{3}\right)$ ,  $V$  এবং  $T$  দিয়ে নির্দিষ্ট হয়।  $T$  হচ্ছে বিকিরণ যে পদার্থের সঙ্গে

সাম্যাবস্থায় আছে তার উষ্ণতা। বিকিরণ যদি আবেষ্টনীর দেওয়ালের সঙ্গে সাম্যাবস্থায় থাকে তবে  $T$  দেওয়ালের উষ্ণতা। বর্তমান প্রশ্নে যেহেতু পিস্টন ও চোঙের দেওয়াল আদর্শ প্রতিফলক সেজন্য এই দেওয়ালের সঙ্গে বিকিরণের কোনো শক্তি বিনিময় হবেনা। এক্ষেত্রে  $T$  নির্দিষ্ট করতে গেলে চোঙের ভিতর একটি ক্ষুদ্রতম বস্তুকণা (যেমন কয়লার ছোট টুকরো) রাখতে হবে যেই বস্তুকণার সঙ্গে বিকিরণের শক্তি বিনিময়ের ফলে সাম্যাবস্থা স্থাপিত হবে। বস্তুকণাটি অতি ক্ষুদ্র নিলে আভ্যন্তরীণ শক্তি  $U \sim uV$  হবে যেখানে  $u =$  বিকিরণের শক্তিঘনত্ব।

5.7.9 এর সমীকরণ (20b) ও (20) থেকে

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p$$

$$\text{অথবা } u = \frac{T}{3} \frac{du}{dT} - \frac{u}{3}$$

সমাকলন করলে  $u = aT^4$   $a$  একটি ধ্রুবক।

8. এখানে  $u = aT^4$  এবং চাপ  $p = \frac{u}{3} = \frac{a}{3}T^4$ ,  $U = uV = aT^4V$

$$\text{এখন } TdS = dU + pdv = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dv + pdv$$

$$\text{কিন্তু } \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v = 4aT^3V \text{ এবং } \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = aT^4$$

$$\therefore Tds = 4aT^3VdT + \frac{4}{3}aT^4dV$$

এই সমীকরণটি সমোষ্ণ আয়তন পরিবর্তন বা তাপরুদ্ধ আয়তন পরিবর্তন দুটি ক্ষেত্রেই ব্যবহার করা যায়।

সমোষ্ণ আয়তন পরিবর্তনের ক্ষেত্রে ( $dT = 0$ )

$$dQ = \frac{4}{3}aT^4dV$$

$\therefore$  আবেষ্টনীর দেওয়ালে তার উষ্ণতা অপরিবর্তিত রাখতে সঞ্চালিত তাপের পরিমাণ

$$Q = \frac{4}{3}aT^4(V_f - V_i)$$

$$(a) \quad Q = \frac{4}{3} \times \frac{4 \times 5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}}{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}} \cdot (1-0.5)m^3(3000)^4 \text{ K}^4 \quad \left[ a = \frac{4\sigma}{c} \right]$$

$$= 4.08 \times 10^{-2} \text{ W s} = 4.08 \times 10^{-2} \text{ J}$$

(b) উষ্ণতা অপরিবর্তিত রয়েছে অতএব শক্তির ঘনত্বও অপরিবর্তিত থাকবে।

$$\therefore \Delta U = \text{বিকিরণের শক্তির পরিবর্তন} = U_f - U_i = u(V_f - V_i)$$

$$= aT^4(V_f - V_i) = \frac{3}{4}Q = 3.06 \times 10^{-2} \text{ J}$$

(c) কার্যের পরিমাণ  $W$  হলে

$$W = Q - \Delta U = 1.02 \times 10^{-2} \text{ J}$$

(d) আয়তনের পরিবর্তন তাপরুদ্ধভাবে করা হলে ( $ds = 0$ )

$$TdS = dQ = 0$$

$$\therefore \frac{4}{3}aT^4dV = -4aT^3VdT$$



$$\therefore \frac{dv}{V} = -3 \frac{dT}{T}$$

সমাকলনের ফলে  $\ln V = -3 \ln T + \text{ধ্রুবক}$

$$\therefore VT^3 = \text{ধ্রুবক}$$

আয়তন যখন বাড়ছে, বিকিরণ সবসময়েই সাম্যাবস্থায় থাকছে কয়লার অতিক্ষুদ্র টুকরোটির সঙ্গে (7 নং প্রশ্নের উত্তরে যে আলোচনা করা হয়েছে তা দেখুন; তাপরুদ্ধ অবস্থার মানে বাইরে থেকে আবেষ্টনের দেওয়ালের মধ্য দিয়ে কোনো তাপের বিনিময় হচ্ছেনা)। বিকিরণশক্তির ঘনত্ব কমছে, কাজেই উষ্ণতাও কমছে।

$$.5 \times (3000)^3 = 1 \times (T)^3$$

$$\therefore T = 2381 \text{ K}$$

9. 5.7.10 দেখুন।

10. 5.7.10.3 দেখুন।

11. (a) 5.7.2 দেখুন। (b) 5.7.7.2 দেখুন (c) 5.7.11 দেখুন।

$$12. \text{ফোটনের শক্তি } h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 3.113 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ ইলেকট্রন ভোল্ট (eV)} = 4.8 \times 10^{-10} \times \frac{1}{300} \times 10^{-7} \text{ J} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$\left[ e = 4.8 \times 10^{-10} \text{ esu}, 1v = \frac{1}{300} \text{ esu} \right]$$

$$\text{অথবা } = 1.6 \times 10^{-19} \text{ coulomb} \times 1V = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$\therefore \text{ফোটনের শক্তি} = 2.07 \text{ eV}$$

$$\text{ফোটনের ভরবেগ} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = 1.104 \times 10^{-27} \text{ kg. m s}^{-1}$$

$$13. \lambda mT = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m.k} \quad \therefore T = 6196.6 \text{ k}$$



## পর্যায়—২



---

## একক ৪ □ আদর্শ গ্যাস

---

গঠন

- 8.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য
- 8.2 পদার্থের গঠন, গ্যাস, আদর্শ গ্যাস  
আদর্শ গ্যাসের মৌলিক অঙ্গীকার  
গ্যাস অণুর বেগ  
গ্যাসের চাপ  
উষ্ণতার ব্যাখ্যা  
গ্যাস সূত্রাবলীর প্রতিষ্ঠা
- 8.3 গ্যাসপাত্রে অণুর সংঘাতসংখ্যা
- 8.4 ম্যাক্সওয়েলের বেগ বন্টন সূত্র
- 8.5 স্বাধীনতার মাত্রা ও শক্তির সমবিভাজন সূত্র  
ডুলাং পেটিটের সূত্র
- 8.6 সারাংশ
- 8.7 প্রশ্নাবলি
- 8.8 উত্তরমালা

---

### 8.1 প্রস্তাবনা

---

মাধ্যমিক ও উচ্চমাধ্যমিক স্তরে আপনারা গ্যাসের আচার-আচরণ ও কিছু সার্বিক ধর্ম সম্বন্ধে জেনেছেন। মূলতঃ, বয়েলের সূত্র, চার্লসের সূত্র, অ্যাভোগাড্রো প্রকল্প, ডালটনের আংশিক চাপের সূত্র, গ্রাহামের ব্যাপন সূত্র ইত্যাদির মাধ্যমে গ্যাসের ধর্মগুলি জানা যায়। এই সূত্রগুলি পরীক্ষালব্ধ — অর্থাৎ, পরীক্ষা-নিরীক্ষার মাধ্যমে এগুলি প্রমাণ করা সম্ভব। বৈজ্ঞানিক সত্য হিসাবে পরীক্ষালব্ধ সিদ্ধান্তই সর্বোত্তম, সন্দেহ নেই। কিন্তু তাত্ত্বিক বা বুদ্ধিগ্রাহ্য ব্যাখ্যায় সূত্রগুলি বিশ্লেষণ করা বা সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় না। যেমন, বয়েল সূত্র অনুযায়ী, কোনো নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের উষ্ণতা স্থির থাকলে তার চাপ এক-তৃতীয়াংশ যদি করা হয় তবে আয়তন তিনগুণ হবে। কেন দ্বিগুণ বা চারগুণ বা অন্য কোনো পরিমাণ নয়, তার সদুত্তর পাওয়া যায় না। পরবর্তীকালে বিজ্ঞানীরা গ্যাসসূত্রগুলির তাত্ত্বিক ব্যাখ্যা পাওয়ার জন্য একটি নতুন তত্ত্বের উদ্ভাবন করেন। এটি পদার্থের বা গ্যাসের গভীর তত্ত্ব নামে পরিচিত। শুধু সূত্রগুলি কেন, গ্যাসের স্থূল পরিমাপযোগ্য রাশি, যেমন, চাপ ও উষ্ণতার কারণ কি তারও ব্যাখ্যা এর দ্বারা

পাওয়া যাবে। কেন সামান্য পরিমাণ গ্যাস একটি বিপুল আয়তনে সম্প্রসারিত হয় — এ জাতীয় নানা প্রশ্নের ব্যাখ্যা পাওয়া সম্ভব গতীয় তত্ত্বের সাহায্যে।

গ্যাসের গতীয় তত্ত্ব দুটি মূল ধারণার উপর ভিত্তি করে গঠন করা হয়েছে। একটি হল, পদার্থ ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র কণার সমষ্টিমাত্র, যার প্রতিটি বলবিদ্যার সাধারণ নিয়ম মেনে চলে। দ্বিতীয়, পদার্থের অণুগুলির গতি তাপশক্তি রূপে প্রকাশ পায়, অর্থাৎ, তাপকে গতির রূপ বলে মনে করা যায়।

উপরোক্ত দুটি ধারণার প্রেক্ষাপট হিসেবে বলা যায়, ঊনবিংশ শতাব্দীর প্রথম ভাগে বিজ্ঞানী ডালটন ও আভোগাড্রো রাসায়নিক প্রক্রিয়ার পর্যবেক্ষণ থেকে পদার্থের আণবিক তত্ত্বের উপস্থাপন করেন। তার আগে পর্যন্ত পদার্থের গঠন বা তাপের প্রকৃত পরিচয় সম্বন্ধে বৈজ্ঞানিকদের কোনো সুনির্দিষ্ট ধারণা তৈরি হয় নি। একটি পদার্থের অণুগুলি সদৃশ অর্থাৎ একে অপরের সঙ্গে অভিন্ন এবং প্রতিটি অণু ঐ পদার্থের যাবতীয় ধর্ম বহন করে।

তাপ প্রসঙ্গে বলা যায়, ঊনবিংশ শতাব্দীর মাঝামাঝি পর্যন্ত বিজ্ঞানীরা তাপকে একপ্রকার অদৃশ্য প্রবাহী পদার্থ বলে মনে করতেন। তাঁরা এর নাম দেন ক্যালরিক। ক্যালরিক মতবাদ অনুযায়ী, প্রত্যেক বস্তুর মধ্যেই কমবেশি ক্যালরিক থাকে এবং এগুলি তাদের উষ্ণতা রূপে প্রকাশ পায়। কোনো বস্তুতে ক্যালরিকের সঞ্চার ঘটলে তা গরম হয়। বস্তু থেকে ক্যালরিক অন্যত্র প্রবাহিত হলে তা ঠাণ্ডা হয়ে পড়ে। কাউন্ট রামফোর্ড, হামফ্রে ডেভী, প্রেসকট জুল প্রভৃতি বিজ্ঞানীদের পরীক্ষা থেকে পরবর্তীকালে জানা যায় তাপ পদার্থ নয়, এক প্রকার শক্তি। জুল যান্ত্রিক শক্তি ও তাপশক্তির পারস্পরিক সম্পর্ক ও রূপান্তর সম্বন্ধে পরিমাণগত সূত্রটিও দেন। তা সত্ত্বেও, পদার্থের মধ্যে নিহিত তাপশক্তির স্বরূপ কি — এই সম্বন্ধে কোনো সার্থক ধারণা উপস্থাপিত করা সম্ভব হয় নি। পদার্থের গতীয় তত্ত্বে তাপের সঙ্গে পদার্থের আণবিক গঠনের ধারণাকে একত্রিত করে গ্যাসের বিভিন্ন গতি প্রকৃতির ব্যাখ্যা দেওয়া সম্ভব হয়েছে। 1730 সালে বিজ্ঞানী বার্নোলী সর্বপ্রথম এই গতিতত্ত্বের সাহায্যে গ্যাসের কিছু কিছু ধর্ম ব্যাখ্যা করার চেষ্টা করেন। পরবর্তীকালে, ম্যাক্সওয়েল, ক্লসিয়াস, জীনস, বোল্জম্যান, ভ্যান-ডার-ওয়ালস্ প্রমুখ বিজ্ঞানীরা এই তত্ত্বকে গ্যাসের ক্ষেত্রে সুপ্রতিষ্ঠিত করেন। গতিতত্ত্বের সাহায্যে গ্যাসসূত্রগুলির তাত্ত্বিক ব্যাখ্যাই গতিতত্ত্বের সমর্থক প্রমাণ।

---

## উদ্দেশ্য

---

এই এককটি পাঠের পরে আপনারা জানতে পারবেন

- (i) পদার্থের আণবিক গঠনের মাধ্যমে তার বিভিন্ন অবস্থার পার্থক্যের কারণ
- (ii) আদর্শ গ্যাসের অঙ্গীকারগুলি কী কী
- (iii) গ্যাসের চাপ পরিমাপের তাত্ত্বিক সূত্র
- (iv) গতীয় তত্ত্বের সাহায্যে তাপমাত্রা ও বিভিন্ন গ্যাসসূত্রের সন্তোষজনক ব্যাখ্যা
- (v) গ্যাস অণুর বেগের ধারণা ও ম্যাক্সওয়েলের বেগ বণ্টন সূত্র

- (vi) গ্যাসের শক্তির রাশিমালা, শক্তির সমবিভাজন নীতি
- (vii) গ্যাসের দুটি আপেক্ষিক তাপের পরিমাণ কীভাবে নির্ণয় করা যায়।

## 8.2 পদার্থের গঠন, গ্যাস, আদর্শ গ্যাস

যে কোন পদার্থ কঠিন, তরল বা গ্যাসীয়, এই তিন অবস্থাতেই থাকতে পারে। গভীর তত্ত্ব অনুসারে যে অবস্থাতেই পদার্থ থাকুক না কেন, পদার্থ অসংখ্য অণুর সমষ্টিমাত্র। অণুগুলি একেবারে গায়ে গায়ে লেগে থাকে না, এদের পরস্পরের মধ্যে সূক্ষ্ম ফাঁক বা ব্যবধান থাকে। এই ব্যবধানকে আন্তরাণবিক ব্যবধান বলে। এই ব্যবধান সত্ত্বেও অণুগুলি পরস্পরের উপর বল প্রয়োগ করে। একে আন্তরাণবিক বল বলে। কঠিন, তরল ও গ্যাসীয় পদার্থের ভৌতধর্মের পার্থক্য লক্ষ্য করে এই বলের প্রকৃতি অনুমান করা সম্ভব।

কঠিন পদার্থের মধ্যে অণুগুলি খুব কাছাকাছি স্পন্দিত অবস্থায় থাকে। কাছাকাছি থাকে বলে আন্তরাণবিক বল খুব বেশি। এদের গঠন সুদৃঢ় এবং এদের টুকরো করতে অনেক বেশি বলের প্রয়োজন হয়। এর থেকে বোঝা যায় আন্তরাণবিক বল আকর্ষণ বল এবং অণুগুলির পারস্পরিক ব্যবধান কম হলে এই বল বাড়ে। প্রসঙ্গত বলা যায়, দুটি অণু যখন খুব কাছাকাছি আসে তখন এক প্রকার বিকর্ষণী বলের উদ্ভব হয়। এর ফলে অণুগুলি আর অধিকতর নিকটবর্তী হতে পারে না এবং বস্তুর গঠন অক্ষুণ্ণ থাকে।

কঠিনের তুলনায় তরলের অণুগুলির পারস্পরিক ব্যবধান বেশি। এজন্য আন্তরাণবিক বলও কম। তরলের অণুগুলি এ কারণে কম্পিত হওয়ার সাথে সাথে এলোমেলোভাবে খানিকটা ঘুরে বেড়াতে পারে। তরলের তাই কোনো নির্দিষ্ট আকার থাকে না এবং তরল প্রবাহিত হতে পারে। তবে আকর্ষণ বল তরলের আয়তন বজায় রাখতে সাহায্য করে।

গ্যাসের ক্ষেত্রে আন্তরাণবিক বলের মান খুব নগণ্য। এজন্য গ্যাসের অণুগুলি বিভিন্ন বেগে এলোমেলোভাবে ছুটে বেড়ায়। অন্য কোনো অণু বা পাত্রের দেওয়ালে সংঘর্ষ হলে অণুর গতির দিক পরিবর্তিত হয়। অন্য কোনো বল না থাকায় অণুগুলি সরলরেখা বরাবর চলাচল করে। এইরূপ গতির ফলেই গ্যাস যে পাত্রে রাখা হয় তার সমগ্র আয়তন অধিকার করে।

দেখা যাচ্ছে, পদার্থ যে অবস্থাতেই থাকুক না কেন, এর অণুগুলি স্থির থাকে না। অণুগুলির এলোমেলো গতির ফলে পদার্থের কিছুটা গতিশক্তি ভিতরে থাকে। এই গতিশক্তিই তাপশক্তি। বাইরে থেকে পদার্থের মধ্যে তাপশক্তি প্রয়োগ করলে এই গতিশক্তি বাড়ে — আমরা দেখি উষ্ণতা বাড়ে। পদার্থ কঠিন, তরল বা গ্যাসীয় — কোন অবস্থায় থাকবে তা আন্তরাণবিক বল ও অণুর গতির উপর নির্ভর করে।

গ্যাসের গভীর তত্ত্বের আলোচনায় প্রাথমিকভাবে গ্যাস-অণুর ধর্মের উপর কয়েকটি অঙ্গীকার আরোপ করা হয়েছে। এইরূপ আদর্শায়িত গ্যাস অণুর গতি প্রকৃতি বিশ্লেষণ করে গ্যাসের ধর্মগুলির পরিমাণগত

ব্যাখ্যা দেওয়া হয়েছে। বাস্তবক্ষেত্রে অঙ্গীকারগুলি সর্বতোভাবে সত্য হয় না বলে কোনো গ্যাসই সম্পূর্ণভাবে আদর্শ গ্যাস নয়। তবে সাধারণ গ্যাসগুলি বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে আদর্শ গ্যাসের মত আচরণ করে।

### 8.2.1 আদর্শগ্যাসের গভীয়-তত্ত্বে মৌলিক অঙ্গীকার

আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য অঙ্গীকারগুলি নিম্নরূপ। বিজ্ঞানী ক্লসিয়াস এই অঙ্গীকারগুলি বিবৃত করেন।

- (i) প্রতিটি গ্যাস অসংখ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বর্তুলাকার অণুর সমবায়ে গঠিত। একটি গ্যাসের সমস্ত অণুগুলি সদৃশ — ভিন্ন ভিন্ন গ্যাসের অণুগুলি বিভিন্ন ধরণের।
- (ii) গ্যাসের প্রতিটি অণু অবিরাম গতিসম্পন্ন। এই গতি সম্পূর্ণ বিশৃঙ্খল — যে কোন দিকে যে কোনো গতিবেগ নিয়ে হতে পারে। তাপীয় সাম্যাবস্থায় গ্যাসের মধ্যে সর্বত্র ঘনত্বসংখ্যা অপরিবর্তিত থাকে।
- (iii) অণুগুলি পরস্পরের সঙ্গে এবং পাত্রের দেওয়ালে নিরন্তর সংঘর্ষ ঘটায়। প্রতি সংঘর্ষে অণুগুলি কঠিন স্থিতিস্থাপক গোলকের মত আচরণ করে। সংঘর্ষে অণুর গতিবেগ পরিবর্তিত হলেও রৈখিক ভরবেগ ও গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে।
- (iv) সংঘর্ষের জন্য যে সময় লাগে তা বারবার দুটি সংঘর্ষের মধ্যে অতিক্রান্ত সময়ের তুলনায় উপেক্ষা করা যেতে পারে।
- (v) গ্যাসের অণুগুলির আয়তন পাত্রের আয়তনের তুলনায় অতি নগণ্য এবং উপেক্ষণীয়।
- (vi) সংঘর্ষ ব্যতীত অন্য সময় অণুর উপর কোন বল ক্রিয়া করে না — অর্থাৎ অণুগুলির নিজেদের মধ্যে কোন আকর্ষণ বা বিকর্ষণ বল ক্রিয়া করে না।

এইসব অঙ্গীকার যে গ্যাস পুরোপুরি মেনে চলে তাকে আদর্শ গ্যাস বলে। কিন্তু এই অঙ্গীকারগুলির সবকটিই সঠিক ভাবে মেনে চলবে এমন গ্যাসের অস্তিত্ব বাস্তবে নেই। তাই বাস্তব গ্যাসের ধর্মে আদর্শ গ্যাস থেকে বিচ্যুতি দেখতে পাই। এই বিচ্যুতির বিষয়ে আপনারা পরবর্তী অনুচ্ছেদে জানবেন।

### 8.2.2 গ্যাস অণুর গড় বেগ, গড় বর্গবেগ এবং মূল গড় বর্গবেগ

মনে করি, কোন নির্দিষ্ট আয়তনে আবদ্ধ গ্যাস অণুর মোট সংখ্যা  $N$  যে কোন মুহূর্তে অণুগুলির বেগ যথাক্রমে  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_N$  হলে ওদের গড় বেগ  $\bar{c}$  কে লেখা যায়

$$\bar{c} = \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_N}{N}$$

গড় বর্গ বেগ বলতে সমস্ত অণুর বেগের বর্গের গড়কে বোঝায়। অতএব, গড় বর্গ বেগ

$$\bar{c}^2 = \frac{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \dots + c_N^2}{N}$$



এই গড় বর্গ বেগের বর্গমূলকে মূল গড় বর্গ বেগ বলে। একে  $\underline{C}$  দিয়ে প্রকাশ করলে লেখা যায়

$$\underline{C} = \sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \dots + c_N^2}{N}}$$

মূলগড় বর্গবেগের মান গড়বেগের কাছাকাছি হবে, কিন্তু সমান নয়। তিনটি অণুর বেগ ধরে নিয়ে আমরা হিসাব করতে পারি। ধরা যাক, অণু তিনটির কোন মুহূর্তে বেগ যেন 9, 10, এবং 11 একক।

সূত্রাং ওদের গড়বেগ,  $\bar{c} = \frac{9+10+11}{3} = 10$  একক

ওদের গড় বর্গ বেগ,  $\bar{c}^2 = \frac{9^2 + 10^2 + 11^2}{3} = 100.67$  একক

ওদের মূল গড় বর্গ বেগ,  $c = \sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{100.67} = 10.03$  একক

সাধারণত মূল গড় বর্গ বেগ গড়বেগের সামান্য বেশি হয়। গভীর তত্ত্বে গড়বেগের তেমন কোন ভূমিকা নেই, অণুর বেগ বলতে মূল গড় বর্গ বেগই বোঝানো হয়।

### 8.2.3 আদর্শ গ্যাসের চাপ

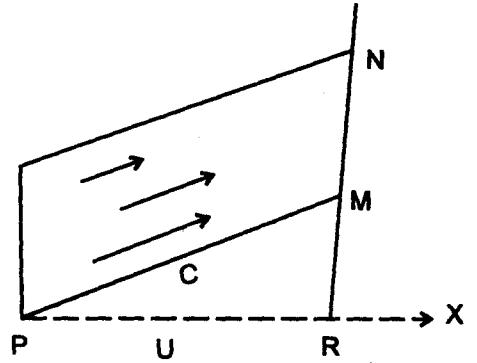
মনে করি কিছু পরিমাণ আদর্শ গ্যাস একটি পাত্রে আবদ্ধ আছে। পাত্রটির একটি দেওয়াল যেন X-অক্ষের লম্ববরাবর।

8.1 চিত্রে NMR এই দেওয়ালটি নির্দেশ করছে।

ধরা যাক, কোন একটি গ্যাস অণুর বেগ যেন  $c$ ।  $c$ -কে পরস্পর অভিলম্ব তিনটি অক্ষবরাবর বিশ্লেষিত করলে

$$c^2 = u^2 + v^2 + w^2 \quad (i)$$

এখানে  $u, v, w$  অক্ষ তিনটি বরাবর বিশ্লেষিত উপাংশ। এদের প্রত্যেকের মান  $-\alpha$  থেকে  $+\alpha$  পর্যন্ত হতে পারে।



চিত্র 8.1

এখন X-অক্ষ বরাবর কণার গতি  $u$ , কণার ভর  $m$  হলে ভরবেগ  $mu$ । সংঘাতের পর ভরবেগ  $-mu$  হবে, কারণ সংঘর্ষ স্থিতিস্থাপক। সূত্রাং একবার সংঘাতের জন্য ভরবেগের পরিবর্তন

$$mu - (-mu) = 2mu$$

মনে করি, প্রতি একক আয়তনে  $u$  বেগ সম্পন্ন কণার সংখ্যা  $n_u$ । NMR দেওয়ালের একক ক্ষেত্রফলে  $dt$  সময়ে যে অণুগুলি সংঘাত ঘটাবে তারা একক প্রস্থচ্ছেদযুক্ত  $udt$  লম্ব উচ্চতার একটি চোঙের মধ্যে থাকে।

এই চোঙের আয়তন =  $udt$

চোঙে অণুর সংখ্যা =  $n_u udt$

সুতরাং প্রতি একক ক্ষেত্রফলে  $dt$  সময়ে অণুর সংঘাতের জন্য ভরবেগের পরিবর্তন =  $2mu \times n_u udt$

এখানে  $x$ -অক্ষের ধনাত্মক দিকে কণার বেগ বিবেচনা করা হয়েছে।  $u$  এর সম্ভাব্য সকল মান ধরলে প্রতি একক ক্ষেত্রফলে ভরবেগের পরিবর্তন দাঁড়ায়

$$2m \sum_0^{\alpha} n_u u^2 dt$$

এই ভরবেগের পরিবর্তনের জন্য উদ্ভূত বল  $\delta F$  হলে

$$\delta F \cdot dt = 2m \sum_0^{\alpha} n_u u^2 dt$$

$$\therefore \delta F = 2m \sum_0^{\alpha} n_u u^2$$

যেহেতু দেওয়ালের একক ক্ষেত্রফলে সংঘাত বিবেচনা করা হয়েছে তাই এই বল চাপ  $P$  এর সমান।

$$\therefore P = 2m \sum_0^{\alpha} n_u u^2 \quad (ii)$$

$$\bar{u}^2 \text{ গড় বর্গ বেগ হলে, } \bar{u}^2 = \frac{n_1 u_1^2 + n_2 u_2^2 + \dots}{n_1 + n_2 + \dots}$$

$$= \frac{\sum n_u u^2}{n/2}$$

এখানে  $X$ -অক্ষের ধনাত্মক দিকে অণুর সংখ্যা মোট অণুর ( $n$ ) অর্ধেক ধরা হয়েছে।

$$\therefore \sum_0^{\alpha} n_u u^2 = \frac{1}{2} n \bar{u}^2$$

$\therefore X$ -অক্ষের অভিলম্ব চাপকে  $P_x$  বললে,

$$P_x = 2m \times \frac{1}{2} n \bar{u}^2 = mn \bar{u}^2$$

একইভাবে,  $Y$ -অক্ষের এবং  $Z$ -অক্ষের অভিলম্ব বরাবর চাপ যথাক্রমে

$$P_y = mn \bar{v}^2 \text{ এবং } P_z = mn \bar{w}^2$$

গ্যাসের সমদৈশিক অবস্থায়  $P_x = P_y = P_z = P$

কিন্তু  $\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2} = \frac{1}{3}\overline{c^2}$  এখানে  $\overline{c^2}$  গড়বর্গবেগ।

$$\therefore P = \frac{1}{3}mn\overline{c^2} = \frac{1}{3}mn\overline{C^2} \quad (\text{iii})$$

$\overline{C}$ , মূলগড় বর্গ বেগ।

এখন ঘনত্ব,  $\rho = mn$

$$\therefore P = \frac{1}{3}\rho\overline{C^2} \quad (\text{iv})$$

(iii) এবং (iv) গতীয় তত্ত্ব অনুযায়ী আদর্শ গ্যাসের চাপের রাশিমালা।

**উদাহরণ 1 :**

প্রমাণ চাপ ও তাপমাত্রায় 1 লিটার হাইড্রোজেন গ্যাসের ওজন 0.08987 g হলে হাইড্রোজেন অণুর ঐ অবস্থায় মূল গড়বর্গ বেগ কত ?

মূলগড় বর্গ বেগ  $c = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$

$$p = 76 \times 13.6 \times 981 \text{ ডাইন / বর্গ সেমি}$$

$$\rho = 0.08987 \times 10^{-3} \text{ গ্রাম / মি. মি}$$

$$\therefore \overline{C} = \sqrt{\frac{3 \times 76 \times 13.6 \times 981}{0.08987 \times 10^{-3}}}$$

$$= 1.84 \times 10^5 \text{ সেমি / সেকেন্ড}$$

$$= 1.84 \text{ কিমি / সেকেন্ড}$$

**8.2.4 গতিতত্ত্বে উষ্ণতার ব্যাখ্যা**

চাপের রাশিমালা আপনারা জানলেন  $P = \frac{1}{3}\rho\overline{C^2}$

যদি V আয়তন ও M ভরের কোন গ্যাসের অণুসংখ্যা N হয়, তবে  $\rho = \frac{M}{V} = \frac{mM}{V}$

$$\therefore P = \frac{1}{3} \frac{M}{V} c^2 = \frac{1}{3} \frac{mN}{V} \underline{C}^2$$

বা,  $PV = \frac{1}{3} mN \underline{C}^2$

আদর্শ গ্যাস  $PV = RT$  মেনে চলে বলে,  $R$ , সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবক।

$$\therefore PV = \frac{1}{3} mNc^2 = RT, \underline{C}^2 = \frac{3RT}{mN} = \frac{3RT}{M}$$

এখন, গ্যাসের অণুগুলির মোট রৈখিক গতিশক্তি

$$E = \frac{1}{2} mc_1^2 + \frac{1}{2} mc_2^2 + \dots + \frac{1}{2} mc_N^2$$

$$= \frac{1}{2} m (c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_N^2)$$

$$= \frac{1}{2} mN \overline{c^2}$$

$$= \frac{1}{2} mN \underline{C}^2$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} mN \underline{C}^2$$

$$= \frac{3}{2} RT$$

এটি শক্তি, গ্যাসের আভ্যন্তরীণ শক্তি। প্রতি অণুর গড় রৈখিক গতিশক্তি  $\overline{E}$  হলে

$$\overline{E} = \frac{E}{N} = \frac{1}{2} mc^2$$

$$\therefore \overline{E} = \frac{3}{2} \frac{RT}{N}$$

$M$  আণবিক ভর ধরলে,  $N = N_A$  ( অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা)

$$\therefore \overline{E} = \frac{3}{2} kT, k = \frac{R}{N} \text{ একটি সর্বজনীন}$$

ধ্রুবক। একে বোল্টজম্যান ধ্রুবক বলে।

দেখা যাচ্ছে, আদর্শ গ্যাসের প্রতিটি অণুর গড় রৈখিক গতিশক্তি গ্যাসের চরম উষ্ণতার সমানুপাতিক। সুতরাং গ্যাসের উষ্ণতা ওর অণুর গড় রৈখিক গতিশক্তির পরিমাপ। গতিতত্ত্ব অনুযায়ী এটাই উষ্ণতার ব্যাখ্যা।

এই তত্ত্ব অনুযায়ী,  $T = 0$  শূন্য হলে, গতিশক্তি শূন্য হবে। অর্থাৎ গ্যাস অণুর গতি ঐ উষ্ণতায় স্তব্ধ হবে। অবশ্য, এটি একটি আদর্শ কল্পনা, কারণ চরম শূন্যে কোন বস্তুই গ্যাসীয় অবস্থায় থাকতে পারে না।

### 8.2.5 আদর্শ গ্যাসের সূত্রগুলির প্রতিষ্ঠা

(a) বয়েলের সূত্র : চাপের রাশিমালা থেকে পাই

$$PV = \frac{1}{3} mN \underline{C}^2$$

$$= \frac{1}{3} M \underline{C}^2, \quad M \text{ গ্যাসের ভর}$$

এখন, উষ্ণতা স্থির থাকলে অণুর মূলগড় বর্গবেগও স্থির থাকে। সুতরাং স্থির উষ্ণতায় কোন নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের চাপ ও আয়তনের গুণফল স্থির থাকে। এটিই বয়েলের সূত্র।

(b) চার্লসের সূত্র :  $PV = \frac{1}{3} M \underline{C}^2$

$$\therefore V = \frac{1}{3} \frac{M}{P} \underline{C}^2$$

সুতরাং নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের ক্ষেত্রে চাপ স্থির থাকলে,  $V \propto \underline{C}^2$

আবার,  $\underline{C}^2 \propto T$

$\therefore V \propto T$ , এটিই চার্লসের সূত্র।

(c) অ্যাভোগাড্রো প্রকল্প : এই প্রকল্প অনুসারে একই উষ্ণতা ও চাপে সমআয়তন সকল গ্যাসে অণুর সংখ্যা সমান।

1 এবং 2, দুটি গ্যাসের চাপ, আয়তন ও উষ্ণতা সমান হলে

$$PV = \frac{1}{3} m_1 N_1 \underline{C}_1^2 = \frac{1}{3} m_2 N_2 \underline{C}_2^2$$

উষ্ণতা সমান হওয়ার জন্য গ্যাস দুটির গড় রৈখিক গতিশক্তি সমান।

$$\therefore \frac{1}{2} m_1 \underline{C}_1^2 = \frac{1}{2} m_2 \underline{C}_2^2$$

∴  $N_1 = N_2$ , এটাই অ্যাভোগাড্রো প্রকল্প।

(d) ডালটনের সূত্র : এই সূত্র অনুযায়ী কোন গ্যাস মিশ্রণের চাপ ঐ মিশ্রণের প্রতিটি গ্যাস একই উষ্ণতায় আলাদাভাবে সমআয়তন অধিকার করলে যে চাপ প্রয়োগ করবে তাদের যোগফলের সমান।

এখন একটি আধারে,  $P_1, P_2, P_3, \dots$  ইত্যাদি ঘনত্বের এবং  $C_1, C_2, C_3, \dots$  ইত্যাদি মূল গড় বর্গ বেগের কয়েকটি গ্যাসকে রাখা হল। এর ফলে একটি সমসত্ত্ব মিশ্রণ পাওয়া যাবে। মিশ্রণের মধ্যে গ্যাস অণুগুলি যেহেতু স্বাধীনভাবে ছোটাছুটি করে, সুতরাং মিশ্রণের মোট চাপ প্রত্যেক ধরনের গ্যাসের অণুগুলির চাপের সমষ্টির সমান হবে।

$$\therefore P = \frac{1}{3} A C_1^2 + \frac{1}{3} A C_2^2 + \frac{1}{3} A C_3^2 + \dots \text{ হবে।}$$

$$= P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

$P_1, P_2, P_3, \dots$  হল প্রতিটি আলাদা আলাদা গ্যাসের চাপ।

উদাহরণ 2 :

স্থির চাপে কোন উষ্ণতায় নাইট্রোজেন অণুর মূলগড় বর্গ বেগ প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় মূল গড় বর্গবেগের দ্বিগুণ হবে ?

আমরা জানি,  $C \propto \sqrt{T}$

প্রমাণ উষ্ণতায় মূল গড় বর্গ বেগ  $C_0$  এবং উচ্চতর উষ্ণতায় এই মান  $C$  হলে,

$$\frac{C}{C_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}}, \quad T_0 = 273K$$

প্রশ্ন অনুযায়ী,  $C = 2C_0$

$$\therefore \sqrt{\frac{T}{T_0}} = 2, \quad T = 4T_0 = 4 \times 273 K$$

$$= 1092 K$$

$$= 819^\circ C.$$

### 8.3 পাত্রের দেওয়ালে সংঘাতকারী অণুর সংখ্যা

মনে করি গ্যাস আধারের একটি দেওয়াল AB-র একটি ক্ষুদ্র অংশ  $ds$ ।  $(r, \theta, \phi)$  স্থানাঙ্কে একটি ক্ষুদ্র আয়তন  $dv$  কল্পনা করা হল।  $c$  এবং  $c + dc$  বেগপাল্লার মধ্যে গ্যাস অণুর সংখ্যাঘনত্ব  $dn_c$

হলে,  $dv$  আয়তনে অণুরূপ অণুর সংখ্যা =  $dn_c dv$

$$dv\text{তে } ds \text{ ক্ষেত্রকর্তৃক বিধৃত ঘনকোণ} = \frac{ds \cos \theta}{r^2}$$

সুতরাং  $dv$  থেকে যে অণুগুলি  $ds$  বরাবর আসবে এবং  $ds$  এর সঙ্গে সংঘাত করবে তার সংখ্যা

$$dn_{c\theta\phi} = \frac{dn_{cdv}}{4\pi} \frac{ds \cos \theta}{r^2}$$

গোলীয় নির্দেশতন্ত্রে  $(r_1, \theta_1, \phi)$  অতি ক্ষুদ্র আয়তন  $dv$  এর মান হয়,

$$dv = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$

$$\begin{aligned} \therefore dn_{c\theta\phi} &= \frac{dn_c ds \cos \theta}{4\pi r^2} \times r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr \\ &= \frac{dn_c ds \sin \theta \cos \theta d\phi dr}{4\pi} \end{aligned}$$

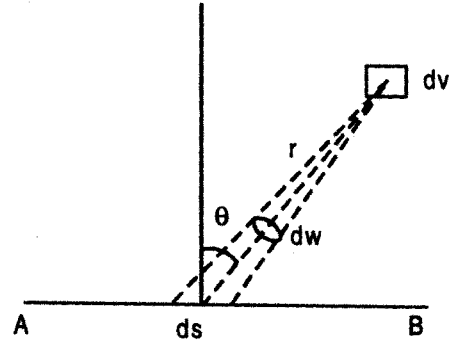
এখন,  $r \leq cdt$  হলে, অণুগুলি  $dt$  সময়ের মধ্যে  $ds$  তলকে আঘাত করবে। সুতরাং  $dt$  সময়ের মধ্যে  $ds$  তলে মোট সংঘাতকারী অণুর সংখ্যা

$$\begin{aligned} dN &= \frac{dS}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{cdt} dr \int_{c=0}^{\alpha} dn_c \\ &= \frac{1}{4\pi} ds dt \times \frac{1}{2} \times 2\pi \int_0^{\alpha} c dn_c \\ &= \frac{1}{4} ds dt \int_0^{\alpha} c dn_c \\ &= \frac{n\bar{c}}{4} ds dt \quad \left[ \because \bar{c} = \frac{1}{n} \int_0^{\alpha} c dn_c \right] \end{aligned}$$

$\bar{c}$  = গড় বেগ

সুতরাং একক সময়ে ( $dt = 1$ ), দেওয়ালের একক ক্ষেত্রফলে ( $ds = 1$ ),

$$\text{আঘাতকারী অণুর সংখ্যা} = \frac{n\bar{c}}{4}$$



চিত্র 8.2

## 8.4 ম্যাক্সওয়েলের বেগ বণ্টন সূত্র

ধরা যাক, একটি বদ্ধপাত্রে একটি গ্যাস তাপীয় সাম্যাবস্থায় আবদ্ধ আছে এবং গ্যাসটি  $T$  উষ্ণতায় তাপীয় সাম্যে আছে। গ্যাসের সমস্ত অণুই একই বেগে গতিশীল নয়। হিসাবের সুবিধার জন্য আমরা একটি গড় গতিবেগ বা মূলগড়বর্গ বেগ ধরে নিই। এখন অণুগুলির যে কোন মুহূর্তে গতিবেগ এই গড় গতিবেগ থেকে কতটা আলাদা? একটি নির্দিষ্ট বেগ পাল্লার মধ্যে কতগুলি অণু আছে? এক কথায়, গ্যাস অণুর মধ্যে গতিবেগ কিভাবে বণ্টিত হয়েছে তা আমরা জানতে আগ্রহী। বিজ্ঞানী ম্যাক্সওয়েল সর্বপ্রথম গ্যাসের অণুগুলির মধ্যে গতিবেগ বণ্টন সমস্যার সমাধান করেন। বিভিন্ন গতিবেগ সম্পন্ন অজস্র অণুর সমাবেশে সংখ্যাগন পদ্ধতি এবং সম্ভাব্যতার সূত্র প্রয়োগ করা চলে।

কোন আবদ্ধ পাত্রে আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে তাপীয় সাম্যে এর অবস্থা একটি আণবিক বিশৃঙ্খলা। এই অবস্থায় অণুগুলির বেগ বণ্টন সূত্র মূলতঃ দুটি অঙ্গীকার মেনে চলে, যথা :

- যে কোন নির্দিষ্ট আয়তনে প্রতি একক আয়তনে অণুর সংখ্যা 'n' গ্যাসীয় আধারের সর্বত্র সর্বদা সমান থাকে।
- গ্যাসের যেকোন অংশের অণুগুলির গতির দিক সর্বত্র এবং এর মান যে সূত্র মেনে চলে তা ঐ অংশের চয়নের ওপর বা অণুগুলির সংঘর্ষের দ্বারা পরিবর্তিত হয় না।

গ্যাসের একক আয়তনে  $c$  এবং  $c + dc$  বেগ পাল্লার মধ্যে  $dN$  সংখ্যক অণু থাকলে, স্পষ্টতই  $dN \propto dc$

কারণ, পাল্লার সীমা বাড়ালে সংখ্যা বাড়ে।

$$\therefore dN = Fdc, \quad F = \text{ভেদের ধ্রুবক}$$

অন্যদিকে বেগ পাল্লা একই থাকলে,  $dN$  বেগের ওপর নির্ভর করে (একই পাল্লা  $dc$ -র জন্য  $dN$ ,  $c$  এর মানের ওপর নির্ভরশীল),

$$\text{সুতরাং } F = f(c)$$

এছাড়া,  $dN$ , একক আয়তনে অণুসংখ্যা  $N$  এর সমানুপাতিক

$$\therefore dN = N f(c) dc,$$

$f(c)$  কে বণ্টন ফলন বলে।

$$\text{যদি } dc = 1 \text{ হয়, তবে } f(c) = \frac{dN}{N}$$

সুতরাং বণ্টন ফলনকে একক বেগ পাল্লার ক্ষেত্রে মোট অণুর ভগ্নাংশ বলা যেতে পারে। এর মধ্যে সম্ভাব্যতার অর্থও নিহিত আছে। বস্তুত,  $c$  বেগের কাছাকাছি একক বেগ পাল্লার মধ্যে কোন অণুর থাকার সম্ভাবনা  $\frac{dN}{N}$  দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এজন্য বণ্টন ফলনকে সম্ভাব্যতার ঘনত্বও বলা হয়।



ম্যাক্সওয়েলের বেগবন্টন সূত্রের প্রতিপাদনের জন্য আমরা সমস্ত অণুকে বেগ চিত্রে প্রকাশ করি।

XYZ কার্তেসীয় অক্ষতন্ত্রে O মূলবিন্দু। C গতিবেগের অক্ষগুলি বরাবর উপাংশগুলি u, v এবং w [ চিত্র 8.3]

$$\text{সুতরাং } c^2 = u^2 + v^2 + w^2 \quad (1)$$

অবকলন করলে,

$$u du + v dv + w dw = 0 \quad (2)$$

এখন, সম্ভাব্যতার সূত্র অনুযায়ী, তাপীয় সাম্যাবস্থায় কোন অণুর X অক্ষ বরাবর u এবং u + du বেগ পাল্লার মধ্যে থাকার সম্ভাবনা = f(u) du.

একইভাবে Y-অক্ষ এবং Z-অক্ষ বরাবর যথাক্রমে v এবং v + dv ও w এবং w + dw পাল্লার মধ্যে থাকার সম্ভাবনাগুলি

$$f(v) dv \text{ এবং } f(w) dw$$

তঁার মতে যে কোন একদিকের বন্টন সূত্র অপর দিকে বেগের মানের ওপর নির্ভরশীল নয়।

একইসঙ্গে তিনটি সম্ভাবনা যুগপৎ ধরলে রাশিটি

$$f(u) f(v) f(w) du dv dw \text{ হয়।}$$

গ্যাস অণুর মোট সংখ্যা N এবং ঐরূপ বেগ পাল্লার মধ্যে অণু সংখ্যা dN হলে,

$$dN = N f(u) f(v) f(w) du dv dw \quad (3)$$

$$\therefore \frac{dN}{du dv dw} = N f(u) f(v) f(w)$$

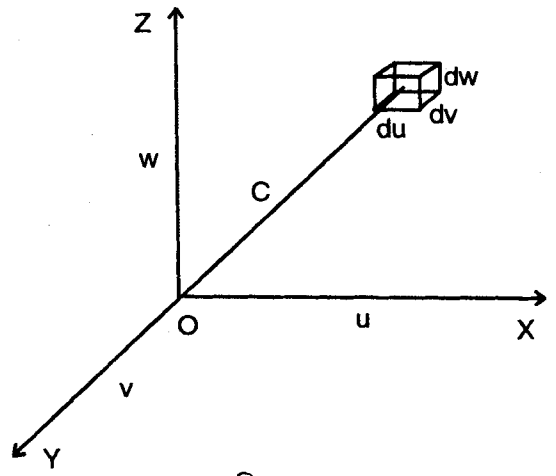
$$\text{বা, } \rho = N f(u) f(v) f(w) \quad (4)$$

এখানে  $\rho = \frac{dN}{du dv dw}$  বা উল্লিখিত বেগ অঞ্চলের একক আয়তনে অণুসংখ্যা বোঝায়।

গ্যাসটি তাপীয় সাম্যে থাকায়, সংখ্যা ঘনত্ব স্থির, অর্থাৎ  $dp = 0$

$$\therefore d[f(u) f(v) f(w)] = 0$$

$$\text{বা, } f'(u) f(v) f(w) du + f(u) f'(v) f(w) dv + f(u) f(v) f'(w) dw = 0$$



চিত্র 8.3

$f(u) f(v) f(w)$  দ্বারা ভাগ করলে,

$$\frac{f'(u)}{f(u)} du + \frac{f'(v)}{f(v)} dv + \frac{f'(w)}{f(w)} dw = 0 \quad (5)$$

সরাসরি (5) সমীকরণ থেকে  $f(u), f(v), f(w)$ -র মান বার করা যায় না। এজন্য ল্যাগরেঞ্জের পদ্ধতি অনুযায়ী (2) সমীকরণকে  $\alpha$  দ্বারা গুণ করে গুণফলকে (5) সমীকরণের সঙ্গে যোগ করে লেখা যায়

$$\left\{ \frac{f'(u)}{f(u)} + \alpha u \right\} du + \left\{ \frac{f'(v)}{f(v)} + \alpha v \right\} dv + \left\{ \frac{f'(w)}{f(w)} + \alpha w \right\} dw = 0$$

বস্তুতঃ,  $du, dv, dw$  পরস্পর নিরপেক্ষ বলে,

$$\left. \begin{aligned} \frac{f'(u)}{f(u)} + \alpha u &= 0 \\ \frac{f'(v)}{f(v)} + \alpha v &= 0 \\ \text{এবং } \frac{f'(w)}{f(w)} + \alpha w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ওপরের সমীকরণগুলির সমাকলন করে পাই।

$$f(u) = Ae^{-\alpha u^2/2}, f(v) = Ae^{-\alpha v^2/2}, f(w) = Ae^{-\alpha w^2/2},$$

গ্যাসের সমদৈশিক ধর্মের জন্য প্রতিক্ষেত্রে একই ধ্রুবক  $A$  ব্যবহার করা হয়েছে।

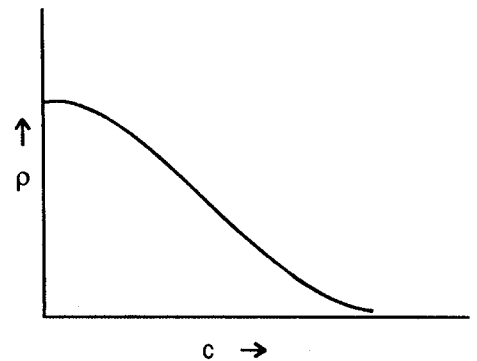
সুতরাং (3) সমীকরণ থেকে পাই,

$$dN = N A^3 e^{-\frac{\alpha}{2}(u^2+v^2+w^2)} du dv dw$$

$$\text{বা } \rho = N A^3 e^{-bc^2} \quad \dots\dots(7)$$

এখানে,  $b = \frac{\alpha}{2}$  লেখা হয়েছে।

দেখা যাচ্ছে, সংখ্যা ঘনত্ব একমাত্র বেগ  $c$  এর অপেক্ষক।  $C$  এর সঙ্গে  $\rho$  এর পরিবর্তন নিচের লেখচিত্রে [চিত্র 8.4] দেখান হল।



চিত্র 8.4

কয়েকটি প্রয়োজনীয় সমাকল সূত্র :

$$a) \int_0^{\alpha} e^{-bu^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}},$$

$$b) \int e^{-bu^2} u^{2n} \cdot du = \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2^{2n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{b^{2n+1}}}$$

$$c) \int_0^{\alpha} e^{-bu^2} u^{2n+1} du = \frac{n!}{2b^{n+1}}$$

$$d) \int_0^{\alpha} e^{-x} x^{n-1} dx = \sqrt{(h)}$$

যেখানে i)  $\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\pi}$  ii)  $\sqrt{(n+n)} = n\sqrt{n}$  এবং iii)  $\sqrt{(1)} = 1$ .

A -র মান : গ্যাস অণুর মোট সংখ্যা N বলে,

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \int \int N A^3 e^{-b(u^2+v^2+w^2)} du dv dw = N$$

$$\text{or, } \int_{-\alpha}^{+\alpha} \int \int e^{-b(u^2+v^2+w^2)} du dv dw = \frac{1}{A^3}$$

$$\text{এখন } \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-bu^2} du = \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-bv^2} dv = \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-bw^2} dw = \sqrt{\frac{\pi}{b}}.$$

$$\therefore A = \sqrt{\frac{b}{\pi}}$$

(8)

o -র মান : গ্যাসের চাপ  $P = 2m \sum_0^{\alpha} nu u^2$

এখানে  $nu = nf(u)du$ ,  $n =$  সংখ্যাঘনত্ব

$$\therefore P = 2mn \int_0^{\alpha} f(u) u^2 du$$

$$= 2mnA \int_0^{\alpha} e^{-bu^2} u^2 du$$

$$2mnA \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{b^3}}$$

$$= \frac{mn}{2} \sqrt{\frac{b}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{b^3}}$$

$$= \frac{mn}{2b}$$

$$\therefore b = \frac{mn}{2p} = \frac{mn}{2nkT} = \frac{m}{2kT} \quad (9)$$

আমরা আগেই পেয়েছি,  $A = \sqrt{\frac{b}{\pi}}$

$$\therefore A = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}$$

$$\therefore \rho = N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mc^2/2kT} \quad (10)$$

(10) সমীকরণের বামপক্ষটি একক আয়তনে নির্ধারিত অণুসংখ্যা। এখন  $c$  এবং  $c + dc$  -র মধ্যে অণুসংখ্যা অবশ্যই  $c$  এবং  $c + dc$  ব্যাসার্ধের খোলক দ্বয়ের অন্তর্বর্তী আয়তনের ওপর নির্ভর করবে। এই অন্তর্বর্তী আয়তন  $= 4\pi c^2 dc$ ।

সুতরাং  $c$  এবং  $c + dc$  বেগপাল্লার মধ্যে অণুর সংখ্যা

$$\begin{aligned} dN_c &= \rho \times 4\pi c^2 dc \\ &= 4\pi N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mc^2/2kT} c^2 dc \end{aligned} \quad (11)$$

এটিই ম্যাক্সওয়েলের আণবিক বেগ বণ্টনসূত্র।

$$\begin{aligned} \text{এখন, } \frac{dN_c}{N} &= 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mc^2/2kT} c^2 dc \\ &= Fdc \end{aligned}$$

$$\text{এখানে, } F = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mc^2/2kT} c^2$$

c-র সঙ্গে গতিবেগ বণ্টনফলন F এর পরিবর্তন লেখচিত্রের সাহায্যে চিত্রে (চিত্র 8.5) দেখানো যায়। বিভিন্ন তাপমাত্রায় লেখচিত্রের ধরন একই থাকে, কেবল তাপমাত্রা বৃদ্ধির সঙ্গে লেখটি ডানটিকে সরে যায় এবং চওড়া হয়।

এই লেখচিত্র থেকে c এর যেকোন পাল্লায় অণুসংখ্যা নির্ধারণ করা যায়।

গড়বেগ ( $\bar{c}$ )

$$\text{আমরা জানি, গড় বেগ } \bar{c} = \frac{1}{N} \int_0^{\alpha} c dN_c$$

$$dN_c = 4\pi N A^3 e^{-bc^2} c^2 dc$$

$$\therefore \bar{c} = \frac{4\pi N A^3}{N} \int_0^{\alpha} e^{-bc^2} c^3 dc$$

$$\text{এখন, } \int_0^{\alpha} e^{-bc^2} c^3 dc = \frac{2}{2b^2}$$

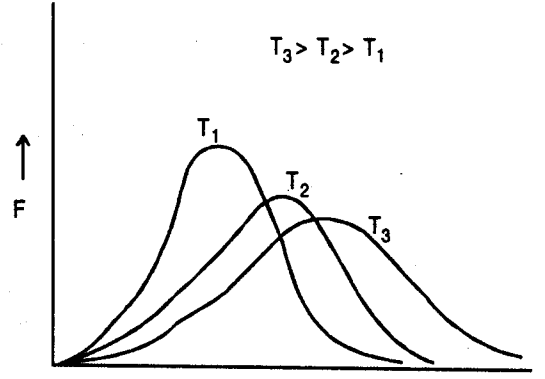
$$\therefore \bar{c} = \frac{4\pi A^3}{2b^2}$$

$$= \frac{2\pi (m/2\pi kT)^{3/2}}{(m/2kT)^2} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

মূলগড় বর্গ বেগ ( $\overline{C^2}$ )

$$\text{গড় বর্গ বেগ } \overline{C^2} = \frac{1}{N} \int_0^{\alpha} c^2 dN_c$$

$$= \frac{4\pi N A^3}{N} \int_0^{\alpha} e^{-bc^2} c^4 dc$$



চিত্র 8.5

এখন  $\int_0^\infty e^{-bc^2} c^4 dc = \frac{3\sqrt{\pi}}{8b^{5/2}}$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{C^2} &= 4\pi A^3 \frac{3\sqrt{\pi}}{8b^{5/2}} \\ &= \frac{\frac{3}{2}\pi^{3/2}(m/2\pi kT)^{3/2}}{(m/2kT)^{5/2}} = \frac{3kT}{m} \end{aligned}$$

$\therefore$  মূলগড় বর্গবেগ  $\underline{C} = \sqrt{\overline{C^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

সর্বাপেক্ষা সম্ভাব্য গতিবেগ ( $C_m$ )

গতিবেগ বণ্টন সূত্র থেকে পাই

$$F = 4\pi A^3 c^2 e^{-bc^2}$$

c-র যে মানের জন্য F সর্বোচ্চ, তাকেই সর্বাপেক্ষা সম্ভাব্য গতিবেগ ( $C_m$ ) বলে।

এখন  $\frac{dF}{dc} = 0$  শর্তে F-র মান সর্বোচ্চ হবে।

$$\frac{dF}{dc} = 8\pi c A^3 e^{-bc^2} - 8\pi bc^3 A^3 e^{-bc^2}$$

$\frac{dF}{dc} = 0$  হলে  $c = c_m$

$$\therefore 8\pi C_m A^3 e^{-bC_m^2} = 8\pi b C_m^3 A^3 e^{-bC_m^2}$$

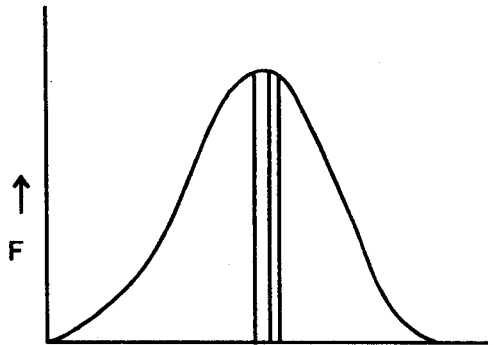
or,  $C_m^2 = \frac{1}{b} = \frac{2kT}{m}$

$$\therefore C_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$\therefore \bar{c} : \underline{C} : C_m = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} : \sqrt{\frac{3kT}{m}} : \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$$

$$\therefore C_m : \bar{c} : \underline{C} = 1 : 1.128 : 1.228$$

চিত্র 8.6 এ বেগগুলির পারস্পরিক অবস্থান দেখান হয়েছে।



চিত্র 8.6

## 8.5 স্বাধীনতার মাত্রা ও শক্তির সমবিভাজন সূত্র :

কোন বস্তু স্বাধীনভাবে একসঙ্গে যে কয়প্রকারের গতির অধিকারী হতে পারে তাকে ঐ বস্তুর গতির স্বাধীনতার মাত্রা বলে। কোন বস্তুর বা তন্ত্রের গতীয় অবস্থা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য যে কয়টি নিরপেক্ষ রাশি দরকার হয় তার দ্বারাও স্বাধীনতার মাত্রা নির্দেশ করা যায়।

অন্যভাবে বললে, কোন সচল সংস্থার মোট শক্তির রাশিমালায় যে কয়টি স্বাধীন বর্গ রাশি থাকে সেই সংখ্যাকে সংস্থার স্বাধীনতার মাত্রা বলে।

উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, একটি কণা  $x$  অক্ষ বরাবর গতিশীল থাকলে তার গতিশক্তি  $\frac{1}{2}mv_x^2$  দ্বারা প্রকাশ করা যায়। কণাটির গতি সমতলে দ্বিমাত্রিক হলে অবস্থানের জন্য যেমন দুটি স্থানাঙ্ক ( $x$  এবং  $y$ ) জানা দরকার তেমনি গতিশক্তি  $\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2$  হবে। এখানেও শক্তির রাশিমালায় দুটি স্বাধীন বর্গরাশি আছে। প্রথম ক্ষেত্রে, স্বাধীনতার মাত্রা 1 এবং দ্বিতীয়ক্ষেত্রে স্বাধীনতার মাত্রা 2 হবে। তেমনি, ত্রি-মাত্রিক গতির ক্ষেত্রে স্বাধীনতার মাত্রা 3 হবে।

কণার বদলে দৃঢ় বস্তুর কথা বিবেচনা করলে এই বস্তুর রৈখিক এবং আবর্ত — দু ধরনের গতি থাকতে পারে। আবর্ত গতিকে পরস্পরের সঙ্গে লম্বভাবে অবস্থিত তিনটি অক্ষ সাপেক্ষে তিনটি উপাংশে বিভাজন করা যায়। সেক্ষেত্রে বস্তুটির রৈখিক ও আবর্তগতির জন্য মোট শক্তি  $\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}I_xW_x^2 + \frac{1}{2}I_yW_y^2 + \frac{1}{2}I_zW_z^2$  রূপে লেখা যায়। এখানে  $V_x, V_y, V_z$  যেমন অক্ষগুলির সাপেক্ষে রৈখিক বেগ,  $W_x, W_y, W_z$  তেমন কৌণিক বেগ এবং  $I_x, I_y, I_z$  - অক্ষগুলির সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক। এক্ষেত্রে, শক্তির রাশিমালায় মোট 6 টি বর্গরাশি উপস্থিত, সুতরাং বস্তুর গতির স্বাধীনতার মাত্রা 6।

### গ্যাস অণুর স্বাধীনতার মাত্রা

এক পরমাণুক গ্যাসের ক্ষেত্রে একটি অণুতে একটি পরমাণু থাকে। এই অণুর কেবলমাত্র রৈখিক গতি থাকায় স্বাধীনতার মাত্রা হয় 3।

দ্বিপরমাণুক গ্যাসের ক্ষেত্রে একটি অণুতে দুটি পরমাণু থাকে। নির্দিষ্ট দূরত্ব বজায় রেখে পরমাণু দুটি দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ। এক্ষেত্রে, তিনটি অক্ষ বরাবর রৈখিক গতি থাকে এবং তাদের সংযোজী রেখার দুটি লম্বদিকে আবর্ত গতি থাকে। সুতরাং এক্ষেত্রে 3টি রৈখিক এবং 2টি আবর্ত গতির হিসাবে স্বাধীনতার মাত্রা মোট 5।

ত্রিপরমাণুক গ্যাসের ক্ষেত্রে একটি অণুর স্বাধীনতার মাত্রা হবে 6 ( 3টি রৈখিক + 3টি আবর্ত )। কিন্তু তিনটি পরমাণু একই রেখায় অবস্থিত হলে একটি পরমাণুর স্বাধীনতার মাত্রা হবে 7। সাধারণভাবে কোন পদার্থে  $N$ টি কণা থাকলে যদি তাদের স্থানাঙ্কগুলি  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \dots (x_n, y_n, z_n)$  হয় এবং  $m$  সংখ্যক প্রতিবন্ধকতা থাকে তবে লেখা যায়

$$F_j ( x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N ) = 0$$

এখানে  $j = 1, 2, \dots m$ . যদি  $m < 3N$  হয় তবে সংস্থাটির স্বাধীনতার মাত্রা  $f$  নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়

$$f = 3N - m$$

শক্তির সমবিভাজন সূত্র :

তাপীয় সাম্যে অবস্থিত কোন গতীয় সংস্থার মোট শক্তি ঐ সংস্থার সকল স্বাধীনতার মাত্রার মধ্যে সমভাবে বিভাজিত হয় এবং প্রত্যেক স্বাধীনতার মাত্রা পিছু এই মান  $\frac{1}{2}kT$ ,  $K =$  বোলজ্‌ম্যান ধ্রুবক এবং  $T$ , পরম উষ্ণতা। একে শক্তির সমবিভাজন সূত্র বলে।

এই সূত্র অনুযায়ী, এক পরমাণুক গ্যাস অণুর গড়শক্তি  $\frac{3}{2}kT$  এবং দ্বিপরিমাণুক গ্যাসের একটি অণুর গড় গতিশক্তি  $=\frac{5}{2}kT$ . এইভাবে যে কোন গ্যাস অণু বা সামগ্রিকভাবে গ্যাসের শক্তির হিসাব করা যায়। এক গ্রাম অণু পরিমাণ গ্যাসের মোট শক্তি

$$U = \frac{f}{2}kTN_A, \text{ এখানে } N_A = \text{অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা}$$

$f$  প্রতিটি অণুর স্বাধীনতার মাত্রা

$$= \frac{f}{2}RT \quad [\because KN = R]$$

স্থির আয়তনে মোলার আপেক্ষিক তাপ

$$C_v = \frac{dv}{dT} = \frac{f}{2}R$$

$\therefore$  স্থির চাপে মোলার আপেক্ষিক তাপ,  $C_p = C_v + R$

$$= \frac{f}{2}R + R$$

$$= R(1 + \frac{f}{2})$$

দেখা যাচ্ছে,  $C_p$  এবং  $C_v$  -র মান স্বাধীনতার মাত্রার উপর নির্ভর করে। এই মাত্রা বাড়লে আপেক্ষিক তাপ বাড়ে।

আপেক্ষিক তাপদ্বয়ের অনুপাত

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{R(1 + f/2)}{\frac{f}{2}R}$$

$$= 1 + \frac{2}{f}$$



এক পরমাণুক গ্যাসের ক্ষেত্রে  $f = 3$ ,  $\therefore \gamma = 1 + \frac{2}{3} = 1.67$

দ্বিপরমাণুক গ্যাসের ক্ষেত্রে  $f = 5$ ,  $\therefore \gamma = 1 + \frac{2}{5} = 1.4$

ত্রি বা বহুপরমাণুক গ্যাসের ক্ষেত্রে  $f = 6$ ,  $\therefore \gamma = 1 + \frac{2}{6} = 1.33$

বিভিন্ন গ্যাসের ক্ষেত্রে  $\gamma$ -র পরীক্ষালব্ধ ফল এই সূত্র থেকে পাওয়া মানের সঙ্গে মিলে যায়।

### ডুলং ও পেটিটের সূত্র

এই সূত্র অনুযায়ী কঠিন পদার্থের পারমাণবিক তাপের মান ধ্রুবক এবং এই মান প্রায় 6 ক্যালরী। পদার্থের আপেক্ষিক তাপ ও পারমাণবিক গুরুত্বের গুণফলকে পারমাণবিক তাপ বলে।

কঠিন পদার্থের ক্ষেত্রেও গ্যাসের মত গতিতত্ত্বের প্রয়োগ এবং শক্তি সমবিভাজন সূত্রের সহায়তায় পারমাণবিক তাপ হিসাব করা যায়।

এক গ্রাম পরমাণু কঠিনের মধ্যে  $N_A$  সংখ্যক অণু থাকলে প্রতিটি অণুর কম্পনগতির জন্য স্বাধীনতার মাত্রা 3 ধরলে মোট স্বাধীনতার মাত্রা দাঁড়ায়  $3N$ । প্রতিটি পরমাণুর গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি আছে। গড় স্থিতিশক্তি গড় গতিশক্তির সমান ধরলে, প্রতি স্বাধীনতার

$$\text{মাত্রাতে সংশ্লিষ্ট শক্তি} = 2 \times \frac{1}{2} kT = kT$$

$$\therefore \text{এক গ্রাম পরমাণু পদার্থে মোট শক্তি} = 3 N_A \times kT \\ = 3 RT$$

$$\therefore \text{স্থির আয়তনে আপেক্ষিক তাপ} = 3R \\ = 3 \times 2 \text{ ক্যালরী} \\ = 6 \text{ ক্যালরী}$$

পরীক্ষা থেকে দেখা যায়। উচ্চ তাপমাত্রায় এই ফল পাওয়া গেলেও নিম্নতাপমাত্রায় বিচ্যুতি অনেক। নিম্ন তাপমাত্রায় আপেক্ষিক তাপ দ্রুত কমতে থাকে। উচ্চ তাপমাত্রাতেও তাপমাত্রা বৃদ্ধির সঙ্গে সামান্য বাড়ে।

### উদাহরণ 3 :

হিলিয়াম গ্যাসকে আদর্শ গ্যাস ধরে নিয়ে  $C_p$  এবং  $C_v$ -র মান নির্ণয় কর। দেওয়া আছে  $R = 8.32 \text{ Jk}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

এক মোল হিলিয়ামের অণুগুলির মোট রৈখিক গতিশক্তি  $E = \frac{3}{2} RT$

$$\begin{aligned} \text{স্থির আয়তনে মোলার আপেক্ষিক তাপ } C_v &= \frac{dE}{dT} = \frac{3}{2} R \\ &= \frac{3}{2} \times 8.32 = 12.48 \text{ J k}^{-1} \text{ mol}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{স্থির চাপে মোলার আপেক্ষিক তাপ } C_p &= C_v + R \\ &= (12.48 + 8.32) \text{ J k}^{-1} \text{ mol}^{-1} \\ &= 20.80 \text{ J k}^{-1} \text{ mol}^{-1} \end{aligned}$$

#### উদাহরণ 4 :

দেখাও যে পাত্রের দেওয়ালের একক ক্ষেত্রফলে একক সময়ে সংঘাতকারী অণুর সংখ্যা  $P/\sqrt{2\pi mkT}$ , এখানে  $P =$  চাপ,  $T =$  উষ্ণতা,  $m =$  একটি অণুর ভর এবং  $k =$  বোলজম্যান ধ্রুবক।

আমরা জানি, দেওয়ালে একক ক্ষেত্রফলে একক সময়ে আঘাতকারী অণুর সংখ্যা  $= \frac{1}{4} n \bar{c}$ ,  
 $\bar{c} =$  গড় বেগ

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} n \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{P}{kT} \right) \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad [\because P = nkT] \\ &= \frac{P}{\sqrt{2\pi mkT}} \end{aligned}$$

#### উদাহরণ 5 :

হাইড্রোজেন ও হিলিয়াম গ্যাসের মিশ্রণের তাপমাত্রা 300K। অণুর কোন বেগের (c) জন্য ম্যাক্সওয়েল বণ্টন কলন  $F(c)$ র মান দুটি গ্যাসের ক্ষেত্রেই সমান হবে?

$$\text{আমরা জানি, বণ্টন কলন } F(c) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-mc^2/2kT} c^2 dc$$

হাইড্রোজেন ক্ষেত্রে অণুর ভর  $m_1$  এবং হিলিয়ামের ক্ষেত্রে ভর  $m_2$  ধরলে

$$\therefore F(c) = \left( \frac{m_1}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-m_1 c^2/2kT} c^2 dc = \left( \frac{m_2}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-m_2 c^2/2kT} c^2 dc$$

$$\therefore c^2 = \frac{3kT \ln \left( \frac{m_2}{m_1} \right)}{2(m_2 - m_1)}$$

$$c = 1.61 \text{ km/s.}$$

## 8.6 সারাংশ :

এই এককে আপনি যে বিষয়গুলি জানলেন সেগুলি হল :

- যে কোন পদার্থ, তা যে অবস্থাতেই থাকুক না কেন, ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র কণার সমষ্টিমাত্র এবং গ্যাসীয় অবস্থায় এই কণা বা অণুগুলি সতত সঞ্চরণশীল।
- গ্যাসের ধর্মাবলীর তাত্ত্বিক ব্যাখ্যার জন্য গতীয় তত্ত্বের অবতারণা করা হয়। গ্যাস অণুর এলোমেলো গতি এবং তাপ গতির রূপ এই দুই ধারণার উপরে গতীয় তত্ত্ব গড়ে উঠেছে।
- গতীয় তত্ত্বের সাহায্যে চাপের ব্যাখ্যা এবং চাপের তাত্ত্বিক রাশিমালা পাওয়া সম্ভব হয়েছে। এই রাশিমালা  $P = \frac{1}{3} mn \underline{C}^2$
- যে কোন তাপমাত্রায় গ্যাস অণুর গড় বেগ এবং গড়শক্তি হিসাব করা গতীয় তত্ত্বের সাহায্যে সহজ হয়েছে। এই তত্ত্ব অনুযায়ী পরম শূন্য উষ্ণতায় গড়বেগ এবং গড়শক্তি শূন্য।
- যে কোন পাত্রের দেওয়ালে সংঘাতকারী অণুর সংখ্যা গতীয় তত্ত্বের সাহায্যে বার করা যায়। একক সময়ে একক ক্ষেত্রফলে এই মান  $\frac{1}{4} n \underline{C}$ ।
- যে কোন তাপমাত্রায় গ্যাস অণুগুলি সম্ভাব্য সকল দিকে সম্ভাব্য সকল বেগে পরিভ্রমণ করছে। তাপীয় সাম্যে অণুর মধ্যে বেগের বণ্টন কিভাবে হয়েছে তা ম্যাক্সওয়েলের সূত্র থেকে জানা যাচ্ছে। পরন্তু এই সূত্র থেকে গড় বেগ, মূলগড় বর্গবেগ ও সর্বাপেক্ষা সম্ভাব্য গতিবেগের মান পাওয়া যায়। দেখা যায়, মানগুলি খুব কাছাকাছি। এর থেকে গ্যাস অণুর গড়বেগ ব্যবহার করে বিভিন্ন রাশিমালা উপপাদন করার যৌক্তিকতা মেলে।
- গ্যাস অণুর স্বাধীনতার মাত্রা সম্পর্কে ধারণা পাওয়া গেল এবং প্রতি স্বাধীনতার মাত্রা পিছু গতিশক্তি  $\frac{1}{2} kT$  ধরে নিয়ে গ্যাসের মোলার আপেক্ষিক তাপ ও আপেক্ষিক তাপদ্বয়ের অনুপাত বার করা গেল। বিভিন্ন গ্যাসের ক্ষেত্রে এই অনুপাতের বিভিন্নতার কারণ স্পষ্ট হল
- কঠিন পদার্থের পারমাণবিক তাপের পরিমাণ ডুলং ও পেটিটের সূত্রে পাওয়া গেছে।

## 8.7 প্রশ্নাবলি :

1. চাপের রাশিমালা নির্ণয় করার সময় গ্যাস অণুগুলির নিজেদের মধ্যে সংঘাত ধরা হয় নি। এজন্য কি ক্রটি হবে ?

2. দেওয়ালে অণুর সংঘাত সংখ্যার সাহায্যে কি গ্যাসের চাপের রাশিমালা পাওয়া যাবে ?
3. গভীর তত্ত্বের সাহায্যে গ্যাসের ব্যাপন সূত্র কীভাবে প্রতিষ্ঠা করা যায় ?
4. প্রমাণ চাপ ও তাপমাত্রায় হাইড্রোজেন অণুর মূলগড়বর্গবেগ  $1.84 \text{ km/s}$  হলে ঐ চাপ ও তাপমাত্রায় অক্সিজেনের অণুর মূল গড় বর্গ বেগ কত ?
5. একজন মহাকাশচারী একটি আধারে  $27^\circ\text{C}$  উষ্ণতায় এবং  $50$  বায়ুমণ্ডলীয় চাপে  $10$  লিটার নাইট্রোজেন গ্যাস মহাকাশে নিয়ে গিয়ে  $1$  সেমি পরিমাণ একটি ক্ষুদ্র ছিদ্র পাত্রের দেওয়ালে তৈরি করলেন। পাত্রটি খালি হতে কত ক্ষণ সময় লাগবে ? দেওয়া আছে,  $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

## 8.8 উত্তরমালা :

1. চাপের রাশিমালা নির্ণয়ের সময় অণুগুলির নিজেদের মধ্যে সংঘাত না বিবেচনা করলেও ভ্রুটি হয় না। কারণ, সংঘর্ষের জন্য একটি অণু পশ্চাদমুখী হলেও তার পরিবর্তে অপর সংঘাতকারী অণুটি নির্দিষ্ট দেওয়ালের দিকে ধাবমান হয়। এতে সময়ও নষ্ট হয় না এবং সংঘাতকারী অণুর সংখ্যা একই পাওয়া যায়।
2.  $ds$  ক্ষুদ্র অংশে  $\theta$  কোণে কোন অণু সংঘর্ষ ঘটালে প্রতিকলনের নিয়মে  $\theta$  কোণে অপর পার্শ্বে ফিরে যায়। এতে ভরবেগের পরিবর্তন হয়

$$mc \cos \theta - (-mc \cos \theta) = 2mc \cos \theta$$

সুতরাং  $ds$  ক্ষেত্রফলে  $dt$  সময়ে মোট ভরবেগের পরিবর্তন

$$\begin{aligned} & \frac{2m ds}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{cdt} dr \int_{c=0}^{\alpha} c^2 dc \\ &= \frac{m ds dt}{2\pi} \times \frac{1}{3} \times 2\pi \times \int_0^{\alpha} c^2 dc \\ &= \frac{m ds dt}{3} n \bar{c}^2 \quad \left[ \because \bar{c}^2 = \frac{1}{n} \int_0^{\alpha} c^2 dc \right] \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ভরবেগের পরিবর্তনের হার} = \frac{1}{3} mn \bar{c}^2 dA = dF \text{ (প্রযুক্ত বল)}$$

$$\therefore \text{চাপ } P = \frac{dF}{dA} = \frac{1}{3} mn \bar{c}^2 = \frac{1}{3} mn \underline{C}^2$$

3. কোন গ্যাসের ব্যাপনের হার ওর অণুগুলির মূল গড় বর্গ বেগের সমানুপাতিক। গ্যাস দুটির ব্যাপনের হার  $n_1$  এবং  $n_2$  হলে,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

কিন্তু  $c = \sqrt{3p/\rho}$  এখন, গ্যাসের চাপ দুটি সমান বলে,  $\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$  অর্থাৎ ব্যাপনের হার ঘনত্বের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক। এটি গ্রাহমের ব্যাপন সূত্র।

4. আমরা জানি, মূলগড় বর্গ বেগ  $C = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

$$\therefore C_{H_2} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{H_2}}} \quad \text{এবং} \quad C_{O_2} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{O_2}}}$$

$$\therefore \frac{C_{O_2}}{C_{H_2}} = \sqrt{\frac{M_{H_2}}{M_{O_2}}}$$

$$C_{O_2} = C_{H_2} \sqrt{\frac{M_{H_2}}{M_{O_2}}}$$

$$= 1.84 \times 10^3 \sqrt{\frac{2}{32}}$$

$$= 460 \text{ m/s.}$$

5.  $C = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

$$T = 27 + 273 = 300 \text{ K}$$

$$M = 28 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

$$C = \sqrt{\frac{3 \times 8.3 \times 300}{28 \times 10^{-3}}} = 517 \text{ m/s}$$

গ্যাস নিষ্ক্রমণের সঙ্গে মূলগড় বর্গ বেগও কমে এবং শেষে শূন্য হয়।

$$\therefore \text{গড় মূলগড়বর্গ বেগ} = \frac{517}{2} \text{ m/s}$$

প্রতি সেকেন্ডে নিষ্ক্রান্ত গ্যাস = ক্ষেত্রফল  $\times$  বেগ

$$\therefore \text{নির্ণেয় সময়} = \frac{\text{গ্যাসের আয়তন}}{\text{সেকেন্ডে নিষ্ক্রান্ত গ্যাস}}$$

$$= \frac{10 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{(10^{-4} \text{ m}^2) \times \left(\frac{517}{2} \text{ ms}^{-1}\right)}$$
$$= 0.387 \text{ s.}$$

### সহায়ক পাঠের জন্য

1. গ্যাসের আণবিক তত্ত্ব — প্রতীপ কুমার চৌধুরী, পঃ বঃ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ
2. A Treatise on Heat – M. N. Saha and B. N. Srivastava, The Indian Press Ltd. Allahabad.
3. Heat and Thermodynamics – M. W. Zemansky, Mc Grow Hill Book Co.

## একক 9 □ পরিবহণ প্রক্রিয়া

গঠন

9.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

9.2 গড় অবাধপথ

9.2.1 গড় অবাধপথের তাত্ত্বিক মান

9.2.2 চাপ ও উষ্ণতার সঙ্গে গড় অবাধপথের সম্পর্ক

9.2.3 অবাধপথের দৈর্ঘ্যের বন্টন

9.2.4 গড় অবাধপথের মান নির্ণয় — বর্ন এর পরীক্ষা

9.3 পরিবহণ প্রক্রিয়া

9.3.1 গ্যাসের সান্দ্রতা (viscosity)

9.3.2 গ্যাসের তাপ পরিবাহিতা (thermal conductivity)

9.3.3 গ্যাসের ব্যাপন (diffusion)

9.4 সারাংশ

9.5 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

9.6 উত্তরমালা

### 9.1 প্রস্তাবনা

অষ্টম এককে আপনি যখন আদর্শ গ্যাসের সম্বন্ধে পড়েছেন, তখন আপনার নিশ্চয়ই মনে হয়েছে যে আদর্শ গ্যাসের চিত্রটি নিতান্তই আদর্শায়িত। সেখানে গ্যাসের অণুগুলির আয়তন উপেক্ষা করে সেগুলিকে বিন্দুভর বলে ধরা হয়েছে। এটি কোন গ্যাসের ক্ষেত্রেই সত্য হতে পারে না কেননা গ্যাসের উষ্ণতা কমিয়ে সেটিকে তরলিত করলে তরলের আয়তন শূন্য হত। এছাড়া গ্যাস অণুগুলির মধ্যে কোন সংঘর্ষ না ঘটায় প্রতিটি অণু গ্যাসের আধারের সঙ্গে সংঘর্ষ না হওয়া অবধি সমবেগে ধাবিত হত। কোন জায়গায় ক্লোরিন, অ্যামোনিয়া বা অন্য কোন গন্ধযুক্ত গ্যাস নির্গত হলে আমরা বেশ কিছুক্ষণ তার গন্ধ পাই। কিন্তু আপনি জানেন যে সাধারণ উষ্ণতায় আদর্শ গ্যাসের অণুর বেগ প্রায় বায়ুতে শব্দের বেগের কাছাকাছি। কাজেই গ্যাস অণুর নিজেদের মধ্যে এবং বায়ুর বিভিন্ন অণুর সঙ্গে সংঘর্ষ না ঘটলে গন্ধযুক্ত গ্যাসের অণুগুলি মুহূর্তের মধ্যে বহুদূরে ধাবিত হত, গ্যাসের কোন গন্ধই পাওয়া যেত না।

এই এককে আমরা গ্যাসের প্রতিটি অণুর নির্দিষ্ট আয়তন আছে ধরে নিয়ে পর পর দুই সংঘর্ষের মধ্যে একটি অণু অবাধে যে পথ অতিক্রম করে তার গড় মান ও বন্টন সম্বন্ধে আলোচনা করব। এই আলোচনার পর গ্যাসের অণুগুলি কীভাবে গ্যাসের এক অংশ থেকে অন্য অংশে ভরবেগ ও তাপীয় গতিশক্তি বহন করে সে সম্বন্ধে আলোচনা করা হবে। আপনি দেখতে পাবেন যে গ্যাস অণুর মধ্যে সংঘর্ষের মাধ্যমে গ্যাসের এক অংশ থেকে অন্য অংশে যৌথগতির সংগে সংশ্লিষ্ট ভরবেগ ও তাপের পরিবহন ঘটে এবং সেগুলি গ্যাসের সান্দ্রতা (viscosity) ও তাপ-পরিবাহিতার (thermal conductivity) উদ্ভব ঘটায়। আপনি এও দেখবেন যে কতকটা একই প্রক্রিয়ায় গ্যাসের মধ্যে উচ্চচাপের অঞ্চল থেকে নিম্নচাপের অঞ্চলের দিকে গ্যাসের প্রবাহ ঘটে, যা ব্যাপন (diffusion) হিসাবে পরিলক্ষিত হয়।

গ্যাসের আণবিক চিত্র থেকে তার অবাধপথের বন্টন, সান্দ্রতা, তাপ-পরিবাহিতা ও ব্যাপনের হার সম্বন্ধে যে সব গণনা করা যায় সেগুলির ফল ও পরীক্ষালব্ধ ফলের মধ্যে চমৎকার সঙ্গতি লক্ষ্য করা যায়। গ্যাসের আণবিক তত্ত্বের এই সাফল্যের কাহিনী পড়তে আপনার নিশ্চয়ই ভাল লাগবে।

---

## উদ্দেশ্য

---

এই এককের সার্বিক উদ্দেশ্য আদর্শ গ্যাসের চিত্র থেকে বাস্তব গ্যাসের দিকে একধাপ অগ্রসর হয়ে আপনার সামনে অণুর অবাধপথ, সংঘর্ষ ও বিভিন্ন পরিবহন প্রক্রিয়ার ধারণাগুলিকে উপস্থাপিত করা। এই এককটি পড়ার পর আপনি যে কাজগুলি করতে পারবেন, সেগুলি হল :

- আপনি গ্যাস অণুর গড় অবাধপথের রাশিমালা নির্ণয় করতে পারবেন এবং ঐ রাশিমালার সাহায্যে গ্যাসের অণুর সংখ্যাঘনত্ব বা চাপ, গড় অবাধপথ ও অণুর ব্যাসের মধ্যে যে কোনও একটির মান অন্যগুলির মানের সাহায্যে বার করতে পারবেন।
- অণুর অবাধপথের বন্টনসূত্র নির্ণয় করতে পারবেন এবং তার সাহায্যে গড় অবাধপথের মান নিরূপণের পরীক্ষার ব্যাখ্যা দিতে পারবেন।
- গ্যাসের সান্দ্রতা, তাপপরিবাহিতা ও ব্যাপনের কারণ ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- গ্যাসের সান্দ্রতাঙ্ক, তাপ পরিবাহিতা ও ব্যাপনাক্ষের রাশিমালা নির্ণয় করতে পারবেন এবং এগুলির সঙ্গে সংশ্লিষ্ট নানা গাণিতিক প্রশ্নের সমাধান করতে পারবেন।

---

## 9.2 গড় অবাধপথ

---

আপনি আগেই জেনেছেন যে গ্যাস অণুর প্রতিটির নির্দিষ্ট আয়তন আছে এবং সাধারণভাবে ঐ আয়তনকে উপেক্ষা করা যায় না। এর ফলে গ্যাসের প্রতিটি অণু অন্য অণুগুলির সঙ্গে সংঘর্ষে লিপ্ত হয়। পরপর দুটি সংঘর্ষের মধ্যে অণুর উপর কোন বলই কাজ করে না। ফলে যতক্ষণ না সংঘর্ষের ফলে গতির পরিবর্তন হয়, ততক্ষণ অণুটি সমবেগে সরলরেখায় চলতে থাকে। এক সংঘর্ষ থেকে পরবর্তী সংঘর্ষ পর্যন্ত অণুর গতিপথকে আমরা অবাধপথ (free path) বলি। কোন একটি অণু উপর্যুপরি যে সব অবাধপথ



অতিক্রম করে সেগুলির গড় মানকেই আমরা ঐ বিশেষ অণুর গড় অবাধপথ (mean free path) বলব। গ্যাসটি যদি নানা আকারের অণুর মিশ্রণ হয় তবে গড় অবাধপথের মান বিভিন্ন আকারের অণুর ক্ষেত্রে বিভিন্ন হবে। মোটামুটিভাবে বলা যায় যে যদি একটি অণু  $l$  দূরত্ব যেতে  $n$  বার অন্য অণুর সঙ্গে ধাক্কা খায় এবং  $n$  যদি বড় সংখ্যা হয় তবে  $\frac{l}{n}$  রাশিই হল অণুর গড় অবাধপথ। লক্ষ্য করুন, ঐ  $l$  দূরত্ব যেতে অণুটির কত সময় লাগল সেটি এখানে বিবেচ্য নয়।

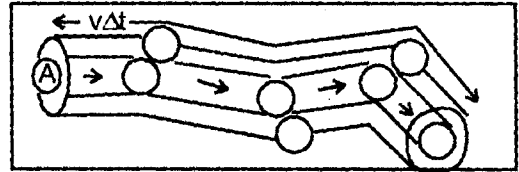
এবার আমরা তাত্ত্বিক বিবেচনা থেকে গড় অবাধপথের রাশিমালা নির্ণয় করব।

### 9.2.1 গড় অবাধপথের তাত্ত্বিক মান

গড় অবাধপথের মান নির্ণয় করতে প্রথমেই আমরা ধরে নেব যে গ্যাসের অণু একটি কঠিন স্থিতিস্থাপক গোলক। এই অঙ্গীকারের সমালোচনা করা যেতেই পারে, কেননা নিষ্ক্রিয় গ্যাসের এক পরমাণুক অণু ছাড়া কোন ক্ষেত্রেই অণুর ইলেকট্রনগুলির বন্টন গোলকাকৃতি হয় না। আবার সংঘর্ষকালে দুটি অণুর কেন্দ্র পরস্পর থেকে কতটা কাছাকাছি আসতে পারে তা অণুদুটির পরস্পরের সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ এবং সংঘর্ষের সংঘাত-পরিমাত্রার (impact parameter) উপর নির্ভর করে, সেটি সম্পূর্ণ স্থির একটি দূরত্ব নয়। মোটামুটিভাবে দুটি সদৃশ অণু সংঘর্ষের সময় তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের সর্বনিম্ন ব্যবধানের গড় মানকেই আমরা ঐ অণুর ব্যাস বলে কল্পনা করব।

এখন ধরা যাক কোন একটি গ্যাসে অণুর ঘনত্বসংখ্যা, অর্থাৎ একক আয়তন পিছু অণুর সংখ্যা  $n$  এবং অণুর ব্যাস  $\sigma$ । আমরা  $A$  নামে চিহ্নিত একটি নির্দিষ্ট অণুর গতি অনুসরণ করব। ধরা যাক  $A$  অণুর নিজস্ব বেগ  $u$  এবং অন্যান্য অণুর সাপেক্ষে  $A$  অণুর গড় আপেক্ষিক বেগ  $v$ । কল্পনা করা যায় যে অন্যান্য নিশ্চল অণুর মধ্য দিয়ে  $A$  অণুটি  $v$  বেগে ধাবিত হচ্ছে। যখন অন্য কোন অণুর সঙ্গে  $A$  অণুর সংঘর্ষ হয় তখন দুই অণুর কেন্দ্র দুটির মধ্যে  $\sigma$  ব্যবধান থাকে। এখন  $A$  অণুর সঙ্গে সমকেন্দ্রিক  $\sigma$  ব্যাসার্ধের এক গোলক কল্পনা করুন।  $A$  অণুর সঙ্গে এই গোলকটিও  $v$  বেগে ধাবমান হবে এবং  $\pi\sigma^2$  প্রস্থচ্ছেদের একটি বেলনাকৃতি আয়তন অতিক্রম করবে। এই আয়তনের মধ্যে অন্য কোন অণুর কেন্দ্র থাকলে তার সঙ্গে  $A$  অণুর সংঘর্ষ হবে, ফলে  $A$  অণুর গতিপথের দিক পরিবর্তিত হয়ে সেটির নূতন অবাধপথ শুরু হবে। আমরা  $A$  অণুর সমকেন্দ্রিক  $\sigma$  ব্যাসার্ধের যে গোলক কল্পনা করেছি তাকে  $A$  অণুর 'প্রভাব গোলক' (sphere of influence) বলা হয়।

এবার  $\Delta t$  সময়ের জন্য  $A$  অণুর গতি পর্যবেক্ষণ করা যাক (চিত্র 9.1)। এই সময়ের মধ্যে প্রভাব গোলকটি  $v \Delta t$  পথ অতিক্রম করে এবং সেটির অতিক্রান্ত আয়তন হয়  $\Delta V = \pi\sigma^2 \cdot v \Delta t$ । এই আয়তনে গড়ে  $n \Delta V$  সংখ্যক অণু থাকে, যার প্রতিটির সঙ্গে  $A$  অণুর সংঘর্ষ হবে। সুতরাং  $\Delta t$  সময়ে সংঘর্ষের সংখ্যাও  $n \Delta V$ ।



চিত্র 9.1

এই  $\Delta t$  সময়ে  $A$  অণুর গতিপথের প্রকৃত দৈর্ঘ্য  $u \Delta t$ । সুতরাং  $A$  অণুর অবাধপথ

$$\lambda = \frac{\Delta t \text{ সময়ে গতিপথের প্রকৃত দৈর্ঘ্য}}{\Delta t \text{ সময়ে সংঘর্ষের সংখ্যা}} = \frac{u \Delta t}{n \Delta v}$$

$$= \frac{u \Delta t}{n \pi \sigma^2 v \Delta t}$$

$$\text{বা } \lambda = \frac{u}{n \pi \sigma^2 v} \quad 9.1$$

এখন আপনি  $u$  ও  $v$  এর অনুপাত নির্ণয় করে 9.1 সমীকরণের সাহায্যে গড় অবাধপথের রাশিমালা নির্ণয় করতে পারবেন।

$u$  ও  $v$  এর অনুপাত নির্ণয় — প্রাথমিক পদ্ধতি

সরলীকরণের জন্য ধরা যাক  $A$  অণুর বেগের তুলনায় অন্যান্য অণুর বেগ উপেক্ষণীয়। সেক্ষেত্রে  $v = u$  এবং 9.1 সমীকরণ থেকে

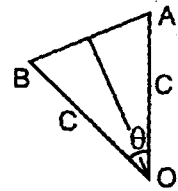
$$\lambda = \frac{1}{n \pi \sigma^2} \quad 9.2$$

এখানে যে অঙ্গীকারটি ধরে নেওয়া হয়েছে তা নিতান্তই অবাস্তব, কেননা একটি গ্যাসের মধ্যে গতিবেগের প্রত্যাশিত মান সব অণুর ক্ষেত্রেই সমান। তবে বিশেষ ক্ষেত্রে, যেমন গ্যাসের মধ্যে উচ্চগতিসম্পন্ন ইলেকট্রনের গড় অবাধপথ নির্ণয়ে এই অঙ্গীকারটি প্রযোজ্য হয়।

এবার অপেক্ষাকৃত বাস্তবানুগ একটি পদ্ধতিতে গড় অবাধপথের মান বার করা যাক। 1858 খ্রিষ্টাব্দে জার্মান পদার্থবিদ ক্লোজিয়াস (R. Clausius উচ্চারণ Klowzius) এই পদ্ধতির উদ্ভাবন করেন।

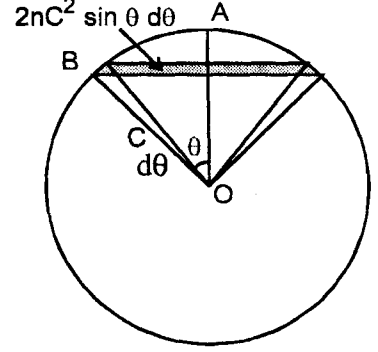
ক্লোজিয়াসের (Clausius) পদ্ধতি

এক্ষেত্রে আমরা ধরে নেব যে গ্যাসের প্রতিটি অণুর বেগ সমান। যে কোন অণুর বেগের মান  $c$  এবং গ্যাসের সমদৈশিকতার অঙ্গীকার অনুযায়ী বেগের দিক সবদিকে সমভাবে বন্টিত। এক্ষেত্রে  $u = c$ । এখন আমাদের অন্যান্য অণুর সাপেক্ষে  $A$  অণুর গড় আপেক্ষিক গতিবেগ বার করতে হবে। ধরা যাক  $OA$  ও  $OB$  ভেক্টর দুটি যথাক্রমে  $A$  অণু এবং অন্য কোন অণু  $B$  এর বেগ নির্দেশ করছে। উভয়ের দৈর্ঘ্য  $c$ -এর সমান এবং তাদের অন্তর্গত কোণ  $\theta$  (চিত্র 9.2)।  $B$  অণুর সাপেক্ষে  $A$  অণুর আপেক্ষিক বেগ  $OA - OB = BA$  অর্থাৎ  $BA$  ভেক্টরটির দিক ও দৈর্ঘ্য  $A$  অণুর আপেক্ষিক বেগের দিক ও মান নির্দেশ করে। এই আপেক্ষিক বেগের মান,  $v(\theta) = BA$  ভেক্টরের দৈর্ঘ্য  $= 2c \sin \frac{\theta}{2}$ ।  $\theta$  কোণটি  $O$  থেকে  $\pi$  এর মধ্যে বন্টিত আছে। এখন এর বণ্টনসূত্রটি জানা প্রয়োজন।



চিত্র 9.2

O কে কেন্দ্র করে c ব্যাসার্ধ নিয়ে যদি একটি গোলক কল্পনা করা যায় (চিত্র 9.3) তবে A ও B বিন্দু এই গোলকের উপর অবস্থিত হবে। OA কে যদি একটি গোলীয় নির্দেশতন্ত্রের মেরু-অক্ষ ধরা যায়, তবে A বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে  $\theta = 0$ । B বিন্দুটি গোলকের তলের উপর যে কোনও বিন্দুতে সমান সম্ভাব্যতায় থাকতে পারে। গোলকের তলে যে বলয়াকৃতি অঞ্চলের জন্য  $\angle AOB$  কোণের মান  $\theta$  ও  $\theta + d\theta$  সীমার মধ্যে থাকবে তার ক্ষেত্রফল  $Cd\theta$  (প্রস্থ)  $\times 2\pi c \sin\theta$  (দৈর্ঘ্য)  $= 2\pi c^2 \sin\theta d\theta$ । সুতরাং  $\angle AOB$  কোণ  $\theta$  ও  $\theta + d\theta$  সীমার মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা



চিত্র 9.3

$$P(\theta) d\theta = \frac{\text{বলয়াকৃতি অঞ্চলের ক্ষেত্রফল}}{\text{গোলকতলের মোট ক্ষেত্রফল}}$$

$$= \frac{2\pi c^2 \sin\theta d\theta}{4\pi c^2} = \frac{1}{2} \sin\theta d\theta$$

এখন আপনি সহজেই A অণুর আপেক্ষিক গতি v এর প্রত্যাশিত মান বার করতে পারেন :

$$v = \int_0^{\pi} v(\theta) p(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} 2c \sin\frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin\theta d\theta$$

$$= c \int_0^{\pi} \sin\frac{\theta}{2} \cdot \sin\theta d\theta \quad [ \text{সমাকলটির মান } \frac{4}{3} ]$$

$$= \frac{4}{3} c$$

9.1 সূত্র ব্যবহার করলে পাবেন

$$\lambda = \frac{c}{n\pi\sigma^2 \frac{4}{3} c} = \frac{3}{4n\pi\sigma^2}$$

9.3

লক্ষ্য করুন, A ছাড়া অন্য অণুগুলি নিশ্চল আছে ধরে নিয়ে আমরা গড় অবাধপথের যে রাশিমালার পেয়েছিলাম (সমীকরণ 9.2), এই রাশিমালটি কেবলমাত্র  $\frac{3}{4}$  উৎপাদকে তার থেকে ভিন্ন।

ম্যাক্সওয়েলীয় বেগ বণ্টন সূত্র থেকে গড় অবাধপথের মান

ক্লোজিয়াসের পদ্ধতিতে আমরা ধরে নিয়েছিলাম যে গ্যাসের প্রতিটি অণুই সমবেগে চলে। প্রকৃতপক্ষে গ্যাসের অণুগুলির বেগ শূন্য থেকে অসীম মানের মধ্যে বণ্টিত থাকে এবং ম্যাক্সওয়েলীয় বণ্টনসূত্র অনুসরণ করে। এই বণ্টনসূত্র সম্বন্ধে আপনি 12 নং এককে পড়বেন। এই সূত্র অনুযায়ী কোন একটি অণুর বেগের

মান  $c$  ও  $c+dc$  সীমার মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা

$$P_{(c)}dc = 4\alpha^{-3}\pi^{-\frac{1}{2}}e^{-c^2/\alpha^2}c^2dc$$

যেখানে  $\alpha$  = সর্বাধিক সম্ভাব্য গতিবেগ। গ্যাসের সব অণুর গতিবেগ এই বণ্টনসূত্র পালন করে এটি ধরে নিয়ে গণনা করলে অবাধপথের গড় মান পাওয়া যায় :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi \sigma^2} \quad 9.4$$

এই রাশিমালাকেই আমরা গড় অবাধপথের সঠিক রাশিমালা হিসাবে ধরে নেব। এক্ষেত্রেও লক্ষ্য করার বিষয় এই, যে সব অণু সমবেগে চলে ধরে নিয়ে আমরা যে মান (9.3 সূত্র) পেয়েছিলাম, সেটি এই মান থেকে মাত্র 6 শতাংশ বেশী।

### 9.2.2 চাপ ও উষ্ণতার সঙ্গে গড় অবাধপথের সম্পর্ক

আগের অনুচ্ছেদে আপনি দেখেছেন, গড় অবাধপথের তাত্ত্বিক মান  $n$  এবং  $\sigma^2$  এর ব্যস্তানুপাতী, অর্থাৎ

$$\lambda \propto \frac{1}{n\sigma^2}।$$

উষ্ণতা স্থির থাকলে গ্যাসের চাপ  $p$  ঘনত্বসংখ্যা  $n$  এর সমানুপাতী হয়। সুতরাং স্থির উষ্ণতায়  $\lambda \propto \frac{1}{p}$ । তবে মনে রাখতে হবে যে চাপ কমান ফলে  $\lambda$ - এর মান যদি আধারের মাপের কাছাকাছি হয়ে যায়, তখন গড় অবাধপথের ধারণাই প্রযোজ্য থাকে না।

গ্যাসের আয়তন স্থির রেখে উষ্ণতা বৃদ্ধি করলে ঘনত্বসংখ্যা স্থির থাকে, যদিও অণুগুলির গড় গতিবেগ এতে বৃদ্ধি পায়। আপনার মনে হতে পারে যে এর ফলে গড় অবাধপথের কোন হ্রাসবৃদ্ধি ঘটবে না। সেটি কিন্তু ঠিক নয়।  $\lambda$  এর রাশিমালায়  $\sigma^2$  এর পরিবর্তে  $\sigma_0^2 (1 + \frac{b}{T})$  ব্যবহার করে উষ্ণতা বৃদ্ধির প্রভাবটি সুস্পষ্ট করা যায়। এখানে  $\sigma_0$  = অসীম উষ্ণতায়  $\sigma^2$  এর সীমাহ্র মান,  $b$  = ধ্রুবক, যার মান অণুর প্রকৃতির উপর নির্ভরশীল এবং  $T$  = নিরপেক্ষ স্কেলে উষ্ণতা।  $\sigma^2$  এর এই মান ব্যবহার করলে আপনি পাবেন

$$\lambda \propto \left(1 + \frac{b}{T}\right)^{-1} \quad 9.5$$

এখানে  $b$  রাশির মান খুবই ক্ষুদ্র এবং উষ্ণতাবৃদ্ধির সঙ্গে  $\lambda$  এর মান সামান্যই বৃদ্ধি পায়।

### 9.2.3 অবাধপথের দৈর্ঘ্যের বণ্টন

এ পর্যন্ত আপনি মূলত অবাধপথের গড় মান নিয়েই আলোচনা পড়েছেন। কিন্তু এক একটি অবাধপথের মান শূন্য থেকে আরম্ভ করে গড় অবাধপথের বহুগুণ পর্যন্ত হতে পারে, যতক্ষণ না অণুগুলির অন্য অণুর

পরিবর্তে আধারের প্রাচীরের সঙ্গেই সংঘর্ষ হয়। আপনি প্রশ্ন করতে পারেন, অবাধপথগুলির দৈর্ঘ্য কীভাবে বণ্টিত হয়, অথবা একটি নির্দিষ্ট অবাধপথের দৈর্ঘ্য দুই নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা কত? এর উত্তর দেওয়ার জন্য আমাদের অবাধপথের দৈর্ঘ্যগুলি কীভাবে বণ্টিত হয় তা দেখতে হবে।

ধরা যাক কোন একটি অণুর সংঘর্ষ বিনা  $x$  দৈর্ঘ্য যাওয়ার সম্ভাব্যতা  $f(x)$  এবং পরবর্তী  $dx$  দৈর্ঘ্যের মধ্যে সংঘর্ষ ঘটানোর সম্ভাব্যতা  $F(x) dx$ ।  $dx$  দৈর্ঘ্যের মধ্যে সংঘর্ষ ঘটানোর সম্ভাব্যতা আসলে অণুর প্রভাবগোলকটি  $dx$  দূরত্ব যেতে যে আয়তন অতিক্রম করে তার মধ্যে অন্য একটি অণুর কেন্দ্র অবস্থিত হওয়ার সম্ভাব্যতার সমান। এই সম্ভাব্যতা  $dx$  এর সমানুপাতী হলেও  $x$  উপর নির্ভরশীল হতে পারে না। কাজেই,  $F(x) dx$  কে  $Fdx$  হিসাবে লেখা উচিত, যেখানে  $F$  একটি স্থির রাশি,  $x$  এর অপেক্ষক নয়।

এবার দেখুন,  $x$  থেকে  $x + dx$  দূরত্বের মধ্যে কোন সংঘর্ষ না ঘটানোর সম্ভাব্যতা  $(1 - Fdx)$ । সুতরাং সংঘর্ষ বিনা অণুর  $x + dx$  দৈর্ঘ্যের পথ অতিক্রম করার সম্ভাব্যতা = সংঘর্ষ বিনা  $x$  দৈর্ঘ্যের পথ অতিক্রম করার সম্ভাব্যতা  $\times$  পরবর্তী  $dx$  দৈর্ঘ্যে কোন সংঘর্ষ না হওয়ার সম্ভাব্যতা

$$= f(x) (1 - Fdx)$$

কিন্তু এই সম্ভাব্যতা  $f(x)$  এর সংজ্ঞা অনুযায়ী  $f(x + dx)$  এর সমান

$$\therefore f(x)(1 - Fdx) = f(x + dx)$$

$$= f(x) + \frac{df(x)}{dx} \cdot dx \quad (\text{টেলর শ্রেণীতে প্রসারণ করে})$$

$$\text{সমীকরণটি সাজিয়ে লিখলে} \quad \frac{df(x)}{f(x)} = -F dx$$

এবং সমাকলন করে  $\int \frac{df(x)}{f(x)} = -Fx + \int A$  ( $\int A = \text{সমাকলন ধ্রুবক}$ )

$$\text{অর্থাৎ} \quad f(x) = Ae^{-Fx}$$

9.6

এখানে  $A$  ও  $F$  দুটি অজ্ঞাত ধ্রুবক। আমাদের জানা তথ্যের সাহায্যে এ দুটির মান নির্ণয় করা যাবে। আমরা জানি :

i)  $x$  যখন ক্রমশ শূন্যের নিকটবর্তী হয় তখন  $f(x)$  ক্রমশ 1 এর দিকে যায় এবং অবশেষে  $f(0) = 1$  লেখা যায়। 9.6 সূত্রে  $x = 0$  এবং  $f(0) = 1$  বসিয়ে পাওয়া যায়  $A = 1$ । সুতরাং  $f(x) = e^{-Fx}$  .... 9.7

ii) সব অবাধপথের গড় মান  $\lambda$ । অর্থাৎ  $\int_0^{\infty} x f(x) \cdot F dx = \lambda$  কেননা  $f(x) = F dx$  রাশি অবাধপথের  $x$  থেকে  $x + dx$  এর মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা। সুতরাং

$$\lambda = \int_0^{\infty} x e^{-Fx} F dx$$

ডানদিকের সমাকলের মান  $\frac{1}{\lambda}$ । অর্থাৎ  $F = \frac{1}{\lambda}$  এবং  $f(x) = e^{-\frac{x}{\lambda}}$ । তখন নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে

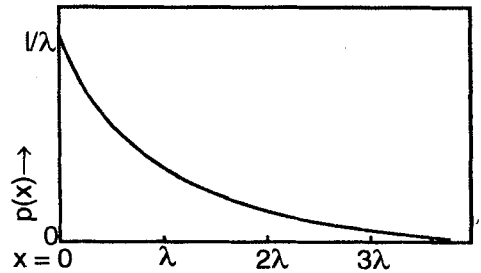
- $x$  দৈর্ঘ্যের পথে অণুর কোন সংঘর্ষ না হওয়ার সম্ভাব্যতা  $e^{-\frac{x}{\lambda}}$ ,
- $dx$  দৈর্ঘ্যের মধ্যে সংঘর্ষ ঘটান সম্ভাব্যতা  $\frac{dx}{\lambda}$  এবং
- কোন একটি অবাধপথের  $x$  ও  $x + dx$  সীমার মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা

$$P(x) dx = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

9.8

9.4 চিত্রে  $x$  এর সঙ্গে  $P(x)$  এর লেখ দেখতে পাবেন। এই লেখচিত্রের তলায় মোট ক্ষেত্রফল 1 এবং  $x$  এর দুই মান  $x_1$  ও  $x_2$  এর মধ্যে লেখচিত্রটির তলার ক্ষেত্রফল কোন একটি অবাধপথ  $x_1$  ও  $x_2$  এর মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতার সমান।

গড় অবাধপথ সম্বন্ধে যা পড়লেন তার উপর কয়েকটি অনুশীলনী আপনাকে বিষয়টি বুঝতে সাহায্য করবে।



চিত্র 9.4

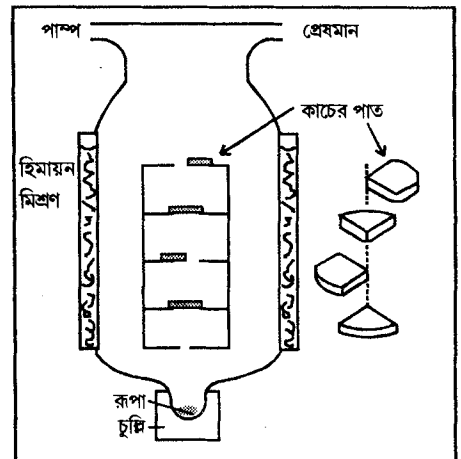
### অনুশীলনী 1

- কোন একটি আধারে  $27^\circ\text{C}$  উষ্ণতায় ও প্রমাণ চাপে নাইট্রোজেন গ্যাস রাখা আছে। নাইট্রোজেন অণুর ব্যাস  $0.37 \text{ mm}$  ধরে নিয়ে ঐ গ্যাসের অণুর গড় অবাধপথ নির্ণয় করুন।
- কোন একটি গ্যাসের অণুর অবাধপথগুলির কত শতাংশ  $\lambda$  এবং  $2\lambda$  সীমাদ্বয়ের মধ্যে থাকে ?

### 9.2.4 গড় অবাধপথের মান নির্ণয় — বর্ন-এর পরীক্ষা

গড় অবাধপথ ও অবাধপথের বর্ন সংক্রান্ত যে তত্ত্বগুলি আমরা আলোচনা করলাম যেগুলির প্রতিষ্ঠার জন্য পরীক্ষার মাধ্যমে সেগুলির সত্যতা প্রতিপন্ন হওয়া প্রয়োজন। মাক্স বর্ন (Max Born) 1920 খ্রিস্টাব্দে এই উদ্দেশ্যে একটি পরীক্ষায় বিভিন্ন গ্যাসের মধ্যে রূপার অণুর গড় অবাধপথ নির্ণয় করেন। 9.5 চিত্রে বর্ন এর পরীক্ষার ব্যবস্থাটি দেখানো হয়েছে।

এখানে  $Q$  একটি কোয়ার্জে তৈরী ফাঁপা বেলন। এর নীচের অংশটি একটি ক্ষুদ্র পাত্রের মত এবং তার মধ্যে কিছু রূপা চুল্লীর সাহায্যে গরম করা হয়। উত্তপ্ত রূপা বাষ্পীভূত হয়ে  $H$  ছিদ্রের মধ্য দিয়ে অণুরশ্মি রূপে নির্গত হয়। বেলনের মধ্যে



চিত্র 9.5

সমাক্ষভাবে চারটি পিতলের চাকতি সমান উচ্চতা অন্তর সাজানো থাকে। চাকতিগুলির কেন্দ্রে গোল ছিদ্র থাকে এবং প্রত্যেক চাকতির উপর বৃত্তের এক-চতুর্থাংশ আকৃতির (quadrant) একটি কাচের পাত রাখা থাকে। এই পাতগুলি এমনভাবে সাজানো থাকে যাতে তাদের সমকোণী শীর্ষগুলি বেলনের অক্ষের উপর থাকে এবং প্রতিটি পাত নীচের পাতের তুলনায় এক সমকোণে ঘোরানো থাকে। 9.5 (ক) চিত্র থেকে আপনি কাচের পাতগুলির অবস্থান বুঝতে পারবেন।

পিতলের চাকতি ও কাচের পাতগুলিকে শীতল রাখার জন্য বেলনের মধ্যাংশ হিমায়ন-মিশ্রণে ঘেরা থাকে। বেলনের মধ্যে যে কোন গ্যাস যে কোন চাপে রাখা যায়। এজন্য বেলনের সঙ্গে পাম্প ও প্রেশমান যুক্ত থাকে।

বেলনের নীচের অংশে রাখা রূপা উত্তপ্ত হয়ে H ছিদ্রের মধ্য দিয়ে কাচের পাতগুলির শীর্ষাঞ্চলে পড়ে এবং পাতগুলি শীতায়িত থাকায় গতিশক্তি হারিয়ে কাচের উপর প্রলেপ সৃষ্টি করে। আলোকমিতির (photometry) সাহায্যে বিভিন্ন পাতে প্রলেপের গভীরতার অনুপাত নির্ণয় করা যায়।

বেলনটিকে প্রথমে গ্যাসশূন্য করে চারটি কাচের পাতের উপর রূপার প্রলেপ তৈরী করা হয়। ধরা যাক এগুলির গভীরতা যথাক্রমে  $d_{10}$ ,  $d_{20}$ ,  $d_{30}$  ও  $d_{40}$ । এই গভীরতাগুলি সমমান নয়, কেননা H থেকে নির্গত রূপার অণুগুলি ক্রমশ ছড়িয়ে পড়ে, ফলে H থেকে পাতের দূরত্বের সঙ্গে প্রলেপের গভীরতা কিছুটা কমে যায়। এবার বেলনের মধ্যে পরীক্ষাধীন গ্যাসকে নির্দিষ্ট চাপে প্রবেশ করানো হয় এবং পুনরায় পূর্বের মত সমান সময় ধরে কাচের পাতে রূপার প্রলেপ ফেলা হয়। ধরুন এবার প্রলেপের গভীরতা হল যথাক্রমে  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  ও  $d_4$ । ছিদ্র H থেকে কাচের পাতগুলির দূরত্ব যথাক্রমে  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  ও  $x_4$  ধরা যাক। 9.7 সূত্র ব্যবহার করে আপনি লিখতে পারেন :

$$d_1 = d_{10}e^{-x_1/\lambda}, d_2 = d_{20}e^{-x_2/\lambda}, d_3 = d_{30}e^{-x_3/\lambda} \text{ ও } d_4 = d_{40}e^{-x_4/\lambda}$$

ওপরের চারটি সমীকরণের যে কোনও দুটি ব্যবহার করে আপনি  $\lambda$  এর রাশিমালা লিখতে পারেন, যেমন

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{d_{10}}{d_{20}} e^{(x_2 - x_1)/\lambda}$$

$$\text{বা } \lambda = \frac{x_2 - x_1}{\lambda_n \left( \frac{d_1}{d_2} - \frac{d_{20}}{d_{10}} \right)} \quad 9.9$$

9.9 সূত্র ব্যবহার করে  $\lambda$  এর মান সহজেই নির্ণয় করা যায়। লক্ষ্য করুন যে এখানে  $x_1$ ,  $x_2$  প্রভৃতির মান অর্থাৎ H ছিদ্র থেকে কাচের পাতগুলির দূরত্ব জানার দরকার নেই। পাতগুলির মধ্যে ব্যবধান, যেমন  $x_2 - x_1$ , জানলেই গড় অবাধপথের মান বার করা যাবে।

বর্ণ-এর পরীক্ষায় পর পর দুটি কাচের পাতের মধ্যে ব্যবধান ছিল 1 cm। 0.60 Pa ও 0.77 Pa (যথাক্রমে  $4.5 \times 10^{-3}$  ও  $5.8 \times 10^{-3}$  torr) চাপে বায়ুর মধ্যে গড় অবাধপথের মান পাওয়া যায় যথাক্রমে

2.4 ও 1.7 cm । লক্ষ্য করে দেখুন, চাপ ও গড় অবাধপথের গুণফল পরীক্ষাগত ত্রুটির কথা মনে রাখলে প্রায় সমান, অর্থাৎ গড় অবাধপথ চাপের ব্যস্তানুপাতী। এছাড়া  $\lambda$  এর পরীক্ষালব্ধ মান বায়ু ও বাষ্পীভূত রূপার সান্দ্রতার মান থেকে যেমন আশা করা যায় তার সঙ্গে মিলে যায়। সুতরাং বর্ন এর পরীক্ষা থেকে অবাধপথের বন্টনের সূচক-সূত্র এবং  $\lambda$  ও  $p$  এর প্রত্যাশিত সম্পর্ক — দুটিরই সত্যতা প্রতিপন্ন হয়। এবার বর্ন এর পরীক্ষা সম্বন্ধীয় একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

## অনুশীলনী 2

- (i) বর্ন তাঁর পরীক্ষায় বায়ুমণ্ডলের চাপে রাখা বায়ুতে রূপার অণুর গড় অবাধপথ নির্ণয় না করে অনেক অল্প চাপে পরীক্ষা করেছিলেন কেন ?
- (ii) বেলনের কিছু অংশ হিমায়ন মিশ্রণে ঘিরে রাখার কারণ কী ?

## 9.3 পরিবহণ প্রক্রিয়া

আগের এককে আপনি আদর্শ গ্যাসের বিষয়ে জেনেছেন। আদর্শ গ্যাসের ধর্ম এবং অণুর বেগ বন্টন সম্বন্ধীয় আলোচনায় আমরা ধরে নিই যে গ্যাসটি সাম্যাবস্থায় আছে। তার সর্বত্র ঘনত্বসংখ্যা ও উষ্ণতা সমান এবং অণুগুলির হয় কোন যৌথ গতিবেগ নেই, অথবা থাকলেও তা সমগ্র গ্যাসের জন্য একই। কিন্তু কোন গ্যাস স্থির অবস্থায় থাকলেও সেটি সাম্যাবস্থায় নাও থাকতে পারে। অণুর ঘনত্বসংখ্যা গ্যাসের এক বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে ভিন্ন হলে অধিক ঘনত্বের অঞ্চল থেকে অল্প ঘনত্বের অঞ্চলের দিকে গ্যাসের প্রবাহ ঘটে। এই প্রক্রিয়াকে আমরা ব্যাপন বলি। অণুর যৌথ গতিবেগ যদি গ্যাসের এক স্তর থেকে অন্য স্তরে ভিন্ন হয় তবে ঐ যৌথ গতিবেগের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট ভরবেগ এক স্তর থেকে অন্য স্তরে হস্তান্তরিত হয়। মনে হয় যেন এক স্তর গ্যাসের অন্য স্তরের উপর একটি স্পর্শক পীড়ন (tangential stress) প্রয়োগ করছে। এই পীড়নকেই আমরা গ্যাসের সান্দ্রতার প্রকাশ বলে মনে করি। আবার দেখুন, গ্যাসের অণুর গড় গতিশক্তি যদি গ্যাসের এক অংশে বেশী, অন্য অংশে কম হয় তবে প্রথম অংশ থেকে দ্বিতীয় অংশের দিকে গতিশক্তির প্রবাহ ঘটবে। এর অর্থ, তাপ অধিক উষ্ণতার অঞ্চল থেকে অপেক্ষাকৃত কম উষ্ণতার অঞ্চলের দিকে প্রবাহিত হবে, যাকে আপনি তাপের পরিবহণ বলে জানেন।

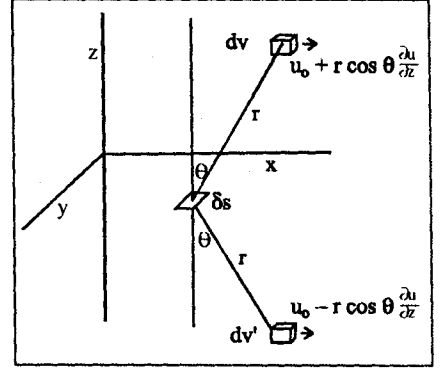
গ্যাসের অণুর অথবা তাদের যৌথ ভরবেগ বা তাপীয় শক্তির এই ধরনের প্রবাহ একত্রে ‘পরিবহণ প্রক্রিয়া’ বলে অভিহিত হয়। পরিবহণ প্রক্রিয়াগুলির একটি সাধারণ ধর্ম এই যে সেগুলি অপ্রত্যাবর্তক। এই প্রক্রিয়াগুলিতে শক্তি ক্রমশ অলভ্য হয় এবং অবিন্যস্ততা বা এনট্রপি বৃদ্ধি পায়। এখানে আমরা গ্যাসের সান্দ্রতা, তাপ পরিবহণ ও ব্যাপনের গাণিতিক আলোচনা করব।

### 9.3.1 গ্যাসের সান্দ্রতা

মনে করুন, রান্নার গ্যাসের সিলিন্ডার বোকাই একটি ট্রাক রাজপথে ছুটে চলেছে। গ্যাসের অণুগুলির গতিবেগ লক্ষ্য করলে দেখা যাবে তাদের উষ্ণতা অনুযায়ী এলোমেলো গতিবেগ ছাড়াও যৌথভাবে একটি



বেগ রয়েছে, যা ট্রাকের বেগের সমান। এই বেগকেই আমরা যৌথ গতিবেগ বলি। এক্ষেত্রে সিলিন্ডারের গ্যাসের সর্বত্রই যৌথ গতিবেগের মান এক। এবার ধরুন যৌথ গতিবেগের দিক একটি সমকোণী কার্টেসীয় নির্দেশতন্ত্রের  $x$ -অক্ষ বরাবর এবং এই যৌথ গতিবেগ,  $u$ ,  $z$  দিকে  $\frac{\partial u}{\partial z}$  হারে পরিবর্তিত হয় (চিত্র 9.6)।  $z = 0$  তলে  $u$ -এর মান  $u_0$  হলে  $(x, y, z)$  বিন্দুতে  $u$  এর মান হবে  $u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \cdot z$ ।



চিত্র 9.6

$z = 0$  তলে অতিক্ষুদ্র তল  $\delta s$  এবং তার উপর  $O$  বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি গোলীয় নির্দেশতন্ত্র কল্পনা করুন।  $O$  বিন্দুতে  $\delta s$  তলের উপর লম্ব  $OP$  এই নির্দেশতন্ত্রের অক্ষ। এবার  $(r, \theta, \phi)$  নির্দেশাঙ্কে একটি অতিক্ষুদ্র আয়তন  $dv$  কল্পনা করুন। যদি গ্যাসের সর্বত্র অণুর ঘনত্বসংখ্যা  $n$  হয় তবে এই আয়তনে  $ndv$  সংখ্যক অণু থাকবে। প্রতিটি অণু একক সময়ে  $\bar{c}$  দূরত্ব অতিক্রম করে এবং গড়ে  $\lambda$  দূরত্ব অন্তর সেটির সঙ্গে অন্য অণুর সংঘর্ষ হয়। সুতরাং একক সময়ে  $dv$  আয়তনে মোট  $ndv \cdot \frac{\bar{c}}{\lambda}$  সংখ্যক সংঘর্ষ ঘটে এবং তার ফলে সমসংখ্যক অবাধপথ  $dv$  আয়তন থেকে শুরু হয়। এই অবাধপথগুলির দিক চতুর্দিকে  $4\pi$  ঘনকোণে সমভাবে বণ্টিত থাকে।  $\delta s$  তলটি এই  $\delta v$  আয়তনের যে কোন বিন্দুতে  $\frac{\delta s \cos \theta}{m}$  ঘনকোণ রচনা করে। সুতরাং আমরা ধরে নিতে পারি যে  $dv$  আয়তন থেকে উৎপন্ন অবাধপথগুলির  $\frac{\delta s \cos \theta}{4\pi r^2}$  অংশ  $\delta s$  অভিমুখে থাকবে। অর্থাৎ প্রতি একক সময়ে  $ndv \cdot \frac{\bar{c}}{\lambda} \cdot \frac{\delta s \cos \theta}{4\pi r^2}$  সংখ্যক অণু  $\delta s$  এর দিকে ধাবিত হবে।

কিন্তু এর সবগুলি  $\delta s$  তলে পৌঁছাতে পারবে কি?  $r$  দূরত্ব অতিক্রম করার সময় এর মধ্যে কিছু অণু আবার সংঘর্ষের ফলে পথ বিচ্যুত হবে এবং 9.7 সূত্র অনুযায়ী এগুলির  $e^{-\frac{r}{\lambda}}$  অংশ  $\delta s$  তলে পৌঁছাতে সক্ষম হবে। এই অণুগুলির মোট সংখ্যা একক সময়ে

$$dN = ndv \cdot \frac{\bar{c}}{\lambda} \cdot \frac{\delta s \cos \theta}{4\pi r^2} e^{-\frac{r}{\lambda}} \quad 9.10$$

এখানে আমরা যে  $\bar{c}$  রাশিটি ব্যবহার করেছি সেটি তাপীয় বেগের গড় মান। অণুর যৌথ গতিবেগ থাকলেও তার মান সাধারণত  $\bar{c}$  এর তুলনায় নগণ্য এবং সেটি  $\bar{c}$  কে প্রভাবিত করে না।

আমরা ধরে নেব, যে সব অণু  $dv$  আয়তনের মধ্যে সংঘর্ষের ফলে নতুন অবাধপথে চলতে থাকে, সেগুলি  $dv$  আয়তনের  $z$  নির্দেশাঙ্ক অনুযায়ী যৌথ গতিবেগ  $u_0 + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot z$  লাভ করে। কাজেই,  $dN$  সংখ্যক অণু (সূত্র 9.10) মোট

$$dP = m \left( u_0 + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot z \right) \cdot dN$$

পরিমাণ যৌথ গতিবেগজাত ভরবেগ একক সময়ে  $\delta s$  তলের মধ্য দিয়ে উপর থেকে নীচের দিকে বহন করে। এখানে  $z = r \cos \theta$  এবং এটি ধনাত্মক রাশি।

এবার  $(r, \pi - \theta, \phi)$  নির্দেশাঙ্কে  $dv$  এর সমান একটি অতিক্ষুদ্র আয়তন  $dv'$  কল্পনা করুন। এই আয়তন থেকেও  $dN$  সংখ্যক অণু একক সময়ে  $x-y$  তলের নীচে থেকে এসে  $\delta s$  তলে পৌঁছাবে। এবং আগের যুক্তি অনুযায়ী এই অণুগুলি

$$dP' = m \left( u_0 + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot z \right) \cdot dN$$

পরিমাণ যৌথ গতিবেগজাত ভরবেগ একক সময়ে  $\delta s$  তলের মধ্যে দিয়ে নীচ থেকে উপর দিকে বহন করে। তবে এক্ষেত্রে  $z = -r \cos \theta$  এবং এটি ঋণাত্মক রাশি।

$dv$  ও  $dv'$  থেকে আসা অণুগুলি একক সময়ে  $\delta s$  এর মধ্য দিয়ে মোট যে যৌথ ভরবেগ উপর থেকে নীচে বহন করে তার মান

$$\begin{aligned} dP - dp' &= m \left( u_0 + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot r \cos \theta \right) dN - m \left( u_0 - \frac{\partial u}{\partial z} \cdot r \cos \theta \right) dN \\ &= 2m \frac{\partial u}{\partial z} \cdot r \cos \theta dN \end{aligned}$$

এবার আমাদের  $\delta s$  তলের উপর ও নীচ থেকে আসা সব অণু একক সময়ে  $\delta s$  এর মধ্য দিয়ে যে যৌথ ভরবেগ  $\delta p$  বহন করে তার মান নির্ণয় করতে হবে। এজন্য আমরা 9.10 সূত্র থেকে  $dN$  এর মান বসিয়ে  $\delta s$  এর উপরে অবস্থিত সমগ্র আয়তনের জন্য  $(dP - dp')$  রাশির সমাকলন করব। এতে  $\delta s$  এর নীচের আয়তনও গণনার মধ্যে এসে যাবে কেননা আমরা প্রতি  $dv$  আয়তনের সঙ্গে তার  $x-y$  তলে প্রতিবিম্ব  $dv'$  আয়তনটিকে আগেই ধরে নিয়েছি। সুতরাং

$$\begin{aligned} \delta P &= \int (dP - dp') \\ &= 2m \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{n\bar{c}}{\lambda} \cdot \frac{\delta s}{4\pi} \int_{r=0}^{\infty} r e^{-\frac{r}{\lambda}} dr \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \end{aligned}$$

(এখানে আমরা  $dv = r^2 \sin \theta d\theta dr d\phi$  সূত্র ব্যবহার করেছি।)

$$\begin{aligned} &= 2m \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{n\bar{c}}{\lambda} \cdot \frac{\delta s}{4\pi} \cdot \lambda^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\pi \\ &= \frac{mn\bar{c}\lambda}{3} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \delta s \end{aligned}$$

9.11 সূত্র থেকে আপনি বুঝতে পারছেন গ্যাসের মধ্যে যৌথ গতিবেগের গতি (gradient) বজায় থাকলে তার বিপরীতমুখে সংশ্লিষ্ট যৌথ ভরবেগের প্রবাহ ঘটবে। এর ফলেই গ্যাসের এক স্তর সংলগ্ন স্তরের উপর স্পর্শক বল প্রয়োগ করে, যার মান স্তরের ক্ষেত্রফল ( $\delta s$ ) এর সমানুপাতী। গ্যাস বা তরলের এই ধর্মকেই আপনি সান্দ্রতা বলে জেনেছেন। সান্দ্রতার সংজ্ঞা অনুযায়ী  $\delta s$  তলের উপর প্রযুক্ত বল, অর্থাৎ একক সময়ে  $\delta s$  এর মধ্য দিয়ে পরিবাহিত যৌথ ভরবেগ  $\delta P = \eta \frac{\partial u}{\partial z} \delta s$  ( $\eta =$  গ্যাসের সান্দ্রতাক্ষ)। এই রাশিমালার সঙ্গে 9.11 সূত্রের তুলনা করলে পাবেন

$$\eta = \frac{mn\bar{c}\lambda}{3} = \frac{\rho\bar{c}\lambda}{3} \quad 9.12$$

এখানে  $\rho = mn$ , গ্যাসের ঘনত্ব।

11.12 সূত্রটি আমাদের কাছে গড় অবাধপথ নির্ণয়ের একটি নূতন পথ দেখায়। গ্যাসের সান্দ্রতাক্ষ পরীক্ষার মাধ্যমে বিভিন্ন চাপে ও উষ্ণতায় মাপা যায়। তা থেকে গড় অবাধপথের মানও নির্ণয় করা যায় কেননা 11.12 সূত্রের অন্য রাশিগুলি আমাদের জানা। এই সূত্র থেকে গ্যাসের চাপ ও উষ্ণতার সঙ্গে সান্দ্রতাক্ষের সম্পর্ক কেমন হবে তা কি আপনি বলতে পারেন? আসুন, এবার এই বিষয়টি পরীক্ষা করে দেখা যাক।

চাপ ও উষ্ণতার সঙ্গে সান্দ্রতাক্ষের সম্পর্ক

সান্দ্রতাক্ষের রাশিমালায়  $\lambda$  এর জায়গায়  $\frac{1}{\sqrt{2}\pi n\sigma^2}$  লিখলে আমরা পাই

$$\eta \propto \frac{m\bar{c}}{\sigma^2} \quad 9.13$$

এর থেকে আপনি চাপ ও উষ্ণতার সঙ্গে  $\eta$  এর সম্পর্ক বার করতে পারেন।

(ক) গ্যাসের উষ্ণতা স্থির থাকলে অণুর গড় বেগ  $\bar{c}$  বা ব্যাস  $\sigma$  স্থির থাকে। সুতরাং চাপ, ঘনত্ব বা সংখ্যাঘনত্বের উপর গ্যাসের সান্দ্রতাক্ষ নির্ভর করে না। গ্যাসের সান্দ্রতাক্ষের চাপনিরপেক্ষতা বিভিন্ন চাপে সান্দ্রতার পরিমাপ থেকে প্রমাণিত হয়েছে। তবে অতি অল্প চাপে, যখন অণুগুলির অন্য অণুর সঙ্গে সংঘর্ষ না হয়ে আধারের প্রাচীরের সঙ্গেই সংঘর্ষ বেশী হয়, তখন অবাধপথের সূত্রটি আর খাটে না। এজন্য অল্প চাপে সান্দ্রতাক্ষ কমতে দেখা যায়। আবার অতি উচ্চ চাপে অবাধপথের মান অণুর ব্যাসের সঙ্গে তুলনীয় হয় এবং স্বল্প পাল্লার অন্তরণুক (intermolecular) বলের প্রভাবে ভরবেগ  $\lambda$  অপেক্ষা কিছুটা বেশী দূরত্বে বাহিত হয়। এক্ষেত্রেও সান্দ্রতাক্ষের নির্ণীত মান প্রযোজ্য থাকে না।

(খ) 9.13 সূত্রে  $\bar{c}$  এবং  $\sigma^2$ , এই দুটি রাশিই উষ্ণতার উপর নির্ভরশীল। আপনি আগেই জানেন যে অণুর গড় বেগ  $\bar{c} = \sqrt{\frac{8kT}{m\pi}}$ । এছাড়া 9.2.2 অনুচ্ছেদে আপনি দেখেছেন যে  $\sigma^2$  রাশিটিকে  $\sigma_0^2 \left(1 + \frac{b}{T}\right)$  রূপে লেখা যায়। এখন আপনি 9.13 সূত্র থেকে লিখতে পারেন :

$$\eta \propto \frac{\sqrt{T}}{1 + \frac{b}{T}} \quad (T = \text{পরম উষ্ণতা})$$

9.14

যদি নির্দিষ্ট কোন উষ্ণতা  $T_0$  তে সান্দ্রতাক্ষের মান  $\eta_0$  হয়, তবে

$$\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{T}{T_0} \frac{1 + \frac{b}{T_0}}{1 + \frac{b}{T}}}$$

9.15

উষ্ণতার সঙ্গে সান্দ্রতাক্ষের পরিবর্তনের এই সূত্রটি (9.15) 'সাদারল্যান্ড সূত্র' নামে পরিচিত।

### অনুশীলনী 3

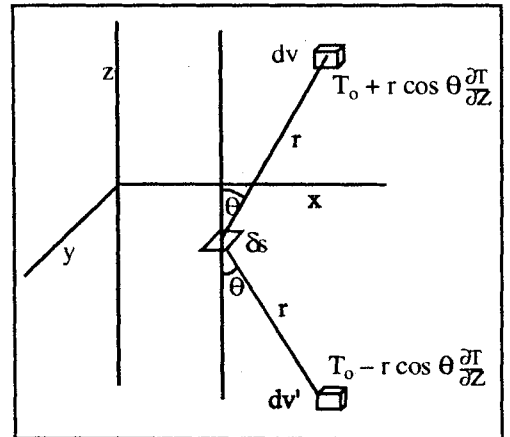
(i) 9.11 সূত্রটি নির্ণয় করতে আমরা  $r = 0$  থেকে  $r = \infty$  সীমায় সমাকলন করেছি। আধারের পরিসর সীমিত হওয়ার এই সমাকলনের উর্ধ্বসীমা  $\infty$  নেওয়া ঠিক হয়েছে কি?

(ii)  $\frac{\eta}{\sqrt{T}} - \frac{1}{T}$  লেখাচিত্রটি আঁকলে তার আকৃতি কেমন হবে ?

### 9.3.2 গ্যাসের তাপ পরিবাহিতা

আগের অনুচ্ছেদে আমরা ধরে নিয়েছিলাম যে গ্যাসের মধ্যে অণুর যৌথ গতিবেগ  $\frac{\partial u}{\partial z}$  হারে  $z$  নির্দেশাক্ষের সঙ্গে পরিবর্তিত হচ্ছে। এবার আমরা ধরে নেব যে গ্যাসের পরম উষ্ণতা  $T$   $z$  নির্দেশাক্ষের সঙ্গে  $\frac{\partial T}{\partial z}$  হারে বৃদ্ধি পায়। 9.6 চিত্রের অনুরূপ 9.7 চিত্রে অবস্থাটি দেখানো হয়েছে। এখানে  $z = 0$  নির্দেশাক্ষে  $\delta s$  তলে উষ্ণতা  $T_0$  এবং  $dv$  ও  $dv'$  আয়তন দুটিতে উষ্ণতা যথাক্রমে  $T_0 + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot r \cos \theta$  এবং  $T_0 - \frac{\partial T}{\partial z} \cdot r \cos \theta$ । প্রতিটি অণুর ভর  $m$  এবং

তাপধারণক্ষমতা (thermal capacity)  $mc_v$ , যেখানে  $c_v$  স্থির আয়তনে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ। আগের মত আমরা ধরে নেব যে  $dv$  বা  $dv'$  আয়তনের মধ্যে যে অণুর সংঘর্ষ হয় সেটি ঐ আয়তনের উষ্ণতা অনুযায়ী গতীয় শক্তি অর্জন করে। সুতরাং  $dv$  বা  $dv'$  আয়তন থেকে অবাধপথ শুরু করে যে  $dN$  সংখ্যক অণু (সূত্র 9.10)  $\delta s$  তলে পৌঁছায় সেগুলি যথাক্রমে  $\delta s$  এর উপর থেকে নীচের দিকে  $mc_v(T_0 + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot r \cos \theta) dN$  ও নীচ থেকে উপর



চিত্র 9.7

দিকে  $mc_v(T_0 - \frac{\partial T}{\partial z} r \cos \theta) dN$  পরিমাণ গতিশক্তি  $ds$  এর মধ্য দিয়ে বহন করে। এইভাবে মোট বাহিত তাপশক্তির পরিমাণ

$$\delta E = \int \left[ mc_v \left( T_0 + \frac{\partial T}{\partial z} r \cos \theta \right) - mc_v \left( T_0 - \frac{\partial T}{\partial z} r \cos \theta \right) \right] dN$$

$$= 2mc_v \frac{\partial T}{\partial z} \int r \cos \theta dN$$

$$= 2mc_v \frac{\partial T}{\partial z} \frac{n\bar{c}}{\lambda} \frac{\delta s}{4\pi} \int_0^\infty r e^{-\frac{r}{\lambda}} dr \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

( 9.10 সূত্রের  $dN$  এর রাশিমালা ব্যবহার করে)

$$= 2mc_v \frac{\partial T}{\partial z} \frac{n\bar{c}}{\lambda} \frac{\delta s}{4\pi} \lambda^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\pi$$

$$= \frac{mn\bar{c}\lambda}{3} \frac{\partial T}{\partial z} c_v \delta s$$

তাপ পরিবাহিতার সংজ্ঞা অনুযায়ী, গ্যাসের তাপ পরিবাহিতা  $k$  হলে  $\delta s$  তলের মধ্য দিয়ে একক সময়ে পরিবাহিত তাপশক্তির পরিমাণ  $\delta E = k \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \delta s$ ।

$\delta E$  এর দুই মানের তুলনা করে আপনি পাবেন

$$k = \frac{mn\bar{c}\lambda}{3} c_v = \eta c_v \quad 9.16$$

এই গণনায় একটি বিষয়ে আপনি আপত্তি তুলতে পারেন। আমরা ধরে নিয়েছি গ্যাসের উষ্ণতা সর্বত্র সমান নয়। অথচ সর্বত্র  $n$  ও  $\bar{c}$  সমান বলে ধরে নিয়েছি। আসলে  $dN$  এর রাশিমালায়  $e^{-\frac{r}{\lambda}}$  উৎপাদকটি থাকার ফলে  $dv$  বা  $dv'$  এর মত যে সব আয়তন  $\delta s$  থেকে গড় অবাধপথের অনেক বেশী গুণ দূরে অবস্থিত, সেগুলি থেকে প্রায় কোন অণুই  $\delta s$  তলে এসে পৌঁছায় না। সুতরাং  $\lambda$  এর কয়েকগুণ দূরত্বের মধ্যে উষ্ণতার পরিবর্তন যদি পরম উষ্ণতার তুলনায় উপেক্ষণীয় হয়, তবে  $n$  ও  $\bar{c}$  কে স্থির রাশি বলে ধরে নেওয়া যায়। এই শর্তটি  $\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \ll T$ , এভাবে লেখা যায়।

$k/\eta c_v$  রাশির মান :

$k = \eta c_v$  সূত্রটির সত্যতা পরীক্ষার দ্বারা  $k$ ,  $\eta$  ও  $c_v$  এর মান বার করে যাচাই করা যায়। 9.1 সারণীতে কয়েকটি গ্যাসের ক্ষেত্রে  $k / \eta c_v$  রাশির মান বার করা হল। 9.16 সূত্র অনুযায়ী এই মান সবক্ষেত্রেই 1 হওয়া উচিত।

## সারণী 9.1

0°C উষ্ণতায়  $k$ ,  $\eta$ ,  $c_v$ ,  $k/\eta c_v$  ও  $\varepsilon$  রাশির মান

গ্যাস	$k$ ( $10^{-2}\omega\text{m}^{-1}\text{k}^{-1}$ )	$\eta$ ( $\mu\text{N s m}^{-2}$ )	$c_v$ ( $\text{kJ kg}^{-1}\text{k}^{-1}$ )	$k/\eta c_v$	$\varepsilon$ $=\frac{1}{4}(\sigma\gamma-5)$
He	14.74	18.87	3.12	2.50	2.50
A	1.66	21.04	0.313	2.52	2.50
Ne	4.55	29.81	0.618	2.47	2.50
H <sub>2</sub>	17.42	8.50	10.13	2.02	1.92
N <sub>2</sub>	2.43	16.74	0.737	1.97	1.91
O <sub>2</sub>	2.45	19.26	0.659	1.93	1.89
CO <sub>2</sub>	1.47	13.80	0.641	1.67	1.68
N <sub>2</sub> O	1.54	13.62	0.649	1.74	1.68

সারণী থেকে আপনি বুঝতে পারবেন যে  $\frac{k}{\eta c_v}$  রাশির মান '1' এর চেয়ে নিঃসন্দেহে বড়। লক্ষ্য করে দেখুন, এক পরমাণুক গ্যাসের ক্ষেত্রে রাশিটির মান প্রায় 2.50 এবং গ্যাসে পরমাণুর সংখ্যা যত বাড়ে রাশিটির মান তত কমে। এখন আপনি নিশ্চয়ই সন্দেহ করছেন যে তাপপরিবাহিতার গণনায় নিশ্চয়ই কোন ভুল হয়ে থাকবে। আপনার সন্দেহ সঠিক। আসলে আমরা ধরে নিয়েছি যে প্রতিটি অণু  $c$  বেগে গমন করে এবং গড় পরিমাণ তাপীয় শক্তি  $mc_v(T_0 \pm \frac{\partial T}{\partial z} r \cos\theta)$  বহন করে। এখানেই আমাদের ভুল হয়েছে। নির্দিষ্ট উষ্ণতার গ্যাসেও অণুর বেগ বিভিন্ন হয়। অপেক্ষাকৃত দ্রুতগতির অণুর সংঘর্ষের হার অধিক, তাপীয় শক্তি অপেক্ষাকৃত বেশী এবং ঐ অণুগুলি অপেক্ষাকৃত দ্রুত তাদের তাপীয় শক্তি বহন করে। ধীরগতি অণু তেমনই অপেক্ষাকৃত কম তাপীয় শক্তি বহন করে এবং সেগুলির বহনের হারও কম। এর ফলে মোটের উপর অণুগুলির দ্বারা তাপশক্তি বহনের হার আমাদের গণনার তুলনায় অধিক হয়।

চ্যাপম্যান (Chapman) ও এনস্কগ (Enskog) গণনা করে দেখান যে অণুর কেবলমাত্র রৈখিক গতির জন্য  $\frac{k}{\eta c_v} = \varepsilon$  রাশির তত্ত্বগত মান হয়  $\frac{5}{2}$ । তবে অণুর ঘূর্ণন ও কম্পনজনিত তাপশক্তিও থাকতে পারে এবং এই প্রকার তাপশক্তি পরিবহনের ক্ষেত্রে  $\varepsilon$  এর মান আমাদের পূর্বের গণনা অনুযায়ী '1' ই হয়।

ধরা যাক অণুর রৈখিক গতিজনিত তিনটি স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা ছাড়াও ঘূর্ণন ও কম্পনের জন্য অতিরিক্ত স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা  $\beta$ । আপনি জানেন, শক্তির সমবিভাজন নীতি অনুযায়ী প্রতিটি স্বাতন্ত্র্যসংখ্যার সঙ্গে সংশ্লিষ্ট শক্তি গড়ে  $\frac{1}{2}kT$ । সুতরাং রৈখিক গতি ও অন্য প্রকার গতির জন্য আপেক্ষিক তাপের মান যথাক্রমে

$$c_t = \frac{1}{m} \frac{d}{dT} \left( \frac{3}{2} kT \right) = \frac{3}{2} \frac{k}{m}$$

$$\text{এবং } c_r = \frac{1}{m} \frac{d}{dT} \left( \frac{\beta}{2} kT \right) = \frac{\beta}{2} \frac{k}{m}$$

$$\therefore \text{মোট আপেক্ষিক তাপ } c_v = c_t + c_r = \frac{k}{2m} (3 + \beta) \quad 9.17$$

অনুরূপভাবে, মোট তাপ পরিবাহিতা দুই ধরনের তাপশক্তির পরিবাহিতার সমান, অর্থাৎ

$$k = k_t + k_r = \frac{5}{2} \eta c_t + \eta c_r = \frac{\eta}{2} (5c_t + 2c_r) = \frac{\eta k}{4m} (15 + 2\beta)$$

$$\text{সুতরাং } \frac{k}{\eta c_v} = \varepsilon = \frac{15 + 2\beta}{6 + 2\beta} \quad 9.18$$

$\beta$  রাশির মান, অর্থাৎ অণুর ঘূর্ণন ও কম্পনের স্বাভাবিক সংখ্যা অবশ্য আমরা সরাসরি পরীক্ষা করে নির্ণয় করতে পারি না। বরং এর সঙ্গে সংশ্লিষ্ট আর একটি রাশি, স্থির চাপ ও স্থির আয়তনে গ্যাসের দুই আপেক্ষিক তাপের অনুপাত  $\gamma$  কে পরীক্ষা দ্বারা নির্ণয় করা যায়। আমরা জানি,

$$c_p = c_v + \frac{R}{M} \quad (R = \text{গ্যাস ধ্রুবক, } 8.314 \text{ kJ k}^{-1} \text{ kmol}^{-1})$$

$$= c_v + \frac{k}{m} \quad (\text{কেননা } R = N_0 k, M = \text{আণবিক ভর} = N_0 m)$$

$$= \frac{k}{2m} (5 + \beta) \quad (9.17 \text{ সূত্র থেকে})$$

$$\therefore \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5 + \beta}{3 + \beta} \quad 9.19$$

9.18 এবং 9.19 সূত্র দুটি থেকে  $\beta$  অপনয়ন করলে আপনি পাবেন

$$\varepsilon = \frac{1}{4} (9\gamma - 5) \quad 9.20$$

9.1 সারণীর শেষ স্তম্ভে পরীক্ষালব্ধ  $\varepsilon$ -এর মান দেওয়া হয়েছে। মিলিয়ে দেখুন,  $k / \eta c_v$  এবং  $\varepsilon$  এর মানের মধ্যে সুন্দর সঙ্গতি রয়েছে।

চাপ ও উষ্ণতার সঙ্গে তাপ পরিবাহিতার সম্পর্ক

আপনি দেখেছেন যে তাপ পরিবাহিতা,  $k = \varepsilon \eta c_v$ । এর মধ্যে  $\varepsilon$  স্থির রাশি এবং আপেক্ষিক তাপ  $c_v$  চাপ ও উষ্ণতার উপর বিশেষ নির্ভর করে না। কাজেই তাপ পরিবাহিতা সাল্পতার মতই আচরণ করে।

সাধারণভাবে তাপপরিবাহিতা চাপের উপর নির্ভর করে না তবে অতি অল্প চাপে পরিবাহিতা হ্রাস পায়। গড় অবাধপথ তখন আধারের পরিসরের সঙ্গে তুলনীয় হয় এবং তাপের পরিবহনের পদ্ধতিই ভিন্ন হয়। অতি উচ্চ চাপে তাপের পরিচলনই প্রাধান্য লাভ করে এবং পরিবাহিতার মান সূক্ষ্মভাবে নির্ণয় করা যায় না। তবে আশা করা যায়, সাদ্রতার মত তাপ পরিবাহিতাও অতি উচ্চচাপে এক থাকবে না।

উষ্ণতা পরিবর্তিত হলে তাপ পরিবাহিতাও সাদ্রতার মত  $\sqrt{T}$  এর চেয়ে কিছুটা অধিক হারে পরিবর্তিত হয়। মোটামুটিভাবে বলা যায়, সাদ্রতার মত গ্যাসের তাপ পরিবাহিতার ব্যাখ্যা আণবিক তত্ত্ব থেকে সঠিকভাবেই পাওয়া যায়।

এবার একটি সহজ অনুশীলনীর উত্তর দিন।

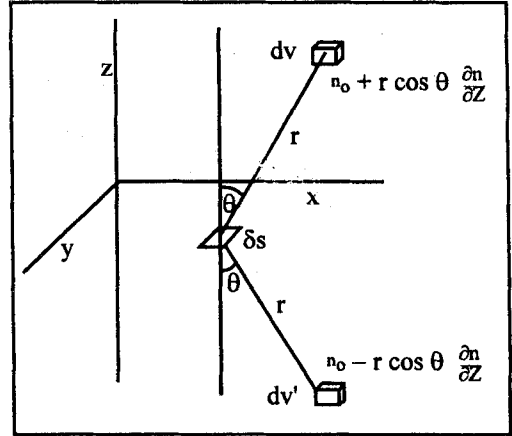
#### অনুশীলনী 4

কোন একটি গ্যাসের অণুর ঘূর্ণন স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা 3, কম্পন স্বাতন্ত্র্যসংখ্যা 1। ঐ গ্যাসের ক্ষেত্রে  $\epsilon$ -এর মান কত হবে ?

#### 9.3.3 গ্যাসের ব্যাপন

গ্যাসের সাদ্রতা ও তাপ পরিবাহিতার আলোচনায় আমরা ধরে নিয়েছি যে গ্যাসের সর্বত্র অণুর সংখ্যাঘনত্ব সমান থাকে, অর্থাৎ 9.10 সূত্রের  $n$  একটি ধ্রুবরাশি। এই সংখ্যাঘনত্ব যদি নির্দিষ্ট দিকে দূরত্বের সঙ্গে সমহারে পরিবর্তিত হয় তাহলে গ্যাস অধিক সংখ্যাঘনত্বের দিক থেকে অপেক্ষাকৃত অল্প সংখ্যাঘনত্বের দিকে প্রবাহিত হবে। এই অনুচ্ছেদে আমরা গ্যাসের এই প্রবাহের হার নিরূপণ করব।

ধরে নিই  $z = 0$  তলে অণুর ঘনত্বসংখ্যা  $n$  এর মান  $n_0$  এবং  $z$  অক্ষের দিক বরাবর এই রাশি  $\frac{\partial n}{\partial z}$  হারে বর্ধিত হয়। 9.8 চিত্রে  $dv$  ও  $dv'$  আয়তনের মধ্যে সংখ্যা ঘনত্বের মান যথাক্রমে  $n_0 + \frac{\partial n}{\partial z} \cdot r \cos \theta$  এবং  $n_0 - \frac{\partial n}{\partial z} \cdot r \cos \theta$ । 9.10 সূত্রে এই মানগুলি ব্যবহার করে পাওয়া যায়, একক সময়ে



চিত্র 9.8

$dv$  থেকে  $\delta s$  তলে আগত অণুর সংখ্যা

$$\delta n_1 = \left( n_0 + \frac{\partial n}{\partial z} \cdot r \cos \theta \right) dv \cdot \frac{\bar{c}}{\lambda} \cdot \frac{\delta s \cos \theta}{4 \pi r^2} e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

এবং  $dv'$  থেকে  $\delta s$  তলে আগত অণুর সংখ্যা

$$\delta n_2 = \left( n_0 - \frac{\partial n}{\partial z} \cdot r \cos \theta \right) dv' \cdot \frac{\bar{c}}{\lambda} \cdot \frac{\delta s \cos \theta}{4 \pi r^2} e^{-\frac{r}{\lambda}}$$



সুতরাং একক সময়ে  $dv$  ও  $dv'$  আয়তনগুলিতে সংঘর্ষের পর  $\delta s$  তলের মধ্য দিয়ে নিম্নাভিমুখী অণুর মোট সংখ্যা

$$\delta n_1 - \delta n_2 = 2 \frac{\partial n}{\partial z} \cdot r \cos \theta \cdot dv \cdot \frac{\bar{c}}{\lambda} \cdot \frac{\delta s \cos \theta}{4 \pi r^2} e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

পূর্বের মত এই রাশিকে সমাকলন করে আপনি একক সময়ে  $\delta s$  তলের মধ্য দিয়ে নিম্নগামী অণুর মোট সংখ্যা পাবেন :

$$\delta N = 2 \frac{\partial n}{\partial z} \cdot \frac{\bar{c}}{\lambda} \cdot \frac{\delta s}{4 \pi} \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} r \cos \theta \cdot \frac{\cos \theta}{r^2} \cdot e^{-\frac{r}{\lambda}} r^2 \sin \theta d\theta dr d\phi$$

$$= 2 \cdot \frac{\partial n}{\partial z} \cdot \frac{\bar{c}}{\lambda} \cdot \frac{\delta s}{4 \pi} \int_{r=0}^{\infty} r e^{-\frac{r}{\lambda}} dr \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{1}{3} \bar{c} \lambda \frac{\partial n}{\partial z} \cdot \delta s$$

9.21

গ্যাসের ব্যাপনাক্ষ  $D$ -এর সংজ্ঞা অনুযায়ী এই রাশি  $D \frac{\partial n}{\partial z} \delta s$  এর সমান। সুতরাং 9.21 সূত্র থেকে

$$D = \frac{1}{3} \bar{c} \lambda = \frac{\eta}{\rho}$$

9.22

কেননা 9.12 সূত্র অনুযায়ী সান্দ্রতাক্ষ  $\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{c} \lambda$ ।

এখানে আমরা কল্পনা করেছি যে গ্যাসের সর্বত্র উষ্ণতা সমান কিন্তু ঘনত্বসংখ্যা পরিবর্তিত হতে থাকায়, চাপ সর্বত্র সমান নয়। বরং গ্যাসের ব্যাপন চলতে থাকলে উচ্চ ঘনত্ব থেকে নিম্নঘনত্বের দিকে প্রবাহের ফলে ক্রমশ ঘনত্বসংখ্যা ও চাপ সর্বত্র সমান হয়ে যাবে।

### অন্তর্ব্যাপন (interdiffusion)

ব্যাপনসংক্রান্ত পরীক্ষায় একটি আধারের মধ্যে দুই প্রকার গ্যাস, A ও B একত্র থাকে এবং তাদের মোট চাপ ও উষ্ণতা সর্বত্র সমান থাকে। ধরে নিন, দুই প্রকার গ্যাসের ঘনত্বসংখ্যা, গড় অবাধপথ ও গড় গতিবেগ যথাক্রমে  $n_a, \lambda_a, \bar{c}_a$  এবং  $n_b, \lambda_b, \bar{c}_b$ । চাপ সমান থাকার ফলে মোট অণুর ঘনত্বসংখ্যা  $n_a + n_b$  সর্বত্র সমান হবে। সুতরাং  $z$ -অক্ষ বরাবর দুই প্রকার গ্যাসের ঘনত্বসংখ্যার পরিবর্তনের হার সমমান কিন্তু বিপরীতমুখী হবে, অর্থাৎ

$$\frac{\delta}{\delta z}(n_a + n_b) = 0, \quad \frac{\partial n_a}{\partial z} = -\frac{\partial n_b}{\partial z} = \frac{\partial n}{\partial z} \text{ ধরা যাক ।}$$

x - y তলে  $\delta s$  ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে একক সময়ে নিম্নগামী

$$A \text{ অণুর সংখ্যা } \delta N_a = \frac{1}{3} \bar{c}_a \lambda_a \frac{\partial n}{\partial z} \cdot \delta s$$

$$\text{এবং } B \text{ অণুর সংখ্যা } \delta N_b = -\frac{1}{3} \bar{c}_b \lambda_b \frac{\partial n}{\partial z} \cdot \delta s$$

অতএব উভয়প্রকার অণুর যে মোট সংখ্যা একক সময়ে  $\delta s$  তলের মধ্য দিয়ে নিম্নাভিমুখে যায় সেটি হল

$$\delta N_a + \delta N_b = \frac{1}{3} \frac{\partial n}{\partial z} (\bar{c}_a \lambda_a - \bar{c}_b \lambda_b) \delta s \quad 9.23$$

যদি  $\bar{c}_a \lambda_a = \bar{c}_b \lambda_b$  হয় তবে A অণুগুলি  $\delta s$  এর মধ্য দিয়ে যে হারে নীচে নামবে, B অণুগুলি সেই একই হারে  $\delta s$  এর মধ্য দিয়ে উঠে আসবে, ফলে গ্যাসের মধ্যে অণুর মোট ঘনত্বসংখ্যার কোন তারতম্য ঘটবে না। কিন্তু যদি তা না হয় ? সেক্ষেত্রে মিশ্র গ্যাসটি  $\delta s$  এর মধ্য দিয়ে একই দিকে প্রবাহিত হতে থাকবে এবং চাপের সমতা বিদ্বিত হবে। চাপের সমতা বজায় রাখতে গ্যাসের মিশ্রণ এক যৌথ গতিবেগে  $\delta s$  এর মধ্য দিয়ে প্রবাহিত হবে। ধরে নিন এই যৌথ গতিবেগ  $v$ । এই গতিবেগের ফলে  $vn_a \delta s$  সংখ্যক A অণু আর  $vn_b \delta s$  সংখ্যক B অণু  $\delta s$  এর মধ্য দিয়ে একক সময়ে প্রবাহিত হবে যাতে মোট অণুর প্রবাহ শূন্য হয়। 9.23 সূত্র ব্যবহার করে আমরা লিখতে পারি :

$$vn_a \delta s + vn_b \delta s + \frac{1}{3} \frac{\partial n}{\partial z} (\bar{c}_a \lambda_a - \bar{c}_b \lambda_b) \delta s = 0$$

যার থেকে  $v$  এর মান পাওয়া যাবে :

$$v = -\frac{\frac{\partial n}{\partial z} \bar{c}_a \lambda_a - \bar{c}_b \lambda_b}{3(n_a + n_b)} \quad 9.24$$

আপনি যদি কেবলমাত্র A অণুর  $\delta s$  এর মধ্য দিয়ে নিম্নমুখী প্রবাহের হার জানতে চান তো সেটি হবে :

$$\begin{aligned} & vn_a \delta s + \frac{1}{3} \frac{\partial n}{\partial z} \cdot \bar{c}_a \lambda_a \delta s \\ &= \frac{n_a \bar{c}_b \lambda_b + n_b \bar{c}_a \lambda_a}{3(n_a + n_b)} \cdot \frac{\partial n}{\partial z} \cdot \delta s \end{aligned} \quad 9.25$$

B অণুর উর্ধ্বমুখী প্রবাহের হারও একই হবে।

এখানে A ও B গ্যাস দুটি ব্যাপনের ফলে পরস্পরের মধ্যে ছড়িয়ে পড়ছে। এই ধরনের ব্যাপনকে 'অন্তর্ব্যাপন' (interdiffusion) বলে।  $D_{ab}$  যদি B গ্যাসের মধ্যে A গ্যাসের অন্তর্ব্যাপনের গুণাঙ্ক বা অন্তর্ব্যাপনাঙ্ক হয় তবে 9.25 সমীকরণের রাশিমালা  $D_{ab} \frac{\partial n}{\partial z} \delta s$  এর সমান। অর্থাৎ

$$D_{ab} = \frac{n_a \bar{c}_b \lambda_b + n_b \bar{c}_a \lambda_a}{3(n_a + n_b)} = D_{ba} \quad 9.26$$

অন্তর্ব্যাপনাঙ্কের এই সূত্র মেয়ারের (Meyer) সূত্র নামে পরিচিত।

গ্যাসের চাপ ও উষ্ণতার সংগে ব্যাপনাঙ্কের সম্পর্ক

আপনি 9.22 সূত্র থেকে বুঝতে পারছেন যে ব্যাপনাঙ্ক  $\tau \lambda$  এর সমানুপাতী। নির্দিষ্ট উষ্ণতায়  $\tau$  স্থির থাকে কিন্তু গড় অবাধপথ  $\lambda$  চাপের ব্যস্তানুপাতী হয়। সুতরাং আশা করা যায় যে ব্যাপনাঙ্ক ও চাপের ব্যস্তানুপাতী হবে। এটি পরীক্ষার দ্বারাও প্রমাণিত হয়েছে।

আমরা আগেই দেখেছি যে  $\tau$  এবং  $\lambda$ , উভয়ই উষ্ণতার উপর নির্ভরশীল। গ্যাসের উষ্ণতা  $T^\circ K$  হলে  $\tau \propto \sqrt{T}$  এবং নির্দিষ্ট চাপে গড় অবাধপথ

$$\lambda \propto \frac{T}{1 + \frac{b}{T}}$$

[ কেননা  $\lambda \propto \frac{1}{n}$  এবং  $n \propto \frac{P}{T}$ । এছাড়া  $\sigma^2 \propto \left(1 + \frac{b}{T}\right)$  ]

সুতরাং ব্যাপনাঙ্ক  $T^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{b}{T}\right)^{-1}$  এর সমানুপাতী হবে বলে আশা করা যায়। পরীক্ষা করেও দেখা যায়, ব্যাপনাঙ্ক নিরপেক্ষ উষ্ণতার সঙ্গে  $T^{3/2}$  এর চেয়ে দ্রুত হারে পরিবর্তিত হয়। সুতরাং পরীক্ষার ফল ব্যাপনাঙ্কের প্রত্যাশিত পরিবর্তনকে সমর্থন করে।

ব্যাপনাঙ্ক সম্বন্ধীয় এই আলোচনার সঙ্গে আমরা পরিবহণ প্রক্রিয়া বিষয়ে আলোচনাও শেষ করছি। এবার আপনি একটি অনুশীলনীর উত্তর দিন।

### অনুশীলনী 5

নীচের উক্তিগুলি সত্য না মিথ্যা, তা বাস্তবের মধ্যে লিখুন :

- ক্লোরিন গ্যাসে 35 ও 37 ভরসংখ্যার যে দুটি আইসোটোপ থাকে সেগুলির ব্যাপনাঙ্ক একই হবে।
- ব্যাপন একটি অপ্রত্যাবর্তক (irreversible) ঘটনা।

iii) ব্যাপনাক্ষ গ্যাসের নির্দিষ্ট উষ্ণতায় চাপের ব্যস্তানুপাতী হয়।



iv) ব্যাপনাক্ষ ও সান্দ্রতাক্ষের একক একই।



v) দুই প্রকার গ্যাসের অন্তর্ব্যাপনের ফলে সেগুলির ঘনত্বসংখ্যা ক্রমশ গ্যাসের সমগ্র আয়তনে সমান হয়ে যায়।



## 9.4 সারাংশ :

এই এককের প্রথমেই আমরা গ্যাস অণুর গড় অবাধপথ সম্বন্ধে আলোচনা করেছি। এই প্রসঙ্গে গড় অবাধপথের সংজ্ঞা দেওয়া ছাড়াও অণুর ঘনত্বসংখ্যা ও ব্যাসের হিসাবে গড় অবাধপথের তাত্ত্বিক মান নির্ণয় করা হয়েছে। আপনি দেখেছেন যে এই তাত্ত্বিক মান নির্ণয়ে অণুগুলির গতিবেগ সম্বন্ধে কিছু সরলীকরণ স্বীকার করলেও গড় অবাধপথের নির্ণীত রাশিমালা মোটামুটিভাবে সঠিক হয়। গ্যাসের চাপ ও উষ্ণতার সঙ্গে গড় অবাধপথ কীভাবে পরিবর্তিত হয় এবং গড় অবাধপথের দৈর্ঘ্যের বন্টন কেমন হয়, এগুলির সঙ্গে গড় অবাধপথের মান নির্ণয়ের একটি পরীক্ষাও এখানে বর্ণনা করা হয়েছে।

পরিবহণ প্রক্রিয়া বলতে গ্যাসের অণুর যৌথগতির সঙ্গে সংশ্লিষ্ট ভরবেগের পরিবহণ, অণুর তাপীয় শক্তির পরিবহণ এবং অধিক ঘনত্ব থেকে অল্প ঘনত্বের দিক অভিমুখে অণুর প্রবাহ বোঝায়। এই ঘটনাগুলি যথাক্রমে গ্যাসের সান্দ্রতা, তাপ পরিবাহিতা ও ব্যাপনের জন্ম দেয়। এগুলির ব্যাখ্যায় অণুর গড় অবাধপথ ও তার বন্টনের ধারণা অত্যন্ত গুরুত্ব পূর্ণ এবং এজন্যই এককের প্রথমে গড় অবাধপথ সম্বন্ধে বিশদ আলোচনা করা হয়েছে।

তিন ধরনের পরিবহণ প্রক্রিয়া সম্বন্ধে এখানে আমরা বিস্তৃত আলোচনা করেছি এবং গ্যাসের সংশ্লিষ্ট ধর্ম সান্দ্রতা, তাপ পরিবাহিতা ও ব্যাপনের হারের তাত্ত্বিক মান নির্ণয় করেছি। চাপ ও উষ্ণতার সঙ্গে এই ধর্মগুলির সম্পর্কও এই এককে বর্ণিত হয়েছে।

মোটের ওপর, গ্যাসের একটি সরল যান্ত্রিক চিত্রের মাধ্যমে পরিবহণ প্রক্রিয়াগুলির পরিমাণগত বিশ্লেষণই এই এককের উপজীব্য বিষয়। এই বিশ্লেষণে লব্ধ ফলের সঙ্গে পরীক্ষালব্ধ ফলের সুসঙ্গতি নিশ্চয়ই আপনাকে সন্তুষ্ট করতে পেরেছে।

## 9.5 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি :

1. কোন একটি গ্যাসের প্রতিটি অণু একই বেগে চলে ধরে নিয়ে অণুর গড় অবাধপথের রাশিমালা নির্ণয় করুন। ম্যাক্সওয়েলীয় বেগবন্টন সূত্র ধরে নিলে এই রাশিমালা কী পরিবর্তন হত ?
2. প্রমাণ করুন যে গড় অবাধপথের দৈর্ঘ্য চাপের ব্যস্তানুপাতী। গড় অবাধপথ উষ্ণতার উপর স্বল্প পরিমাণে নির্ভরশীল। এর কারণ কী ?

3. গ্যাসের সান্দ্রতাক্ষের রাশিমালা নির্ণয় করুন এবং চাপ ও উষ্ণতার সঙ্গে সান্দ্রতাক্ষ কীভাবে নির্ভর করে তা ব্যাখ্যা করুন।
4. গ্যাসের মধ্যে উষ্ণতার সমতা না থাকলে কীভাবে তাপের পরিবহণ ঘটে? গ্যাসের তাপ পরিবাহিতার রাশিমালা নির্ণয় করুন।
5. গ্যাসের তাপ পরিবাহিতা  $k$ , সান্দ্রতাক্ষ  $\eta$  ও আপেক্ষিক তাপ  $c_v$  এর মধ্যে সম্পর্ক  $K = \eta c_v$  কি পরীক্ষা দ্বারা সমর্থিত হয়? সূত্রটিকে কীভাবে সংশোধন করলে এটি পরীক্ষার ফলের সঙ্গে সুসঙ্গত হয়?
6. গ্যাসের ব্যাপন ও অন্তর্ব্যাপন কাকে বলে? ব্যাপনাক্ষ ও সান্দ্রতাক্ষের মধ্যে সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠা করুন।
7.  $0^\circ\text{C}$  ও  $100^\circ\text{C}$  উষ্ণতায় হিলিয়াম গ্যাসের সান্দ্রতাক্ষ বায়ুমণ্ডলীয় চাপে  $18.7$  ও  $23.2 \mu\text{Nsm}^{-2}$ । ঐ গ্যাসের ক্ষেত্রে সাদারল্যাণ্ড সূত্রের 'b' রাশির মান বার করুন।
8. কোন একটি গ্যাসের মধ্যে অণুর গড় অবাধপথ  $1 \text{ mm}$ ।  $50\%$  অবাধপথ কোন্ দৈর্ঘ্যের মধ্যে থাকবে? কত শতাংশ অবাধপথ  $4.6 \text{ mm}$  অপেক্ষা দীর্ঘ হবে?
9.  $\text{CO}_2$  ও  $\text{N}_2\text{O}$  গ্যাসের পরস্পরের মধ্যে অন্তর্ব্যাপন ঘটলে সেক্ষেত্রে মেয়ারের সূত্র (9.26) কীভাবে লিখবেন? এই অণুদুটির আণবিক ভর ও আকার সমান।

## 9.6 উত্তরমালা :

### অনুশীলনী 1

- (i)  $27^\circ\text{C}$  বা  $300 \text{ k}$  উষ্ণতায় ও প্রমাণ চাপে নাইট্রোজেন অণুর সংখ্যাঘনত্ব

$$n = \frac{6.022 \times 10^{26} / \text{kmol}}{22.4 \text{ m}^3 / \text{kmol}} \cdot \frac{273}{300} = 2.45 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

$$\begin{aligned} \text{সূত্রাং গড় অবাধপথ } \lambda &= \frac{1}{\sqrt{2} \pi n \sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \times 2.45 \times 10^{25} \times (0.37 \times 10^{-9})^2} \\ &= 6.7 \times 10^{-8} \text{ m} \end{aligned}$$

- (ii) অবাধপথগুলির  $e^{-1}$  অংশ  $\lambda$  এর চেয়ে বড় এবং  $e^{-2\lambda}$  অংশ  $2\lambda$  এর চেয়ে বড় হয়। সূত্রাং  $\lambda$  ও  $2\lambda$  সীমার মধ্যে থাকে

$$(e^{-1} - e^{-2}) \text{ অংশ} = (0.368 - 0.135) \text{ অংশ} = 23.3\%$$

## অনুশীলনী ২

- (i) অনুশীলনী ১ এর প্রথম প্রশ্নের উত্তর থেকে বুঝতে পারছেন যে প্রমাণ চাপে গড় অবাধপথ অত্যন্ত ক্ষুদ্র হয়। অথচ বর্ণের পরীক্ষায় কাচের পাতগুলির মধ্যে ফাঁক ছিল 1 cm এবং পরীক্ষার সাফল্যের জন্য গড় অবাধপথের দৈর্ঘ্য ঐ ফাঁকের সঙ্গে তুলনীয় হওয়া প্রয়োজন। এ জন্যই পরীক্ষাটি অল্পচাপে করতে হয়েছিল।
- (ii) রূপার অণুগুলি প্রচুর গতিশক্তি বহন করে কাচের পাতে আঘাত করে। কাচের পাতগুলি হিমায়িত না রাখলে সেগুলি উত্তপ্ত হবে এবং রূপার অণুগুলি পাতের উপর প্রলেপ সৃষ্টি না করে সেগুলি থেকে বাষ্পায়িত হবে। এই পরীক্ষার সাফল্যের জন্য প্রতিটি রূপার অণু কাচের পাতে আপতিত হওয়ার পর পাতের উপর স্থায়ীভাবে আটকে থাকা প্রয়োজন, তাই পাতগুলিকে হিমায়িত রাখতে হয়।

## অনুশীলনী ৩

- (i) হ্যাঁ, কেননা সমাকলের মধ্যে  $e^{-\frac{r}{\lambda}}$  রাশিটি থাকায় যখন  $r \gg \lambda$ , তখন সমাকলটির মান নগণ্য হয়। সুতরাং  $r$  যখন আধারের পরিসরের চেয়ে বড় তখন সমাকলের মান শূন্য ধরে নেওয়া যায়। এর ফলে  $r$  এর সীমা  $\infty$  ধরলেও সমাকলটির মানে কোন হেরফের হয় না।
- (ii) 9.14 সূত্র থেকে

$$\frac{\eta}{\sqrt{T}} = K \left(1 + \frac{b}{T}\right)^{-1} \cong K \left(1 - \frac{b}{T}\right) \quad (k = \text{ধ্রুবক})$$

লেখা যায় কেননা  $\frac{b}{T}$  রাশিটি 1 এর তুলনায় ছোট। সুতরাং  $\frac{\eta}{\sqrt{T}} - \frac{1}{T}$  লেখচিত্রটি সরলরেখা হবে এবং তার নতি নেগেটিভ হবে।

## অনুশীলনী ৪

এক্ষেত্রে  $\beta = 3 + 1 = 4$ । 9.18 সূত্র থেকে  $\varepsilon = \frac{15 + 2\beta}{6 + 2\beta} = \frac{23}{14} = 1.64$

## সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. 9.2.1 অনুচ্ছেদে এর উত্তর পাবেন।
2. 9.2.2 অনুচ্ছেদ দেখুন।
3. 9.3.1 অনুচ্ছেদ দেখুন।
4. ও 5.9.3.2. অনুচ্ছেদ দেখুন।
6. 9.3.3 অনুচ্ছেদ দেখুন।

7. 9.15 সূত্রে  $T_0 = 273$ ,  $T = 373$ ,  $\eta_0 = 18.7$  একক ও  $\eta = 23.2$  একক মান বসিয়ে

$$23.2 = 18.7 \sqrt{\frac{373}{273} \frac{1 + \frac{b}{273}}{1 + \frac{b}{373}}}$$

$$\therefore 1 + \frac{b}{273} = 1.061 \left( 1 + \frac{b}{373} \right)$$

বা  $b = 75$  k.

8. ধরা যাক  $e^{-\frac{x}{\lambda}} = 0.50$ । এক্ষেত্রে  $x = -\ln(0.50) \times \lambda = 0.69\lambda$  সুতরাং 50% অবাধপথ  $0.69\lambda = 0.69$  mm এর মধ্যে থাকবে।

আবার  $e^{-4.6\lambda/\lambda} = e^{-4.6} = .01$ , সুতরাং 1 শতাংশ অবাধপথ 4.6 mm অপেক্ষা দীর্ঘ হবে।

9. এক্ষেত্রে ধরতে পারেন দুই গ্যাসের ক্ষেত্রেই গড় বেগ  $\bar{c}$ , গড় অবাধপথ  $\lambda$ ।

$$\text{সুতরাং } D_{\text{CO}_2, \text{N}_2\text{O}} = \frac{n(\text{N}_2\text{O})\bar{c}\lambda + n(\text{CO}_2)\bar{c}\lambda}{3[n(\text{N}_2\text{O}) + n(\text{CO}_2)]}$$

$$= \frac{1}{3}\bar{c}\lambda$$

অন্তর্ব্যাপনাক্ষটি এক্ষেত্রে অনেক সরল রূপ গ্রহণ করে।

## একক 10 □ ব্রাউনীয় গতি

### গঠন

- 10.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য
- 10.2 ব্রাউনীয় গতির আবিষ্কার
- 10.3 অভিকর্ষক্ষেত্রে ব্রাউনীয় কণার বণ্টন
  - 10.3.1 পেরার পরীক্ষা
- 10.4 রৈখিক ব্রাউনীয় গতি বিশ্লেষণ
  - 10.4.1 লাজভাঁর পদ্ধতি
  - 10.4.2 আইনস্টাইনের পদ্ধতি
- 10.5 গ্যাসে ব্রাউনীয় গতি
- 10.6 ব্রাউনীয় কণার কৌণিক গতি
- 10.7 সারাংশ
- 10.8 প্রশ্নাবলি
- 10.9 উত্তরমালা

### 10.1 প্রস্তাবনা

পূর্ববর্তী দুটি একক 9 এবং 8 -এ আপনারা দেখেছেন কিভাবে গ্যাসের গভীয় তত্ত্বের সাহায্যে গ্যাসের অনেক ধর্ম ও আচার আচরণের বুদ্ধিগ্রাহ্য ব্যাখ্যা পাওয়া সম্ভব হয়েছে। নানা পরীক্ষার মাধ্যমে গ্যাসের যে সূত্রগুলি পাওয়া গিয়েছিল তাদের তাত্ত্বিক প্রমাণ দেওয়া গেছে এই তত্ত্বের সাহায্যে। গ্যাসের মধ্যে নানা পরিবহণ প্রক্রিয়ার ক্ষেত্রে এই তত্ত্বের প্রয়োগে যে সব গুণাঙ্কগুলি পাওয়া যাচ্ছে তাদের তাত্ত্বিক মান পরীক্ষালব্ধ মানের প্রায় সমান। অণুগতিতত্ত্বের এই সাফল্যই নিঃসন্দেহে তত্ত্বের মূল অঙ্গীকারগুলির সমর্থক প্রমাণ। গ্যাসের আণবিক গঠন ও অণুর অক্রম গতি — গভীয় তত্ত্বের এই মূল দুটি ধারণার স্বপক্ষে কিছু প্রাকৃতিক ঘটনাবলীকেও পরোক্ষ প্রমাণ হিসাবে উপস্থাপিত করা হয়। দ্রবণ, বাষ্পায়ন, স্ফুটন, ব্যাপন ইত্যাদি ঘটনার ব্যাখ্যা হিসাবে পদার্থের ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র কণায় ভেঙে যাওয়ার ও কণাগুলির গতির কথা বলা হয়। তা সত্ত্বেও, গ্যাসের অণুগুলিকে দেখা যায় না এবং অণুর যে অবিরাম গতি তারও চাক্ষুষ প্রমাণ অতি শক্তিশালী অণুবীক্ষণ যন্ত্রের সাহায্যেও করা যায় না বলে একটা অস্বস্তি ও অবিশ্বাসের অবকাশ থেকে যায়। এমনকি, একসময় কিছু প্রখ্যাত বিজ্ঞানীও অণুর ধারণাকে কল্পনা বলে মনে করতেন এবং আণবিক গঠনের সাহায্যে পদার্থের আচার-আচরণ ব্যাখ্যা করার বিষয়টিকে কল্পকাহিনী বলে অ্যাখ্যা দিতেন।



ঘটনাচক্রে, 1827 সালে উদ্ভিদবিদ রবার্ট ব্রাউন সর্বপ্রথম অণুবীক্ষণদৃশ্য কিছু ক্ষুদ্র বস্তুকণার গতি প্রত্যক্ষ করে অণু এবং অণুগতির অস্তিত্ব সম্বন্ধে আমাদের অবহিত করেন। তিনি জলের মধ্যে প্রলম্বিত ফুলের পরাগরেণুর উপর আলো ফেলে তাদের অণুবীক্ষণে দেখছিলেন। তিনি সন্নিহনে লক্ষ্য করলেন যে রেণুগুলি অবিরাম ইতস্ততঃ সঞ্চরণ করেই চলেছে এবং গতি সম্পূর্ণ এলোমেলো ও অনিয়মিত। এই বিশৃঙ্খল গতির নামকরণ হয় — ব্রাউনীয় গতি। পদার্থবিদ্যায় এই ব্রাউনীয় গতির গুরুত্ব সমধিক বলে পরবর্তী অংশে এই গতির আবিষ্কার ও তার বৈশিষ্ট্য সম্বন্ধে আলোচনা করা হবে।

প্রকৃতপক্ষে ব্রাউনীয় কণাকে তরল বা গ্যাসের সঙ্গে তাপীয় সাম্যে অবস্থিত আদর্শ গ্যাসের অণু হিসাবে দেখা হয়। তরল বা গ্যাসের মধ্যে প্রলম্বিত ক্ষুদ্র কণার মধ্যে এইরূপ গতি প্রত্যক্ষ করা যায়। সাধারণ দৃশ্যমান বস্তুর ক্ষেত্রে গ্যাস বা তরলের অণুগুলি চতুর্দিক থেকে আঘাত করার ফলে যে ভরবেগ লব্ধ হয় তা অতি সামান্যই। বস্তুর ভর বেশি বলে প্রায় কোন ত্বরণই উৎপন্ন না হলে — বা হলেও তা ইন্দ্রিয়গ্রাহ্য নয়। আণবিক ও বৃহৎ — এই দুই বস্তুর মাঝামাঝি বস্তুকণার ক্ষেত্রে অন্য ফলাফল হয়। প্রলম্বিত বস্তুকণার ব্যাস  $10^{-3}$  থেকে  $10^{-5}$  সেমি-র মধ্যে হলে (যেমন কলয়েড কণা) তরল বা গ্যাস অণুর চারদিকের আঘাতে একটি অপ্রতিমিত লব্ধ ভরবেগ কোনদিকে পাওয়া যায় — ফলে গতির সঞ্চারণ ঘটে প্রলম্বিত কণার মধ্যে। এই গতি গ্যাসের অণুর তাপীয় গতির সমতুল্য বলে ধরা যেতে পারে। তুলনায় এই গতির মান খুব কম। প্রলম্বিত বস্তুকণা নিজস্ব আকার নির্বিশেষে গড়ে  $\frac{1}{2} KT$  রৈখিক গতিশক্তি পায়। কণার ব্যাস  $10^{-5}$  সেমি ধরলে গণনায় তার বেগ দাঁড়ায় প্রায় 1 সেমি / সেকেন্ড। আধ মিনিটের সময়কালে তরলের মধ্যে কণাটির মূল গড় বর্গ বেগ হয় প্রায়  $10^{-3}$  সেমি। দেখা যাচ্ছে, তরলের মধ্যে কণার বেগ সাধারণ গ্যাস অণুর মূল গড় বর্গ বেগের তুলনায় অতি সামান্য। অবশ্য কণার দৃশ্যমান পথটি কিন্তু অসংখ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র আঁকাবাঁকা সরণের সমষ্টি বা লব্ধি। এই ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরণকালে যে গতিবেগ তা কিন্তু কম নয়। এত দ্রুত কণার গতিবেগ এবং সরণ পরিবর্তিত হয় যে কোন ক্ষুদ্র সরণ প্রত্যক্ষ করা যায় না। একে বিশৃঙ্খল বা এলোমেলো হাঁটা (random walk) -র সঙ্গে তুলনা করা যেতে পারে। আমরা অণুবীক্ষণে কেবলমাত্র নির্দিষ্ট সময়ে একটি দিকে লব্ধ সরণটি প্রত্যক্ষ করি। কণার এই বিশৃঙ্খল গতির কারণেই ব্রাউনীয় কণাকে আদর্শ গ্যাস অণুর প্রতিনিধি বলে ভাবা যেতে পারে।

ব্রাউনীয় কণার সমাবেশকে একটি আদর্শ গ্যাসের সঙ্গে তুলনা করলে নিশ্চয়ই গ্যাসের অন্যান্য ধর্ম ব্রাউনীয় কণামণ্ডলে পাওয়া উচিত। অবশ্যই তা পাওয়া যায়। একটি সরু খাড়া নলে তরলের মধ্যে প্রলম্বিত ব্রাউনীয় কণার উচ্চতার সঙ্গে বটন গ্যাসীয় বায়ুমণ্ডলের সূচকীয় সূত্র মেনে চলে। বিজ্ঞানী জঁ পেরাঁ এক পরীক্ষায় উচ্চতার সঙ্গে ব্রাউনীয় কণার ঘনত্বসংখ্যার পরিবর্তনই শুধু প্রমাণ করেননি, তিনি ব্রাউনীয় কণা ও গ্যাস অণুর আচরণগত সাদৃশ্য থেকে অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা প্রায় নির্ভুলভাবে বার করেন।

ব্রাউনীয় গতির আবিষ্কারের প্রায় 75 বছর পর বিজ্ঞানী আইনস্টাইন গভীর তত্ত্বের প্রয়োগে ব্রাউনীয় গতির তাত্ত্বিক ব্যাখ্যা দিতে সমর্থ হন। তিনি দেখান, নির্দিষ্ট সময়ের অবকাশে কোন ব্রাউনীয় কণার সরণের বর্গের গড় মান অতিক্রান্ত সময়ের সমানুপাতিক। পেরাঁ, মিলিক্যান এবং অন্যান্যেরা পরীক্ষা করে এই সূত্র থেকে অ্যাভোগাড্রো সংখ্যার মান নির্ণয় করেন। ব্রাউনীয় কণার রৈখিক গতি নিয়ে বিজ্ঞানী স্মলুকভস্কি,

লাঁজভাঁরাও তত্ত্বগত আলোচনা করেন। বস্তুত, এদের তত্ত্ব ও নানা পরীক্ষার ফলাফল প্রমাণ করে যে ব্রাউনীয় গতিই গভীর তত্ত্বের সত্যতার পক্ষে সবচেয়ে জোরালো প্রমাণ। পরবর্তীকালে ব্রাউনীয় গতির তত্ত্ব অনেক বিশৃঙ্খল গতির ক্ষেত্রে সার্থকভাবে প্রয়োগ করা হয়েছে।

## উদ্দেশ্য

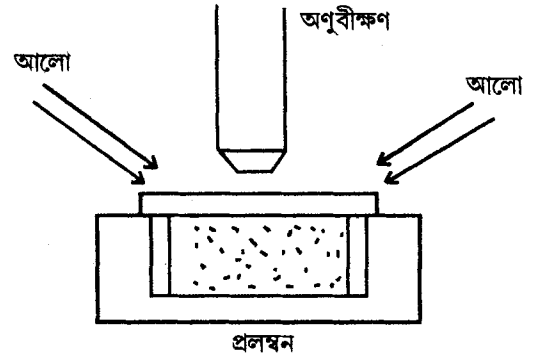
এই এককটি পাঠের পরে আপনারা জানবেন

- ব্রাউনীয় গতির আবিষ্কার ও তার বৈশিষ্ট্য
- অভিকর্ষক্ষেত্রে উচ্চতার সঙ্গে ব্রাউনীয় কণার ঘনত্বসংখ্যার পরিবর্তন এবং জাঁ পেরার পরীক্ষার গুরুত্ব।
- ব্রাউনীয় কণার রৈখিক গতি সম্বন্ধে আইনস্টাইন, লাঁজভাঁ প্রমুখ বিজ্ঞানীর তত্ত্ব।
- ব্রাউনীয় কণার অন্যান্য দৃষ্টান্ত এবং তাদের উপর পরীক্ষা।

## 10.2 ব্রাউনীয় গতির আবিষ্কার

ব্রিটিশ উদ্ভিদবিজ্ঞানী রবার্ট ব্রাউন জলে প্রলম্বিত ফুলের পরাগরেণু নিয়ে পরীক্ষা করার সময় একটি চমকপ্রদ বিষয় লক্ষ্য করেন। প্রলম্বনের উপর পাশ থেকে জোরালো আলো ফেলে খুব শক্তিশালী অণুবীক্ষণ যন্ত্র দিয়ে ব্রাউন দেখলেন, পরাগরেণুগুলি এলোমেলো-ভাবে অবিরাম ছুটে বেড়াচ্ছে। মনে হয় যেন জীবিত প্রাণীর মত পরাগরেণুগুলি জলের মধ্যে নেচে বেড়াচ্ছে। নিশ্চিত হওয়ার জন্য তিনি জলকে ফুটিয়ে আবার পরীক্ষা করেও একই গতি দেখলেন। কণাগুলি কখনও উঠছে, কখনও নীচে যাচ্ছে, কখনও ঘুরপাক খাচ্ছে। এক কথায়, কণাগুলি যেন উদ্দাম, বন্য নৃত্য করছে। থামার কোন লক্ষণ কণাগুলির ক্ষেত্রে দেখা যাচ্ছে না।

পরবর্তীকালে দেখা গেল, জলের মধ্যে প্রলম্বিত পরাগরেণুর এই গতি বিশেষ কোন ঘটনা নয়। বস্তুত, কোন তরল এমনি কি, গ্যাসে প্রলম্বিত সূক্ষ্ম সূক্ষ্ম কণার ক্ষেত্রে এইরূপ বিশৃঙ্খল গতি প্রত্যক্ষ করা যায়। কলয়েড দ্রবণের ক্ষেত্রে অণুবীক্ষণে এই চিরন্তন গতি সহজেই দৃষ্টি গোচর হয়। জল বা গ্যাসের ক্ষেত্রে কণার ব্যাস  $10^{-5}$  –  $10^{-3}$  সেমি হলে এই গতি দেখা যায়। আবিষ্কার্তার নামে এই গতিকে ব্রাউনীয় গতি এবং কণাকে ব্রাউনীয় কণা বলা হয়।



চিত্র 10.1

পরবর্তীকালে বিভিন্ন বিজ্ঞানী ব্রাউনীয়গতি পর্যবেক্ষণ, পর্যালোচনা করে নিম্নলিখিত তথ্যগুলি সংগ্রহ করেন।

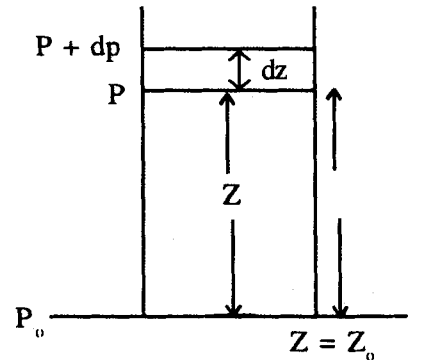
- এই গতি অবিরাম, চিরন্তন ও অনিয়মিত। এই গতি স্বতস্ফূর্ত ও ভিন্ন ভিন্ন কণার গতি ভিন্ন এমনকি, দুটি কাছাকাছি কণার গতিও একরকম নয়।
- কণাগুলি যত ক্ষুদ্র হয় ওদের গতিবেগ তত বেশি হয়।
- তরলের সান্দ্রতা যত কম হয়, কণাগুলির গতিবেগ তত বাড়ে। এজন্য তরল অপেক্ষা গ্যাসের মধ্যে এই গতির তীব্রতা বেশি।
- উষ্ণতা বাড়লে এই গতিবেগ বাড়ে।
- একই উষ্ণতায় সমান আকারের দুটি কণার গতিবেগ সমান হয়।
- কণাগুলির গতি পাত্রের নাড়াচাড়ার উপর নির্ভর করে না।
- তড়িৎ বা চৌম্বক ক্ষেত্র দ্বারা এই গতি প্রভাবিত হয় না।

প্রথমদিকে বিজ্ঞানীদের ধারণা ছিল, ব্রাউনীয় গতির কারণ তরলের পৃষ্ঠটান, রাসায়নিক বিক্রিয়া বা তাপমাত্রার অনিয়মিত পরিবর্তন ইত্যাদি। কিন্তু এই কারণগুলির দ্বারা এই গতির বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যগুলির সন্তোষজনক ব্যাখ্যা দেওয়া সম্ভব হয় নি। যেহেতু একটি কণার গতির সঙ্গে অন্য কণার গতির কোন সামঞ্জস্য নেই, সেজন্য তরল বা গ্যাসের মধ্যে কোন ঘূর্ণিস্রোত বা পরিচলন স্রোতের জন্য এরূপ গতি ঘটছে, এরকম যুক্তিও খাটে না। বহুদিন পর্যন্ত এই গতির সঠিক কারণ জানা ছিল না। পরে জাঁ পেরাঁর পরীক্ষা ও গভীর তত্ত্ব থেকে এই গতির কারণ জানা যায়। বলা হয় যে, ব্রাউনীয় গতি তরল বা গ্যাসের অণুগুলির নিরন্তর তাপীয় গতির প্রভাবেই ঘটে। প্রস্তাবনা অংশে এ প্রসঙ্গে আলোচনা করা হয়েছে। প্রলম্বিত কণার উপর তরলের এলোমেলো তাপীয় গতির জন্য নিরন্তর সংঘর্ষ ঘটে। কণার আকার ক্ষুদ্র হলে আঘাতজনিত কারণে একটি অপ্রতিমিত লব্ধি বলের ক্রিয়ায় কণার গতি সৃষ্টি হয়। কণার আকার বড় হলে লব্ধি বলের পরিমাণ শূন্য হয়। ব্রাউনীয় কণার আকার ক্ষুদ্র হতে থাকলে গতিবেগ বাড়তে থাকে। গতিও তত অনিয়মিত হয়। পরীক্ষার দ্বারা এই সিদ্ধান্তের সত্যতা প্রমাণিত হয়েছে।

### 10.3 অভিকর্ষক্ষেত্রে ব্রাউনীয় কণার উচ্চতাসাপেক্ষে বণ্টন

ব্রাউনীয় কণাগুলি যদি আদর্শ গ্যাস অণুর মত আচরণ করে তবে পৃথিবীর অভিকর্ষের দরুণ বায়ুমণ্ডলের গ্যাস অণুর উচ্চতাসাপেক্ষে বণ্টনসূত্র প্রলম্বিত কণাগুলির ক্ষেত্রেও সমানভাবে প্রযোজ্য হওয়া উচিত। নীচে বণ্টন সূত্রটি তত্ত্বগতভাবে প্রতিষ্ঠিত করা হল।

একক প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি গ্যাসের স্তম্ভ কল্পনা করা হল। গ্যাসটির উষ্ণতা সর্বত্র সমান এবং  $T$  যেন এই উষ্ণতা। যে কোন অনুভূমিক তল থেকে  $z$  উল্লম্ব উচ্চতায় একটি অনুভূমিক স্তরের বেধ  $dz$  ধরা যাক। এই স্তরের উপরে এবং নীচে গ্যাসের চাপ যেন



চিত্র 10.2

$P + dP$  এবং  $P$ ।  $z$ -উচ্চতায় এই স্তরের গড় ঘনত্ব  $p$  হলে অভিকর্ষের জন্য স্তরটির উপর প্রযুক্ত বল =  $gpdz$  (যেহেতু প্রস্থচ্ছেদ একক)। স্তরটির সাম্য বিবেচনা করলে লেখা যায়,

$$P = P + dp + gpdz$$

$$\text{অর্থাৎ, } dp = -gpdz \quad (i)$$

$dp$  এখানে ঋণাত্মক, এর অর্থ উচ্চতার সঙ্গে গ্যাসের চাপ হ্রাস পায়।

আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে,  $PV = RT$

$$\text{এবং এক গ্রাম অণু গ্যাসের জন্য } p = \frac{M}{V}$$

$M =$  গ্রাম আণবিক ভর

$$\therefore V = \frac{RT}{P}$$

$$\therefore p = \frac{MP}{RT}$$

$$(i) \text{ থেকে পাই, } dp = -g \frac{MP}{RT} dz$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dZ \quad (ii)$$

$Z = Z_0$  তলে চাপ  $P_0$  ধরে (ii) সমাকলন করে পাওয়া যায়

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} \int_{Z_0}^Z dZ$$

$$\therefore \ln \frac{P}{P_0} = -\frac{Mg}{RT} (Z - Z_0)$$

$$\therefore P = P_0 e^{-Mg(Z-Z_0)/RT} \quad (iii)$$

(iii) কে বায়ুমণ্ডলের চাপের সূচকীয় সূত্র বলে।

$Z$  উচ্চতায় গ্যাসের ঘনত্বসংখ্যা  $n$  এবং  $Z_0$  উচ্চতায়  $n_0$  হলে যেহেতু আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে  $P = nkT$

$$\therefore n = n_0 e^{-Mg(Z-Z_0)/KT} \quad (iv)$$

(iv) সূত্রটি বায়ুমণ্ডলে উচ্চতার সঙ্গে অণুর ঘনত্বসংখ্যার পরিবর্তন দেখায়।

পূর্বোক্ত আলোচনা অনুযায়ী এই সূত্র ব্রাউনীয় কণার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হলে আমরা সূত্রটির রূপ তদনুযায়ী পরিবর্তন করতে পারি। ব্রাউনীয় কণার ভর  $m$  হলে,  $m = \frac{M}{N_A}$ ,  $N_A =$  অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা।

সুতরাং (iv) সূত্রটিকে লেখা যায়

$$n = n_0 e^{-m N_A g(z-z_0)/RT} \quad (v)$$

এখন যেহেতু ব্রাউনীয় কণাটি তরলে প্রলম্বিত অবস্থায় আছে, সুতরাং তরলের প্রবতাজনিত কারণে ভরের হ্রাস ঘটবে।

$$\text{কণাটির ব্যাসার্ধ } r \text{ হলে, আয়তন} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

কণার ঘনত্ব  $d$  এবং তরলের ঘনত্ব  $d'$  হলে,

$$\text{কণার হ্রাসপ্রাপ্ত ভর} = \frac{4}{3} \pi r^3 (d - d')$$

সুতরাং (v) তে  $m$  এর স্থলে এই হ্রাসপ্রাপ্ত ভর বসিয়ে লেখা যায়

$$n = n_0 e^{-\frac{4}{3} \pi r^3 (d-d') N_A g(Z-Z_0)/RT}$$

$$\text{অর্থাৎ, } N_A = \frac{3RT}{4 \pi r^3 (d-d') g(Z-Z_0)} \ln \frac{n_0}{n} \quad (vi)$$

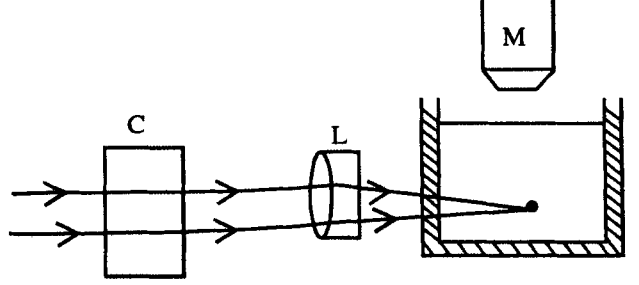
(vi) সমীকরণটিই পেরাঁর পরীক্ষার তত্ত্বগত ভিত্তি। বস্তুত পেরাঁ তাঁর পরীক্ষায় উপরের আলোচনার যথার্থতা দুটি অংশে প্রতিপন্ন করেন। প্রথমতঃ তিনি দেখেন,  $\ln \frac{n_0}{n}$  ও  $(Z - Z_0)$  সমানুপাতী, সুতরাং ঘনত্বসংখ্যার পরিবর্তন সূচকীয় নিয়মেই ঘটছে এবং দ্বিতীয়ত, তিনি তাঁর পরীক্ষা থেকে অ্যাভোগাড্রো সংখ্যাটিও নিরূপণ করেন। তাঁর নির্ধারিত মানটি আসল মানের খুব কাছাকাছিই পাওয়া যায়।

### 10.3.1 পেরাঁর পরীক্ষা :

পেরাঁ তাঁর ব্রাউনীয় কণার পরীক্ষায় কণার উৎস হিসাবে গ্যাঙ্গোজ ও বৃক্ষজাত রজনজাতীয় গঁদ ম্যাস্টিকের ব্যবহার করেন। দ্রব্যগুলির অ্যালকোহল দ্রবণকে অতিরিক্ত জলে আরও লঘু করে নিয়ে আংশিক অপকেন্দ্রনের মাধ্যমে কেবলমাত্র সমান আকারের গোলাকৃতি কণার প্রলম্বন তৈরি করা হয়। এইরূপ সূক্ষ্ম কণা দিয়ে তৈরি প্রলম্বনের এক ফোঁটা নিয়ে পেরাঁ একটি 0.1 মিলিমিটার গভীরতাসম্পন্ন কাচের পাতের আবরণ বিশিষ্ট একটি কোষে রাখেন (চিত্র 10.1 দেখুন)। উষ্ণতার সমতার জন্য কোষটিকে একটি জলগাহের মধ্যে স্থাপন করেন এবং একটি উচ্চ ক্ষমতাসম্পন্ন অণুবীক্ষণ  $M$  কে ফোকাস করেন (চিত্র 10.3)। এই অণুবীক্ষণের অভিলক্ষ্য খুবই সামান্য ফোকাস-গভীরতা বিশিষ্ট এবং এর সাহায্যে মাত্র কয়েক মাইক্রন

( $<0.001$  মিমি) গভীরতায় অবস্থিত ব্রাউনীয় কণাগুলি কেবল স্পষ্টভাবে নজরে আসে — এই স্তরের কম বা বেশি গভীরতার কণাগুলিকে দেখা যায় না। জলকোষ  $c$  এবং অভিসারী লেন্সযুগল  $L$  এর সাহায্যে ক্ষেত্রটি খুব উজ্জ্বলভাবে আলোকিত করা হয়।

গণনার সুবিধার জন্য গোল ছিদ্রযুক্ত পর্দা অভিলক্ষ্যের সঙ্গে লাগিয়ে নিলে ভাল হয়। একই স্তরে স্পষ্টভাবে দৃষ্ট কণার সংখ্যা অনেকবার গণনা করলে গড় সংখ্যাটিকে ঐ স্তরের ঘনত্বসংখ্যার সমানুপাতী বলে গণ্য করা যায়। অণুবীক্ষণটিকে বিভিন্ন গভীরতার স্তরে ফোকাস করলে প্রত্যেক স্তরে কণার সংখ্যা গণনা করে ঘনত্বসংখ্যার তুলনামূলক মান



চিত্র 10.3

সহজেই বার করা যায়। গণনা করার দুরূহতা লাঘব করার জন্য প্রত্যেক স্তরে ফিল্মের সাহায্যে কণার আলোকচিত্রও তুলে রাখা যায় এবং অবসরমত গণনা করে নেওয়া যায়। পেরাঁ তাঁর পরীক্ষায়  $\ln \frac{n_0}{n}$  এবং  $(Z - Z_0)$  -র মান বার করেন এবং দেখেন যে এরা পরস্পর সমানুপাতী। এর থেকে ঘনত্বসংখ্যার উচ্চতানির্ভরতার সূচক নিয়মের সত্যতা প্রতিপন্ন হয়।

অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা ( $N_A$ ) নিরূপণের জন্য ( $v_i$ ) সমীকরণের অন্যান্য রাশিগুলির মান নির্ণয় করা দরকার। কণার ঘনত্ব  $d$  নির্ণয়ের জন্য পেরাঁ সহজ পদ্ধতি ব্যবহার করেন। একটি ছোট আপেক্ষিক গুরুত্ব বোতল তিনি প্রথমে প্রলম্বন দিয়ে ভর্তি করেন এবং পরে তাপ প্রয়োগে প্রলম্বনের জলীয় অংশ বাষ্পীভূত করেন। খালি বোতল, প্রলম্বনপূর্ণ বোতল এবং কঠিন অংশ সহ বোতলের ভর মেপে নিলে নিম্নোক্ত গণনায় সহজেই কণার ঘনত্ব নির্ধারণ করা যায়।

মনে করি, জলের ঘনত্ব =  $d_0$

$$\therefore \text{আপেক্ষিক গুরুত্ব বোতলের আয়তন} = \frac{m_1}{d_0}$$

$m_1$  = জলপূর্ণ বোতলের ওজন

$$\text{প্রলম্বনে জলের আয়তন} = (m_2 - m_3) / d_0$$

$m_2$  = বোতলের প্রলম্বনের ওজন

$m_3$  = কঠিন অংশ তথা কণাগুলির ভর

$$\therefore \text{কণাগুলির আয়তন} = \frac{m_1}{d_0} - (m_2 - m_3) / d_0$$

$$= (m_1 - m_2 + m_3) / d_0$$

$$\therefore \text{কণার ঘনত্ব, } d = \frac{m_3 d_0}{m_1 - m_2 + m_3}$$

ব্রাউনীয় কণার ব্যাস তথা ব্যাসার্ধ জানার জন্য স্টোকস সূত্রের সাহায্য নেওয়া হয়। প্রলম্বনটিকে কোন সরু খাড়া নলের মধ্যে নিলে অভিকর্ষের প্রভাবে কণাগুলি নীচে নামতে থাকে। যে হারে নলের উপরে স্বচ্ছ অংশের বৃদ্ধি ঘটে তার থেকে কণার বেগ পাওয়া যায়। একসময় দেখা যায় কণার বেগ একই থাকছে। এই অবস্থায় কণার উপর লব্ধ অভিকর্ষ বল এবং তরলের সান্দ্রতাজনিত বাধা সমান হয়। স্টোকস সূত্র অনুযায়ী এই বাধা  $6\pi\eta r v$ ,  $v$  কণার সমবেগ।

$$\therefore 6\pi\eta r v = \frac{4}{3} \pi r^3 (d - d') g$$

$$\text{অর্থাৎ } r^2 = \frac{9}{2} \frac{\eta v}{(d - d') g} \quad (\text{vii})$$

এখানে  $\eta$  = তরলের সান্দ্রতাক

এইভাবে  $d$  এবং  $r$  এর মান জানা গেলে (vi) সমীকরণের সাহায্যে  $N_A$  র মান বার করা যায়।

পেরাঁ উপরের পরীক্ষাটি বার বার করে  $N_A$  এর মান নির্ণয় করেন। তাঁর পরীক্ষায়  $N_A$  র মান পাওয়া যায়  $(6.5 - 7.2) \times 10^{23}$ । এই মান অন্যান্য সূক্ষ্ম পরীক্ষা থেকে পাওয়া মানের থেকে সামান্য বেশি। পার্থক্যের কারণ হিসাবে বলা যায়, প্রথমতঃ সে সময় জলের সান্দ্রতাকের সঠিক মান জানা ছিল না। দ্বিতীয়ত, ব্রাউনীয় কণাগুলি প্রকৃত অর্থে গোলাকার নয় এবং স্টোকস সূত্রে অসীম উচ্চতা থেকে কণার পতনের ঘটনা ধরা হয়, এক্ষেত্রে বাস্তবিক তা ঘটে নি। তা সত্ত্বেও পেরাঁর চমকপ্রদ পরীক্ষা গভীর তত্ত্বের ভিত্তিকে নিঃসন্দেহে সুদৃঢ় করেছে।

## 10.4 রৈখিক ব্রাউনীয় গতি বিশ্লেষণ

1906 সালে ব্রাউনীয় গতির একটি তাত্ত্বিক বিশ্লেষণ বিজ্ঞানী আইনস্টাইন ও স্মলুকভস্কি প্রকাশ করেন। দুজনে পৃথক পদ্ধতির সাহায্যে রৈখিক ব্রাউনীয় গতির আলোচনা করলেও একই সূত্রে উপনীত হন। সূত্রটি আইনস্টাইন স্মলুকভস্কি সূত্র নামে পরিচিত। পরবর্তী সময়ে বিজ্ঞানী লাঁজভাঁ সূত্রটি একটি সহজ পদ্ধতিতে প্রতিষ্ঠিত করেন। আমরা প্রথমে লাঁজভাঁর পথেই সূত্রটি অনুধাবন করার চেষ্টা করব।

### 10.4.1 লাঁজভাঁর পদ্ধতিঃ

1908 সালে খুব সহজ বিশ্লেষণের মাধ্যমে বিজ্ঞানী লাঁজভাঁ ব্রাউনীয় গতির তত্ত্বটি উপস্থাপিত করেন। প্রলম্বনের মধ্যে অন্যান্য অণু একটি ব্রাউনীয় কণার উপর যে বল প্রয়োগ করে তাকে দুভাবে ভাগ করা যায়।

(a) একটি অপ্রতিমিত বল যা কণার নিশ্চল অবস্থাতেও কাজ করে, এবং

(b) গতিশীল ব্রাউনীয় কণার উপর তরল বা গ্যাসের সান্দ্রতাহেতু বল। এই বল কণার বেগের সমানুপাতিক এবং গতির বিপরীতে কাজ করে।

সুতরাং  $x$ -অক্ষ বরাবর কণার গতির সমীকরণটি এইভাবে লেখা যায়।

$$m\ddot{x} = X - f \dot{x} \quad (1)$$

এখানে  $m$  = কণার ভর,  $X$  = ব্রাউনীয় গতিসৃষ্টিকারী

$x$ - অক্ষ বরাবর অপ্রতিমিত বল এবং  $f$  = সান্দ্রতাহেতু বল

(1) কে  $x$  দ্বারা গুণ করে লেখা যায়,

$$m\ddot{x}x = Xx - f \dot{x}x \quad (2)$$

কিন্তু  $\dot{x}x = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(x^2)$

এবং  $\ddot{x}x = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d}{dt}(x^2) \right\} - \dot{x}^2$

সুতরাং (2) থেকে লিখতে পারি

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d}{dt}(x^2) \right\} - m\dot{x}^2 = Xx - \frac{f}{2} \frac{d}{dt}(x^2) \quad (3)$$

সমস্ত প্রলম্বিত কণার ক্ষেত্রে গড় মান নিলে (3) কে লেখা যায়

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d}{dt}(\overline{x^2}) \right\} - \overline{m\dot{x}^2} = \overline{Xx} - \frac{f}{2} \frac{d}{dt}(\overline{x^2}) \quad (4)$$

যেহেতু  $x$  এবং  $X$ - এর মান সমান সম্ভাব্যতায় ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হতে পারে এজন্য  $\overline{Xx}$  এর মান দীর্ঘ সময় অবকাশে শূন্য ধরা যায়।

আবার শক্তির সমবিভাজন নীতি অনুযায়ী

$$\overline{m\dot{x}^2} = kT, \quad k = \text{বোলজমান ধ্রুবক ও } T = \text{পরম তাপমাত্রা}$$

এবং  $\frac{d}{dt}(\overline{x^2})$  কে  $\frac{d}{dt}(\overline{x^2})$  লিখলে, 4 নং

সমীকরণ থেকে পাই,

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d}{dt}(\overline{x^2}) \right\} + \frac{1}{2} f \frac{d}{dt}(\overline{x^2}) = kT$$



$$\text{বা, } \frac{m}{2} \frac{dE}{dt} + \frac{1}{2} f E = kT \quad (5)$$

এখানে,  $\frac{d}{dt}(\overline{x^2}) = E$  লেখা হয়েছে।

(5) সমীকরণের সমাধান লেখা যায়

$$E = kT \frac{2}{f} + A e^{-ft/m} \quad A = \text{সমাকলন ধ্রুবক}$$

এখন  $m$  খুব ক্ষুদ্র বলে,  $f/m$  অত্যন্ত বড়। সতরাং  $e^{-ft/m}$  এর মান নগণ্য বলে উপেক্ষা করা যেতে পারে।

$$\therefore E = \frac{d}{dt}(\overline{x^2}) = kT \frac{2}{f} \quad (6)$$

উপরোক্ত সমীকরণটিকে  $t = 0$  এবং  $t = \tau$  এর জন্য সমাকলন করে পাই

$$\overline{x^2} - \overline{x_0^2} = kT \frac{2}{f} \tau \quad (7)$$

যদি  $t = 0$  সময়ে  $x_0 = 0$  ধরা হয় এবং  $\overline{x^2}$  ক্ষুদ্র বলে যদি এর বদলে  $\overline{\Delta x^2}$  লেখা হয়, তবে

$$\overline{\Delta x^2} = kT \frac{2}{f} \tau \quad (8)$$

এখানে  $\overline{\Delta x^2}$  কে  $x$ -অক্ষ বরাবর  $\tau$  সেকেন্ডে গড় বর্গ সরণ বলা যায়। প্রকৃতপক্ষে কণার গতিপথ খুবই জটিল এবং একটি নির্দিষ্ট সময় অবকাশে কেবলমাত্র  $\overline{\Delta x^2}$  পরিমাপ করাই সম্ভব।

এখন স্টোকস সূত্রানুযায়ী, গোলাকার কণার ক্ষেত্রে সাম্রতাহেতু বল  $f \dot{x} = 6\pi\eta r v$ ,

$\eta$  = মাধ্যমের সান্দ্রতাক

$r$  = কণার ব্যাসার্ধ এবং

$v$  = কণার বেগ

$$\therefore f = 6\pi\eta r \quad (\text{যেহেতু বেগ } v = \dot{x} )$$

$$\therefore \overline{\Delta x^2} = \frac{kT}{3\pi\eta r} \tau$$

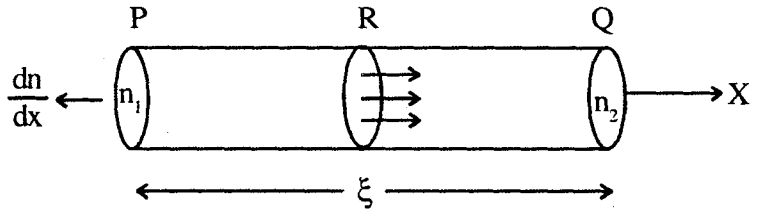
$$= \frac{RT}{N_A} \cdot \frac{1}{3\pi\eta r} \cdot \tau \quad (9)$$

(9) সমীকরণকে আইনস্টাইন — স্মলুকভ্‌স্কি সূত্র বলে।

### 10.4.2 আইনস্টাইনের পদ্ধতিঃ

ব্রাউনীয় কণার বিশৃঙ্খল গতির কারণে মাধ্যমে কণার ব্যাপন ঘটে। আইনস্টাইন এই ব্যাপনের পরিমাণ নির্ধারণ করেন। অন্যদিকে কণার ঘনত্বসংখ্যার তারতম্যে আশ্রবণ প্রসূত (Osmotic) চাপের ফলে ব্যাপনের একটি পরিমাণ প্রত্যাশা করা যায়। এই পরিমাণ এবং প্রথমোক্ত বিশৃঙ্খল গতিজনিত কারণে উদ্ভূত ব্যাপনের সমতা থেকে আইনস্টাইন স্মলুকভস্কি সমীকরণটি বার করেন।

ধরা যাক, প্রলম্বিত কণার ঘনত্বসংখ্যা সর্বত্র সমান নয় এবং  $x$ -অক্ষ বরাবর এর মান  $\frac{dn}{dx}$ । এর ফলে কণার ব্যাপন ঘটবে। মনে করি,  $\tau$  সময়ে  $x$ - অক্ষ বরাবর কণার গড় বর্গ সরণ  $\xi^2$ , অর্থাৎ প্রতিটি কণার যেন  $\tau$  সময়ে  $\xi$  পরিমাণ সরণ ঘটছে।  $x$ - অক্ষ বরাবর  $A$  প্রস্থচ্ছেদের ও  $\xi$  দৈর্ঘ্যের একটি চোঙ কল্পনা করা হল, এর  $P$  এবং  $Q$  যেন এই চোঙের প্রান্ততলদ্বয় (চিত্র 10.4)।



চিত্র 10.4

চোঙের  $P$  মুখে সংখ্যাঘনত্ব  $n_1$  হলে  $\tau$  সময়ে  $P$  থেকে  $n_1 A \xi/2$  সংখ্যক কণার ডানদিকে প্রবাহ ঘটবে।

একই সময়ে  $Q$  তল দিয়ে বামদিকে  $n_2 A \xi/2$  সংখ্যক কণা প্রবাহিত হবে। এখানে  $n_2$ ,  $Q$ - মুখে সংখ্যা ঘনত্ব।

চোঙের মাঝবরাবর যদি  $R$  একটি তল কল্পনা করা যায় তবে  $R$  -এর মধ্য দিয়ে ডানদিকে  $\tau$  সময়ে প্রবাহিত কণার সংখ্যা

$$\frac{1}{2}(n_1 - n_2)\xi A$$

ঐদিকে  $-\frac{dn}{dx}$  ঘনত্বসংখ্যার নতি হলে, ব্যাপনের সূত্র থেকে বলা যায়

$$-D \frac{dn}{dx} \tau A = \frac{1}{2}(n_1 - n_2)\xi A$$

$$\text{এখন, } n_1 - n_2 = -\xi \frac{dn}{dx}$$

$$\text{সুতরাং ব্যাপনাং } \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d}{dt} \overline{(x^2)} \right\} + \frac{1}{2} f \frac{d}{dt} \overline{(x^2)} = kT \text{ ক, } D = \frac{\xi^2}{2\tau} \quad (1)$$

এই ব্যাপনাংকের মান আশ্রবণজনিত চাপ থেকেও নির্ধারণ করা যায়।

P এবং Q তলে আয়বণের চাপ যথাক্রমে  $P_1$  এবং  $P_2$  হলে

$$P_1 = n_1 kT$$

$$P_2 = n_2 kT$$

∴ চোঙের উপর ত্রিযাশীল বল  $= (P_1 - P_2)A$

$$= (n_1 - n_2)AkT$$

এই বল কণিকাদের ওপরও কার্যকরী হয়। চোঙের মধ্যে গড় সংখ্যাঘনত্ব  $n$  হলে, চোঙের কণার সংখ্যা  $= nA\xi$

সুতরাং একটি কণার উপর ত্রিযাশীল বল  $f = \frac{(n_1 - n_2) AkT}{nA \xi}$

$$= -kT \frac{1}{n} \frac{dn}{dx}$$

গোলাকার কণার ক্ষেত্রে স্টোকস্ সূত্র থেকে লেখা যায়

$$f = 6\pi\eta rv$$

$$\therefore 6\pi\eta rv = -kT \frac{1}{n} \frac{dn}{dx}$$

$$\therefore nv = -\frac{kT}{6\pi\eta r} \frac{dn}{dx}$$

কিন্তু  $nv = -D \frac{dn}{dx}$

$$\therefore D = \frac{kT}{6\pi\eta r}$$

(2)

(1) এবং (2) থেকে পাই,

$$\frac{\xi^2}{2\tau} = \frac{kT}{6\pi\eta r}$$

$$\therefore \xi^2 = \frac{kT}{3\pi\eta r} \tau$$

$$= \frac{RT}{N_A} \frac{1}{3\pi\eta r} \tau$$

(3)

এটাই আইস্টাইনের সমীকরণ।

আইনস্টাইন স্মলুকভ্ক্ষি সূত্রের সত্যতা পরীক্ষা করার জন্য ব্রাউনীয় কণার  $\xi^2$  এর মান বিজ্ঞানী পেরা পরীক্ষার মাধ্যমে নির্ণয় করেন।

অণুবীক্ষণ যন্ত্রে ব্রাউনীয় কণার গতি পর্যবেক্ষণ কালে পেরা এক পশ্চাদপট ব্যবহার করেন যেটি আগের থেকেই অংশাংকিত করা ছিল। নির্দিষ্ট সময় পর পর কণার  $x$  অক্ষ অভিমুখে সরণের মান নির্ণয় করে  $\xi^2$  এর মান নির্ণয় করা হয়। এই পরীক্ষায়  $N_A$  র যে মান পাওয়া যায় তা মোটামুটি ঠিক।

## 10.5 গ্যাসে ব্রাউনীয় গতির পর্যবেক্ষণ

তরল অপেক্ষা গ্যাসের সান্দ্রতা কম। একারণে, গ্যাসের মধ্যে প্রলম্বিত ব্রাউনীয় কণার গড় বর্গ সরণ বেশী হবে। গ্যাসের মধ্যে ধোঁয়া বা ধূলিকণাকে শক্তিশালী অণুবীক্ষণ যন্ত্রের দ্বারা পর্যবেক্ষণ করলে এই সত্যতার প্রমাণ পাওয়া যাবে। পরীক্ষার নিরিখে বলা যায় যেহেতু কণার গড় বর্গ সরণ বেশী, সেজন্য পরিমাপের ক্ষেত্রে ভুল ভ্রান্তি তুলনায় কম হবে এবং পরীক্ষালব্ধ ফলের নির্ভুলতা বাড়বে।

বিজ্ঞানী মিলিক্যান ও ফ্লেচার গ্যাসের মধ্যে প্রলম্বিত তৈলকণিকার ব্রাউনীয় গতি পর্যবেক্ষণ করেন এবং পরীক্ষার মাধ্যমে  $N_A$ -র মান নির্ণয় করেন। ইলেকট্রনের আধান নির্ণয়ের জন্য মিলিক্যান যে ধরনের যন্ত্র ব্যবহার করেছিলেন, এখানে অনুরূপ একটি যন্ত্রের মধ্যে অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র তৈলকণিকা স্প্রে করে তাদের আহিত করা হয় এবং উপযুক্ত বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রপ্রয়োগে তাদের প্রয়োজনমত ভাসমান অবস্থায় রাখা হয়। দুটি সমান্তরাল পাতের মধ্যে বিভব পার্থক্য বজায় রেখে বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র উৎপন্ন করা হয়। পাতদুটির মধ্যবর্তী অঞ্চলে আলোকপাত করা হয় এবং হু স্বফোকাস বিশিষ্ট দূরবীক্ষণের সাহায্যে তৈলকণিকাগুলি প্রত্যক্ষ করা হয়।

ধরা যাক, কোন একটি তৈলকণিকার ভর  $m$  এবং বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র হীন অবস্থায় এটি অভিকর্ষ বলে  $v_1$  বেগে নীচে নামছে। এক্ষেত্রে গ্যাসের সান্দ্রতাহেতু যে মন্দনকারী বল ক্রিয়া করছে তা বেগের সমানুপাতিক বলে ধরি, এই বল যেন  $Kv_1$ ,  $K =$  ধ্রুবক।

$$\therefore mg = kv_1 \quad (1)$$

তৈলকণিকার আধান  $-ne$  ( $n =$  ইলেকট্রন সংখ্যা এবং  $e$  ইলেকট্রন আধান) হলে বৈদ্যুতিকক্ষেত্র  $X$  প্রয়োগে যদি কণিকাটি  $v_2$  বেগে ওপরদিকে (বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র উল্লম্ব ও নিম্নাভিমুখী) গতিশীল হয় তবে

$$nex - mg = kv_2 \quad (2)$$

(1) এবং (2) থেকে

$$nex - kv_1 = kv_2$$

$$\therefore k = \frac{nex}{v_1 + v_2} \quad (3)$$

বিভিন্ন তৈলকণিকায় ইলেকট্রনসংযুক্তি বিভিন্ন হবে বলে  $n$  এর মান বিভিন্ন পূর্ণসংখ্যা হবে। ফলে

$(v_1 + v_2)$  র মান সমূহ এক সাধারণ রাশি  $\Delta(v_1 + v_2)$  -র গুণিতক হবে।

$$\text{সূত্রাং } k = \frac{ex}{\Delta(v_1 + v_2)} \text{ হয়।} \quad (4)$$

আইনস্টাইন-স্মলুকভস্কি সূত্র  $\xi^2 = \frac{RT}{N_A} \frac{1}{3\pi\eta r} \tau$  তে  $6\pi\eta r$  এর

জায়গায়  $k$  বসালে

$$\bar{\xi}^2 = \frac{2RT}{kN_A} \tau \text{ পাওয়া যায়।}$$

বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রের মান নিয়ন্ত্রিত করে তৈলকণিকার উল্লম্বগতি রোধ করে অনুভূমিক বেগ মাপা হয়। নির্দিষ্ট  $\tau$  সময় অবকাশে  $\bar{\xi}^2$  এর গড় মান বার করে  $N_A$ -র মান নির্ণয় করা হয়।

ব্রাউনীয় কণার উপর এযাবৎ যেসব পরীক্ষা নিরীক্ষা করা হয়েছে তাদের তুলনায় এই পরীক্ষার তত্ত্বগত যৌক্তিকতা অনেক বেশি গ্রাহ্য। এখানে পৃষ্ঠটান হেতু তরলের কণিকার গোলাকার আকৃতি স্বাভাবিক তাই স্টোকস সূত্র অনেক বেশি কার্যকরী। মিলিক্যান ও ফ্লেচার এই তৈলবিন্দু পরীক্ষায়  $N_A$ -র মান পেয়েছিলেন প্রায়  $6.06 \times 10^{23}$ ।

## 10.6 ব্রাউনীয় কণার কৌণিক গতি :

রৈখিক গতি ছাড়াও ব্রাউনীয় কণার কৌণিক গতি প্রত্যক্ষ করা গেছে। কণার উপর কার্যকরী বলের ভ্রামক কৌণিক গতি সঞ্চার করে। সূক্ষ্ম ব্যবর্ততুলায় গ্যাস অণুর সংঘাতে সৃষ্ট কৌণিক গতি একটি স্বাভাবিক ঘটনা।

শক্তির সমবিভাজন নীতি প্রয়োগ করে আইনস্টাইন গোলাকৃতি ব্রাউনীয় কণার কৌণিক গতি ও কৌণিক বিক্ষেপের মান বার করেন। পেরা এইরূপ কৌণিক গতিসম্পন্ন ব্রাউনীয় কণার উপর পরীক্ষা করে আইনস্টাইনলব্ধ সূত্রের সাহায্যে  $N_A$ -র মান নির্ণয় করেন। এই মানও মোটামুটি সন্তোষজনক।

## 10.7 সারাংশ :

এই এককে আপনি যে বিষয়গুলি জানলেন সেগুলি হল :

- ব্রাউনীয় কণা এবং ব্রাউনীয় গতি প্রত্যক্ষ করা যায় এবং ব্রাউনীয় কণাগুলি যেন গ্যাসের অণুগুলির প্রতিনিধিত্বানীয়। অণুগতিতত্ত্বের স্বপক্ষে ব্রাউনীয় কণা প্রত্যক্ষ প্রমাণ হিসাবে গণ্য করা যায়।
- তরলের মধ্যে প্রলম্বিত ব্রাউনীয় কণার উচ্চতার সঙ্গে বণ্টন গ্যাসীয় বায়ুমণ্ডলের সূচকীয় সূত্র মেনে

চলে। পরীক্ষার সাহায্যে এই বণ্টনসূত্র শুধু প্রমাণ করা গেছে তাই না, অ্যাভোগাড্রো সংখ্যাও প্রায় নির্ভুলভাবে নির্ণয় করা গেছে।

- বিজ্ঞানী লাঁজর্ভাঁ ও আইনস্টাইন পৃথক পৃথকভাবে রৈখিক ব্রাউনীয় গতির তাত্ত্বিক বিশ্লেষণ করেন এবং একই সূত্রে উপনীত হন। বিজ্ঞানী পেরাঁ রৈখিক গতির উপরেও পরীক্ষা করে সূত্রটির সত্যতা প্রমাণ করেন এবং অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা নিরূপণ করেন।
- গ্যাসের মধ্যে ব্রাউনীয় কণা সৃষ্টি করে তা থেকে পরীক্ষা করে অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা বার করেন বিজ্ঞানী মিলিক্যান ও ফ্লেচার।
- রৈখিক গতি ছাড়াও ব্রাউনীয় কণার কৌণিক গতিরও প্রত্যক্ষ প্রমাণ পাওয়া যায়।

## 10.8 প্রশ্নাবলি :

1. জলের মধ্যে কিছু বালির দানা ছড়িয়ে দিলে ব্রাউনীয় গতি দেখা যাবে কি ?
2.  $27^\circ\text{C}$  তাপমাত্রায় জলে প্রলম্বিত ব্রাউনীয় কণার 30 সেকেন্ড সময় অবকাশে মূল গড় বর্গ সরণ  $1.1 \times 10^{-3}$  সেমি পাওয়া গেল। ঐ তাপমাত্রায় জলের সান্দ্রতাক্ষ  $10^{-2}$  সি. জি. এস। সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবক  $R = 8.32$  আর্গ / ক / গ্রাম অণু এবং অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা  $N_A = 6.02 \times 10^{23}$  হলে, ব্রাউনীয় কণার ব্যাসার্ধ বার করুন।
3.  $T$  তাপমাত্রায় এবং  $P$  চাপে কোন গ্যাসে একটি ব্রাউনীয় কণা গতিশীল। কণার গড় বর্গ সরণ গ্যাসের সান্দ্রতার সঙ্গে ব্যস্তানুপাতী। গ্যাসের চাপ অর্ধেক করলে গড় বর্গ সরণের মান বাড়বে, কমবে না একই থাকবে ?
4.  $293\text{ k}$  তাপমাত্রায়  $2.12 \times 10^{-7}\text{ m}$  ব্যাসার্ধের একটি ব্রাউনীয় কণা জলের মধ্যে সঞ্চরণরত। 30 সে সময়ে কণাটির মূল গড় বর্গ সরণ  $6.7 \times 10^{-6}$  মিটার হলে ব্যোলজ্‌ম্যান ধ্রুবকের মান বার করুন। জলের সান্দ্রতাক্ষ  $1.2 \times 10^{-3}$  নিউটন সে / মি<sup>2</sup> ধরুন।
5. একটি কলয়েড দ্রবণে আধানহীন সমান সাইজের কণার বিভিন্ন গভীরতা  $h$  এ প্রাপ্ত সংখ্যা নীচে দেওয়া হল।

$$n = \quad 120 \quad 215 \quad 324 \quad 460 \quad 615 \quad 924$$

$$h = \quad 0 \quad 10 \quad 17 \quad 23 \quad 28 \quad 35$$

দেখান যে, পরীক্ষালব্ধ ফল বণ্টন সূত্র মেনে চলে।

## 10.9 উত্তরমালা :

1. দেখা যাবে না। ব্রাউনকণার আকার  $10^{-4}$  থেকে  $10^{-5}$  সেমির মধ্যে থাকা উচিত। এর থেকে

বড় হলে তরলের অণুগুলির সংঘাতে লব্ধ বল শূন্য হয় এবং কণাগুলি কোনো গতিলাভ করে না। কলয়েড কণার ভর উল্লিখিত সীমার মধ্যে থাকে। বালির দানার আকার এর থেকে বড়।

2. আইনস্টাইনের সূত্র অনুযায়ী

$$\bar{\xi}^2 = \frac{RT}{N_A} \frac{\tau}{3\pi\eta r}$$

$$\therefore r = \frac{RT}{\bar{\xi}^2} \frac{\tau}{3\pi\eta N_A}$$

এখানে  $\bar{\xi}^2 = (11 \times 10^{-3})^2$ ,  $\eta = 10^{-2}$ ,  $T = (27 + 273) = 300 \text{ K}$

$\tau = 30 \text{ সেকেন্ড}$ ,  $R = 8.32 \times 10^7$ ,  $N_A = 6.02 \times 10^{23}$

মান গুলি বসিয়ে  $r = 1.09 \times 10^{-5}$  সেমি হয়।

3. দেখা যায় বিস্তৃত চাপের পাল্লায় গ্যাসের সান্দ্রতাস্কেলের মান মোটামুটি একই থাকে। সুতরাং চাপ অর্ধেক করলে ব্রাউনীয় কণার গড় বর্গ সরণের মান পরিবর্তিত হবে না। অবশ্য, খুব বেশি চাপে সান্দ্রতাস্কেলের মান সামান্য পরিবর্তিত হতে দেখা যায়।

4. 
$$\bar{\xi}^2 = \frac{kT}{3\pi\eta r} \tau$$

$\therefore$  ব্যোলজম্যান ধ্রুবক  $k = \frac{\bar{\xi}^2 \times 3\pi\eta r}{T \cdot \tau}$

$$\frac{(6.7 \times 10^{-6})^2 \times 3 \times 3.142 \times 12 \times 10^{-3} \times 2.12 \times 10^{-7}}{293 \times 30}$$

$$= 1.22 \times 10^{-23} \text{ J / K}$$

5. উচ্চতাসাপেক্ষে কণার বণ্টন সূত্র

$$n = n_0 e^{-m N_A g (Z - Z_0) / RT}$$

$$\therefore \lambda_n \frac{n_0}{n} = m N_A g (Z - Z_0) / RT$$

$$= k_1 h, \quad h = Z - Z_0, \quad K_1 = m N_A g / RT$$

$$\therefore 2.303 \log_{10} \frac{n_0}{n} = k_1 h$$

$$\log_{10} \frac{n_0}{n/h} = k \quad (\text{ধ্রুবক})$$

বিভিন্ন গভীরতায় এই সম্পর্কটি বিচার করলে একই মান পাওয়া যাবে। যেমন,

(i)  $n_0 = 924$ ,  $n = 120$ ,  $h = 35$  নিলে

$$\log_{10} \frac{924}{120/35} = \frac{\log_{10} 2.7}{35} = \frac{0.866}{35} = 0.025$$

(ii)  $n_0 = 324$ ,  $n = 120$ ,  $h = 17$  নিলে

$$\log_{10} \frac{324}{120/17} = \frac{\log_{10} 2.7}{17} = \frac{0.431}{17} = 0.025$$

প্রতিটি গভীরতায় পর্যবেক্ষণের ফল দেখা যাবে বণ্টন সূত্র মেনে চলছে।

সহায়ক পাঠের জন্য একক ৪ দেখুন।



## একক 11 □ বাস্তব গ্যাস

### গঠন

- 11.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য
- 11.2 আদর্শ গ্যাস অবস্থা থেকে বিচ্যুতি
  - 11.2.1 অ্যামাগাটের পরীক্ষা ও তার ফলাফল
  - 11.2.2 এন্ড্রুজের পরীক্ষা ও তার ফলাফল
- 11.3 বয়েল তাপমাত্রা
- 11.4 অবস্থার নিরবচ্ছিন্নতা
- 11.5 ভ্যানডার ওয়ালস এর অবস্থার সমীকরণ
  - 11.5.1 সমীকরণের আলোচনা
  - 11.5.2 ভ্যানডার ওয়ালস ধ্রুবক, সংকট ধ্রুবক, বয়েল তাপমাত্রার সম্পর্ক
  - 11.5.3 সমীকরণের ত্রুটি
- 11.6 অবস্থার পরিমিত সমীকরণ ও অনুরূপ অবস্থার সূত্র
- 11.7 অন্যান্য অবস্থার সমীকরণ
- 11.8 সারাংশ
- 11.9 প্রশ্নাবলি
- 11.10 উত্তরমালা

### 11.1 প্রস্তাবনা

কোন গ্যাসের আচরণ তার চাপ ( $p$ ), উষ্ণতা ( $T$ ) এবং আয়তনের ( $v$ ) ওপর নির্ভরশীল। নির্দিষ্ট ভরের কোন গ্যাসের চাপ, উষ্ণতা ও আয়তনের ভিতর সম্পর্কযুক্ত সমীকরণকে অবস্থার সমীকরণ বলে। গ্যাসের ক্ষেত্রে এই সম্পর্কের প্রতীকী রূপ বলা যায়  $f(p, v, T) = \text{ধ্রুবক}$ । অপেক্ষক  $f$  এর গাণিতিক রূপ জানা থাকলে এবং তিনটি রাশির যে কোন দুটি জানা থাকলে তৃতীয়টির মান জানা যায়। যেমন, আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে আপনারা দেখেছেন, অবস্থার সমীকরণটি  $PV = RT$ । এটা বয়েল ও চার্লসের সূত্রের সমন্বয়ে গঠিত।

উচ্চ এবং নিম্ন সকল চাপেই আদর্শগ্যাস  $PV = RT$  সমীকরণটি মেনে চলে। সুতরাং নির্দিষ্ট উষ্ণতায় নির্দিষ্ট পরিমাণ আদর্শগ্যাসের চাপ ও আয়তন যদি ছক কাগজে আঁকা যায় তবে সমীকরণ অনুযায়ী লেখ

একটি সম পরাবৃত্ত হবে। অথবা (PV-P) লেখচিত্র একটি সরলরেখা হবে এবং P-অক্ষের সমান্তরাল হবে। এই ধরনের লেখগুলিকে সমোষ্ণ লেখ বলে। এখন কোন বাস্তব গ্যাসের ক্ষেত্রে লেখ যদি আদর্শ গ্যাসের লেখ-র অনুরূপ না হয় তাহলে বোঝা যায় ঐ গ্যাস আদর্শ গ্যাস সূত্র তথা বয়েল ও চার্লসের সূত্র মেনে চলছে না। শুধু তাই নয়, বাস্তব গ্যাসের লেখ কতটা বিচ্যুত হল তা থেকে ঐ গ্যাসের আচরণ আদর্শ গ্যাস থেকে কতটা তফাৎ তাও বোঝা যায়।

বিভিন্ন বিজ্ঞানী এই বিচ্যুতি নিয়ে অনুসন্ধান করেন এবং দেখতে পান যে সকল বাস্তব গ্যাসই আদর্শ গ্যাস অবস্থা থেকে নানা মাত্রায় ভিন্ন। তাহলে বাস্তব গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ কি হবে? মনে করা হল, গ্যাসের অনুগতিতত্ত্বে যে সব সরল অঙ্গীকার করা হয়েছিল, তার কিছু কিছু অবশ্যই বাস্তবসম্মত নয়। ক্লসিয়াস, ডায়ালটেরিসি বাথেলো, কেমারলিং ওনস, বেটি প্রমুখ বিজ্ঞানীরা আদর্শগ্যাস সমীকরণে নানারকম সংশোধনী প্রয়োগ করে তাত্ত্বিক উপায়ে বাস্তব গ্যাস সমীকরণের বিভিন্ন রকম রূপ উপস্থাপন করেন। পরে বিজ্ঞানী ভ্যান ডার ওয়ালস, ক্লসিয়াস ও হার্নের ধারণাকে কাজে লাগিয়ে বাস্তব গ্যাসের অবস্থার একটি অপেক্ষাকৃত সরল সমীকরণ প্রকাশ করেন। এটি আগের সমীকরণগুলির তুলনায় পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে অনেক বেশি সংগতিপূর্ণ। এই এককে আপনারা বাস্তব গ্যাসের বিচ্যুতি তার সম্ভাব্য কারণ ও বাস্তব গ্যাসের সমীকরণের প্রতিষ্ঠা এবং তার দ্বারা কিভাবে পরীক্ষালব্ধ ফলাফল ব্যাখ্যা করা যায় তা জানতে পারবেন।

---

## উদ্দেশ্য

---

এই এককটি পাঠের পরে আপনি জানবেন

- আদর্শগ্যাসের অবস্থা থেকে বাস্তব গ্যাসের আচরণের পার্থক্য
- বয়েল তাপমাত্রা, সংকট তাপমাত্রা, সংকট চাপ ও আয়তন, অবস্থার নিরবচ্ছিন্নতা
- ভ্যান ডার ওয়ালস-এর অবস্থার সমীকরণ ও ফলাফল
- অবস্থার পরিমিত সমীকরণ ও অনুরূপ অবস্থার সূত্র
- অন্যান্য কয়েকটি অবস্থার সমীকরণ

---

## 11.2 আদর্শ গ্যাস অবস্থা থেকে বিচ্যুতি

---

বাস্তব গ্যাস যে সর্ব-তাপমাত্রায় এবং চাপে আদর্শ গ্যাসের মত আচরণ করে না, একথা বিজ্ঞানী বয়েলই সর্বপ্রথম বলেন। তিনি পরীক্ষা করে দেখিয়েছিলেন যে কেবলমাত্র উচ্চ তাপমাত্রায় এবং নিম্নচাপে সকল সাধারণ গ্যাস তাঁর সূত্র মেনে চলে — অন্য অবস্থায় ঠিকঠিক মানে না। বিজ্ঞানী ডেপার্টে পরবর্তীকালে কিছু বাস্তবগ্যাসের ক্ষেত্রে বিভিন্ন চাপে বয়েলের সূত্র পরীক্ষা করেন এবং সিদ্ধান্ত করেন যে গ্যাসগুলি বয়েলের সূত্র যথায়থ মানে না। বিজ্ঞানী ভ্যান মরাম অ্যামোনিয়া গ্যাসের উপর বিভিন্ন চাপ প্রয়োগে এক অত্যশ্চর্য ফল পান। তিনি দেখেন, প্রায় 7 বায়ুমণ্ডলীয় চাপে গ্যাসটির আয়তন হ্রাস পাচ্ছে, কিন্তু চাপ

অপরিবর্তিত থাকছে। এর কারণ, অ্যামোনিয়া গ্যাসটি তখন তরলে রূপান্তরিত হচ্ছে। তরলীভবনের প্রক্রিয়ার কথা তখন ঠিকঠিক জানা ছিল না। পরবর্তীকালে গ্যাসের চাপ ও তাপমাত্রা পরিবর্তন করে তরলীকরণের পদ্ধতি জানা যায়।

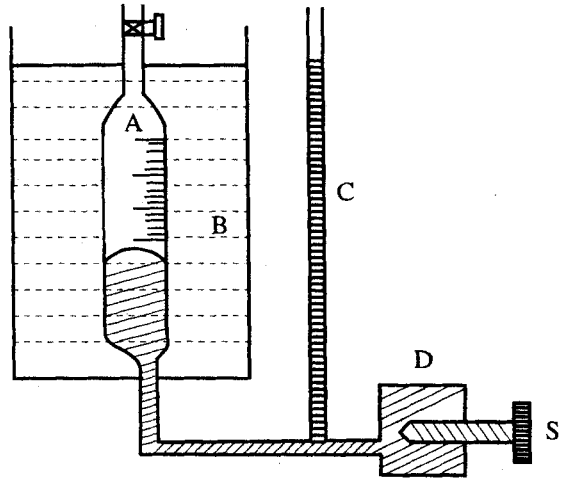
ভ্যান মরামের পরে রেণো বয়েল সূত্রের প্রয়োগ নিয়ে বিস্তারিত পরীক্ষা করেন। তিনি প্রায় 30 বায়ুমণ্ডলীয় চাপ পর্যন্ত বিভিন্ন তাপমাত্রার পাল্লায় বিভিন্ন গ্যাসের PV-P সমোষণ লেখচিত্র আঁকেন এবং দেখেন যে লেখগুলি চাপ অক্ষের সমান্তরাল হচ্ছে না। তিনি সিদ্ধান্ত করেন, স্থায়ী গ্যাসগুলি আদর্শ গ্যাস নহে।

পরবর্তী সময়ে এন্ড্রুজ, ক্যালিটেট, প্রমুখ বিজ্ঞানীগণ আরও পরীক্ষা করেন। কার্বন ডাই অক্সাইড গ্যাসের উপর এন্ড্রুজের পরীক্ষা বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। এই পরীক্ষার ফলাফলে চাপ প্রয়োগে গ্যাসের তরলীকরণ সম্বন্ধে প্রয়োজনীয় তথ্য পাওয়া যায়। বয়েল সূত্র এবং গ্যাসের আচরণ সম্পর্কে সর্বাপেক্ষা গুরুত্বপূর্ণ পরীক্ষা করেন বিজ্ঞানী অ্যামাগাট। তিনি বিস্তৃত চাপের পাল্লায় অনেক গ্যাসের অসংখ্য সমোষণ লেখ অংকন করেন এবং স্থায়ী গ্যাসগুলির আচরণ সম্বন্ধে প্রয়োজনীয় তথ্যাদি দেন। এই অনুচ্ছেদে অ্যামাগাটের এবং এন্ড্রুজের পরীক্ষার বিবরণ ও ফলাফল আলোচনা করা হচ্ছে।

### 11.2.1 অ্যামাগাটের পরীক্ষা ও তার ফলাফল :

বিজ্ঞানী অ্যামাগাট 1880 খ্রীষ্টাব্দে সাধারণ গ্যাস আদর্শ গ্যাস অবস্থা থেকে কতটা বিচ্যুত তার বিস্তারিত পরীক্ষা করেন। তিনি পারদস্তম্ভের দ্বারা উচ্চ চাপ সৃষ্টি করে ঐ স্তম্ভেরই দ্বারা চাপ পরিমাপ করেছিলেন। তিনি প্রায় 3000 বায়ুমণ্ডলীয় চাপ পর্যন্ত পরীক্ষাকার্য চালান।

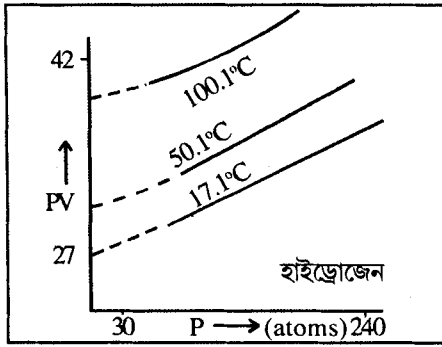
অ্যামাগাট প্রায় 300 মিটার উঁচু ইস্পাতের তৈরী নল (c) নিয়ে তাকে পারদপূর্ণ করে ম্যানোমিটাররূপে ব্যবহার করেন। D একটি বদ্ধ পারদপাত্র, S স্ক্রু ব্যবহার করে পাত্রের পারদে উচ্চ চাপ সৃষ্টি করা যায়। A একটি অংশাক্ত নল, এর কিছুটা পারদপূর্ণ এবং বাকী অংশ পরীক্ষাধীন গ্যাস দিয়ে ভর্তি। A নলটি B তরলগাত্রের মধ্যে রাখা হয় এবং B এর তাপমাত্রা যে কোন মানে স্থির রাখার ব্যবস্থা থাকে। এই পরীক্ষায় অ্যামাগাট A নলে বিভিন্ন গ্যাস ব্যবহার করেন এবং প্রতিটি গ্যাসের PV-P সমোষণ লেখচিত্র অংকন করেন। পরের পৃষ্ঠায় সমোষণ লেখগুলি দেখান হল।



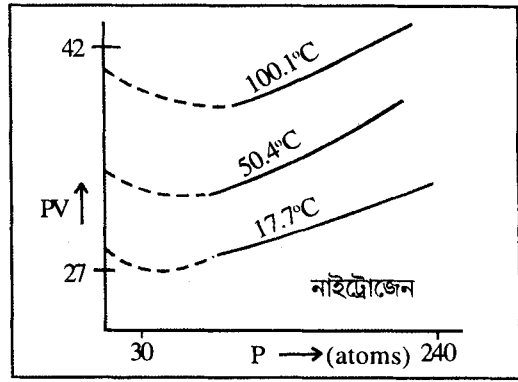
চিত্র 11.1

পরের পৃষ্ঠায় লেখচিত্রগুলি বিশ্লেষণ করলে দেখা যায়, হাইড্রোজেন গ্যাসের PV-P সমোষণ লেখগুলি উর্ধ্বমুখী নতিযুক্ত সরলরেখা — চাপ বৃদ্ধির সঙ্গে PV-র মান বৃদ্ধি পায়। হিলিয়ামের PV-P লেখও

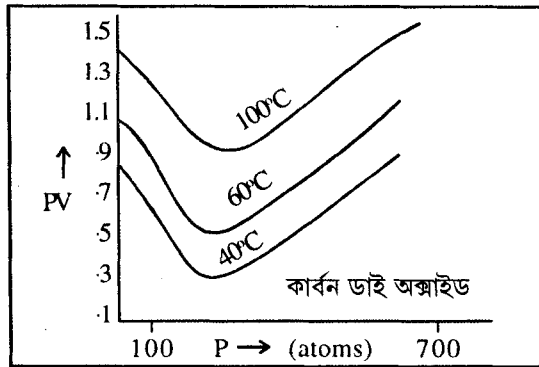
অনুরূপ। এইসব গ্যাসের সংনম্যতা বয়েলসূত্র থেকে প্রাপ্ত সংনম্যতা অপেক্ষা কম। অন্যদিকে, নাইট্রোজেন, কার্বন ডাই অক্সাইড ইত্যাদি গ্যাসের বেলায় চাপ বৃদ্ধির সঙ্গে প্রথমে PV-র মান হ্রাস পায় এবং একটি



চিত্র 11.2



চিত্র 11.3



চিত্র 11.4

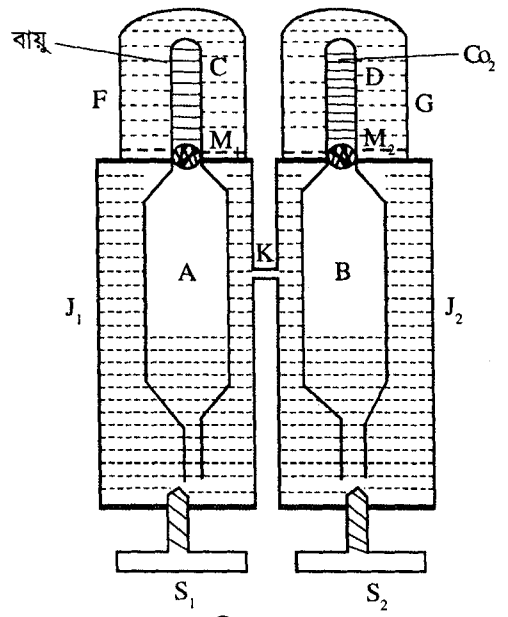
সর্বনিম্ন মানে পৌঁছায়। পরে PV-র মান বৃদ্ধি পায়। এদের মধ্যে  $\text{CO}_2$  গ্যাসের PV-র প্রারম্ভিক হ্রাস খুবই লক্ষণীয়। এই গ্যাসকে সহজে তরলে পরিণত করা যায়। সুতরাং অ্যামাগাটের পরীক্ষায় নিম্নলিখিত ফলাফলগুলি পাওয়া যায় :

- (i) গ্যাসের চাপ বৃদ্ধি করলে বয়েল সূত্র থেকে বিচ্যুতি বেশী দেখা যায়
- (ii) স্থায়ী গ্যাসের বিচ্যুতি কম, তুলনামূলক ভাবে যে সব গ্যাস সহজে তরলীভূত করা যায় তাদের বিচ্যুতি বেশী
- (iii) সকল গ্যাসই প্রায় একইরকম বিচ্যুতি প্রদর্শন করে — শুধু তাপমাত্রার পাল্লা আলাদা। পরবর্তীকালে কম তাপমাত্রায় হাইড্রোজেন গ্যাসের সমোষ্ণ লেখ নাইট্রোজেনের লেখর অনুরূপ পাওয়া গেছে।

### 11.2.2 এন্ড্রুজের পরীক্ষা ও তার ফলাফল :

বয়েল সূত্র থেকে বাস্তব গ্যাসের বিচ্যুতির সঙ্গে গ্যাসের তরলীকরণের যোগ আছে। কারণ গ্যাস যত

তরলীভবনের দিকে অগ্রসর হয়, তত তার বিদ্যুতির পরিমাণ বেশী হতে দেখা যায়। কার্বন ডাই অক্সাইড এমনই এক বাস্তব গ্যাস। এন্ড্রুজ কার্বন ডাই অক্সাইড গ্যাসের উপর চাপ প্রয়োগ করে বিভিন্ন তাপমাত্রায় তার ফলাফল পরীক্ষা করেছিলেন। তার ফলাফল থেকে গ্যাসের আচরণ, বিশেষ করে, তরলীভবন সম্বন্ধে মূল্যবান তথ্য পাওয়া যায়।

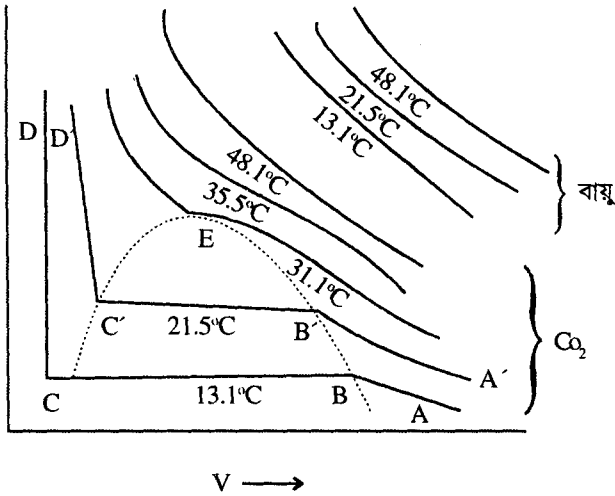


চিত্র 11.5

11.5 চিত্রে এন্ড্রুজের পরীক্ষার যন্ত্রটি দেখান হয়েছে। A ও B দুটি একই রকমের কাচনল, এদের নীচের দিকে খোলা, ওপরের প্রান্তে বদ্ধ কৈশিক নল C এবং D। কৈশিক নল দুটি অংশাঙ্কিত। C নলে বায়ু এবং D নলে CO<sub>2</sub> আছে।

M<sub>1</sub> এবং M<sub>2</sub> পারদসূত্র দুটি যথাক্রমে বায়ু ও CO<sub>2</sub> গ্যাসকে নলে আটকে রাখে। কৈশিক নল দুটি F এবং G স্থির তাপমাত্রার জলগাছের মধ্যে আছে। A এবং B নলদুটি দুটি জলপূর্ণ জ্যাকেট J<sub>1</sub> এবং J<sub>2</sub> -র মধ্যে অবস্থিত। K এদের সংযোগকারী নল। S<sub>1</sub> এবং S<sub>2</sub> দুটি স্ক্রু-র সাহায্যে জলের উপর চাপ প্রয়োগ করা

হয়। এই চাপ গ্যাসে সঞ্চারিত হয়। এইভাবে গ্যাসের উপর প্রায় 400 বায়ুমণ্ডলীয় চাপ দেওয়া হয়। বায়ু এবং CO<sub>2</sub> এর আয়তন সরাসরি কৈশিক নলের অংশাঙ্কনের দ্বারা জানা যায়। বায়ু বয়েলসূত্র মানে বলে ধরা হয়। তাই বায়ুর আয়তন থেকে তার চাপ তথা CO<sub>2</sub> গ্যাসের উপর চাপ হিসাব করা হয়। বিভিন্ন তাপমাত্রায় এই পরীক্ষার পুনরাবৃত্তি করে P-V সমোষ্ণ লেখ টানা হয়। 11.6 চিত্রে এই লেখগুলি দেখান হয়েছে।



চিত্র 11.6

এখানে পাঁচটি সমোষ্ণ লেখ দেখান হয়েছে। সর্বনিম্ন সমোষ্ণ লেখটি 13.1°C তাপমাত্রায়। এই লেখের AB অংশে চাপবৃদ্ধির সঙ্গে আয়তন হ্রাস পাচ্ছে বয়েল সূত্র অনুযায়ী। কিন্তু B বিন্দুর পরে চাপ অপরিবর্তিত আছে। কিন্তু আয়তন দ্রুত কমে যাচ্ছে। অর্থাৎ এই অংশে CO<sub>2</sub> তরলে পরিণত হচ্ছে। সুতরাং B বিন্দুতে গ্যাসটি সম্পৃক্ত। BC অংশে বাষ্প ও তরল সহাবস্থানে আছে। C বিন্দুতে সমস্ত গ্যাসটি তরলে পরিণত

হয়েছে। এর পর লেখচিত্রের CD অংশ প্রায় খাড়া অর্থাৎ চাপ বৃদ্ধি করলেও আয়তন প্রায় অপরিবর্তিত আছে। তরল অসংনম্য বলেই এরূপ পাওয়া যায়।

এর পরে সমোষ্ণ লেখচিত্র 21.5°C তাপমাত্রায় A'B' এর বৈশিষ্ট্য আগের লেখটির মতই। কেবল A'B' অংশ AB- র তুলনায় বড় এবং C'B' অনুভূমিক অংশ CB অনুভূমিক অংশের চেয়ে ছোট। C'D' অংশ CD- র মতই তরল অবস্থা নির্দেশ করে। C বিন্দু অপেক্ষা C' বিন্দুর চাপ বেশী অর্থাৎ উচ্চ তাপমাত্রায় তরলীকরণের জন্য বেশি চাপ দরকার। তৃতীয় লেখটি 31.1°C তাপমাত্রায়। এখানে অনুভূমিক অংশটি প্রায় নাই। ইহার অর্থ, চাপ প্রয়োগে গ্যাসটিকে আর তরলে পরিণত করা যাবে না। ইহা অপেক্ষা উচ্চতর সমোষ্ণ লেখগুলির ক্ষেত্রেও একই কথা প্রযোজ্য। 48.1°C তাপমাত্রার লেখচিত্রটি বায়ুর লেখচিত্রগুলির অনুরূপ। এখানে বায়ুকে স্থায়ী গ্যাসের প্রতিনিধি হিসাবে নেওয়া হয়েছে।

এন্ড্রুজ এই পরীক্ষায় লক্ষ্য করেন যে CO<sub>2</sub> গ্যাসের ক্ষেত্রে 31.1°C তাপমাত্রাটি বিশেষ উল্লেখযোগ্য। এই তাপমাত্রায় বাষ্পের সামান্যতম ঘনীভবন কেবল লক্ষ্য করা যায়। এর ওপরের তাপমাত্রায় ঘনীভবনের লেশমাত্র নাই। এই তাপমাত্রাকে সংকট তাপমাত্রা বলে। এই তাপমাত্রায় তরল ও বাষ্পের মধ্যে পার্থক্য থাকে না। 31.1°C তাপমাত্রার লেখকে সংকট সমোষ্ণ বলে। এর নীচের সমোষ্ণ লেখগুলির অনুভূমিক অংশের দু প্রান্ত যোগ করলে যে বক্ররেখা পাওয়া যায় তা সংকট সমোষ্ণ লেখকে যে বিন্দুতে স্পর্শ করে তাকে সংকট বিন্দু (E) বলে। বক্ররেখাটির ভিতরে তরল ও বাষ্প, বামদিকে তরল এবং দক্ষিণে গ্যাস অবস্থায় পদার্থটি থাকে।

E বিন্দুর চাপকে সংকট চাপ এবং ঐ চাপে এবং তাপমাত্রায় একক আয়তনকে সংকট আয়তন বলে।

এন্ড্রুজের পরীক্ষার সর্বাপেক্ষা গুরুত্বের দিকটি হল, স্থায়ীগ্যাস ও সহজে তরলীভূত করা যায় এমন গ্যাসের মধ্যে কোন পার্থক্য নেই। যে কোন গ্যাসের সংকট তাপমাত্রা জানা থাকলে তাকে সংকট তাপমাত্রায় বা তার নীচে নিয়ে গিয়ে চাপ প্রদানে তরলে পরিণত করা যায়। যেমন, অক্সিজেনের সংকট উষ্ণতা – 118.8°C, সুতরাং এই তাপমাত্রায় বা এর নীচে অক্সিজেনকে তরল করা সম্ভব।

কয়েকটি পরিচিত গ্যাসের সংকট তাপমাত্রা (T<sub>c</sub>) এবং সংকট চাপ (P<sub>c</sub>) এর মান নীচের তালিকায় দেওয়া হল।

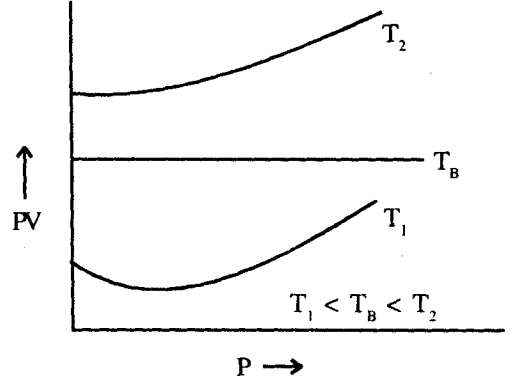
গ্যাস	T <sub>c</sub> (K)	P <sub>c</sub> (10 <sup>5</sup> Pa)
He	5.2	2.3
Ar	151	49
H <sub>2</sub>	33	13
O <sub>2</sub>	155	51
NH <sub>3</sub>	405	113
CO <sub>2</sub>	304	74

### 11.3 বয়েল তাপমাত্রা

অ্যামাগাটের পরীক্ষায় দেখা যায় বাস্তব গ্যাসের PV-র মান চাপ P এর ওপর নির্ভর করে। কিন্তু প্রত্যেক গ্যাসের ক্ষেত্রে একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রা পাওয়া যায় যে তাপমাত্রায় ঐ গ্যাসের PV-র মান P-এর ওপর নির্ভর করে না। ঐ তাপমাত্রায় PV-P সমোষ্ণ লেখটি চাপ অক্ষের সমান্তরাল হয়। অর্থাৎ ঐ তাপমাত্রায় গ্যাসটি বয়েল সূত্র মেনে চলে এবং আদর্শ গ্যাসের মত আচরণ করে (চিত্র 11.7)। এই তাপমাত্রাকে ঐ গ্যাসের বয়েল তাপমাত্রা ( $T_B$ ) বলে।

বিজ্ঞানী কেমারলিং ওনেস বাস্তব গ্যাসের আচার-আচরণ পর্যালোচনা করে একটি স্থূল সমীকরণ উপস্থাপিত করেন। সমীকরণটি নিম্নরূপ :

$$PV = A + BP + CP^2 + DP^3 + \dots$$



চিত্র 11.7

এক্ষেত্রে A, B, C ইত্যাদি তাপমাত্রার ওপর নির্ভরশীল নিত্যসংখ্যা। এদের ভিরিয়াল গুণাঙ্ক বলে। P খুব কম হলে বাস্তবে  $PV = A$  হয়, অর্থাৎ  $A = RT$ , সেক্ষেত্রে ওনেসের সমীকরণ আদর্শ গ্যাস সমীকরণে পর্যবসিত হবে।

দ্বিতীয় ভিরিয়াল গুণাঙ্ক B বেশ তাৎপর্যপূর্ণ। তাপমাত্রার সঙ্গে B-র মানের পরিবর্তন সমস্ত গ্যাসের ক্ষেত্রে সদৃশ। খুব নিম্ন তাপমাত্রায় B-র মান যথেষ্ট ঋণাত্মক, তাপমাত্রা বৃদ্ধিতে মান বৃদ্ধি পেয়ে এক সময় শূন্য হয় এবং পরে ধনাত্মক হয়।

যে তাপমাত্রায় কোন গ্যাসের B শূন্য হয় তখন

$$\frac{\partial}{\partial P}(PV) = B + 2CP + 3DP^2 + \dots \text{ হয়।}$$

C, D, ইত্যাদির মান খুব কম বলে যদি উপেক্ষা করা হয় তবে ঐ তাপমাত্রায়,  $\frac{\partial}{\partial P}(PV) = 0$

অর্থাৎ  $PV = \text{ধ্রুবক} = A = RT$

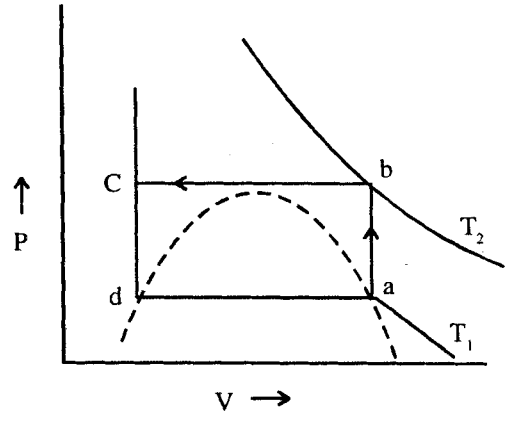
সুতরাং গ্যাসটি একটি বিস্তৃত চাপপাল্লায় আদর্শ গ্যাসের মত আচরণ করবে।

সেজন্য বলা যায়, যে তাপমাত্রায়  $\frac{\partial}{\partial P}(PV) = 0$  হয় সেই তাপমাত্রাকে বয়েল তাপমাত্রা বলে। হাইড্রোজেনের বয়েল তাপমাত্রা 117K এবং হিলিয়ামের 24K।

### 11.4 অবস্থার নিরবচ্ছিন্নতা

পদার্থের দুই অবস্থা—তরল ও বাষ্পকে আপাতভাবে দুটি বিচ্ছিন্ন অবস্থা বলে মনে হয়। সহাবস্থানকালে

এই দুই-দশার একটি বিভেদন্তল দেখা যায়। এতে মনে হয়, এই দুই অবস্থা যেন পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং এদের মধ্যে কোন ধারাবাহিকতা নেই। কিন্তু এন্ড্রুজ তাঁর পরীক্ষা থেকে দেখান যে এই দুই অবস্থা একই অবস্থার দুটি পৃথক রূপ মাত্র এবং এদের এক অবস্থা থেকে অন্য অবস্থায় পরিবর্তনের মধ্যে একটি নিরবচ্ছিন্নতা বর্তমান।



চিত্র 11.8

11.6 চিত্রে দেখা যায়, BC অংশে তরল ও বাষ্প একই সঙ্গে আছে। যে কোন বাষ্প যখন তরলীভূত হয় তখন তাকে বাষ্প তরল সহাবস্থান অঞ্চল (BC- র মত) অতিক্রম করতে হয়। এই আপাত বিচ্ছিন্নতা

এড়াতে সহাবস্থান অঞ্চল এড়িয়ে গ্যাসকে সরাসরি তরল অবস্থায় নিয়ে যাওয়া যায়। এজন্য কাটারেখার অধিবৃত্তের বাইরে দিয়ে গ্যাসের অবস্থার পরিবর্তন করতে হবে। 11.8 চিত্রে  $T_1$  এবং  $T_2$  তাপমাত্রায় দুটি সমোষ্ণ লেখ দেখানো হয়েছে। একটি সংকট তাপমাত্রার নীচে এবং অপরটি ওপরে।  $T_1$  সমোষ্ণ লেখতে ad হল তরল বাষ্পের সহাবস্থান অঞ্চল। মনে করি পদার্থটি a বিন্দুতে আছে। আয়তন স্থির রেখে উষ্ণতা  $T_1$  থেকে  $T_2$  তে বাড়ান হল। এতে গ্যাসটি b বিন্দুতে পৌঁছল।  $T_2$  সংকট তাপমাত্রা থেকে বেশী বলে b বিন্দুতে পদার্থটি গ্যাসীয়। এখন চাপ স্থির রেখে তাপমাত্রা  $T_2$  থেকে  $T_1$  -এ হ্রাস করলে আয়তন সংকুচিত হবে এবং পদার্থ C বিন্দুতে পৌঁছবে। C,  $T_1$ - লেখের ওপর অবস্থিত, সুতরাং এটি তরল অবস্থা নির্দেশ করছে। এবার উষ্ণতা স্থির রেখে চাপ এমনভাবে কমান হল যাতে তরলটি d বিন্দুতে পৌঁছায়। সুতরাং a থেকে d বিন্দুতে যেতে আমরা abcd পথ অবলম্বন করলে ad সহাবস্থান অঞ্চল এড়ানো যায়। এই পরিবর্তনে গ্যাস থেকে তরলে পরিণত হতে কোন বিচ্ছিন্নতা দেখা যায় নি। পদার্থটি একই সঙ্গে দুই দশায় অবস্থান করেনি।

## 11.5 ভ্যান ডার ওয়ালস্ এর অবস্থার সমীকরণ :

অ্যামাগাট, এন্ড্রুজ প্রমুখ বিজ্ঞানীদের পরীক্ষার ফলাফলে এটি স্পষ্ট যে  $PV = RT$  সমীকরণের দ্বারা বাস্তব গ্যাসের আচরণের ঠিক ঠিক ব্যাখ্যা দেওয়া সম্ভব নয়। বস্তুত, সংকট তাপমাত্রার নীচে গ্যাসের আচরণে অধিকতর বিচ্যুতি ঘটে। উপরন্তু, তরলীভবনের কোন ইঙ্গিত আদর্শ গ্যাস সমীকরণে পাওয়া যায় না। কাজেই বাস্তব গ্যাসের ক্ষেত্রে কার্যকরী হবে এমন অবস্থার সমীকরণ কীভাবে পাওয়া যাবে ? উনবিংশ শতাব্দীর বিজ্ঞানীদের কাছে এ এক চ্যালেঞ্জ — যার মোকাবিলা করতেই হবে।

এ বিষয়ে বিজ্ঞানী ক্লসিয়াস ও বিজ্ঞানী হার্ণ গ্যাসের গতিতত্ত্বের দুটি সরল অঙ্গীকারের প্রতি সকলের দৃষ্টি আকর্ষণ করেন। তাঁদের মতানুসারে, গ্যাসের অনুগুলি বিন্দুবৎ, সুতরাং তাদের জ্যামিতিক আয়তন উপেক্ষা করা যায় এবং অণুগুলির পারস্পরিক আকর্ষণবল শূন্য — এ দুটি ধারণা ভ্রান্ত; সুতরাং সংশোধন করা দরকার।



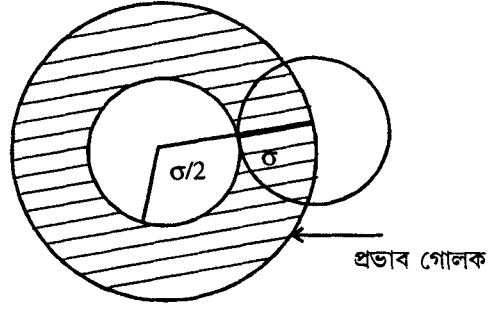
ওঁদের প্রদর্শিত পথে এগিয়ে বিজ্ঞানী ভ্যান ডার ওয়ালস ঐ দুটি অঙ্গীকারের প্রয়োজনীয় সংশোধন করেন এবং বাস্তব গ্যাসের একটি অবস্থার সমীকরণ প্রকাশ করেন। সমীকরণটি ভ্যান ডার ওয়ালস সমীকরণ নামেই সমধিক খ্যাত। সংশোধন দুটি নীচে আলোচনা করে সমীকরণটি বার করা হল।

(ক) অণুগুলির আয়তনের জন্য সংশোধন :

গ্যাসের অণুগুলি বিন্দুবৎ না ধরে যদি  $\sigma$  ব্যাসসম্পন্ন নিরেট গোলক মনে করা হয় তবে সংঘর্ষকালে দুটি অণুর ন্যূনতম দূরত্ব দাঁড়ায়  $\sigma$ । এক্ষেত্রে একটি অণু নিজস্ব জ্যামিতিক আয়তন  $\left[ v_m = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{\sigma}{2} \right)^3 \right]$  ছাড়াও কিছুটা আয়তনে প্রভাব বিস্তার করে থাকে এবং এই প্রভাবগোলকে অন্য কোন অণুর কেন্দ্র প্রবেশ করতে পারে না (চিত্র 11.9)। এই প্রভাব গোলকের আয়তন  $= \frac{4}{3} \pi \sigma^3$

$$= \frac{4}{3} \pi \cdot 8 \left( \frac{\sigma}{2} \right)^3$$

$$= 8 v_m$$



চিত্র 11.9

দেখা যাচ্ছে, একটি অণু তার নিজস্ব জ্যামিতিক আয়তনের ৪ গুণ আয়তন যেন অধিকার করে আছে। ফলে পাত্রের মধ্যে অণুগুলির অবাধ বিচরণের স্থান পাত্রের আয়তন  $V$  এর কম হবে। মনে করা যাক, অণুগুলির স্বাধীনভাবে বিচরণের জন্য কার্যকর মুক্ত আয়তন যেন  $V - b$ , এখানে  $b$  একটি ধ্রুবক এবং অণুগুলির মোট আয়তনের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত।  $b$  এর মান আমরা এইভাবে হিসাব করতে পারি :

মনে করা যাক,  $V$  আয়তনের একটি খালি আবদ্ধ পাত্রে পরপর একটি একটি করে গ্যাস অণু ঢোকান হচ্ছে। অবশ্যই প্রথম অণুটি  $V$  অঞ্চলের যে কোন অংশে বিচরণ করতে পারবে। দ্বিতীয় অণুটির অবাধ বিচরণের আয়তন হবে  $V - 8v_m$ , এইভাবে তৃতীয় অণুটির  $V - 2 \cdot 8v_m$  এবং  $N$ -সংখ্যক অণুর শেষতমটির জন্য  $V - \overline{N-1} 8v_m$ । সুতরাং প্রতিটি অণুর জন্য গড় অবাধ বিচরণ অঞ্চল হবে

$$\frac{1}{N} \left[ V + (V - 8v_m) + (V - 2 \times 8v_m) + \dots + (V - \overline{N-1} 8v_m) \right]$$

$$= \frac{1}{N} \left[ NV - 8v_m (1 + 2 + 3 + \dots + \overline{N-1}) \right]$$

$$= \frac{1}{N} \left[ NV - 8v_m \frac{N(N-1)}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{N} \left[ NV - 8v_m \frac{\overline{N^2}}{2} \right] \quad N \text{ খুব বড় হওয়ায় } N - 1 = N \text{ ধরা হয়েছে।}$$

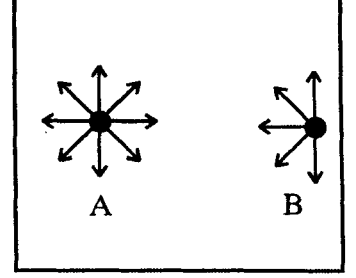
$$= V - 4Nv_m$$

$$= V - b$$

∴  $b = 4Nv_m =$  অণুগুলির মোট জ্যামিতিক আয়তনের চারগুণ।

(খ) অণুগুলির আন্তরাণবিক আকর্ষণের জন্য সংশোধন :

গ্যাস অণুগুলির পারস্পরিক আকর্ষণবল তাদের ভিতরকার দূরত্বের ওপর নির্ভর করে। কিন্তু এর সঙ্গে অভিকর্ষ বলের কোন সম্পর্ক নেই। দূরত্ব যত কমে, আকর্ষণ তত বাড়ে। দূরত্ব বৃদ্ধি পেলে একসময় আকর্ষণ বল উপেক্ষা করা যায়। কোন অণু অন্যের প্রভাবগোলকের কাছাকাছি এলে এই বল অনুভূত হয়।



চিত্র 11.10

মনে করা যাক, পাত্রের অভ্যন্তরে একটি অণু A আছে (চিত্র 11.10)। A অণুকে চতুর্দিক থেকে অন্যান্য কাছাকাছি অণুগুলি আকর্ষণ করবে। আকর্ষণ বলগুলি পরস্পরকে প্রশমিত করার ফলে নিট বল শূন্য হবে।

কিন্তু দেওয়ালের কাছে B অণুটির ক্ষেত্রে তা হবে না। চিত্র থেকে বোঝা যায়, B অণুটি কেবলমাত্র পাত্রের অভ্যন্তরের দিকে টান অনুভব করবে। ফলে B অণুটি যে বেগে দেওয়ালে ধাক্কা দিত বলে আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে মনে করা হত, তার থেকে কম বেগে ধাক্কা দেবে। ফলে ভরবেগও কম সঞ্চারিত হবে এবং দেওয়ালে চাপও কম হবে।

এই চাপ হ্রাস (i) প্রতি একক আয়তনে আকর্ষণকারী অণুর সংখ্যার সমানুপাতিক এবং (ii) প্রতি একক আয়তনে আকর্ষিত অণুর সংখ্যার সমানুপাতিক।

এরা আবার গ্যাসের ঘনত্বের সমানুপাতিক। সুতরাং বলা যায়,

$$\text{চাপ হ্রাস} \propto (\text{গ্যাসের ঘনত্ব})^2$$

$$\propto \frac{1}{V^2}$$

$$= \frac{a}{V^2} \quad [ a = \text{অনুপাতিক ধ্রুবরাশি} ]$$

∴ প্রকৃত চাপ  $\propto$  দৃষ্ট চাপ + চাপহ্রাস

$$= P + \frac{a}{V^2}$$

অতএব, দুটি সংশোধনী একত্রিত করে বাস্তবগ্যাসের অবস্থার সমীকরণটি নিম্নলিখিত রূপ পায়

$$\left( P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT \quad \text{। এটাই ভ্যানডার}$$

ওয়ালস সমীকরণ,  $a$  এবং  $b$  কে ভ্যান ডার ওয়ালস ধ্রুবক বলা হয়। এটি এক গ্রাম-অণু-গ্যাসের বেলা প্রযোজ্য।  $n$  গ্রাম অণুর ক্ষেত্রে সমীকরণটি হবে

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \quad [v \text{ এর স্থলে } \frac{V}{n} \text{ হবে}]$$

### 11.5.1 ভ্যান ডার সমীকরণের আলোচনা

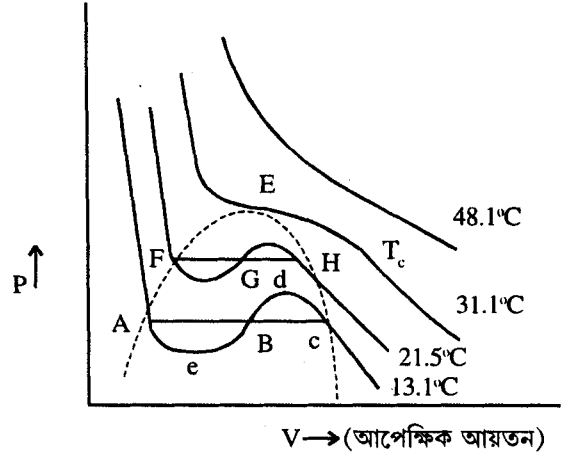
ভ্যান ডার ওয়ালস সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(V - b) = RT$$

$$\text{or, } P + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{V - b}$$

$$\text{or, } PV^3 + av - PbV^2 - ab = RTV^2$$

$$\text{or, } V^3 - \left(b + \frac{RT}{P}\right)V^2 + \frac{a}{P}V - \frac{ab}{P} = 0$$



চিত্র 11.11

$P$  এবং  $T$  এর নির্দিষ্ট মানের জন্য এই সমীকরণটি  $V$  এর একটি ত্রিঘাত সমীকরণ। সুতরাং  $V$  এর তিনটি মান পাওয়া যাবে। এই তিনটি মানের সবগুলি বাস্তব বা একটি বাস্তব ও অপর দুটি কাল্পনিক হতে পারে।  $a$  এবং  $b$  র মান জানা থাকলে যে কোন তাপমাত্রায় ভ্যান ডার ওয়ালস সমীকরণ লেখগুলি আঁকা যেতে পারে।  $\text{CO}_2$  গ্যাসের ক্ষেত্রে কয়েকটি তাপমাত্রায় ভ্যান ডার ওয়ালস সমীকরণ লেখগুলি 11.11 চিত্রে দেখান হয়েছে। ভ্যান ডার ওয়ালস এর এই তাত্ত্বিক লেখগুলি এবং এন্ড্রুজ প্রাপ্ত লেখগুলি তুলনা করলে নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য গুলি দেখা যায়।

- উভয় প্রকার লেখগুলির মধ্যে গুণগত সাদৃশ্য দেখা গেলেও পরিমাণগত সাদৃশ্য যথাযথ নয়।
- সংকট তাপমাত্রার ওপরে উভয় প্রকার লেখের মিল বেশী।
- সংকট তাপমাত্রার নীচে তাত্ত্বিক লেখগুলির মধ্যকার অংশ (ABC বা FGH) তরঙ্গায়িত। কিন্তু এন্ড্রুজের লেখগুলির এই অংশগুলি অনুভূমিক। তাত্ত্বিক লেখগুলিতে চরম ও অবম দেখা যায়। উচ্চতর সমীকরণ লেখতে চরম ও অবম ক্রমশ নিকটবর্তী হয় এবং সংকট বিন্দু (E) এরা পরস্পর মিশে যায়। সংকট উষ্ণতার উপরে আর চরম ও অবম বিন্দুগুলি পাওয়া যায় না।

ভ্যান ডার ওয়ালস এর ব্যাখ্যা অনুযায়ী  $13.1^\circ\text{C}$  তাপমাত্রার সমীকরণ লেখ-র Cd অংশ অতিসম্পৃক্ত বাষ্প এবং eA অংশ অতি উত্তপ্ত তরল অবস্থা নির্দেশ করেছে। এই অবস্থাগুলি পরীক্ষার যান্ত্রিক পরিবেশে

পাওয়া সম্ভব হয় না। কিন্তু লেখ-র dB<sub>e</sub> অংশে চাপ হ্রাসের সঙ্গে আয়তনও হ্রাস পায় — যা বাস্তবে হওয়া সম্ভব নয়।

সামান্য কিছু ক্রটি সত্ত্বেও বলা যায়, এন্ডুজের পরীক্ষালব্ধ লেখচিত্র এবং ভ্যান ডার ওয়ালস এর তাত্ত্বিক লেখচিত্র পরস্পরের সঙ্গে মিলে যায়। ভ্যান ডার ওয়ালস এর অবস্থার সমীকরণ বাস্তব গ্যাসের আচরণ মোটামুটি সঠিকভাবে প্রকাশ করে।

### 11.5.2 ভ্যান ডার ওয়ালস ধ্রুবক, সংকট ধ্রুবক, বয়েল তাপমাত্রার পারস্পরিক সম্পর্ক

(ক) সংকট সমোষ্ণ লেখচিত্রে সংকট বিন্দু E-তে (চিত্র 13.11) স্পর্শক টানলে সেটা আয়তন অক্ষের সমান্তরাল হবে। সুতরাং E বিন্দুতে  $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = 0$  হবে।

তাছাড়া, E বিন্দুতে চরম ও অবম মান মিশে যায় বলে এটি চ্যুতি বিন্দুও। সুতরাং গাণিতিক নিয়ম অনুযায়ী

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = 0.$$

এখন, ভ্যান ডার ওয়ালস সমীকরণকে এইভাবে লেখা যায়

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \quad (i)$$

$$\therefore \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}$$

$$\text{এবং} \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = -\frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4}$$

T এর জায়গায় সংকট তাপমাত্রা  $T_c$ , V এর স্থলে  $V_c$  বসালে,

$$-\frac{RT_c}{(V_c-b)^2} + \frac{2a}{V_c^3} = 0 \quad (ii)$$

$$\text{এবং} \quad \frac{2RT_c}{(V_c-b)^3} - \frac{6a}{V_c^4} = 0 \quad (iii)$$

(ii) এবং (iii) থেকে,

$$\frac{2a}{V_c^3} = \frac{RT_c}{(V_c-b)^2} \quad (iv)$$

$$\text{এবং } \frac{6a}{V_c^4} = \frac{2RT_c}{(V_c - b)^3} \quad (\text{v})$$

(iv) কে (v) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$V_c = 3b \quad (\text{vi})$$

(iv) সমীকরণে  $V_c$  -র এই মান বসালে

$$T_c = \frac{8a}{27bR} \quad (\text{vii})$$

(iv) সমীকরণে  $V_c$  এবং  $T_c$  -র মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$$P_c = \frac{8aR}{27bR \cdot 2b} - \frac{a}{9b^2}$$

$$\text{বা } P_c = \frac{a}{27b^2} \quad (\text{viii})$$

খ) সংকট ধ্রুবকগুলির সাহায্যে ভ্যান ডার ওয়ালস ধ্রুবকদুটির মান প্রকাশ করা যায়।  $V_c$  নির্ণয় করা অধিকতর কষ্টসাধ্য বলে,  $a$  এবং  $b$ -র মান  $P_c$  এবং  $T_c$ -র সাপেক্ষে প্রকাশ করাই রীতি।

$$\text{আমরা দেখলাম, } P_c = \frac{a}{27b^2} \quad \text{এবং } T_c = \frac{8a}{27bR}$$

$$\therefore \frac{T_c}{P_c} = \frac{8a}{27bR} \times \frac{27b^2}{a} = \frac{8b}{R}$$

$$\therefore b = \frac{RT_c}{8P_c} \quad (\text{ix})$$

$$\text{আবার, } \frac{T_c^2}{P_c} = \frac{64a^2}{(27)^2 \times R^2 b^2} \times \frac{27b^2}{a} = \frac{64a}{27R^2}$$

$$\therefore a = \frac{27R^2 T_c^2}{64P_c} \quad (\text{x})$$

গ) বয়েল তাপমাত্রা ও সংকট তাপমাত্রার সম্পর্ক সহজে নির্ণয় করা যায়।

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

$$\text{বা } P + \frac{a}{V^2} = \frac{RT}{V - b}$$

$$\therefore PV = \frac{RTV}{V-b} - \frac{a}{V}$$

বয়েল তাপমাত্রায় ( $T = T_B$  তে) বাস্তব গ্যাস আদর্শ গ্যাসের মত আচরণ করে। সুতরাং  $PV = RT_B$  হবে।

$$\therefore RT_B = \frac{RT_B V}{V-b} - \frac{a}{V}$$

$$\text{বা } RT_B \left[ \frac{V}{V-b} - 1 \right] = \frac{a}{V}$$

$$\text{বা } \frac{RT_B b}{V-b} = \frac{a}{V}$$

$$\therefore T_B = \frac{a(V-b)}{R \cdot V \cdot b} = \frac{a}{Rb} \quad [V-b \approx V \text{ লেখা যেতে পারে}]$$

$$\text{এখন, } T_c = \frac{8a}{27bR} = \frac{8}{27} T_B$$

$$\therefore T_B = \frac{27}{8} T_c = 3.375 T_c \quad (\text{xi})$$

ঘ)  $\frac{RT_c}{P_c V_c}$  কে সংকট গুণাঙ্ক বলা হয়। আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে অনুরূপ রাশিটি  $\frac{RT}{PV} = 1$ । সংকট গুণাঙ্কে  $\alpha$  দ্বারা প্রকাশ করলে

$$\alpha = \frac{RT_c}{P_c V_c}$$

$$= \frac{R 8a}{27bR} \times \frac{27b^2}{a} \times \frac{1}{3b}$$

$$= \frac{8}{3} = 2.67$$

$$\therefore \alpha = 2.67 \quad (\text{xii})$$

দেখা যাচ্ছে,  $\alpha$ -র মান  $a$  এবং  $b$  নিরপেক্ষ এবং এটি একটি সংখ্যা মাত্র।

### 11.5.3 ভ্যান ডার ওয়ালস সমীকরণের ত্রুটি :

বাস্তব গ্যাসের আচরণ ব্যাখ্যায় ভ্যান ডার ওয়ালস এর সমীকরণ নিঃসন্দেহে একটি সরল সমীকরণ।

পরীক্ষালব্ধ ফল এবং ভ্যান ডার ওয়ালস সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত ফলের যথেষ্ট মিল আছে, যা সমীকরণটির যথার্থতা নিশ্চিতভাবে প্রমাণ করে। তা সত্ত্বেও, এই সমীকরণের কিছু ত্রুটির কথা আলোচনা করা উচিত।

- (i) ভ্যান ডার ওয়ালস এর তাত্ত্বিক সমোষণ লেখগুলি এন্ড্রুজের পরীক্ষালব্ধ লেখগুলির সাথে পরিমাণগতভাবে ছবছ মেলে না। বিশেষত, সংকট তাপমাত্রার নীচে পার্থক্য বেশি দেখা যায়।
- (ii) হিসাব অনুযায়ী  $b = \frac{V_c}{3}$  হলেও বাস্তবে কিন্তু  $b$  এর মান প্রায়  $\frac{V_c}{2}$
- (iii) সংকট গুণক  $\alpha = 2.67$  পাওয়া গেলেও পরীক্ষার ফল কিন্তু  $\alpha$ -র মান অনেক বেশি দেয়। এই মান প্রায় 3.75। কোন কোন গ্যাসের ক্ষেত্রে  $\alpha$ -র মান 4.99 পর্যন্ত পাওয়া যায়।
- (iv) বয়েল তাপমাত্রা  $T_B = 3.375 T_c$  হলেও প্রায় কোন ক্ষেত্রেই এই মান পাওয়া যায় না। কম বেশী কিছু বিচ্যুতি দেখা যায়।

## 11.6 অবস্থার পরিমিত সমীকরণ ও অনুরূপ অবস্থার সূত্র

ভ্যান ডার ওয়ালস এর সমীকরণের  $a$  এবং  $b$  রাশিদুটি প্রকৃত অর্থে ধ্রুবরাশি নয়। তাপমাত্রার সঙ্গে এবং একই তাপমাত্রায় বিভিন্ন গ্যাসে এদের মানের তফাৎ হয়। তাই  $a$  এবং  $b$  কে পরিহার করে যদি কোন সমীকরণ বার করা যায় তবে তা অধিকতর কার্যকরী হতে পারে। এই উদ্দেশ্যে গ্যাসের প্রকৃত চাপ, আয়তন ও তাপমাত্রাকে সংকট চাপ, সংকট আয়তন ও সংকট তাপমাত্রার ভগ্নাংশরূপে প্রকাশ করা হয়। এর ফলে উদ্ভূত সমীকরণকে অবস্থার পরিমিত সমীকরণ বলে। ধরা যাক,  $\frac{P}{P_c} = P_r$ ,  $\frac{V}{V_c} = V_r$  এবং  $\frac{T}{T_c} = T_r$ ,  $P_r$ ,  $V_r$  ও  $T_r$  কে পরিমিত রাশি বলে।

$$\text{এখন } \left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

$$\therefore \left(P_r P_c + \frac{a}{V_r^2 V_c^2}\right)(V_r V_c - b) = R T_r T_c$$

$$\text{কিন্তু } P_c = \frac{a}{27b^2}, V_c = 3b \text{ এবং } T_c = \frac{8a}{27bR}$$

$$\therefore \left(\frac{P_r a}{27b^2} + \frac{a}{V_r^2 9b^2}\right)(V_r \cdot 3b - b) = RT_r \frac{8a}{27bR}$$

$$\text{বা } \left(\frac{P_r}{27} + \frac{1}{9V_r^2}\right)(3V_r - 1) = \frac{8}{27} T_r$$

$$\text{বা } \left(P_r + \frac{3}{V_r^2}\right)(3V_r - 1) = 8T_r$$

$$\text{বা } \left(P_r + \frac{3}{V_r^2}\right) \left(V_r - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} T_r$$

এই সমীকরণটিকে অবস্থার পরিমিত সমীকরণ বলা হয়। এতে  $a$ ,  $b$  ও  $R$  না থাকায় এটি সব গ্যাসের জন্য সমানভাবে প্রযোজ্য।

এই সমীকরণ থেকে বোঝা যায়, যে কোন দুটি গ্যাসের তিনটি পরিমিত রাশির মধ্যে যে কোন দুটির মান সমান হলে তৃতীয় রাশিটির মান অবশ্যই সমান হবে। একে অনুরূপ অবস্থার সূত্র বলে। দুটি গ্যাসের  $P_r$ ,  $V_r$  এবং  $T_r$  সমান হলে ওরা অনুরূপ অবস্থায় আছে বলা হয়।

## 11.7 অন্যান্য অবস্থার সমীকরণ :

ভ্যান ডার ওয়ালস-এর সমীকরণে কিছু কিছু ত্রুটি দেখা দেওয়ায় পরবর্তীকালে বা একই সময়ে অন্যান্য কয়েকজন বিজ্ঞানী আরও বাস্তবধর্মী এবং ফলাফলের সঙ্গে বেশী সঙ্গতিপূর্ণ হয় এমন কয়েকটি সমীকরণ প্রকাশ করেন। ইতিপূর্বে কেমারলিং ওনেস এর সমীকরণটি আলোচনা করা হয়েছে। নীচে আরও দুচারটি উল্লেখযোগ্য সমীকরণের কথা বলা হল।

### (ক) ক্লসিয়াসের সমীকরণ :

আন্তরাণবিক আকর্ষণ বল পরম তাপমাত্রার ব্যস্তানুপাতিক ধরে ক্লসিয়াস নিম্নলিখিত সমীকরণটি প্রস্তাব করেন।

$$\left\{P + \frac{a}{T(V+C)^2}\right\} (V-b) = RT, \quad \text{এখানে } a, b, c \text{ ধ্রুবক।}$$

এই সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$V_c = 3b + 2c$$

$$\text{এবং সংকট গুণাঙ্ক } \alpha = \frac{RT_c}{P_c V_c} = \frac{8(b+c)}{3b+2c}$$

$C = kb$  ধরলে ( $k =$  ধ্রুবক) এবং পরীক্ষালব্ধ ফল থেকে  $T_B/T_C = 2.5$  নিলে,  $K = 0.85$  হয় এবং  $\alpha$ -র মান পাওয়া যায় 3.15। এতে  $\alpha$ -র মানের ক্ষেত্রে উন্নতি দেখা গেলেও অন্যান্য ক্ষেত্রে খুব বেশী সুবিধার হয় নি।

### (খ) ডায়াটেরিসির সমীকরণ

একটু অন্য ধরনের একটি সমীকরণ খানিকটা তাত্ত্বিক পদ্ধতিতে ডায়াটেরিসি প্রকাশ করেন।

$$P = \frac{RT}{V-b} e^{a/RTV}$$



কম চাপে যখন  $V$ -র মান বেশী তখন

$$e^{a/RTV} = 1 - \frac{a}{RTV} \quad \text{লেখা যায়।}$$

$$\begin{aligned} \therefore P &= \frac{RT}{V-b} \left( 1 - \frac{a}{RTV} \right) \\ &= \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V(V-b)} \approx \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \end{aligned}$$

দেখা যাচ্ছে, সমীকরণটি ভ্যান ডার ওয়ালস সমীকরণে পর্যবসিত হচ্ছে।

এই সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$V_c = 2b, \quad T_c = \frac{a}{4bR}, \quad P_c = \frac{a}{4e^2b^2} = \frac{a}{29.56b^2}$$

$$\alpha = \frac{RT_c}{P_c V_c} = \frac{1}{2} e^2 = 3.695$$

$$\frac{T_B}{T_C} = 4$$

দেখা যাচ্ছে,  $V_c$  এবং  $\alpha$ -র মান কাছাকাছি দিচ্ছে, কিন্তু  $\frac{T_B}{T_C}$  র মান অনেক বেশী হচ্ছে।

(গ) সাহা ও বোসের সমীকরণ

তাপগতিবিদ্যা ও সংখ্যাতত্ত্বের সম্ভাব্যতা থেকে বিজ্ঞানী মেঘনাদ সাহা ও সত্যেন্দ্রনাথ বসু একটি সমীকরণ প্রস্তাব করেন।

$$P = -\frac{RT}{2b} e^{-a/RTV} \ln \frac{V-2b}{V}$$

এই সমীকরণ থেকেও বিশেষ শর্তসাপেক্ষে ভ্যান ডার ওয়ালস সমীকরণে পৌঁছান যায়। এই সমীকরণ থেকে সংকট গুণাক্ষের মান পাওয়া যায় 3.53। এই ফল অনেকটা সন্তোষজনক।

(ঘ) বার্থেলোর সমীকরণ

তাপগতিবিদ্যায় এই সমীকরণের বহু প্রয়োগ আছে। সমীকরণটি হল,

$$\left( P + \frac{a}{TV^2} \right) (V-b) = RT$$

এ থেকে দেখা যায়  $V_c = 3b$ ,  $\alpha = RT_c/P_c V_c = 8/3$ , যা ভ্যান ডার ওয়ালস সমীকরণেই পাওয়া যায়। তবে এই সমীকরণ নিম্ন চাপে কার্যকরী।

## 11.8 সারাংশ :

এই এককে আপনি যে বিষয়গুলি জানলেন সেগুলি হল :

- বাস্তব গ্যাস আদর্শ গ্যাসের সূত্রগুলি ঠিকঠিক পালন করে না। আদর্শগ্যাস অবস্থা থেকে বিচ্যুতির পরিমাণ গ্যাস ভেদে, তাপমাত্রাভেদে বিভিন্ন। বাস্তব গ্যাস আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ মানে কি না তা পরীক্ষা করতে গিয়ে তরলীকরণ পদ্ধতির নিয়মকানুন বার হয়।
- অ্যামাগাট ও এন্ড্রুজের পরীক্ষা থেকে গ্যাসের সংকট রাশি, বয়েল তাপমাত্রা ইত্যাদির ধারণার জন্ম।
- একই পদার্থের তরল দশা ও গ্যাসীয় দশা দুটি বিচ্ছিন্ন অস্তিত্ব নয় — বস্তুত দশান্তর একটি নিরবচ্ছিন্ন ঘটনা।
- বাস্তব গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ প্রতিষ্ঠার জন্য ভ্যান ডার ওয়ালস কর্তৃক গতিতত্ত্বের সরল অঙ্গীকারের সংশোধন ও সমীকরণ তৈরী।
- ভ্যান ডার ওয়ালস সমীকরণের নিরিখে পরীক্ষালব্ধ ফলাফল পর্যালোচনা ও এই সমীকরণের ত্রুটি বিচ্যুতির পর্যালোচনা।
- অন্যান্য অসংখ্য অবস্থার সমীকরণের মধ্যে উল্লেখযোগ্য দুচারটির আলোচনা।

## 11.9 প্রশ্নাবলি :

1. গ্যাস ও বাষ্পের পার্থক্য কী ?  $\text{CO}_2$  এর সংকট তাপমাত্রা  $31.4^\circ\text{C}$   $25^\circ\text{C}$  তাপমাত্রায় একে কি গ্যাস বলা যায় ?
2. সাধারণ উষ্ণতায় হাইড্রোজেনকে শুধুমাত্র চাপ প্রয়োগে তরলীভূত করা যায় না কেন ?
3. সংকট আয়তন কী ?
4. কার্বন ডাই অক্সাইড গ্যাসের ক্ষেত্রে  $a = 7.074 \times 10^{-9}$ ,  $b = 1.881 \times 10^{-9}$  c.c.,  $R = 0.003663/\text{K}$  হলে, এর সংকট তাপমাত্রা নির্ণয় কর।
5. শুষ্ক বায়ুর ক্ষেত্রে ভ্যান ডার ওয়ালস ধ্রুবকগুলির মান নির্ণয় কর। দেওয়া আছে,  $T_c = 132$  K,  $P_c = 37.2$  atmos, R per mole =  $82.07 \text{ cm}^3 \text{ atmos k}^{-1}$
6. আর্গন গ্যাসের  $T_c = -122^\circ\text{C}$ ,  $P_c = 48$  atmos. আর্গন গ্যাসের একটি অণুর ব্যাসার্ধ কত ?

7. ডায়েটেরিসির অবস্থার সমীকরণ

$$P = \frac{RT}{v-b} e^{a/RTv}$$

$$\text{দেখাও যে } V_c = 2b, T_c = \frac{a}{4bR}, P_c = \frac{a}{4b^2e^2}$$

8. বার্থেলোর অবস্থার সমীকরণ

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{TV^2} \text{ থেকে দেখাও}$$

$$V_c = 3b, T_c = \sqrt{8a/27bR}, P_c = \frac{1}{12b} \sqrt{\frac{2aR}{3b}}$$

9. হিলিয়ামের  $P_c = 2.26 \text{ atm}\delta\text{s}$ , সংকট ঘনত্ব  $= 0.069 \text{ gm cm}^{-3}$ ,  $R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ k}^{-1}$  হিলিয়ামের সংকট তাপমাত্রা নির্ণয় কর।

## 11.10 উত্তরমালা :

- কোন বায়বীয় পদার্থ সংকট তাপমাত্রার ওপরে থাকলে তাকে গ্যাস এবং নীচে থাকলে বাষ্প বলা হয়। বাষ্পকে চাপ প্রয়োগে তরলে পরিণত করা যায়। যেহেতু  $\text{CO}_2$  সংকট তাপমাত্রার নীচে আছে এজন্য একে গ্যাসে বলা যায় না। এখন এটি বাষ্প।
- হাইড্রোজেনের সংকট তাপমাত্রা ঘরের তাপমাত্রার অনেক নীচে। তাই সাধারণ তাপমাত্রায় শুধুমাত্র চাপ প্রয়োগ করে একে তরলীভূত করা যায় না।
- সংকট চাপে ও সংকট তাপমাত্রায় একক ভরের গ্যাসের আয়তনকে সংকট আয়তন বলে।
- আমরা জানি,

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{8a}{27bR} \\ &= \frac{8 \times 7.074 \times 10^{-9}}{27 \times 1.881 \times 10^{-9} \times 0.003663} \\ &= 304.2 \text{ K} \end{aligned}$$

5. আমরা জানি,

$$a = \frac{27 R^2 T_c^2}{64 P_c} = \frac{27 \times (82.07)^2 \times (132)^2}{64 \times 37.2}$$

$$= 13.31 \times 10^6 \text{ atm.cm}^6 \text{ mol}^{-2}$$

$$\text{এবং } b = \frac{RT_c}{8P_c} = \frac{82.07 \times 132}{8 \times 37.2} = 36.40 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

$$6. \text{ এখানে } T_c = -122 + 273 = 151\text{K}$$

$$p_c = 48 \text{ atmos}$$

$$R = \frac{22.4}{273} \text{ lit.atmos}$$

$$\text{এখন } b = \frac{RT_c}{8P_c}$$

$$= \frac{22.4}{273} \times \frac{151}{48 \times 8}$$

$$= \frac{151 \times 22.4}{48 \times 2184} \times 10^3 \text{ c.c.}$$

$$\text{আবার } b = \frac{2}{3} \pi \sigma^3 N_A$$

$$\therefore \frac{2}{3} \pi \sigma^3 \times 6.023 \times 10^{23} = \frac{151 \times 22.4 \times 10^3}{48 \times 2148}$$

$$\text{or, } \sigma^3 = \frac{3}{2 \times 3.14} \times \frac{151 \times 22.4 \times 10^3}{48 \times 2184 \times 6.023 \times 10^{23}}$$

$$\sigma = 1.368 \times 10^{-8} \text{ cm} = 1.368 \text{ \AA}$$

$$7. P = \frac{RT}{V-b} e^{-a/RTV}$$

$$\text{সংকট বিন্দুতে, } \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \text{ এবং } \left( \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_T = 0$$

$$\therefore \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = \frac{RT e^{-a/RTV}}{V-b} \left( \frac{a}{RTV^2} - \frac{1}{V-b} \right) = 0$$

$$P \left( \frac{a}{RTV^2} - \frac{1}{V-b} \right) = 0$$

$$\text{এবং } \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = P \left(-\frac{2a}{RTV^3} + \frac{1}{(V-b)^2}\right) + \left(\frac{a}{RTV^2} - \frac{1}{V-b}\right) \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = 0$$

$$\therefore RT_c = \frac{a(V_c - b)}{V_c^2}$$

$$\& RT_c = \frac{2a(V_c - b)^2}{V_c^3}$$

$$\therefore V_c = 2b$$

$$\text{এখন } RT_c = \frac{2a(V_c - b)}{V_c^2} = \frac{a}{4b} \quad \therefore T_c = \frac{a}{4bR}$$

$$P_c = \frac{RT_c}{V_c - b} e^{-\frac{a}{RT_c V_c}} = \frac{a}{4b} \frac{1}{b} e^{-2} = \frac{a}{4e^2 b^2}$$

$$8. P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{TV^2}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{TV^3}$$

$$\text{এবং } \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{TV^4}$$

$$\text{সংকট বিন্দুতে, } \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = 0$$

$$\therefore \frac{RT_c}{(V_c - b)^2} = \frac{2a}{TV_c^3} \quad \text{এবং} \quad \frac{2RT_c}{(V_c - b)^3} = \frac{6a}{TV_c^4}$$

$$\text{ভাগ করে পাওয়া যায় } \frac{V_c - b}{2} = \frac{V_c}{3}, \quad V_c = 3b$$

$$\therefore \frac{RT_c}{4b^2} = \frac{2a}{T_c \cdot 27b^3}$$

$$T_c^2 = \frac{8ab^2}{27b^3R} = \frac{8a}{27bR}, \quad T_c = \sqrt{\frac{8a}{27bR}}$$

এখন আবার

$$\begin{aligned}P_c &= \frac{RT_c}{V_c - b} - \frac{a}{T_c V_c^2} \\&= \frac{8\sqrt{8a}}{\sqrt{27bR} \cdot 2b} - \frac{a\sqrt{27bR}}{\sqrt{8a} \cdot 9b^2} \\&= \frac{\sqrt{2aR}}{3\sqrt{3b} \cdot b} - \frac{\sqrt{3aR}}{6\sqrt{2b} \cdot b} \\&= \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{2aR}{3b}}\end{aligned}$$

9. সংকট গুণক  $\alpha = \frac{RT_c}{P_c V_c} = \frac{8}{3}$

$$\therefore T_c = \frac{8}{3} \frac{P_c V_c}{R}$$

$$P_c = 2.26 \text{ atmos} = 2.26 \times 1.013 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$$

$$\text{ঘনত্ব} = 0.069 \text{ gm cm}^{-3} = 69 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\therefore V_c = \left(\frac{4}{69}\right) \text{ m}^3 \text{ k mol}^{-1}, R = 8.31 \times 10^3 \text{ J K mol}^{-1} \text{ k}^{-1}$$

$$\therefore T_c = \frac{8 \times 2.26 \times 1.013 \times 10^5 \times 4}{69 \times 3 \times 8.31 \times 10^3} = 4.26 \text{ k}$$

---

একক 12 : পরিসাংখ্যিক তাপগতি তত্ত্বের মূলনীতি (Fundamentals of Statistical Thermodynamics)

---

গঠন

12.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

12.2 সাম্যতন্ত্রের অবস্থা বর্ণনা।

বৃহৎ-অবস্থা এবং অণু-অবস্থা।

দশালোক।

12.3 অণু-অবস্থার সংখ্যা নির্ণয়।

12.4 পরিসাংখ্যিক বলবিদ্যা এবং তাপগতি বিদ্যার সেতু বন্ধন :

বোলৎজম্যান উপপাদ্য।

12.5 সনাতনী ম্যাক্সওয়েল বোলৎজম্যান বণ্টন নীতি।

12.6 আদর্শ গ্যাসের অবিন্যস্ততা।

গিব্‌সের কুট ও তার নিরসন।

স্যাকুর টেট্রোড সমীকরণ।

12.7 সারাংশ

12.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি।

3.8 সমাধান ও উত্তরমালা

## 12.1 প্রস্তাবনা

পদার্থের পর্যবেক্ষণলব্ধ ধর্মাবলী এবং তাদের পারস্পরিক সম্পর্কের বর্ণনা এবং ব্যাখ্যার জন্য কিভাবে তাপগতিতত্ত্ব (Thermodynamics) এবং বস্তুর আণবিক তত্ত্বের (Kinetic theory of matter) প্রয়োগ করা হয় তা আপনারা আগেই জেনেছেন। মানুষ তার দৈনন্দিন অভিজ্ঞতায় এবং প্রকৃতির সাথে মিথস্ক্রিয়ার মধ্যদিয়ে যে জ্ঞান অর্জন করেছে তার সারসংকলন ঘটেছে, তাপগতি তত্ত্বের চারটি সূত্রে, সেগুলি হল :

- ১। তাপীয় সাম্যের সূত্র (উষ্ণতা নীতি বা তাপগতি তত্ত্বের শূন্যতম সূত্র)
- ২। শক্তির সংরক্ষণ সূত্র (তাপগতি তত্ত্বের প্রথম সূত্র)
- ৩। অবিন্যস্ততা বৃদ্ধির নীতি (তাপগতি তত্ত্বের দ্বিতীয় সূত্র)
- ৪। নার্নস্টের তাপ তত্ত্ব (তাপগতি তত্ত্বের তৃতীয় সূত্র)।

এই সূত্রগুলির ওপর ভিত্তি করে গড়ে ওঠা তাপগতি তত্ত্বের প্রয়োগ পরিধি অত্যন্ত ব্যাপক। সমস্ত ধরনের সাম্যতন্ত্র এবং সাম্য প্রক্রিয়া—তা ভৌতিক, রাসায়নিক বা জৈবিক যাই হোক না কেন সর্বের ক্ষেত্রেই তাপগতি তত্ত্বের এই সার্বজনীন সূত্রগুলি প্রযোজ্য। কিন্তু তাপগতি তত্ত্বের মূল দুর্বলতা হল এই যে তা বস্তুর গঠনকারী কণাসমূহের আভ্যন্তরীণ গতি এবং তার থেকে উদ্ভূত ধর্মাবলীর ব্যাখ্যা দিতে অক্ষম। এর কারণ তাপগতি তত্ত্ব মূলতঃ অভিজ্ঞতা প্রসূত জ্ঞানের ওপর ভিত্তি করে রচিত এক ধরনের অভিজ্ঞতাবাদ (empiricism) বা প্রপঞ্চবাদ (phenomenology)। কোন বস্তু শেষ বিচারে, অসংখ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অণুপরিমাণের সমাহারে গঠিত এই ধারণার কোন স্থান নেই এই তত্ত্বে। অন্য দিকে বস্তুর আণবিক তত্ত্বে ধরে নেওয়া হয় বস্তু অসংখ্য অণুপরিমাণের সমাহারে গঠিত। এই তত্ত্বে বলবিদ্যার নীতিসমূহ বস্তুর গঠনকারী কণাসমূহের গতিবিশ্লেষণে ব্যবহার করে বস্তুর বিভিন্ন সমষ্টি ধর্মের ব্যাখ্যা এবং তাদের পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ধারণের চেষ্টা হয়েছে এবং অনেক ক্ষেত্রেই তা সাফল্যের সাথে সম্পাদনও করা হয়েছে।

পদার্থের আণবিক তত্ত্ব বিস্তৃত প্রয়োগক্ষেত্রে যথেষ্ট সাফল্য লাভ করলেও এই তত্ত্বের ব্যবহৃত পদ্ধতির ক্ষমতা সীমিত। তার কারণ দ্বিবিধ :

১। বস্তুর গঠনকারী কণা সমূহের মধ্যকার ক্রিয়াশীল বল সমূহ সম্পূর্ণরূপে জ্ঞাত নয়। সেগুলো জ্ঞাত হলেও তাদের সাহায্যে বিশাল সংখ্যক কণাসমূহের গতি বিশ্লেষণ করা এক অসম্ভব ব্যাপার। আর বাস্তবে পদার্থের সমষ্টিগত ধর্মই (যেমন—চাপ, উষ্ণতা) পদার্থবিদ্যার উপজীব্য এবং এ সর্বের গড় মান নির্ণয়ে কণাসমূহের চুলচেরা বিশদগতি বিশ্লেষণের বিশেষ প্রয়োজন নেই।

২। বলবিদ্যার প্রয়োগ কোন কোন ক্রিয়ার অপ্রত্যাভর্তন যোগ্যতা অথবা অবিন্যস্ততা বৃদ্ধির নীতির ব্যাখ্যা সম্ভব নয়। বস্তুত এগুলির ব্যাখ্যা সম্পূর্ণরূপে নির্ভর করে ঘটনার সম্ভাব্যতার উপর।

উদাহরণ স্বরূপ যদি দুটি পরস্পর সংযুক্ত আধারে গ্যাস < যে কোন গ্যাস > নেওয়া যায় তবে কোন বিশেষ মুহূর্তে সমস্ত গ্যাস অণুই একটি আধারে চলে আসবে এই রকম ঘটনা বলবিদ্যার হিসাবে অসম্ভব নয়। তবে সম্ভাব্যতার বিচারে এ ঘটনার সম্ভাব্যতা অত্যন্ত কম।

এই সম্ভাব্যতা অসম্ভাব্যতার বিচারই পরিসাংখ্যিক তাপগতি তত্ত্বের মূল কথা। সাম্যতন্ত্রের (equilibrium state) তাপগতীয় ধর্মাবলীর ব্যাখ্যার জন্য 1900 সালে গিব্‌স একাধারে বস্তুর গঠনকারী কণা সমূহের গতি



বিশ্লেষণে বলবিদ্যার ব্যবহার এবং বস্তুর বৃহৎ অবস্থার সম্ভাব্যতা নির্ণয়ের জন্য পরিসাংখ্যিক সম্ভাব্যতা তত্ত্বের প্রয়োগ করে পরিসাংখ্যিক তাপগতি তত্ত্ব বা পরিসাংখ্যিক বলবিদ্যা নামক বিষয়টির সূচনা করেন।

এখানে একটি কথা মনে রাখতে হবে, পরিসাংখ্যিক বলবিদ্যা, তাপগতি তত্ত্বের মতোই শুধুমাত্র সাম্যাতন্ত্র বা সাম্যক্রিয়ার (equilibrium process) ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। অবশ্য যেসব ক্ষেত্রে সাম্যবস্থার থেকে বিচ্যুতি খুব কম সে সব ক্ষেত্রেও এই তত্ত্ব প্রয়োগ করা হয়, এই আশা করে যে, তাত্ত্বিক ত্রুটি পরীক্ষালব্ধ ফলকে খুব সামান্যই প্রভাবিত করে।

## উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ার পর আপনি যে কাজগুলি করতে সক্ষম হবেন সেগুলি হল :

- তাপগতিক সম্ভাব্যতা বলতে কি বোঝায় তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- দশালোকের ধারণার সাহায্যে কোন তত্ত্বের অণু অবস্থার সংখ্যা বা তাপগতিক সম্ভাব্যতার মান নির্ণয় করতে পারবেন।
- সনাতনী সংখ্যায়নের ক্ষেত্রে বণ্টন অপেক্ষক নির্ণয় করতে পারবেন। এবং
- গিবস কূটের ব্যাখ্যা এবং তার নিরসন করতে পারবেন।

### 12.2.1 বৃহৎ-অবস্থা এবং অণু-অবস্থা (Macro State and Micro State)

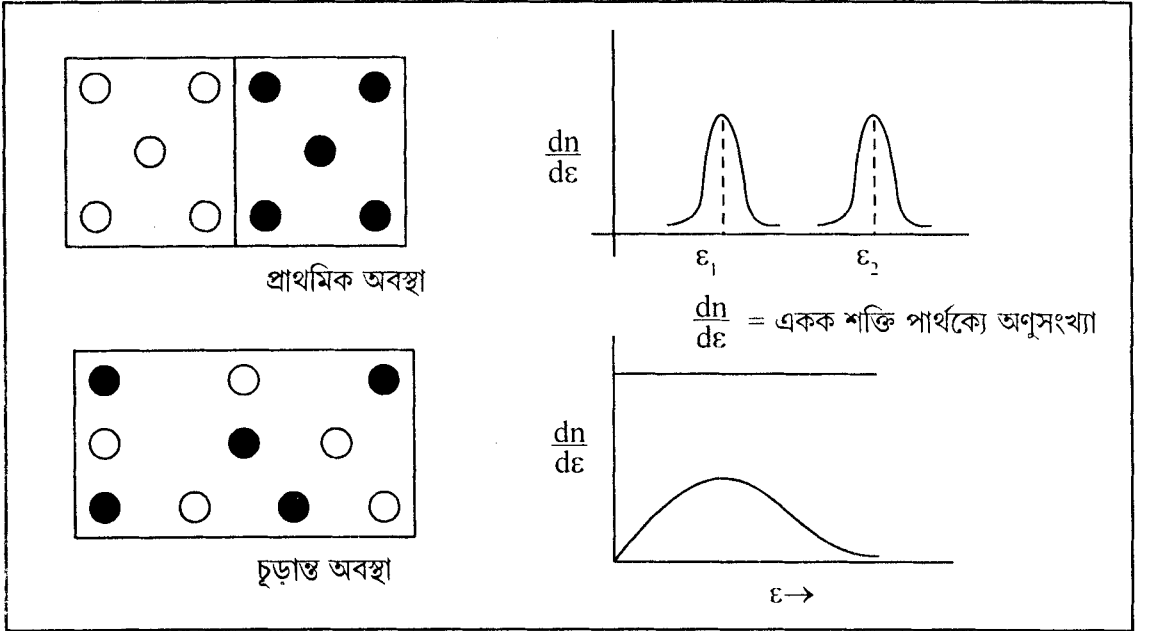
একটি তন্ত্র বলিতে যদি আমরা পিস্টন সহ চোঙের মধ্যে রক্ষিত একটি আদর্শ গ্যাসকে বোঝাই, তাহলে সেই তন্ত্রের বৃহৎ ধর্মগুলি হল :  $N$ , কণাসমূহের সংখ্যা;  $V$ , আদর্শ গ্যাসের আয়তন;  $P$ , চোঙের দেওয়ালে এবং পিস্টনে আদর্শ গ্যাস প্রযুক্ত চাপ;  $T$ , গ্যাসের উষ্ণতা ইত্যাদি। যদি ধর্মগুলি সময়ের সাথে অপরিবর্তিত থাকে এবং গ্যাসের সব জায়গাতেই ধর্মগুলি একই মানের হয় ( $V$  এবং  $N$ -এর ক্ষেত্রে এই শর্তটি প্রযোজ্য নয়), তাহলে আমরা বলতে পারি গ্যাসটি সাম্যাবস্থায় আছে। তখন উক্ত সাম্যাতন্ত্রের অবস্থা এই সব বৃহৎ ধর্ম অর্থাৎ  $P$ ,  $V$ ,  $N$ ,  $T$  ইত্যাদি দিয়ে সঞ্জায়িত করা হয়। তন্ত্রের এই অবস্থাকে বৃহৎ অবস্থা (macro state) বলে। আবার তন্ত্রের গঠনকারী  $N$  সংখ্যক অণুর  $3N$  সংখ্যক স্থানাঙ্ক ( $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N}$ ) এবং  $3N$  সংখ্যক ভরবেগ উপাংশ ( $P_1, P_2, \dots, P_{3N}$ ) এর উল্লেখ করেও তন্ত্রের অবস্থা নির্দিষ্ট করতে পারি। সেক্ষেত্রে তন্ত্রের অবস্থাটিকে অণু অবস্থা (micro state) বলা হয়।

একটি তন্ত্র যখন তাপগতীয় সাম্যে রয়েছে তখন তার বৃহৎ-অবস্থা একটিই; কেননা, এই অবস্থাটি সাম্যাবস্থায় তন্ত্রটির নির্দিষ্ট চাপ, আয়তন, উষ্ণতা ইত্যাদি এর দ্বারা নির্ধারিত। আবার অন্যদিকে তন্ত্রটি সাম্যাবস্থায় থাকলেও তার গঠনকারী অণুসমূহ নিরন্তর গতিশীল এবং ক্ষণে ক্ষণেই প্রতিটি কণার স্থানাঙ্ক এবং ভরবেগ পরিবর্তিত হচ্ছে বলে তন্ত্রটির অণু অবস্থাও প্রতি মুহূর্তে পরিবর্তনশীল। অর্থাৎ যখন আমরা বাইরে থেকে তন্ত্রটিকে দেখছি স্থির এবং তার বৃহৎ অবস্থার কোন পরিবর্তন নেই তখনও তন্ত্রটি আণুবীক্ষণিক মাত্রায় অত্যন্ত দ্রুত একটি অণু-অবস্থা থেকে অন্য অণু-অবস্থায় গতিশীল। অন্যকথায় বলা যায়, তন্ত্রটি বৃহৎ-অবস্থা  $W$ - সংখ্যক অণু-অবস্থার মধ্যে বাস্তবায়িত হয় যেখানে  $W$  হচ্ছে নির্দিষ্ট তাপগতীয় ধর্মাবলীর পরিপ্রেক্ষিতে তন্ত্রটির অণু অবস্থার সংখ্যা।  $W$  এর মান বেশী হওয়ার অর্থ, সাম্যাতন্ত্রটি আভ্যন্তরীণ দৃষ্টিভঙ্গিতে খুবই পরিবর্তনশীল, অত্যন্ত বিশৃঙ্খল। আর তাপগতীয় দৃষ্টিভঙ্গিতে,  $W$  যে বৃহৎ-অবস্থার সাথে সংশ্লিষ্ট সেটির

তাপগতিক সম্ভাব্যতা বেশি—তাই  $W$  কে তাপগতিক সম্ভাব্যতা হিসাবেও ব্যাখ্যা করা যায়। এই ব্যাখ্যায়  $W$  এবং অবিন্যস্ততা ( $S$ ) এর মধ্যে একটি সম্পর্কের ইঙ্গিতও পাওয়া যাচ্ছে, যেহেতু সাম্যাবস্থায় তন্ত্রের অবিন্যস্ততা সর্বোচ্চ। পরবর্তী অনুচ্ছেদে আমরা  $W$  এবং  $S$  এর মধ্যকার সম্পর্ক নিয়ে আলোচনা করব।

### 12.2.2. অবিন্যস্ততা ও তাপগতিক সম্ভাব্যতা (Entropy and Thermodynamic Probability) :

তাপগতিবিদ্যা থেকে আপনি জেনেছেন কোন অবরুদ্ধ তন্ত্রের (closed system) অবিন্যস্ততা কখনো কমানো যায় না। এ ধরনের তন্ত্রে যদি কোন প্রক্রিয়া প্রত্যাবর্তক হয়, তবে তার ক্ষেত্রে  $\Delta S = 0$  ; আর সমস্ত অপ্রত্যাবর্তক প্রক্রিয়াতেই  $\Delta S$  এর মান শূন্য অপেক্ষা বৃহত্তর। তাই প্রক্রিয়া যখন শেষ হয়ে যায়, তখন অবিন্যস্ততা গরিষ্ঠ মান প্রাপ্ত হয় এবং তন্ত্রটির বৃহৎ-অবস্থা জ্ঞাপক ধর্মাবলী—চাপ, আয়তন, উষ্ণতা, ইত্যাদি সময়ের সাথে স্থির হয়, অর্থাৎ তন্ত্রটি সাম্যাবস্থায় উপনীত হয়েছে। সমগ্র-বিশ্বকে একটি অবরুদ্ধ তন্ত্র হিসাবে ধরলে আমরা বলতে পারি বিশ্বের অবিন্যস্ততা সততই বর্ধনশীল, কারণ বিশ্বের অন্তঃস্থ সমস্ত প্রক্রিয়াই অপ্রত্যাবর্তক।



চিত্র-12.1

বাস্তবক্ষেত্রে কোন তন্ত্রের অন্তঃস্থ কণা-সমষ্টি স্বতঃস্ফূর্তভাবে সুশৃঙ্খল অবস্থা থেকে অবিন্যস্ত বা বিশৃঙ্খল অবস্থায় উপনীত হয়। এই তথ্যের অনুশীলনের জন্য আমরা এক কল্পিত পরীক্ষার আলোচনা করব। মধ্যস্থলে বিভাজক বিশিষ্ট কোন অবরুদ্ধ আধারের দুই অংশে সমসংখ্যক দুই প্রকার আদর্শ গ্যাসের অণু ছাড়া যাক। প্রথম প্রকারের (সাদা) প্রতিটির গতিশক্তি  $\varepsilon_1$  দ্বিতীয় প্রকারের (কালো) ক্ষেত্রে  $\varepsilon_2$ । বিভাজকটিকে এখন সরিয়ে নেওয়া হল। দুই প্রকারের অণুই এখন সমগ্র আধারের মধ্যে ছড়িয়ে পড়বে, আর তাদের মধ্যে অবিরত সংঘর্ষের ফলে গতিশক্তির বিনিময় ঘটবে। ক্রমশঃ অণুগুলির গতিশক্তির বণ্টন পরিবর্তিত হতে হতে এক চূড়ান্ত স্থির রূপ গ্রহণ করবে। 12.1 চিত্রে গতি শক্তির প্রাথমিক ও চূড়ান্ত বণ্টন দেখানো হল। অবস্থান ও গতিশক্তির বণ্টন উভয় দিক দিয়েই অণুগুলি প্রাথমিক সুবিন্যস্ত অবস্থা থেকে চরম বিশৃঙ্খলতায় পৌঁছায়।

আমরা আগেই বলেছি অণু-সমষ্টির ক্রমবর্ধমান বিশৃঙ্খলার কারণ তন্ত্রটি আণুবীক্ষণিক মাত্রায় একটি অণু অবস্থা থেকে অন্য অণু-অবস্থায় দ্রুত পাবমান অর্থাৎ তন্ত্রের বিশৃঙ্খলা তার বৃহৎ অবস্থার সম্ভাব্যতার উপর নির্ভরশীল। এই সম্ভাব্যতা আবার নির্ভর করবে তন্ত্রটির বৃহৎ অবস্থার সাথে সংশ্লিষ্ট অণু অবস্থার সংখ্যা বা তাপগতিক সম্ভাব্যতা (W) এর উপর। কাজেই বোঝা যাচ্ছে তন্ত্রটির তাপগতীয় আলোচনায় ঐ তন্ত্রের বৃহৎ অবস্থার সাথে সংশ্লিষ্ট অণু অবস্থার সংখ্যার হিসেব অত্যন্ত জরুরী।

এই হিসেব করতে গিয়ে আমরা আশ্রয় নেব এক কাল্পনিক লোকের (space)। ত্রিমাত্রিক বাস্তব দেশে গতিশীল কণার অবস্থান (অর্থাৎ তার স্থানাংক  $x$ ,  $y$ , এবং  $z$ ) যেমন সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয়, ঠিক তেমনিই তন্ত্রের অণু অবস্থার “স্থানাংক”—( $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N}, p_1, p_2, p_3, \dots, p_{3N}$ ) সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয়  $6N$  মাত্রার এক কল্পলোকে, যাকে দশালোক (phase space) বলা হয়। আসুন আমরা দেখি দশালোক বলতে ঠিক কি বুঝায়।

### 12.2.3 দশালোক :

$N$  সংখ্যক অণুর যে কোন একটির অবস্থা নির্দিষ্ট করতে গেলে দরকার হয় তিনটি অবস্থান স্থানাংক ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) এবং কণাটির তিনটি ভরবেগ উপাংশ ( $p_x, p_y, p_z$ ) অর্থাৎ ( $x, y, z, p_x, p_y, p_z$ ) এই ছয়টি রাশি দিয়ে আমরা কণাটির অবস্থা নির্দিষ্ট করতে পারি। আমরা অনুমান করতে পারি ছয়মাত্রিক এক কল্পলোকের অস্তিত্বের যেখানে ( $x, y, z, p_x, p_y, p_z$ ) এই ছয়টি দিক নির্দেশক সরলরেখা পরস্পরের সাথে লম্ব, এবং সেই কল্পলোকের একটি বিন্দু আমাদের কণাটির অবস্থা নির্দেশ করে। সময়ের সঙ্গে য়েহেতু কণাটি তার অবস্থান এবং ভরবেগ বদলায় তাই কল্পলোকে কণাটির প্রতিনিধিত্বকারী বিন্দুটিও একটি নির্দিষ্ট পথে, বলবিদ্যার শর্ত মেনে, পরিক্রমণ করে। এই কল্পলোকের অস্তিত্ব প্রকৃতপক্ষেই আমাদের কল্পনায়, আমাদের মননে; গাণিতিক হিসেবের সুবিধার জন্যই এর অবতারণা করা হয়েছে। যেহেতু এই ছয়মাত্রিক কল্পলোক সম্ভাব্যিত হয়েছ একটি অণুর অবস্থা বোঝানোর পরিপ্রেক্ষিতে, তাই এটি আণবিক দশালোক হিসেবেও বর্ণিত হয়। আবার আমরা তন্ত্রটির অন্তর্গত  $N$  সংখ্যক আদর্শ অণুর  $3N$  সংখ্যক অবস্থান স্থানাংক ( $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N}$ ) এবং  $3N$  সংখ্যক ভরবেগ উপাংশের ( $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{3N}$ ) সাহায্যে যখন তন্ত্রটির অণু অবস্থা বোঝাই তখন সেই অণু অবস্থাকে একটি  $6N$  মাত্রিক কল্পলোকের বিন্দু হিসাবে প্রকাশ করতে পারি। এই  $6N$  মাত্রার কল্পলোককে বলা হয় তন্ত্র দশালোক। (প্রকৃতপক্ষে যদি তন্ত্রের স্বাধীনতার মাত্রা  $f$  হয় তবে তন্ত্র দশালোক  $2f$  মাত্রিক হয়।) যেহেতু আদর্শ গ্যাসের কণাসমূহের মধ্যে কোন মিথস্ক্রিয়া নেই সেহেতু প্রতিটি কণাই আণবিক দশালোকে বিচরণ করতে পারে। তাই আদর্শ গ্যাস তন্ত্র যে অসংখ্য অণু অবস্থায় বিহার করতে পারে তাদের সংখ্যা নির্ণয়ে আসুন আমরা দেখি কিভাবে এই আণবিক দশালোকের ধারণা ব্যবহার করা যায়।

### অনুশীলন-1 :

একক ভর বিশিষ্ট একটি বুলেটকে ধরা যাক, সরাসরি উল্লম্বভাবে ছুঁড়ে দেওয়া হল। যদি বুলেটের প্রাথমিক গতিবেগ  $392 \text{ m/sec}$  এবং অভিকর্ষজ ত্বরণের মান  $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$  হয় তবে দশালোকে বুলেটের গতিপথটি আঁকুন।

### সমাধান :

ছোঁড়ার  $t$  সেকেন্ড পরে বুলেটের ভরবেগ

$$p = -9.8t + 392$$

এবং ওই সময়ে বুলেট কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব

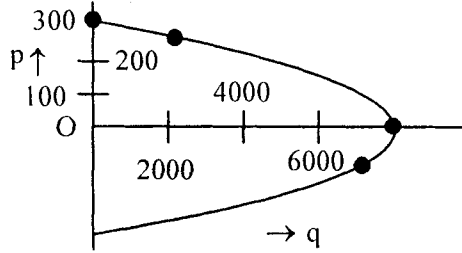
$$q = -4.9t^2 + 392t$$

এখন বিভিন্ন সময়ে বুলেটের ভরবেগ (p) এবং অতিক্রান্ত দূরত্ব নীচের তালিকায় লিপিবদ্ধ করা যায়।

t	0	10	30	40	60	80	
q	0	3430	7350	7840	5880	0	
p	392	294	98	0	-196	-392	

ওপরের দুই সমীকরণ থেকে t অপনয়ন করলে পাই  $p^2 + 19.6q - 153664 = 0$

তালিকা বা সমীকরণ থেকে p, q এর মান নিয়ে যদি  $q-$ ,  $p-$ , অক্ষ বরাবর (p, q) বিন্দুগুলি সংস্থাপন করা হয় তবে দশালোকে নীচের গতিপথটি পাওয়া যাবে (চিত্র 12.2)।



চিত্র-12.2

### 12.3 অণু-অবস্থার সংখ্যা নির্ণয় :

যে ছয় মাত্রিক দশালোকে আদর্শ গ্যাসের প্রতিটি অণু বিচরণ করছে তার আয়তনকে আমরা এমনভাবে কতকগুলি শক্তি প্রকোষ্ঠে ভাগ করতে পারি যাতে করে একটি নির্দিষ্ট প্রকোষ্ঠে অবস্থিত অণুগুলি সমশক্তি সম্পন্ন হয়। এখন যে সকল অণুর ভরভেগ p এবং  $p+dp$  পাল্লার মধ্যে থাকে তারা দশালোকে যে আয়তন অধিকার করবে তা হল :—

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \iiint dx dy dz dp_x dp_y dp_z \\ &= \iiint dx dy dz \int_p^{p+dp} dp_x dp_y dp_z \\ &= v \cdot 4\pi p^2 dp \end{aligned}$$

কণাগুলি যেহেতু আধারের যে কোন জায়গাতে থাকতে পারে কাজেই ত্রিমাত্রিক দেশে তারা যে আয়তন অধিকার করবে তা আধারের আয়তন V, অতএব

$\iiint dx.dy.dz = v$ , আধারের আয়তন।

আবার যেহেতু আলোচ্য কণাগুলির ভরবেগ  $p$  এবং  $p + dp$  পাল্লার মধ্যে সীমায়িত, কাজেই ভরবেগ দেশে (momentum space) এই ধরনের কণাগুলি যে আয়তন অধিকার করবে তা  $p$  এবং  $p + dp$  ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট দুটি গোলকের মধ্যবর্তী আয়তনের সমান এবং তার মান  $4\pi p^2 dp$ , (যেখানে  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ )। অতএব ছয়মাত্রিক দশালোককে সাধারণ ত্রিমাত্রিক দেশ (Ordinary Three-Dimensional Space) বা ত্রিমাত্রিক ভরবেগ (Three Dimensional Momentum Space) দেশের গুণফল দেশ (Product Space) হিসাবে ভাবলে

$$d\Gamma = v.4\pi p^2 dp$$

আবার  $m$  ভর বিশিষ্ট কণাগুলির প্রতিটির শক্তি  $\epsilon$  হলে

$$p = \sqrt{2m\epsilon}$$

$$\text{এবং } dp = \frac{1}{2}(2m)^{\frac{1}{2}}.\epsilon^{-\frac{1}{2}}.d\epsilon .$$

অর্থাৎ যে শক্তি প্রকোষ্ঠে অবস্থিত অণুগুলির গতিশক্তি  $\epsilon$  এবং  $\epsilon + d\epsilon$  এর মধ্যে সীমায়িত, দশালোকে তার আয়তন :—

$$d\Gamma = 2\pi v (2m)^{3/2}.\epsilon^{1/2}.d\epsilon \text{ ----- (12.1)}$$

এই রাশিমালা থেকে একটা বিষয় পরিষ্কার, দশালোকে সব শক্তি প্রকোষ্ঠের আয়তন সমান নয়—তা শক্তির মানের উপর নির্ভর করে। শক্তি কম হলে—সংশ্লিষ্ট শক্তি প্রকোষ্ঠের দশা-আয়তন কম হবে, আবার শক্তির মান বেশি হলে শক্তি প্রকোষ্ঠের আয়তনও বেশি হবে। আয়তনের এই তারতম্য এর জন্য বিভিন্ন প্রকোষ্ঠে কোন একটি কণাকে রাখার প্রাথমিক সম্ভাব্যতাও (apriori-probability) বিভিন্ন হবে। তাই হিসেবের সুবিধার জন্য প্রতিটি শক্তি প্রকোষ্ঠকে সমআয়তন বিশিষ্ট অনেকগুলি কোষে বিভক্ত করা হয় যাতে করে—প্রতিটি কোষে একটি কণাকে রাখার সম্ভাব্যতা একই হয়।

এখন প্রশ্ন হচ্ছে, দশালোকে এক একটি কোষের আয়তন কত হবে? সনাতনী পদার্থবিজ্ঞানে একটি কণা দশালোকে যে ন্যূনতম স্থান দখল করতে পারে তার মান শূন্য। তবুও শূন্য না ধরে এটির মান 'a' ধরা হল। অর্থাৎ যে কণাগুলির শক্তির মান  $\epsilon$  এবং  $\epsilon + d\epsilon$  এর মধ্যে অবস্থিত তাদের জন্য নির্দিষ্ট শক্তি প্রকোষ্ঠটিতে যতগুলি কোষ থাকতে পারে তাদের সংখ্যা—

$$g(\epsilon)d\epsilon = \frac{d\Gamma}{a} = \frac{2\pi v}{a}.(2m)^{\frac{3}{2}}.\epsilon^{\frac{1}{2}}.d\epsilon \text{ ----- (12.2)}$$

(কোয়ান্টাম বলবিদ্যায়, হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা সূত্র থেকে পাওয়া যায়  $a = h^3$  যেখানে  $h$  হচ্ছে প্লাংকের ধ্রুবক)

## অনুশীলনী-2 :

ঘরের উষ্ণতায় এক ঘনমিটার আয়তনের হিলিয়াম গ্যাসের কণাগুলি দশালোকে কতটা স্থান দখল করে? একটি কোষের ন্যূনতম আয়তন  $h^3$  হলে, মোট কোষের সংখ্যা কত?

সমাধান :

সমীকরণ 12.1 কে সমাকলন করে পাই উদ্দিষ্ট দশালোকের আয়তন

$$\Gamma = \int d\Gamma = 2\pi v(2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\epsilon} \epsilon^2 \cdot d\epsilon$$

$$= \frac{4\pi v}{3} (2m\epsilon)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4}{3} \pi v \cdot (2m \cdot \frac{3}{2} \cdot kT)^{\frac{3}{2}} \text{ (একটি কণার শক্তি, } \epsilon = \frac{3}{2} kT \text{ ধরে যেখানে } k \text{ বোলৎসম্যান ধ্রুবক, } T \text{ তাপমাত্রা)}$$

এবং কোষের সংখ্যা  $G = \Gamma/h^3$

এখানে  $v = \text{lm}^3$ ,  $m = 6.7 \times 10^{-27} \text{kg}$ .  $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J.S}$ .  $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/k}$  এবং  $T = 300^\circ \text{K}$  বসালে আয়তন এবং কোষ সংখ্যার মান পাওয়া যাবে।

উপরের বিস্তারিত আলোচনার সারসংক্ষেপ করলে দাঁড়ায়, আদর্শ গ্যাসের অণুগুলি দশালোকে যে আয়তনে অবস্থান করছে সেটিকে কতকগুলি শক্তি প্রকোষ্ঠে ভাগ করা হয়েছে এবং একটি নির্দিষ্ট শক্তি প্রকোষ্ঠ ধরা যাক  $r$  তম শক্তি প্রকোষ্ঠে, যে  $n_r$  সংখ্যক কণা আছে তাদের প্রত্যেকের শক্তি  $\epsilon_r$  এবং  $\epsilon_r + d\epsilon$  পাল্লার মধ্যে সীমায়িত এবং তারা ওই শক্তি প্রকোষ্ঠের অন্তর্গত  $g_r$  ( $g_r \rightarrow g(\epsilon)d\epsilon$ ) সংখ্যক কোষের মধ্যে থাকতে পারে। আমাদের সমস্যা হচ্ছে  $N$  সংখ্যক অণুকে বিভিন্ন শক্তি প্রকোষ্ঠে কতভাবে রাখা যাবে? এই বিন্যাস সংখ্যাই দেবে তন্ত্রটির অণু অবস্থার সংখ্যা বা তার তাপগতিক সম্ভাব্যতা

বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করার ব্যাপারেও আমরা আবার কিছু প্রশ্নের সম্মুখীন হচ্ছি, তা হল : (১) তন্ত্রের গঠনকারী কণাগুলি অভিন্ন হলেও তারা কি সদৃশ না অসদৃশ? (অর্থাৎ একই হাইড্রোজেন গ্যাসের অণুগুলি কি সদৃশ?) তাদের কি নামকরণ সম্ভব? ম্যাক্সওয়েল-বোলৎসম্যানের সংখ্যায়নে ধরে নেওয়া হচ্ছে আদর্শ গ্যাসের অণুগুলির (তারা একই প্রকৃতির হাইড্রোজেন বা হিলিয়াম হলেও) নামকরণ সম্ভব। অর্থাৎ তারা অসদৃশ। কিন্তু কোয়ান্টাম পদার্থ বিজ্ঞানে একই ধরনের কণা নিয়ে গঠিত কোন তন্ত্রের কণাগুলিকে সদৃশ বলে ধরে নেওয়া হয়েছে, তাই বসু-আইনস্টাইন সংখ্যায়ন এবং ফার্মি-ডিরাক সংখ্যায়ন—কোয়ান্টাম সংখ্যায়নের এই দুই শাখাতেই ধরে নেওয়া হয় কণাগুলি সদৃশ।

(২) এক একটি কোষে কতগুলি কণা থাকতে পারে? ম্যাক্সওয়েল-বোলৎসম্যান এবং বসু আইনস্টাইন এই দুই সংখ্যায়নে কোষ মধ্যস্থ কণা সংখ্যার ওপর কোন শর্ত আরোপ করা হয় না, অর্থাৎ একটি কোষে যতগুলি ইচ্ছে কণা রাখা যেতে পারে, কিন্তু ফার্মি-ডিরাক সংখ্যায়নে পাউলির অপবর্তন নীতি মেনে নিয়ে বলা হয়েছে—হয় কোন কোষে একটি মাত্র কণা থাকবে, না হয় আদৌ কোন কণা থাকবে না।

এখন সনাতনী ম্যাক্সওয়েল-বোলৎসম্যান সংখ্যায়নে কণা এবং কোষের প্রকৃতি মেনে নিয়ে আমরা বলতে পারি  $N$  সংখ্যক মোট কণার  $n_1$  সংখ্যক কণাকে প্রথম শক্তি প্রকোষ্ঠের  $g_1$  কোষে আমরা  $NC_{n_1} g_1^{n_1}$  উপায়ে রাখতে পারি।

এভাবে  $n_1$  কণাকে প্রথম প্রকোষ্ঠে রাখার পর দ্বিতীয় প্রকোষ্ঠে  $n_2$  কণাকে আমরা  $N^{-n_1} C_{n_2} g_2^{n_2}$  উপায়ে রাখতে পারি।

এইভাবে  $N$  কণাকে সমস্ত শক্তি প্রকোষ্ঠে যতভাবে রাখতে পারি তার সংখ্যা

$$W_{MB} = \frac{N! g_1^{n_1}}{(N-n_1)! n_1!} \cdot \frac{(N-n_1)! g_2^{n_2}}{(N-n_1-n_2)! n_2!} \cdots \frac{(N-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1})! g_r^{n_r}}{(N-n_1-n_2-\cdots-n_r)! n_r!}$$

$$= N! \cdot \pi \cdot \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \text{----- (12.3)}$$

(এখানে  $\pi$  গুণফল বোঝায়)

এইরকম ভাবে আমরা পরবর্তী এককে দেখাতে পারব যে সকল কণা বসু-আইনস্টাইন সংখ্যায়ন মেনে চলে, তাদের ক্ষেত্রে অণু অবস্থার সংখ্যা।

$$W_{BE} = \pi \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!} \text{---- (12.4.a)}$$

এবং ফার্মি ডিরাক সংখ্যায়ন এর ক্ষেত্রে তা হয় :

$$W_{FD} = \Pi \frac{g_i!}{(g_i - n_i)! n_i!} \text{---(12.4.b)}$$

অনুশীলনী-3 :

$$\text{যদি } g_i \gg n_i \text{ তবে দেখান যে } \frac{W_{MB}}{N!} = W_{FD} = W_{BE}$$

সমাধান :

$$W_{BE} = \Pi \frac{(g_i + n_i - 1)!}{n_i! (g_i - n_i)!} = \Pi \frac{(g_i + n_i - 1) \cdots (g_i \cdot n_i + 1) (g_i - n_i)!}{n_i! (g_i - n_i)!}$$

$$= \Pi \frac{g_i}{n_i!} = [\because g_i \gg n_i, \because (g_i + n_i - 1) \cdots (g_i - n_i + 1) = g_i \text{----- } g_i = g_i \cdot n_i]$$

$$\text{অনুরূপে } W_{FD} = \Pi \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

সুতরাং  $\frac{W_{MB}}{N!} = W_{FD} = W_{BE}$ . অর্থাৎ কোন একটি শক্তি প্রকোষ্ঠে কোষের সংখ্যা ( $g$ ) কণা সংখ্যার চেয়ে অনেক অনেক বেশী হলে (এবং কণাগুলি সদৃশ্য হলে), তিনটি সংখ্যায়নেই তাপগতিক সম্ভাব্যতার মান সমান।

## 12.4 বোলৎজম্যান উপপাদ্য (Boltzmann Theorem) : তাপগতিবিদ্যা এবং পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যার সেতুবন্ধন :

আমরা আগেই আলোচনা করেছি, তন্ত্রের সাম্যাবস্থায় অবিন্যস্ততা (S) এবং তাপগতিক সম্ভাব্যতা বা অণুঅবস্থার সংখ্যা (W) উভয়েই সর্বাধিক হয়। এই কারণে লেখা যায়,

$$S = f(W) \text{ ----- (12.5)}$$

এখন অপেক্ষক  $f(W)$  এর প্রকৃতি নির্ধারণ করার জন্য ধরা যাক পরস্পর সম্পর্কহীন দুই তন্ত্রের অবিন্যস্ততার মান যথাক্রমে  $S_1$  ও  $S_2$  এবং তন্ত্রদুটির অণু-অবস্থার সংখ্যা যথাক্রমে  $W_1$  ও  $W_2$ ।

যদি তন্ত্র দুটিকে একটি তন্ত্ররূপে কল্পনা করা যায় তবে যৌগিক তন্ত্রটির মোট অবিন্যস্ততা

$$S = S_1 + S_2$$

আবার একটি তন্ত্রের অণু অবস্থার সংখ্যা  $W_1$  অর্থাৎ ঐ তন্ত্রটি  $W_1$  উপায়ে বাস্তবায়িত হয়। কাজেই যৌগিক তন্ত্রের দুটি অংশ যথাক্রমে  $W_1$  এবং  $W_2$  উপায়ে বাস্তবায়িত হবে। সুতরাং যৌগিক তন্ত্রটির অণু-অবস্থার সংখ্যা  $W$  হলে  $W = W_1 W_2$

আবার যেহেতু  $S = S_1 + S_2$  কাজেই,

$$f(W) = f_1(W_1) + f_2(W_2)$$

এই সমীকরণকে যথাক্রমে  $W_1$  ও  $W_2$  এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই।

$$\frac{\partial f}{\partial W_1} = \frac{\partial f_1}{\partial W_1} \text{ (কেননা } f_2, W_2 \text{ এর ওপর নির্ভর করে না)}$$

$$\text{বা } \frac{\partial f}{\partial W} \cdot \frac{\partial W}{\partial W_1} = \frac{\partial f_1}{\partial W_1}$$

$$\text{বা } W_2 f'(W) = f_1'(W_1)$$

$$\text{বা } W_1 W_2 f'(W) = W_1 f_1'(W_1)$$

$$\text{বা } W f'(W) = W_1 f_1'(W_1)$$

$$\text{এবং একইভাবে } W f'(W) = W_2 f_2'(W_2)$$

$$\text{অতএব } W \frac{\partial f(W)}{\partial W} = W_1 \frac{\partial f_1(W_1)}{\partial W_1} = W_2 \frac{\partial f_2(W_2)}{\partial W_2} = \text{ধ্রুবক} = c$$

$$\text{কাজেই } f(w) = S = C \ln W + C' \text{ ----- (12.6)}$$

এখানে যেহেতু  $C = W \frac{\partial f(W)}{\partial W}$  কাজেই  $C$  একটি তন্ত্র নিরপেক্ষ সার্বজনীন ধ্রুবক। কিন্তু  $C'$ -এর মান বিভিন্ন তন্ত্রের ক্ষেত্রে বিভিন্ন হতে পারে।  $C$ -এর মান নিম্নবর্ণিত উপায়ে সহজেই নির্ণয় করা যেতে পারে।

ধরা যাক কোন এক গ্রাম অণু গ্যাসের আয়তন  $V$ , অবিন্যস্ততা  $S$  এবং অণু-অবস্থার সংখ্যা  $W$  অপেক্ষাকৃত স্বল্প আয়তন ( $V - \Delta V$ ) (যেখানে  $\Delta V \ll V$ )-এর মধ্যে কোন অণুর অবস্থিত হওয়ার সম্ভাব্যতা  $(1 - \frac{\Delta V}{V})$ ।



অণুর মোট সংখ্যা  $N$  (অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা) হলে প্রত্যেক অণুর একই সঙ্গে  $(V - \Delta V)$  আয়তনে অবস্থিত হওয়ার সম্ভাব্যতা  $(1 - \frac{\Delta V}{V})^N$ । এই পরিস্থিতিতে গ্যাসের উষ্ণতা এক থাকলেও তার আয়তন কম হওয়ার ফলে অবিন্যস্ততা ও তাপগতিক সম্ভাব্যতার মানও কমে যথাক্রমে  $S - \Delta S$  এবং  $W - \Delta W$  হয়। যেহেতু তাপগতিক সম্ভাব্যতার বিভিন্নতা কেবলমাত্র অণুসমূহের অবস্থানের তারতম্যের জন্যই ঘটে, অতএব

$$\left(\frac{W - \Delta W}{W}\right) = \left(1 - \frac{\Delta V}{V}\right)^N$$

অর্থাৎ  $\frac{\Delta W}{W} = N_A \frac{\Delta V}{V}$  ( $N_A$  = অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা)

সমীকরণ 12.6 থেকে পাওয়া যায় :

$$\Delta S = C \frac{\Delta W}{W}$$

অতএব  $\Delta S = CN_A \frac{\Delta V}{V}$

যেহেতু উষ্ণতা স্থির কাজেই আমরা লিখতে পারি,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{CN_A}{V}$$

আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে, আমরা তাপগতিবিদ্যা থেকে, পাই

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{P}{T} = \frac{PV}{TV} = \frac{RT}{TV} = \frac{R}{V} = \frac{CN_A}{V}$$

$$(\therefore Tds = du + PdV)$$

বা  $C = R/N_A$

কাজেই অবিন্যস্ততা এবং তাপগতিক সম্ভাব্যতার মধ্যে সম্পর্ক হল,

$$S = K \ell_n W + C' \text{ ----- (12.7)}$$

যেখানে  $K = C = \frac{R}{N_A}$  বোলৎসম্যানের ধ্রুবক

ইহা বোলৎসম্যান উপপাদ্য নামে পরিচিত। এই সূত্রের সাহায্যে কোন তত্ত্বের কোন নির্দিষ্ট বৃহৎ অবস্থায় অবিন্যস্ততার মান সুনিশ্চিতরূপে জানা যায় না। তবে দুই অবস্থায় অবিন্যস্ততার মধ্যে পার্থক্য নির্ণয় করা যায়। প্রাংকের মতানুসারে 12.7 সূত্রে  $C'$  এর মান শূন্য। কাজেই—

$$S = K \ell_n W \text{ ----- (12.8)}$$

বোলৎসম্যানের উপপাদ্যের সাথে পদার্থবিজ্ঞানের ইতিহাসের এক মর্মস্বন্দ ঘটনা জড়িত। বৃহৎ-দৃষ্টিভঙ্গী ও অণু-দৃষ্টিভঙ্গী এবং তাপগতিতত্ত্ব ও পরিসাংখ্যিক বলবিদ্যার মধ্যে সেতুবন্ধনকারী এই মহৎ গবেষণার জন্য

বোলৎসম্যান তাঁর জীবনকালে কোন স্বীকৃতি পাননি—পেয়েছিলেন ধিক্কার এবং লাঞ্ছনা। তাই পদার্থবিজ্ঞানের এই উজ্জ্বল প্রতিভা 1906 সালে আত্মহত্যা করেন।

অনুশীলনী-4 :

চরমশূন্য উষ্ণতায় আদর্শগ্যাসীয় তন্ত্রের কণাসমূহ সুবিন্যস্ত থাকলে অবিন্যস্ততার মান কত ?

সমাধান :

চরমশূন্যে তন্ত্রটি সুবিন্যস্ত, কাজেই তার অহাবস্থা বা তাপগতিক সম্ভাব্যতার মান 1 এবং  $S = 0$ । (কোন কোন পদার্থের ক্ষেত্রে  $W$ -এর মান চরমশূন্যেও ঠিক এক হয় না।)

## 12.5 সনাতনী ম্যাক্সওয়েল বোলৎজম্যান বণ্টন নীতি (Classical Maxwell-Boltzmann Distribution Law) :

12.3 অনুচ্ছেদে আমরা সাম্যতন্ত্রের বৃহৎ অবস্থার সাথে সংশ্লিষ্ট অণু-অবস্থার সংখ্যা  $W$  নির্ণয় করেছি। আমরা দেখেছি তন্ত্রের গঠনকারী অণুর প্রকৃতির উপর  $W$  এর মান নির্ভর করে।

যদি অণুগুলি অসদৃশ হয় তবে  $W$  এর মান 12.3 সমীকরণ অনুযায়ী,

$$W = N! \pi \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \text{----- (12.9)}$$

তন্ত্র সাম্যাবস্থায় থাকলে  $W$  এর মান সর্বোচ্চ হবে। আবার তন্ত্রটি যদি সম্পূর্ণরূপে অবরুদ্ধ হয় তবে তার মোট শক্তি,

$$U = \sum n_i \varepsilon_i \text{----- (12.10)}$$

এবং অণুসংখ্যা

$$N = \sum n_i \text{----- (12.11)}$$

তন্ত্রের এই দুই বৃহৎ ধর্ম সর্বদা স্থির থাকে। কাজেই সাম্যাবস্থায় অণুগুলির মধ্যে কিভাবে শক্তি বণ্টিত হয়েছে বা শক্তির একটি নির্দিষ্ট পাল্লা  $\varepsilon$  এবং  $\varepsilon + d\varepsilon$  তে কতগুলি অণু বিদ্যমান তা নির্ণয় করতে গেলে আমাদের ধরে নিতে হবে,

$$\delta \ell_n W = 0 \text{----- (12.12)}$$

$$\delta U = 0 \text{----- (12.13)}$$

$$\text{এবং } \delta N = 0 \text{----- (12.14).}$$

(সাম্যাবস্থায়  $W$  এর মান সর্বোচ্চ। যেহেতু  $W$  অতি বৃহৎ সংখ্যা তাই  $W$  এর জায়গায়  $\ell_n W$  ধরা হয়েছে, তাছাড়া আমরা আগেই দেখেছি বোলৎজম্যান উপপাদ্যে—  $W$  নয়  $\ell_n W$  তন্ত্রের অবিন্যস্ততা,  $S$  এর সাথে সমানুপাতী)। আমরা এর আগেও বলেছি কণাসমষ্টির তন্ত্রটি যখন সাম্যাবস্থায় আছে এমনকি তখনও তন্ত্রটির অণু অবস্থা অত্যন্ত দ্রুত পরিবর্তনশীল। এর অর্থ এই যে শক্তি প্রকোষ্ঠগুলি থেকে যেমন সব সময়ই কিছু অণু বেরিয়ে যাচ্ছে তেমনই আবার কিছু কণা প্রকোষ্ঠে প্রবেশ করছে। এইভাবে তন্ত্রের সাম্যাবস্থায় প্রতিটি শক্তি প্রকোষ্ঠের কণা সংখ্যার একটি গতিয় সাম্য বজায় থাকে। কাজেই আমরা বলতে পারি সংস্থাটি যখন তাপগতীয়

সাম্যবস্থায় হচ্ছে তখন যে সকল কণার শক্তির মান  $\varepsilon$  এবং  $\varepsilon + d\varepsilon$  পাল্লায় সীমায়িত তাদের সংখ্যা  $n(\varepsilon)d\varepsilon$  ও নির্দিষ্ট।

(12.12 – 12.14) এই তিনটি শর্ত সাপেক্ষে আমরা এই সংখ্যাটি নির্ণয় করব।

বৃহৎ সংখ্যার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য স্টার্লিং সূত্র ব্যবহার করে আমরা লিখতে পারি।

$$\ell_n N! = N(\ell_n - 1)$$

কাজেই সমীকরণ (12.3) থেকে পাই,

$$\begin{aligned} \ell_n W &= \ell_n \left( N! \pi \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \right) \\ &= \ell_n N! + \square \sum (n_i \ell_n g_i! - \ell_n n_i!) \end{aligned}$$

$$\text{বা } \ell_n W = N \ell_n N + \sum n_i \ell_n \frac{g_i}{n_i} \text{ ----- (12.15)}$$

সমীকরণ (12.15) এর অবকলন করে পাই

$$\delta \ell_n W = \sum \left( \ell_n \frac{g_i}{n_i} - 1 \right) \delta n_i \text{ ----- (12.16)}$$

এখন  $\delta \ell_n W = 0$ ,  $\delta v = 0$  এবং  $\delta N = 0$  এই সম্পর্কগুলি থেকে পাই,

$$\sum \left( \ell_n \frac{g_i}{n_i} - 1 \right) \delta n_i = 0 \text{ ----- (12.17)}$$

$$\sum \varepsilon_i \delta n_i = 0 \text{ ----- (12.18)}$$

$$\text{এবং } \sum \delta n_i = 0 \text{ ----- (12.19)}$$

শেষ তিনটি সমীকরণগুলির বিস্তৃত রূপ হল :

$$\left( \ell_n \frac{g_1}{n_1} - 1 \right) \delta n_1 + \left( \ell_n \frac{g_2}{n_2} - 1 \right) \delta n_2 + \text{-----} + \left( \ell_n \frac{g_i}{n_i} - 1 \right) \delta n_i + \text{-----} = 0 \text{ ----- (12.20)}$$

$$\varepsilon_1 \delta n_1 + \varepsilon_2 \delta n_2 + \text{-----} + \varepsilon_i \delta n_i + \text{---} = 0 \text{ ----- (12.21)}$$

$$\delta n_1 + \delta n_2 + \text{-----} + \delta n_i = 0 \text{ ----- (12.22)}$$

যেহেতু  $\delta n_i$  গুলি পরস্পর নিরপেক্ষ নয় কারণ এরা (12.21) ও (12.22) সমীকরণের মানে। সেজন্য (12.22) কে  $\alpha$  দ্বারা এবং (12.21) কে  $\beta$  দ্বারা গুণ করে তাদের যদি (12.20) এর সাথে যোগ করা যায় তাহলে পাওয়া যায় :

$$\left( \ell_n \frac{g_1}{n_1} - 1 + \alpha - \beta \varepsilon_1 \right) \delta n_1 + \left( \ell_n \frac{g_2}{n_2} - 1 + \alpha - \beta \varepsilon_2 \right) \delta n_2 + \text{---}$$

$$+ \left( \ell_n \frac{g_i}{n_i} - 1 + \alpha - \beta \varepsilon_i \right) \delta n_i + \text{---} = 0$$

$$\text{অর্থাৎ } \sum_i \left( \ell n \frac{g_i}{n_i} - 1 + \alpha - \beta \varepsilon_i \right) \delta n_i = 0 \text{ ----- (12.23)}$$

এখানে  $\alpha$  এবং  $\beta$  ল্যাগরাঞ্জের অণির্ধারিত গুণক (Lagrange's Undetermine multiplier)

ওপরের শ্রেণীতে  $\delta n_1, \delta n_2, \dots$  ইত্যাদি স্বাধীন নয়। কাজেই এদের সহগগুলির মান সাধারণ ভাবে শূন্য হতে পারে না। অন্তত (12.21-12.23) থেকে আমরা সেই ইঙ্গিত পাই। কিন্তু সমীকরণ (12.23) তে  $\delta n_i$  ইত্যাদির সহগগুলিতে অণির্ধারিত  $\alpha$  এবং  $\beta$  গুণক উপস্থিত আছে বলে আমরা প্রতিটি  $\delta n_i$  এর সহগকেই শূন্য হিসাবে ধরতে পারি। কারণ আমরা আশা করতে পারি  $\alpha$  এবং  $\beta$  এর কিছু নির্দিষ্ট মানে সেগুলি শূন্য হবেই এবং যেহেতু তারা অনির্ধারিত তাই পরিবর্তনকালে আমরা কিছু ভৌত শর্ত আরোপ করে  $\alpha$  এবং  $\beta$  এর মান নির্ণয় করতে পারব।

অতএব সমীকরণ (12.23) থেকে আমরা যে কোন শক্তি প্রকোষ্ঠের জন্য লিখতে পারি।

$$\left( \ell n \frac{g_i}{n_i} - 1 + \alpha - \beta \varepsilon_i \right) = 0$$

$$\text{বা } \ell n \frac{g_i}{n_i} = 1 - \alpha + \beta \varepsilon_i$$

$$n_i = \frac{g_i}{f} e^{-\beta \varepsilon_i} \text{ ----- (12.24)}$$

এটিই ম্যাক্সওয়েল-বোলৎসম্যান বণ্টন সূত্র। (যখন  $f = e^{1-\alpha}$ )।

সমীকরণ (12.24) থেকে আমরা জানতে পারি  $i$  তম শক্তি প্রকোষ্ঠে অবস্থিত অণুর সংখ্যা  $n_i$  এর মান তাদের প্রতিটির শক্তি  $\varepsilon_i$  এর ওপর কিভাবে নির্ভর করে। যদি আমরা লিখি,

$$n_i \rightarrow n(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$g_i \rightarrow g(\varepsilon) d\varepsilon$$

সেক্ষেত্রে সমীকরণ (12.24) এর পরিবর্তিত রূপটি হল :

$$n(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2\pi v}{a} \frac{(2m)^{\frac{3}{2}}}{f} \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-\beta \varepsilon} d\varepsilon \text{ ----- (12.25a)}$$

$$\text{বা } n(\varepsilon)d\varepsilon = F(\varepsilon)g(\varepsilon) d\varepsilon \text{ ----- (12.25b)}$$

$$\text{যেখানে } f(\varepsilon) = \frac{e^{-\beta \varepsilon}}{f} \text{ ----- (12. 25c)}$$

এবং এটিকে বণ্টন অপেক্ষক (distribution function) বলে।

ওপরের বণ্টনসূত্রটি আংশিকভাবে নির্ধারিত কেননা 'a' ছাড়াও f (অথবা  $\alpha$ ) এবং  $\beta$  অজানা। যদিও তন্ত্রের তাপগতিক ধর্মাবলীর নির্ণয়ের জন্য a-এর মান জানা একান্তভাবেই আবশ্যিক নয় তবুও একমাত্র কোয়ান্টাম বলবিদ্যার প্রয়োগেই এর মান নির্দিষ্ট করা সম্ভব। কিন্তু f এবং  $\beta$  এর মান না জানলে এই বণ্টনসূত্রকে তাপগতি বিদ্যায় আদৌ প্রয়োগ করা সম্ভব নয়।

আসুন আমরা এই দুই প্রবকের মান নির্ণয় করি।

ল্যাগরাঞ্জের অনির্ধারিত গুণকদ্বয়ের মান নির্ধারণ :

আমরা দেখেছি i-তম শক্তি প্রকোষ্ঠে অবস্থিত অণুর সংখ্যা

$$n_i = \frac{g_i}{f} e^{-\beta \epsilon_i} \text{ ----- (12.24)}$$

$$\text{এখন তন্ত্রের মোট কণার সংখ্যা } N = n_1 + n_2 + \text{----} = \sum_i n_i$$

i-এর পরিপ্রেক্ষিতে (12.24) সমীকরণের যোগফল নিলে আমরা পাই,

$$\sum_i n_i = N = \frac{1}{f} \sum_i g_i e^{-\beta \epsilon_i}$$

$$\text{এবং } f = \frac{Z}{N} \text{ ----- (12.26a)}$$

$$\text{যখন } Z = \sum_i g_i e^{-\beta \epsilon_i} \text{ ---- (12.26b)}$$

'Z' কে বলা হয় গুরুত্ব সমষ্টি (partition function) এবং এটি পরিসাংখ্যিক বলবিদ্যায় একটি মৌলিক ভূমিকা পালন করে, যে কোন তন্ত্রের ক্ষেত্রে Z-এর মান নির্ণয় করে f সহতন্ত্রের সমস্ত তাপগতিক ধর্মগুলি জানা যায়।

কিন্তু Z কে জানতে গেলে  $\beta$  এর মান নির্ণয় করা দরকার। আসুন আমরা একটি কাল্পনিক পরীক্ষা সম্পাদন করি যার সাহায্যে  $\beta$ -এর তাপগতিক বৈশিষ্ট্য নির্ধারণ করা সম্ভব।

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \text{ --- } \epsilon_r \text{---}$ $g_1, g_2, g_3 \text{ --- } g_r \text{---}$ $n_1, n_2, n_3 \text{ --- } n_r$ $\sum n_i = N$	$\epsilon'_1, \epsilon'_2, \epsilon'_3 \text{ --- } \epsilon'_r \text{---}$ $g'_1, g'_2, g'_3 \text{ --- } g'_r \text{---}$ $n'_1, n'_2, n'_3 \text{ --- } n'_r \text{---}$ $\sum n'_i = N'$
--	---

চিত্র-12.3

চিত্র-12.3-এ একটি যৌগিক অবরুদ্ধ তন্ত্র দেখানো হয়েছে। তাপ চলাচল করতে পারে এমন একটি বিভাজক দিয়ে যৌগিক তন্ত্রকে দুটো উপতন্ত্রে বিভক্ত করা হয়েছে। প্রত্যেকটি উপতন্ত্রে রয়েছে আদর্শ গ্যাসের নমুনা। প্রথম উপতন্ত্রের বিভিন্ন শক্তি প্রকোষ্ঠে অবস্থিত কণার সংখ্যা  $n_1, n_2, \dots$  ইত্যাদি এবং তাদের শক্তির মান এবং কোষের সংখ্যা যথাক্রমে  $(\varepsilon_1, g_1), (\varepsilon_2, g_2), \dots (\varepsilon_i, g_i)$  ইত্যাদি। দ্বিতীয় উপতন্ত্রে অনুরূপ রাশিগুলি যথাক্রমে  $(n'_1, \varepsilon'_1, g'_1), (n'_2, \varepsilon'_2, g'_2)$  ইত্যাদি।

প্রথম উপতন্ত্রে মোট কণাসংখ্যা  $\sum n_i = N$  এবং দ্বিতীয় উপতন্ত্রে তাদের সংখ্যা  $\sum n'_i = N'$ । যৌগিক তন্ত্রের তাপগতীয় সম্ভাব্যতা  $W$ , দুটো উপতন্ত্রের তাপগতীয় সম্ভাব্যতা যথাক্রমে  $W_1$  এবং  $W_2$  এর গুণফল।

কাজেই আমরা লিখতে পারি

$$W = W_1 W_2$$

যখন

$$\ln W_1 = N \ln N + \sum n_i \ln \frac{g_i}{n_i} \text{ ----- (12.27)}$$

$$\ln W_2 = N' \ln N' + \sum n'_i \ln \frac{g'_i}{n'_i} \text{ ----- (12.28)}$$

$$\text{অতএব } \ln W = N \ln N + \sum n_i \ln \frac{g_i}{n_i} + N' \ln N' + \sum n'_i \ln \frac{g'_i}{n'_i} \text{ ----- (12.29)}$$

আবার প্রত্যেকটি উপতন্ত্রের ক্ষেত্রে কণাসংখ্যা নির্দিষ্ট বলে,

$$\sum n_i = N = \text{ধ্রুবক} \text{ ----- (12.30)}$$

$$\text{ও } \sum n'_i = N' = \text{ধ্রুবক} \text{ (12.31).}$$

কিন্তু বিভাজকের ভিতর দিয়ে তাপ চলাচল করতে পারে বলে এককভাবে উপতন্ত্র দুটির শক্তি সংরক্ষিত নয়। তবে অবরুদ্ধ যৌগিক তন্ত্রের মোটশক্তি অবশ্যই সংরক্ষিত। কাজেই

$$\sum n_i \varepsilon_i + \sum n'_i \varepsilon'_i = U = \text{ধ্রুবক} \text{ ---- (12.32)}$$

সমীকরণ (12.29) – (12.32) থেকে পাই

$$\sum \ln \frac{g_i}{n_i} dn_i + \sum \ln \frac{g'_j}{n'_j} dn'_j = 0 \text{ ---- (12.33)}$$

$$- \ln f \sum dn_i = 0 \text{ ----- (12.34)}$$

$$- \ln f' \sum dn'_i = 0 \text{ ----- (12.35)}$$

$$\text{এবং } -\beta [\sum \varepsilon_i dn_i + \sum \varepsilon'_i dn'_i] = 0 \text{ ----- (12.36)}$$

(যেখানে  $-\ln f, -\ln f'$  এবং  $\beta$  ল্যাগরাঞ্জের গুণিতক)

শেষ চারটি সমীকরণকে একত্রিত করে পাই,

$$\sum_i \left( \ell n \frac{g_i}{n_i} - \ell n f - \beta \right) dn_i + \sum_j \left( \ell n \frac{g'_j}{n'_j} - \ell n f' - \beta \right) dn'_j = 0 \text{ ---- (12.37)}$$

অর্থাৎ সাম্যাবস্থায় দুটি উপতন্ত্রে বিভিন্ন অণুর মধ্যে শক্তির বণ্টনসূত্র গুলি হল :

$$n_i = \frac{g_i}{f} e^{-\beta \epsilon_i} \text{ ---- (12.38)}$$

$$\text{এবং } n'_j = \frac{g'_j}{f'} e^{-\beta \epsilon'_j} \text{ ---- (12.39)}$$

বণ্টনসূত্র (12.38 এবং 12.39) দুটির সবকটি প্রাচলই আলাদা, একমাত্র  $\beta$  ছাড়া। আমরা জানি তাপ চলাচল করতে পারে এমন বিভাজক দিয়ে বিভক্ত দুটি তন্ত্র সাম্যাবস্থায় উপনীত হলে তাদের উষ্ণতা একই হবে। কাজেই আমরা বলতে পারি  $\beta$ -এর সাথে তন্ত্রের উষ্ণতার যোগসূত্র আছে,  $\beta$  উষ্ণতার অপেক্ষক।

এখন বোলৎসম্যানের উপপাদ্য থেকে আমরা পাই,

$$\delta s = K \delta \ell n W = k \sum \ell n = \frac{g_i}{n_i} \delta n_i \text{ ---- (12.40)}$$

এখন (12.24) সূত্র থেকে পাওয়া যায়।

$$\ell n = \frac{g_i}{n_i} = -\alpha + \beta \epsilon_i \text{ ---- (12.41)}$$

সমীকরণ (12.40) ও (12.41) থেকে পাই

$$\begin{aligned} \delta s &= k \sum (-\alpha + \beta \epsilon_i) \delta n_i \\ &= -k \alpha \sum \delta n_i + k \beta \sum \epsilon_i \delta n_i \\ &= k \beta \delta u \text{ ---- (12.42)} \end{aligned}$$

যেহেতু  $N$  স্থির, অতএব  $\left( \frac{\partial s}{\partial u} \right)_v = k \beta$

এখন তাপগতিবিদ্যা থেকে আমরা পাই,  $s = s(u, v)$   $ds = \frac{du + Pdv}{T}$  ব্যবহার করে পাই,

$$\left( \frac{\partial s}{\partial u} \right)_v = \frac{1}{T} = k \beta$$

$$\text{অতএব } \beta = \frac{1}{KT} \text{ ---- (12.43)}$$

আমরা জানি সনাতন বলবিদ্যায় এক পরমাণুক (monoatomic) গ্যাসের শুধু চলন গতিই সম্ভব এবং সেক্ষেত্রে আমরা পরের এককে দেখব

$$Z = \frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} \text{ ----- (12.44)}$$

(কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় দশালোকে কোষের আয়তন  $a = h^3$ , যখন  $h$  প্লাংকের ধ্রুবক).

এবং  $f = \frac{Z}{N}$  এইভাবে  $\beta$  এবং  $\alpha (= -\ln f)$  ল্যাগরাঞ্জের অনির্ধারিত গুণকদ্বয়ের মান নির্ণয় সম্ভব।

**অনুশীলনী-5 :** কেন সনাতনী বলবিদ্যায় এক-পরমাণুক গ্যাসের শুধুমাত্র চলনগতি সম্ভব?

**সমাধান :** এক-পরমাণুক গ্যাসের একটি পরমাণুকে সনাতন পদার্থবিদ্যায় একটি বিন্দু-কণা—যার কোন গঠন নেই, তা দিয়ে বোঝান হয়। আবার যে কোন অবস্থায় আয়তনহীন বিন্দুর চলন ছাড়া ঘূর্ণন বা কম্পন সম্ভব নয়।

**অনুশীলনী 6 :** সনাতনী সংখ্যায়ন থেকে আদর্শ গ্যাসের অনুগুলির মধ্যে ম্যাক্সওয়েলের গতিবন্টনের সূত্রটি নির্ধারণ করুন।

**সমাধান :** আমরা ম্যাক্সওয়েল-বোলৎজম্যান সংখ্যায়ন থেকে জানতে পারি যে সকল অণুর শক্তি  $\epsilon$  এবং  $\epsilon + d\epsilon$  পাল্লার মধ্যে সীমায়িত তাদের সংখ্যা,

$$n(\epsilon)d\epsilon = \frac{g(\epsilon)d\epsilon}{f} e^{-\beta\epsilon}$$

এখন  $n(\epsilon)d\epsilon = n(c)dc$  এবং  $g(\epsilon)d\epsilon = g(p)dp$

$$\text{আবার } g(p)dp = \frac{V4\pi p^2 dp}{h^3} \text{ এবং } f = \frac{V(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{Nh^3}$$

$$\text{কাজেই } n(c)dc = \frac{V.4\pi p^2 dp}{\frac{V.(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{Nh^3}.h^3} e^{-\frac{mc^2}{2kT}} \quad (\because p = mc)$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}.4\pi NC^2 e^{-\frac{mc^2}{2kT}} dc.$$

## 12.6 আদর্শ গ্যাসের অবিন্যস্ততা

$S = k \ln W$ , তে সমীকরণ (12.5);

$$\ln W = N \ln W + \sum n_i \ln \frac{g_i}{n_i}$$

এবং সমীকরণ (12.41);

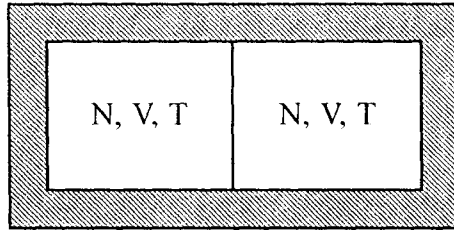
$$\ln \frac{g_i}{n_i} = -\alpha + \beta \epsilon_i \text{ ব্যবহার করে পাই,}$$



$$S = KN \ln N + KN \ln \left[ \frac{V}{Na} (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{U}{T} \text{ ----- (12.46)}$$

$$[\text{ধরে নেওয়া হয়েছে } -\alpha = + \ln f = \ln \frac{Z}{N} = \ln \left[ \frac{V}{Na} (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} \right]]$$

$$\text{এবং } \beta = \frac{1}{kT}, \sum n_i \epsilon_i = U]$$



চিত্র-12.4

### 12.6.1 গিবসের কূট ও তার সমাধান : (Gibbs Paradox and its resolution)

এখন একটি অবরুদ্ধ আধারকে বিভাজক দিয়ে দুটি সমান আয়তনে ভাগ করা হল (চিত্র 12.4)। প্রতিটি ভাগে একই উষ্ণতায় একই আদর্শ গ্যাস রাখা হল। অর্থাৎ প্রতিটি গ্যাসের আয়তন (V) অণুর সংখ্যা (N) এবং উষ্ণতা (T) একই। এক্ষেত্রে তাদের প্রতিটির অবিন্যস্ততার মান

$$S_1 = S_2$$

এবার যদি বিভাজকটিকে তুলে নেওয়া হয় তবে যৌগিকতন্ত্রের অবিন্যস্ততার ( $S_f$ ) হিসেব করতে আমাদের ধরতে হবে, এর আয়তন  $2V$ , অণুসংখ্যা  $2N$  এবং তাপমাত্রা  $T$ , অতএব,

$$S_f = 2kN \ln 2N + 2kN \ln \left[ \frac{2V}{2Nh^3} (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{2U}{T}$$

(ভর দ্বিগুণ হয়ে যাচ্ছে বলে শক্তির মানও দ্বিগুণ হবে)

দুটি গ্যাসের প্রাথমিক অবিন্যস্ততা ছিল :

$$S_i = S_1 + S_2 = 2kN \ln N + 2kN \ln \left[ \frac{V}{Nh^3} (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{2U}{T}$$

স্পষ্টতঃই

$$S_f - S_i = 2kN \ln 2.$$

একই উষ্ণতায় রক্ষিত একই আদর্শ গ্যাসকে সমতায়তনে বিভিন্ন আধারে রেখে তাদের মিশ্রণ ঘটালে তাদের অবিন্যস্ততা বেড়ে যায়, যা অসম্ভব। বিভিন্ন ধরনের অণু হলে অপ্রত্যাবর্তক ব্যাপন প্রক্রিয়ার মধ্য দিয়ে তাদের কিছু কাজ করতে হত। তখন তাদের অবিন্যস্ততা বৃদ্ধি পাওয়া স্বাভাবিক এবং তার ব্যাখ্যাও অবিন্যস্ততার

উপরোক্ত রাশিমালা থেকেই পাওয়া যায়। কিন্তু একই আদর্শ গ্যাসের দুটি বিভিন্ন নমুনা যাদের উষ্ণতা এবং আয়তনের কোন পার্থক্য নেই তাদের মেশালেও এ ধরনের কোন অপ্রত্যাভর্তক ব্যাপন প্রক্রিয়ার কোন সম্ভাবনা নেই—তাই এই মিশ্রণের ক্ষেত্রে অবিন্যস্ততা বৃদ্ধি পাওয়ার কোন সম্ভাবনা নেই।

এই ধাঁধা গিবসের কুট হিসেবে পরিচিত।

একমাত্র কোয়ান্টাম সংখ্যানেই এই কুটের ব্যাখ্যা সম্ভব। তবুও আসুন আমরা দেখি সনাতনী সংখ্যায়নের সাহায্যে কিভাবে গিবস এই ধাঁধার নিরসন করেছিলেন।

ম্যাক্সওয়েল-বোলৎজম্যান সংখ্যানে একই আদর্শ গ্যাসের বিভিন্ন অণুগুলোকে অসদৃশ ধরে তাপগতিক সম্ভাব্যতা  $W$ -এর যে মান নির্ণয় করা হয়েছিল তা হল :

$$W = N! \pi \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

গিবসের প্রস্তাব হল যদি  $W$  কে  $N!$  দিয়ে ভাগ করে এই ভাগফলকেই তাপগতির সম্ভাব্যতা হিসাবে নেওয়া যায় তাহলে এই ধাঁধার নিরসন সম্ভব। সেক্ষেত্রে পরিবর্তিত

$$W = \pi \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \text{ এবং } \ln W = \sum n_i \ln \frac{g_i}{n_i} + N$$

(অণু অবস্থা সংখ্যার হিসেব করার এই পদ্ধতিকে বলা হয় বোলৎজম্যান গণনা)

এবং পরিবর্তিত অবিন্যস্ততার মান হবে,

$$S = k \ln W = kN + kN \ln \left[ \frac{V}{N h^3} (2\pi m k T)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{U}{T} \text{ ----- (12.47)}$$

$S$ -এর এই মান ব্যবহার করলে দেখা যাবে

$$S_f - S_i = 0.$$

এখন  $W$  কে  $N!$  দিয়ে ভাগ করার অর্থ  $N$  সংখ্যক অণুগুলি নিজেদের মধ্যে যে  $N!$  উপায়ে সজ্জিত হয় সেগুলিকে বাদ দেওয়া—অর্থাৎ সনাতনী ম্যাক্সওয়েল-বোলৎজম্যান সংখ্যানে ও গিবসের ধাঁধা ব্যাখ্যা করতে গিয়ে, তন্ত্রের গঠনকারী অণুগুলিকে সদৃশ না ধরে উপায়ে নেই।

সমীকরণ (12.46) এবং (12.47)-এর তুলনা করলে দেখতে পাই প্রথম সূত্রে  $S$  আয়তন, ভর বা কণাসংখ্যার সমানুপাতী নয়, দ্বিতীয় সূত্রে  $S$  আয়তন, ভর এবং কণাসংখ্যার সমানুপাতী যা অবিন্যস্ততার তাপ গতীয় সংজ্ঞার সাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ।

**অনুশীলনী-7 :** চিত্র 12.4-এ দুটি প্রকোষ্ঠের গ্যাসদুটি আলাদা প্রকৃতির হলে (অর্থাৎ একটি হিলিয়াম অন্যটি আর্গন) তাহাদের মিশ্রণের ফলে অবিন্যস্ততা কতটা বাড়বে?

**সমাধান :** (ইঙ্গিত) সমীকরণ 12.46 সরাসরি প্রয়োগ করে প্রাথমিক এবং অন্তিম অবিন্যস্ততার হিসাব করতে হবে।

## 12.6.2 সাকুর টেট্রোং সমীকরণ :

এক গ্রাম মোল আদর্শ গ্যাসের অবিন্যস্ততা (বোলৎসম্যান গণনার সাহায্য নিয়ে)

$$S = kN_A + kN_A \ln \left[ \frac{V}{N_A h^3} (2\pi mkT)^{3/2} \right] + \frac{U}{T}$$

এখানে  $N_A$  = অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা এবং

$$U = \frac{3}{2} N_A kT$$

উপরের রাশিমালাটিকে

সরল করলে দাঁড়ায়

$$S = C_v \ln T + R \ln V + S_0 \text{ ----- (12.48)}$$

$$\text{যেখানে } S_0 = \frac{5}{2} R + R \ln \left( \frac{2\pi mk / h^2}{N_A} \right)^{3/2} \text{ ----- (12.49)}$$

এই সমীকরণটি সাকুর টেট্রোং সমীকরণ হিসাবে পরিচিত, তাপগতিবিদ্যা থেকেও এই সমীকরণ পাওয়া যায়, তবে সেক্ষেত্রে  $S_0$  এর মান অজানা।

এখান থেকেই বোঝা যায় পরিসাংখ্যিক বলবিদ্যার প্রয়োগে এই সমীকরণটি শুধু নির্ণয়ই করতে পারি না অজানা প্রবক  $S_0$  এর মানও নির্ণয় করতে পারি।

**অনুশীলনী-8 :** পরিসাংখ্যিক তাপগতিতত্ত্বের মূলনীতি সমূহ বোঝার ব্যাপারে সাকুর টেট্রোং সমীকরণের তাৎপর্য কী?

**সমাধান :** সনাতনী বলবিদ্যায় কোষের আয়তন শূন্য ধরা উচিত এবং ম্যাক্সওয়েল বোলৎসম্যান সংখ্যায়নে কণাসমূহকে অসদৃশ ধরা হয়েছে, এই দুই অনুসিদ্ধান্ত সত্য হলে সাকুর টেট্রোং সমীকরণের সঠিক ব্যাখ্যা পাওয়া অসম্ভব। বাস্তবে সাকুর টেট্রোং সমীকরণ থেকে এই ইঙ্গিতই পাওয়া যায় যে, দশালোকে কোষের আয়তন আছে আর তা শূন্য নয় এবং একই প্রকৃতির কণা সমূহ সদৃশ।

---

## 12.7 সারাংশ

---

1. সাম্যাবস্থায় আদর্শ গ্যাসতত্ত্বের তাপগতীয় সম্ভাব্যতা বা অণু-অবস্থার সংখ্যা নির্ণয় করা হয়েছে। দেখা গেছে গ্যাসের অণুগুলি যদি সদৃশ না হয় তাহলে এই সংখ্যা

$$W = N! \pi \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

2. তাপগতিবিদ্যা এবং পরিসাংখ্যিক পদার্থবিদ্যার সংযোগকারী বোলৎসম্যান উপপাদ্য নির্ণয় করা হয়েছে। নিম্নলিখিত সূত্রের মাধ্যমে এই সূত্রটি প্রকাশ করা হয়।

$$S = k \ln W + c'; \text{ প্লাঙ্কের মতে } c' = 0$$

3. একটি অবরুদ্ধ আদর্শ গ্যাসতত্ত্বে সাম্যাবস্থায় তত্ত্বের মোটশক্তি কিভাবে তার গঠনকারী অণুগুলির মধ্যে

বণ্ডিত তা নির্ণয় করা হয়েছে। আদর্শ গ্যাসের কণাগুলি ম্যাক্সওয়েল বোলৎজম্যান সংখ্যায়ন মেনে চলে এবং অবরুদ্ধ তন্ত্রে সাম্যাবস্থায় অপগতীয় সম্ভাব্যতা সর্বোচ্চ, তন্ত্রের মোট শক্তি ও অণু সংখ্যা স্থির এবং এক্ষেত্রে বোলৎজম্যান উপপাদ্য প্রযোজ্য। এই সব ধরে নিয়ে দেখা গেছে, যদি  $n_i$  সংখ্যক অণুর শক্তি  $\varepsilon_i$  হয় তবে তাদের মধ্যে সম্পর্ক :

$$n_i = \frac{g_i}{f} e^{-\beta \varepsilon_i}$$

$g_i$  হচ্ছে কোষসংখ্যা অর্থাৎ  $\varepsilon_i$  শক্তিসম্পন্ন যে সকল অণু বা দশালোকে যে সব কোষের মধ্যে থাকতে পারে তাদের সংখ্যা  $n_i$ ,  $f$  এবং  $\beta$  সাম্যতন্ত্রের প্রাচল।  $\beta$  তন্ত্রের উষ্ণতার সঙ্গে সম্পর্কিত এবং

$\beta = \frac{1}{kT}$  এবং  $f$  তন্ত্রের গুরুত্ব সমষ্টি  $Z$  এর সাথে সম্পর্কিত,

$$f = \frac{Z}{N}$$

এবং  $Z = \sum_i g_i e^{-\beta \varepsilon_i}$  গুরুত্ব সমষ্টি (partition function)

4. বোলৎজম্যান উপপাদ্য এবং ম্যাক্সওয়েল বোলৎজম্যান বণ্ডনের সাহায্যে আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে অবিন্যস্ততার মান নির্ণয় করা হয়েছে। সমতাপমাত্রায় রক্ষিত একই আয়তনের একই আদর্শ গ্যাসের দুটি মানের সংমিশ্রণে অবিন্যস্ততা বেড়ে যায়।—গিবসের এই ধাঁধার প্রদর্শন করা হয়েছে। দেখানো হয়েছে  $W$  এর মানকে  $N!$  দিয়ে ভাগ করে ভাগফলকেই তাপগতীয় সম্ভাব্যতা হিসেবে ব্যবহার করলে এই ধাঁধার নিরসন হয়।

## 12.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

- চারটি অসদৃশ কণাকে কতরকমে তিনটি বাস্কে রাখা যায়?
- বৃহৎ অবস্থা এবং অণু অবস্থা বলিতে কী বোঝায়? একটি উদাহরণ দিয়ে ব্যাখ্যা করুন।
- বোলৎজম্যান উপপাদ্য  
 $S = k \ln W + C'$  প্রয়োগ করে এবং বাস্তব গ্যাসের অণুগুলির আয়তন আছে কিন্তু তাদের মধ্যে কোন আকর্ষণ বা বিকর্ষণ বল কার্য করে না ধরে নিয়ে বাস্তব গ্যাসের অবস্থার সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা করুন।
- স্টার্লিং এর সূত্র  $\ln N! = N \ln N - N$ ,  $N$ -এর মান যথাক্রমে 10 এবং 15 ধরে নিয়ে দেখান এই সূত্রের ব্যবহার কতটা ক্রটিপূর্ণ।
- কোয়ান্টাম বলবিদ্যার প্রয়োগ করে দেখান, যে, যে সকল কণার শক্তি  $\varepsilon$  এবং  $\varepsilon + d\varepsilon$  পাল্লার মধ্যে সীমায়িত, দশালোকে তাদের জন্য উন্মুক্ত আয়তন

$$d\varepsilon = \frac{2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon}{h^3}$$

6. রৈখিক সুসামঞ্জস্য দোলকের দশালোকটি আঁকুন। কোয়ান্টাম তত্ত্বের দৃষ্টিভঙ্গী থেকে আমরা যদি এই সমস্যাটিকে দেখি তাহলে কী ঘটবে?
7. একটি তন্ত্র একটি অসীম ধারকত্ব সম্পন্ন তাপগাহের সাথে সাম্যাবস্থায় আছে। আলোচ্য তন্ত্রটির দেওয়ালের মধ্য দিয়ে তাপ চলাচল করতে পারে অর্থাৎ সাম্যাবস্থায় তন্ত্রটির উষ্ণতা (T) স্থির। (T = তাপগ্রাহের উষ্ণতা) —তার অন্তঃস্থ কণাদের সংখ্যা N এবং সংস্থার আয়তন (V)ও স্থির। তন্ত্রটিকে আমরা TVN আখ্যা দিতে পারি। সাম্যাবস্থায় এই তন্ত্রটির বৃহৎ অবস্থার সাথে অসংখ্য অণু-অবস্থা যুক্ত আছে। আমরা প্রতিটি অণু-অবস্থার সাথে একটি করে আমাদের মূল TVN তন্ত্রের নকলকে যুক্ত করে দিয়ে আমরা একটি M সংখ্যক ( $M \rightarrow \alpha$ ) তন্ত্রের সমাবেশ (Ensemble) তৈরি করতে পারি। এই সমাবেশে একটি তন্ত্র আসল, অন্যগুলি নকল কিন্তু প্রত্যেকেরই বৃহৎ ধর্মাবলী এক তফাৎ শুধু আণুবীক্ষণিক বিশদে। আমরা তাপগ্রাহের অনুপস্থিতিতে ভাবতে পারি, আমাদের আলোচ্য তন্ত্রটি অন্য (M-1) সংখ্যক নকল তন্ত্রগুলির সাথে এক তাপীয় সাম্যে অবস্থিত। সেক্ষেত্রে প্রমাণ করা যায় যদি  $n_i$  সংখ্যক তন্ত্রের শক্তি  $E_i$  হয় তবে

$$n_i = ce^{-\beta E_i} \quad (C \text{ ধ্রুবক})$$

$$\text{আবার যেহেতু } \sum n_i = M = c \sum e^{-\beta E_i}$$

$$\text{কাজেই } \frac{n_i}{M} = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}$$

$$Z = \sum e^{-\beta E_i}$$

এখানে ধরে নিতে হবে  $\sum n_i = M$  এবং গড়শক্তি  $\langle E \rangle = \sum \frac{n_i E_i}{M}$  স্থির, অর্থাৎ  $\sum \delta n_i = 0$  এবং  $\sum E_i \delta n_i = 0$ ।

8. চার নম্বর প্রশ্নের তন্ত্রটির দেওয়াল দিয়ে যদি তাপ এবং বস্তু (N) দুই-ই চলাচল করতে পারে তবে সাম্যাবস্থায় তন্ত্রটির উষ্ণতা (T) স্থির থাকে এবং রাসায়নিক বিভব ( $\mu$ ) ও আয়তন (v) স্থির থাকবে। এটি  $TV\mu$  তন্ত্র। সাম্যাবস্থায় এই  $TV\mu$  তন্ত্রটির বৃহৎ অবস্থার সাথে অনেকগুলি ( $M \rightarrow \alpha$ ) অণু-অবস্থা সংশ্লিষ্ট। এদের প্রতিটির সাথে যদি একটি তন্ত্র যা আসল তন্ত্রের প্রতিচ্ছবি সংশ্লিষ্ট করা যায় তবে আমরা তন্ত্রগুলির একটি সমাবেশ পাই যাতে তন্ত্রসংখ্যা M। আমরা ভাবতে পারি আসল তন্ত্র তার নকলগুলির সাথে শক্তি এবং কণা বিনিময় করে সাম্যাবস্থায় আছে। এই অবস্থায় যদি  $n_i$  সংখ্যক তন্ত্রের শক্তি  $E_i$  এবং কণা সংখ্যা  $N_i$  হয় তবে

$$\frac{n_i}{M} = \frac{e^{-\beta E_i + \mu N_i}}{Z}$$

$$\text{যেখানে } Z = \sum e^{-\beta E_i + \mu N_i}$$

এখানে ধরতে হবে :

$$\text{মোট তন্ত্রসংখ্যা } M = \sum n_i, \text{ তন্ত্রের গড়শক্তি } \langle E \rangle = \frac{\sum n_i \langle E_i \rangle}{M},$$

$$\langle N \rangle = \frac{\sum n_i \langle N_i \rangle}{M} \text{ প্রবন্ধ, অর্থাৎ}$$

$$\sum \delta n_i = 0, \sum E_i \delta n_i = 0 \text{ এবং } \sum n_i \delta n_i = 0$$

## 12.9 সমাধান ও উত্তরমালা

1. বিভিন্ন সম্ভাব্য বন্টন সংখ্যাগুলো হল :

$$(0, 0, 4), (0, 1, 3), (0, 2, 2), (0, 3, 1), (0, 4, 0)$$

$$(1, 0, 3), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 3, 0)$$

$$(2, 0, 2), (2, 1, 1), (2, 2, 0)$$

$$(3, 0, 1), (3, 1, 0), (4, 0, 0)$$

প্রত্যেক বন্টনে বিন্যাস সংখ্যা হিসেব করার জন্য নীচের সূত্রটি ব্যবহার করা যেতে পারে।

$$W(n_1, n_2, \dots) = N! \pi \frac{1}{n_1! n_2! \dots}$$

$$W(0, 0, 4) = W(4, 0, 0) = W(0, 4, 0) = \frac{4!}{0!0!4!} = 1$$

$$W(0, 1, 3) = W(1, 0, 3) = W(0, 3, 1) = W(1, 3, 0) = W(3, 1, 0) = W(3, 0, 1) \\ = \frac{4!}{0!1!3!} = 4$$

$$W(2, 0, 2) = W(2, 2, 0) = W(0, 2, 2) = \frac{4!}{2!2!0!} = 6$$

$$W(1, 1, 2) = W(1, 2, 1) = W(2, 1, 1) = \frac{4!}{2!2!1!} = 12$$

$$\text{মোট বিন্যাস সংখ্যা} = (3 \times 1) + (6 \times 4) + (3 \times 6) + (3 \times 12) = 81$$

2. তাপগতীয় রাশি অর্থাৎ উষ্ণতা (T) আয়তন (V) কণাসংখ্যা (N) ইত্যাদি দিয়ে একটি তন্ত্রের বৃহৎ অবস্থা প্রকাশিত হয়। আবার তন্ত্র অসংখ্য কণা দ্বারা গঠিত এদের প্রত্যেকের অবস্থা তাদের অবস্থান স্থানাঙ্ক (x y z) এবং ভরবেগ উপাংশ ( $p_x, p_y, p_z$ ) এই ছয়টি সংখ্যা দ্বারা প্রকাশিত হয়। তন্ত্রের গঠনকারী প্রতিটি কণার অবস্থা নির্দিষ্ট করে কণাসমষ্টি বা তন্ত্রটির অবস্থা নির্দিষ্ট করা যায়। তন্ত্রের এই অবস্থাকে অণু-অবস্থা বলে। যেহেতু কণাগুলি দ্রুতগতিশীল কাজেই তন্ত্রের অণু-অবস্থা দ্রুত পরিবর্তনশীল যদিও T, V, N ইত্যাদি দিয়ে প্রকাশিত তার বৃহৎ অবস্থার কোন পরিবর্তন হচ্ছে না। অর্থাৎ তন্ত্রের বৃহৎ অবস্থা তার অসংখ্য অণু-অবস্থার মধ্য দিয়ে বাস্তবায়িত হয়। যদি তন্ত্রটি তাপগতীয়

সাম্যবস্থায় থাকে তবে তার বৃহৎ অবস্থা একটিই এবং সেক্ষেত্রে অণু-অবস্থার সংখ্যা সর্বোচ্চ হয়।

একটি উদাহরণ দিয়ে ব্যাপারটি পরিষ্কার করা যেতে পারে। 4টি অসদৃশ কণা (a, b, c এবং d) কে একইরকম বাস্তু (1, 2) তে রাখা হবে। যেভাবে রাখা হবে তা নীচের তালিকায় লিপিবদ্ধ করা হোল।

### তালিকা-12.1

অণু-অবস্থা		বৃহৎ অবস্থা	তাপগতীয় সম্ভাব্যতা এবং কম্পাঙ্ক, W	সম্ভাব্যতা
বাস্তু-1	বাস্তু-2			
a b c d	0	(4, 0)	1	$\frac{1}{16}$
b c d	a	(3, 1)	4	$\frac{4}{16}$
a c d	b			
a b d	c			
a b c	d			
a b	c a	(2, 2)	6	$\frac{6}{16}$
a c	b d			
a d	b c			
b c	a d			
b d	a c			
c d	a b			
a	b c d	(1, 3)	4	$\frac{4}{16}$
b	a c d			
c	a b d			
d	a b c			
0	a b c d	(0, 4)	1	$\frac{1}{16}$

বাস্তুগুলো ও কণার সংখ্যা দিয়ে বৃহৎ অবস্থার সংজ্ঞা দেওয়া হয়। এক্ষেত্রে মোট পাঁচটি বৃহৎ অবস্থা (4, 0), (3, 1), (2, 2), (1,3) এবং (0, 4) আছে এবং এদের সাথে সংশ্লিষ্ট অণু অবস্থাগুলি যথাক্রমে 1, 4, 6, 4 এবং 1 অর্থাৎ মোট 16 টি। যেহেতু প্রতিটি অণু-অবস্থার সম্ভাব্যতা সমান কাজেই প্রতিটির সম্ভাব্যতা  $\frac{1}{16}$  এবং ঐ পাঁচটি বৃহৎ অবস্থার সম্ভাব্যতা যথাক্রমে  $\left(\frac{1}{16}\right)$ ,  $\left(\frac{4}{16}\right)$ ,  $\left(\frac{6}{16}\right)$ ,  $\left(\frac{4}{16}\right)$  এবং  $\left(\frac{1}{16}\right)$ । অণু-অবস্থার সংখ্যাই একটি বৃহৎ অবস্থার সম্ভাব্যতার পরিমাপ।

যদি কণাগুলি সদৃশ হয়, অর্থাৎ a, b, c, d প্রত্যেককেই শুধুমাত্র a দিয়ে প্রকাশ করা হয় তবে 12.1 তালিকা থেকে বোঝা যায়, প্রত্যেকটি বৃহৎ অবস্থার সাথে একটিমাত্র অণু-অবস্থা সংশ্লিষ্ট।

3. একটি আধারের আয়তন যদি  $V_1$  হয় তবে ঐ আধারের একটি ক্ষুদ্র অংশে, যেখানকার আয়তন  $V$ , একটি অণু-থাকার সম্ভাব্যতা  $\frac{V}{V_1}$ । বাস্তব গ্যাসের অণুকে যদি একটি ব্যাসার্ধের গোলক হিসেবে ধরা

হয় তবে ঐ অণুটি প্রকৃতপক্ষে  $\frac{4\pi}{3}(2r)^3 = 8 \cdot \frac{4\pi r^3}{3}$  অর্থাৎ আণবিক আয়তনের 8 গুণ =  $\beta$  (ধরা যাক) জায়গা অধিকার করবে। তার মানে যেহেতু দুটি অণুর কেন্দ্রের মধ্যে দূরত্ব  $2r$  এর কম হতে পারবে না তাই যদি প্রথম অণুটি  $V$  আয়তনে রাখার পর দ্বিতীয় একটি অণু রাখা হয় তবে ঐ দ্বিতীয় অণুটি  $V - \beta$  আয়তনের মধ্যে থাকবে অর্থাৎ এই দুটি অণুকে একসাথে  $V$  আয়তনে রাখার সম্ভাব্যতা

$\frac{V}{V_1} \cdot \frac{(V-\beta)}{V_1-\beta}$ । এইভাবে  $V$  আয়তনে  $N$  সংখ্যক অণুকে রাখার সম্ভাব্যতা

$$W = \frac{V}{V_1} \cdot \frac{V-\beta}{V_1-\beta} \cdot \frac{V-2\beta}{V_1-2\beta} \cdots \frac{V-\overline{N-1}\beta}{V_1-\overline{N-1}\beta}$$

$$= \frac{V^N}{V_1^N} \left(1 - \frac{\beta}{V}\right) \left(1 - \frac{2\beta}{V}\right) \left(1 - \frac{3\beta}{V}\right) \cdots \left(1 - \frac{\overline{N-1}\beta}{V}\right)$$

$V_1 \gg \beta$  কাজেই  $V_1(V_1 - \beta) \cdots V_1 - (N-1)\beta \approx V_1^N$

$$\text{আর } \left(1 - \frac{\beta}{V}\right) \left(1 - \frac{2\beta}{V}\right) \cdots = 1 - \frac{\beta}{V}(1 + 2 + \cdots + N - 1)$$

$$= 1 - \frac{N(N-1)\beta}{2V}$$

$$= 1 - \frac{Nb}{V} \quad b = \frac{N-1}{2}\beta \approx \frac{N\beta}{2}$$

$$\text{অতএব } W = \frac{V^N}{V_1^N} \left(1 - \frac{Nb}{V}\right)$$

$$\text{এবং } S = k \ln W = k \ln \left\{ \frac{V^N}{V_1^N} \left(1 - \frac{Nb}{V}\right) \right\}$$

তাপগতিবিদ্যা থেকে আমরা জানি

$$\frac{P}{T} = \left(\frac{\delta S}{\delta V}\right)_T \quad \therefore \left(\frac{\delta S}{\delta V}\right)_T$$



$$\text{কাজেই } \frac{P}{T} = \frac{KN}{V} \left(1 + \frac{b}{v}\right) \approx \frac{KN}{v-b} \left[ = \frac{KN}{V} \left(1 + \frac{b}{v}\right) = \frac{KN}{v(1-\frac{b}{v})} = \frac{KN}{v-b} \right]$$

এখানে ধরে নেওয়া হয়েছে  $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$  অর্থাৎ অণুগুলির মধ্যকার আকর্ষণ বল নেই, শুধুমাত্র অণুগুলির আয়তন আছে এটা ধরে নিলে তার অবস্থার সমীকরণ

$$P(v - b) = RT$$

যা ভ্যানডার-ওয়ালের সমীকরণ, যখন  $a = 0$

$$\text{সরাসরি } \ln 10! = \ln 3628800 = 15.10$$

আবার স্টার্লিং সূত্র-প্রয়োগ করলে

$$\ln 10! = 10 \ln 10 - 10 = 13.03$$

অতএব ভুল হয়েছে 13.83%

একইভাবে, সরাসরি

$$\ln 15! = 27.67$$

এবং স্টার্লিং সূত্রের সাহায্যে

$$\ln 15! = 15 \ln 15 - 15 = 25.62$$

ভুল হয়েছে = 7.4%

(অর্থাৎ  $N$  এর মান যত বেশী নেওয়া হবে স্টার্লিংসূত্রের প্রয়োগে ভুলের পরিমাণ ততই কমবে)

প্রাথমিক অবিন্যস্ততা =  $S_1 + S_2$ ; অন্তিম অবিন্যস্ততা  $S_1' + S_2'$  আমরা ধরে নিতে পারি আদর্শ গ্যাসের অণুগুলি যখন একটি অবরুদ্ধ আধারে আবদ্ধ থাকে তাদের প্রতিটি যেন একটি বিভব কুয়োর মধ্যে অবস্থিত। সরলীকরণের জন্য ধরা যাক কুয়োটি একমাত্রিক এবং  $x$ -অক্ষ বরাবর প্রসারিত এবং তা  $x = 0$  ও  $x = L$  এই ক্ষেত্রের মধ্যে আবদ্ধ। তখন আমরা কণাটির তরঙ্গ অপেক্ষকটিকে লিখতে পারি :

$$\psi = \psi_0 \sin K_x x$$

এবং সীমানা শর্তগুলি হল  $x = 0, \psi = 0$ ;  $x = L, \psi = 0$

$$\text{কাজেই } K_x L = n_x \pi \quad (n_x = 1, 2, \dots \text{ ইত্যাদি})$$

আবার ভরবেগের  $x$  উপাংশ  $p_x = \hbar k_x$  কাজেই

$$p_x = \hbar n_x \frac{\pi}{L} = \frac{n_x \hbar}{2L} \quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$$

এখন যদি ধরে নিই কুয়োটি  $y$  এবং  $Z$ -অক্ষ বরাবর ও প্রসারিত অর্থাৎ তা ত্রিমাত্রিক এবং ঐ দুই দিকেও তার মাত্রা  $L$  তখন ভরবেগের  $y$  এবং  $z$  উপাংশ যথাক্রমে  $p_y$  এবং  $p_z$  এর মান হল :

$$p_y = \frac{n_y h}{2L} \text{ এবং } p_z = \frac{n_z h}{2L} \text{ যখন } n_y = 1, 2 \text{ ইত্যাদি}$$

$$\text{এবং } n_z = 1, 2, \dots \text{ ইত্যাদি।}$$

$$\begin{aligned} \text{কণাটির শক্তি } \varepsilon &= \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \\ &= \frac{1}{2m} \frac{h^2}{4L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \end{aligned}$$

অর্থাৎ  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{8mL^2}{h^2} \varepsilon = (r, \text{ ধরা যাক}) n_x, n_y$  এবং  $n_z$  এই তিনটি সংখ্যা দ্বারা কণাটির কোয়ান্টাম অবস্থা বোঝান হয় যা দশালোকে বর্ণিত কোষের সমতুল। এখন  $n_x, n_y$  এবং  $n_z$  কে অক্ষ ধরে আমরা একটি ত্রিমাত্রিক সংখ্যা দেশ আঁকতে পারি যার মধ্যে কোন একটি বিন্দুর স্থানাংক  $(n_x, n_y, n_z)$ । সংখ্যাদেশে বিন্দুটি একক আয়তন অধিকার করে একটি করে কোয়ান্টাম অবস্থা বা কোষের অবস্থান নির্দিষ্ট করবে। শক্তির মান যদি  $\varepsilon'$ -এর থেকে কম হয় তবে কোয়ান্টাম অবস্থার সংখ্যা  $g'$  সংখ্যাদেশে  $r$  ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকের আয়তনের এক অষ্টমাংশ হবে যখন  $r = \frac{1}{h} \sqrt{8m\varepsilon'}$  (কেননা সংখ্যাদেশের এক অষ্টমাংশেই  $n_x, n_y$  এবং  $n_z$  প্রত্যেকেই ধনাত্মক) অতএব,

$$g' = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \frac{L^3}{h^3} (8m\varepsilon')^{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi V}{3h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{3}{2}}$$

এখন যে সকল বস্তুকণার শক্তি  $\varepsilon$  এবং  $\varepsilon + d\varepsilon$  এর মধ্যে থাকে তাদের জন্য উন্মুক্ত কোষের বা কোয়ান্টাম অবস্থার সংখ্যা

$$\begin{aligned} g(\varepsilon)d\varepsilon &= g'(\varepsilon + d\varepsilon) - g'(\varepsilon) \\ &= \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \end{aligned}$$

আমরা জানি একটি রৈখিক সুসামঞ্জস্যে স্পন্দকের অবকলন সমীকরণ

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} = -kq$$

যেখানে  $k$  স্থিতিংক এবং  $m$  স্পন্দকের ভর এবং  $q, t$  সময়ে সাম্যাবস্থা থেকে স্পন্দকের সরণ।

অবকলন সমীকরণটির সমাধান হল

$$q = q_0 \sin \omega t, \text{ যখন } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{স্পন্দকের স্থিতিশক্তি} = \int_0^q kq dq = \frac{1}{2} kq^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

$$\text{এবং গতিশক্তি} = \frac{1}{2} m \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \cdot \cos^2 \omega t$$

$$= \frac{p^2}{2m}, \quad p = m \frac{dq}{dt}$$

স্পন্দকটির মোটশক্তি E হলে,

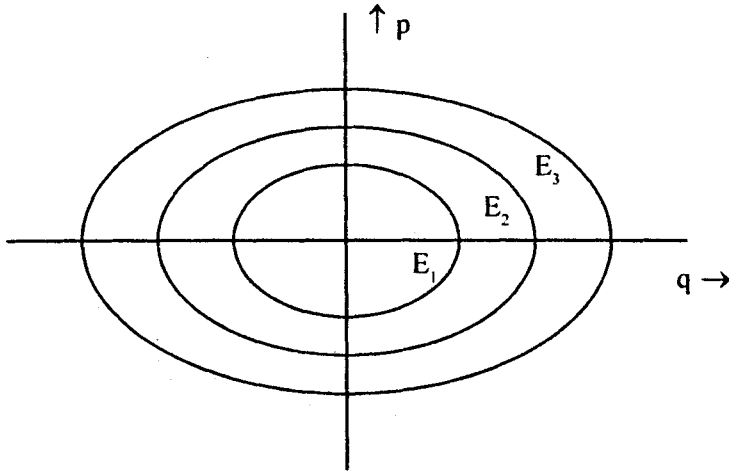
$$\frac{1}{2} m \omega^2 q^2 + \frac{p^2}{2m} = E$$

$$\text{বা } \frac{q^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} + \frac{p^2}{2mE} = 1$$

(q, p) এই দুই প্রাচল দিয়ে স্পন্দকটির কোন মুহূর্তের অবস্থা বোঝানো যায়। দ্বিমাত্রিক দশালোকে স্পন্দকটির সঞ্চারণপথ একটি উপবৃত্ত হবে যার অর্ধঅক্ষগুলি যথাক্রমে  $\sqrt{\frac{2E}{m}}$  এবং  $\sqrt{2mE}$ ।

(চিত্র-12.5) অতএব উপবৃত্তটি এই দশালোকে যে 'আয়তন' অধিকার করে থাকে তা হল

$$\pi \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \cdot \sqrt{2mE} = \frac{2\pi E}{\omega}$$



চিত্র-12.5

যেহেতু কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় E বিচ্ছিন্ন মান গ্রহণ করে তাই সেক্ষেত্রে প্রতিটি E-এর জন্য একটি করে উপবৃত্ত পাওয়া যাবে এবং তা সমগ্র দশালোককে সমদূরত্বে অবস্থিত কতকগুলি উপবৃত্তাকার বলয়ে বিভক্ত করবে।

প্রশ্নানুসারে M সংখ্যক তন্ত্রের সমাবেশে

$n_1$  সংখ্যক তন্ত্র অবস্থা-1 এ আছে যেখানে তাদের প্রত্যেকটির শক্তি  $E_1$ ,

$n_2$  " " অবস্থা-2 " " " "  $E_2$

.....

$n_i$  " " অবস্থা-i " " " "  $E_i$

এখন M সংখ্যক তন্ত্র থেকে এইভাবে  $n_1, n_2, \dots, n_i$  তন্ত্রগুলিকে নির্বাচন করা যায় মোট  $(M!/n_1!n_2! \dots)$  উপায়ে। এই ধরনের নির্বাচনকে পাওয়ার সম্ভাব্যতা W অবশ্যই এই বিন্যাস সংখ্যার সমানুপাতী।

$$\text{অর্থাৎ } W = C \frac{M!}{\pi n_i}$$

$$\text{কাজেই } \ln W = \ln C + \ln M! - \sum \ln n_i !$$

স্টার্লিং এর সূত্র প্রয়োগ করে।

$$\ln W = \ln C + N \ln N - \sum n_i \ln n_i$$

সাম্যবস্থায় W সর্বোচ্চ কাজেই

$$\delta \ln W = 0$$

$$\text{অর্থাৎ } \sum (\delta n_i + \delta n_i \ln n_i) = 0$$

যেহেতু সমাবেশের তন্ত্রসংখ্যা নির্দিষ্ট কাজেই,

$$\delta m = \sum \delta n_i = 0$$

$$\text{অর্থাৎ } \sum \ln n_i \delta n_i = 0.$$

$$\text{আবার তন্ত্রগুলির গড়শক্তি } \langle E \rangle = \frac{\sum n_i E_i}{M} \text{ ধ্রুবক}$$

$$\text{অর্থাৎ } \delta \sum n_i E_i = \delta [M \langle E \rangle] = 0$$

$$\text{অর্থাৎ } \sum E_i \delta n_i = 0$$

কাজেই আমরা তিনটি শর্ত পাই

$$\sum \ln n_i \delta n_i = 0, \sum \delta n_i = 0 \text{ এবং } \sum E_i \delta n_i = 0$$

$\alpha$  এবং  $\beta$  যদি লাগরাঞ্জের অনির্ধারিত গুণক হয় তবে আমরা লিখতে পারি :

$$\sum (\ln n_i + \alpha + \beta E_i) \delta n_i = 0$$

সঠিকভাবে  $\alpha$  এবং  $\beta$  এর মান নির্ধারণ করে আমরা প্রতিটি  $\delta n_i$ -কে স্বাধীন হিসেবে ধরে নিতে পারি এবং তখন

$$\ln n_i + \alpha + \beta E_i = 0$$

$$\text{সুতরাং } n_i = e^{-\alpha} e^{-\beta E_i}$$

যেহেতু  $\sum n_i = M$ ; অতএব  $M = e^{-\alpha} e^{-\beta E_i}$

$$\text{কাজেই } \frac{n_i}{M} = \frac{e^{-\beta E_i}}{\sum e^{-\beta E_i}}$$

এখন  $M$  সংখ্যক তন্ত্রের মধ্যে  $n_i$  সংখ্যক তন্ত্রকে বেছে নেওয়ার সম্ভাব্যতা  $p_i = \frac{n_i}{M}$

$$\text{অতএব } p_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} \text{ যখন } Z = \sum e^{-\beta E_i}$$

‘ $Z$ ’ কে TVN তন্ত্র সমাবেশের গুরুত্ব সমষ্টি বলে।

সাত নম্বর প্রশ্নের উত্তর থেকে বোঝা যায় এক্ষেত্রেও  $n_1$  সংখ্যক তন্ত্র অবস্থা-1 এ এবং  $n_2$  সংখ্যক তন্ত্র অবস্থা-2 এ। এইভাবে  $n_s$  সংখ্যক তন্ত্র অবস্থা- $s$  এ আছে এমন একটি বিন্যাসের সম্ভাব্যতা

$$W = C \frac{N!}{\pi n_s!}$$

এখন মনে রাখা দরকার  $n_1$  তন্ত্রের প্রতিটির গড়শক্তি  $\langle E_1 \rangle$  এবং গড়কণাসংখ্যা  $\langle N_1 \rangle$ ,  $n_2$  তন্ত্রে  $\langle E_2 \rangle$  এবং  $\langle N_2 \rangle$  এইভাবে  $S$ -তম তন্ত্রে গড়কণা সংখ্যা  $\langle N_s \rangle$  এবং গড়শক্তি  $\langle E_s \rangle$  কাজেই আগের মতই,

$$\delta \ln w = 0 \text{ যখন } \sum \ln n_s \delta n_s = 0$$

$$\text{এবং } \sum n_s = M; \frac{\sum n_s \langle E_s \rangle}{M} = \langle E \rangle \text{ ও } \frac{\sum n_s \langle N_s \rangle}{M} = \langle N \rangle$$

[এক্ষেত্রে তন্ত্রগুলির শক্তি এবং কণা সংখ্যা পরিবর্তনে কোন বাধা নেই বলে, এমনকি নির্দিষ্ট গোষ্ঠীর তন্ত্রেও সমাবেশের প্রতিটি সদস্যের শক্তি এবং কণাসংখ্যা নির্দিষ্ট নয় তাই তাদের গড় মান ধরা হয়েছে]

অতএব  $\sum \delta n_s = 0$ ,  $\sum E_s \delta n_s = 0$  এবং  $\sum N_s \delta n_s = 0$  এদের যথাক্রমে  $\gamma$ ,  $\beta$  এবং  $-\mu\beta$  দিয়ে গুণ করে আমরা সাত নম্বরের উত্তরে যেভাবে এধরনের সমস্যার সমাধান করেছি সেভাবেই পাই

$$\sum_s (\ln n_s + \gamma + \beta E_s - \mu\beta N_s) \delta n_s = 0$$

$$\text{বা } \ln n_s + \gamma + \beta E_s - \mu\beta N_s = 0$$

$$\text{বা } n_s = e^{-\gamma} e^{-\beta E_s} + \mu\beta N_s = e^{-\gamma} e^{-\beta(E_s - \mu N_s)}$$

$$\text{আবার } M = \sum n_s = e^{-\gamma} \sum e^{-\beta(E_s - \mu N_s)}$$

$$\text{বা } \frac{n_s}{M} = P_s = \frac{e^{-\beta(E_s - \mu N_s)}}{Z}$$

যেখানে  $\frac{n_s}{M} = P_s$ ,  $M$  সংখ্যক তন্ত্রের মধ্য থেকে  $n_s$  সংখ্যক তন্ত্রকে বেছে নেওয়ার সম্ভাব্যতা এবং

$Z$ , T-V- $\mu$  তন্ত্র সমাবেশের গুরুত্ব সমষ্টি।

---

## একক 13 : গুরুত্ব সমষ্টি (Partition Function)

---

### গঠন

#### 13.1 প্রস্তাবনা

##### উদ্দেশ্য

#### 13.2 এক পরমাণুক আদর্শ গ্যাসতন্ত্রের ক্ষেত্রে কণার চলনগতির জন্য গুরুত্ব সমষ্টি শক্তির সমবিভাজন নীতি

#### 13.3 দ্বিপরিমাণুক গ্যাস

##### আবর্তন এবং কম্পনজনিত গুরুত্ব সমষ্টি (Rotational Vibrational Partition Function)

##### হাইড্রোজেনের তাপধারণক্ষমতা

##### ইলেকট্রনীয় গুরুত্ব সমষ্টি (Electronic Partition Function)

#### 13.4 সমাবেশের তত্ত্ব (Theory of Ensembles)

##### ক্যাননিক্যাল গুরুত্ব সমষ্টি (Canonical Partition Function)

##### মহাক্যাননিক্যাল গুরুত্ব সমষ্টি (Grand Canonical Partition Function)

#### 13.5 সারাংশ

#### 13.6 সর্বশেষ প্রস্তাবনা।

#### 13.7 সমাধান এবং উত্তরমালা

---

### 13.1 প্রস্তাবনা

---

আমরা আগের এককে একটি আদর্শ গ্যাসতন্ত্রের জন্য সনাতন ম্যাক্সওয়েল-বোলৎজমান সংখ্যায়নে শক্তি বণ্টন সূত্র নির্ণয় করেছি। সেখান থেকে একটি কণার জন্য গুরুত্ব সমষ্টির সংজ্ঞা এবং এবং তাপগতীয় প্রাচলগুলির সাথে তার সম্পর্কের ব্যাখ্যা দেওয়া হয়েছে। আদর্শ এক পরমাণুক গ্যাসের ক্ষেত্রে গুরুত্ব সমষ্টির

রাশিমালা ধরে নিয়ে একটি সাম্যতন্ত্রের ক্ষেত্রে ঐ তাপগতীয় ধর্মগুলির মানও নির্ণয় করা হয়েছে। এই এককে (13.2 অনুচ্ছেদ) আমরা সনাতন বলবিদ্যা এবং কোয়ান্টাম বলবিদ্যা দুইয়ের সাহায্যেই আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে এই গুরুত্ব সমষ্টির রাশিমালা নির্ণয় করব। অনুচ্ছেদ 13.3 তে আমরা আলোচনা করব চলন ছাড়া ও অন্য ধরনের গতির (ঘূর্ণন, কম্পন, ইলেকট্রনীয় ইত্যাদি) জন্য গুরুত্ব সমষ্টি কিভাবে নির্ণয় করা যাবে। 13.4 অনুচ্ছেদ দ্বিপরমাণুক এবং বহুপরমাণুক অণুর তাপগতীয় এবং বর্ণালীসংক্রান্ত সমস্যার সমাধানে গুরুত্ব সমষ্টির ব্যবহার নিয়ে আলোচনা করা হবে। একটি তন্ত্রের গঠনকারী প্রতিটি কণার গুরুত্ব সমষ্টি থেকে যেমন তন্ত্রের গুরুত্ব সমষ্টি নির্ণয় করা যায়, ঠিক তেমনই একটি নির্দিষ্ট তন্ত্রকে একই ধরনের অসংখ্য তন্ত্রের সমাবেশের অন্যতম সদস্য ধরে নিয়ে, ঐ নির্দিষ্ট তন্ত্রের গুরুত্ব সমষ্টি নির্ণয় করা যায়। এই সমাবেশের তত্ত্ব নিয়ে আলোচনা হবে 13.5 অনুচ্ছেদে।

---

## উদ্দেশ্য

---

একক 13 অধ্যয়ন করার পর আপনি জানতে পারবেন।

- একপরমাণুক আদর্শ গ্যাসতন্ত্রের ক্ষেত্রে কণা গুরুত্ব সমষ্টি নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি
- যে সব কণার স্বাধীনতার মাত্রা 1 এর বেশী তাদের কণা গুরুত্ব সমষ্টি প্রতিটি স্বাধীনতা মাত্রার গুরুত্ব সমষ্টির গুণফল।
- কণাগুরুত্ব সমষ্টির ধারণা থেকে শক্তির সমবিভাজন নীতি নিজ নির্ণয়ের পদ্ধতি
- দ্বিপরমাণুক গ্যাসের ক্ষেত্রে আবর্তনজনিত, কম্পনজনিত এবং ইলেকট্রনগতি জনিত গুরুত্ব সমষ্টির রাশিমালা সমূহ এবং গ্যাসের তাপধারণকত্বের ব্যাখ্যায় তাদের ব্যবহার এবং
- সমাবেশের তন্ত্রের মূল বিষয়বস্তু এবং ক্যাননিক্যাল ও মহাক্যাননিক্যাল গুরুত্ব সমষ্টির রাশিমালাসমূহ

13.2 আদর্শ গ্যাসের তন্ত্রের ক্ষেত্রে কণার চলনের জন্য গুরুত্ব সমষ্টির রাশিমালা নির্ণয় :

13.2.1 সনাতন বলবিদ্যার পদ্ধতি : সনাতনী ম্যাক্সওয়েল-বোলৎজমান বণ্টন সূত্র হতে একক 12 তে আমরা দেখেছি কণাগুরুত্ব সমষ্টি।

$$Z = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i/KT}$$

এখন  $v$  আয়তনের আধারে অবস্থিত যে সকল কণার-ভরবেগ  $p$  এবং  $p + dp$  এর মধ্যে সীমাবদ্ধ তাদের জন্য ছয়মাত্রিক দশালোকে উন্মুক্ত আয়তনের পরিমাণ

$$v \cdot 4\pi p^2 dp.$$

দশালোকে ঐ আয়তনের মধ্যে যে সংখ্যক কোষ আছে তাদের সংখ্যা

$$g(p)dp = \frac{4v}{a} \pi p^2 dp.$$

(দশালোকে একটি কোষের আয়তন =  $a$ )

এখন  $g_i$  এর জায়গায়  $g(p)dp$  এর মান এবং  $\epsilon_i = \frac{p^2}{2m}$  বসিয়ে যোগফলকে সমাকলে রূপান্তর করে

আমরা পাই

$$Z = \frac{4\pi v}{a} \int_0^\alpha e^{-p^2/2mKT} p^2 dp$$

$$= \frac{4\pi v}{a} (2mKT)^{\frac{3}{2}} \int_0^\alpha e^{-u^2} u^2 du$$

$$\frac{p}{\sqrt{2mKT}} = u \text{ বসিয়ে পাই}$$

$$\text{এখন } \int_0^\alpha e^{-u^2} u^2 du = \frac{1}{4} \sqrt{\pi}$$

$$\text{অতএব } z = \frac{v}{a} (2\pi mKT)^{\frac{3}{2}} \text{----- (13.1)}$$

এটা চলনের জন্য একটি কণার গুরুত্ব সমষ্টির রাশিমালা।

### 13.2.2 কোয়ান্টাম বলবিদ্যার পদ্ধতি :

ভাবা যেতে পারে যে বদ্ধ আধারে গ্যাস রক্ষিত আছে, তা আয়তাকার এবং  $x$ ,  $y$  ও  $z$  অক্ষ বরাবর তার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে  $L_x$ ,  $L_y$  ও  $L_z$ । এই বাক্সের মধ্যে যে কোন জায়গায় একটি কণার স্থিতিশক্তি ধ্রুবক এবং আলোচনার সুবিধার জন্য তা শূন্য ধরা যেতে পারে। বাক্সের দেওয়ালগুলিতে কিন্তু স্থিতিশক্তি অসীম যার ফলে কণাটি বাক্সের বাইরে যেতে পারে না।

কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় কণাটির গতির শ্রয়ডিঞ্জার সমীকরণ

$$\nabla^2 \psi + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0 \text{----- (13.2)}$$

দিয়ে প্রকাশিত হয়। এখানে  $E$  কণার মোট শক্তি  $m$  তার ভর,  $\hbar = h/2\pi$ ,  $h$  প্লাংকের ধ্রুবক,  $\psi$  তরঙ্গ অপেক্ষক এবং

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$



সরলীকৃত একমাত্রিক গতির জন্য কণাটির সমীকরণ হয়

$$\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{2mE_x \psi_x}{\hbar^2} = 0 \text{ ----- (13.3)}$$

সীমা শর্ত  $x = 0, \psi = 0$  এবং  $x = L_x, \psi = 0$

প্রয়োগ করে এই অবকল সমীকরণটির সমাধান পাওয়া যায়

$$\psi_x = \psi_{x_0} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L_x}\right) x$$

সীমা শর্ত প্রয়োগ করে দেখা যায়  $E_x$  মান সনাতন বলবিদ্যার মতো সকল মান প্রাপ্ত হতে পারে না। এটুকু নিরদিষ্ট শক্তির মান পেতে পারে যেখানে

$$E_x = \frac{\hbar^2}{8L_x^2} \cdot \frac{n_x^2}{m} \text{ ----- (13.4)}$$

$n_x = 1, 2, 3, \dots$  ইত্যাদি অখণ্ড সংখ্যা।

এখন এই একমাত্রিক চলনের জন্য গুরুত্ব সমষ্টি

$$Z_x = \sum_i g_{ix} e^{-E_{ix} / KT}$$

এখানে যোগফল বিভিন্ন শক্তির মানের জন্য করা হয় যেখানে  $g_i$  হচ্ছে একটি নির্দিষ্ট শক্তিমাাত্রায় কোষসংখ্যা বা অণু-অবস্থা সংখ্যা। যদি অবস্থার ওপর যোগফল নেওয়া হয় তবে

$$Z_x = \sum e^{-E_x / KT}$$

অবস্থা

যেহেতু  $n_x$  এর মান 1, 2 ইত্যাদি হয় কাজেই  $n_x$  এর পরিবর্তন এর জন্য  $E_x$  এর মানের এত কম পরিবর্তন হয় যে  $E_x$  কে  $n_x$  এর অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক হিসেবে নিয়ে আমরা যোগফলকে সমাকলে রূপান্তর করতে পারি। অর্থাৎ

$$Z_x = \int_0^\alpha e^{-\frac{\hbar^2}{8mL_x^2 kT} n_x^2} dn_x$$

$$= \frac{(8mKT)^{\frac{1}{2}}}{h} L_x \int_0^\alpha e^{-u^2} du$$

যখন  $u^2 = (h^2 n_x^2) / 8mL_x^2 kT$

$$\text{আবার } \int_0^\alpha e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$\text{অতএব } Z_x = \frac{(2\pi mKT)^{\frac{1}{2}}}{h} L_x \text{ ----- (13.5)}$$

y এবং z দিকে কণাটির চলনের জন্য আমরা কণাটির গুরুত্ব সমষ্টি নির্ণয় করতে পারি এবং সেক্ষেত্রে

$$Z_y = \frac{(2\pi mKT)^{\frac{1}{2}}}{h} L_y \text{ এবং } Z_z = \frac{(2\pi mKT)^{\frac{1}{2}}}{h} L_z$$

কাজেই কণাটির স্বাধীনতার তিনটি মাত্রার (x, y এবং z দিকে চলনের) জন্য কণাটির সার্বিক চলন জনিত গুরুত্ব সমষ্টি

$$Z_{\text{ur}} = Z_x Z_y Z_z = \frac{(2\pi mKT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} L_x L_y L_z = \frac{(2\pi mKT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} V \text{ ----- (13.6)}$$

কাজেই বোঝা যাচ্ছে একটি কণার প্রতিটি স্বাধীনতার মাত্রার জন্য যদি গুরুত্ব সমষ্টি জানা থাকে তবে তার সার্বিক গতির জন্য গুরুত্ব সমষ্টি বার করতে হলে ঐ গুরুত্ব সমষ্টির গুণফল নিতে হবে। আমরা চলনের জন্য 13.2 সমীকরণটির সমাধান করলে পাই

$$E = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right)$$

$$\text{এবং } Z = \int_0^\alpha \int_0^\alpha \int_0^\alpha \text{Exp.} \left[ -\frac{h^2}{8mKT} \left( \frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right) \right] dn_x dn_y dn_z$$

$$= \int_0^\alpha \text{Exp.} \left( -\frac{h^2}{8mKT} \frac{n_x^2}{L_x^2} \right) dn_x \int_0^\alpha \text{Exp.} \left( -\frac{h^2}{8mKT} \frac{n_y^2}{L_y^2} \right) dn_y \int_0^\alpha \text{Exp.} \left( -\frac{h^2}{8mKT} \frac{n_z^2}{L_z^2} \right) dn_z$$

$$= \frac{(2\pi mKT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} L_x L_y L_z = \frac{(2\pi mKT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} V \text{ ----- (13.7)}$$

সমীকরণ 13.1 এবং 13.5 এর তুলনা করে পাই যে দশালোকে একটি কোষ যে আয়তন দখল করে তার মান  $h^3$  অর্থাৎ কোয়ান্টাম বলবিদ্যার পরিধির মধ্যেই একটি দশালোকে একটি কোষের আয়তন নির্ণয় করা সম্ভব। আবার হাইজেনবার্গের নীতি অনুসারে ছয়মাত্রিক দশালোকে একটি কণার অবস্থা বোঝাতে গেলে তার অবস্থান স্থানাংকগুলি (x) এবং ভরবেগ উপাংশগুলিকে একটি নির্দিষ্ট পাল্লার মধ্যে থাকতে হবে অর্থাৎ দশালোকে একটি কণার অবস্থা স্থানাংক (x, x + dx); (y, y + dy); (z, z + dz); ( $p_x$ ,  $p_x + dp_x$ ); ( $p_y$ ,  $p_y + dp_y$ ) ( $p_z$ ,  $p_z + dp_z$ ) এর মধ্যেই সীমায়িত যেখানে ( $dx dp_x$ ) ( $dy dp_y$ ) ( $dz dp_z$ ) এর মান h.h.h বা  $h^3$  এর কম হবেনা তাই দশালোকে একটি কণার অবস্থান যে আয়তন অধিকার করবে তার ন্যূনতম মান  $h^3$  যদিও সনাতন বলবিদ্যায় তা শূন্য হতে পারে।

## অনুশীলনী 1 :

দেখান যে একটি আদর্শ গ্যাসতন্ত্রের ক্ষেত্রে তন্ত্র গুরুত্ব সমষ্টি (system partition function)

$$Z = \sum_N$$

### 13.2.3 গুরুত্ব সমষ্টির ধারণা প্রয়োগ করে শক্তির সমবিভাজন নীতির নির্ণয় :-

আগের এককে আমরা দেখেছি, চলনগতির ক্ষেত্রে নির্ণীত গুরুত্ব সমষ্টির প্রয়োগ করে সাম্যাবস্থায় রক্ষিত একপরমাণুক আদর্শ গ্যাসের  $N$  সংখ্যক অণুর মোট শক্তি

$$U = \frac{3}{2} NKT$$

সুতরাং, প্রতিটি অণুর গড় গতিশক্তি  $\frac{3}{2}KT$  বা প্রতিটি অণুর প্রতিটি স্বাধীনতার মাত্রার জন্য গড়শক্তি  $\frac{1}{2}KT$  (চলনগতির স্বাধীনতার মাত্রা তিন)। যেখানে  $K$  বোলৎজমান ধ্রুবক। যদি আদর্শ গ্যাসের কণাগুলি এক পরমাণুক না হয় তবে তাদের স্বাধীনতার মাত্রা তিনের অধিক হবে। যেমন দ্বিপরমাণুক গ্যাসের অণুর স্বাধীনতার মাত্রা কম উষ্ণতায় মোট 5 টি চলনের জন্য তিনটি এবং আবর্তনের জন্য দুটি। উষ্ণতা বৃদ্ধি করলে যখন অণুগুলির কম্পন শুরু হবে তখন তার স্বাধীনতার মাত্রা আরো দুটি বাড়বে। (এইভাবে উষ্ণতা বাড়ার সাথে সাথে লুক্কায়িত স্বাধীনতার মাত্রাগুলিও একে একে উত্তেজিত হতে থাকে)।

আগের অনুচ্ছেদগুলিতে আমরা দেখেছি চলন গতির জন্য সার্বিক গুরুত্বসমষ্টি কণাটির গতির তিনটি লম্ব উপাংশের প্রতিটির গুরুত্ব সমষ্টির গুণফল। এই ব্যাপারটিকে সাধারণীকরণ করলে দাঁড়ায়, যদি কণাটির স্বাধীনতার মাত্রা  $f$  হয় এবং প্রতিটি স্বাধীনতার মাত্রার জন্য গুরুত্ব সমষ্টি যথাক্রমে  $Z_1, Z_2, \dots, Z_f$  হলে সার্বিক গুরুত্ব সমষ্টি  $Z = Z_1 Z_2 \dots Z_f$

এখন ধরা যাক গ্যাসের অণুগুলির গতিশক্তি

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_f \\ = a_1 p_1^2 + a_2 p_2^2 + \dots + a_f p_f^2$$

(যেখানে  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_f$  বিভিন্ন স্বাধীনতার মাত্রার জন্য শক্তি;  $p_1, p_2, \dots, p_f$  সাধারণীকৃত ভরবেগ;  $a_1, a_2, \dots, a_f$  ধ্রুবক)

$$\text{অতএব } Z_1 = \int_0^\alpha e^{-\beta a_1 p_1^2} dp_1; Z_2 = \int_0^\alpha e^{-\beta a_2 p_2^2} dp_2 \dots Z_f = \int_0^\alpha e^{-\beta a_f p_f^2} dp_f;$$

$$\text{এবং } Z = Z_1 Z_2 \dots Z_f.$$

$$\text{এখন } \beta a_f p_f^2 = u_f^2 \text{ বসালে পাই } p_f = \frac{1}{\sqrt{\beta a_f}} u_f$$

$$\text{অতএব } Z_f = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_f}} \int_0^\alpha e^{-u_f^2} du_f = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{1}{\sqrt{a_f}} 1$$

$$\text{যখন } 1 = \int_0^\alpha e^{-u_1^2} du_1$$

$$\text{এখন যেহেতু } \int_0^\alpha e^{-u_1^2} du_1 = \int_0^\alpha e^{-u_2^2} du_2 = \dots = \int_0^\alpha e^{-u_f^2} du_f = 1$$

অতএব

$$Z = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{f}{2}} I_f \cdot c \quad ; \quad c = (a_1 a_2 \dots a_f)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\ell_n Z = -\frac{f}{2} \ell_n \beta + \ell_n I_f + \ell_n c$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \ell_n Z}{\partial \beta}\right)_v = -\frac{f}{2\beta}$$

$$\text{এখন } U = NKT^2 \left(\frac{\partial \ell_n Z}{\partial T}\right)_v = NKT^2 \left(\frac{\partial \ell_n Z}{\partial \beta}\right)_v \left(\frac{\partial \beta}{\partial T}\right)$$

$$= -N \left(\frac{\partial \ell_n Z}{\partial \beta}\right)_v \text{ ----- 13.8}$$

$$\left[ \because \beta = \frac{1}{KT} \Rightarrow \frac{\delta \beta}{\delta \beta} = -\frac{1}{KT^2} \right]$$

$$\text{অতএব } \left(\frac{\delta \ell_n Z}{\delta \beta}\right)_v = +\frac{U}{N} = +\frac{f}{2} KT$$

$$\text{বা প্রতি স্বাধীনতা মাত্রার জন্য প্রতি অণুর গড়শক্তি} = \frac{1}{2} KT$$

**অনুশীলনী-2 :**

একটি আদর্শ গ্যাস সমন্বিত তন্ত্রের ক্ষেত্রে গড় কণা দূরত্ব ( $r$ ), দ্যব্রগলা তরঙ্গ দৈর্ঘ্য ( $\lambda\beta$ ) এবং কণা গুরুত্ব সমষ্টি ( $Z$ ) এর মধ্যকার সম্পর্কটি নির্ণয় করুন।

**অনুশীলনী-3 :**

দুটি সমআয়তনের পাত্রকে মাঝখানে একটি দেওয়াল দিয়ে আলাদা করা হয়েছে। দুটো পাত্রে একই একপরমাণুক আদর্শ গ্যাসের  $N$  সংখ্যক কণা থাকে এবং পাত্রদুটি অন্য একটি তাপগাত্রের সাথে  $T$  উষ্ণতায় তাপীয় সাম্যাবস্থায় আছে। দেখান যে দেওয়াল তুলে দিলে গ্যাসের এনট্রপি বৃদ্ধি পাবে।

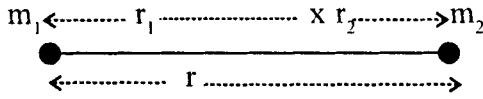
## অনুশীলনা-4 :

272k উষ্ণতায় এবং এক বায়ুমণ্ডল চাপে এক গ্রাম মোল নিয়ন গ্যাসের এনট্রপির মান নির্ণয় করুন।

অনুশীলনী-5 : 3নং প্রশ্নে দেখা যাচ্ছে তাপগতিক সাম্যাবস্থায় রক্ষিত দুটি সমআয়তনের একই আদর্শ গ্যাসের মিশ্রণের ফলে এনট্রপি বৃদ্ধি পাচ্ছে, অথচ বাস্তবে তা ঘটে না। ব্যাখ্যা কী?

## 13.3 দ্বিপরিমাণুক আদর্শগ্যাস

হাইড্রোজেন ক্লোরাইডের মত একটি দ্বিপরিমাণুক গ্যাস নিয়ে বিবেচনা করা যাক। HCl এর পরিমাণ দুটির ভর  $m_1$  এবং  $m_2$  এবং তারা আন্তপারমাণবিক বল দ্বারা বিধৃত। ধরা যাক তাদের মধ্যকার দূরত্ব  $r$ ।



চিত্র-13.3.1

দ্বিপরিমাণুক গ্যাসের একটি অণুর দুটি পরিমাণুর সংযোজক সরলরেখাটিকে  $x$  অক্ষ হিসেবে ধরলে  $x$  অক্ষ বরাবর অণুটির কোন ঘূর্ণন হবে না কিন্তু ভরকেন্দ্র  $c$  বিন্দুগামী  $y$ -অক্ষ এবং  $z$ -অক্ষ বরাবর অণুটির ঘূর্ণনে কোন অসুবিধা নেই। যদি  $I_y$  এবং  $I_z$  এই দুই অক্ষ বরাবর ঘূর্ণনের জড়তা ভ্রামক হয় তবে

$$I_y = I_z = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 = \mu r^2 = I$$

$$\text{যখন } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ ----- (13.9)}$$

অণুটির গতিশক্তি

$$E = \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 = \frac{1}{2} I (\omega_y^2 + \omega_z^2)$$

যখন  $\omega_y$  এবং  $\omega_z$  যথাক্রমে  $y$  এবং  $z$ -অক্ষ বরাবর অণুটির কৌণিক গতিবেগ বা বৃত্তীয় কম্পাংক, আন্তপারমাণবিক বন্ধন খুব দৃঢ় না হলে পরিমাণদ্বয় তাদের নিজ নিজ সাম্য অবস্থানের পরিপ্রেক্ষিতে সরল দোলগতিতে কম্পনশীল হবে। দেখানো যাবে এই দুই গতি, সাম্য অবস্থানের আপেক্ষিকে, গোটা অণুটির সরল দোলগতির সাথে তুলনীয়। সেক্ষেত্রে অবশ্য তার ভর হবে  $\mu$ । এই রূপে দ্বিপরিমাণুক অণুর চলন ছাড়াও ঘূর্ণন এবং কম্পন সম্ভব। অবশ্য তা নির্ভর করছে উষ্ণতার উপর। বেশী উষ্ণতায় ইলেকট্রনীয় গতি উত্তেজিত হবে। সেক্ষেত্রে দ্বিপরিমাণুক অণুর 3টি চলনের জন্য, 2টি ঘূর্ণনের জন্য এবং 2টি কম্পনের জন্য—সাধারণ উষ্ণতায় এই মোট সাতটি স্বাধীনতার মাত্রা থাকবে। শক্তির সমবিভাজন নীতি অনুসারে উষ্ণতায় অণুটির মোট শক্তি হবে

$$E = \frac{7}{2} kT$$

এক গ্রাম মোল গ্যাসের মোট শক্তি

$$U = N\varepsilon = \frac{7}{2}NKT = \frac{7}{2}RT$$

এবং আপেক্ষিক তাপ

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v = \frac{7}{2}R$$

আমরা জানি

$$C_p = C_v + R = \frac{9}{2}R$$

অতএব

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{9/2}{7/2} = \frac{9}{7} = 1.29$$

ওপরের আলোচনা থেকে বোঝা যায় উষ্ণতার পরিবর্তনের সাথে আপেক্ষিক তাপের কোন পরিবর্তন নেই। কিন্তু প্রকৃত ঘটনা তা নয়। একেবারে চরমশূন্যের কাছাকাছি অবস্থায় রক্ষিত কোন অণুর সমস্ত রকমের শক্তিই শূন্য। কিন্তু তাপ প্রয়োগ করে সামান্য উষ্ণতা বাড়ালেই কণাটি চলনগতি লাভ করবে এবং তখন তার  $C_v = 1.5R$ । এর পর উষ্ণতা বাড়াতে বাড়াতে একটি নির্দিষ্ট উষ্ণতায় ঘূর্ণন উষ্ণতা  $T_{rot}$  অতিক্রম করলে অণুটি ঘূর্ণনগতি লাভ করে এবং তখন  $C_v$  এর মান হবে  $2.5R$  এবং আরও পরে উষ্ণতা যখন কম্পন উষ্ণতা অতিক্রম করবে তখন  $C_v$ -র মান হবে  $3.5R$  এইভাবে উষ্ণতা বাড়ার সাথে সাথে বিভিন্ন স্বাধীনতার মাত্রা উজ্জীবিত হতে থাকে এবং  $C_v$  আর  $\gamma$ -র মান পরিবর্তিত হতে থাকে। সুতরাং  $C_v$  এর পরিবর্তন বোঝার জন্য অণুসংস্থার মোট শক্তি  $v$  কিভাবে উষ্ণতার সাথে পরিবর্তিত হয় তা জানতে হবে এবং তা জানার সহজতম পদ্ধতি হল অণুর বিভিন্ন গতির জন্য গুরুত্ব সমষ্টির রাশিমালা নির্ণয় করা।

**অনুশীলনী- 6 :**

বহু পরমাণুক বিশিষ্ট গ্যাসের ক্ষেত্রে দুটি আপেক্ষিক তাপ  $C_p$  এবং  $C_v$  এর অনুপাত নির্ণয় করুন।

**13.3.1 দ্বি-পরমাণুক অণুর গুরুত্ব সমষ্টি :**

এক পরমাণুক আদর্শ গ্যাসের অণুর জন্য যে গুরুত্ব সমষ্টি নির্ণয় করা হয়েছে সেই রাশিমালায় ভর  $m$  এর জায়গায়, দ্বিপরমাণুক অণুর দুটি পরমাণুর মিলিত ভর  $(m_1 + m_2)$  বসালেই দ্বি-পরমাণুক গ্যাসের গুরুত্ব সমষ্টি পাওয়া যাবে। তার কারণ অণুটির চলন মানে তার ভরকেন্দ্রে নিহিত অণুটির সমস্ত ভরের চলন। অতএব

$$Z_1 = \frac{V}{h^3} [2\pi(m_1 + m_2)KT]^{3/2} \text{ ----- (13.10)}$$

**13.3.2 আবর্ত গুরুত্ব সমষ্টি :**

কৌণিক ভরবেগ  $L$  হলে সনাতন বলবিদ্যা অনুযায়ী, অণুটির আবর্ত গতিশক্তি

$$E_{\text{rot}} = \frac{L^2}{2I}$$

$$\text{যখন } I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2$$

কোয়ান্টাম বলবিদ্যা অনুসারে

$$L^2 = J(J+1)\hbar^2$$

এবং শক্তির পরিমাণ

$$E_{\text{rot}} = \frac{J(J+1)\hbar^2}{2I} \quad \left( \because \hbar = \frac{h}{2\pi} \right)$$

আবর্ত কোয়ান্টাম সংখ্যা J এর মান 0,1,2 ইত্যাদি

পূর্ণসংখ্যা, J এর একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য শক্তির একটি নির্দিষ্ট মান থাকে এবং ঐ নির্দিষ্ট স্তরের সাথে সংশ্লিষ্ট থাকে  $(2J+1)$  তরঙ্গ অপেক্ষক যা অণুর অণুঅবস্থা নির্দেশক।

অন্য ভাষায় বলা যেতে পারে শক্তি প্রকোষ্ঠে রক্ষিত কণাগুলির প্রতিটির শক্তির মান যদি  $E_j$  হয় তবে শক্তি প্রকোষ্ঠে কোষের সংখ্যা  $g_j = 2J+1$ , কাজেই গুরুত্ব সমষ্টি

$$Z = \sum g_j e^{-\beta E_j} \text{ কে আমরা লিখতে পারি}$$

$$Z_{\text{rot}} = \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) e^{-\beta \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)}$$

$$= \sum (2J+1) e^{-\frac{\theta_r}{T} J(J+1)} \text{ ----- (13.11)}$$

যেখানে  $\theta_r =$  ঘূর্ণন পরিচায়ক উষ্ণতা  $= \frac{\hbar^2}{2kI}$  এবার বিশেষ বিশেষ পরিস্থিতিতে  $Z_{\text{rot}}$  রাশিমালাটি কি

আকার নেবে তা নিয়ে আলোচনা করা যাক :

i) T খুব কম I ও খুব কম :

যদি উষ্ণতা খুব কম এবং I এর মানও খুব রকম হয় তাই যে খুব কম সংখ্যক ঘূর্ণন শক্তিস্তর উজ্জীবিত হবে এবং আমরা লিখতে পারি

$$Z_{\text{rot}} = 1 + 3e^{-2\theta_r/T} + 5e^{-6\theta_r/T} + \text{----- (13.12)}$$

এবং শ্রেণীটির মাত্র প্রথম কয়েকটি পদ গুরুত্বপূর্ণ।

ii) T খুব বেশী কিন্তু I খুব কম নয় :

কিন্তু যদি উষ্ণতা T বেশী হয় যাতে করে তাপীয় শক্তি  $KT$  দুটো ক্রমিক শক্তিস্তরের শক্তি পার্থক্যের তুলনায় খুব বেশী হয়, কিন্তু I এর মানও খুব কম নয় তখন 13.11 এর যোগফলকে সমাকলে রূপান্তর করা সম্ভব এবং

$$Z_{\text{rot}} = \int_0^{\alpha} (2J+1) \exp\left[-\frac{\hbar^2}{2IkT} - J(J+1)\right] dJ$$

এখন  $J(J+1) = u$  বসালে পাই

$$\begin{aligned} Z_{\text{rot}} &= \int_0^{\alpha} \exp(-\beta\hbar^2 / 2J) u du \\ &= \frac{2IkT}{\hbar^2} \text{-----} (13.13) \end{aligned}$$

iii) সমজাতীয় কেন্দ্রীয়বিশিষ্ট অণু :

উপরের পরিস্থিতিতে যখন উষ্ণতা উচ্চ তখন কেন্দ্রীয় দুটিকে একই ধরলে তাদের অবস্থানের পারস্পরিক পরিবর্তন করলে যেহেতু নতুন অবস্থার সৃষ্টি হয় না কাজেই একই কেন্দ্রীয়ের ক্ষেত্রে সমীকরণ 13.13 টি পরিবর্তিত হবে নিম্নরূপে :

$$Z_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \frac{2IkT}{\hbar^2} = \frac{IkT}{\hbar^2}$$

সাধারণভাবে লেখা যেতে পারে

$$Z_{\text{rot}} = \frac{2IkT}{\delta\hbar^2} \text{-----} (13.14)$$

$\delta = \begin{cases} 1 & \text{অসমজাতীয় কেন্দ্রীয়বিশিষ্ট অণুর জন্য} \\ 2 & \text{সমজাতীয় কেন্দ্রীয়বিশিষ্ট অণুর জন্য} \\ 3 & \text{তিনভাঁজ প্রতিসাম্য বিশিষ্ট অণুর জন্য} \end{cases}$

আমরা জানি (সূত্র 13.8)

$$U = -N \frac{\partial \ell_n Z}{\partial \beta} = NKT$$

$\therefore \ell_n Z_{\text{rot}} = \ell_n \left( \frac{1}{\beta} \right) +$  উষ্ণতার উপর নির্ভর করে না এমন পদ।

সুতরাং আপেক্ষিক তাপে ঘূর্ণনশক্তির অবদান

$$C_{v(\text{rot})} = NK = R \text{-----} (13.15)$$

iv) নিম্ন তাপমাত্রায় যখন  $KT$  দুটি ক্রমিক শক্তিস্তরে শক্তি পার্থক্যের সাথে তুলনীয় সূত্র 13.11 থেকে সমাকলে রূপান্তর করা সম্ভব নয়। সুতরাং গুরুত্ব সমষ্টি

$$Z_{\text{rot}} = \sum (2J+1) e^{-J(J+1)0r/T} \text{-----} (13.16)$$

এই সম্পর্কটিকে ব্যবহার করেই নির্ণয় করতে হবে কিন্তু এই সূত্র থেকে প্রাপ্ত  $C_v$  এর মান পরীক্ষালব্ধ মানের সাথে মেলে না। তত্ত্ব এবং পরীক্ষার এই বিচ্যুতির সমাধান সম্ভব যদি কেন্দ্রীয়ের তরঙ্গ অপেক্ষকের প্রতিসাম্য বৈশিষ্ট্য ঠিকমত বিবেচনা করা হয়।



দ্বি পরমাণুক হাইড্রোজেন অণুর উদাহরণ নেওয়া যেতে পারে। এর দুটি পরমাণুতে দুটি প্রোটন আছে যাদের প্রতিটির ঘূর্ণন কোয়ান্টাম সংখ্যা  $\frac{1}{2}$ ।

পাউলির নীতি অনুযায়ী প্রোটন দুটি স্থান বদল করলে অণুটির সার্বিক তরঙ্গ অপেক্ষককে অপ্রতিসাম্য হতে হবে এখন প্রোটনদ্বয়ের মিলিত ঘূর্ণন কোয়ান্টাম সংখ্যা  $I = 0, 1$  প্রথমক্ষেত্রে অণুটিকে বলা হবে প্যারা হাইড্রোজেন এবং দ্বিতীয়ক্ষেত্রে অর্থোহাইড্রোজেন। অণুর এই প্যারা এবং অর্থো অবস্থার পরিসাংখ্যিক গুরুত্ব যথাক্রমে 1 এবং 3 সাধারণ অবস্থায় ইলেকট্রনগতি এবং কম্পনগতি জনিত তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি প্রতিসাম্য থাকে। আবার  $I$  যুগ্ম সংখ্যা হলে ঘূর্ণনজনিত তরঙ্গ অপেক্ষক প্রতিসাম্য এবং  $I$  অযুগ্ম হলে তা অপ্রতিসাম্য হয়। আবার যেহেতু অর্থোহাইড্রোজেনের স্পিন অপেক্ষক প্রতিসাম্য থাকে কাজেই অণুর সার্বিক তরঙ্গ অপেক্ষক প্রতিসাম্য থাকে (যা আসলে কেন্দ্রীনের ঘূর্ণন অপেক্ষক, ইলেকট্রনীয় অপেক্ষক, কম্পনের অপেক্ষক এবং আবর্তন অপেক্ষকের গুণফল), অপ্রতিসাম্য হবে যদি ঘূর্ণন জনিত অপেক্ষক অপ্রতিসাম্য থাকে অর্থাৎ  $I = 1, 3, 5$  ইত্যাদি হয়। সুতরাং

$$Z_0 = \text{অর্থো হাইড্রোজেন অণুর গুরুত্ব সমষ্টি} \\ = \sum (2J + 1) \exp. [-J(J+1)\theta r/T] \text{ ----- (13.17)}$$

$$J = 1, 3, 5$$

একই যুক্তিতে প্যারা হাইড্রোজেনের ক্ষেত্রে ঘূর্ণন গতির অপেক্ষক প্রতিসাম্য হবে এবং  $J = 2, 4, 6$ -- ইত্যাদি। তখন  $Z_p =$  প্যারা হাইড্রোজেন অণুর গুরুত্ব সমষ্টি

$$= \sum (2J+1) \exp. [-J(J+1) \theta r/T] \text{ -----(13.18)}$$

$$J = 0, 2, 4$$

আদর্শ গ্যাসের তন্ত্রটি তাপীয় সাম্যে থাকলে সার্বিক গুরুত্ব সমষ্টি

$$Z = 3Z_0 Z_p \text{ ----- (13.19)}$$

যেহেতু অর্থো হাইড্রোজেনের ক্ষেত্রে দুটি প্রোটনের সার্বিক অবস্থার পরিসাংখ্যিক গুরুত্ব 3 এবং প্যারা হাইড্রোজেনের ক্ষেত্রে তা 1। এই হিসেবে হাইড্রোজেনের আপেক্ষিক তাপ

$$C_v = \frac{3}{4} C_{v(0)} + \frac{1}{4} C_{v(p)} \text{ ----- (13.20)}$$

যেখানে  $C_v(0)$  এবং  $C_v(p)$  যথাক্রমে হাইড্রোজেনের আপেক্ষিক তাপের প্রতি অর্থো এবং প্যারা হাইড্রোজেনের অবদান। পরীক্ষালব্ধ মানের সাথে সূত্র 13.20 থেকে প্রাপ্ত  $C_v$  এর মানের যথেষ্ট মিল আছে।

### 13.3.3 কম্পনজনিত গুরুত্ব সমষ্টি :

এই এককের সূচনা পর্বেই বলা হয়েছে যে যদি দ্বিপরমাণুক অণুর মধ্যস্থ পরমাণু দুটির বন্ধন একান্তভাবে দৃঢ় না হয় তবে পরমাণুগুলির কম্পন হবে এবং এই কম্পন, হ্রাসপ্রাপ্ত ভর ( $\mu$ ) সমন্বিত অণুর কম্পনের সাথে তুলনীয়। এই হিসেবে, কোয়ান্টাম বলবিদ্যার বিশ্লেষণ অনুযায়ী, অণুর কম্পন শক্তির মান হয়

$$\epsilon = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu$$

যখন  $n = 0, 1, 2$  ইত্যাদি

এক্ষেত্রেও  $n$  কোয়ান্টাম সংখ্যা এবং এর এক একটি মান আমাদের শক্তি প্রকোষ্ঠের সাথে তুলনীয় তবে প্রতিটি শক্তি প্রকোষ্ঠের কোষের সংখ্যা, এখানে  $g = 1$  কেননা একটি নির্দিষ্ট শক্তি স্তরে কম্পনশীল অণুটির তরঙ্গ অপেক্ষক মাত্র একটিই, সুতরাং কম্পনজনিত গতির জন্য গুরুত্ব সমষ্টি

$$Z_v = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}(n+\frac{1}{2})} \text{----- (13.21)}$$

$$= e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}$$

$$= e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}} \left[ 1 + e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} + e^{-\frac{2\hbar\omega}{kT}} + e^{-\frac{3\hbar\omega}{kT}} \text{----} \right]$$

$$= \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}} \text{----- (13.22)}$$

$$= e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}} \left[ 1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right]^{-1} = e^{-\frac{\theta_v}{2T}} \left[ 1 - e^{-\frac{\theta_v}{T}} \right]^{-1}$$

যখন  $\theta_v = \frac{\hbar\omega}{K}$  কম্পনের বৈশিষ্ট্যমূলক উষ্ণতা

$$\text{এখন } U = NKT^2 \left[ \frac{\partial}{\partial T} \ln Z \right]$$

$$= NKT^2 \frac{\partial}{\partial T} \left[ -\frac{\theta_v}{2T} - \ln(1 - e^{-\theta_v/T}) \right]$$

$$= NKT^2 \left[ \frac{\theta_v}{2T^2} + \frac{e^{-\theta_v/T}}{1 - e^{-\theta_v/T}} \cdot \frac{\theta_v}{T^2} \right]$$

$$= NKT^2 \left[ \frac{\theta_v}{2T^2} + \frac{\theta_v}{T^2} \frac{1}{e^{\theta_v/T} - 1} \right]$$

$$= NK \left[ \frac{\theta_v}{2} + \frac{\theta_v}{e^{\frac{\theta_v}{T}} - 1} \right]$$

$$\text{আবার } C_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = NK \left( \frac{\theta_v}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta_v}{T}}}{\left( e^{\frac{\theta_v}{T}} - 1 \right)^2} \text{----- (13.23)}$$

উচ্চ উষ্ণতায়  $\theta_v \ll T$  এবং সেক্ষেত্রে

$$e^{\frac{\theta v}{T}} = 1 + \frac{\theta v}{T} + \frac{1}{2} \left( \frac{\theta v}{T} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{সূত্রাং } U &= NK \left[ \frac{\theta v}{2} + \frac{\theta v}{\frac{\theta v}{T} + \frac{1}{2} \left( \frac{\theta v}{T} \right)^2} \right] \\ &= NK \left[ \frac{\theta v}{2} + \frac{T}{\theta v} \cdot \theta v \left( 1 - \frac{\theta v}{2T} \right) \right] \\ &= NK \theta v \left[ \frac{1}{2} + \frac{T}{\theta v} \left( 1 - \frac{\theta v}{2T} \right) \right] \\ &= NKT + \frac{N\hbar\omega}{2} \quad \text{----- (13.24)} \end{aligned}$$

$$\text{সূত্রাং } C_v = NK$$

### 13.3.4 ইলেকট্রনীয় গুরুত্ব সমষ্টি :

যদি অণুর অন্তঃস্থ ইলেকট্রনগুলিকে উত্তেজিত করতে যথাক্রমে  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$  ইত্যাদি শক্তি লাগে এবং প্রত্যেক শক্তিস্তরের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট তরঙ্গ অপেক্ষকের সংখ্যা যথাক্রমে  $g_1, g_2, \dots$  ইত্যাদি হয় তবে

$$\begin{aligned} Z_{e1} &= \sum g_i e^{-\beta \epsilon_i} \\ &= g_0 + g_1 e^{-\beta \epsilon_1} + g_2 e^{-\beta \epsilon_2} \quad \text{-----} \end{aligned}$$

সাধারণত  $\epsilon, KT$  এর চেয়ে অনেক গুণ বেশী হয় সেক্ষেত্রে  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$  ইত্যাদি উচ্চ শক্তিস্তরের সাথে সংশ্লিষ্ট পদগুলিকে বাদ দিলে প্রায় কোন একটি হয় না অর্থাৎ

$$Z_{e1} = g_0 + g_1 e^{-\frac{\epsilon_1}{KT}} \quad \text{----- (13.25)}$$

$$\begin{aligned} \text{সেক্ষেত্রে } U &= NKT^2 \left[ \frac{\partial}{\partial T} (\ln Z_{e1}) \right] = NKT^2 \frac{\partial}{\partial T} \left[ \ln \left( g_0 + g_1 e^{-\frac{\epsilon_1}{KT}} \right) \right] \\ &= \frac{NKT^2 g_1 e^{-\beta \epsilon_1}}{(g_0 + g_1 e^{-\beta \epsilon_1})} \cdot \frac{\epsilon_1}{KT^2} \\ &= N\epsilon_1 \left( \frac{g_0}{g_1} e^{-\beta \epsilon_1} + 1 \right)^{-1} \quad \text{---- (13.26)} \end{aligned}$$

$$\text{এবং } C_v = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{N\epsilon_1^2}{KT^2} \cdot \frac{g_0}{g_1} e^{\beta \epsilon_1} \left[ 1 + \frac{g_0}{g_1} e^{\beta \epsilon_1} \right]^{-2} \quad \text{----- (13.27)}$$

উচ্চ উষ্ণতা ছাড়া মোট আপেক্ষিক তাপে ইলেকট্রনীয় গতির কোন উল্লেখযোগ্য অবদান থাকছে না তাই গ্যাসের শক্তির সার্বিক উষ্ণতা নির্ভরতা

$$U = \left(\frac{3}{2}NKT\right)_{\text{চলন}} + (NKT)_{\text{ঘূর্ণন}} + (NKT)_{\text{কম্পন}} \quad !$$

$$= \frac{7}{2}NKT = \frac{7}{2}RT \quad (\text{এক গ্রাম মোল গ্যাসের ক্ষেত্রে})$$

এই রাশিমালা দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এবং মোট তাপ ধারকত্ব

$$C_v = \frac{7}{2}NK = \frac{7}{2}R \quad (\text{এক গ্রাম মোল গ্যাসের ক্ষেত্রে})$$

### 13.5 সমাবেশের তত্ত্ব (Theory of Ensembles) :

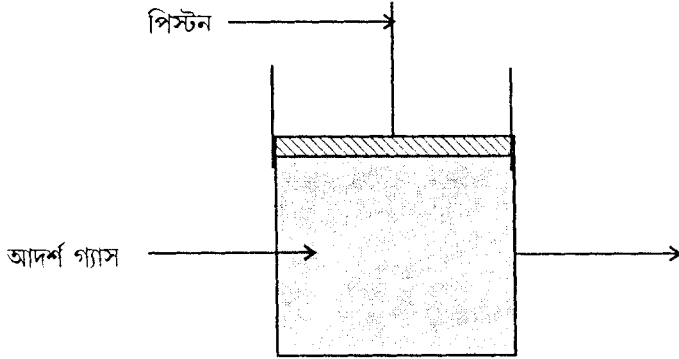
কিছু সংজ্ঞা :

তন্ত্র (system) : নির্দিষ্ট তল দ্বারা আবদ্ধ নির্দিষ্ট আয়তনের মধ্যে অবস্থিত কণার সমষ্টিকে একটি তন্ত্র (system) বলা হয়। সাধারণত আমরা যে তন্ত্র নিয়ে আলোচনা করব সেটি তাপীয় সাম্যাবস্থায় (Thermodynamic equilibrium) থাকবে। কাজেই তার বৃহৎ-অবস্থার (macro state) বর্ণনা দেওয়ার জন্য আমরা সব সময়েই তাপীয় সাম্যাবস্থার প্রাচল (parameter) যথা উষ্ণতা (temperature, T), আয়তন (volume, V), কণা সংখ্যা (N), আভ্যন্তরীণ শক্তি (E), এনট্রপি (S) ইত্যাদির ব্যবহার করব। আরো নির্দিষ্ট করে বললে আমাদের তন্ত্রের অন্তর্গত কণাসমূহ সদৃশ এবং তাদের ক্ষেত্রে আদর্শ গ্যাসের কণা সমূহের অঙ্গীকারগুলি প্রযোজ্য। স্পষ্টতই আলোচ্য তন্ত্রটির অবস্থার বর্ণনা দেওয়ার জন্য আমরা তার অন্তর্নিহিত কণা এবং তাদের ভরবেগের উপাংশগুলি ( $p_i$ ) ব্যবহার করতে পারি। এইভাবে  $q_i$  এবং  $p_i$  দ্বারা বর্ণিত অবস্থাকে তন্ত্রের অণু-অবস্থা বলা হয়। যেহেতু কণা সমূহ নিরন্তর গতিশীল কাজেই তন্ত্রটি তাপীয় সাম্যাবস্থায় থাকার সাথে তার বৃহৎ অবস্থা নির্দিষ্ট হলেও তার অণু-অবস্থা সময়ের সাথে নিরন্তর পরিবর্তনশীল। যদি তন্ত্রের কণা সমূহের সংখ্যা N হয় তবে তার অণু অবস্থা বোঝানোর জন্য  $3N$  সংখ্যক অবস্থান সংখ্যক ( $q_i$ ) এবং  $3N$  সংখ্যক ভরবেগ উপাংশ ( $p_i$ ) দরকার। সেক্ষেত্রে আমরা  $6N$  মাত্রিক দশালোকের কল্পনা করতে পারি এবং এই দশালোকের একটি বিন্দু তন্ত্রের অণু-অবস্থার অবস্থান বোঝায়। সময়ের সাথে যেহেতু অণু অবস্থাও বদলে যায় তাই অণু-অবস্থার প্রতিনিধিত্বকারী বিন্দুটিও দশালোকে কিছু শর্তসাপেক্ষে একটি নির্দিষ্ট পথ অতিক্রম করে।

**সমাবেশ (Ensemble) :** অসংখ্য তন্ত্রের সমষ্টিকে সমাবেশ বলা হয়। নিচের উদাহরণের সাহায্যে সমাবেশের ধারণাটি ব্যাখ্যা করা যেতে পারে।

আমরা একটি কাল্পনিক তন্ত্রের কথা ভাবতে পারি যাতে একটি পিষ্টন যুক্ত চোঙের মধ্যে আদর্শ গ্যাস রক্ষিত আছে। তন্ত্রটি পরীক্ষাগারের পরিবেশের সাথে তাপীয় সাম্যাবস্থায় আছে। T, V এবং N দ্বারা এর তাপগতিক অবস্থা বা বৃহৎ অবস্থার বর্ণনা দেওয়া যেতে পারে। এই ধরনের তন্ত্রকে TVN তন্ত্র বা ক্যাননিক্যাল (Canonical) তন্ত্র বলা হয়। এখন যেহেতু এর দেওয়াল দিয়ে শক্তির চলাচল সম্ভব কিন্তু কণার আগমন নির্গমন সম্ভব নয়। (heat conducting but impermeable to particles) তাই এমনকি সাম্যাবস্থাতেও

অণুবীক্ষণিক স্তরে শক্তির (E) পরিবর্তন হতেই পারে। কাজেই আমরা যদি আলোচ্য TVN তন্ত্রটির শক্তি মাপার জন্য পরীক্ষা করি তবে বিভিন্ন সময়ে বিভিন্ন পরীক্ষায় তন্ত্রটির শক্তির মান বিভিন্ন হওয়া সম্ভব। ধরা যাক তন্ত্রটির উপর একই ধরনের শক্তি নির্ণয়ের পরীক্ষা M ( $M \rightarrow \alpha$ ) সংখ্যক বার সম্পাদন করার পর যে ফল পাওয়া



চোঙ যার দেওয়ালের মধ্যে দিয়ে তাপ চলাচল করতে পারে কিন্তু কণার চলাচল সম্ভব নয়।

গেল তা নিম্নরূপ

$M_1$  সংখ্যক পরীক্ষার প্রতিটিতে তন্ত্রের শক্তির মান  $E_1$

$M_2$  সংখ্যক পরীক্ষার প্রতিটিতে তন্ত্রের শক্তির মান  $E_2$

.....

$M_r$  সংখ্যক পরীক্ষার প্রতিটিতে তন্ত্রের শক্তির মান  $E_r$  ইত্যাদি।

এক্ষেত্রে মোট পরীক্ষার সংখ্যা

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_r + \dots$$

$$= \sum_r M_r$$

তন্ত্রটির গড় শক্তি

$$\langle E \rangle = \frac{M_1 E_1 + M_2 E_2 + \dots + M_r E_r}{M_1 E_2 + \dots + M_r} = \frac{\sum M_r E_r}{\sum M_r}$$

বিভিন্ন সময়ে পরীক্ষাটি যখন সম্পাদন করা হচ্ছে তখন তন্ত্রটির অণু-অবস্থা দশালোকে এক বিন্দু থেকে দ্রুত গতিতে অন্য বিন্দুতে ধাবমান তার ফলে এটা হতেই পারে দশালোকে তন্ত্রটি একই বিন্দুকে বারবার অতিক্রম করে। এখন দশালোকে প্রতিটি বিন্দুর জন্য শক্তির একটি নির্দিষ্ট মান আছে (কেননা  $E_r$ ,  $p_r$  এবং  $q_r$  এর উপর নির্ভরশীল) তাই যদি  $M_1$  পরীক্ষা শক্তির মান  $E_1$  হয় তবে তার অর্থ এই যে তন্ত্রটির অণু-অবস্থা দশালোকে একটি বিন্দুকে (যেখানে তন্ত্রটির শক্তির মান  $E_1$ )  $M_1$  সংখ্যক বার অতিক্রম করে। এইভাবে যদি  $M_r$  সংখ্যক পরীক্ষায় তন্ত্রটির শক্তির মান  $E_r$  পাই তখন  $E_r$  শক্তি প্রতিনিধিত্বকারী বিন্দুটিকে তন্ত্রটি  $M_r$  সংখ্যক বার অতিক্রম করে।

এখন পরীক্ষাটি বিভিন্ন সময়ে M-সংখ্যক বার সম্পাদন না করে আমরা তন্ত্রটির M- সংখ্যক নকলের (যার মধ্যে আসলটিও আছে) কথা কল্পনা করতে পারি। তখন একই সময় M- সংখ্যক তন্ত্রের প্রতিটির ওপর শক্তি নির্ণয় পরীক্ষা সম্পাদন করলে আমরা পাই

$M_1$  তন্ত্রের প্রতিটির শক্তি  $E_1$

$M_2$  তন্ত্রের প্রতিটির শক্তি  $E_2$

.....  
 $M_r$  তন্ত্রের প্রতিটির শক্তি  $E_r$  ইত্যাদি।

এই  $M$ -সংখ্যক তন্ত্রের সমষ্টিকে (যার মধ্যে একটি ছাড়া সবই কাল্পনিক—তাদের প্রত্যেকের বৃহৎ-অবস্থা একই, কিন্তু অণু-অবস্থা ভিন্ন) সমাবেশ বলে, এবং এটা পরিষ্কার যদি  $M \rightarrow \alpha$  হয় তবে বিভিন্ন সময়ে একটি তন্ত্রের ওপর পরীক্ষায় তন্ত্রের যে গড় শক্তি পাওয়া যাবে আর সমাবেশের বিভিন্ন সদস্যের ওপর পরীক্ষা করে শক্তির যে গড় মান পাওয়া যাবে তাদের মান সমান অর্থাৎ

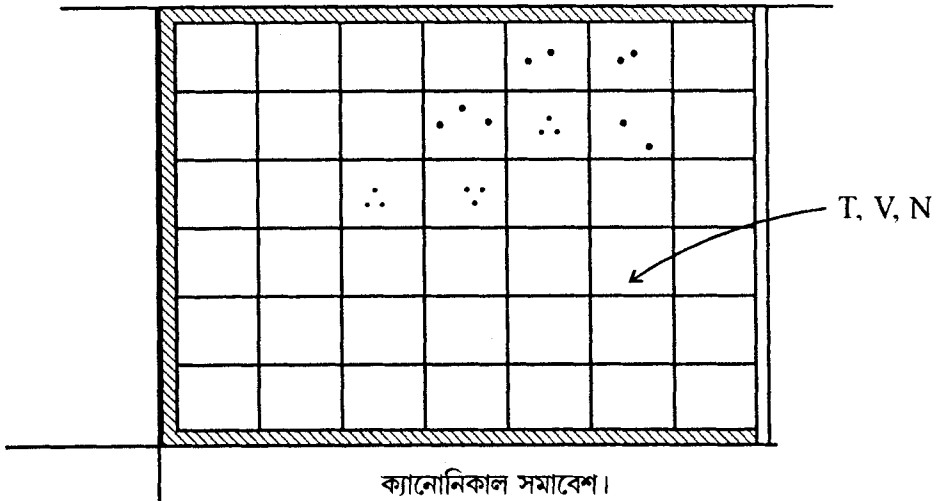
<সময়ের পরিপ্রেক্ষিতে কোন প্রাচলের মান>

= <সমাবেশের পরিপ্রেক্ষিতে ঐ প্রাচলের মান>

এই সম্পর্কটি 'Ergodic hypothesis' নামে পরিচিত।

### 13.5.1 TVN সমাবেশ বা Canonical সমাবেশ :

স্থির আয়তন, স্থির অণুসংখ্যা ও স্থির উষ্ণতা যুক্ত তন্ত্রকে TVN সমাবেশ বা Canonical সমাবেশ বলা হয়। এই সমাবেশের একটা ধারণা নিম্নরূপ : ধরি সমগ্রতন্ত্রটি একটি বিশাল তাপগাহের  $T$  উষ্ণতায় রাখা আছে এবং  $\tilde{N}$  সংখ্যা যুক্ত অসংখ্য,  $V$  আয়তন ও  $N$  অণু দ্বারা গঠিত তন্ত্র এমনভাবে রাখা আছে তাদের দেওয়াল গুলি তাপপরিবহনে সক্ষম কিন্তু কণা পরিবহনে সম্ভব নয়। যেহেতু এইভাবে তৈরী সমগ্রতন্ত্রটি (চিত্র 13.5.1)  $T$  উষ্ণতায় তাপগাহে নিমজ্জিত তন্ত্রের সমগ্র অংশ তাপীয় সাম্যে থাকবে। এক্ষেত্রে তন্ত্রের  $\tilde{N}$  সংখ্যক ভাগের প্রতিটি  $T$  উষ্ণতায় থাকে।



চিত্র-13.5.1

যেহেতু ক্ষুদ্র তন্ত্রের দেওয়ালগুলি তাপীয় পরিবহণে সক্ষম, তাপ পরিবহণের কারণে তাদের সকলের শক্তি সমান নাও থাকতে পারে। ধরি  $n_1$  এরূপ তন্ত্র  $E_1$  শক্তিতে আছে,  $n_2$  তন্ত্র  $E_2$  শক্তিতে আছে এবং এরূপে  $n_r$  তন্ত্র  $E_r$  শক্তিতে আছে। সেক্ষেত্রে

$$\sum_r n_r = \tilde{N}$$

$$\text{এবং } \sum_r n_r E_r = F$$

এবং এরা ধ্রুবক। সুতরাং অণুপরিবর্তনে

$$\delta \sum_r n_r = 0 \text{ ----- (13.28) (a)}$$

$$\text{ও } \delta \sum_r n_r E_r = 0 \text{ ----- (13.28) (b)}$$

এখন সম্পূর্ণ  $\tilde{N}$  সংখ্যক তন্তুর মধ্য থেকে  $n_1$  সংখ্যক ক্ষুদ্রতন্ত্র  $\frac{\tilde{N}!}{n_1!(\tilde{N}-n_1)!}$  ভাবে এবং  $(\tilde{N}-n_1)$

সংখ্যক বাকী তন্ত্রগুলি হলে  $n_2$  সংখ্যক তন্ত্র  $\frac{(\tilde{N}-n_1)!}{n_2!(\tilde{N}-n_1-n_2)!}$  ভাবে চয়ন করা যায়।

সুতরাং  $\tilde{N}$  সংখ্যক তন্ত্র হতে একযোগে  $n_1, n_2, \dots, n_r$  ইত্যাদি তন্ত্র চয়নের সংখ্যা

$$\begin{aligned} N &= \frac{\tilde{N}!}{n_1!(\tilde{N}-n_1)!} \times \frac{(\tilde{N}-n_1)!}{n_2!(\tilde{N}-n_1-n_2)!} \dots \frac{(\tilde{N}-n_1-n_2-\dots-n_{r-1})!}{n_r!(\tilde{N}-n_1-n_2-\dots-n_r)!} \\ &= \tilde{N}! \pi_r \frac{1}{n_r!} \end{aligned}$$

$$\text{এখন } \ell_n W = \ell_n \tilde{N}! - \sum_r \ell_n n_r$$

$$\text{এখন স্টারলিং এর সূত্র অনুসারে } \ell_n x! = x \ell_n x - x$$

$$\text{সুতরাং } \ell_n W = \tilde{N} \ell_n \tilde{N} - \tilde{N} - \sum_r n_r \ell_n n_r + \sum_r n_r$$

$$= \tilde{N} \ell_n \tilde{N} - \sum_r n_r \ell_n n_r$$

সবচেয়ে সম্ভাবনাময় বন্টনের ক্ষেত্রে

$$\delta \ell_n W = 0 \text{ বা } \delta \left[ \tilde{N} \ell_n \tilde{N} - \sum_r n_r \ell_n n_r \right] = 0$$

$$\sum (1 + \ell_n \tilde{N} - \ell_n n_r - 1) \delta n_r = 0 \text{ ----- (13.29)}$$

$$\text{বা } (\ell_n \tilde{N} - \ell_n n_r - 1) \delta n_r = 0$$

এই শর্ত ও পূর্ববর্তী শর্তদ্বয় (13.28 (a) ও 13.28 (b)) একযোগে প্রযোজ্য হওয়া

$$\delta (\ell_n W - \alpha \tilde{N} - \beta E) = 0 \text{ [}\alpha \text{ ও } \beta \text{ দ্বয় ধ্রুবক]}$$

$$\text{বা } \sum_r (\ell_n \tilde{N} - \ell_n n_r - \alpha - \beta E_r) \delta n_r = 0$$

$$n_r = \tilde{N} e^{-\alpha} e^{-\beta E_r} \text{ ----- (13.30)}$$

$$\text{এক্ষেত্রে } \sum_r n_r = \tilde{N} = \tilde{N} e^{-\alpha} \sum_r e^{-\beta E_r}$$

$$\text{বা } e^{\alpha} = \sum_r e^{-\beta E_r} = Q \text{ (ধরণ)}$$

$\tilde{N}$  তন্ত্র হতে  $n_r$  পাওয়ার সম্ভাব্যতা।

$$P_i = \frac{n_r}{\tilde{N}} = \frac{e^{-\beta E_r}}{Q} \text{ ----- (13.31)}$$

13.30 ও 13.31 সমীকরণদ্বয় Canonical সমাবেশের ক্ষেত্রে শক্তিবণ্টনের সর্বোচ্চ সম্ভাব্যতা এবং সমাবেশের একটি তন্ত্রের  $E_r$  শক্তি নিয়ে থাকবার সম্ভাব্যতা নির্দেশ করে। অর্থাৎ (13.31) সমীকরণই Canonical সমাবেশের বণ্টন সূত্র।

$$\text{এখন } Z = \bar{Z} e^{-\beta E_r}$$

$$\text{আবার } \frac{\partial \ell_n Z}{\partial \beta} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{1}{Z} \bar{Z} (-E_r) e^{-\beta E_r}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\partial \ell_n Z}{\partial \beta}\right) = \sum_r \frac{E_r e^{-\beta E_r}}{Z} = \sum E_r P_r$$

সংজ্ঞা অনুসারে তন্ত্রটির গড়শক্তি,  $\sum E_r P_r = \langle E \rangle$

$$\text{অতএব } \langle E \rangle = -\left(\frac{\partial \ell_n Z}{\partial \beta}\right) \text{ ----- (13.2)}$$

আবার আমরা যদি ধরে নিই  $W$  সংখ্যক অণু অবস্থার প্রত্যেকটিতে তন্ত্রটির গড়শক্তি  $\langle E \rangle$  তখন

$$Z = W e^{-\beta \langle E \rangle}$$

$$\text{অর্থাৎ } W = Z e^{\beta \langle E \rangle} \text{ ----- (13.33)}$$

আবার আমরা প্লাংকের সূত্র থেকে জানি তন্ত্রের এনট্রপি

$$\begin{aligned} S &= K \ell_n W \\ &= K (\ell_n Z + \beta C \langle E \rangle) \\ &= K (\ell_n Z + \beta U) \text{ ----- (13.34)} \end{aligned}$$

যখন  $\langle E \rangle = U$

এখন যেহেতু  $Z$ ,  $\beta$  এবং  $U$  এর অপেক্ষক কাজেই

$$d \ell_n Z = \left(\frac{\partial \ell_n Z}{\partial \beta}\right)_v d\beta + \left(\frac{\partial \ell_n Z}{\partial v}\right)_\beta dv$$



$$= -U d\beta + \left( \frac{\partial \ell_n Z}{\partial v} \right)_\beta dv$$

$$= -d(\beta U) + \beta dU + \left( \frac{\partial \ell_n Z}{\partial v} \right)_\beta dv$$

$$\text{অর্থাৎ } d(\ell_n Z + \beta U) = \beta dU + \left( \frac{\partial \ell_n Z}{\partial v} \right)_\beta dv$$

$$\Rightarrow ds = K \beta dU + K \left( \frac{\partial \ell_n Z}{\partial v} \right)_\beta dv \text{ ---- (13.35)}$$

তাপগতিবিদ্যার প্রথম ও দ্বিতীয় সূত্র থেকে পাই

$$\Rightarrow ds = \frac{du}{T} + \frac{p}{T} dv \text{ ----- (13.36)}$$

(8) এবং (9) তুলনা করে পাই

$$\beta = \frac{1}{KT} \text{ এবং } P = \frac{1}{KT} \left( \frac{\partial \ell_n Z}{\partial v} \right)_\beta = \beta \left( \frac{\partial \ell_n Z}{\partial v} \right)_\beta \text{ ----- (13.37)}$$

এইভাবে তন্ত্রগুরুত্ব সমষ্টি জানা থাকলে তন্ত্রটির সমস্ত তাপগতীয় তথ্যগুলি জানতে কোন অসুবিধা নেই। এখন প্রশ্ন হচ্ছে কণা গুরুত্ব সমষ্টি এবং তন্ত্র গুরুত্ব সমষ্টি দুইয়েরই যদি একই উদ্দেশ্য হয়ে থাকে তাহলে আলাদা গুরুত্ব সমষ্টির ধারণা করার কি কারণ? এর উত্তরে বলা যায় তন্ত্র গুরুত্ব সমষ্টির ধারণা অণুগুলির মধ্যে মিথস্ক্রিয়া হীন আদর্শ গ্যাস ছাড়াই যে কোন বাস্তব তন্ত্রের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

### 13.5.2 $TV\mu$ সমাবেশ বা মহাক্যাননিক্যাল সমাবেশ (Grand Canonical ensemble) :

ওপরে যে সকল তন্ত্রের বৃহৎ-অবস্থা উষ্ণতা (T) আয়তন (V) এবং কণা সংখ্যা দ্বারা নির্ধারিত তাদের সমাবেশ নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। কিন্তু এমন হতে পারে আলোচ্য তন্ত্রটির মধ্য দিয়ে তাপ এবং কণা দুইই যাতায়াত করতে পারে। সেক্ষেত্রে তাপগতিক সাম্যাবস্থায় তন্ত্রটির বৃহৎ-অবস্থা যে প্রাচলগুলি দ্বারা নির্ধারিত  $\hat{A} \pm \delta$  (T) আয়তন (V) এবং রাসায়নিক বিভব ( $\mu$ , chemical potential) আসলে এই ধরনের তন্ত্রের ক্ষেত্রে তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রটি হোল

$$dQ = dU + pdV - \mu dN$$

তাপ এবং কণা বিনিময়ের ফলে তন্ত্রটি যখন সাম্যাবস্থায় আসে তখন উষ্ণতা (T) এবং রাসায়নিক বিভব ( $\mu$ ) এই দুই প্রাচল সময়ের সাথে অপরিবর্তিত থাকে তাই তন্ত্রটির বৃহৎ-অবস্থা T, V এবং  $\mu$  এই তিন তাপগতির প্রাচল দ্বারা নির্ণীত হয়। এই ধরনের  $TV\mu$  তন্ত্রের সমাবেশকে মহা ক্যাননিক্যাল সমাবেশ বা grand canonical ensemble বলে।

$\bar{N}$  সংখ্যক  $TVN$  এর মতই  $TV\mu$  তন্ত্রটি নিয়ে যদি আমরা পর্যবেক্ষণ চালাই তবে দেখা যাবে সেখানে  $n_1$  সংখ্যক পরীক্ষায় তন্ত্রটির শক্তি  $E_1$  এবং কণা সংখ্যা  $N_1$ ,  $n_2$  সংখ্যক পরীক্ষায় তন্ত্রটির শক্তি  $E_2$  এবং কণা সংখ্যা  $N_2$  ইত্যাদি। এক্ষেত্রে  $n_r$  সংখ্যক পরীক্ষায় তন্ত্রটির শক্তি  $E_r$  এবং কণা সংখ্যা  $N_r$  হওয়ায় সম্ভাব্যতা নির্ণয়

করতে গেলে আমাদের যে সকল শর্তগুলি মেনে চলতে হবে তা হল

$$W = \tilde{N}! \pi \frac{1}{M_r!}, \text{ সর্বোচ্চ,}$$

$$\tilde{N} = \Sigma M_r$$

$$\langle E \rangle = \frac{\Sigma M_r E_r}{\Sigma n_r} \text{ এবং } \langle N \rangle = \frac{\Sigma n_r N_r}{\Sigma n_r} \text{ স্থির}$$

$$\text{অর্থাৎ } \Sigma \ell_n N_r \delta n_r = 0; \Sigma \delta M_r = 0$$

$$\Sigma E_r \delta M_r = 0 \text{ এবং } \Sigma N_r \delta M_r = 0$$

ল্যাগরাঞ্জের গুণিতক  $\alpha$ ,  $\beta$  এবং  $\gamma$  এর সাহায্য নিয়ে আমরা লিখতে পারি।

$$(\ell_n M_r + \alpha + \beta E_r + \gamma N_r) = 0$$

$$\Rightarrow n_r = e^{-\alpha} e^{-\beta E_r} e^{-\gamma N_r}$$

$$\text{এবং সম্ভাব্যতা } P_r = C e^{-\beta E_r} e^{-\gamma N_r}$$

$$\text{আবার } \Sigma_r P_r = 1 = C \Sigma_r e^{-\beta E_r} e^{-\gamma N_r}$$

$$\text{অতএব } C = \frac{1}{\Sigma e^{-\beta E_r} e^{-\gamma N_r}} = \frac{1}{Z}$$

$$\text{অর্থাৎ } P_r = \frac{e^{-\beta E_r} e^{-\gamma N_r}}{Z}$$

$$\text{যখন } Z = \Sigma e^{-\beta E_r} e^{-\gamma N_r} \text{ ----- (13.38)}$$

Z কে মহা ক্যাননিক্যাল গুরুত্ব সমষ্টি (grand canonical partition function) বলে।

আগের মতই এক্ষেত্রেও দেখা যাবে

$$U = \langle E \rangle = - \frac{\partial \ell_n Z}{\partial \beta}$$

এবং একই রকমভাবে লিখতে পারি

$$Z = \Omega e^{-\beta \langle E \rangle - \gamma \langle N \rangle}$$

$$= \Omega e^{-\beta \langle E \rangle - \gamma \langle N \rangle}$$

$$\text{অর্থাৎ } \ell_n \Omega = \ell_n Z + \beta \langle E \rangle + \gamma \langle N \rangle$$

$$\text{এবং } s = k \ell_n \Omega = K [\ell_n Z + \beta \langle E \rangle + \gamma \langle N \rangle]$$

তাপগতিবিদ্যার প্রথম ও দ্বিতীয় সূত্র থেকে পাই

$$ds = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN$$

$$\text{অর্থাৎ } \left( \frac{\partial S}{\partial N} \right)_{V,T} = -\frac{\mu}{T}$$

$$\text{আবার } \left[ \frac{\partial}{\partial N} (K \ln \Omega) \right]_{V,T} = \gamma k$$

$$\text{অতএব } \gamma = -\frac{\mu}{KT} = -\mu\beta$$

$$\text{অতএব } Z = \sum_r e^{-\beta(E_r - \mu N_r)} \text{----- (13.39)}$$

ক্যাননিক্যাল সমাবেশের মতই মহা ক্যাননিক্যাল সমাবেশের ক্ষেত্রের গুরুত্ব সমষ্টি থেকে তন্ত্রের যাবতীয় তাপগতিক প্রাচলগুলির মান নির্ণয় সম্ভব।

### 13.5.3 অণু ক্যাননিক্যাল সমাবেশ (Microcanonical ensemble)

আবদ্ধ তন্ত্র যা বাইরের পরিবেশের সাথে মিথস্ক্রিয়া করে না তার বৃহৎ-অবস্থা আয়তন (V) কণাসংখ্যা (N) এবং শক্তি (E) এই তিন প্রাচল দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়। এই ধরনের তন্ত্রের সমষ্টিকে Micro canonical ensemble বা অণু ক্যাননিক্যাল সমাবেশ বলে। প্রকৃতপক্ষে গোটা বিশ্বচরাচরকে একত্রে একটি আদর্শ আবদ্ধতন্ত্র বলা যেতে পারে যার শক্তি অপরিবর্তনীয়। কেননা এই তন্ত্রের কোন পরিবেশই নেই যার সাথে সে মিথস্ক্রিয়া ঘটাতে পারে। তাই কোন বাস্তবতন্ত্র আদর্শ আবদ্ধ তন্ত্র হতে পারে না। তাই এই ধরনের সমাবেশের আলোচনা বাস্তবানুগ নয়। যদিও একমাত্র এই সমাবেশ তন্ত্রের সাহায্যেই যে তন্ত্রের তাপগতিক পরিবর্তন অত্যন্ত রূপক এবং নিখুঁতভাবে আলোচনা করা সম্ভব। কিন্তু সেই আলোচনার গাণিতিক দিকটি অত্যন্ত জটিল।

---

## 13.6 সারাংশ

---

- সনাতন বলবিদ্যার পদ্ধতি অবলম্বন করলে পাওয়া যায়

$$Z = \frac{V}{a} (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}$$

আবার কোয়ান্টাম বলবিদ্যার প্রয়োগে পাওয়া যায়

$$Z = \frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}$$

অর্থাৎ একক কোষের আয়তন  $a = h^3$

- $Z = \pi Z_f$   
f = 1, 2 -----

যেখানে  $Z_1, Z_2, \text{----- } Z_f$  কণার 1, 2 ----- f তম

স্বাধীনতার মাত্রার জন্য গুরুত্ব সমষ্টি এবং Z কণার সামগ্রিক গুরুত্ব সমষ্টি

- শক্তির সমবিভাজন নীতি

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2}KT$$

আবর্ত গুরুত্ব সমষ্টির সাধারণ রাশিমালা

$$Z_{\text{rot}} = \sum_{J=20}^{\infty} (2J+1) \exp\left[-\frac{h^2}{2IKT} J(J+1)\right]$$

যদি T এবং I খুব কম হয় তবে

$$Z_{\text{rot}} = 1 + 3e^{-\frac{20r}{T}} + 5e^{-\frac{60r}{T}}$$

$$\text{যখন } \theta_r = \frac{h^2}{2IK}$$

আবার যদি T এর মান খুব বেশী কিন্তু I খুব কম হয় সেক্ষেত্রে,

$$Z_{\text{rot}} = \frac{2IKT}{h^2}$$

স্থির আয়তনে হাইড্রোজেনের আণবিক আপেক্ষিক তাপ

$$C_v = \frac{3}{4}C_{v(o)} + \frac{1}{4}C_{v(p)}$$

যেখানে অর্ধে হাইড্রোজেনের আণবিক আপেক্ষিক তাপ  $C_{v(o)}$  এবং প্যারা হাইড্রোজেনের  $C_{v(p)}$

● কম্পনজনিত গতির জন্য দ্বিপরমাণুক অণুর গুরুত্ব সমষ্টি

$$Z_v = e^{-\frac{0_v}{2T}} \left(1 - e^{-\frac{0_v}{T}}\right)^{-1}$$

$$\text{যখন } \theta_v = \frac{h\nu}{k} - 1$$

$$\text{সেক্ষেত্রে } U = NK \left[ \frac{\theta_v}{2} + \frac{\theta_v}{e^{\frac{\theta_v}{T}} - 1} \right]$$

তবে  $\theta_v \ll T$

$$U = NKT + \frac{1}{2}h\nu$$

$$\text{এবং } (C_v)_{\text{vibration}} = NK$$

● অণুর অন্তঃস্থ ইলেকট্রনের গতির জন্য গুরুত্ব সমষ্টি

$$Z_{\text{el}} = g_0 + g_1 e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}}$$

যেখানে ইলেকট্রনের প্রথম উত্তেজিত স্তরের শক্তি  $\epsilon_1$ ,  $g_0$  এবং  $g_1$  যথাক্রমে সাধারণ এবং উত্তেজিত শক্তিস্তরের সাথে সংশ্লিষ্ট কোষ বা অবস্থা সংখ্যা

সেক্ষেত্রে,

$$U = N\epsilon_1 \left( \frac{g_0}{g_1} e^{-\beta\epsilon_1} + 1 \right)^{-1}$$

$$\text{এবং } C_v = \frac{N\epsilon_1^2}{KT^2} \frac{g_0}{g_1} e^{\beta\epsilon_1} \left[ 1 + \frac{g_0}{g_1} e^{-\beta\epsilon_1} \right]^{-2}$$

● ক্যাননিক্যাল সমাবেশের ক্ষেত্রে গুরুত্ব সমষ্টি

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$$

এবং মহাক্যাননিক্যাল সমাবেশের ক্ষেত্রে গুরুত্ব সমষ্টি

$$Z = \sum_i e^{-(\beta E_i - MN_i)}$$

### 13.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

1. যদি তন্ত্রের কোন  $g_i$  অণু অবস্থার প্রত্যেকটিতে শক্তির মান  $\epsilon_i$  হয় তবে দেখান যে ক্যাননিক্যাল সমাবেশের ক্ষেত্রে

$$Z = \sum_i g_i e^{-\beta \epsilon_i}$$

2.  $N$  সংখ্যক সনাতনী রৈখিক স্পন্দক নিয়ে একটি তন্ত্র গঠিত, তন্ত্রটির (i) গুরুত্ব সমষ্টি, ( $Z$ ) (ii) মুক্ত শক্তি,  $F$  (iii) এনট্রপি,  $S$  (iv)  $C_v$  এবং (v)  $C_p$  এর রাশিমালা নির্ণয় করুন।

3. একটি  $N$ -সংখ্যক কণা বিশিষ্ট আদর্শ গ্যাসের শক্তি

$$\epsilon = cp$$

যখন  $p$  হল কণার ভরবেগ এবং  $c$  একটি ধ্রুবক, তন্ত্রের (i) গুরুত্ব সমষ্টি,  $Z$  (ii) শক্তি,  $U$  এবং (iii)  $C_v$  এর রাশিমালা নির্ণয় করুন।

4. এক পরমাণুক আদর্শ গ্যাসের প্রতিটি কণাকে একটি ক্যাননিক্যাল তন্ত্র হিসেবে বিবেচনা করে, ক্যাননিক্যাল সমাবেশের বণ্টন সূত্রের সাহায্যে

i) ম্যাক্সওয়েলের গতি বণ্টন সূত্রটি প্রতিষ্ঠা করুন

ii) তন্ত্রটির তন্ত্রগুরুত্ব সমষ্টির রাশিমালা নির্ণয় করুন।

### 13.8 সমাধান এবং উত্তরমালা

অনুশীলনী-1 :

ধরা যাক  $Z_1$  ও  $Z_2$  দুটি তন্ত্র অ

$$\text{সেক্ষেত্রে } Z_1 = \sum e^{-\beta \epsilon_{1i}} \text{ এবং } Z_2 = \sum e^{-\beta \epsilon_{2i}}$$

যখন  $E_{11}, E_{12}, E_{13}, \dots$  ইত্যাদি প্রথমতন্ত্রের বিভিন্ন অণুঅবস্থার শক্তি এবং  $E_{21}, E_{22}, E_{23}, \dots$  ইত্যাদি অনুরূপভাবে দ্বিতীয়তন্ত্রের শক্তি। এখন দুটিতন্ত্র মিলিতভাবে যদি একটি যৌগিকতন্ত্র তৈরী করে এবং সবগুলোই যদি তাপগতিক সাম্যাবস্থায় থাকে সেক্ষেত্রে যৌগিক তন্ত্রটির মোট শক্তি।

$$E = \sum E_{1i} + \sum E_{2r}$$

এবং গুরুত্ব সমষ্টি

$$\begin{aligned} Z &= \sum e^{-\beta E} = \sum e^{-\beta(E_{1i}+E_{2r})} \\ &= \sum e^{-\beta E_{1i}} \sum e^{-\beta E_{2r}} \\ &= Z_1 Z_2 \end{aligned}$$

এখন আদর্শ গ্যাসের  $N$  সংখ্যক প্রতিটি কণাকে একটি তন্ত্র হিসেবে বিবেচনা করলে আদর্শ গ্যাস তন্ত্রটির গুরুত্ব সমষ্টি

$$Z = z.z.\dots.z = (z)^N$$

যখন প্রতিটি কণার গুরুত্ব সমষ্টি

$$z = \frac{V}{h^3} (2\pi mKT)^{\frac{3}{2}}$$

অনুশীলনী-2 :

$$Z = \frac{V}{h^3} (2\pi mKT)^{\frac{3}{2}} = M \cdot \left(\frac{V}{N}\right) \left(\frac{2\pi mKT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{এখন প্রতিটি কণার জন্য উন্মুক্ত আয়তন} = \frac{V}{N}$$

$$\text{কণার দ্যব্রাগলা তরঙ্গ দৈর্ঘ্য } \lambda_B = \frac{h}{p}$$

$P =$  কণার ভরবেগ

$$\text{এবং কণাশক্তি } \epsilon \cong \frac{p^2}{2m}$$

$$\text{ঘরের তাপমাত্রায় } \epsilon \cong KT$$

$$\text{অতএব } P = \sqrt{2m\epsilon} = \sqrt{2mkT}$$

$$\text{সুতরাং } \lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2mkT}}$$

কণাগুলির গড় দূরত্ব  $r_0$  হলে

$$r_0^3 = \frac{V}{N}$$

$$Z = Nr_0^3 \left( \pi \sqrt{\frac{2mkT}{h}} \right)^2$$

$$= N \left( \frac{r_0}{\lambda_B} \right)^3 \pi^2$$

অনুশীলনী-3 :

আদর্শ গ্যাসতন্ত্রের গুরুত্ব সমষ্টি

$$Z = (z)^N = \frac{V^N}{h^{3N}} (2\pi mkT)^{\frac{3N}{2}}$$

$$\left[ \because z = \frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$S = k(\ell_n Z + \beta u)$$

$$= K \ell_n Z + \frac{U}{T}$$

$$= KM \ell_n V + \frac{3}{2} NK \ell_n \left( \frac{2\pi mKT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{U}{T}$$

$$= NK \left[ \ell_n V + \frac{3}{2} \ell_n \left( \frac{2\pi mKT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \right] ; U = \frac{3}{2} NK T$$

মিশ্রণের আগে তন্ত্রগুলির মোট এনট্রপি

$$S_i = 2s = 2NK \left[ \ell_n V + \frac{3}{2} \ell_n \left( \frac{2\pi mKT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \right]$$

মিশ্রণের পর

$$S_f = 2NK \left[ \ell_n 2V + \frac{3}{2} \ell_n \left( \frac{2\pi mKT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \right]$$

$$\text{অতএব } S_f - S_i = 2NK \ell_n 2$$

গিবসের মতানুসারে  $Z = \frac{1}{N!} z^N$  লিখতে হবে, এবং সেক্ষেত্রে একইভাবে গণনা করলে দেখা যাবে

$$S_f = S_i$$

[অনুশীলনী 5 দ্রষ্টব্য]

অনুশীলনী-4 :

$$S = NK \left[ \ell_n \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ell_n \left( \frac{2\pi mKT}{h^2} \right) + \frac{5}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{এখন } \ell_n \frac{V}{N} &= \ell_n \left[ \frac{22.414 \times 10^{-3}}{6.0225 \times 10^{23}} \times \frac{27.2}{273.15} \right] \\ &= -60.86 \end{aligned}$$

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{1 \times V}{27.2} = \frac{1 \times 22.414 \times 10^{-3}}{273.2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{22.414}{273.15} \times 272$$

$$\ell_n \left( \frac{2\pi mKT}{h^2} \right) = \ell_n \left[ 2\pi \times \frac{20.179 \times 10^{-3}}{6.0225 \times 10^{23}} \times \frac{1.3805 \times 10^{-23} \times 27.2}{(6.6256 \times 10^{-34})^2} \right]$$

$$= 46.639$$

$$S = 6.0225 \times 10^{23} \times 1.3805 \times 10^{-23} \left( -60.86 + \frac{3}{2} \times 46.639 + 2.5 \right)$$

$$= 96.43 \text{ J/mol} - \text{K}$$

অনুশীলনী-5 :

তন্ত্র গুরুত্ব সমষ্টি

$$Z = (z)^N$$

যে N সংখ্যক উপতন্ত্র (কণা) নিয়ে তন্ত্রটি গঠিত তাদের যদি সদৃশ ধরা যায় তবে গিবসের মতানুসারে

$$Z = \frac{1}{N!} (z)^N$$

$$S = K[\ell_n Z + \beta U]$$

এই সমীকরণে Z এর উপরোক্ত রাশিমালা ব্যবহার করলে

$$S = NK \left[ \ell_n \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ell_n \left( \frac{2\pi mKT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2} \right]$$

এবং সেক্ষেত্রে,

$$S_i = 2S = 2NK \left[ \ell_n \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ell_n \left( \frac{2\pi mKT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2} \right]$$



$$\text{ও } S_f = 2NK \left[ \ell_n \frac{2V}{2N} + \frac{3}{2} \ell_n \left( \frac{2\pi mKT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2} \right]$$

$$\text{সুতরাং } S_f - S_i = 0$$

অর্থাৎ তন্ত্রের কণাসমূহ সদৃশ হলে সেক্ষেত্রে এনট্রপির কোন পরিবর্তন হবে না — যা স্বাভাবিক।

**অনুশীলনী-6 :**

যদি অণুটির স্বাধীনতার মাত্রা  $f$  হয় তবে

$$U = \frac{1}{2} NKT$$

$$\Rightarrow C_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_r = \frac{1}{2} NKf = \frac{1}{2} Rf$$

$$\text{এবং } C_p = C_v + R = \frac{1}{2} Rf + R = R \left( 1 + \frac{f}{2} \right)$$

$$\text{সুতরাং } \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{R \left( 1 + \frac{f}{2} \right)}{R \cdot \frac{f}{2}} = \frac{f+2}{f}$$

**সমাধান এবং উত্তরমালা :**

1. **ইঙ্গিত :**

ক্যাননিক্যাল বা TVN তন্ত্রের শক্তি নির্ণয় করতে গেলে যদি  $M$  সংখ্যকবার সম্পাদন করা যায় তবে দেখা যাবে  $M_1$  বার তন্ত্রটির শক্তির মান পাওয়া যাবে  $E_1$ ,  $M_2$  বার শক্তির মান  $E_2$  ইত্যাদি। যখনই পরীক্ষাটি সম্পাদিত হচ্ছে ঠিক সেই মুহূর্তে তন্ত্রটি তার একটি অণু-অবস্থায় রয়ে আবার এমন হতেই পারে তন্ত্রটির  $g_r$  অণু-অবস্থায় প্রত্যেকটিতে তন্ত্রটির শক্তির মান  $E_r$  এখন যদি  $M_1$  সংখ্যক বার পরীক্ষাটি সম্পাদন করলে  $E_1$  শক্তি পাওয়া যায় তবে এটা পরিষ্কার  $M_1$  সংখ্যক পরীক্ষায় প্রথমটি  $g_r$  অণু-অবস্থার যে কোন একটির ওপর সম্পাদন করা যায় এবং তা  $g_r$  উপায়ে করা যেতে পারে। এইভাবে  $M_1$  এবং দ্বিতীয় পরীক্ষাটিতে  $g_r$  উপায়ে করা যায় অর্থাৎ মোট  $M$  সংখ্যক পরীক্ষার মধ্যে  $M_1$  সংখ্যক পরীক্ষা যার প্রতিটির ক্ষেত্রে নির্ণীত শক্তির মান  $E_1$  তা মোট

$$MM_1 \dots \dots M_r C_{M_r} g_r^{M_r}$$

কাজেই  $M$  সংখ্যক পরীক্ষায় যখন  $M_1$  ক্ষেত্রে শক্তির মান  $E_1$ ,  $M_2$  ক্ষেত্রে শক্তির মান  $E_2$  ইত্যাদি সেক্ষেত্রে সমস্ত প্রক্রিয়াটি মোট  $W$  উপায়ে সংঘটিত করা হলে

$$W = M! \pi \frac{g_r^{M_r}}{M_r!}$$

W এর এই মান অনুচ্ছেদ 13.5 এ ব্যবহার করে আমরা পাই

$$P_r = \frac{g_r e^{-\beta E_r}}{Z}$$

আবার যেহেতু  $\sum P_r = 1$

$$1 = \frac{\sum g_r e^{-\beta E_r}}{Z}$$

$$\Rightarrow Z = \sum g_r e^{-\beta E_r}$$

যখন  $Z$  তন্ত্রের গুরুত্ব সমষ্টি।

2. একটি সনাতনী রৈখিক স্পন্দকের শক্তির মান

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2,$$

$m$  = স্পন্দকের ভর

$p$  = ভরবেগ

$x$  = সাম্যাবস্থা থেকে স্পন্দকের দূরত্ব,

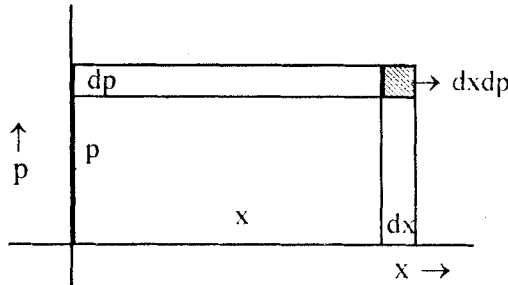
$k$  = স্পন্দকের স্প্রিং; ধ্রুবক  $k = mw^2$

এবং  $w$  = বৃত্তীয় কম্পাংক।

এখন প্রতিটি স্পন্দককে একটি উপতন্ত্র হিসেবে ধরলে একটি উপতন্ত্রের গুরুত্ব সমষ্টি

$$z = \sum g_r e^{-\beta \epsilon_r}$$

ধরে নেওয়া হয়েছে যে নির্দিষ্ট স্পন্দকটি বাদবাকি স্পন্দকের সাথে তাপীয় সাম্যাবস্থায় আছে এবং তারা মিলিত ভাবে একটি TVN সমাবেশ তৈরী করে। এক রৈখিক স্পন্দকের দশালোকের মাত্রা দুই।



এই দশালোকে একটি কোষের আয়তন  $h$  এবং স্পন্দকের সরণ  $x$  এবং  $x + dx$  এর মধ্যে ভরবেগ  $p$  এবং  $p + dp$  এর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকলে দশালোকে স্পন্দকটি যে আয়তন অধিকার করে তার পরিমাণ

$$dT = dp dx$$

এবং ঐ আয়তনে কোষসংখ্যা  $g_r \Rightarrow \frac{dpdx}{h}$

বলা যেতে পারে এই কোষগুলিতে অবস্থানরত অবস্থায় কণাটির শক্তি,  $\epsilon_1$

কাজেই  $z = \frac{1}{h} \int \int dpdx e^{-\beta \epsilon}$

$$= \frac{1}{h} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{p^2}{2m}\beta} dp \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}kx^2\beta} dx$$

এখন  $\sqrt{\frac{\beta}{2m}} p = U$  এবং  $\sqrt{\frac{k\beta}{2}} x = v$

ধরলে

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{p^2}{2m}\beta} dp = \sqrt{\frac{2m}{\beta}} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{2m}{\beta}} \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{kx^2}{2}\beta} dx = \sqrt{\frac{2}{k\beta}} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-v^2} dv = \sqrt{\frac{2}{k\beta}} \sqrt{\pi}$$

অতএব

$$z = \frac{1}{h} \times \sqrt{\frac{2m}{\beta}} \sqrt{\pi} \times \sqrt{\frac{2}{m\omega^2\beta}} \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega\beta} \quad ; \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

কাজেই তন্ত্র গুরুত্ব সমষ্টি  $Z = (z)^N = (\hbar\omega\beta)^{-N}$

$$U = - \frac{\partial \ell_n Z}{\partial \beta} = - \frac{\partial}{\partial \beta} [-N \ell_n \beta + N \ell_n \hbar\omega]$$

$$= NKT$$

এখন  $S = KT[\ell_n Z + \beta U] = k \ell_n Z + \frac{U}{T}$

$$F = U - TS = -KT \ell_n Z$$

$$= NKT \ell_n \left( \frac{\hbar\omega}{KT} \right)$$

$$dF = dU - Tds - SdT = -PdV - SdT$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = -P$$

$$\text{অতএব } P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = 0$$

$$C_V = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = NK$$

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = NK \left[ \frac{\partial}{\partial T} (U + pV) \right]_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P = NK \quad [\because p = 0]$$

3. এক্ষেত্রে কণাগুলির গতি ত্রিমাত্রিক। অতএব একটি উপতন্ত্রের (কণার) দশালোক ছয়মাত্রিক এবং

$$g \rightarrow \frac{vdP_x dP_y dP_z}{h^3} = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp$$

কাজেই কণা গুরুত্ব সমষ্টি

$$z = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\alpha e^{-\beta cp} p^2 dp$$

$$\int e^{-\beta cp} p^2 dp$$

$$= p^2 \int e^{-\beta cp} dp - \int \left\{ \frac{d}{dp} p^2 \int e^{-\beta cp} dp \right\} dp$$

$$= -\frac{p^2}{\beta c} e^{-\beta cp} + \frac{2}{\beta c} \int p e^{-\beta cp} dp$$

$$= -\frac{p^2}{\beta c} e^{-\beta cp} + \frac{2}{\beta c} \left[ p \int e^{-\beta cp} dp - \int \left\{ \frac{dp}{dp} \int e^{-\beta cp} dp \right\} dp \right]$$

$$= -\frac{p^2}{\beta c} e^{-\beta cp} + \frac{2Pe^{-\beta cp}}{\beta c} - \frac{2}{(\beta c)^3} e^{-\beta cp}$$

$$\int_0^\alpha e^{-\beta cp} p^2 dp = 0 + 0 - \frac{2}{(\beta c)^3} [0 - 1]$$

$$= \frac{2}{(\beta c)^3}$$

অতএব

$$z = \frac{4\pi V}{h^3} \cdot \frac{2}{(\beta c)^3} = 8\pi v \left( \frac{KT}{hc} \right)^3$$

অর্থাৎ

$$Z = (z)^N = \left[ 8\pi V \left( \frac{KT}{ch} \right)^3 \right]^N = \left[ \frac{8\pi V}{(\beta cH)^3} \right]^N$$

$$\ell_n Z = N[\ell_n 8\pi V - 3\ell_n \beta CH]$$

$$\text{অতএব } C_v = \frac{\partial U}{\partial T} = 3NK$$

4. N সংখ্যক কণা বিশিষ্ট আদর্শ গ্যাস তন্ত্রের প্রতিটি কণাকে একটি করে উপতন্ত্র হিসেবে বিবেচনা করা যেতে পারে। ভাবা যেতে পারে একটি নির্দিষ্ট উপতন্ত্র/একটি নির্দিষ্ট কণা অন্য উপতন্ত্রের সাথে মিথস্ক্রিয়ার ফলে তাপীয় সাম্যাবস্থায় আছে এবং তারা প্রত্যেকেই ক্যাননিক্যাল সমাবেশের সদস্য। এক্ষেত্রে প্রতিটি উপতন্ত্রের নির্দিষ্ট আয়তন আছে, আছে নির্দিষ্ট উষ্ণতা (T) এবং কণাসংখ্যা এক। কাজেই আদর্শ গ্যাসতন্ত্র যা N সংখ্যক উপতন্ত্রের সমাহার মাত্র তার গুরুত্ব সমষ্টি Z হলে

$$Z = (z)^N$$

যেখানে N সংখ্যক কণার প্রতিটি কণা গুরুত্ব z এবং

$$z = \sum g_i e^{-\beta \epsilon_i}$$

ছয়মাত্রিক দশালোকে একটি কণাবিশিষ্ট উপতন্ত্রের অণু-অবস্থা তিনটি স্থানাংক x, y, z এবং তিনটি ভরবেগ উপাংশ  $p_x, p_y, p_z$  দ্বারা নির্ধারিত। অর্থাৎ কণাটির অণু অবস্থা ছয়মাত্রিক দশালোকের একটি বিন্দু দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়। আবার হাইসেনবার্গের অনিশ্চয়তা সূত্র অনুযায়ী একটি কণার অণু অবস্থার যদি দশালোকে x এবং  $x + dx$ ; y এবং  $y + dy$ ; z এবং  $z + dz$ ;  $p_x$  এবং  $p_x + dp_x$ ;  $p_y$  এবং  $p_y + dp_y$ ;  $p_z$  এবং  $p_z + dp_z$  দ্বারা সীমাবদ্ধ আয়তনকে বোঝান হয় তবে

$$dx dy dz dp_x dp_y dp_z \geq h$$

অর্থাৎ দশালোকে অণু অবস্থা যে ক্ষুদ্রতম আয়তন অধিকার করে তার মান  $h^3$  এবং ওপরে বর্ণিত আয়তনে মোট

$$\frac{dx dy dz dp_x dp_y dp_z}{h^3}$$

অণু-অবস্থা থাকতে পারে।

যদি আলোচ্য কণা তন্ত্রের V আয়তনের যে কোন জায়গায় থাকতে পারে কিন্তু ভরবেগের মান p এবং  $p + dp$  এর মধ্যে সীমাবদ্ধ হয় তবে কণাটির অণু-অবস্থার মোট সংখ্যা

$$g_i \rightarrow \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp$$

$$\text{কাজেই } z = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} p^2 dp$$

$$= \frac{V}{h^3} (2\pi mKT)^{\frac{3}{2}}$$

এখন কণাটির ভরবেগ  $p$  এবং  $p + dp$  এর মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা

$$dp = \frac{g_i}{z} e^{-\frac{\beta p^2}{2m}}$$

$$= \frac{4\pi V}{h^3} e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} p^2 dp$$

$$= \frac{V}{h^3} (2\pi mKT)^{\frac{3}{2}}$$

আবার  $dn$  সংখ্যক কণার ভরবেগ  $p$  এবং  $p + dp$  এর মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা

$$dp = \frac{dn}{N}$$

অতএব  $\frac{dn}{N} = \frac{4\pi}{(2\pi mKT)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{mc^2}{2KT}} m^3 c^2 dc$

যখন  $p = mc$

$$dn = \frac{4\pi N}{(2\pi mKT)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{mc^2}{2KT}} m^3 c^2 dc$$

এটিই ম্যাক্সওয়েলের গতিবন্টনের সূত্র

তন্ত্রের তন্ত্র গুরুত্ব সমষ্টি

$$Z = (z)^N = \frac{V^N}{h^{3N}} (2\pi mKT)^{\frac{3N}{2}}$$

গিবসের কূটের সমাধানের জন্য তন্ত্রের কণাগুলিকে সদৃশ ধরতে হবে এবং সেক্ষেত্রে

$$Z = \frac{Z^N}{N!} = \frac{1}{N!} \frac{V^N}{h^{3N}} (2\pi mKT)^{\frac{3}{2}} \quad |$$

গঠন

14.1 প্রস্তাবনা

উদ্দেশ্য

14.2 কোয়ান্টাম সংখ্যায়নে বণ্টন অপেক্ষকের নির্ধারণ : বাক্স এবং কোষ পদ্ধতি

(Derivation of distribution function in Quantum Statistics – box and cell method)

14.3 আদর্শ বোসন গ্যাস হিসেবে কৃষ্ণবস্তু বিকিরণের আলোচনা

14.4 তরল  $^4\text{He}$  এবং বোস ঘনীভবন (Bose Condensation)

14.5 আদর্শ ফার্মায়ন গ্যাস হিসেবে ইলেকট্রন মেঘের আলোচনা

14.6 সারাংশ

14.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলি

14.8 সমাধান ও উত্তরমালা

---

### 14.1 প্রস্তাবনা

---

এর আগের দুটি এককে আপনারা দেখেছেন আদর্শ গ্যাস তত্ত্বের তাপগতিক অপেক্ষকগুলি নির্ণয় করার জন্য কিভাবে পরিসাংখ্যিক পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। পরীক্ষালব্ধ মানের সাথে তাত্ত্বিক পদ্ধতিতে নির্ণীত মানগুলি বেশীর ভাগ সময়েই সামান্য হলেও কোন কোন ক্ষেত্রে তাদের বিচ্যুতি বেশ প্রণিধান যোগ্য। কোন দ্বিপরিমাণুক গ্যাসের আপেক্ষিক তাপের তাত্ত্বিক মান উচ্চ উষ্ণতায় এবং নিম্নচাপে নির্ণীত পরীক্ষালব্ধ মানের সাথে এক হলেও নিম্ন উষ্ণতা এবং উচ্চ চাপে এই দুই মানের ব্যবধান বেশ প্রকট। আবার ধাতুর মধ্যে আমরা যদি ইলেকট্রনের মেঘকে আদর্শ গ্যাস হিসেবে গণ্য করি তবে সনাতন ম্যাক্সওয়েল বোলৎজম্যান সংখ্যায়নের সাহায্যে বিভিন্ন উষ্ণতায় প্রাপ্ত ধাতুর আপেক্ষিক তাপের পরীক্ষালব্ধ মানের ব্যাখ্যা পাওয়া আদৌ সম্ভব নয়। কৃষ্ণবস্তু বিকিরণে বিভিন্ন তরঙ্গদৈর্ঘ্যের মধ্যে শক্তির বণ্টনের নিয়মের প্রতিষ্ঠা ও সনাতনী সংখ্যায়নের পরিধির বাইরে। আবার এটাও আপনারা দেখেছেন গিবসের কূটের নিরসনের জন্য অণু অবস্থার সংখ্যাকে বা গুরুত্ব সমষ্টিকে  $N!$  ( $N$  যেখানে কোন সংখ্যা) দিয়ে ভাগ করতে হচ্ছে অর্থাৎ সনাতন সংখ্যায়নে আমরা যখন একই সংস্থার কণাগুলোকে ভিন্ন ধরছি তখনই আবার বিশেষ সুবিধার জন্য তাদের অভিন্নও ধরতে হচ্ছে। আসলে সনাতন সংখ্যায়নের মূল দুর্বলতা এটাই। একই সমজাতীয় কণাগুলির (কৃষ্ণবস্তু আধারের ফোটন কণা বা ধাতুর অভ্যন্তরস্থ ইলেকট্রন কণা) প্রত্যেকের আলাদা আলাদা নামকরণ সম্ভব—

এই সনাতনী ধারণা আদৌ ঠিক নয়। কোয়ান্টাম বলবিদ্যার অন্যতম মূলনীতিই হল — ‘সমজাতীয় কণাগুলি অভিন্ন’, কোয়ান্টাম সংখ্যায়নের তত্ত্বের অণু অবস্থার সংখ্যা নির্ণয়ে তত্ত্বের অন্তঃস্থ সমজাতীয় কণাগুলির এই ধর্ম বিবেচনা করা হয়। এক্ষেত্রেও আর এক সমস্যা দেখা যায়। সাধারণতঃ মৌলিকণাগুলি, যেমন — ইলেকট্রন, প্রোটন, মেসন, ফোটন ইত্যাদিকে ঘূর্ণন কোয়ান্টাম সংখ্যা (Spin quantum number) এর পরিপ্রেক্ষিতে দু’ ভাগে ভাগ করা হয়। ইলেকট্রন, প্রোটন,  $He^3$  ইত্যাদি যাদের ঘূর্ণন কোয়ান্টাম সংখ্যা  $\frac{1}{2}$  বা  $\frac{1}{2}$  এর অযুগ্ম গুণিতক আর মেসন, ফোটন,  $He^4$  ইত্যাদি যাদের ঘূর্ণন কোয়ান্টাম সংখ্যা 0 কিম্বা কোন পূর্ণসংখ্যা। প্রথম দলের কণাগুলি পাউলির তাপবর্জন নীতি মেনে চলা অর্থাৎ কোন একটি কোয়ান্টাম অবস্থায় হয় একটি কণা থাকবে অথবা কেউ থাকবে না। শেষোক্ত দলের ক্ষেত্রে এই ধরনের কোন বিধিনিষেধ নেই — কোন কোয়ান্টাম অবস্থায় শূন্য বা যে কোন সংখ্যক কণা একত্রে থাকতে পারে। স্পষ্টতঃই দুদলের ক্ষেত্রে অণু অবস্থা নির্ণয়েও কিছু হেরফের ঘটবে। যে সব কণা প্রথম দলে, যাদের ঘূর্ণন কোয়ান্টাম সংখ্যা  $\frac{1}{2}$  বা তার অযুগ্ম গুণিতক তারা কোয়ান্টাম সংখ্যায়নের ফার্মি ডিরাক শাখাকে অনুসরণ করে এবং তাদের ফের্মি কণা বা ফের্মিয়ন বলা হয় আর যাদের ঘূর্ণন কোয়ান্টাম সংখ্যা শূন্য বা পূর্ণসংখ্যা তারা বোস-আইনস্টাইন শাখাকে অনুসরণ করবে এবং এদেরকে বোস কণা বা বোসন্ বলা হয়।

আমরা এই এককের পরবর্তী অনুচ্ছেদ গুলিতে কোয়ান্টাম সংখ্যায়নের দুটি শাখাতেই বণ্টন অপেক্ষক সমূহের রাশিমালা নির্ণয় করব। আর দেখাব যে উচ্চ উষ্ণতায় এবং নিম্নচাপে বণ্টন অপেক্ষকগুলি সনাতন বণ্টন অপেক্ষকে পর্যবসিত হয়। আদর্শ কোয়ান্টাম গ্যাস এবং আদর্শ সনাতন গ্যাসের মধ্যকার পার্থক্যও প্রদর্শন করা হবে। কোয়ান্টাম সংখ্যায়নে তাপগতিক রাশিগুলির মানও নির্ণয় করা হবে। এছাড়া আমরা আলোচনা করব কিভাবে বোস সংখ্যায়নের প্রয়োগে কৃষ্ণবস্তু বিকিরণে প্লাংকের সূত্রের সহজতম নির্ধারণ এবং তরল  $He^4$  এ বোস ঘনীভবনের ব্যাখ্যা। ধাতুর অভ্যন্তরস্থ ইলেকট্রন মেঘকে আদর্শ ফার্মি গ্যাস হিসেবে বিবেচনা করে ধাতুর আপেক্ষিক তাপের ও ধাতু থেকে ইলেকট্রনের তাপীয় নিঃসরণের তাত্ত্বিক আলোচনাও এখানে সন্নিবেশিত হবে।

---

## উদ্দেশ্য

---

এই এককটি পাঠের পরে আপনি সক্ষম হবেন

- সনাতনী সংখ্যায়ন তত্ত্বের দুর্বলতাগুলি বুঝতে,
- বোস-আইনস্টাইন এবং ফার্মি-ডিরাক সংখ্যায়নে বণ্টন অপেক্ষকগুলির ও এই দুই সংখ্যায়নের ক্ষেত্রে তাপগতিক প্রাচলগুলির রাশিমালা নির্ণয় করতে
- ফোটন গ্যাসের ক্ষেত্রে বোস-আইনস্টাইন সংখ্যায়ন প্রয়োগ করতে
- নিম্ন উষ্ণতায় তরল হিলিয়ামের আচরণ ব্যাখ্যা করতে
- নিম্ন উষ্ণতায় ধাতুর আপেক্ষিক তাপের ব্যাখ্যা করতে
- ধাতু থেকে ইলেকট্রনের তাপীয় নিঃসরণের তাত্ত্বিক ব্যাখ্যা দিতে।



## 14.2 কোয়ান্টাম সংখ্যানে বণ্টন অপেক্ষকগুলির রাশিমাল্লা নির্ণয় : বাক্স এবং কোষ পদ্ধতি

আদর্শ গ্যাসতন্ত্রের অন্তর্গত প্রতিটি কণার শক্তি  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$  ইত্যাদি কতকগুলি বিচ্ছিন্ন মান নেয় এবং কণাটির অবস্থাও সংশ্লিষ্ট কোয়ান্টাম সংখ্যা দ্বারা নির্ধারিত, আমরা এটাও জানি কণাটির শক্তি যখন  $\epsilon_1$  তখন কণাটি মোট  $g_1$  কোয়ান্টাম অবস্থায় থাকতে পারে। (উদাহরণ হিসেবে বলা যেতে পারে হাইড্রোজেন পরমাণুতে  $n$ -তম কক্ষে যে ইলেকট্রন থাকে তার শক্তি  $\epsilon_n$  এবং সেখানে মোট  $2n^2$  সংখ্যক ইলেকট্রন থাকতে পারে অর্থাৎ মোট কোয়ান্টাম অবস্থা  $g$  এর মান  $2n^2$ ) অর্থাৎ আলোচ্য কণাটির সম্ভাব্য শক্তির মান  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_s, \dots$  ইত্যাদি হলে এই শক্তিস্তরগুলির সাথে সংশ্লিষ্ট তরঙ্গ অপেক্ষক / অণু অবস্থা (বা কোষ) সংখ্যা  $g_1, g_2, \dots, g_s, \dots$  ইত্যাদি। এখন প্রতিটি শক্তিস্তরকে একক 12 এর মতই যদি দশালোকে একটি বাক্স হিসেবে ভাবা হয় এবং প্রতিটি বাক্সকে ছোট ছোট সমআয়তন বিশিষ্ট কোষে ভাগ করা যায় সেক্ষেত্রে ধরে নেওয়া যেতে পারে  $N$  সংখ্যক মোট কণার  $n_1$  সংখ্যকের শক্তি  $\epsilon_1$  এবং তারা  $g_1$  কোষে অবস্থিত,  $n_2$  সংখ্যকের শক্তি  $\epsilon_2$  এবং তারা  $g_2$  কোষে অবস্থিত ..... ইত্যাদি এখন আমাদের কাছে সমস্যা মোট  $N$  সংখ্যক অভিন্ন ও আকর্ষণহীন কণাকে ঠিক কতরকমে আমরা বণ্টন করতে পারি যার ফলে :

$n_1$  কণা  $g_1$  কোষে,  $n_2$  কণা,  $g_2$  কোষে,  $n_3$  কণা  $g_3$  কোষে ইত্যাদি থাকবে, যদি কণাগুলি ফার্মি ডিরাক সংখ্যায়ন মেনে চলে তবে এই প্রশ্নের উত্তর একরকম হবে আর যদি তা বোস আইনস্টাইন সংখ্যায়ন মেনে চলে তবে উত্তর অন্যরকম হবে।

ফার্মায়নের (যারা ফার্মি-ডিরাক সংখ্যায়ন মেনে চলে) ক্ষেত্রে আমাদের সমস্যা হচ্ছে  $n_i$  অভিন্ন কণার জন্য প্রয়োজনীয়  $n_i$  কোষ নির্বাচন করতে হবে। মোট  $g_i$  কোষ থেকে এবং তা করা যাবে মোট  $g_i C_{n_i}$  উপায়ে।

অর্থাৎ ফার্মি ডিরাক সংখ্যায়নে  $n_1$  কণাকে  $g_1$  কোষে,  $n_2$  কণাকে  $g_2$  কোষে ইত্যাদি রাখার মোট উপায়

$$\begin{aligned} W_{FD} &= g_{1C_{n_1}} \cdot g_{2C_{n_2}} \cdots \cdots g_{iC_{n_i}} \\ &= \prod g_{iC_{n_i}} \\ &= \prod \frac{g_i!}{(g_i - n_i)! n_i!} \end{aligned} \quad (14.1)$$

অনুশীলনী 1 : তিনজন প্রতিযোগীর মধ্য থেকে একটি ফুটবল টিমের দুটি শূন্যস্থান পূরণ করতে হবে। তা কত রকমে করা যাবে ? সমীকরণ 14.1 এর সাহায্য নিয়ে উত্তরের যথার্থতা প্রমাণ করুন।

বোসনদের (যারা বোস-আইনস্টাইন সংখ্যায়ন মেনে চলে) ক্ষেত্রে পরিস্থিতিটা একটু জটিল কেননা একটি কোষে একাধিক কণা থাকতে পারে। কল্পনা করা যাক  $n_1$  কণার প্রত্যেকটি একটি করে বল এবং

তারা একটি রেখা বরাবর সজ্জিত (চিত্র 14.1a),  $(g_i + 1)$  উল্লম্ব রেখা দ্বারা কোষের সীমা বোঝান যেতে পারে, চিত্র (14.1b)



চিত্র 14.1.a :  $n_i$  সংখ্যক কণা একটি সরলরেখা বরাবর সজ্জিত।



চিত্র 14.1b :  $n_i = 14$  এবং  $g_i = 15$  এর ক্ষেত্রে একটি সম্ভাব্য বণ্টন।

উদাহরণে  $g_i = 15$  এবং  $n_i = 14$  নেওয়া হয়েছে, প্রথম কোষে একটি কণা, দ্বিতীয় কোষেও একটি কণা তৃতীয় কোষে কোন কণা নেই। চতুর্থ ও পঞ্চম কোষেও একটি করে কণা। ষষ্ঠ কোষে তিনটি কণা ইত্যাদি। বল এবং উল্লম্বরেখার মোট সংখ্যা  $(g_i + 1 + n_i)$ , এখন দুই প্রান্তের দুটি উল্লম্ব রেখা দুটিকে স্থির রেখে বাদবাকী বল এবং রেখাগুলি— অর্থাৎ মোট  $(g_i + 1 + n_i - 2) = (g_i + n_i - 1)$  সংখ্যক বল এবং রেখাগুলির অবস্থানের যদি বিন্যাস ঘটান হয় তাহলেই আমরা উদ্দিষ্ট বণ্টন সংখ্যা পেয়ে যাব যেখানে  $g_i$  কোষের প্রতিটির মধ্যে  $n_i$  কণার প্রতিটিতে যতবার খুশি রাখা হয়েছে। সেক্ষেত্রে স্পষ্টতই এই বণ্টন সংখ্যা  $\frac{(g_i + n_i - 1)!}{(g_i - 1)! n_i!}$  কাজেই  $N$  বোসন কণার  $n_1$  কে  $\epsilon_1$  শক্তিস্তরে,  $n_2$  কে  $\epsilon_2$  শক্তিস্তরে.....  $n_i$  কে  $\epsilon_i$  শক্তিস্তরে যতভাবে রাখা যাবে তাদের মোট সংখ্যা

$$W_{BE} = \prod \frac{(g_i + n_i - 1)!}{(g_i - 1)! n_i!} \quad 14.2$$

$$= \prod \frac{(g_i + n_i)!}{g_i! n_i!} \quad \text{যেহেতু } g_i \gg 1$$

অনুশীলনী 2 : তিনজন প্রতিযোগীর মধ্যে দুটি একই ধরনের মুদ্রা কতরকমে বণ্টন করা যাবে ? সমীকরণ 14.2 এর সাহায্য নিয়ে উত্তরের সত্যতা যাচাই করুন।

অনুশীলনী 3 : যদি  $g_i \gg n_i$  হয় তবে সমীকরণ 14.1 এবং 14.2 থেকে দেখান যে

$$W_{BE} = W_{FD} = \prod \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} = W_{MB}$$

অর্থাৎ কোষসংখ্যা কণার সংখ্যার চেয়ে অনেক অনেক বেশি হলে কোয়ান্টাম সংখ্যায়ন এবং সনাতন সংখ্যায়নের মধ্যে কোন প্রভেদ থাকে না।

একক 12 তে আমরা  $W$ কে তন্ত্রের অণু-অবস্থার সংখ্যা বা তাপগতিক সম্ভাব্যতা হিসেবে চিহ্নিত করেছি। কাজেই এক্ষেত্রেও  $W_{FD}$  বা  $W_{BE}$  আদর্শ ফার্মি গ্যাস বা বোসন গ্যাসের অণু-অবস্থার সংখ্যা হিসেবে বিবেচনা করে প্লাংকের সূত্র অনুসারে সেগুলিকে তন্ত্রের এনট্রপির সাথে যুক্ত করতে পারি অর্থাৎ

$$S = k \ln W \quad 14.3$$

যদি তন্ত্রটি তাপগতিক সাম্যাবস্থায় থাকে তবে আমরা একক 12 এর মতই লিখতে পারি

$$\delta \ln W = 0$$

$$\delta N = 0 \text{ i.e. } \sum \delta n_i = 0$$

$$\delta U = 0 \text{ i.e. } \sum \epsilon_i \delta n_i = 0 \quad 14.4$$

এখন স্টারলিং এর সূত্রের সাহায্যে পাই

$$\begin{aligned} \ln W_{FD} &= \sum \{ \ln g_i! - \ln n_i! - \ln (g_i - n_i)! \} \\ &= \sum \{ g_i (\ln g_i - 1) - n_i (\ln n_i - 1) - (g_i - n_i) (\ln (g_i - n_i) - 1) \} \\ &= \sum \left( n_i \ln \frac{g_i - n_i}{n_i} - g_i \ln \frac{g_i - n_i}{g_i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{এবং } \ln W_{BE} &= \sum \ln (g_i + n_i)! - \ln g_i! - \ln n_i \\ &= \sum \left[ (g_i + n_i) (\ln (g_i + n_i) - 1) - g_i (\ln g_i - 1) - n_i (\ln n_i - 1) \right] \\ &= \sum \left[ n_i \ln \frac{g_i + n_i}{n_i} + g_i \ln \frac{g_i + n_i}{g_i} \right] \end{aligned}$$

$\ln W_{FD}$  এবং  $\ln W_{BE}$  এর রাশিমালাকে একসাথে আমরা লিখতে পারি

$$\ln W = \sum \left[ n_i \ln \frac{g_i + \gamma n_i}{n_i} + \gamma g_i \ln \frac{g_i + \gamma n_i}{g_i} \right] \quad 14.5$$

এবং এনট্রপি

$$S = k \sum \left[ n_i \ln \frac{g_i + \gamma n_i}{n_i} + \gamma g_i \ln \frac{g_i + \gamma n_i}{g_i} \right] \quad 14.5a$$

যেখানে বোসন কণার জন্য  $\gamma = 1$

ফার্মায়নের জন্য  $\gamma = -1$

আবার সমীকরণ 14.5 এর অবকলন করে পাই

$$\begin{aligned} \delta \ln W &= \sum \left[ \delta n_i \ln \frac{g_i + \gamma n_i}{n_i} + n_i \frac{n_i}{g_i + \gamma n_i} \left( -\frac{g_i}{n_i^2} \right) \delta n_i + \gamma g_i \frac{g_i}{g_i + \gamma n_i} \cdot \frac{\gamma}{g_i} \delta n_i \right] \\ &= \sum \ln \frac{g_i + \gamma n_i}{n_i} \delta n_i \end{aligned} \quad 14.6$$

এখন সমীকরণ 14.4 এবং 14.6 গুলিকে একত্রে লিখলে আমরা পাই

$$\delta n_1 + \delta n_2 + \dots + \delta n_i + \dots = 0$$

$$\varepsilon_1 \delta n_1 + \varepsilon_2 \delta n_2 + \dots + \varepsilon_i \delta n_i + \dots = 0$$

$$\ln \frac{g_1 + \gamma n_1}{n_1} \delta n_1 + \ln \frac{g_2 + \gamma n_2}{n_2} \delta n_2 + \dots + \ln \frac{g_i + \gamma n_i}{n_i} \delta n_i = 0$$

প্রথম সমীকরণকে  $\alpha$  এবং দ্বিতীয় সমীকরণকে  $\beta$  দিয়ে গুণ করে সেগুলিকে তৃতীয়টির সাথে যোগ করে পাই

$$\sum \left( \ln \frac{g_i + \gamma n_i}{n_i} + \alpha - \beta \varepsilon_i \right) \delta n_i = 0$$

এখানে  $\alpha$  এবং  $\beta$  ল্যাগরাঞ্জের গুণিতক, যেহেতু  $\alpha$  এবং  $\beta$  এর মান অজানা এবং  $\delta n_i$  সকল পরস্পর নিরপেক্ষ ফলে,

$$\ln \frac{g_i + \gamma n_i}{n_i} = -\alpha + \beta \varepsilon_i$$

$$\Rightarrow \frac{g_i + \gamma}{n_i} = e^{-\alpha} e^{\beta \varepsilon_i}$$

$$\Rightarrow n_i = \frac{g_i}{e^{-\alpha} e^{\beta \varepsilon_i} - \gamma}$$

অতএব কোয়ান্টাম সংখ্যানে বণ্টন সূত্র হিসেবে পাই

$$n_i = \frac{g_i}{f e^{\beta \varepsilon_i} - \gamma} \quad 14.7$$

$$\Rightarrow \frac{n_i}{g_i} = F(\varepsilon) \quad [f = e^{-\alpha}]$$

$$F(\epsilon) = \text{কোয়ান্টাম বণ্টন অপেক্ষক} = \frac{1}{fe^{\beta\epsilon_i} - \gamma}$$

যেখানে বোসনের ক্ষেত্রে ( $\gamma = 1$ )

$$\text{তখন বণ্টন অপেক্ষক } F(\epsilon) = \frac{1}{fe^{\beta\epsilon_i} - 1}$$

এবং ফার্মায়নের ক্ষেত্রে ( $\gamma = -1$ )

$$\text{তখন কোয়ান্টাম বণ্টন অপেক্ষক } F(\epsilon) = \frac{1}{fe^{\beta\epsilon_i} + 1}$$

এখন  $f \gg 1$  হয়, তবে 14.7 সমীকরণ থেকে আমরা সনাতন সংখ্যায়নের বণ্টন সূত্র পাই

$$n_i = \frac{g_i}{f(e^{\beta\epsilon_i} - \frac{1}{f})} = \frac{g_i}{f} e^{-\beta\epsilon_i} \quad 14.8$$

কাজেই  $f \gg 1$  হলে

$$f = \frac{V}{Nh^3} (2\pi mkT)^{3/2} = \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{nh^3} \quad \dots \quad 14.9$$

$$\text{এবং } \beta = \frac{1}{kT} \quad 14.9a$$

$$\text{এবং } n = \frac{N}{V}$$

সমীকরণ 14.9 থেকে বোঝা যায় অবক্ষয় প্রাচল (degeneracy parameter) এর মান 1 এর থেকে অনেক অনেক বেশী হলে খুব উচ্চ উষ্ণতায় এবং অল্পচাপে ( $T$  উচ্চ এবং  $n$  নিম্ন) এবং এই অবস্থায় দুই কোয়ান্টাম সংখ্যায়ন এবং সনাতন সংখ্যায়ন প্রত্যেক ক্ষেত্রেই বণ্টন অপেক্ষক একই।

**অনুশীলনী 4 :** দেখান যে  $f \gg 1$  হওয়ার অর্থ কণাগুলির পারস্পরিক দূরত্ব তাদের দ্যব্রগলা ( $\lambda_D$ ) চেয়ে অনেক বেশী।

### 14.2.1 কোয়ান্টাম সংখ্যায়নে তাপগতিক প্রাচলগুলির মান :

যদিও কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় কণা শক্তি  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$  ইত্যাদি কিছু বিচ্ছিন্ন মান নেয় তবুও একটি তন্ত্রে যেখানে কণার সংখ্যা অসম্ভব রকমের বেশী সেখানে শক্তি  $\epsilon$  কে আমরা অবিচ্ছিন্ন চলরাশি হিসেবে গণ্য করতে পারি। আবার যেহেতু হাইসেনবার্গের অনিশ্চয়তার সূত্র অনুযায়ী ছয়মাত্রিক কণা দশালোকে

একটিতে কোষের ন্যূনতম আয়তন  $h^3$  কাজেই যে সকল কণার ভরবেগ  $p$  এবং  $p+dp$  পাল্লার মধ্যে সীমায়িত (বা শক্তি  $\epsilon$  এবং  $\epsilon + d\epsilon$  এর মধ্যে সীমায়িত) এবং যারা  $v$  আয়তনের আধারের যে কোন জায়গায় থাকতে পারে তাদের ক্ষেত্রে কোষের সংখ্যা

$$g(\epsilon)d\epsilon = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon$$

(দ্রষ্টব্য একক 12, সমীকরণ 12.2)

এই পরিপ্রেক্ষিতে সমীকরণ 14.7 থেকে আমরা পাই

$$n(\epsilon) d\epsilon = \frac{g(\epsilon) d\epsilon}{f e^{\beta\epsilon - \gamma}} \quad 14.10$$

অর্থাৎ

$$N = \int_0^{\alpha} n(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\alpha} \frac{g(\epsilon) d\epsilon}{f e^{\beta\epsilon - \gamma}}$$

$$= \frac{2\pi v}{h^3} (2mkT)^{3/2} \int_0^{\alpha} \frac{u^{1/2} du}{f e^u - \gamma/f} \quad (\text{যেখানে } u = \epsilon/KT)$$

$$N_f = \frac{2\pi v}{h^3} (2mkT)^{3/2} \left| \frac{3}{2} \right| \frac{1}{\left| \frac{3}{2} \right|} \int_0^{\alpha} \frac{u^{1/2} du}{e^u - \gamma/f}$$

$$N_f = \frac{2\pi v}{h^3} (2mkT)^{3/2} \left| \frac{3}{2} \right| I_{1/2} \quad 14.11a$$

যখন

$$I_{1/2} = \frac{1}{\left| \frac{3}{2} \right|} \int_0^{\alpha} \frac{u^{1/2} du}{e^u - \gamma/f} \quad 14.11b$$

এবং তন্ত্রের মোট শক্তি

$$U = \int_0^{\alpha} \epsilon dn = \int_0^{\alpha} \epsilon n(\epsilon) d\epsilon = \frac{2\pi v}{h^3 f} (2m)^{3/2} \int_0^{\alpha} \frac{\epsilon^{3/2} d\epsilon}{e^{\beta\epsilon - \gamma/f}}$$

$$U_f = \frac{2\pi v}{h^3} (2mkT)^{3/2} KT \frac{\left| \frac{5}{2} \right|}{\left| \frac{5}{2} \right|} \int_0^{\alpha} \frac{\epsilon^{3/2} du}{e^u - \gamma/f}$$

$$= \frac{2\pi v}{h^3} (2mKT)^{3/2} KT \sqrt{\frac{5}{2}} I_{3/2} \quad 14.11.c$$

$$\text{যখন } I_{3/2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}} \int_0^\alpha \frac{u^{3/2} du}{e^u - \gamma/f} \quad 14.11.d$$

সমীকরণ 14.11a এবং 14.11b থেকে পাই

$$\frac{Uf}{Nf} = \frac{U}{N} = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} KT \frac{I_{3/2}}{I_{1/2}} = \frac{3}{2} KT \frac{I_{3/2}}{I_{1/2}}$$

$$\Rightarrow U = \frac{3}{2} NKT \frac{I_{3/2}}{I_{1/2}} \quad 14.12$$

যদি  $f \gg \gg 1$  তখন

$$U = \frac{3}{2} NKT \quad \text{কেননা } \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{I_{3/2}}{I_{1/2}} = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{I_{3/2}}{I_{1/2}} = 1$$

অনুশীলনী 5 : শক্তির সমবিভাজন নীতি কোয়ান্টাম সংখ্যায়নের সাথে কতটা সামঞ্জস্যপূর্ণ?

**এনট্রপি :**

সমীকরণ 14.5a এবং সমীকরণ 14.7 এর সাহায্য নিয়ে লিখতে পারা যায়

$$S = \frac{U}{T} + R \ln f - k\gamma \sum g_i \ln \left( 1 - \frac{\gamma}{f} e^{-\beta \epsilon_i} \right)$$

শেষ রাশিটিকে  $\mathcal{J}$  ধরে যোগের পরিবর্তে সমাকল করলে পাই

$$\mathcal{J} = -k\gamma c \int_0^\alpha \epsilon \ln \left( 1 - \frac{\gamma}{f} e^{-\beta \epsilon} \right) d\epsilon$$

$$\left( g_i \rightarrow \frac{2\pi v}{h^3} (2m)^{1/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon = c\epsilon^{1/2} d\epsilon \right)$$

$$= -k\gamma c (KT)^{3/2} \int u^{1/2} \ln \left( 1 - \frac{\gamma}{f} e^{-u} \right) du$$

আংশিক সমাকলনের পদ্ধতি অবলম্বন করে পাই

$$\mathcal{J} = 2\pi V K \frac{(2mKT)^{3/2}}{h^3} \gamma^2 \cdot \frac{2}{3} \int_0^\alpha \frac{u^{3/2} du}{e^u - \gamma/f}$$

$\gamma^2 = 1$  বসিয়ে এবং সমীকরণ 14.11 এর সাহায্য নিয়ে আমরা পাই

$$\mathcal{J} = \frac{2U}{3T}$$

$$\Rightarrow S = \frac{5}{3} \frac{U}{T} + R \ln f \quad 14.14a$$

U এবং S এর রাশিমালা নির্ণয় করতে পারলে খুব সহজেই F, G ইত্যাদি তাপগতিক প্রাচলগুলির রাশিমালা নির্ণয় করা যায়। যেমন

$$F = U - TS = -RT \ln f - \frac{2}{3} U$$

$$G = U - TS + pv = \frac{5}{3} V - TS = -RT \ln f \quad 14.14b$$

সমীকরণ 14.14b থেকে পাই

$$\ln f = -\frac{G}{N} \frac{1}{KT} = -\frac{\mu}{KT} \Rightarrow F = e^{-\mu/KT} \quad 14.14c$$

(যখন  $\mu$  = রাসায়নিক বিভব (chemical potential) =  $\frac{G}{N}$  অর্থাৎ প্রতি একক অণুর জন্য গিবসের প্রবক)

### 14.3 বোসের পদ্ধতিতে কৃষ্ণবস্তু বিকিরণের প্লাংক সূত্রের প্রতিষ্ঠা :

অধ্যাপক সত্যেন্দ্রনাথ বোস কৃষ্ণবস্তু প্রকোষ্ঠের বিকিরণকে সমস্ত সম্ভাব্য কম্পাংকের ফোটন কণার সমষ্টি হিসেবে বিবেচনা করেছিলেন। যেহেতু এই কণাগুলির পরস্পরের মধ্যে কোন আকর্ষণ বা বিকর্ষণ বল কাজ করে না তাই ধরে নিয়েছিলেন এই তন্ত্রটি আদর্শ গ্যাস তন্ত্রের মতই আচরণ করে। এখন আমরা জানি যদি ফোটন কণার কম্পাংক  $\gamma$  হয় তবে তার ভরবেগ

$$p = \frac{h\gamma}{c}$$

এখন  $v$  আয়তন বিশিষ্ট প্রকোষ্ঠে যে সকল কণার ভরবেগ  $p$  এবং  $p + dp$  এর মধ্যে সীমায়িত,



ছয়মাত্রিক দশালোকে তারা যে সকল কোষের মধ্যে অবস্থান করতে পারে তাদের সংখ্যা

$$g(p)dp = \frac{4\pi v}{h^3} p^2 dp$$

যেহেতু ফোটনের দুটি সমবর্তন অবস্থা সম্ভব কাজেই এই সংখ্যা আসলে হবে  $g(p)dp = \frac{8\pi v}{h^3} p^2 dp$

এক্ষেত্রে আমাদের সমস্যা হচ্ছে যে  $n_i$  সংখ্যক কণার শক্তি  $\epsilon_i$  তাদের  $g_i$  সংখ্যক কোষের মধ্যে কতভাবে রাখা যাবে? সমীকরণ 14.2 থেকে আমরা লিখতে পারি

$$W_{BE} = \frac{(g_i + n_i)!}{g_i! n_i!}$$

এখন যেহেতু ফোটন তন্ত্রটি তাপীয় সাম্যাবস্থায় আছে কাজেই আমরা লিখতে পারি

$$\delta V = 0 \quad \text{অর্থাৎ} \quad \sum \epsilon_i \delta n_i = 0$$

এখানে কিন্তু  $\sum \delta n_i = 0$  লেখা যাবে না কেননা অবিরাম শোষণ এবং নিঃসরণের ফলে ফোটন কণা সংখ্যা স্থির নেই। কাজেই বণ্টন অপেক্ষক নির্ণয় করতে গিয়ে আমাদের দুটো শর্ত পালন করতে হবে

$$\delta \ln w = 0$$

$$\text{এবং} \quad \sum \epsilon_i \delta n_i = 0$$

14.2 অনুচ্ছেদের আলোচনা থেকে এটা পাই যে ফোটন কণার বণ্টন অপেক্ষকের রাশিমালা নির্ণয়ে একটি মাত্র ল্যাগরাঞ্জ গুণিতক  $\beta$  থাকবে অর্থাৎ অন্যটি  $\alpha = 0$  বা  $f = 1$  সেক্ষেত্রে সমীকরণ 14.3 কে আমরা নিম্নরূপে লিখতে পারি

$$n(\gamma) d\gamma = \left( \frac{V 8\pi h^2 \gamma^2}{h^3 c^2} d\gamma \right) / e^{h\gamma/kT} - 1$$

$$= \frac{8\pi \gamma^2 d\gamma / c^3}{e^{h\gamma/kT} - 1}$$

উভয় পক্ষকে  $h\gamma$  দিয়ে গুণ করলে পাই, শক্তি ঘনত্ব ( $V = 1 \text{ c.c.}$ )

$$u(\gamma) d\gamma = h\gamma n(\gamma) d\gamma = \frac{8\pi h \gamma^3}{c^3 (e^{h\gamma/kT} - 1)} d\gamma \quad 14.15$$

এটাই কৃষ্ণবস্তু বিকিরণের ক্ষেত্রে প্লাংকের সূত্র।

**অনুশীলনী 6 :** প্লাংকের সূত্রটিকে তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের সাহায্যে প্রকাশ করুন।

**অনুশীলনী 7 :** দেখান যে  $\text{He}^4$  বোসন কিন্তু  $\text{He}^3$  ফার্মায়ন।

## 14.4 বোস ঘনীভবন :

বোস আইনস্টাইন সংখ্যায়নে শূন্যশক্তি বিশিষ্ট কণার ক্ষেত্রে বণ্টন অপেক্ষক

$$F(O) = \frac{1}{f-1}$$

এক্ষেত্রে স্পষ্টতই  $F(O)$  ঋণাত্মক হতে পারে না কেননা সেক্ষেত্রে শূন্যশক্তি বিশিষ্ট কণার সাংখ্যমান ঋণাত্মক হবে যা সম্ভব নয়। তাই  $f$  এর মান সর্বদা 1 এর বেশী, এখন উষ্ণতা হ্রাস পেলে  $f$  এর মানও ক্রমশঃ কমতে থাকে এবং সেক্ষেত্রে একটি নির্দিষ্ট উষ্ণতায় ধরা যাক  $T = T_B$  তে  $f$  এর মান 1 হওয়ার পর, যে সকল উষ্ণতায়  $T < T_B$  সে সব ক্ষেত্রেও  $f = 1$  ই থাকবে অন্যথায়  $F$  এর মান হবে ঋণাত্মক, এখন  $T = T_B$  উষ্ণতায় যদি 14.10 সমীকরণকে সমাকলন করি তাহলে পাই

$$\int_0^{\alpha} dn = \frac{2\pi v (2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^{\alpha} \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1}$$

$$\Rightarrow N = \frac{2\pi v (2mkT_B)^{3/2}}{h^3} \int_0^{\alpha} \frac{u^{1/2} du}{e^u - 1}$$

( $\varepsilon/kT = u$  ধরা হয়েছে)

এখন  $\int_0^{\alpha} \frac{u^{1/2} du}{e^u - 1} = 1.306\sqrt{\pi}$  বসিয়ে পাই

$$N = \frac{2.612}{h^3} (2\pi mkT_B)^{3/2} \quad 14.16$$

$$\Rightarrow T_B = .084 \frac{h^2}{mk} \left( \frac{N}{v} \right)^{2/3} \quad 14.17$$

$T_B$  হচ্ছে সেই উষ্ণতা যে উষ্ণতায় অবক্ষয় প্রাচলের মান  $f=1$  হয়।

এখন একটি আদর্শ বোসন তন্ত্রের উষ্ণতা যদি  $T_B$  এর চেয়েও কম করা যায় তাহলে কি হবে? যেহেতু  $T \leq T_B$  সবক্ষেত্রেই  $f$  এর মান 1, কাজেই এক্ষেত্রেও 14.10 সমীকরণের সমাকলন করলে পাই

$$N(T) = \frac{2\pi v (2m kT)^{3/2}}{h^3} \int_0^{\alpha} \frac{u^{1/2} du}{e^u - 1}$$

$$\text{অর্থাৎ } N(T < T_B) = \frac{V(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} 2.612 \quad 14.18$$

সমীকরণ 14.16 এবং 14.17 থেকে পাই

$$\frac{N(T < T_B)}{N} = \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2} \quad 14.19$$

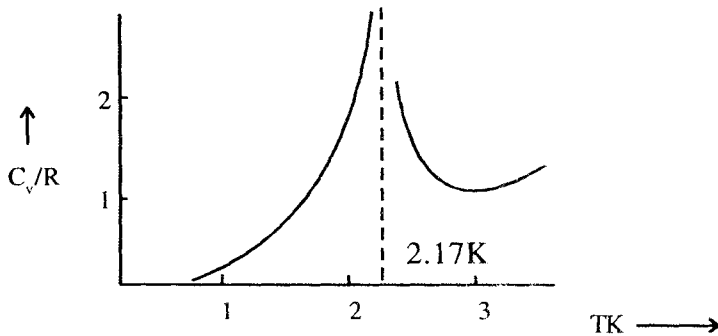
যেহেতু  $T < T_B$  কাজেই  $N(T < T_B) < N$ , অর্থাৎ উষ্ণতা  $T_B$  এর নীচে নামার ফলে কিছু সংখ্যক বোসন কণার কোন হিসেব মিলছে না। আসলে উষ্ণতা যখন  $T_B$  এর নীচে নামে তখন শূন্যশক্তি সম্পন্ন বোসন কণার সংখ্যা অগ্রাহ্য করার মত নয় অথচ সমীকরণ 14.10 এ এই সংখ্যার কোন প্রভাব নেই কেননা  $\epsilon = 0$  হওয়ার ফলে সমীকরণের ডানদিক শূন্য হয়ে যায়। এবং সমাকলনে 0 এই সংখ্যার কোন হিসেব থাকে না। তাই  $T < T_B$  হলে কণা সংখ্যা কমে যায়। কণাগুলির শক্তি শূন্য হওয়ার ফলে তাদের ভরবেগ  $p = \sqrt{2mE}$  ও শূন্য হয়ে যায় অর্থাৎ  $\Delta P = 0$  সেক্ষেত্রে তাদের অবস্থানের অনিশ্চয়তা,  $\Delta x = \frac{h}{0}$ , এর মান হয়ে যায় অনির্দিষ্ট তাই  $T < T_B$  উষ্ণতায় বেশ কিছু কণা 'হারিয়ে' যায়। এই ঘটনাটিকে বলা হয় বোস ঘনীভবন,  $T_B$  কে বোস উষ্ণতা বা ঘনীভবন উষ্ণতা বলা হয়।

যদি তরল  $He^4$  কে একটি বোসন তন্ত্র ধরে নেওয়া যায় এবং 1 গ্রাম মোল তরল  $He^4$  এর আয়তন যদি 27.6 ঘন সেমি হয় তবে সমীকরণ 14.16 থেকে পাওয়া যায়

$$T_B = 3.1 \text{ K}$$

1938 সালে তরল  $He^4$  নিয়ে পরীক্ষা করতে গিয়ে F. London দেখেন 2.17k উষ্ণতায় তরল  $He^4$  এর একটি দশা পরিবর্তন ঘটে। তরল  $He^4$  এর উষ্ণতার সাথে আপেক্ষিক তাপের পরিবর্তনের লেখচিত্র  $\lambda$ - অক্ষরের মত হয় (চিত্র 14.2) তাই 2.17k কে  $\lambda$ - পয়েন্ট বলে। এই উষ্ণতার নীচে হিলিয়ামকে হিলিয়াম-II বলে।

ল্যান্ডাও এর তত্ত্ব অনুসারে  $He$ -II দুরকম তরলের মিশ্রণ। একটি সাধারণ তরল ও আর একটি অতিতরল।



চিত্র 14.2. তরল  $He^4$  এর উষ্ণতার সাথে গ্রাম আপেক্ষিক আপেক্ষিক তাপের পরিবর্তন।

যখন একটি অপরের মধ্যে দিয়ে যায় তখন তাদের মধ্যে ভরবেগের আদান প্রদান ঘটে না। বোস ঘনীভবনের ক্ষেত্রেও আমরা দু'ধরনের হিলিয়ামের কথা বলতে পারি,— একটার পরমাণুগুলো উত্তেজিত

অবস্থায় আছে ( $\epsilon > 0$ ) অন্যটির পরমাণুগুলি সাধারণ অবস্থার আছে। ( $\epsilon = 0$ ) প্রথমটি ( $\epsilon > 0$ ) সাধারণ তরল আর দ্বিতীয়টি ( $\epsilon = 0$ ) অতিতরল। আসলে বোস ঘনীভবনের ব্যাখ্যা ঠিক এত সরল নয় — এই ঘটনা বোসন তত্ত্বের সাধারণ ধর্ম। তাই অতি নিম্ন উষ্ণতায় যখন  $\text{He}^3$  পরমাণুগুলো দুটো করে জোড় বেঁধে বোসন তত্ত্বে পরিণত হয় তখন অর্থাৎ .003k উষ্ণতায় তরল  $\text{He}^3$  এরও বোস ঘনীভবন ঘটে।

## 14.5 ফার্মায়ন গ্যাস : ধাতুর অন্তঃস্থ ইলেকট্রন মেঘ (electron cloud)

তামা, অ্যালুমিনিয়াম প্রভৃতি ধাতুর ভেতর অনেক ইলেকট্রন থাকে যারা কোন কেন্দ্রীনের সাথে যুক্ত নয়। এই মুক্ত ইলেকট্রনের তত্ত্বকে বলা হয় ইলেকট্রন মেঘ, তা আদর্শ ফার্মায়ন গ্যাসের মত আচরণ করে, কেননা ইলেকট্রনের ঘূর্ণন ভরবেগ  $1/2$ । আমরা ফার্মি-ডিরাক সংখ্যায়নের প্রয়োগ নিয়ে আলোচনা করতে গিয়ে এই ইলেকট্রন গ্যাসের কথাই বিবেচনা করব।

আমরা যদি কোন ধাতুর অন্তঃস্থ ইলেকট্রন গ্যাসের ক্ষেত্রে অবক্ষয় প্রাচলের ( $f$ ) মান নির্ণয় করি তাহলে দেখব তা প্রায়  $10^{-3}$  এর মত, অর্থাৎ  $f$  এর মান 1 এর চেয়ে অত্যন্ত কম হওয়ায় ইলেকট্রন গ্যাস তত্ত্বের আলোচনায় সনাতন ম্যাক্সওয়েল বোলৎজম্যান সংখ্যায়নের প্রয়োগ সম্ভব নয়।  $f$  এর মান কম হওয়ায় এই তত্ত্বকে বলা হয় তীব্র ক্ষয়িষ্ণু (strongly degenerate) ফার্মায়ন গ্যাস।

**অনুশীলনী 8 :** 300K উষ্ণতায় তামার ঘনত্ব  $8.96 \text{ gm/cm}^3$  একটি তামার পরমাণুর জন্য একটি মুক্ত ইলেকট্রন থাকলে, তামার অন্তঃস্থ ইলেকট্রন গ্যাসের অবক্ষয় প্রাচল-এর মান কত হবে তা নির্ণয় করুন।

### 14.5.1 চরম উষ্ণতায় ইলেকট্রন গ্যাসের বৈশিষ্ট্য :

ফার্মি ডিরাক বণ্টন সূত্র

$$\frac{n_i}{g_i} = F(\epsilon) = \frac{1}{f e^{\epsilon/kT} + 1}$$

$$= \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1}$$

14.20

যখন  $f = e^{-\mu/kT}$   $\mu =$  রাসায়নিক বিভব

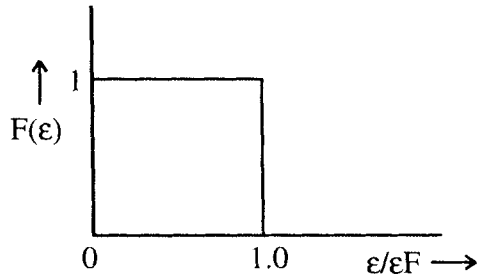
থেকে আমরা জানতে পারি একটি নির্দিষ্ট শক্তিস্তরের কোন কণার থাকার সম্ভাবনা  $\frac{n_i}{g_i} = F(\epsilon)$ ,  
কণার শক্তি এবং উষ্ণতার ওপর নির্ভর করে। যদি উষ্ণতা

$T = 0$  হয় তবে

$$F(\epsilon) = 1 \quad \text{যখন} \quad \epsilon < \mu$$

$$F(\epsilon) = 0 \quad \text{যখন} \quad \epsilon > \mu$$

অর্থাৎ চরম শূন্য উষ্ণতায় শক্তির সাথে  $F(\epsilon)$  এর পরিবর্তন নীচের লেখচিত্র (Fig 14.3) অনুযায়ী বোঝান যেতে পারে



চিত্র 14.3. চরম উষ্ণতায় ফার্মি ডিরাক বণ্টন

কাজেই চরম উষ্ণতায় ইলেকট্রন গ্যাসের আচরণ পর্যালোচনা করলে আমরা দেখতে পাই ইলেকট্রনের শক্তি একটি নির্দিষ্ট মানের চেয়ে বেশি হওয়ার সম্ভাবনা শূন্য। চরম উষ্ণতায় ইলেকট্রনের সর্বোচ্চ শক্তিকে ফার্মিশক্তি বলে, এবং তা ঐ উষ্ণতায় রাসায়নিক বিভবের সমান অর্থাৎ

$$\epsilon_F = \mu (T = 0)$$

অন্য যে কোন উষ্ণতায় রাসায়নিক বিভবকে বলে ফার্মি লেভেল। ওপরের আলোচনা থেকে এটা স্পষ্ট যে চরম উষ্ণতায় রাসায়নিক বিভব ধনাত্মক কেননা তা ইলেকট্রনের সর্বোচ্চ শক্তি। উষ্ণতার সাথে রাসায়নিক বিভবের পরিবর্তন নীচের সমীকরণ অনুযায়ী ঘটে

$$\mu(T) = \epsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right] \quad 14.21$$

যখন  $T \ll T_F$  এবং  $T_F = \epsilon_F / k$  এটাই ফার্মি উষ্ণতা, এবং যদি  $T \gg T_F$  হয় তবে ইলেকট্রন গ্যাসের আচরণ আদর্শ সনাতন গ্যাসের মতই হয়।

### 14.5.2 ফার্মি শক্তির ( $\epsilon_F$ ) মান নির্ণয় :

আমরা জানি, যে সকল কণার শক্তি  $\epsilon$  এবং  $\epsilon + d\epsilon$  এর পাল্লার মধ্যে থাকে তারা দশালোকে যে সকল কোষের মধ্যে থাকতে পারে তাদের সংখ্যা

$$g(\epsilon)d\epsilon = \frac{2\pi v}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon \quad 14.22$$

আবার ইলেকট্রন ঘূর্ণন কোয়ান্টাম সংখ্যা  $1/2$  হওয়ার ফলে এর দুটো ঘূর্ণন অবস্থা  $+1/2$  এবং  $-1/2$  থাকে কাজেই কার্যকরী কোষের সংখ্যা

$$g(\epsilon)d\epsilon = 2 \cdot \frac{2\pi v}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon$$

এখন আমরা যদি এই সমীকরণকে  $\epsilon = 0$  এবং  $\epsilon = \epsilon_F$  এই সীমার মধ্যে সমাকল করি তবে আমরা যে কোষগুলি পাব তার প্রত্যেকটি  $N$  সংখ্যক ইলেকট্রন দ্বারা অধিকৃত, কাজেই

$$N = \frac{4\pi v}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{1/2} d\epsilon$$

$$= \frac{8\pi v}{3h^3} (2m)^{3/2} \epsilon_F^{3/2} \quad 14.23$$

অর্থাৎ  $\epsilon_F = \frac{3}{8\pi} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3} \left( \frac{h^2}{2m} \right)$  14.24

অনুশীলনী : দেখান যে চরম উষ্ণতায় ইলেকট্রন গ্যাসের ফার্মি ভরবেগ (Fermi momentum)

$$P_F = \left( \frac{3N}{8\pi v} \right)^{1/3} h \quad 14.25$$

সমীকরণ 14.22 কে  $\epsilon$  দিয়ে গুণ করে যদি  $\epsilon = 0$  এবং  $\epsilon = \epsilon_F$  এর মধ্যে সমাকল করি তবে চরম উষ্ণতায় ইলেকট্রন গ্যাসের মোট শক্তি পাই

$$U_0 = \int_0^{\epsilon_F} \frac{4\pi v (2m)^{3/2}}{h^3} \epsilon^{3/2} d\epsilon$$

$$= \frac{8\pi v (2m)^{3/2}}{5h^3} \epsilon_F^{5/2} \quad 14.26$$

সমীকরণ 14.23 এর সাহায্য নিয়ে লিখতে পারি

$$U_0 = \frac{3}{5} N \epsilon_F$$

$$= \left( \frac{3N}{8\pi V} \right) \frac{h^2}{2m} \frac{3N}{5} \quad 14.27$$

$U_0$  কে ইলেকট্রন গ্যাসের শূন্য-অবস্থার শক্তি বলে, (zero point energy).

আবার আমরা জানি যে কোন আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে

$$pv = \frac{2}{3} U_0$$

অর্থাৎ চরম শূন্য উষ্ণতায় ইলেকট্রন গ্যাসের চাপ  $p$

$$p = \frac{2}{3} \frac{U_0}{V} = \frac{2}{5} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \left( \frac{h^2}{2m} \right) \left( \frac{N}{V} \right)^{5/3} \quad 14.28$$

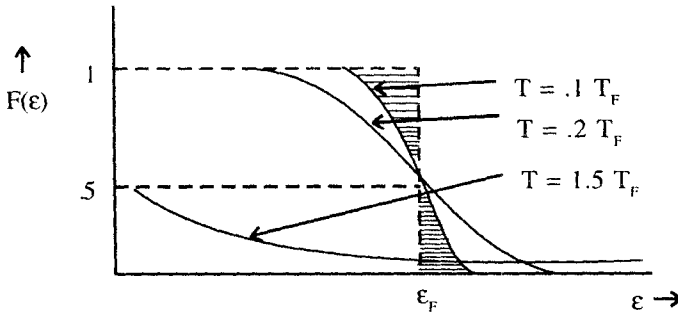
সমীকরণ 14.27 থেকে প্রতীয়মান হয় যে চরমশূন্য উষ্ণতায় ইলেকট্রন গ্যাসের চাপ  $\propto$  (ঘনত্ব) $^{5/3}$  যদিও সনাতন আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে চাপ  $\propto$  ঘনত্ব এবং  $T = 0$  উষ্ণতায়  $p$ ও শূন্য হয়ে যায়।

**অনুশীলনী 9 :** চরম শূন্য উষ্ণতায় রক্ষিত এক গ্রাম আণবিক তামার অন্তঃস্থ ইলেকট্রন গ্যাসের চাপের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

### 14.5.3 শূন্য ছাড়া অন্য উষ্ণতায় ইলেকট্রন গ্যাসের বৈশিষ্ট্য ফার্মি ডিরাক বণ্টন সূত্র :

$$n_i = \frac{g_i}{e^{(\epsilon_i - \mu)/kT} + 1}$$

থেকে আমরা জানি উষ্ণতা যাই হোক না কেন শক্তিমাত্রা  $\epsilon$ , রাসায়নিক বিভব  $\mu$  এর সাথে সমান হলে ইলেকট্রন কর্তৃক ঐ শক্তিস্তর অধিকৃত হওয়ার সম্ভাবনা  $1/2$ । আবার উষ্ণতা  $0^\circ\text{k}$  থেকে খুব বেশি না হলে  $\mu$  প্রায় সব সময়েই  $\epsilon_F$  এর সাথে সমান। এখন ইলেকট্রন গ্যাসের উষ্ণতা  $0^\circ\text{k}$  থেকে বাড়িয়ে  $T^\circ\text{k}$  করলে ইলেকট্রনের শক্তির মান মোটামুটি  $kT$  পরিমাণ বৃদ্ধি পাবে। সেক্ষেত্রে দেখা যাবে  $F(\epsilon)$  এর মান এক বা শূন্য থেকে আলাদা হবে যদি শক্তির মান  $\epsilon_F \pm kT$  এর মধ্যে থাকে (Fig. 14.4)



চিত্র 14.4. বিভিন্ন উষ্ণতায় ফার্মি ডিরাক বণ্টন

যদি  $T \ll T_F$  হয় তবে সমীকরণ 14.27 এবং 14.28 এর সাহায্যে মোট শক্তি এবং চাপ নির্ণয় করা যাবে। এক্ষেত্রে ফার্মি উষ্ণতা

$$T_F = \frac{\epsilon_F}{k} = \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3} \left( \frac{h^2}{2m} \right)$$

এবং তামার ক্ষেত্রে ফার্মি উষ্ণতার মান প্রায়  $8.1 \times 10^4 \text{ k}$ . কাজেই প্রায় সমস্ত সাধারণ উষ্ণতাতেই, শক্তির সাথে ফার্মি অপেক্ষক  $F(\epsilon)$  এর পরিবর্তন Fig. 14.3 এর লেখচিত্রের অনুরূপই হবে

ফার্মি লেভেলে,  $F(\epsilon = \mu) = \frac{1}{2}$  এখন যদি  $T \ll T_F$  হয় তবে  $\mu = \epsilon_F$  এবং সেক্ষেত্রে দেখান যাবে যে যদি উষ্ণতা  $T$  চরম শূন্য উষ্ণতার থেকে সামান্য বেশি হয়।

তবে ফার্মি লেভেলের উপরে  $\mu + \delta$  শক্তিস্তরে, ইলেকট্রনের থাকার সম্ভাবনা যতটা ফার্মি লেভেলের নীচে  $\mu - \delta$  শক্তিস্তরে ইলেকট্রনের না থাকার সম্ভাবনা ততটাই। অর্থাৎ Fig. 14.4 এ  $T = .1 T_F$  লেখচিত্রে ফার্মি লেভেলের ওপরের এবং নীচের ছায়াবৃত অংশের আয়তন সমান, নিচের তাত্ত্বিক আলোচনা থেকে আমরা এই সত্য উপলব্ধি করতে পারব।

সমীকরণ 14.20 থেকে পাই

$$F(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1}$$

কাজেই 
$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon} = -\frac{1}{kT} \frac{e^{(\epsilon-\mu)/kT}}{[e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1]^2}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=\mu} = -\frac{1}{4kT}$$

আবার সমীকরণ 14.20 ও  $\epsilon = \mu + \delta$  এবং  $\epsilon = \mu - \delta$  বসিয়ে যথাক্রমে পাই

$$F(\epsilon = \mu + \delta) = \frac{1}{e^{\delta/kT} + 1}$$

এবং 
$$F(\epsilon = \mu - \delta) = \frac{1}{e^{-\delta/kT} + 1}$$

$$\Rightarrow 1 - F(\epsilon = \mu - \delta) = 1 - \frac{1}{e^{-\delta/kT} + 1} = \frac{e^{-\delta/kT}}{1 + e^{-\delta/kT}}$$

$$= \frac{1}{e^{\delta/kT} + 1}$$

$$\Rightarrow 1 - F(\epsilon = \mu - \delta) = F(\epsilon = \mu + \delta)$$

অর্থাৎ  $\epsilon = \mu + \delta$  শক্তিস্তরে একটি ইলেকট্রনের থাকার সম্ভাবনা যতটা  $\epsilon = \mu - \delta$  শক্তিস্তরে ঐ ইলেকট্রনের না থাকার সম্ভাবনা ততটাই।

## 14.6 ধাতুর ইলেকট্রনীয় তাপ ধারকত্ব :

সাধারণ উষ্ণতায় ধাতুর অন্তঃস্থ কেন্দ্রীনগুলি ত্রিমাত্রিক স্পন্দক হিসেবে কাঁপতে থাকে। এক গ্রাম আণবিক ধাতুতে মোট  $N$  সংখ্যক স্পন্দকের শক্তি  $3NkT = 3RT$ , যখন তাপমাত্রা  $T^\circ k$ । অতএব গ্রাম



আনবিক ধারকত্ব  $3R$ , এটাই ডুলং পেটিটের সূত্র। আবার প্রতিটি পরমাণুর সাথে যদি ধরে নেওয়া যায় একটি করে ইলেকট্রন আছে এবং  $N$  সংখ্যক ইলেকট্রন একটি আদর্শ ইলেকট্রন গ্যাস যা সনাতন সংখ্যায়ন মেনে চলে তাহলে শক্তির সমবিভাজন নীতি অনুসারে এই  $N$  সংখ্যক ইলেকট্রনের জন্য ধাতুর অতিরিক্ত শক্তি হওয়া উচিত  $\frac{3}{2}NKT = \frac{3}{2}RT$  এবং সেক্ষেত্রে ধাতুর গ্রাম আণবিক তাপ ধারকত্বে ইলেকট্রনের অবদান হবে  $\frac{3}{2}R$ । অর্থাৎ ধাতুর মোট গ্রাম আণবিক তাপ ধারকত্ব  $4.5R$  হওয়া উচিত। কিন্তু বাস্তবে ডুলং পেটিটের সূত্র সাধারণ উষ্ণতায় সঠিক এবং ধাতুর গ্রাম আণবিক তাপ ধারকত্ব  $3R$ । অর্থাৎ তাপ ধারকত্বের আলোচনায় ইলেকট্রন গ্যাসকে যদি ফার্মি-ডিরাক তন্ত্র হিসেবে বিবেচনা করা যায় তবে দেখা যায় সাধারণ উষ্ণতায় ধাতব তাপ ধারকত্বে ইলেকট্রনের অবদান খুবই কম। কিন্তু নিম্ন উষ্ণতায় যখন স্পন্দন জনিত তাপধারকত্ব  $T^3$  এর সাথে সমানুপাতী (ডিবাই এর  $T^3$  নীতি) তখন ইলেকট্রন জনিত তাপ ধারকত্ব  $T$  এর সাথে সমানুপাতিক তাই অতি উষ্ণতায় ধাতুর তাপধারকত্বে ইলেকট্রনের অবদান তুলনায় বেশি, অতি নিম্ন উষ্ণতায় ধাতুর তাপধারকত্ব নির্ণায়ক পরীক্ষাতে এই সত্য ধরা পড়েছে। এবার আমরা চেষ্টা করব ধাতুর তাপ ধারকত্বে ইলেকট্রনের অবদান কতটুকু তার আনুমানিক হিসাব করতে।

চরমশূন্য উষ্ণতায় আমরা দেখেছি ফার্মি শক্তি  $\epsilon_F$  এবং  $N$  এর মধ্যে সম্পর্ক হল

$$N = \frac{8\pi v}{3h^3} (2m)^{3/2} \epsilon_F^{3/2} \quad 14.29$$

এখন যদি উষ্ণতা শূন্য থেকে সামান্য বাড়িয়ে  $T^{\circ}K$  করা হয় তখন কিছু ইলেকট্রনের শক্তি  $\epsilon_F$  থেকে  $\epsilon_F + kT$  হবে যদি তাদের সংখ্যা  $N_{ext}$  হয় তবে সমীকরণ 14.22 কে  $\epsilon = \epsilon_F$  এবং  $\epsilon = \epsilon_F + kT$  সীমার মধ্যে সমাকলন করলেই আমরা  $N_{ext}$  পেয়ে যাব। অর্থাৎ

$$\begin{aligned} N_{ext} &\sim \int g(\epsilon) d\epsilon = \frac{4\pi v}{h} (2m)^{3/2} \int_{\epsilon_F}^{\epsilon_F+kT} \epsilon^{1/2} d\epsilon \\ &\sim \frac{8\pi v}{3h^3} (2m)^{3/2} \left[ (\epsilon_F + kT)^{3/2} - \epsilon_F^{3/2} \right] \\ &\sim \frac{4\pi v}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon_F^{1/2} kT \end{aligned} \quad 14.30$$

এখন সমীকরণ 14.30 এবং 14.29 থেকে পাওয়া যায়

$$\begin{aligned} N_{ext} &\sim \frac{2NkT}{2\epsilon_F} \\ \Rightarrow N_{ext} &\sim \frac{3N}{2} \left( \frac{T}{T_F} \right) \end{aligned}$$

এই উত্তেজিত ইলেকট্রন গুলির প্রতিটির শক্তি প্রায়  $kT$  কাজেই তাদের মোট শক্তি

$$U(T) \sim \frac{3NkT}{2} \left( \frac{T}{T_F} \right)$$

অর্থাৎ ধাতুর তাপধারণের ইলেকট্রনের আনুমানিক অবদান

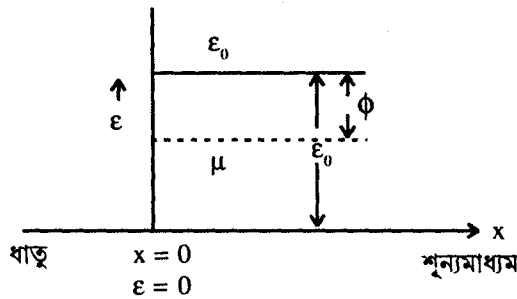
$$c_{ve} = \frac{du}{dT} \sim 3Nk \left( \frac{T}{T_F} \right)$$

সূক্ষ্ম গণনায় 
$$c_{ve} = \frac{\pi}{2} NK \left( \frac{T}{T_F} \right)$$

যেহেতু সাধারণ উষ্ণতায়  $\frac{T}{T_F} = 10^{-2}$  ঘরের উষ্ণতা  $T = 300^\circ\text{k}$  এবং তামার ফার্মি উষ্ণতা  $4.1 \times 10^4\text{k}$  হলে  $\frac{T}{T_F} = 10^{-2}$  তাই  $C_{ve}$  কেন্দ্রীণের স্পন্দন জনিত তাপধারণত্বের তুলনায় অত্যন্ত কম, কিন্তু নিম্ন উষ্ণতায় স্পন্দন জনিত ধারকত্ব যেহেতু  $T^3$  এর সাথে সমানুপাতী তাই সেক্ষেত্রে  $C_{ve}$  তুলনায় অনেক বেশি হয় অর্থাৎ নিম্ন উষ্ণতায় ধাতুর তাপধারণকত্ব মূলত ইলেকট্রনজনিত।

## 14.7 ইলেকট্রনের তাপীয় নিঃসরণ :

ধাতুর মধ্যে মুক্ত ইলেকট্রন যেন একটি বিভব কুয়োর মধ্যে অবস্থিত। তাপ প্রয়োগ করলে ইলেকট্রন কুয়োর বাইরে বেরিয়ে আসতে পারে। যে ন্যূনতম শক্তি প্রয়োগ করলে ইলেকট্রনের নিঃসরণ ঘটে তাকে ধাতুর কার্য অপেক্ষক,  $\phi$  বলে, ফার্মি লেভেলের মান  $\mu$  এবং কুয়োর গভীরতা (Fig. 14.5)  $\epsilon_0$  হলে  $\phi = \epsilon_0 - \mu$



চিত্র 14.5.  $\epsilon_0$  গভীরতা বিশিষ্ট বিভব কুয়োতে ইলেকট্রনের শক্তি

$\phi$  এর মান কয়েক ইলেকট্রন ভোল্ট হতে পারে। ধরা যাক ধাতু খণ্ডের  $yz$  তল থেকে ইলেকট্রনের নিঃসরণ হচ্ছে এবং  $x$ - অক্ষ বরাবর ইলেকট্রনগুলি গতিশীল ফার্মি-ডিরাক বণ্টন সূত্র 14.20 তে আমরা  $n_i$  এর পরিবর্তে লিখতে পারি :

$$n_i \rightarrow n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z.$$

অর্থাৎ  $n_i$  হচ্ছে সেই ইলেকট্রনগুলি যাদের গতিবেগ  $v_x$  এবং  $v_x + dv_x$ ;  $v_y$  এবং  $v_y + dv_y$ ;  $v_z$  এবং  $v_z + dv_z$  এর পাল্লার মধ্যে সীমাবদ্ধ এবং  $g_i \rightarrow \frac{2dp_x dp_y dp_z}{h^3}$ ,

অর্থাৎ  $g_i$  হচ্ছে সেই সব কোষ যারা ছয়মাত্রিক দশালোকে  $v dp_x dp_y dp_z$  আয়তন অধিকার করে (ইলেকট্রনের ঘূর্ণনের জন্য এই সংখ্যাকে 2 দ্বারা গুণ করতে হচ্ছে) সেক্ষেত্রে সমীকরণটির আকার হবে

$$n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = \frac{2m^3 v}{h^3} e^{(\mu - \epsilon)/kT} dv_x dv_y dv_z \quad 14.31$$

(এখানে  $e^{(\epsilon - \mu)/kT} \gg 1$  ধরা হয়েছে)

ইলেকট্রনগুলির  $x$  বরাবর যে গতি শুধুমাত্র তাই তাপপ্রয়োগের ফলে পরিবর্তিত হতে পারে,  $y$  এবং  $z$  বরাবর তার স্বাভাবিক গতির কোন পরিবর্তন হবে না। সেক্ষেত্রে সমীকরণ 14.20কে  $v_y$  এবং  $v_z$  এর পরিপ্রেক্ষিতে সমাকল করলে পাই

$$\int_{v_y = -\alpha}^{\alpha} \int_{v_z = -\alpha}^{\alpha} n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$$

$$= \frac{2m^3}{h^3} v e^{\mu/kT} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} dv_y \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z$$

$$\Rightarrow n(v_x) dv_x = v \left( \frac{4m^2 \pi kT}{h^3} \right) e^{\mu/kT} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x$$

$$\therefore \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} dv_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z = \left( \frac{2\pi kT}{m} \right)^{1/2}$$

এখন প্রতি সেকেন্ডে যে সকল ইলেকট্রন ধাতুর সীমাতলের প্রতি একক ক্ষেত্রে ধাক্কা দেয় তাদের সংখ্যা  $n(v_x) dv_x v_x$ । এদের মধ্যে যাদের গতিশক্তি  $mv_x^2/2$  ও  $\epsilon_0$  তারাই ধাতু থেকে বেরোতে পারবে। কাজেই প্রতি একক ক্ষেত্রফলে তড়িৎ প্রবাহ

$$J = \frac{v 4\pi m^2 kT (e)}{h^3} e^{\mu/kT} \int_{\epsilon_0 = \frac{1}{2}mv_x^2}^{+\alpha} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) v_x dv_x$$

$$= \frac{4\pi v m k^2 (e)}{h^3} T^2 e^{-\phi/kT} \quad 14.32$$

(e) = ইলেকট্রনের আধান

$$\Rightarrow J = AT^2 e^{-\phi/kT} \quad 14.33$$

সমীকরণ 14.32 রিচার্ডসন — দুশমন সমীকরণ হিসেবে পরিচিত।

## 14.8 সারাংশ :

- কোয়ান্টাম সংখ্যায়নে বণ্টন অপেক্ষকের রূপ হল

$$\frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - \gamma}$$

বোস আইনস্টাইন সংখ্যায়নের ক্ষেত্রে  $\gamma = 1$ , ফার্মি ডিরাকের ক্ষেত্রে  $\gamma = -1$  এবং সনাতন ম্যাক্সওয়েল বোলৎজম্যানের ক্ষেত্রে  $\gamma = 0$  ও  $f = e^{-\beta\mu}$

- কোয়ান্টাম সংখ্যায়নে

$$S = \frac{5}{3} \frac{U}{T} + R \ln f,$$

$$F = -RT \ln f - \frac{2}{3} U$$

এবং  $G = -RT \ln f$

কাজেই  $\mu = -kT \ln f = \frac{G}{N}$

- নীচের সমীকরণটি কৃষ্ণবস্তু বিকিরণে শক্তিবন্টনে প্লাংকের সূত্রটিকে প্রকাশ করে,

$$U_\gamma d\gamma = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\gamma^3}{\exp\left(\frac{h\gamma}{kT}\right) - 1} d\gamma$$

যা অতি সহজেই বোস সংখ্যায়নের অনুসিদ্ধান্ত হিসাবে নিরূপিত হয়

- তরল He<sup>4</sup> একটি বোসন তন্ত্র। পরীক্ষায় দেখা গেছে তরলটি T = 2.18k বা তার নীচে He II যা অতি তরল এবং He I যা সাধারণ তরল — এই দুয়ের মিশ্রণে পরিণত হয় এবং T = 0°k তে সমস্ত তরলটাই অতিতরলে রূপান্তরিত হয়। বলা হয় T = 2.18 K তে হিলিয়ামের λ দশায় রূপান্তর ঘটে। বোস সংখ্যায়ন প্রয়োগ করলে দেখা যায় এই দশা রূপান্তর 3.1 K উষ্ণতায় ঘটা উচিত যা 2.18 K উষ্ণতার কাছাকাছি।
- ধাতুর অন্তঃস্থ ইলেকট্রন মেঘকে আদর্শ ফার্মায়ন গ্যাস হিসেবে বিবেচনা করলে দেখা যায় এমনকি চরম শূন্য উষ্ণতায় ইলেকট্রনের শক্তি থাকা সম্ভব। এই উষ্ণতায় ইলেকট্রনের সর্বোচ্চ শক্তিকে ফার্মি শক্তি (ε<sub>F</sub>) বলে। ε<sub>F</sub> এর মান

$$\epsilon_F = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3N}{8\pi v} \right)^{2/3}$$

অন্য উষ্ণতায় ইলেকট্রনের সর্বোচ্চ শক্তি  $\mu = \epsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right]$ ,  $\mu$  কে ফার্মি লেভেল বলে।

- শূন্য উষ্ণতায় ইলেকট্রন গ্যাসের মোট শক্তি U<sub>0</sub> এবং চাপ p এর মান যথাক্রমে

$$U_0 = \frac{3}{5} N \epsilon_F \quad \text{এবং} \quad p = \frac{2}{3} \frac{N}{v} \epsilon_F$$

- কোন ফার্মায়ন তন্ত্রের ফার্মি উষ্ণতার সংজ্ঞা হচ্ছে

$$T_F = \frac{\epsilon_F}{k}$$

এবং তামার অন্তঃস্থ ইলেকট্রন গ্যাসের ক্ষেত্রে ε<sub>F</sub> = 7.0 হয় এবং T<sub>F</sub> = 4.1 × 10<sup>4</sup>k প্রায় সমস্ত সাধারণ উষ্ণতা T << T<sub>F</sub> হওয়ায় যে কোন উষ্ণতায় ইলেকট্রন গ্যাসের আচরণ চরম শূন্য উষ্ণতায় তার আচরণের মতই হয়। T << T<sub>F</sub> হলে আদর্শ ইলেকট্রন গ্যাস তন্ত্র একটি তীব্র বা দুর্বল অবক্ষয়তা তন্ত্র (Strongly or Weakly degenerate system)

- কোন ধাতুখণ্ডকে উত্তপ্ত করলে ধাতুর প্রতি একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে প্রবাহিত তড়িতের পরিমাণ

$$J = AT^2 \exp(-\phi / kT)$$

যেখানে A = (4π mk<sup>2</sup>e/h<sup>3</sup>) এবং φ ধাতুর কার্যঅপেক্ষক, ওপরের সমীকরণটি রিচার্ডসন — দুশমন (Richardson – Dushman) সমীকরণ হিসাবে পরিচিত।

## 14.9 শেষ প্রশ্নাবলি :

1. প্লাংকের সূত্রটি লেখ (i) র্যাল-জিনস সূত্র (ii) জিনের সূত্র (iii) জিনের সরণ-নিয়ম ও (iv) স্টিফান বোলৎজমান সূত্র নিরূপণ করুন।
2. কৃষ্ণবস্তু বিকিরণকে যেমন আদর্শ ফোটন গ্যাস হিসেবে বিচার করা হয়েছে সে রকম উত্তপ্ত ঘনবস্তু থেকে যখন স্থিতিস্থাপক তরঙ্গ নির্গত হয় তখন সমস্ত তন্ত্রটিকে আদর্শ ফোনন গ্যাসের তন্ত্র হিসেবে বিবেচনা করে তন্ত্রটির মোট শক্তি এবং আণবিক তাপ ধারকত্ব ( $c_v$ ) নির্ণয় করুন  
[ কঠিন বস্তুর ডিবাই (Debye) প্রতিরূপ : ফোনন গ্যাস ]
3. i) তরল  $He^3$  এবং ii) শ্বেত বামন নক্ষত্রের অন্তঃস্থ ইলেকট্রন গ্যাসের ফার্মি উষ্ণতা নির্ণয় করুন।
4. শ্বেতবামন নক্ষত্রের মধ্যস্থ ইলেকট্রন গ্যাসের ইলেকট্রনগুলির গতি আলোর গতি  $c$  এর সাথে তুলনীয় হয় তবে ইলেকট্রন শক্তি  $\epsilon = pc$  ( $p$  ইলেকট্রনের ভরবেগ  $m$  তার স্থির ভর) এক্ষেত্রে দেখান যে

$$a) \quad \epsilon_F = hc \left( \frac{3N}{8\pi v} \right)^{1/3}$$

যেখানে  $V$  নক্ষত্রের আয়তন

এবং  $N$  ইলেকট্রন সংখ্যা

(b) শূন্য উষ্ণতায় ইলেকট্রন গ্যাসের মোট শক্তি

$$U_0 = \frac{3}{4} N \epsilon_F$$

(c) এই উষ্ণতায় গ্যাসের চাপ

$$p = \frac{U_0}{3V}$$

5. মহাক্যানোনিকাল বা  $TV\mu$  সমাবেশের গুরুত্ব সমষ্টি হতে বোস আইনস্টাইন ও ফার্মি-ডিরাক সংখ্যায়ন পরিচালিত কণাগুলির বণ্টন সূত্র নির্ণয় কর।

## 14.10 সমাধান ও উত্তরমালা :

অনুশীলনী :

1. এখানে ফুটবল দলের শূন্যস্থানটিকে দুটি অভিন্ন কণা, যারা একসাথে থাকতে পারে না, হিসেবে ভাবা যেতে পারে। সেক্ষেত্রে প্রতিক্ষেত্রে তিনজন হবে কোষ। অতএব  $n_i = 2$ ,  $g_i = 3$ , সমস্যা

হচ্ছে তিনজনের মধ্য থেকে 2 জনকে নির্বাচন করতে হবে এবং তা  $3c_2 = 3$  টি বিভিন্ন উপায়ে করা যাবে। আবার  $x, y, z$  তিনজনের মধ্য থেকে 2 টি শূন্যস্থান পূরণ নিম্নলিখিত ছক অনুযায়ী সম্ভব

X	Y	Z
*	*	
*		*
	*	*

অর্থাৎ মাত্র তিনটি বিভিন্ন বণ্টন  $xy, yz$  এবং  $xz$  সম্ভব, স্পষ্টতই সমস্যা ফার্মি-ডিরাক বণ্টন ব্যবস্থার সমস্যা।

2. এক্ষেত্রেও আগের অনুশীলনীর মত প্রতিযোগীদের কোষ এবং মুদ্রাগুলিকে কণা হিসেবে ভাবা যেতে পারে। তবে কণাগুলি অভিন্ন হলে কি হবে, একজন প্রতিযোগীকে 1 এর বেশী কণা দিতে অসুবিধা নেই (কিন্তু ফুটবলটিমে একই সাথে দুই বা ততোধিক গোলকিপার বা সেন্টার ফরওয়ার্ড নেওয়া যায় না) কাজেই এখানেও  $g_i = 3$  এবং  $x_i = 2$  এবং সমীকরণ 14.2 অনুযায়ী বণ্টন সংখ্যা  $\frac{4!}{2!2!} = 6$ , আবার  $x, y$  এবং  $z$  এর মধ্যে বণ্টন ব্যবস্থাটি নিচের ছক অনুযায়ী সম্ভব

X	Y	Z
2	0	0
0	2	0
0	0	2
1	1	0
1	0	1
0	1	1

3. সমীকরণ 14.1 বিস্তৃত করে লিখলে পাই

$$W_{FD} = \pi \frac{g_i(g_i - 1) \dots (g_i - n_i + 1)(g_i - n_i)!}{(g_i - n_i)! n_i!}, \pi \frac{g_i(g_i - 1) - (g_i - n_i + 1)}{n_i!}$$

এখন  $g_i \gg n_i$  হলে আমরা লিখতে পারি

$$g_i - 1 = g_i, g_i - 2 = g_i, \dots, g_i - n_i + 1 = g_i$$

সেক্ষেত্রে  $W_{FD} = \pi \frac{g_i n_i}{n_i!}$

আবার সমীকরণ 14.2 কে একই রকম ভাবে বিস্তৃত করে লিখতে পারি

$$W_{BE} = \pi \frac{(g_i + n_i)(g_i + n_i - 1) \dots (g_i - 1)(g_i)!}{g_i! n_i!}$$

$$= \pi \frac{(g_i + n_i)(g_i + n_i - 1) \dots (g_i - 1)}{n_i!} = \pi \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

আবার সনাতন সংখ্যায়নে কণাগুলিকে আলাদা করে চেনা যায় কাজেই  $g_i$  কোষের  $n_i$  কণার কোন একটি  $g_i$  ভাবে রাখা যেতে পারে আবার যেহেতু কোষে যে কোন সংখ্যক কণা থাকতে পারে তাই দ্বিতীয় কণাটিকেও  $g_i$  ভাবে রাখা যায়। অর্থাৎ  $n_i$  কণাকে মোট  $g_i^{n_i}$  আবার কণাগুলির মধ্যকার বিন্যাস কোন নতুন অবস্থার সৃষ্টি করে না, তাই

$$W_{MB} = \pi \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

$$\text{অতএব } W_{FD} = W_{BE} = W_{MB} = \pi \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

4. কণাগুলির পারস্পরিক দূরত্ব  $r_0$  হলে মোটামুটি আমরা লিখতে পারি,

$$N r_0 = v$$

আবার সাধারণ উষ্ণতায় কণাটির শক্তি মোটামুটি  $\sim KT$

$$\text{অতএব ভরবেগ } p \sim \sqrt{2mKT}$$

$$\text{এবং দ্যব্রগলী তরঙ্গ দৈর্ঘ্য } \lambda_D \sim \frac{h}{p} \sim \frac{h}{\sqrt{2mKT}}$$

এখন অনুশীলনী 3 থেকে আমরা জানি কোয়ান্টাম সংখ্যায়ন এবং সনাতন সংখ্যায়ন একই রূপ নেয় যখন  $g_i \gg n_i$  বা  $f \gg l$ . এখন  $g_i \gg n_i$  হওয়ার অর্থ

$$\int g(\epsilon) d\epsilon \gg \int n_i d\epsilon$$

$$\Rightarrow G \gg N$$

$$\text{যখন } G = \frac{2\pi v}{h^3} \int_0^{\epsilon=KT} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon = \frac{2}{3} \frac{V}{h^3} (2mKT)^{3/2}$$



এখন  $f \gg 1$  এবং  $\frac{G}{N} \gg 1$  দুটি একই শর্ত সুতরাং

$$\frac{G}{N} \gg 1$$

$$\frac{r_0}{\lambda_D} \gg 1 \quad \text{অর্থাৎ } r_0 \gg \lambda_D$$

5. সমীকরণ 14.12

$$U = \frac{3}{2} NKT \frac{I_{3/2}}{I_{1/2}}$$

থেকে বোঝা যাচ্ছে কোয়ান্টাম সংখ্যাগত দুর্বলভাবে অবক্ষয়ী তন্ত্রের ক্ষেত্রে প্রতি স্বাধীনতা মাত্রার জন্য শক্তি

$$\varepsilon = \frac{U}{3N} = \frac{1}{2} kT \frac{I_{3/2}}{I_{1/2}}$$

অর্থাৎ শক্তির সমবিভাজন নীতি অনুসারে যা হওয়া উচিত তা নয়। যখন  $f \gg 1$  তখন  $\varepsilon = \frac{1}{2} kT$  কেননা  $I_{3/2} = I_{1/2}$  আদর্শ কোয়ান্টাম গ্যাস যখন সম্পূর্ণরূপে অবক্ষয় (Non-degenerate) একমাত্র তখনই তা শক্তির সমবিভাজন সূত্রকে মেনে চলে। কাজেই দুর্বল যা শক্তি মাত্রা অবক্ষয়ী তন্ত্রের ক্ষেত্রে শক্তির সমবিভাজন নীতি একেবারেই অচল।

6. কম্পাংক  $\gamma$  এর সাহায্যে প্লাংকের সূত্রটির রূপ হল

$$U(\gamma) d\gamma = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\gamma^3 d\gamma}{\exp(h\gamma / kT) - 1}$$

এখন  $\gamma = c/\lambda$  বসিয়ে আমরা পাই

$$U\left(\frac{c}{\lambda}\right) \cdot \left(-\frac{c}{\lambda^2}\right) d\lambda = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{c^3/\lambda^3 \left(-\frac{d\lambda}{\lambda^2}\right)}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}$$

$$\Rightarrow U\lambda \cdot d\lambda = \frac{8\pi h}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}$$

যেখানে  $U_\lambda = U\left(\frac{c}{\lambda}\right)\left(\frac{c}{\lambda^2}\right)$

7. He<sup>4</sup> মোট দুটি প্রোটন এবং দুটি নিউট্রন আছে এদের প্রত্যেকের ঘূর্ণন কোয়ান্টাম সংখ্যা ½ অতএব মোট ঘূর্ণন কোয়ান্টাম সংখ্যা পূর্ণসংখ্যা হওয়ায় He<sup>4</sup> কণা সমষ্টি একটি বোসন তন্ত্র রচনা করবে। পক্ষান্তরে He<sup>3</sup> দুটি প্রোটন এবং একটি নিউট্রন কণা থাকায় তার মোট ঘূর্ণন-কোয়ান্টাম সংখ্যা ½ এর গুণিতক এবং তা ফার্মায়নের মত আচরণ করবে।
8. যদি ধরে নেওয়া হয় আলোচ্য ইলেকট্রন গ্যাস সনাতন সংখ্যায়ন মেনে চলে তবে অবক্ষয় প্রাচল

$$f = \frac{v}{N} \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}$$

$$\text{এখন এক গ্রাম পরমাণু কপারের আয়তন, } V = \frac{635}{8.96} = 7.09 \text{ cm}^3$$

$$\text{অতএব } \frac{N}{v} = \frac{6.023 \times 10^{23}}{7.09} = 8.5 \times 10^{22} / \text{cm}^3,$$

$$\left[ \frac{h^2}{2\pi mkT} \right]^{3/2} = \frac{(6.626 \times 10^{-27})^3}{(2 \times 3.14 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 1.38 \times 10^{-16} \times 300)^{3/2}}$$

$$f = 10^{-5} \ll 1$$

কাজেই ইলেকট্রন গ্যাসের আলোচনায় সনাতন সংখ্যায়ন অচল। ধাতুর মধ্যস্থ ইলেকট্রন গ্যাস শক্তিশালী অবক্ষয়ী তন্ত্র।

9. আমরা জানি

$$p = - \left( \frac{\partial F}{\partial v} \right)_T$$

$$\text{এখানে } F = U - TS = U_0 \text{ কেননা } T = 0$$

$$\text{অতএব } p = - \frac{\partial}{\partial v} \left[ \left( \frac{3N}{8\pi v} \right)^{2/3} \left( \frac{h^3}{2m} \right) \left( \frac{3N}{5} \right) \right]$$

$$= \frac{2}{5} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{h^3}{2m} \left( \frac{N}{v} \right)^{5/3}$$

অনুশীলনী 8 এর উত্তর শেষে পাই

$$\frac{N}{v} = 8.5 \times 10^{22} / \text{cm}^3$$

$$\text{এবং} \quad \frac{h^3}{2m} = \frac{(6.626 \times 10^{-27})^2}{2 \times 9.11 \times 10^{-28}}$$

$$\text{সেক্ষেত্রে} \quad p = 3.81 \times 10^{11} / \text{cm}^3 \\ = 3.8 \times 10^5 \text{ atmosphere.}$$

শেষ প্রশ্নাবলি :

1. i) অনুশীলনী 6 এর উত্তর থেকে আমরা জানি কৃষ্ণবস্তু বিকিরণে সেই তড়িৎচুম্বকীয় তরঙ্গ যার তরঙ্গ দৈর্ঘ্য  $\lambda$  এবং  $\lambda + d\lambda$  পাল্লার মধ্যে বর্তমান তা প্রতি একক আয়তনে যতটা শক্তির অধিকারী তা হল

$$U_{\lambda} d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}$$

এখন র্যালের জিনসের সূত্র শুধুমাত্র যে সকল তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য? তাদের ক্ষেত্রে সাধারণ উষ্ণতায় প্রযোজ্য। কাজেই আমরা লিখতে পারি

$$\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) = 1 + \frac{hc}{\lambda kT} + \frac{1}{2} \left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)^2 + \dots \\ = 1 + \frac{hc}{\lambda kT}$$

$\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^3}, \dots$  ইত্যাদি সম্বলিত রাশিগুলির মান এক অপেক্ষা অনেক কম বলে সেগুলি অগ্রাহ্য করা হল, তখন

$$U_{\lambda} d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{\lambda kT}{hc} = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} d\lambda$$

এটাই র্যালের জিনসের সূত্র।

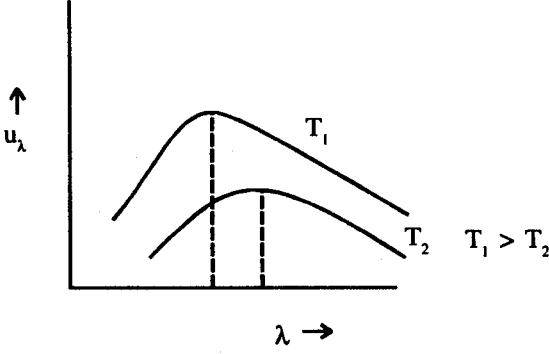
- ii) ভিনের সূত্র (Wien's law) ক্ষুদ্র তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য কাজেই

$$\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1 = \exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)$$

এক্ষেত্রে এক কে অগ্রাহ্য করা হোল

$$U_{\lambda} d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right) d\lambda.$$

- iii) ভিনের সরণ নিয়ম (Wien's displacement Law) লেখচিত্রের সাহায্যে প্লাংকের সূত্রকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়,



চিত্র 14.6. প্লাংকের সূত্রের লেখরূপ

উপরের  $U_\lambda - \lambda$  লেখ থেকে এটা স্পষ্ট যে একটি নির্দিষ্ট উষ্ণতায় একটি তরঙ্গ আছে যা সবচেয়ে বেশী শক্তির অধিকারী। অর্থাৎ নির্দিষ্ট উষ্ণতায় নির্দিষ্ট তরঙ্গদৈর্ঘ্যের ক্ষেত্রে  $U_\lambda$  সর্বোচ্চ হয়। সেক্ষেত্রে এই তরঙ্গদৈর্ঘ্যকে  $\lambda_m$  দিয়ে সূচিত করলে

$$\left(\frac{du_\lambda}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_m} = 0$$

এখন  $u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}$

$$\frac{du_\lambda}{d\lambda} = -5 \frac{8\pi hc}{\lambda^6} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} + \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}{\left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right)^2} \frac{hc}{\lambda kT} = 0$$

$$\Rightarrow 5\left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right) = e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \frac{hc}{\lambda_m kT}$$

$$\Rightarrow x = 5(1 - e^{-x}) \quad \left(\text{যখন } x = \frac{hc}{\lambda_m kT}\right)$$

এই সমীকরণটি সমাধান করলে দেখা যাবে

$$\lambda_m T = b = \frac{hc}{4.965k} = 2.898 \times 10^{-3} \text{ mk}$$

এটাই ভিনের সরণ-নিয়ম, উষ্ণতা বাড়লে  $\lambda_m$  বর্ণালীর বেগুণী অংশের দিকে সরে যাবে।

iv) যদি প্রাংকের সূত্রকে সমস্ত কম্পাংক  $\gamma = 0$  থেকে  $\gamma = \alpha$  এর জন্য সমাকল করা যায় তাহলে কৃষ্ণবস্তু যে শক্তি বিকিরণ করবে তার মোট ঘনত্ব

$$u = \int_0^{\alpha} u_{\gamma} d\gamma = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\alpha} \frac{\gamma^3 d\gamma}{e^{h\gamma/KT} - 1}$$

$$\frac{h\gamma}{kT} = x \text{ বসিয়ে পাই}$$

$$u = \frac{8\pi (kT)^4}{(hc)^3} \int_0^{\alpha} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$= \frac{8\pi^5 (kT)^4}{15 (hc)^3} = a T^4$$

ধরে নেওয়া হয়েছে  $\int_0^{\alpha} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$

অর্থাৎ কৃষ্ণবস্তু প্রকোষ্ঠে মোট শক্তি ঘনত্ব উষ্ণতার চতুর্থ ঘাতের সমানুপাতী, এটাই স্টিফান-বোলৎজমান সূত্র।

পরীক্ষার সাহায্যে যা মাপা হয় তা কিন্তু গহুরের মোট শক্তি ঘনত্ব  $U$  নয়, তা হচ্ছে গহুরের প্রতি একক ক্ষেত্রফল থেকে প্রতি সেকেন্ডে যে পরিমাণ বিকিরণ বেরিয়ে আসে হিসেব করলে দেখা যাবে তা হচ্ছে  $\frac{cu}{4}$  ( $c =$  আলোর গতিবেগ)

অতএব কৃষ্ণবস্তু প্রকোষ্ঠের ছিদ্রের প্রতি একক ক্ষেত্রফল থেকে যে পরিমাণ শক্তি প্রতি সেকেন্ডে নির্গত হয় তার পরিমাণ

$$= \sigma T^4$$

$$= \frac{c}{4} \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3} T^4$$

$$\text{যখন } \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^3}$$

এটাই স্টিফান ধ্রুবক।

2. যদি উষ্ণতা খুব বেশী না হয় তবে কঠিন বস্তুর পরমাণুগুলির কম্পনের বিস্তার আপেক্ষিক ভাবে কম এবং তখন মাধ্যমের মধ্য দিয়ে প্রবাহিত শব্দতরঙ্গগুলিকে, বিভিন্ন স্বাভাবিক দশার (normal modes) কম্পনের ফলশ্রুতি হিসেবে বিবেচনা করা যেতে পারে। প্রত্যেক স্বাভাবিক দশার কম্পন একটি কম্পাংক  $\gamma$  এর সাথে সংশ্লিষ্ট, কৃষ্ণবস্তু বিকিরণকে যেমন ফোটন গ্যাস হিসেবে ধরা হয়েছে তেমনই কঠিন স্থিতিস্থাপক মাধ্যমের মধ্য দিয়ে প্রবাহিত শব্দ বিকিরণকে ফোনন গ্যাস হিসেবে বিবেচনা করা হয়। ঘূর্ণন ভরবেগের পরিপ্রেক্ষিতে ফোনন ও একধরনের বোসন একটি নির্দিষ্ট দশায় কতগুলি ফোনন থাকবে তা নির্দিষ্ট নয় তাই ফোনন গ্যাসের আলোচনায় আমরা বোস সংখ্যায়ন প্রয়োগ করতে পারি। ফোটনের মত বোসনের সংখ্যাও সংরক্ষিত না হওয়ায় এক্ষেত্রেও রাসায়নিক বিভব শূন্য বা অবক্ষয় প্রাচল  $f = 1$  ফোননের ভরবেগ  $p = \frac{h\gamma}{v}$

কাজেই  $p$  এবং  $p + dp$  ভরবেগের পাল্লা যা কম্পাংক  $\gamma$  এবং  $\gamma + d\gamma$  এর পাল্লার মধ্যে।

ফোনন অবস্থা বা স্বাভাবিক দশার সংখ্যা

$$\begin{aligned} \frac{v \cdot 4\pi p^2 dp}{h^3} &= \frac{4\pi v}{h^3} \frac{h^2 \gamma^2}{v^2} \frac{h}{v} d\gamma \\ &= \frac{4\pi \gamma}{v^3} d\gamma \end{aligned}$$

ফোটনের ক্ষেত্রে তার দুটি সমাবর্তন অবস্থার জন্য প্রকৃত ফোটন অবস্থা সংখ্যায় নির্ণয় করে 2 দিয়ে গুণ করতে হয়েছিল কিন্তু তা করলে হবে না কেননা প্রথমতর ফোননের অর্থাৎ কঠিনের মধ্য দিয়ে প্রবাহিত শব্দ তরঙ্গ তিনটি সমাবর্তন অবস্থা — একটি অনুদৈর্ঘ্য আর দুটি অনুপ্রস্থ এবং দ্বিতীয়ত প্রথম প্রকার তরঙ্গের গতিবেগ  $v_L$  এবং দ্বিতীয় প্রকারের তরঙ্গের গতিবেগ  $v_T$  (যদিও ফোটনের ক্ষেত্রে এই দুটি গতিই ছিল  $c$ )

এই সব হিসেব করলে প্রকৃত ফোনন অবস্থার সংখ্যা দাঁড়ায়

$$= 4\pi v \left( \frac{1}{v_L^3} + \frac{2}{v_T^3} \right) \gamma^2 d\gamma$$

ডিবাই (Debye) এর স্বীকার্য অনুসারে কম্পাংকের একটি উর্ধ্বসীমা  $\gamma_D$  আছে এবং যদি ওপরের রাশিমালাকে  $\gamma = 0$  এবং  $\gamma = \gamma_D$  এই সীমার মধ্যে সমাকল করা যায় তবে মোট স্বাভাবিক

দশা সংখ্যা  $3N$  ( $N =$  মাধ্যমের পরমাণুসংখ্যা) পাওয়া যাবে, অর্থাৎ

$$4\pi v \left( \frac{1}{v_L^3} + \frac{2}{v_T^3} \right) \int_0^{\gamma_D} \gamma^2 d\gamma = 3N$$

$$\Rightarrow \gamma_D^3 = \frac{9N}{4\pi v} \left( \frac{1}{v_L^3} + \frac{2}{v_T^3} \right)^{-1}$$

এখন ফোনন গ্যাসের ক্ষেত্রে বোস সংখ্যায়ন প্রয়োগ করলে পাই

$$dn = \frac{g(\gamma) d\gamma}{e^{\frac{h\gamma}{kT}} - 1} = \frac{4\pi v \left( \frac{1}{v_L^3} + \frac{2}{v_T^3} \right) \gamma^3 d\gamma}{e^{\frac{h\gamma}{kT}} - 1}$$

এবং ফোনন গ্যাসের মোটশক্তি

$$E = \int_0^{\gamma_D} h\gamma dn = \int_0^{\gamma_D} \frac{4\pi h v \left( \frac{1}{v_L^3} + \frac{2}{v_T^3} \right) \gamma^3 d\gamma}{e^{\frac{h\gamma}{kT}} - 1}$$

$$= \int \frac{4\pi h v \frac{9N}{4\pi v} \frac{1}{\gamma_D^3} \gamma^3 d\gamma}{e^{\frac{h\gamma}{kT}} - 1}$$

$$= \frac{9Nh}{\gamma_D^3} \int_0^{\gamma_D} \frac{\gamma^3 d\gamma}{e^{\frac{h\gamma}{kT}} - 1}$$

এখন  $\frac{h\gamma}{kT} = x$  বসালে পাই

$$E = \frac{9Nh}{\gamma_D^3} \frac{kT}{h} \int_0^{\frac{h\gamma_D}{kT}} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$= 9n \left( \frac{k}{h\gamma_D} \right)^3 kT^4 \int_0^{\theta_{D/k}} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{9NkT^4}{\theta_D^3} \int_0^{\theta_{D/k}} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

এবং  $C_v = \frac{dE}{dT}$

যেখানে  $\theta_D = \frac{h\gamma_D}{x}$  (ডিবাই উষ্ণতা)

বিশেষ পরিস্থিতি :

i) এখন যদি  $T \gg \theta_D$

$$\text{তখন } x_{\max} = \frac{h\gamma_D}{kT} = \frac{\theta_D}{T} \ll 1$$

$$\text{এবং } e^x - 1 = x$$

$$\text{অতএব } \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_0^{\theta_D/T} x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{\theta_D^3}{T^3}$$

$$\text{এবং } E = \frac{9NKT^4}{\theta_D^3} \cdot \frac{1}{3} \frac{\theta_D^3}{T^3} = 3NKT$$

$$\text{এবং } C_v = \frac{dE}{dT} = 3NK = 3R$$

অর্থাৎ উষ্ণতা ডিবাই উষ্ণতার অনেক বেশী হলে কঠিন বস্তুর আপেক্ষিক তাপ ডুলং পেটিট সূত্র মেনে চলে,

ii) আবার যদি  $T \ll \theta_D$ ,  $x \rightarrow \alpha$  সেক্ষেত্রে

$$\int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\text{এবং সেক্ষেত্রে } E = \frac{9NKT^4}{\theta_D^3} \cdot \frac{\pi^4}{15} = \frac{3}{5} \pi^4 NK \frac{T^4}{\theta_D^3}$$

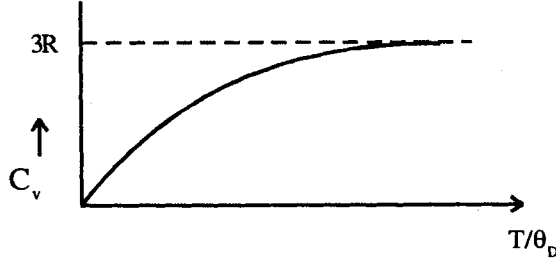
$$\text{এবং } C_v = \frac{dE}{dT} = \frac{12}{5} \pi^4 NK \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3$$

উষ্ণতা যখন  $\theta_D$  এর সাথে তুলনীয় তখন  $E$  এর রাশিমালা

$$E = \frac{9NKT^4}{\theta_D^3} \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$



এবং  $C_v = \frac{dE}{dT}$  নির্ণয় করতে হবে দেখান, যাবে উষ্ণতার সাথে  $C_v$  র পরিবর্তন নিচের লেখচিত্র অনুযায়ী হয়,



চিত্র 14.7. উষ্ণতার সাথে আণবিক তাপধারণক্ষমতার পরিবর্তন

### 3. শ্বেত বামন নক্ষত্র :

যখন ঘনবস্তুপুঞ্জের মেঘ মহাকর্ষের প্রভাবে সংকুচিত হতে থাকে তখন তার ঘনত্ব এবং উষ্ণতা দুইই ক্রমশ বৃদ্ধি পায় এবং সেখান থেকে শক্তিও নির্গত হতে থাকে। যদি মেঘের ভর সূর্যের ভরের শতকরা এক ভাগ বা তার বেশী হয় তখন একটা পরিস্থিতির উদ্ভব হয় যখন উষ্ণতা  $10^7$  °K বা তার বেশী হয়। এই অবস্থায় হাইড্রোজেন গলে গিয়ে (fusion) হিলিয়ামে পরিণত হতে শুরু করে ফলশ্রুতি হিসেবে একটি নক্ষত্রের জন্ম হয়। গলনের (fusion) ফলে উদ্ভূত শক্তির একটা অংশ নক্ষত্রের মধ্যে কণা সমূহের গতিশক্তি হিসাবে থাকে বাকিটা নক্ষত্র থেকে নির্গত হয় এবং তার ঔজ্জ্বল্য প্রদান করে। এই সময় তাপীয় গতি এবং বিকিরণ জনিত বহিরীণ চাপ মহাকর্ষজনিত আভ্যন্তরীণ চাপকে প্রশমিত করে। কিন্তু হাইড্রোজেন শেষ হয়ে গেলে সংকোচন আবার নতুন করে শুরু হয় এবং আভ্যন্তরীণ উষ্ণতা বৃদ্ধি পেয়ে যাবে এবং একটা সময় হিলিয়াম গলে গিয়ে কার্বন ইত্যাদি ভারী মৌলে পরিণত হওয়ার ঘটনা শুরু হয় এই ভাবে একটা সময় আসে যখন নক্ষত্রের বাইরের স্তরের ভারকে প্রতিমিত করার জন্য যে আভ্যন্তরীণ চাপ দরকার তা প্রদান করার জন্য কোন নিউক্লীয় শক্তি থাকে না। বলা হয় নক্ষত্রটি ঠাণ্ডা এবং মৃতপ্রায় অবক্ষয়ী ইলেকট্রন গ্যাসে পূর্ণ। অবশ্য এই ধরনের ঠাণ্ডা নক্ষত্রে বাইরের স্তরের ভারকে প্রতিমিত করে নক্ষত্রের অভ্যন্তরে যে অবক্ষয়ী ইলেকট্রন গ্যাস তৈরী হয় তার চাপ। শ্বেত বামন নক্ষত্রে ঠিক এটাই ঘটে থাকে। কিন্তু সেখানেও ভরের একটা উর্ধ্বসীমা আছে যা সূর্যের ভরের 1.4 গুণ। এর চেয়ে বেশী ভরের মহাকর্ষীয় চাপকে অবক্ষয়ী ইলেকট্রন গ্যাসের চাপ প্রতিমিত করে। এই ভারকে চন্দ্রশেখর সীমা বলে। বোঝা যাচ্ছে শ্বেতবামন নক্ষত্রের ভর প্রায় সূর্যের ভরের সমান। কিন্তু ব্যাসার্ধ প্রায় সূর্যের ব্যাসার্ধের শতকরা এক ভাগ। কাজেই শ্বেতবামন নক্ষত্রের ঘনত্ব  $10^6 \text{ gm / c.c.}$  (সূর্যের ঘনত্ব প্রায়  $1 \text{ gm/c.c.}$ )

যখন ইলেকট্রনের ভরবেগ  $p$  এবং  $p + dp$  এর পাল্লার মধ্যে থাকে তখন মোট কোষ / ইলেকট্রন সংখ্যা

$$= \frac{2v}{h^3} 4\pi p^2 dp$$

$$= \frac{8\pi v}{h^3} \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{c^3} \quad \because \epsilon = pc$$

এখন শূন্য উষ্ণতায়  $\epsilon = 0$  এবং  $\epsilon = \epsilon_F$  এই শক্তির পাল্লার মধ্যে সদস্য প্রতিটি ইলেকট্রনই একটি করে কোষে থাকে কাজেই ওপরের সংখ্যাকে এই সীমার মধ্যে সমাকল করলে আমরা মোট ইলেকট্রন সংখ্যা  $N$  পেয়ে যাব। কাজেই

$$N = \frac{8\pi v}{c^3 h^3} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^2 d\epsilon = \frac{8\pi v}{3c^3 h^3} \epsilon_F^3$$

$$\Rightarrow \epsilon_F = \left( \frac{3N}{8\pi v} \right)^{1/3} hc$$

এখন ইলেকট্রন গ্যাসের মোট শক্তি

$$U_0 = \int_0^{\epsilon_F} \frac{8\pi v}{c^3 h^3} \epsilon^2 \cdot \epsilon d\epsilon = \frac{8\pi v}{4c^3 h^3} \epsilon_F^4$$

$$\Rightarrow \frac{U_0}{N} = \frac{3}{4} \epsilon_F$$

$$\Rightarrow U_0 = \frac{3}{4} N \epsilon_F$$

$$\text{আবার } P = -\frac{dU}{dv} = -\frac{dU_0}{dv} \quad \because F = U_0 - TS = U_0, T = 0$$

$$= -\frac{3}{4} N \frac{\partial \epsilon_F}{\partial v} = -\frac{3}{4} N hc \left( \frac{3N}{8} \right)^{1/3} \left( \frac{1}{3} \right) v^{-4/3}$$

$$= \frac{1}{4} N \left( \frac{3N}{8v} \right)^{1/3} hc \left( \frac{1}{v} \right) = \frac{3}{4} N \epsilon_F / 3v$$

$$= \frac{1}{3} \frac{U_0}{v}$$

5) বোস-আইনস্টাইন ও ফার্মি-ডিরাক সংখ্যায়ন [ বিকল্প প্রয়োগ ]

এক্ষেত্রে আপনারা  $V$  আয়তন পাত্রে  $T$  উষ্ণতার তাপীয় অবস্থায় সদৃশ অনুযুক্ত গ্যাসের কথা কল্পনা করে এই চিহ্ন গুলি ব্যবহার করুন :

একটি কোয়ান্টাম কণার অবস্থা  $r$  বা  $s$  দ্বারা

r অবস্থায় কণার শক্তি  $\epsilon_r$  দ্বারা

r অবস্থায় বা প্রকোষ্ঠে কণার সংখ্যা  $n_r$  দ্বারা

এবং সমগ্র গ্যাসের কোয়ান্টাম অবস্থাকে R দ্বারা।

গ্যাসীয় অণুগুলির মধ্যে আকর্ষণ বল প্রায় অনুপস্থিত ধরলে এবং  $r = 1$  প্রকোষ্ঠে  $n_1$  কণা,  $r = 2$  প্রকোষ্ঠে  $n_2$  কণা থাকলে তন্ত্রের মোট শক্তি

$$E = n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \dots + n_r\epsilon_r + \dots = \sum n_r\epsilon_r$$

এবং মোট কণা সংখ্যা

$$\sum n_r = N$$

মহা ক্যানোনিকাল সমাবেশের বণ্টন সূত্র যেখানে তন্ত্রে কণা সংখ্যাও পরিবর্তিত হয়

$$Z = \sum e^{-\beta(\epsilon_r - \mu N_r)} \quad (1)$$

এখন বোস-আইনস্টাইন সংখ্যায়ন কণাগুলি সদৃশ এবং বিভিন্ন প্রকোষ্ঠে কণার সংখ্যা  $n_1, n_2, n_3, \dots$  দ্বারা গ্যাসের অবস্থা সহজে প্রকাশ করা যায় এবং যে কোন প্রকোষ্ঠে কণার সংখ্যার সম্ভাব্য মান

$$n_r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad [ \text{সকল } r \text{ এর জন্য} ]$$

অপরপক্ষে ফার্মি-ডিরাক সংখ্যায়নের ক্ষেত্রে কণাগুলি সদৃশ হলেও বিভিন্ন প্রকোষ্ঠে কণার সংখ্যা 1 বা 0।

অর্থাৎ  $n_r = 0$  বা 1.

এরা পাউলির বর্জন নীতি মেনে চলে।

সাধারণতঃ 0 বা অখণ্ড ঘূর্ণন কোয়ান্টাম সংখ্যার কণাগুলি বোস-আইনস্টাইন এবং  $\frac{1}{2}$  বা  $\frac{1}{2}$  এর অখণ্ড গুণিতক ঘূর্ণন কোয়ান্টাম সংখ্যার কণাগুলি ফার্মি ডিরাক সংখ্যায়ন মেনে চলে।

সনাতনী তন্ত্রের ক্ষেত্রে অর্থাৎ ম্যাক্সওয়েল বোলৎজমান সংখ্যায়নে কণাগুলি অসদৃশ এবং

$$n_r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad [ \text{সকল } r \text{ এর জন্য} ]$$

বণ্টনসূত্র নির্ণয় গুরুত্ব সমষ্টি ছাড়াও যে সকল সমীকরণের প্রয়োজন সেগুলি নিম্নরূপ

$$n_i = \frac{1}{Z} e^{-(\beta\epsilon_i - \mu N_i)}$$

$$Pv = KT \ln Z$$

$$N = KT \frac{\partial}{\partial \mu} (\ln Z)$$

$$\text{এবং } s = KT \left( \frac{\partial}{\partial T} \ln Z \right) + K \ln Z.$$

$$\text{এবং } \beta = \frac{1}{KT} \quad \text{ও} \quad \mu = \frac{G}{N} = \text{রাসায়নিক বিভব}$$

এখন মহা ক্যানোনিকাল সমাবেশের গুরুত্ব সমাপ্তিকে প্রতিকণার জন্য গুরুত্ব অপেক্ষকের গুণফল রূপে প্রকাশ করা যায় অর্থাৎ সমীকরণ (1) হতে

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_r e^{-\epsilon_j/kT} \cdot e^{\frac{\mu N_j}{kT}} \\
 &= \sum_{r,s} e^{-\sum \epsilon_{rs} n_{rs}/kT} e^{\frac{\mu}{kT} \sum n_{rs}} \\
 &= \sum_r \exp \sum_s \frac{(\mu - \epsilon_{rs}) n_{rs}}{kT} \\
 &= \sum_r \pi_s \exp \frac{(\mu - \epsilon_{rs}) n_{rs}}{kT} \\
 &= \prod_s Z_s
 \end{aligned}$$

যেখানে  $Z_s = \sum_r \exp \frac{n_{rs}(\mu - \epsilon_{rs})}{kT}$  (3)

এখন  $N = kT \frac{\partial \ln z}{\partial \mu} = kT \sum_s \frac{\partial \ln z_s}{\partial \mu} = \sum n_s$

এখানে  $\epsilon_s$  শক্তিস্তরে গড় কণা সংখ্যাই  $n_s$ ।

যেহেতু বোস-আইনস্টাইন সংখ্যায়ন মেনে চলা কণাগুলির ক্ষেত্রে  $n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$  (সকল  $r$  প্রকোষ্ঠের জন্য)

সুতরাং  $Z_s^{Be} = 1 + e^{(\mu - \epsilon_s)/kT} + e^{2(\mu - \epsilon_s)/kT} + e^{3(\mu - \epsilon_s)/kT}$

$$= \frac{1}{1 - e^{(\mu - \epsilon_s)/kT}}$$

অর্থাৎ  $n_s^{BE} = kT \frac{\delta(\ln z_s)}{\delta \mu}$

$$= \frac{kT (e^{(\mu - \epsilon_s)/kT}) \frac{1}{kT}}{1 - e^{(\mu - \epsilon_s)/kT}}$$

$$= \frac{1}{e^{(\mu - \epsilon_s)/kT} - 1}$$

অপরপক্ষে ফার্মি-ডিরাক সংখ্যায়ন মেনে চলা কণাগুলির ক্ষেত্রে  $n_r = 0$  বা  $1$  (সকল  $r$  প্রকোষ্ঠের জন্য)

$$\text{সুতরাং } Z_s^{\text{FD}} = 1 + e^{(\mu - \epsilon_s)/kT}$$

$$\text{এবং } n_s^{\text{FD}} = \frac{K T e^{(\mu - \epsilon_s)/kT}}{1 + e^{(\mu - \epsilon_s)/kT}} = \frac{1}{e^{(\mu - \epsilon_s)/kT} + 1}$$

এটাই 14.2 অনুচ্ছেদ হতে প্রাপ্ত দুই সংখ্যায়নের বণ্টন সূত্রের সমীকরণ।