প্রাক্‌কথন

নেতাজী সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমত কোনও বিষয়ে সাম্মানিক (honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণ ক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে—যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয় সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধীতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিত মণ্ডলীর সাহায্য এ কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন; যখনই কোনো শিক্ষার্থী এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনো শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয় পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হতে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণ ক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশ কিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপিকা (ড.) মণিমালা দাস
উপাচার্য

প্রথম পুনর্মুদ্রণ জুলাই, 2011

ভারত সরকারের দূরশিক্ষা পর্ষদের বিধি অনুযায়ী এবং অর্থানুকূল্যে মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations and financial assistance
of the Distance Education Council, Government of India.

পরিচিতি

বিষয় ঃ গণিত বিদ্যা **সাম্মানিক স্তর**

পাঠক্রম ঃ পর্যায় ঃ EMT 03 : 01 & 02

	রচনা	সম্পাদনা
একক 1	ড. অস্থির দাশগুপ্ত	ড. শক্তিকান্ত চক্রবর্তী
একক 2	ড. সব্যসাচী চক্রবর্তী	ড. দীপক চ্যাটার্জি
একক 3	ঐ	ঐ
একক 4	ড. প্রণব কুমার অধিকারী	ঐ
একক 5	ঐ	ঐ
একক 6	ড. সর্বাণী চক্রবর্তী	ড. অস্থির দাশগুপ্ত
একক 7	ড. শক্তিকান্ত চক্রবর্তী	ঐ
একক 8	ঐ	ঐ
একক 9	অধ্যাপিকা কাবেরী ঘোষ	ড. দীপক চ্যাটার্জি
একক 10	অধ্যাপক রঞ্জান চট্টোপাধ্যায়	ঐ
একক 11	ড. যুথিকা সেনগুপ্ত	ঐ
একক 12	অধ্যাপিকা মধুছন্দা সরকার	ঐ
একক 13	অধ্যাপক অভিজিৎ চৌধুরি	ঐ
একক 14	ঐ	ঐ

ঘোষণা

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

EMT–03

বীজগণিত

পর্যায়

1

পুরাতনী বীজগণিত

পর্যায়

2

বিমূর্ত বীজগণিত

একক 1 ❑ অসমতা সমূহ (Inequalities)

1.1 প্রস্তাবনা

সমান বা অসমানের ধারণা একটি মৌলিক ধারণা। দুটি মানের অসমতা ছোটবড়র ধারণা তৈরী করে। দুটি বাস্তব সংখ্যা দেওয়া থাকলে আমরা জানি তারা হয় সমান হবে এবং অসমান হলে একটি অপরটি অপেক্ষা ছোট অথবা বড় হবে। কলন বিদ্যায় এই মৌলিক ধারণার প্রয়োগ হয়েছে। সেখানে সীমা (লিমিট)-র সংজ্ঞা মূলত অসমতা দ্বারা নিরূপিত। গণিতের বিভিন্ন শাখায় অসমতা সমূহ ব্যবহৃত হয়।

গাণিতিক অসমতা হল এমন কোনও গাণিতিক রাশি (expression) যার দ্বারা দুটি রাশির মান তুলনা করা যায়, অর্থাৎ একটি অপরটি অপেক্ষা ছোট বা বড় বা সমান কিনা বোঝান যায়। প্রাচীন কাল থেকেই গণিত শাস্ত্রে অসমতার চর্চা হয়ে আসছে। বাস্তব সংখ্যা দ্বারা গঠিত দুটি রাশির অসমতা বিচার করা প্রয়োজন হয় এবং অনেক সময় কোনও উপপাদ্য প্রমাণ করার জন্যও অসমতাগুলি ব্যবহার করতে হয়। এখানে আমরা এমন কয়েকটি অসমতার আলোচনা করব যেগুলি সমস্ত বাস্তব সংখ্যার জন্যই প্রযোজ্য।

আমরা প্রথমে কয়েকটি প্রাথমিক অসমতা উল্লেখ করব। পরে অন্যান্য অসমতাসমূহ আলোচিত হবে। আলোচনা শুরু করার আগে উল্লেখ করা দরকার যে— শূন্য 0 কে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কোনওটিই নয় ধরা হবে। $<$, $>$ চিহ্নগুলি অসমতা জ্ঞাপক চিহ্ন।

1.2 উদ্দেশ্য

এই এককে গণিত শাস্ত্রে ব্যবহৃত কয়েকটি উল্লেখযোগ্য আলোচনা করা হচ্ছে। অসমতাগুলি নিজেরাই যথেষ্ট অর্থবহ এবং গণিতের বিভিন্ন শাখায় এদের ব্যবহার বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। তাই অসমতাগুলির বিচার, বিশ্লেষণ, প্রমাণ খুব জরুরি। এককটি শেখা হলে আপনারা নিম্নলিখিত অসমতাগুলি প্রমাণ করতে পারবেন ও প্রয়োজন মত ব্যবহার করতে পারবেন।

- মধ্যক বিষয়ক অসমতা
- কশি সোয়ার্জ অসমতা
- ভারেস্ট্রাসের অসমতা
- অন্যান্য অসমতা

1.3 প্রাথমিক অসমতা সমূহ

EMT01 Block-1 বইতে বাস্তব সংখ্যার ধর্ম সমূহ বলা হয়েছে। বাস্তব সংখ্যার কয়েকটি প্রাথমিক অসমতা এখানে আলোচিত হল। পরবর্তী গুরুত্বপূর্ণ অসমতাগুলি প্রমাণ করতে হলে এই ফলগুলি মনে রাখা দরকার। আমরা জানি x বাস্তব সংখ্যা হলে $|x| = x$ যখন $x >= 0$

$= -x$ যখন $x < 0$

এছাড়া বাস্তব সংখ্যাগুলি কয়েকটি প্রাথমিক অসমতা সিদ্ধ করে যেমন— a,b,c বাস্তব সংখ্যাগুলির ক্ষেত্রে যদি $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a > b$ হয় তবে

(i) $-a < -b$; (ii) $ab > 0$; (iii) $ac > bc$; (iv) $a+c > b+c$; (v) $a/c > b/c$; (vi) $1/a < 1/b$, (vii) $0 < n$ স্বাভাবিক সংখ্যা হলে $a^n > b^n$।

আরও কিছু প্রাথমিক অসমতা হল (viii), $a < b$, $c < d$ হলে $a + c < b + d$ হবে কারণ : $a < b$, অনুরূপভাবে $d - c > 0$

সুতরাং $(b-a) + (d-c) > 0$, বা $b+d > a+c$।

(ix) $a < b$, $c > 0$ হলে $ac < bc$ হবে

কারন $(b-a) > 0$, এবং $c > 0$ বলে $(b-a)c > 0$, বা $bc > ac$ ।

(x) $a < b$, $c < 0$ হলে $ac > bc$ হবে

কারন : $(b-a) > 0$ এবং $-c > 0$

সুতরাং $(b-a)(-c) > 0$, বা $ac > bc$ ।

উপপাদ্য 1. $r = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n$ এর জন্য যদি $a_r > b_r > 0$ হয়, তবে $a_1a_2\ldots\ldots a_n > b_1b_2\ldots\ldots\ldots b_n$

প্রমাণ : $a_1a_2 - b_1b_2 = a_1(a_2 - b_2) + b_2(a_1 - b_1) > 0$, অতএব $a_1a_2 > b_1b_2$

আবার যেহেতু $a_3 > b_3$, সুতরাং $(a_1a_2).a_3 > (b_1b_2).b_3 > 0$. অতএব $a_1a_2a_3 > b_1b_2b_3$

মনে করি $n = m$ এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য, অর্থাৎ $a_1a_2\ldots\ldots a_m > b_1b_2\ldots\ldots b_m$

এখন যেহেতু $a_{m+1} > b_{m+1}$, অতএব $(a_1a_2\ldots .a_m).a_{m+1} > (b_1b_2\ldots b_m).b_{m+1} > 0$

অতএব $a_1a_2........a_{m+1} > b_1b_2.....b_{m+1} > 0$। অর্থাৎ $n = m+1$-এর জন্যও উপপাদ্যটি সত্য।

সুতরাং গণিতিক আরোহ পদ্ধতির (Mathematical Induction) সাহায্যে বলা যায় উপপাদ্যটি সব স্বাভাবিক সংখ্যার জন্য সত্য। অর্থাৎ n=1,2,3........ সমস্ত ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার জন্য সত্য।

অনুসিদ্ধান্ত— $a > b > 0$ হলে এবং n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, $a^n > b^n$, যখন $n > 0$ এবং $a^n < b^n$, যখন $n < 0$ উপরের উপপাদ্যে যদি $a = a_1 = a_2 = ...a_n$ এবং $b = b_1 = b_2 = ...= b_n$ বসাই, তাহলেই পাই $a^n > b^n$, যখন $n > 0$

$n < 0$ হলে, ধরি $n = -m$, অর্থাৎ $m>0$, অতএব $a^m > b^m$, অথবা $1/a^n > 1/b^n$, অর্থাৎ $a^n < b^n$।

মন্তব্য 1 : $a_r, b_r > 0$ না হলে কিন্তু উপপাদ্য সত্য নয়। যেমন মনে করি $-3 > -4$, $3 > -2$; তাহলে $(-3)(3)<(-4)(-2)$

মন্তব্য 2 : n ধনাত্মক মূলক সংখ্যা হলেও অনুসিদ্ধান্তটি $a^n > b^n$ সত্য।

প্রমাণ : মনে করি $n = \dfrac{p}{q} > 0$ যেখানে p,q পরস্পর ধনাত্মক মৌলিক। a,b উভয়েই ধনাত্মক বলে, আমরা $a^{\frac{1}{q}}$ ও $b^{\frac{1}{q}}$ এগুলি ধনাত্মক পেতে পারি। আমরা $a^{\frac{1}{q}} > 0$, $b^{\frac{1}{q}} > 0$ নিলাম। আবার যেহেতু $a > b$ সুতরাং $a^{\frac{1}{q}} > b^{\frac{1}{q}}$ হবে; কারণ অন্যথায় $a^{\frac{1}{q}} < b^{\frac{1}{q}}$ হলে, $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q < \left(b^{\frac{1}{q}}\right)^q$ বা $a > b$ হতে হয় যা অসম্ভব।

এখন যেহেতু $a^{\frac{1}{q}} > b^{\frac{1}{q}}$, $p > 0$, তাই $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > \left(b^{\frac{1}{q}}\right)^p$ বা $a^n > b^n$ ।

বাস্তব সংখ্যার এই প্রাথমিকি অসমতাগুলি ব্যবহার করে আমরা এবারের বিভিন্ন উদাহরণের সাহায্যে আরও কিছু অসমতা দেখব। উদাহরণগুলিতে আপনি লক্ষ করবেন যে, কয়েকটি গাণিতিক সিদ্ধান্ত প্রয়োজনে ব্যবহার করা হয়েছে। যেমন —

সিদ্ধান্ত 1 : বাস্তব সংখ্যার বর্গ কখনও ঋণাত্মক হতে পারে না।

সিদ্ধান্ত 2 : কোন গাণিতিক রাশি যদি কয়েকটি সংখ্যা a,b,c..... সাপেক্ষে সুষম (Symmetric) রাশি হয়

[যেমন $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ রাশিটি a,b,c সাপেক্ষে সুষম]

তবে আমরা রাশিটিতে সাধারণভাবে ধরতে পারি $a > b > c$........ নীচের উদাহরণগুলি বুঝে নিয়ে অনুশীলনীর অঙ্কগুলি নিজে করার চেষ্টা করুন।

উদাহরণ 1 : যদি a,b দুটি অসমান ধনাত্মক সংখ্যা হয়, তবে দেখান

$$\sqrt{(ab)} > 2\Big/\left\{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right\}$$

সমাধান : আমরা জানি অশূন্য সংখ্যার বর্গ ধনাত্মক হয়। এখানে a–b অশূন্য।

অতএব $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 > 0$, বা $(a+b)^2 > 4ab > 0$ $(\because a, b > 0)$

বা $ab(a+b)^2 > 4a^2b^2$ বা $\sqrt{ab}\,(a+b) > 2ab$

অতএব $\sqrt{ab} > 2/\{(a+b)\ /ab\} = 2\Big/\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

উদাহরণ 2 : a,b,c ধনাত্মক হলে প্রমাণ করুন $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \not< \frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$

সমাধান : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{\sqrt{bc}}-\frac{1}{\sqrt{ca}}-\frac{1}{\sqrt{ab}} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\right\} \not< 0$

$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \not< \frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$ (সিদ্ধান্ত 1 ব্যবহৃত)

উদাহরণ 3 : a,b,c ধনাত্মক হলে দেখান :

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$$

সমাধান : $2(a^2+b^2) = (a+b)^2+(a-b)^2 \geq (a+b)^2$; বা $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$

অনুরূপভাবে $\frac{b^2+c^2}{b+c} \geq \frac{b+c}{2}; \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq \frac{c+a}{2}$

যোগ করলে পাই $\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \geq \frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2} = a+b+c$

উদাহরণ 4 : a,b,c ধনাত্মক হলে প্রমাণ করুন:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b) \geq 0.$$

সমাধান : স্পষ্টত $a = b = c$ হলে বামপক্ষ $= 0$,

আবার a, b, c মধ্যে যে কোনও দুটি সমান হলে, যেমন $a = b$ হলে

বামপক্ষ $= c(c-a)^2 \geq 0$, কারণ $c > 0$ এবং $(c-a)^2 \geq 0$ ।

আবার a,b,c অসমান হলে, বামপক্ষ যেহেতু সুষম তাই আমরা $a > b > c$ ধরতে পারি।

এখন $a(a-b)(a-c) > b(a-b)(b-c)$ [$\because a > b$ এবং $a-c > b-c$]

অতএব $a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) > 0$

কিন্তু যেহেতু $c < a, c < b, (c-a)(c-b)c > 0$ (কারণ $c > 0$)

সুতরাং $a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) > 0$. প্রমাণিত।

অনুশীলনী I :

অনু: 1. a,b,c ধনাত্মক সংখ্যা হলে, প্রমাণ করুন:

$$\frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} + \frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

অনু: 2. a,b,c বাস্তব সংখ্যা হলে দেখান যে $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

সংকেত: $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ইত্যাদি থেকে হবে।

অনু: 3. a,b,c,d বাস্তব সংখ্যা হলে দেখান :

$$(a^2+b^2+1)(c^2+d^2+1) \not< (ac+bd+1)^2$$

অনু: 4. যদি a,b,c,d প্রত্যেক্যেই 1 এর থেকে বড় হয় তবে দেখান যে

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) < 8(abcd+1)$$

অনু: 5. a,b,c ধনাত্মক এবং $n \geq 0$ বা $n+1 < 0$ হলে, দেখান যে

$$a^n(a-b)(a-c) + b^n(b-a)(b-c) + c^n(c-a)(c-b) \geq 0$$

উদাহরণ 5 : a,b,x,y ধনাত্মক হলে প্রমাণ করুন যে

$$\frac{ax+by}{a+b} \geq \frac{(a+b)xy}{ay+bx}$$

সমাধান : $\dfrac{(a+b)xy}{ay+bx} - \dfrac{ax+by}{a+b} = \dfrac{(a+b)^2xy - (a^2xy + b^2xy + abx^2 + aby^2)}{(ay+bx)(a+b)}$

$$= \frac{-ab(x^2+y^2-2xy)}{(ay+bx)(a+b)} = \frac{-ab(x-y)^2}{(ay+bx)(a+b)} \leq 0, \ (\because a,b,x,y > 0)$$

অতএব $\dfrac{ax+by}{a+b} \geq \dfrac{(a+b)xy}{ay+bx}$

উদাহরণ 6 : প্রমাণ করুন যে

$$1!\,3!\,5!\ldots\ldots\ldots(2x-1)! > (n!)^n$$

সমাধান : যদি $r < n$ হয় তবে $n < 2n-r$ হবে

অতএব $$\frac{r!(2n-r)!}{n!\,n!} = \frac{r!\,n!\{(n+1)(n+2)\ldots.(2n-r) \text{মোট } n-r \text{পদ}\}}{n!\,r!\{(r+1)(r+2)\ldots.n \text{ মোট } n-r \text{ পদ}\}}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)\ldots..(2n-r)}{(r+1)(r+2)\ldots\ldots n} > 1 \text{ যেহেতু } n > r$$

আবার যদি ধরি $r > n$ তবে $2n-r < n$ হবে এবং সেক্ষেত্রে

$$\frac{r!\,(2n-r)!}{n!\,n!} = \frac{n!\,\{(n+1)(n+2)\ldots.r \text{ মোট } r-n \text{ পদ}\}\ (2n-r)!}{n!\,(2n-r)!\,\{(2n-r+1)(2n-r+2)\ldots.n \text{ মোট } r-n \text{ পদ}\}}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots.r}{(2n-r+1)(2n-r+2)\ldots\ldots n} > 1 \text{ কারণ } n > 2n-r$$

সুতরাং উভয় ক্ষেত্রেই r যে কোনো পূর্ণ সংখ্যা হলে দেখান গেল যে

$$r!\,(2n-r)! > (n!)^2$$

এবারে $r = 1, 3, \ldots.(2n-1)$ বসালে পাই

$$1!\,(2n-1)! > (n!)^2$$

$$3!\,(2n-3)! > (n!)^2$$

....

$$(2n-1)!\,1! > (n!)^2$$

অসমতা সমূহ গুণন করে $[1!\,3!\ldots\ldots\ldots(2n-1)!]^2 > \{(n!)^2\}^n$

বা, $1!\,3!\,5!\ldots.(2n-1)! > (n!)^n$

অনুশীলনী II :

1. প্রমাণ করুন, n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

2. প্রমাণ করুন $(n!)^2 > n^n$, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $n > 2$.

3. প্রমাণ করুন $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n} < \sqrt{2n-1}$

4. যদি a ধনাত্মক এবং $a \neq 1$ হয়, এবং x,y যদি ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা হয় তবে দেখান যে $\frac{a^x-1}{x} > \frac{a^y-1}{y}$ যখন $x > y$ ।

(এটি উপপাদ্য হিসাবে প্রমাণ করা যায়। সমাধান দেখুন)

1.4 মধ্যক সংক্রান্ত অসমতা সমূহ

কয়েকটি সীমিত সংখ্যক বাস্তব সংখ্যার গড় বা মধ্যকের ধারণা এবং ব্যবহার প্রাচীনকাল থেকেই প্রচলিত। গণিতে তিন প্রকার মধ্যকের প্রচলন আছে। যেমন সামন্তর মধ্যক, গুণোত্তর মধ্যক, এবং বিপরীত মধ্যক। মধ্যকগুলি কয়েকটি অসমতা সিদ্ধ করে যার ব্যবহার গণিতের বিভিন্ন শাখায় বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, n -সংখ্যক বাস্তব সংখ্যা হলে তিন প্রকার মধ্যকের সংজ্ঞা হল -

সমান্তর মধ্যক (Arithmetic mean) = $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$ পরিসংখ্যান বিদ্যায় (Statistics) এই মধ্যক প্রায়শই ব্যবহৃত হয়।

গুণোত্তর মধ্যক (Geometric mean) $= (a_1 a_2 \ldots\ldots a_n)^{1/n}$; যেখানে $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ গুলি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ সংখ্যাগুলি জ্যামিতিক প্রগতিতে থাকলে গুনোত্তর মধ্যকটি বেশী গুরুত্বপূর্ণ।

বিপরীত মধ্যক $= n/(1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 + 1/a_n)$, যেখানে $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ গুলি অশূন্য বাস্তব সংখ্যা।

অর্থাৎ, বিপরীত মধ্যক হল সংখ্যাগুলির অন্যোন্যকের সমান্তর মধ্যকের অন্যোন্যক।

আমরা সমান্তর মধ্যককে A, গুনোত্তর মধ্যককে G, এবং বিপরীত মধ্যককে H বলব।

মন্তব্য : আপনি লক্ষ করুন যে কোনও সংখ্যক বাস্তব সংখ্যার সমান্তর মধ্যক নির্ণয় করা যায়, কিন্তু গুনোত্তর মধ্যক নির্ণয় করতে হলে সংখ্যাগুলিকে ধনাত্মক হতে হবে এবং বিপরীত মধ্যকের জন্য সংখ্যাগুলিকে অশূন্য হতে হবে।

এখন মধ্যকগুলির মধ্যে কে ছোট বা বড় জানতে হলে তাদের অসমতাটি বিচার করা দরকার। আমরা একটি উপপাদ্যের সাহায্যে দেখব যে সংখ্যাগুলি সমান হলে মধ্যকগুলি সমান হবে কিন্তু অসমান হলে $A > G > H$ হবে।

মধ্যকের অসমতা সংক্রান্ত বিশেষ উপপাদ্যটি বিবৃত করা হল —

উপপাদ্য 2. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ কয়েকটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সমান্তরীয় মধ্যক, গুনোত্তরীয় মধ্যক এবং বিপরীত মধ্যক যদি যথাক্রমে

A, G, H হয় তবে $A > G > H$, এবং সংখ্যাগুলি সমান হলে $A = G = H$ হবে।

প্রমাণ ঃ প্রথমে দুটি পর্বে $A \geq G$,এবং পরে তৃতীয় পর্বে $G \geq H$ প্রমাণিত হবে।

পর্ব 1 মনে করি $n = 2^m$, যেখানে m ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

আমরা জানি দুটি বাস্তব ধনাত্মক সংখ্যা a_1, a_2 জন্য

$$a_1a_2 = ((a_1 + a_2)/2)^2 - ((a_1 - a_2)/2)^2 \ < \ = ((a_1 + a_2)/2)^2$$

এখানে $a_1 = a_2$ হলে, "= " চিহ্ন প্রযুক্ত হবে। অতএব $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ $\therefore A \geq G$. অতএব m=1 এর জন্য উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

এবার মনে করি m=k এর জন্য প্রতিপাদ্যটি সত্য, অর্থাৎ $\left(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{2^k}\right)/_{2^k} >=$

$$\left(a_1a_2 \cdots\cdots a_{2^k}\right)^{1/2^k}$$

এখন $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{2^k}, a_{2^{k+1}}$ মোট 2^{k+1} সংখ্যক সংখ্যা নেওয়া হল। সংখ্যাগুলিকে $(a_1, \ldots\ldots, a_{2^k})$ এবং $(a_{2^k+1}, a_{2^k+2}, a_{2^k+3}, \ldots\ldots a_{2^{k+1}})$ এরূপ দুটি সেটে ভাগ করা হল যাদের প্রত্যেকটিতে 2^k সংখ্যক সংখ্যা আছে। এখন $\left(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \ldots + a_{2^{k+1}}\right)_{/2^{k+1}}$

$$= (1/2)(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{2^k})/_{2^k} + (a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + a_{2^k+3} \ldots + a_{2^{k+1}})/_{2^k})$$

$$\geq (1/2)((a_1a_2 \ldots\ldots a_{2^k})^{1/2^k}) + (a_{2^k+1}a_{2^k+2}a_{2^k+3} \ldots\ldots a_{2^{k+1}})^{1/2^k}))$$

$$\geq ((a_1a_2 \ldots\ldots a_{2^k})^{1/2^k}).(a_{2^k+1}a_{2^k+2}a_{2^k+3} \ldots\ldots a_{2^{k+1}})^{1/2^k}))^{1/2}$$

$$\geq ((a_1a_2 \ldots\ldots a_{2^k} \cdot a_{2^k+1}a_{2^k+2}a_{2^k+3} \ldots\ldots a_{2^{k+1}})^{1/2^k}))^{1/2}$$ যেহেতু দুটি সংখ্যার ক্ষেত্রে A> = G ।

$\geq (a_1 a_2 \ldots\ldots a_{2^k} . a_{2^k+1} a_{2^k+2} a_{2^k+3} \ldots\ldots a_{2^{k+1}})^{1/2^{k+1}}$ । এখানে সংখ্যাগুলি সমান হলে, " = " চিহ্ন প্রযুক্ত হবে।

অতএব প্রমাণিত হল যে $A >= G$

অসমতাটি 2^k -এর জন্য সত্য হলে 2^{k+1} জন্যও সত্য। আরোহ (ইনডাকসন) যুক্তির সাহায্যে প্রমাণিত যে $n = 2^m$ হলে (যেখানে m যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা) $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n > (a_1 a_2 \ldots\ldots a_n)^{1/n}$

এবং $(a_1 = a_2 = \ldots = a_n)$ হলে $(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)/n = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n}$

এবারে আমরা n, 2^m এর সমান না হলেও প্রতিপাদ্যটি যে সত্য তা প্রমাণ করব।

পর্ব - 2) মনেকরি 2^m আকারের নয়।

এক্ষেত্রে এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা m বাছা হল যাতে $2^m > n$ যেখানে $m > 1$ হয়।

মনে করি প্রদত্ত $a_1, a_2, \ldots a_n$ সংখ্যাগুলির জ্যামিতিক মধ্যক হল G এবং $a_1, a_2, \ldots a_n$ সংখ্যাগুলির সাথে আরও $2^m - n$ সংখ্যক G নিয়ে মোট 2^m সংখ্যক সংখ্যা নেওয়া হল, যারা $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$, G, G.G .... G।

এখন আগের অংশ ব্যবহার করে বলা যায়

$$\{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + (2^m - n)G\}/2^m \geq \{(a_1 a_2 \ldots a_n)G^{2^m - n}\}^{1/2^m} = \{(G^n G^{2^m - n})\}^{1/2^m} = G$$

{যেহেতু $\{(a_1 a_2 \ldots a_n) = G^n\}$

অতএব, $\{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (2^m - n)G\} \geq 2^m G$, অথবা $(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n) \geq nG$,

অথবা $(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)/n >= G$, যেখানে সংখ্যাগুলি সমান হলে "=" চিহ্ন প্রযুক্ত।

অতএব উপরের পর্ব-১ এবং পর্ব-২ মিলে প্রমাণিত হল, n যে কোনও ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হলে $A \geq G$

এখন আমরা প্রমাণ করব যে $G \geq H$

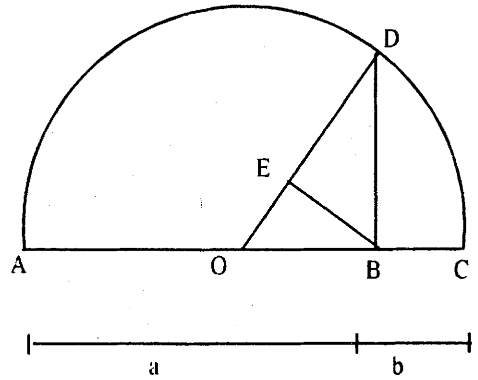
পর্ব-3) $G \geq H$ -এর প্রমাণ।

আমরা জানি $(1/H) = (1/a_1, 1/a_2, \ldots\ldots 1/a_n)$ -এর সমান্তর মধ্যক $\geq (1/a_1, 1/a_2, \ldots 1/a_n)$ -এর গুণত্তর মধ্যক $= (1/a_1 . 1/a_2 \ldots\ldots 1/a_n)^{1/n} \geq (a_1 . a_2 \ldots a_n)^{-1/n} = (1/G)$

অতএব $G \geq H$ যেখানে সংখ্যগুলি সমান হলে "=" চিহ্ন প্রযুক্ত হবে।

সুতরাং n যেকোন ধনাত্মক অখণ্ডসংখ্যা হলে $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ জন্য প্রমাণিত হল- $A \geq G \geq H$ ।

মন্তব্য- দুটি সংখ্যার ক্ষেত্রে মধ্যক অসমতাটি জ্যামিতির সাহায্যেও প্রমাণ করা যায়। খৃষ্টপূর্ব 320 সালে আলেকজান্দ্রিয়ার গণিতজ্ঞ প্যাপাস প্রমাণটি দিয়েছিলেন। প্রমাণটি হল-



O কেন্দ্র বিশিষ্ট AC=a+b ব্যাসের উপর একটি অর্ধবৃত্ত আঁকা হল যেখানে AB = a, BC = b। এখানে BC-র উপর BD লম্ব টানা হল যা পরিধিকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। B থেকে OD-র উপর BE লম্ব টানা হল।

এখন, $OD = (a+b)/2,\ BD = (a.b)^{1/2}, DE = 2/(1/a+1/b)$

প্রমাণ : $BD^2 = AB \times BC$

এবং $\dfrac{OD}{BD} = \dfrac{BD}{DE}$ বা $\dfrac{OD}{BD^2} = \dfrac{1}{DE}$

$$\therefore DE = \frac{BD^2}{OD} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

যেহেতু OD > BD > DE অতএব দুটি সংখ্যা a,b ক্ষেত্রে প্রমাণিত হল

সমান্তর মধ্যক > গুণোত্তর মধ্যাক > বিপরীত মধ্যক।

উদাহরণ 1. a, b, x, y ধনাত্মক হলে দেখান যে $(ax+by)(ab+xy) \geq 4abxy$

সমাধান : এখানে ax, by সংখ্যাগুলিকে নিয়ে $A \geq G$ ব্যবহার করলে পাই

$$\frac{ax+by}{2} \geq \sqrt{abxy}$$

আবার ab, xy-কে নিয়ে $A \geq G$ করলে পাই $\frac{ab+xy}{2} \geq \sqrt{abxy}$

অসমতাটি গুণ করে $(ax+by)(ab+xy) \geq 4abxy$

উদাহরণ 2. যদি x,y,z ধনাত্মক সংখ্যা এবং $x+y+z=1$ হয়, তবে প্রমাণ করুন

$8xyz \leq (1-x)(1-y)(1-z) \leq 8/27$

সমাধান : এখানে $1-x = y+z,\ 1-y = z+x,\ 1-z = x+y$

$\therefore\ (1-x)(1-y)(1-z) = (y+z)(z+x)(x+y)$

কিন্তু $x+y \geq 2\sqrt{xy},\ y+z \geq 2\sqrt{yz},\ z+x \geq 2\sqrt{zx}$

$\therefore\ (1-x)(1-y)(1-z) = (y+z)(z+x)(x+y) \geq 8xyz$......... (i)

আবার $(1-x),(1-y),(y-z)$ নিয়ে $A \geq G$ ব্যবহার করলে পাই

$$\frac{1-x+1-y+1-z}{3} \geq \left[(1-x)(1-y)(1-z)\right]^{\frac{1}{3}}$$

বা $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \geq (1-x)(1-y)(1-z)$ ....(ii)

(i) ও (ii) ব্যবহার করে

$$\frac{8}{27} \geq (1-x)(1-y)(1-z) \geq 8xyz$$

অনুশীলনী : (III)

1. a, b ধনাত্মক হলে দেখান $\sqrt{ab} > \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

2. $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ ধনাত্মক হলে, প্রমাণ করুন : $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}\ldots\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1} \geq n$

3. a, b, c ধনাত্মক। প্রমাণ করুন $a^2b+b^2c+c^2a \geq 3abc$

উদাহরণ 3. যদি a, b, c এই ধনাত্মক সংখ্যাগুলির যে কোন দুটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বড় হয়, তবে দেখান যে

$$(a+b+c)^3 \geq 27(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

সমাধান : a+b–c, b+c–a, c+a–b এই সংখ্যাগুলি নেওয়া হল, যারা প্রত্যেকে প্রশ্নানুসারে ধনাত্মক। এদের $A \geq G$ করলে পাই

$$\frac{(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)}{3} \geq [(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)]^{\frac{1}{3}}$$

বা $\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq [(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)]^{\frac{1}{3}}$

$\therefore\ (a+b+c)^3 \geq 27(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

উদাহরণ 4. n যদি পূর্ণ সংখ্যা হয় এবং $n > 1$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে $n^n > 1.3.5........(2n-1)$

সমাধান : $1, 3, 5...........(2n-1)$ এগুলি সমান্তর শ্রেণীর n সংখ্যক পদ

এবং $1+3+5+........(2n-1) = n^2$

সুতরাং সংখ্যাগুলির ক্ষেত্রে $A > G$ করলে পাই (= সমান চিহ্ন হবে না কারণ পদগুলি সমান নয়)

$$\frac{1+3+5+......(2n-1)}{n} > [1.3.5........(2n-1)]^{\frac{1}{4}}$$

বা $(n)^n > 1.3.5..........(2n-1)$

উদাহরণ 5. দেখান যে n-ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে

$(1^r+2^r+.........+n^r) > n^n(n!)^r$, যেখানে $r > 0$.

সমাধান : $r > 0$, $1^r, 2^r,.....n^r$ ধনাত্মক অভিন্ন সংখ্যা, এদের $A > G$

$$\therefore\ \frac{1^r+2^r....+n^r}{n} > (1^r.2^r.3^r.....n^r)^{\frac{1}{n}} = \left[(n!)^r\right]^{\frac{1}{n}}$$

বা $1^r + z^r + ...+n^r > n^n(n!)^r$

উদাহরণ 6. n পূর্ণসংখ্যা হলে প্রমাণ করুন

$$\frac{1}{\sqrt{4n+1}} < \frac{3.7.11......(4n-1)}{5.9.13.........(4n+1)} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}$$

সমাধান : 4n+1,4n–3 সংখ্যা দুটি নিয়ে $A > G$ করলে পাই

$$\frac{4n+1+4n-3}{2} \geq \sqrt{(4n+1)(n-3)} \quad \text{বা, } 4n-1 > \sqrt{(4n+1)(4n-3)}$$

বা, $\dfrac{4n-1}{4n+1} > \sqrt{\dfrac{4n-3}{4n+1}}$

অসমতাটিতে n = 1, 2, ...n বসালে আমরা পাই (যথাক্রমে)

$$\frac{3}{5} > \sqrt{\frac{1}{5}},\ \frac{7}{9} > \sqrt{\frac{5}{9}}, \ldots\ldots\ldots, \frac{4n-1}{4n+1} > \sqrt{\frac{4n-3}{4n+1}}$$

অসমতাগুলি এবার গুণ করে

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdots\cdots\frac{4n-1}{4n+1} > \frac{1}{\sqrt{4n+1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

এবাব 4n–1, 4n+3 অভিন্ন সংখ্যাগুলি নিয়ে A > G ব্যবহার করে

$$\frac{4n-1+4n+3}{2} > \sqrt{(4n-1)(4n+3)}$$

বা, $4n+1 > \sqrt{(4n-1)(4n+3)}$

বা, $\dfrac{4n+1}{4n-1} > \sqrt{\dfrac{4n+3}{4n-1}}$ (4n–1 দিয়ে ভাগ করে)

এখানে n = 1,2,3,.......n বসালে পাই

$$\frac{5}{3} > \sqrt{\frac{7}{3}},\ \frac{9}{7} > \sqrt{\frac{11}{7}},\ \frac{13}{11} > \sqrt{\frac{15}{11}}, \ldots\ \frac{4n+1}{4n-1} > \sqrt{\frac{4n+3}{4n-1}}$$

এই n-সংখ্যক অসমতা গুণ করে পাই

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{13}{11}\cdots\cdots\frac{4n+1}{4n-1} > \frac{\sqrt{4n+3}}{\sqrt{3}}$$

বা, $\dfrac{3.7.11\ldots\ldots\ldots(4n-1)}{5.9.13\ldots\ldots\ldots\ldots(4n+1)} < \sqrt{\dfrac{3}{4n+3}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$

(i) (ii) থেকে : $\dfrac{1}{\sqrt{4n+1}} < \dfrac{3.7.11\ldots\ldots\ldots(4n-1)}{5.9.13\ldots\ldots\ldots(4n+1)} < \sqrt{\dfrac{3}{4n+3}}$

অনুশীলনী : IV :

1. যদি n পূর্ণসংখ্যা হয় তবে প্রমাণ করুন : $(n!)^3 < n^n\left\{\dfrac{n+1}{2}\right\}^{2n}$

2. n পূর্ণসংখ্যা এবং a, b ধনাত্মক হলে দেখান যে

$$\left(ab^n\right)^{\frac{1}{n+1}} \le \frac{a+nb}{n+1}$$

3. a,b,c ধনাত্মক এবং $abc = k^3$ হলে, প্রমাণ করুন যে

$$(1+a)(1+b)(1+c) > (1+k)^3$$

4. n-ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে দেখান যে

$$(n+1)^{n-1}(n+2)^n > 3^n(n!)^2$$

5. $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ ধনাত্মক সংখ্যাগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকলে প্রমাণ করুন যে —

(i) $a_1 . a_2 . \ldots . a_3 \ldots\ldots a_n < \left(\dfrac{a_1+a_n}{2}\right)^n$

(ii) $(a_1+a_2)(a_2+a_3)\ldots\ldots\ldots(a_{n-1}+a_n) < (a_1+a_n)^{n-1}$

6. $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ ধনাত্মক সংখ্যাগুলি বিপরীত প্রগতিতে থাকলে,

প্রমাণ করুন $a_1+a_2 \ldots\ldots + a_n > 2n\dfrac{a_1 a_n}{a_1+a_n}$

7. a, b, c ধনাত্মক সংখ্যা যাদের যে কোনও দুটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বড়।

প্রমাণ করুন $abc \ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

8. a, b, c, d ধনাত্মক সংখ্যাগুলি এমন যে কোনও তিনটির সমষ্টি চতুর্থটির দ্বিগুণের অপেক্ষা বড়।

প্রমাণ করুন যে,

abcd $(b+c+d-2a)(c+d+a-2b)(d+a+b-2c)(a+b+c-2d)$

অনুসিদ্ধান্ত মধ্যকের অসমতা উপপাদ্য থেকে বলা যায় যদি $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ধনাত্মক সংখ্যা গুলি সমান হলে $A = G = H$ হবে। সুতরাং যদি $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ ধ্রুবক হয় তবে যেহেতু $(k/n) \ge (x_1 \ldots x_n)^{1/n}$

অতএব, $x_1 x_2 x_n$ সংখ্যার গুনোত্তর মধ্যকের মান বৃহত্তম হবে, যখন $x_1 = x_2 = \cdots\cdots x_n = k/n$। অর্থাৎ, $x_1 x_2 x_n$ গুণফলটির বৃহত্তম মান $(k/n)^n$ হবে।

যদি $x_1 x_2 x_n = k$ ধ্রুবক হয় তবে যেহেতু $(x_1+x_2+\ldots+x_n)/n \ge k^{1/n}$, অতএব $x_1, x_2, \cdots, x_n$ সংখ্যার সমান্তর মধ্যকের মান ক্ষুদ্রতম, যখন $x_1 = x_2 = \cdots\cdots x_n$। অর্থাৎ, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ গুণযোগফলটির ক্ষুদ্রতম মান $nk^{1/n}$ হবে।

মন্তব্য — কোনও গাণিতিক রাশির ক্ষুদ্রতম বা বৃহত্তম মান নির্ণয়ে, অনেক সময় এই অনুসিদ্ধান্তটি ব্যবহার করা হয়।

উদাহরণ : 7 প্রমাণ করুন, যে সম পরিসীমা যুক্ত ত্রিভুজগুলির মধ্যে সমবাহু ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল বৃহত্তম।

সমাধান - মনেকরি ত্রিভুজের বাহুগুলি a, b, c অতএব পরিসীমা $a + b + c = 2s =$ ধ্রুবক।

আমরা জানি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \{s(s-a)(s-b)(s-c)\}^{1/2}$

ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হতে হলে $(s-a)(s-b)(s-c)$ বৃহত্তম হবে।

$(s-a)+(s-b)+(s-c) = s =$ ধ্রুবক।

সুতরাং $(s-a) = (s-b) = (s-c)$ হলে, অর্থাৎ $a = b = c$ হলে $(s-a).(s-b).(s-c)$ বৃহত্তম হবে।

অতএব সমবাহু ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল বৃহত্তম। প্রমাণিত হল।

উদাহরণ : 8. x,y,z ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং $xy+yz+zx = 12$ হলে $x.y.z$ -র বৃহত্তম মান নির্ণয় করুন।

সমাধান - $x.y.z$ বৃহত্তম হবে যদি $(xy).(yz).(zx) = (x.y.z)^2$ বৃহত্তম হয়। এখানে যেহেতু

$xy + yz + zx = 12$ ধ্রুবক,

আমরা জানি $(xy) = (yz) = (zx)$ হলে, অর্থাৎ, $x = y = z$ হলে $(x.y.z)^2$ বৃহত্তম হয়।

$xy+yz+zx = 12$ থেকে আমরা পাই $x = y = z = 2$

অতএব $x.y.z$ এর বৃহত্তম মান হল $2^3=8$.

অনুশীলনী (i) : x,y,z ধনাত্মক এবং $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ হলে

প্রমাণ করুন যে $x^2+y^2+z^2$-এর ক্ষুদ্রতম মান 27.

সমাধান : $x^2+y^2+z^2$-এর ক্ষুদ্রতম মান হবে $3(x^2y^2z^2)^{1/3}$ যখন $x = y = z$

যেহেতু $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, $x = y = z$ ধরলে $x = y = z = 3$

এখন $G \geq H$ করে পাই $(xyz)^{1/3} \geq \dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = 3$

$\therefore$ $x^2+y^2+z^2$-এর ক্ষুদ্রতম মান $= 3(x^2y^2z^2)^{1/3} = 3 \cdot 9 = 27$.

অনুশীলনী (ii) : প্রমান করুন যে, কোন বৃত্তস্থ আয়তক্ষেত্রগুলির মধ্যে, বৃত্তস্থ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল বৃহত্তম।

সমাধান : আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলি a, b হলে $a^2+b^2 = r^2$, যেখানে r = ব্যাসার্ধ ; ক্ষেত্রফল = ab হল a^2, b^2 এর G । আবার G এর বৃহত্তম মান হল $\frac{a^2+b^2}{2}$ যেখানে a = b অর্থাৎ আয়তক্ষেত্রটি বর্গক্ষেত্র হবে।

1.4.2 ভারযুক্ত মধ্যক

এখানে আমরা মধ্যকগুলির সাম্যানীকৃত সংজ্ঞা দেব। এবং উপপাদ্যের সাহায্যে দেখাব, এক্ষেত্রেও মধ্যকগুলি একই রকম অসমতা সিদ্ধ করে।

মনে করি $a_1, a_2, \ldots a_n$ ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যাগুলির সাথে $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ধনাত্মক মূলদ সংখ্যাগুলি দেওয়া আছে।

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ ভারগুলির সাপেক্ষে $a_1, a_2, \ldots, a_n$ সংখ্যাগুলির বিভিন্ন মধ্যকগুলির সংজ্ঞা হল

সমান্তর মধ্যক = $(p_1a_1+p_2a_2+\ldots p_na_n)/(p_1+p_2+\ldots p_n) = A(a,p)$

$p_1p_2-p_n$ পূর্ণসংখ্যা ধরে প্রথমে প্রমাণ করুন পরে rational সংখ্যার জন্য দেখা যেতে পারে।

গুণোত্তর মধ্যক $= (a_1^{p_1}.a_2^{p_2}\ldots a_n^{p_n})^{1/(p_1+p_2+p_n)} = G(a,p)$

বিপরীত মধ্যক $= (p_1+p_2+\ldots p_n)/\{p_1/a_1)+(p_2/a_2)+\ldots(p_n/a_n)\} = H(a,p)$.

উপপাদ্য 3 : A(a,p)>=G(a,p)>=H(a,p)

প্রমাণ : আমরা এখানে $A(a,p) \geq G(a,b)$ প্রমাণ করব। প্রথমত মনে করি $p_1, p_2, \ldots p_n$ এগুলি n সংখ্যক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

p_1 সংখ্যক a_1, p_2 সংখ্যক a_2 , p_n সংখ্যক a_n এইভাবে মোট $p_1+p_2+\ldots p_n$ সংখ্যক বাস্তব সংখ্যা নেওয়া হল।

এখন, সমান্তর মধ্যক >= গুণোত্তর মধ্যক সম্বন্ধটি ব্যবহার করলে আমরা পাই

$$\frac{(a_1+a_1+\ldots p_1 \text{ সংখ্যক } a_1) + (a_2+a_2+\ldots p_2 \text{ সংখ্যক } a_2)+\ldots(a_n+a_n+\ldots p_n \text{ সংখ্যক } a_n)}{p_1+p_2+\ldots\ldots+p_n}$$

$$>= \{(a_1\ a_1\ldots p_1 \text{ সংখ্যক } a_1)\ (a_2\ a_2\ldots p_2 \text{ সংখ্যক } a_2)\ \ldots(a_n\ a_n\ldots p_n \text{ সংখ্যক } a_n)\}^{1/(p_1+p_2+\ldots+p_n)}$$

অথবা $$\frac{p_1a_1+p_2a_2+\ldots+p_na_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n} >= \left\{\left(a_1^{p_1}\right)\cdot\left(a_2^{p_2}\right)\ldots\left(a_n^{p_n}\right)\right\}^{1/(p_1+p_2+\ldots+p_n)}$$

অথবা $A(a,p)>=G(a,p)$। এক্ষেত্রে স্পষ্টতই বলা যায় $a_1 = a_2 = \ldots a_n$ হলে "=" চিহ্নটি ব্যবহৃত হবে।

দ্বিতীয়ত মনেকরি $p_1, p_2, \ldots, p_n$ এগুলি n সংখ্যক ভগ্নাংশ। এক্ষেত্রে ধরি এগুলির হর গুলির ল.সা.গু. d

এখন $p_1d, p_2d \cdots p_nd$ এগুলি n সংখ্যক ধনাত্মক অখণ্ডসংখ্যা। অতএব প্রথম সিদ্ধান্তটি ব্যবহার করলে পাই

$$\frac{a_1(p_1d)+a_2(p_2d)+\ldots+a_n(p_nd)}{p_1d+p_2d+\ldots+p_nd} >= \left\{\left(a_1^{p_1d}\right).\left(a_2^{p_2d}\right)\ldots\ldots\left(a_n^{p_nd}\right)\right\}^{1/(p_1d+p_2d+\ldots+p_nd)}$$

অথবা $$\frac{p_1a_1+p_2a_2+\ldots\ldots p_na_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n} >= \left\{\left(a_1^{p_1}\right).\left(a_2^{p_2}\right)\ldots\ldots\left(a_n^{p_n}\right)\right\}^{1/(p_1+p_2+\ldots+p_n)}$$

অথবা $A(a, p) >= G(a, p)$। এক্ষেত্রে স্পষ্টতই বলা যায় $a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_n$ হলে "=" চিহ্নটি ব্যবহৃত হবে। প্রমাণিত

আপনি এবারে অনুশীলনী হিসাবে $\frac{1}{1+(a,b)} = p_1, p_2 \ldots p_n$ ভারযুক্ত $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \ldots, \frac{1}{a_n}$ এর সমান্তর মধ্যক $\geq \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \ldots, \frac{1}{a_n}$ গুণোত্তর মধ্যক ব্যবহার করুন এবং এইভাবে $G(a,b) \geq H(a,b)$ প্রমাণ করুন।

এবারে সামান্যিকৃত মধ্যকের অসমতা ব্যবহার করে একটি উল্লেখযোগ্য অসমতা প্রমাণ করা হবে।

উপপাদ্য ৪- যদি $a \neq 1$ একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং m একটি মূলদ সংখ্যা হয়, তাহলে

(i) যখন $m < 0$ বা $m > 1$ তখন $a^m-1 > m(a-1)$ হবে;

(ii) কিন্তু যখন $0 < m < 1$ তখন $a^m-1 < m(a-1)$ হবে।

প্রমাণ - পর্ব (i) প্রথমত মনে করি $m > 1$। যেহেতু $a > 0$, $a \neq 1$ আমরা $a^m, 1$ এই দুটি সংখ্যা নিলাম যাদের ভার যথাক্রমে $1, m-1$। এখন উপরের উপপাদ্য ব্যবহার করলে পাই,

$\{a^m.1+1(m-1)\}/(1+m-1)>\{(a^m)^1.(1)^{m-1}\}^{1/(1+m-1)}$ বা, $(a^m+m-1)>ma$, বা, $a^m-1>m(a-1)$

দ্বিতীয়ত মনে করি $m < 0$, সুতরাং $1-m>1$ হয়। যেহেতু $1/a>0$ এবং 1 এর সমান নয়, অতএব

$(1/a)^{1-m} - 1>(1-m).\{(1/a)-1\}$, বা $(a^m/a)-1>(1-m)(1-a)/a$

বা $a^m>(1-m)(1-a)+a = 1-m+ma$, বা $a^m-1>m(a-1)$ । প্রমাণিত।

পর্ব (ii) - এক্ষেত্রে m মূলদ এবং $0 < m < 1$। আমরা a, 1 এই দুটি সংখ্যা নিলাম যাদের ভার যথাক্রমে $m, 1-m$ ।

সমান্তর মধ্যক > গুণোত্তর মধ্যক ব্যবহার করে পাই,

$\{a.m+1.(1-m)\}/(m+1-m) > \{a^m.1^{1-m}\}^{1/(m+1-m)}$

বা $am+1-m > a^m$, বা $m(a-1) > a^m-1$, বা $a^m-1< m(a-1)$। প্রমাণিত।

উদাহরণ : 9. যদি a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 পাঁচটি ধনাত্মক সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করুন যে

$$\left\{\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\right\}^5 \geq \left\{\frac{a_1+a_2}{2}\right\}^2 \left\{\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right\}^3$$

সমাধান : $\frac{a_1+a_2}{2}$ ও $\frac{a_3+a_4+a_5}{3}$ সংখ্যাদুটিকে যথাক্রমে 2, 3 ভারযুক্ত করে $A \geq G$ করলে পাই

$$\text{বা, } \frac{2\frac{(a_1+a_2)}{2}+3\frac{(a_3+a_4+a_5)}{3}}{5} \geq \left\{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2\left(\frac{a_3+a_4+a_5}{3}\right)^3\right\}^{1/5}$$

$$\text{বা, } \left\{\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\right\} \geq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2\left(\frac{a_3+a_4+a_5}{3}\right)^3 \text{ প্রমাণিত}$$

উদাহরণ 10. $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n$ ধনাত্মক এবং $s = a_1 + a_2, \ldots\ldots\ldots + a_n$ হলে, প্রমাণ করুন

$$a_1^{a_1}\, a_2^{a_2} \ldots\ldots a_n^{a_n} \geq \left(\frac{s}{n}\right)^s$$

সমাধান : $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n$ সংখ্যাগুলিকে যথাক্রমে $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n$ ভারযুক্ত করে $G \geq H$ নিলে পাই।

$$\left(a_1^{a_1} a_2^{a_2} \ldots . a_n^{a_n}\right)^{\frac{1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}} \geq \frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{\frac{a_1}{a_1}+\frac{a_2}{a_2}+\ldots .+\frac{a_n}{a_n}}$$

$$\text{বা } \left(a_1^{a_1} a_2^{a_2} \ldots . a_n^{a_n}\right)^{\frac{1}{s}} \geq \frac{s}{n}, \text{ অর্থাৎ } a_1^{a_1} a_2^{a_2} \ldots\ldots a_n^{a_n} \geq \left(\frac{s}{n}\right)^n \text{ প্রমাণিত।}$$

অনুশীলনী V

1. $a_1, a_2, \ldots . a_n$ ধনাত্মক হলে দেখান $\left\{\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{n}\right\}^n \geq a_n \left\{\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{n-1}}{n-1}\right\}^{n-1}$

2. যদি x,y ধনাত্মক, $x+y = 1$ এবং $a \neq b$ হয় তবে দেখান যে $a^x b^y < ax+by$

3. x,y,z ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা হলে দেখান যে

$$\left\{\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right\}^{x+y+z} \geq x^x y^y z^z \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{x+y+z}$$

4. x, y, z ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা এবং $x > y$ হলে দেখান $(x+y)^{x+y}(x-y)^{x-y} > x^{2x}$

5. $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ ধনাত্মক এবং $s = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$ হলে প্রমাণ করুন যে

$$\left(\frac{s}{a_1}-1\right)^{a_1}\left(\frac{s}{a_2}-1\right)^{a_2}\ldots\left(\frac{s}{a_n}-1\right)^{a_n} \leq (x-1)^s$$

উদাহরণ : 11. যদি $x > -1$, $x \neq 0$ এবং m মূলদ সংখ্যা হয় তবে দেখান যে

$(1+x)^m >$ বা $< 1+mx$, যখন m যথাক্রমে (0,1) এর মধ্যে অবস্থিত নয় বা (0,1)-এর মধ্যে অবস্থিত।

সমাধান : ধরুন $a = x+1$, $\therefore a > 0$ এবং $a \neq 1$ কারণ $x > -1$ এবং $x \neq 0$

$\therefore a^m-1 >$ বা $< m(a-1)$ যখন m, (0,1) এর বাইরে বা ভিতরে

$\therefore (1+x)^m >$ বা $< mx + 1$ " " "

উদাহরণ : 12. x,y ধনাত্মক এবং m মূলদ সংখ্যা হলে প্রমাণ করুন

$x^m y^{1-m} \leq mx+(1-m)y$ যদি $0 < m < 1$.

$x^m y^{1-m} \geq mx+(1-m)y$ যদি $m > 1$ বা $m < 0$ হয়।

সমাধান : ধরুন $a = \frac{x}{y}$ $\therefore a > 0$ এবং $x \neq y$ হলে $a \neq 1$

$\therefore a^m-1 >$ বা $< m(a-1)$ যদি যথাক্রমে $0 < m < 1$ অথবা $m < 0$ বা $m > 1$.

$x^m y^{-m}-1 > < \frac{m}{y}(x-y)$ " " "

$x^m y^{1-m} >$ বা $< mx + (1-m)y$ " " " প্রমাণিত।

আবার $x = y$ হলে $x^m y^{1-m} = x = mx + x - mx = mx + (1-m)y$ প্রমাণিত।

অনুশীলনী (vi) :

(1) যদি $x < 1$, $x \neq 0$ এবং m মূলদ সংখ্যা হয়, তবে দেখান যে

$(1-x)^m >$ বা $< 1-mx$, যখন m যথাক্রমে (0,1) অন্তরালের মধ্যে অবস্থিত নয় অথবা ভিতরে অবস্থিত।

(2) যদি $x \neq y$, $x, y > 0$ এবং m মূলদ সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করুন

$mx^{m-1}(x-y) \gtrless x^m - y^m \gtrless xy^{m-1}(x-y)$ হবে, যখন m যথাক্রমে (0,1) এর ভিতরে নয় অথবা ভিতরে।

(3) যদি n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়,তবে প্রমাণ করুন $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

(4) যদি m,n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় এবং m < n হয়, তবে প্রমাণ করুন

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

উপপাদ্য 5 :

যদি $\{a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n\}$ **একটি n সংখ্যক ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট হয় যেখানে a_i গুলি সকলে সমান** নয় এবং m যদি কোন মূলদ সংখ্যা হয়, তাহলে

$\left\{a_1^{\,m} + a_2^{\,m} + \ldots\ldots + a_n^{\,m}\right\} / n > \left\{(a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_n)/n\right\}^m$ **যখন m < 0 বা m > 1 । এবং**

$\left\{a_1^{\,m} + a_2^{\,m} + \ldots + a_n^{\,m}\right\} / n < \left\{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n\right\}^m$ **যখন 0 < m < 1।**

প্রমাণ ঃ ধরি $(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)/n = A$, অতএব $a_1/A, a_2/A, \ldots, a_n/A$ এরা ধনাত্মক এবং সকলে 1-এর সমান নয়। সুতরাং **উপপাদ্য 4** ব্যবহার করলে পাই

$(a_1/A)^m - 1 > m\{(a_1/A) - 1\}$ যখন $m < 0$ বা $m > 1$ । এবং $(a_1/A)^m - 1 < m\{(a_1/A) - 1\}$ যখন $0 < m < 1$।

অনুরূপভাবে $(a_2/A)^m - 1 > m\{(a_2/A) - 1\}$ যখন $m < 0$ বা $m > 1$ । এবং

$(a_2/A)^m - 1 < m\{(a_2/A) - 1\}$ যখন $0 < m < 1$ ।

অনুরূপভাবে $(a_n/A)^m - 1 > m\{(a_n/A) - 1\}$ যখন $m < 0$ বা $m > 1$ । এবং

$(a_n/A)^m - 1 < m\{(a_n/A) - 1\}$ যখন $0 < m < 1$ ।

n সংখ্যক অসমতাগুলি যোগ করে পাই

$(a_1/A)^m + (a_2/A)^m + \ldots\ldots + (a_n/A)^m - n > m\left\{(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)/A - n\right\} = 0$ যখন

$m < 0$ বা $m > 1$ । এবং

$(a_1/A)^m + (a_2/A)^m + \ldots\ldots + (a_n/A)^m - n < m\left\{(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)/A - n\right\} = 0$ যখন

$0 < m < 1$

অর্থাৎ $\{ a_1^m + a_2^m + \ldots\ldots + a_n^m \} / A^m > n$ যখন $m < 0$ বা $m > 1$। এবং

$\{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m\} / A^m < n$ যখন $0 < m < 1$।

অর্থাৎ $\{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m\} / n > \{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n\}^m$ যখন $m < 0$ বা $m > 1$। এবং

$\{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m\} / n < \{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n\}^m$ যখন $0 < m < 1$।

প্রমাণিত হল

অনু : (a) a,b,c ধানত্মক সংখ্যাগুলি বিপরীত প্রগতিতে থাকলে প্রমাণ করুন $a^4 + c^4 > 2b^4$, যেখানে n পূর্ণসংখ্যা হবে।

অনুসিদ্ধান্ত : উপপাদ্য 4 এর অসমতাটি আমরা নিম্নলিখিত ভাবেও বলতে পারি-

যদি $\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$ একটি n সংখ্যক ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট হয় যেখানে a_i গুলি সকলে সমান নয় এবং m যদি কোন মূলদ সংখ্যা হয়, তাহলে

$\{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m\} / n \geq$ বা $\leq \{(a_1 + a_2 + \ldots a_n)/n\}^m$

যখন $m < 0$ বা $m > 1$ অথবা $0 < m < 1$।

$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ হলে "=" চিহ্নটি প্রযুক্ত হবে।

সুতরাং, যদি $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$ ধ্রুবক হয় তাহলে যখন $m < 0$ বা $m > 1$ তখন

$a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m$ এর নিম্নতম মান হবে $k^m . n^{1-m}$ এবং যখন $0 < m < 1$ তখন, $a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m$ এর বৃহত্তম মান $k^m . n^{1-m}$ হবে। $nk^{1/n}$ হবে।

(কারণ $a_1 = a_2 = a_n = k/n$)

উদাহরণ: 13 $(1/x) + (1/y) + (1/z)$ **এর নিম্মতম মান নির্ণয় করুন, যখন x,y,z ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা** এবং x+y+z = 27 ।

সমাধান : এখানে $(1/x) + (1/y) + (1/z) = x^m + y^m + z^m$ যেখানে $m = -1 < 0$, অতএব x=y=z হলে $(1/x) + (1/y) + (1/z)$-এর নিম্নতম মান নির্ণয় করা যাবে। কিন্তু $x + y + z = 27$ থেকে পাই

x = y = z = 9। অতএব নির্ণেয় নিম্নতম মান হল $(1/9) + (1/9) + (1/9) = 1/3$.

উদাহরণ: 14. যদি a.b,c,d ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয় তবে প্রমাণ করুন যে

$$\frac{3}{b+c+d}+\frac{3}{c+d+a}+\frac{3}{d+a+b}+\frac{3}{a+b+c}\geq\frac{16}{a+b+c+d}$$

সমাধান—মনে করি,

$$a_1 = (b+c+d)/3, a_2=(c+d+a)/3,\ \ a_3=(c+d+a)/3, a_4=(c+d+a)/3$$

এখন m= −1 ধরলে আমরা পাই $\left(a_1^{-1}+a_2^{-1}+a_3^{-1}+a_4^{-1}\right)/4>\{(a_1+a_2+a_3+a_4)/4\}^{-1}$

অথবা,

$$\frac{3}{b+c+d}+\frac{3}{c+d+a}+\frac{3}{d+a+b}+\frac{3}{a+b+c}>$$

$$4\left[\left\{\frac{b+c+d}{3}+\frac{c+d+a}{3}+\frac{d+a+b}{3}+\frac{a+b+c}{3}\right\}\Big/4\right]^{-1}$$

বা, $\{3/(b+c+d)\}+\{3/(c+d+a)\}+\{3/(d+a+b)\}+\{3/(a+b+c)\}>16/(a+b+c+d)$

$a_1=a_2=a_3=a_4$ হলে অর্থাৎ $a = b = c = d$ হলে "=" চিহ্ন প্রযুক্ত হবে।

অনুশীলনী (vii)

1. $a_1, a_2 .....a_n$ এই ধনাত্মক সংখ্যাগুলি যদি সমান্তর শ্রেণীতে থাকে দেখান যে

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+........+\frac{1}{a_n}>\frac{2n}{a_1+a_n}$$

2. যদি $a_1, a_2....a_n$ ধনাত্মক সংখ্যা, $p > q > 0$ এবং p,q মূলদ সংখ্যা হয়, তবে দেখান

$\left(a_1^q+a_2^q+....a_n^q\right)^p<n^{p-q}\left(a_1^p+a_2^p+..\ a_n^p\right)^q$ ।

1.5 কশি-সোয়ার্জের অসমতা (Cauchy Schwarz Inequality)

বিখ্যাত ফরাসি গণিতজ্ঞ কশি এই অসমতাটি প্রথম দেখান এবং পরে জার্মান গণিতজ্ঞ সোয়ার্জ এটিকে সামান্যিকরণ করেন। রাশিয়ান গণিতজ্ঞ বুনিয়াকভ্স্কি ও অসমতাটিকে স্বাধীনভাবে প্রমাণ করেন। অন্তর-গুণন দেশ (Inner-product Space), গণিতের বিভিন্ন শাখা এবং পদার্থবিদ্যায় এই অসমতাটি নানা ভাবে ব্যবহার করা হয়। আপনি এই অসমতাটি উপপাদ্য ৬-এ জানতে পারবেন।

উপপাদ্য 6 - যদি $a_1, a_2, \ldots a_n$ এবং $b_1, b_2, \ldots b_n$ দুটি n সংখ্যক বাস্তব সংখ্যার সেট হয়, তবে

$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$;

যখন $a_i = kb_i; i = 1, 2, \ldots n$ জন্য এবং k একটি বাস্তব ধ্রুবক তখন, "=" চিহ্নটি প্রযুক্ত হবে

প্রমাণ : প্রথমত যদি $a_i = kb_i; i = 1,2, \ldots n$ হয় তবে

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 = k^2(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)k^2(a_1^2 + a_2^2 + a_n^2)$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2).(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$ প্রমাণিত।

দ্বিতীয়ত যদি সমস্ত i=1,2,...n এর জন্য যদি a_i ও b_i সমানুপাতিক না হয় অর্থাৎ $a_i \ne kb_i$ হয় তবে ধরি

$$A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2;\ B = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n;\ C = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2$$

এখন, $Ak^2 - 2Bk + C = (a_1k - b_1)^2 + (a_2k - b_2)^2 + \ldots + (a_nk - b_n)^2 > = 0$; k -এর বাস্তব মানের জন্য।

কিন্তু 0 হলে প্রতি $a_ik - b_i$ শূন্য হবে এবং সেক্ষেত্রে a_i, b_i সমানুপাতিক হবে যা সম্ভব নয়।

অতএব k-এর বাস্তব মানের জন্য $Ak^2 - 2Bk + C$ দ্বিঘাত রাশিটি > 0.

আবার স্পষ্টতই $A > 0$; এবং আমরা জানি k -এর বাস্তব সংখ্যা মানের জন্য $Ak^2 - 2BK + C$ দ্বিঘাত রাশিটি > 0 হলে এবং $A > 0$ হলে $Ak^2 - 2Bk + C = 0$ সমীকরণের বীজগুলি কাল্পনিক হবে। অর্থাৎ $B^2 < AC$ হবে, অতএব $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 < (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$, প্রমাণিত হল।

অনুসিদ্ধান্ত : যদি $a_1, a_2, \ldots a_n$; $b_1, b_2, \ldots b_n$ এবং $c_1, c_2, \ldots c_n$ তিনটি n সংখ্যক ধনাত্মক সংখ্যার সেট হয়, তবে

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 \ldots + a_nb_nc_n)^2 < (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)(c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2)$$

এখানে মনে করি $d_i = b_ic_i;\ i = 1,2,\ldots,n$; অতএব কশি অসমতা ব্যবহার করলে পাই

$$(a_1d_1 + a_2d_2 + \ldots + a_nd_n)^2 < (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2),$$

এখন,

$(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)(c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2) = b_1^2c_1^2+b_2^2c_1^2+\ldots\ldots b_n^2c_n^2$ + অন্যান্য ধনাত্মক পদ

$> b_1^2c_1^2+b_2^2c_2^2+\ldots\ldots b_n^2c_n^2 = (d_1^2+d_2^2+\ldots+d_n^2)$;

অতএব,

$$(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2\ldots+a_nb_nc_n)^2 < (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)(c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2)$$

উদাহরণ 1 : যদি a, b, c অসমান ধনাত্মক সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করুন যে

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) > 9$$

সমাধান : ধরি $a_1=a^{3/2}, a_2=b^{3/2}, a_3=c^{3/2}, b_1=a^{-3/2}, b_2=b^{-3/2}, b_3=c^{-3/2}$

কশি সোয়ার্জের অসমতা অনুসারে $\left(a_1^3+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right) > \left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2$,

= চিহ্ন হল না কারণ $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_3}{b_3}$

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) > 3^2 = 9$$

উদাহরণ 2 : যদি a, b, x, y বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে দেখান যে

$$\sqrt{(a-b)^2+(x-y)^2} \le \sqrt{a^2+x^2}\sqrt{b^2+y^2}$$

সমাধান : $(a-b)^2+(x-y)^2 = (a^2+x^2)+(b^2+y^2)-2(ab+xy)$

$$\le (a^2+x^2)+(b^2+y^2)+2|ab+xy|\ldots\ldots\ldots(A)$$

কিন্তু কশি অসমতা অনুযায়ী $(ab+xy)^2 \le (a^2+x^2)(b^2+y^2)$

ধনাত্মক বর্গমূল নিয়ে পাই $|ab+xy| \le \sqrt{(a^2+x^2)(b^2+y^2)}\ldots\ldots\ldots\ldots(B)$

(A) তে (B) বসিয়ে পাই

$$(a-b)^2+(x-y)^2 \le (a^2+x^2)+(b^2+y^2)+2\sqrt{a^2+x^2}\sqrt{b^2+y^2} = \left(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}\right)^2$$

বর্গমূল করে $\sqrt{(a-b)^2+(x-y)^2} \le \sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}$

উদাহরণ 3 : মনে করুন x, y, z ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং $x^3+y^3+z^3=81$। তবে প্রমাণ করুন

$x+y+z \le 9$

সমাধান : $\left(x^{3/2}, y^{3/2}, z^{3/2}\right)$ এবং $\left(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\right)$ সেট দুটি নিয়ে, কশি অসমতা ব্যবহার করলে পাই

$$\left[\left(x^{3/2}\right)^2+\left(y^{3/2}\right)^2+\left(z^{3/2}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{z}\right)^2\right] \geq \left[x^2+y^2+z^2\right]^2$$

$\left(x^3+y^3+z^3\right)(x+y+z) \geq \left(x^2+y^2+z^2\right)$ বা, $81(x+y+z) \geq (x^2+y^2+z^2)^2$...... ..(A)

এবার (x,y,z) ও (1,1,1) সেটদুটি নিয়ে কশি অসমতা ব্যবহার করলে পাই

$(x^2+y^2+z^2)(1^2+1^2+1^2) \geq (x+y+z)^2$ বা $3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$......(B)

(A) ও (B) থেকে পাই $81(x+y+z) \geq \frac{1}{9}(x+y+z)^4$

$\therefore\ x+y+z \leq 9$

উদাহরণ 4 : যদি a_1, a_2, a_3 ; b_1, b_2, b_3 ; c_1, c_2, c_3 ; d_1, d_2, d_3 ; বাস্তব সংখ্যা হয় তবে প্রমাণ করুন

$$(a_1b_1c_1d_1+a_2b_2c_2d_2+a_3b_3c_3d_3)^4 \leq \left(a_1^4+a_2^4+a_3^4\right)\left(b_1^4+b_2^4+b_3^4\right)\left(c_1^4+c_2^4+c_3^4\right)\left(d_1^4+d_2^4+d_3^4\right)$$

সমাধান : $\left(a_1^4+a_2^4+a_3^4\right)\left(b_1^4+b_2^4+b_3^4\right)\left(c_1^4+c_2^4+c_3^4\right)\left(d_1^4+d_2^4+d_3^4\right)$

$$=\left[\left\{\left(a_1^2\right)^2+\left(a_2^2\right)^2+\left(a_3^2\right)^2\right\}\left\{\left(b_1^2\right)^2+\left(b_2^2\right)^2+\left(b_3^2\right)^2\right\}\right]$$

$$\left[\left\{\left(c_1^2\right)^2+\left(c_2^2\right)^2+\left(c_3^2\right)^2\right\}\left\{\left(d_1^2\right)^2+\left(d_2^2\right)^2+\left(d_3^2\right)^2\right\}\right]$$

$$\geq \left(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2\right)^2\left(c_1^2d_1^2+c_2^2d_2^2+c_3^2d_3^2\right)^2 \qquad \text{(কশি অসমতা)}$$

$$=\left[\left(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2\right)\left(c_1^2d_1^2+c_2^2d_2^2+c_3^2d_3^2\right)\right]^2$$

$$\geq \left[\left(a_1b_1c_1d_1+a_2b_2c_2d_2+a_3b_3c_3d_3\right)^2\right]^2=\left(a_1b_1c_1d_1+a_2b_2c_2d_2+a_3b_3c_3d_3\right)^4$$

অনুশীলনী (VII)

1. a,b,x,y বাস্তব এবং $a^2+b^2=1=x^2+y^2$ হলে দেখান যে $|ax+by|\le 1$

2. a,b,c,d বাস্তব সংখ্যা হলে দেখান $(a^2+b^2+1)(c^2+d^2+1)\ge(ac+bd+1)^2$

3. a,b,c,d বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ করুন যে

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(abc+bcd+cda+dab)^2$$

4. $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ এগুলি n-সংখ্যক ধনাত্মক সংখ্যা হলে, প্রমাণ করুন

(i) $(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\ge n^2$

(ii) $n\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\ge(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)^2$

(iii) $n(a_1+a_2+\ldots+a_n)\ge\left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots\ldots+\sqrt{a_n}\right)^2$

5. যদি a, b, c, x, y, z বাস্তব সংখ্যা এবং $a^2+b^2+c^2=1,\ x^2+y^2+z^2=1$ হয় তবে দেখান যে

$$-1\le ax+by+cz\le 1$$

6. মনে করুন k একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $(k\ne 1)$ এবং $\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$, $\{b_1, b_2, \ldots\ldots b_n\}$ দুটি বাস্তব সংখ্যার সেট। তাহলে কি

$$\left(a_1^k+a_2^k+\ldots..+a_n^k\right)\left(b_1^k+b_2^k+\ldots..+b_n^k\right)\ge(a_1b_1+a_2b_2+\ldots..+a_nb_n)^k$$

অসমতাটি, সকল k-এর জন্য সত্য হবে?

উদাহরণ 7 : যদি $a_1, a_2, \ldots.. a_n$; একটি n সংখ্যক ধনাত্মক সংখ্যার সেট হয় যারা প্রত্যেকে সমান নয়, এবং যদি p,q মূলদ সংখ্যা হয়, তবে

$$\left(a_1^{p+q}+a_2^{p+q}+\ldots.a_n^{p+q}\right)/n > \text{বা} < \left\{\left(a_1^p+a_2^p+\ldots.a_n^p\right)/n\right\}.\left\{\left(a_1^q+a_2^q+\ldots.a_n^q\right)/n\right\}$$

হবে, যখন p,q যথাক্রমে সম চিহ্নযুক্ত অথবা বিপরীত চিহ্ন যুক্ত।

এই উপপাদ্যের প্রমাণটি এখানে দেওয়া হল না। এই অসমতাটি কশি অসমতার মতই উল্লেখযোগ্য।

উদাহরণ 5 : যদি a, b, ,c, d ধনাত্মক সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করুন যে

$(a+b+c+d).\{(1/a)+(1/b)+(1/c)+(1/d)\}>16$

সমাধান — এখানে $p = 1$, $q = -1$ (বিপরীত চিহ্নযুক্ত) ধরে উপরের উপপাদ্য ব্যবহার করলে পাই.

$\{(a^1+a^1+....+a^1)/4\}.\{(a^1+a^1+....+a^1)/4\}>\{(a^{1-1}+a^{1-1}+....+a^{1-1})/4=1$

অতএব, $(a+b+c+d).\{(1/a)+(1/b)+(1/c)+(1/d)\}>16$

1.5.1 আপনি এখানে কোন বহু পদ সমীকরণের বীজগুলির অবস্থান প্রসঙ্গে উপরের কশি অসমতার প্রয়োগ লক্ষ করুন।

উপপাদ্য 8. যদি $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2}\ .....+a_n = 0$ সমীকরণটির সমস্ত বীজগুলি বাস্তব হয় তবে তারা

$(-a_1/n) - \{a_1^2 - 2na_2/(n-1)\}^{1/2}(n-1)/n$ ও $(a_1/n) + \left\{a_1^2 - 2na_2/(n-1)\right\}^{\frac{1}{2}}(n-1)/n$ এর মধ্যে থাকবে।

সমাধান : মনে করি সমীকরণটির একটি বীজ α ও অন্যান্য $n-1$ সংখ্যক বীজগুলি হল $x_1, x_2, ...x_{n-1}$ ।

বহুপদ সমীকরণের আলোচনায় আপনারা বীজ ও সহগের সম্বন্ধগুলি শিখেছেন। তা থেকে লেখা যায়

$\alpha + x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} = -a$ অতএব

$(\alpha + a)^2 = (x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})^2 \le (1 + 1 + ... n-1$ পদ$).(x_1^2 + x_2^2 + ...+x_{n-1}^2)$(কশি অসমতা অনুযায়ি)

আবার আমরা জানি $\alpha^2 + x_1^2 + x_2^2 + ...+x_{n-1}^2 = a_1^2 - 2a_2$ (বীজ ও সহগের মধ্যে সম্পর্ক থেকে পাই)

অতএব, $(\alpha + a)^2 \le (n-1).(a_1^2 - 2a_2 - \alpha^2)$, বা $nx^2 + 2a_1x - (n-2)a_1^2 + 2a_2(n-1) \le 0$

বা, $[(-a_1/n) - \{a_1^2 - 2na_2/(n-1)\}^{1/2}(n-1)/n].[(-a_1/n) + \{a_1^2 - 2na_2/(n-1)\}^{1/2}(n-1)/n] \le 0$

অতএব,

$[(-a_1/n) - \{a_1^2 - 2na_2/(n-1)\}^{1/2}(n-1)/n] \le \alpha \le \{(-a_1/n) + \{a_1^2 - 2na_2/(n-1)\}^{1/2}(n-1)/n]$

সুতরাং সমীকরণটির যে কোন বীজের মান উপপাদ্যে প্রদত্ত মানগুলির মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকবে।

1.6 ভারেস্ট্রাসের অসমতা (Weierstrass's Inequalities)

জার্মান গণিতজ্ঞ ভারেস্ট্রাস যাঁকে গণিত বিশ্লেষণ বিদ্যার জনক বলা হয় তিনি এই অসমতাটি দেখান।

উপপাদ্য 9. $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ প্রত্যেকে 1 এর থেকে ছোট n সংখ্যক ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$ হলে

(1) $1 - s_n \le (1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n) < 1/(1+s_n)$ এবং

(2) $1 + s_n \le (1+a_1)(1+a_2)\ldots\ldots(1+a_n) < 1(1-s_n)$ হবে, যেখানে $s_n < 1$।

প্রমাণ : আমরা গাণিতিক ইন্‌ডাকসনের সাহায্যে প্রমাণটি করব।

$n = 1$ হলে $s_1 = a_1$ হবে, সুতরাং $(1-s_1) = (1-a_1)$

আবার যেহেতু $0 < a_1^2, (1-a_1)(1+a_1) < 1$, সুতরাং $1 - a_1 < 1/(1+s_1)$। অতএব উপপাদ্যটির (1) নং অংশ n = 1 জন্য সত্য। এখন মনে করি n = m জন্যও উ(1) নং অংশটি সত্যি, m যেখানে একটি পূর্ণ সংখ্যা। আমরা n = m+1 এর জন্য উপপাদ্যটির (1) নং অংশ সত্যি কিনা দেখব।

এখানে $s_{m+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1} = (a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_m) + a_{m+1} = s_m + a_{m+1}$

এবং মেনে নেওয়া হয়েছে $1/(1+s_m) > (1-a_1)(1-a_2)\ldots\ldots(1-a_m) \ge 1 - s_m$

এখন, $(1-a_2)(1-a_2)\ldots(1-a_m)(1-a_{m+1}) \ge (1-s_m)(1-a_{m+1}) = 1 - (s_m + a_{m+1}) + s_m \cdot a_{m+1}$

$= 1 - s_{m+1} + s_m a_{m+1}$ (যেহেতু $s_{m+1} = s_m + a_{m+1}$)

$> 1 - s_{m+1}$ (যেহেতু $0 < s_m \cdot s_{m+1}$)$\ldots\ldots\ldots(1)$

আবার যেহেতু $1 > 1 - a^2{}_{m+1} = (1-a_{m+1}).(1+a_{m+1})$; $(1-a_{m+1}). < 1/(1+a_{m+1})$; এবং

$1/(1+s_m) > (1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_m)$

অতএব আমরা পাই,

$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_{m+1}) < 1/\{(1+a_{m+1}).(1+s_m)\}$$

$$= 1/\{1 + (a_{m+1} + s_m) + a_{m+1}.s_m\} = 1/(1 + s_{m+1} + a_{m+1} \cdot s_m)$$

$< 1/(1+s_{m+1})\ldots\ldots\ldots(2)$

(1) ও (2) থেকে বলা যায় যে উপপাদ্যটির (1) অংশ n = m+1

এর জন্য সত্যি। অতএব, গাণিতিক ইন্ডাক্শন ব্যবহার করে বলা যায় যে সমস্ত n-র জন্যই উপপাদ্যটির (1) নং অংশ সত্য।

আপনারা এবারে (2)নং অংশটি সত্য দেখিয়ে উপপাদ্যটি প্রমাণ করুন।

উদাহরণ 1. $a_i < 0$, বা $a_i > 1; i = 1,2,\ldots n$ হলে উপরের উপপাদ্যটি কি সত্য হবে? আপনার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিন।

অনুশীলনী : উপপাদ্যটি প্রমাণ করুন।

সমাধান : না। কারণ মনে করি $a_1 = -1,\ a_2 = 2,$ তাহলে $s_2 = -1+2 = 1$

অতএব $1 - s_2 = 0$ কিন্তু $(1-a_1)(1-a_2) = 2(-1) = -2$

অতএব $(1-s_n) \nleq (1-a_1)(1-a_2)$

অনুশীলনী (ix) 1 : $0<a_1 a_2 \ldots a_n < 1$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে

$$1 - a_1 a_2 \ldots\ldots a_n < n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

2. n ধনাত্মক পূর্ণ অংশ হলে, প্রমাণ করুন $\dfrac{1.3.7\ldots\ldots(2^n-1)}{2.4.8\ldots\ldots\ldots 2^n} < \dfrac{2^n}{2^{n+1}-1}$

1.7 অন্যান্য অসমতা সমূহ : উদাহরণ সহযোগে আরও কিছু উল্লেখযোগ্য অসমতার আলোচনা করা হল (Tchebychev's Inequalities) (চেবিচেভ অসমতা)

1.7.1 রাশিয়ান গণিতজ্ঞ চেবিচেভ যিনি সংখ্যাতত্ত্বে অনেক মৌলিক কাজ করেছিলেন। তাঁর দেওয়া নিম্নলিখিত অসমতাগুলি এবার আলোচনা করা হবে।

উপপাদ্য 10. (চেবিচেভ অসমতাসমূহ) : যদি $(a_1, a_2 \ldots a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots b_n)$ দুটি বাস্তব সংখ্যার সেট হয় তবে

(i) যখন $a_1 \le a_2 \le \ldots\ldots\ldots \le a_n$; $b_1 \le b_2 \le \ldots\ldots\ldots b_n$ তখন

$$n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots\ldots + a_n b_n) \ge (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

(ii) যখন $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ldots\ldots \ge a_n$; $b_1 \ge b_2 \ge \ldots\ldots \ge b_n$; তখন

$$n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) \le (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

প্রমাণ : (i) $a_1 \le a_2 \le a_3$; $b_1 \le b_2 \le b_3$ নিয়ে

যেহেতু $a_1 \le a_2$ এবং $b_1 \le b_2$ আমরা পাই $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \ge 0$

$\therefore\ a_1b_1 + a_2b_2 \ge a_1b_2 + a_2b_1$

অনুরূপভাবে $a_2b_2 + a_3b_3 \ge a_2b_3 + a_3b_2$

$a_3b_3 + a_1b_1 \ge a_3b_1 + a_1b_3$

অসমতাগুলি যোগ করলে

$2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \ge a_1(b_2 + b_3) + a_2(b_3 + b_1) + a_3(b_1 + b_2)$

$a_nb_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ দুপক্ষেই যোগ করলে হয়

$3(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots a_3b_3) \ge (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$

সুতরাং $x = 3$-এর জন্য অসমতাটি সত্য প্রমাণিত হল।

এখন অসমতাটি গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি ব্যবহার করে প্রমাণ করা হবে।

মনে করি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা $n = m$ এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য।

$\therefore m(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots + a_nb_n) \ge (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$

এবং আমরা জানি $a_1b_1 + a_{m+1}b_{m+1} \ge a_1b_{m+1} + b_1a_{m+1}$

অনুরূপে $a_2b_2 + a_{m+1}b_{m+1} \ge a_2b_{m+1} + b_2a_{m+2}$

....

$a_mb_m + a_{m+1}b_{m+1} \ge a_mb_{m+1} + b_ma_{m+1}$

সব অসমতাগুলি যোগ করলে পাই

$(m+1)(a_1b_1 + \ldots\ldots a_{m+1}b_{m+1}) - a_{m+1}b_{m+1} \ge (a_1 + \ldots + a_{m+1})(b_1 + \ldots\ldots + b_{m+1}) - a_{m+1}b_{m+1}$

অতএব $(m+1)(a_1b_1 + b_2b_2 + \ldots a_{m+1}b_{m+1}) \ge (a_1 + \ldots + a_{m+1})(b_1 + b_2 + \ldots + b_{m+1})$

সুতরাং উপপাদ্যটি $n = m+1$ এর জন্য সত্য

অতএব গাণিতিক আরোহ যুক্তি দ্বারা বলা যায়, চেবিচেফ অসমতাটি (i) সমস্ত পূর্ণসংখ্যা n-এর জন্য সত্য। প্রমাণিত।

অনুরূপ প্রক্রিয়ায় আপনি এখন অনুশীলনী হিসাবে (ii) অংশটি প্রমাণ করুন।

উদাহরণ 1 দেখান যে $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1} + \sqrt{\dfrac{1}{2}} + \ldots + \sqrt{\dfrac{1}{n}}\right) \le (2n-1)^{1/4}$

সমাধান : এখানে $\left(1, \frac{1}{2}, \ldots\ldots \frac{1}{n}\right)$ এবং $\left(1, \frac{1}{2}, \ldots\ldots \frac{1}{n}\right)$ সেটগুলি নিয়ে উপরের অসমতাটি ব্যবহার করলে পাই

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)^2 \leq n\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^2}\right) < n\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}\right\}$$

$$= n\left\{1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\} = n\left(2-\frac{1}{n}\right) = 2n-1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

আবার $\left(\sqrt{1}, \sqrt{\frac{1}{2}}, \ldots \sqrt{\frac{1}{n}}\right)$ ও $\left(1, \sqrt{\frac{1}{2}}, \ldots \sqrt{\frac{1}{n}}\right)$ সেটগুলির উপর অসমতাটি প্রয়োগ করলে পাই

$$\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\ldots+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)^2 \leq n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}\right) \ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) ও (2) মিলে হয়

$$\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}+\ldots\ldots+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)^4 < n^2(2n-1) \text{ বা } \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1}+\sqrt{\frac{1}{2}}+\ldots\ldots+\sqrt{\frac{1}{n}}\right) < (2n-1)^{1/4}$$

অনুশীলনী 1. দেখান যে $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots\ldots+\sqrt{n} < n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$

সংকেত : এখানে $\left(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \ldots\ldots, \sqrt{n}\right)$ ও $\left(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots\ldots, \sqrt{n}\right)$ সেটগুলি নিতে হবে।

1.7.2 ত্রিভুজ অসমতা

"ত্রিভুজের যে কোনো দুটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর"—এই বক্তব্যই ত্রিভুজ অসমতার মূল ভিত্তি।

উপপাদ্য **11.** যদি $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ বাস্তব হয় তবে

$|x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$ যেখানে অশূন্য x গুলি ধনাত্মক হলেই কেবল "=" চিহ্নটি প্রযুক্ত হবে।

প্রমাণ :- $(x_1+x_2)^2 = x_1^2+x_2^2+2x_1x_2 \leq |x_1|^2+|x_2|^2+2|x_1||x_2| \quad (\because x \leq |x|)$

$$=\left(|x_1|+|x_2|\right)^2$$

বর্গমূল করে পাই $=|x_1+x_2|\le|x_1|+|x_2|$

সুতরাং দেখা গেল যে $n = 2$-এর জন্য ত্রিভুজ অসমতাটি সত্য।

এবার গাণিতিক আরোহ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করা হবে।

মনে করি, $n-1$ এর জন্য অসমতাটি সত্য, অর্থাৎ

$$|x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}|\le|x_1|+|x_2|+\ldots\ldots+|x_{n-1}|$$

কিন্তু $|x_1+x_2+\ldots\ldots+x_{n-1}+x_n|\le|x_1+x_2+\ldots\ldots+x_{n-1}|+|x_n|$

$\le|x_1|+|x_2|+\ldots\ldots\ldots+|x_n|$ প্রমাণিত।

অনুশীলনী 1. x, y বাস্তব হলে কি $|x-y|\le|x|-|y|$ সত্য হবে?

অনুশীলনী 2. x, y বাস্তব হলে কি $|x-y|\ge\big||x|-|y|\big|$ সত্য হবে?

1.7.3. Holders Inequalities (হোল্ডারের অসমতা)—

মনে করি $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n; b_1, b_2 \ldots\ldots b_n; k_1, k_2, \ldots\ldots k_n$ ধনাত্মক সংখ্যা এবং $\alpha,\ \beta, \ldots\ldots k$ ধনাত্মক মুলদ সংখ্যা যাতে $\alpha+\beta+\ldots+k=1$ হয়, তবে

$$a_1^{\alpha}b_1^{\beta}\ldots\ldots k_1^{k}+a_2^{\alpha}b_2^{\beta}\ldots\ldots\ldots k_2^{k}+\ldots+a_n^{\alpha}b_n^{\beta}\ldots\ldots k_n^{k}$$

$\le(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)^{\alpha}(b_1+b_2+\ldots+b_n)^{\beta}\ldots\ldots(k_1+k_2+\ldots+k_n)^{k}$ হবে, যেখানে $a_i, b_i, \ldots\ldots k_i$ গুলি সমানুপাতিক হলে "=" চিহ্নটি হবে।

প্রমাণ : ধরি $A=a_1+a_2+\ldots+a_n,\ \ B=b_1+b_2+\ldots\ldots+b_n, \ldots\ldots K=k_1+k_2+\ldots+k_n$

এখন $\frac{a_1}{A}, \frac{b_1}{B}, \ldots\ldots, \frac{k_1}{K}$ সংখ্যাগুলিকে যথাক্রমে $\alpha,\ \beta, \ldots k$ ভারযুক্ত করে গুণত্তর মধ্যক $\le$ সমান্তর মধ্যক ব্যবহার করলে, আমরা পাই,

$$\left(\frac{a_1}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_1}{B}\right)^{\beta}\ldots\ldots\left(\frac{k_1}{K}\right)^{k}\le\ \alpha\left(\frac{a_2}{A}\right)+\beta\left(\frac{b_2}{B}\right)+\ldots+k\left(\frac{k_2}{K}\right), \qquad (\because\ \alpha+\beta+\ldots+k=1)$$

সমান চিহ্নটি ব্যবহৃত হবে যখন $a_1 : b_1 : \ldots : k_1 = A : B : \ldots : K$ ।

অনুরূপভাবে লেখা যায় —

$$\left(\frac{a_2}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_2}{B}\right)^{\beta}\ldots\ldots\left(\frac{k_2}{k}\right)^{k} \le \alpha\left(\frac{a_2}{A}\right)+\beta\left(\frac{b_n}{B}\right)+\ldots.+k\left(\frac{k_2}{K}\right)$$

যেখানে $a_2 : b_2 : \ldots : k_2 = A : B : C \ldots\ldots\ldots\ldots K$ হলে "=" চিহ্নটি প্রযুক্ত হবে।

....

$$\left(\frac{a_n}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_n}{B}\right)^{\beta}\ldots\ldots\left(\frac{k_n}{K}\right)^{k} \le \alpha\left(\frac{a_n}{A}\right)+\beta\left(\frac{b_n}{B}\right)+\ldots\ldots.+k\left(\frac{k_n}{K}\right)$$

যেখানে $a_n : b_n : \ldots\ldots\ldots\ldots k_n = A : B : \ldots\ldots : K$ হলে "=" চিহ্নটি হবে।

সুতরাং উপরের অসমতা সমূহকে যোগ করলে পাই।

$$\frac{\left(a_1^{\alpha}b_1^{\beta}\ldots.k_1^{k}\right)+\left(a_2^{\alpha}b_2^{\beta}\ldots.k_2^{k}\right)+\ldots.+\left(a_n^{\alpha}b_n^{\beta}\ldots.k_n^{k}\right)}{A^{\alpha}B^{\beta}\ldots..K^{k}}$$

$$\le \alpha\left(\frac{a_1+a_2+\ldots.+a_n}{A}\right)+\ldots..+k\left(\frac{k_1+\ldots..+k_n}{K}\right)=\alpha+\beta+\ldots.+k=1$$

বা, $a_1^{\alpha}b_1^{\beta}\ldots..k_1^{k}+a_2^{\alpha}b_2^{\beta}\ldots\ldots k_2^{k}+\ldots..+a_n^{\alpha}b_n^{\beta}\ldots.k_n^{k}$

$$\le (a_1+a_2+\ldots..+a_n)^{\alpha}(b_1+b_2+\ldots\ldots+b_n)^{\beta}\ldots.(k_1+k_2+\ldots.+k_n)^{k}$$

সমান চিহ্নটি ব্যবহৃত হবে, যখন $a_i;\ b_i,\ldots\ldots.,k_i$ সমানুপাতিক। প্রমাণিত হল।

উদাহরণ 2. a_1, b_2, a_3, a_4 ধনাত্মক সংখ্যা হলে দেখান যে,

$$\left(1+a_1^4\right)\left(1+a_2^4\right)\left(1+a_3^4\right)\left(1+a_4^4\right) \ge \left(1+a_1a_2a_3a_4\right)^4$$

সমাধান : এখানে $\left(1,a_1^4\right),\left(1,a_2^4\right),\left(1,\ a_3^4\right),\ \left(1+a_4^4\right)$ এবং

$$\alpha=\frac{1}{4}=\beta=\gamma=\delta$$ নেওয়া হল।

সুতরাং হোল্ডারের অসমতাটি ব্যবহার করলে পাই

$$\left(1+a_1^4\right)^{1/4}\left(1+a_2^4\right)^{1/4}\left(1+a_3^4\right)^{1/4}\left(1+a_4^4\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\geq \left(1^{1/4}.1^{1/4}.1^{1/4}.1^{1/4}\right)\left[\left(a_1^{4}\right)^{1/4}\left(a_2^{4}\right)^{1/4}\left(a_3^{4}\right)^{1/4}\left(a_4^{4}\right)^{1/4}\right]$$

বা, $\left(1+a_1^{4}\right)\left(1+a_2^{4}\right)\left(1+a_3^{4}\right)\left(1+a_4^{4}\right) \geq \left(1+a_1a_2a_3a_4\right)^4$

অনুশীলনী X.

অনু : 1. যদি $a_1, b_1 ; a_2, b_2 ; a_3, b_3$ ধনাত্মক সংখ্যা হয় তবে দেখান যে

$$\left(a_1a_2a_3+b_1b_2b_3\right)^3 \leq \left(a_1^3+b_1^3\right)\left(a_2^3+b_2^3\right)\left(a_3^3+b_3^3\right)$$

অনু : 2. $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ ধনাত্মক সংখ্যা হলে দেখান যে,

$$\left(a_1^4+b_1^4\right)\left(a_2^4+b_2^4\right)\left(a_3^4+b_3^4\right)\left(a_4^4+b_4^4\right) \geq \left(a_1a_2a_3a_n+b_1b_2b_3b_4\right)^4$$

সমাধান : এখানে $\left(a_1^4, b_1^4\right), \left(a_2^4, b_2^4\right), \left(a_3^4, b_3^4\right), \left(a_4^4, b_4^4\right)$ নিয়ে $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\frac{1}{4}$ নিতে হবে।

অনু : 3. a, b, c, p, q, r ধনাত্মক হলে প্রমাণ করুন যে

$$\left(a^2p^3+p^2q^3\right)^5 \leq \left(a^5+b^5\right)^2\left(p^5+q^5\right)^3$$

সমাধান : এখানে $\left(a^5, b^5\right)$ এবং $\left(p^5, q^5\right)$ সেট নিয়ে $\alpha=\frac{2}{5}, \beta=\frac{3}{5}$ নিতে হবে।

অনু : 4. $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ ধনাত্মক হলে প্রমাণ করুন

$$\left(a_1^3+b_1^3+c_1^3\right)\left(a_2^3+b_2^3+c_2^3\right)\left(a_3^3+b_3^3+c_3^3\right) \geq \left(a_1\,a_2\,a_3+b_1\,b_2\,b_3+c_1\,c_2\,c_3\right)^3$$

1.7.4. জেনসেনের অসমতা

$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ ধনাত্মক এবং r, s ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা হলে

$$\left(a_1^r+a_2^r+\ldots+a_n^r\right)^{1/r} > \left(a_1^s+a_2^s+\ldots\ldots+a_n^s\right)^{1/s},\ \text{যখন}\ r<s.$$

প্রমাণ ঃ- মনেকরি $a_1^r+a_2^r+\ldots+a_n^r = A$, অতএব $\frac{a_1^2}{A}+\frac{a_2^2}{A}+\ldots\ldots+\frac{a_n^2}{A}=1$

এবং $0<\frac{a_i^r}{A}<1 \qquad i=1,2,\ldots n.$

আবার s > r হলে $\frac{s}{r}>1$, $\qquad \therefore \left(\frac{a_i^r}{A}\right)^{\frac{s}{r}}<\frac{a_i^r}{A}$ বা $a_i^s<\frac{A^{s/r}}{A}a_i^r$

এখানে i = 1, 2, ..n বসিয়ে এবং অসমতাফলগুলি যোগ করলে পাই

$$\left(a_1^s+a_2^s+\ldots+a_n^s\right)<\frac{A^{s/r}}{A}\left(a_1^r+a_2^r+\ldots+A_n^r\right)=A^{s/r}=\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^r\right)^{s/r}$$

বা, $\left(a_1^s+a_2^s+\ldots+a_n^s\right)^{1/s}<\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)^{1/s}$ প্রমাণিত।

উদাহরণ 3. যদি a,b,c,d ধনাত্মক হয় তবে প্রমাণ করুন

$$\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)^3<\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^4$$

সমাধান : r = 3, s = 4 বসিয়ে জেনসেন অসমতা থেকে পাওয়া যায়

$$\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^{1/3}>\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)^{1/4} \text{ বা } \left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^4>\left(a^4+b^4+c^4+d^2\right)^3$$

অনুশীলনী XI.

1. ABC ত্রিভুজে $a^3+b^3=c^3$ হলে প্রমাণ করুন যে c কোণটি সূক্ষ্মকোণ

2. যদি a > 0 এবং x,y মূলদ সংখ্যা হয় তবে দেখান $\left(1+a^x\right)^y<\left(1+a^y\right)^x$ যখন x>y

1.7. 5. মিঙ্কাউস্কির অসমতা :

$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, b_1, b_2, \ldots. b_n$ ধনাত্মক সংখ্যা এবং r ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা হলে

$$\left(a_1^r+a_2^r\ldots+a_n^r\right)^{1/r}+\left(b_1^r+b_2^r+\ldots+b_n^r\right)^{1/r}\geq\left[\left(a_1+b_1\right)^r+\left(a_2+b_2\right)^r+\ldots+\left(a_n+b_n\right)^r\right]^{1/r}$$

যখন r > 1.

≤....................................... যখন 0 < r < 1.

এবং a, b গুলি সমানুপাতিক হলে "=" চিহ্ন প্রযুক্ত।

প্রমাণ : ধরি $A^r=a_1^2+a_2^2+\ldots\ldots+a_n^2$ এবং $B^r=b_1^2+b_2^r+\ldots\ldots+b_n^2$

এখন $\dfrac{A\left(\dfrac{a_i}{A}\right)^r + B\left(\dfrac{b_i}{B}\right)^r}{A+B} >$ বা $< \left[\dfrac{A\left(\dfrac{a_i}{A}\right)+B\left(\dfrac{b_i}{A}\right)}{A+B}\right]^r$ যখন $r > 1$.

বা, $0 < r < 1$.

$$= \frac{(a_i + b_i)^r}{(A+B)^r}$$

অসমতাটি $i = 1, 2, \ldots n$ বসিয়ে যোগ করলে

$$\frac{A\dfrac{(a_1^r + a_2^r + \ldots + a_n^r)}{A^r} + B\dfrac{(b_1^r + b_2^r \ldots\ldots + b_n^r)}{B^r}}{A+B} >< \frac{(a_1+b_1)^r + (a_2+b_2)^r + \ldots (a_n+b_n)^r}{(A+B)^r}$$

যখন $r > 1$, $o < r < 1$.

বা, $(A+B) >< \left[(a_1+b_1)^r + (a_2+b_2)^r + \ldots (a_n+b_n)^r\right]^{1/r}$

বা, $\left(a_1^r + a_2^r + \ldots a_n^r\right)^{1/r} + \left(b_1^r + b_2^r + \ldots + b_n^r\right)^{1/r} >< \left[(a_1+b_2)^r + \ldots + (a_n+b_n)^r\right]^{1/r}$

স্পষ্টত a.b সমানুপাতিক হলে $(a_i = kb_i$ হলে$)$ '=' চিহ্ন

উদাহরণ 4. যদি $a^3 + b^3 + c^3 = 1$ তবে দেখান যে $(a+3)^3 + (b+4)^3 + (c+5)^3 < 343$

সমাধান : $\{a, b, c\}$; এবং $\{3,4,5\}$ সেট দুটি এবং r=3 নিয়ে মিঙ্কাউস্কির অসমতা ব্যবহার করলে পাই

$$\left(a^3 + b^3 + c^3\right)^{1/3} + \left(3^3 + 4^3 + 5^3\right)^{1/3} > \left[(a+3)^3 + (b+4)^3 + (c+5)^3\right]^{1/3}$$

$$\therefore \ \left\{1 + (216)^{1/3}\right\}^3 > (a+y)^3 + (b+4)^3 + (c+5)^3$$

বা, $343 > (a+3)^3 + (b+4)^3 + (c+5)^3$

অনুশীলনী XII.

1. a,b,c,p,q,r ধনাত্মক হলে দেখান যে

$$\left[\left(a^3+p^3\right)^{1/3}+\left(b^3+q^3\right)^{1/3}+\left(c^3+r^3\right)^{1/3}\right]^3 \ge (a+b+c)^3+(p+q+r)^3$$

যদি $a^{1/3}+b^{1/3}+c^{1/3}=(127)^{1/3}$ হয় তবে দেখান যে

$$(a+1)^{1/3}+(b+8)^{1/3}+(c+27)^{1/3}>7$$

1.8 সারাংশ

এই এককে আপনি প্রাথমিক অসমতা সমূহ, মধ্যক সংক্রান্ত অসমতা, কশির অথবা ভরেস্ট্রাসের অসমতা এবং অন্যান্য অসমতা যা ত্রিভুজ অসমতা, মিঙ্কাউস্কি অসমতা জেনসেন অসমতা, চেবিচেভ অসমতা শিখলেন, অসমতাগুলি ব্যবহার করে নানা উদাহরণ সমাধান করলেন। এবার ব্যবহারের সময় আমরা আলোচিত অসমতাগুলি উল্লেখ করলাম —

1। **প্রাথমিক অসমতা সমূহ** : এখানে মূল অসমতা হল $a^n > b^n$ যখন $a > b > 0$, $n > 0$ এবং n ধনাত্মক হলে $a^n < b^n$ হবে।

2। **মধ্যক সংক্রান্ত অসমতা সমূহ** : কয়েক সীমিত সংখ্যক বাস্তব সংখ্যার সমান্তরীয় মধ্যক তাদের গুণত্তরীরর মধ্যকের চেয়ে বড় অথবা সমান। আবার গুণত্তরীর মধক, বিপরীত মধ্যকের অপেক্ষা বড় বা সমান।

এছাড়া এই অধ্যায়ে আমরা আরও দেখেছি যে

$a_1, a_2, \ldots a_n$ ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যাগুলির জন্য যদি m মূলদ সংখ্যা হয় তবে

$$\frac{a_1^m + a_2^m + \ldots a_n^m}{n} > \left[\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right]^m \quad \text{যদি } m < 0 \text{ বা } m > 1 \text{ হয়}$$

$$\frac{a_1^m + a_2^m + \ldots a_n^m}{n} < \left[\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right]^n \quad \text{যদি } 0 < m < 1 \text{ হয়}$$

3। **কশি সোয়ার্জের অসমতাসমূহ** : - $\{a_1, a_2 \ldots a_n\}, \{b_1, b_2 \ldots b_n\}$ দুটি বাস্তব সংখ্যার সেট হলে

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_1^2 + \ldots + b_n^2\right)$$

4। **ভারেস্ট্রাসের অসমতাসমূহ** : যদি $0 < a_1, a_2, \ldots a_n < 1$ হয় এবং $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ হয় তবে

$$1 - s_n \le (1-a_1)(1-a_2)\ldots\ldots(1-a_n) < 1/(1+s_n)$$

$$1 + s_n \le (1+a_1)(1+a_2)\ldots\ldots(1+a_n) < 1/(1-a_n) \quad \text{যেখানে } s_n^2 < 1$$

5। **অন্যান্য অসমতাসমূহও আলোচিত হয়েছে যেমন**

(i) $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$; $b_1, b_2, \ldots b_n$;$\ldots\ldots$, $k_1, k_2, \ldots k_n$ ধনাত্মক সংখ্যা এবং $\alpha, \beta, \ldots k$ ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা হলে

$a_1^{\alpha}b_1^{\beta}\ldots k_1^{k}+a_2^{\alpha}b_2^{\beta}\ldots k_2^{k}+\ldots\ldots+a_n^{\alpha}b_n^{\beta}\ldots k_n^{k}\le\left(\sum a_i\right)^{\alpha}\left(\sum b_i\right)^{\beta}\ldots\left(\sum k_i\right)^{k}$ /(হোল্ডারের অসমতা)

(i) r, s ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা এবং $a_1, a_2, \ldots a_n$ ধনাত্মক হলে

$\left(a_1^{r}+a_2^{r}+a_n^{r}\right)^{1/r}>\left(a_1^{s}+a_2^{s}+\ldots+a_n^{s}\right)^{1/s}$ যখন $r < s$

(ii) $\left(a_1^{r}+a_2^{r}+\ldots+a_n^{r}\right)^{1/r}+\left(b_1^{r}+b_2^{r}+\ldots+b_n^{r}\right)^{1/r}\ge$ বা $\le$

$\left[\left(a_1+b_1\right)^{r}+\left(a_2+b_2\right)^{r}+\ldots+\left(a_n+b_n\right)^{r}\right]^{1/r}$ যখন $r>1$ বা $r<1$

(iii) $n_1, n_2, \ldots\ldots n_n$ বাস্তব সংখ্যা হলে $\left|x_1+x_2+\ldots\ldots x_n\right|\le\left|x_1\right|+\left|x_2\right|+\ldots\ldots+\left|x_n\right|$

(iv) $\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$ ও $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ বাস্তব সংখ্যার সেট হলে

$n\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)\ge$ বা $\le\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\left(b_1+b_2+\ldots+b_n\right)$

যখন $a_1\le a_2\ldots\le a_n$ ও $b_1\le b_2\ldots\ldots\le b_n$ অথবা $a_1\ge a_2\ldots\ldots\ge a_n$ ও $b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_n$,

সমাধান

অনুশীলনী I.

1. $\dfrac{b+c}{b^2+c^2}+\dfrac{c+a}{c^2+a^2}+\dfrac{a+b}{a^2+b^2}-\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

$$=\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}+\frac{a+b}{a^2+b^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{bc}+\frac{c+a}{ca}+\frac{a+b}{ab}\right)$$

$$=(b+c)\left(\frac{1}{b^2+c^2}-\frac{1}{2bc}\right)+(c+a)\left(\frac{1}{c^2+a^2}-\frac{1}{2ca}\right)+(a+b)\left(\frac{1}{a^2+b^2}-\frac{1}{2ab}\right)$$

$$=\frac{(b+c)(b-c)^2}{2bc(b^2+c^2)}+\frac{(c+a)(c-a)^2}{2ca(c^2+a^2)}+\frac{(a+b)(a-b)^2}{2ab(a^2+b^2)}\le 0$$

$$\therefore\ \frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}+\frac{a+b}{a^2+b^2}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

অনু 2. $(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}\left[2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\geq 0$$

$$\therefore\ a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

অনু 3. $(a^2+b^2+1)(c^2+d^2+1)-(ac+bd+1)^2$

$=a^2d^2+b^2c^2+a^2+b^2+c^2+d^2 \nless 0$

$\therefore\ \left(a^2+b^2+1\right)\left(c^2+d^2+1\right)\nless (ac+bd+1)^2$

অনু 4. $(a+1)(b+1)<2(ab+1)$

অনুরূপভাবে $(c+1)(d+1)<2(cd+1)$. এবং $(ab+1)(cd+1)<2(ab-cd+1)$

$\therefore (a+1)(b+1)(c+1)(d+1)<4(ab+1)(cd+1)<8(abcd+1)$

অনু 5. প্রতিসমতা (Symmetry) র জন্য ধরা যায় $a\geq b\geq c$, অতএব $n\geq 0$ হলে $a^n\geq b^n\geq c^n$ এবং

$(a-b)(a-c)\geq (a-b)(b-c)$

বা $a^n(a-b)(a-c)\geq b^n(a-b)(b-c)=-b^n(b-a)(b-c)$

বা $a^n(a-b)(a-c)+b^n(b-a)(b-c)\geq 0$; এবং $c^n(c-a)(c-b)\geq 0$

$\therefore\ a^n(a-b)(a-c)+b^n(b-a)(b-c)+c^n(c-a)(c-b)\geq 0$ প্রমাণিত।

$n=0$ হলে $a^n(a-b)(a-c)=a^2-ab-ac+bc$, $b^n(b-a)(b-c)=b^2-ab-bc+ac$

এবং $c^n(c-a)(c-b)=c^2-ac-bc+ab$

$\therefore a^n(a-b)(a-c)+b^n\ldots\ldots=(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\geq 0$ (অনু ২ দেখুন)

$n<-1$ হলে ধরি $n=-m-1$ যেখানে $m\geq 0$, এবং ধরুন, $a=\frac{1}{\alpha}, b=\frac{1}{\beta}, c=\frac{1}{\gamma}$

$\therefore\ a^n(a-b)(a-c)=\frac{\alpha^m}{\alpha\beta\gamma}(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$, অনুরূপভাবে $b^n(\ldots\ldots$ নির্ণয় করে পাই

বামপক্ষ $=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\left[\alpha^m(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)+\beta^m(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)+\gamma^m(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\right]\geq 0$

অনুশীলনী II-এর সমাধান

1. $$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)$$

$$<\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots\frac{2n}{2n+1}\right)$$

$$\left[\text{কারণ } \frac{1}{2}<\frac{2}{3},\frac{3}{4}<\frac{4}{5},\ldots,\frac{2n-1}{2n}<\frac{2n}{2n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2n+1},\quad \therefore\ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

আবার $$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2(n-1)}\cdot\frac{2n+1}{2n}\right)^2\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$>\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdots\frac{2n+1}{2n}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n+2}{2n+1}\right)\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\left[\text{কারণ } \frac{3}{2}>\frac{4}{3},\frac{5}{4}>\frac{6}{5},\ldots\ldots,\frac{2n+1}{2n}>\frac{2n+2}{2n+1}\right]$$

$$=\frac{2n+2}{2}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{n+1}{(2n+1)^2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}>\sqrt{\frac{n+1}{(2n+1)^2}}>\sqrt{\frac{n+1}{(2n+2)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$ প্রমাণিত

2. পূর্ণসংখ্যা r এমন নেওয়া হল যাতে $1 < r < n$ হয়। তবে $n > 2$ এখন $(r-1)(n-r)>0$ বা

$r(n-r+1) > n$................(A)

(A)-তে $r=1,2,\ldots\ldots\ldots n$ বসিয়ে পাই

$1.\ n > n,\ \ 2.\ (n-1) > n,\ 3.\ (n-2) > n,\ \ldots,\ n.\ 1 > n$

অসমতাগুলি গুণন করে $(1.2.3\ldots\ldots\ldots n)^2 > n^n$ বা $(n!)^2 > n^n$

3. $\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n-3}<2\sqrt{2n-1}<2n$ যখন $n>2$

কারণ $(n-1)^2 > 0 \Rightarrow n^2 > 2n-1 \Rightarrow n > \sqrt{2n-1}$

$$\therefore \frac{1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n-3}} = \frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{n} < \sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-3}$$

এখন $n = 2,3,4,\ldots\ldots n$ বসালে পাই

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} < \sqrt{3}-\sqrt{1} \\ \frac{1}{3} < \sqrt{5}-\sqrt{3} \\ \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \\ \frac{1}{n} < \sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-3} \end{array}\right\}$$

যোগ করে পাই $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n} < \sqrt{2n-1}-1$

বা, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n} < \sqrt{2n-1}$ প্রমাণিত

অনুশীলনী II মনে করি $x = n$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $n > 1$.

$$\therefore \frac{a^n-1}{n} - \frac{a^{n-1}-1}{n-1} = \frac{n(a^n-a^{n-1})-(a^n-1)}{n(n-1)} = \frac{(a-1)}{n(n-1)} = \frac{(a-1)}{n(n-1)}\left[na^{n-1}-\left(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+1\right)\right]$$

$$= \frac{(a-1)}{n(n-1)}\left[(a^{n-1}-a^{n-1})+(a^{n-1}-a^{n-2})+(a^{n-1}-a^{n-3})+\ldots+(a^{n-1}-1)\right]\ldots\ldots(A)$$

এখন $a > 1$ হলে $\left(a^{n-1}-a^{n-r}\right)$ পদগুলি ধনাত্মক হবে যখন $r = 2,\ldots\ldots\ldots n$.

এবং $a < 1$ হলে $\left(a^{n-1}-a^{n-r}\right)$ পদগুলি ধনাত্মক হবে যখন $r = 2,\ldots\ldots\ldots n$

আবার $a > 1$ হলে $a-1$ ধনাত্মক এবং $a < 1$ হলে $a-1$ ঋনাত্মক,

সুতরাং (A) ডানদিকের রাশিটি ধনাত্মক।

$$\therefore \frac{a^{n-1}}{n} > \frac{a^{n-1}-1}{n-1} \text{ যখন } a > 1 \text{ বা } a < 1$$

বা $\frac{a^{n-1}}{n} > \frac{a^{n-1}-1}{n-1} > \frac{a^{n-2}-1}{n-2} > \ldots\ldots\ldots >$

সুতরাং $x = n$ এবং $y < n = x$ হলে $\frac{a^x - 1}{x} > \frac{a^y - 1}{y}$ (x, y পূর্ণসংখ্যা)

আবার x, y যদি ভগ্নাংশ হয় তবে $x = \frac{p}{d}, y = \frac{q}{d}$ এইভাবে লেখা যাবে যখন p, q, d পূর্ণসংখ্যা

এক্ষেত্রে $a^{1/d} = b$ ধরলে আমরা পাই $\frac{b^p - 1}{p} > \frac{b^q - 1}{q}$ যখন $p > q$, $b >< 1$

বা $\frac{a^n - 1}{x} > \frac{a^y - 1}{y}$ যখন $x > y$ এবং $a > 1$ বা $a < 1$. প্রমাণিত

অনুশীলনী III :

1. $G \geq H$ ব্যবহৃত হয়েছে

2. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \ldots\ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_n}{a_1}$ সংখ্যাগুলি নিয়ে $A \geq G$ ব্যবহার করলে

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{a_1} \geq n\left(\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \ldots\ldots \frac{a_n}{a_1}\right)^{1/n} = n$$

3. a^2b, b^2c, c^2a নিয়ে $A \geq G$ করে পাই

$$\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3} \geq \left(a^3b^3c^3\right)^{1/3} = abc$$

সমাধান অনুশীলনী IV :

অনু 1 : এখানে $1^3, 2^3, \ldots\ldots n^3$ দেওয়া হল, যারা প্রত্যেকে অসমান

$A > G$ করলে পাই $\frac{1^3 + 2^3 + \ldots.. + n^3}{n} > \left(1^3 \cdot 2^3 \ldots.. n^3\right)^{1/n} = (n!)^{3/n}$

বা $\frac{n^2(n+1)^2}{4.n} > (n!)^{3/n} \Rightarrow (n!)^3 < n^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$ প্রমাণিত

অনু 2 : a এবং n সংখ্যক b নিয়ে a,b,b,......... এর $A \geq G$ করলে

$$\frac{a+b+b+\ldots.}{1+n} \geq (a.\ b.\ b\ldots\ldots)^{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow \frac{a+nb}{n+1} \geq \left(ab^n\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

অনু 3 : a, b, c নিয়ে $A \geq G$ করলে হয় $\dfrac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{1/3} = k$

$\therefore\ a+b+c \geq 3k$

আবার ab, bc, ca নিয়ে $A \geq G$ করলে

$$\frac{ab+bc+ca}{3} > \left(a^2b^2c^2\right)^{1/3} = k^2 \Rightarrow ab+bc+ca \geq 3k^2$$

এখন $(1+a)(1+b)(1+c) = 1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc$

$> 1+3k+3k^2+k^3 = (1+k)^3$ প্রমাণিত

অনু 4 : এখানে 1.2, 2.3, 3.4, ...n(n+1), সংখ্যাগুলি নেওয়া হল যারা অসমান, এদের $A \geq G$ করলে পাই

$$\frac{(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots\ldots+n(n+1)}{n} > \left\{\left(2^2.3^2\ldots.n^2\right)(n+1)\right\}^{1/n}$$

এখন $1.2+2.3+3.4+\ldots\ldots = \sum n^2 + \sum n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$$\therefore\ \frac{(n+1)(n+2)}{3} > \left[(n!)^2(n+1)\right]^{1/n}$$

বা $(n+1)^{n-1}(n+2)^n > 3^n(n!)^2$ প্রমাণিত।

অনু 5 : (i) a_1, a_2, a_n সমান্তর প্রগতিতে বলে $\dfrac{a_1+a_2+\ldots.a_n}{n} = \dfrac{a_1+a_n}{2}$

এখন $G < A$ ব্যবহার করলে পাই $(a_1a_2\ldots..a_n)^{1/n} < \dfrac{a_1+a_n}{2}$

$$\therefore\ a_1a_2\ldots\ldots.a_n < \left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)^n$$

উপপাদ্য 3. যে কোনো র‍্যাশনাল মূলদ সংখ্যাকে একটি অসীম সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ হিসাবে লিখতে পারা যায়।

প্রমাণ ঃ র‍্যাশনাল (মূলদ) সংখ্যাটি ধনাত্মক ধরে আমরা প্রমাণ করব। কেননা ধনাত্মকের জন্য সত্য হলে ঋণাত্মক সংখ্যার জন্য সত্য হবে। (কারণ তাকে -1 গুণিত একটি ধনাত্মক রাশি হিসাবে লেখা যায়)।

ধরা যাক $\dfrac{A}{B}$ একটি র‍্যাশনাল সংখ্যা, যেখানে A, B দুইটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

ইউক্লিডীয় ভাগ পদ্ধতি অনুসরণ করে বলতে পারি

$A = Ba_1 + r_1$ যেখানে $0 \le r_1 < B$ এবং $a_1 \ge 0$

(i) .... r_1 শূন্য হলে $\dfrac{A}{B} = a_1$ এবং এটি একটি সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ। r_1 শূন্য না হলে, আমরা B-কে r_1 দিয়ে ভাগ করে পাই

(ii) ...... $B = a_2r_1 + r_2$ যেখানে $a_2 \ge 1$

$r_2 = 0$ হলে $\dfrac{A}{B} = a_1 + \dfrac{1}{a_2}$ যা একটি সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ। আবার r_2 শূন্য না হলে, r_1 -কে r_2 দিয়ে ভাগ করে পাই

$r_1 = a_3r_2 + r_3$, $a_3 \ge 1$

এখানে $r_3 = 0$ হলে $\dfrac{A}{B} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}$ এবং $0 \le r_3 < r_2$.

এরূপে আমরা যাব এবং সসীম বার করবার পর এক সময় $r_n = 0$ হতে বাধ্য কারণ প্রতি পদক্ষেপে r_1, r_2 ...... পূর্ণ সংখ্যাগুলি এমন যে $r_1 > r_2 > r_3 > \ldots\ldots > r_n \ge 0$. ভাগশেষ শূন্য হওয়ার জন্য সর্বোচ্চপক্ষে r_1 সংখ্যক পদক্ষেপের বেশি দরকার হবে না, কেননা প্রতি পদক্ষেপে অনন্ত 1 করে ভাগশেষ কমবে।

অতএব এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা n আছে যে

(n) .... $r_{n-2} = a_n r_{n-1} + 0$ $a_n \ge 1$.

এগুলি (i) থেকে (n) ব্যবহার করে পাই

$$\frac{A}{B} = a_1 + \frac{r_1}{B} = a_1 + \frac{1}{\frac{B}{r_1}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_2}{r_1}}$$

$$= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{r_3}{r_2}}}$$

অসমতাতিনটিকে গুণ করে পাই $abc \ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

8. যদি $s = a + b + c + d$ ধরি, তবে

$c + d + a - 2b = s - 3a > 0$, অনুরূপভাবে দেখান যায়

$c + d + a - 2b = s - 3b > 0$, $d + a + b - 2c = s - 3c > 0$, $a + b + c - 2d = s - 3d > 0$ এখন $s - 3a$, $s - 3b$, $s - 3c$ সংখ্যা তিনটি নিয়ে $A \ge G$ করলে পাই

$$\frac{3s - 3(a+b+c)}{3} \ge [(s-3a)(s-3b)(s-3c)]^{1/3}$$

বা, $d \ge [(s-3a)(s-3b)(s-3c)]^{1/3}$

অনুরূপ ভাবে দেখান, $a \ge [(s-3b)(s-3c)(s-3d)]^{1/3}$

$b \ge [(s-3c)(s-3d)(s-3a)]^{1/3}$; $c \ge [(s-3d)(s-3a)(s-3b)]^{1/3}$

এবং উপরের চারটি অসমতা গুণ করলে পাই

$$abcd \ge (s-3a)(s-3b)(s-3c)(s-3d)$$

সমাধান

অনুশীলনী V :

1. a_n এবং $\dfrac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})}{n-1}$ সংখ্যাগুলিকে যথাক্রমে 1 2 n-1 ভারযুক্ত করে $A \ge G$ ব্যবহার করলে পাই,

$$\frac{a_n + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n} \ge \left[a_n \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})^{n-1}}{n-1} \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \right)^n \ge a_n \left\{ \frac{a_1 + a_2 + \quad + a_{n-1}}{n-1} \right\}^{n-1}$$

2. a, b সংখ্যাদুটিকে x,y ভারযুক্ত করে $A \ge G$ করলে হয়

$\dfrac{ax + by}{x+y} \ge \left(a^x b^y\right)^{\frac{1}{x+y}}$ । এখানে x+y=1 বসালে পাই $ax + by \ge a^x + b^y$

3. x, y, z সংখ্যা তিনটিকে যথাক্রমে x,y,z ভারযুক্ত করে $A \ge G \ge H$ করলে পাই

$$\frac{xx+yy+z\cdot z}{x+y+z} \geq \left(x^x y^y z^z\right)^{\frac{1}{x+y+z}} \geq \frac{x+y+z}{\frac{x}{x}+\frac{y}{y}+\frac{z}{z}}$$

বা $\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z} \geq x^x y^y z^z \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{x+y+z}$

4. (x+y), (x−y) সংখ্যাগুলিকে যথাক্রমে x+y, x−y ভারযুক্ত করে $G \geq H$ ব্যবহার করলে

$$\left\{(x+y)^{x+y}(x-y)^{x-y}\right\}^{\frac{1}{2x}} \geq \frac{2x}{\frac{x+y}{x+y}+\frac{x-y}{x-y}}$$

$\therefore\ (x+y)^{x+y}(x-y)^{x-y} \geq x^{2x}$

5. এখানে $\left(\frac{s}{a_1}-1\right),\ldots\ldots\left(\frac{s}{a_n}-1\right)$ সংখ্যাগুলিকে $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ ভারযুক্ত করে $A \geq G$ ব্যবহার করলে পাবেন

$$\left\{\left(\frac{s}{a_1}-1\right)^{a_1}\left(\frac{s}{a_2}-1\right)^{a_2}\ldots\ldots\left(\frac{s}{a_n}-1\right)^{a_n}\right\}^{\frac{1}{s}} \leq \frac{a_1\left(\frac{s}{a_1}-1\right)+a_2\left(\frac{s}{a_2}-1\right)\ldots\ldots+a_n\left(\frac{s}{a_n}-1\right)}{a_1+a_2\ldots\ldots+a_n}$$

$$=\frac{ns-s}{s}=(n-1)$$

$\therefore\ \left(\frac{s}{a_1}-1\right)^{a_1}\left(\frac{s}{a_2}-1\right)^{a_2}\ldots\ldots\left(\frac{s}{a_n}-1\right)^{a_n} \leq (n-1)^s$ প্রমাণিত।

সমাধান

অনুশীলনী VI :

অনু 1 : a = 1−x ধরুন, $\therefore a>0$ এবং $a \neq 1$.

$\therefore\ a^m-1 >< m(a-1)$ যখন $1<m<0$ এবং $0<m<1$

$\therefore\ (1-x)^m >< m(-x)+1=1-mx$,, প্রমাণিত।

অনু 2. এখানে $a=\frac{x}{y}$ ধরলে $a>0$ এবং $a\neq 1$ যখন $x\neq y$

$\therefore a^m-1><m(a-1)$ যখন $1<m<0$ বা $0<m<1$

বা $\frac{x^m}{y^m}-1><m\frac{x-y}{y}$ অথবা $x^m-y^m><my^{m-1}(x-y)$........(1) যখন $1<m<0$

বা $0<m<1$

আবার $a=\frac{y}{x}$ ধরলে আমরা পাই $mx^{m-1}(x-y)><x^m-y^m$...........(2)

(1) ও (2) একসাথে লিখলে $mx^{m-1}(x-y)><x^m-y^m><my^{m-1}(x-y)$

অনু 3. $a=1+\frac{1}{n+1}$ এবং $m=\frac{n+1}{n}$ ধরলে, $a>1$ এবং $m>1$ হবে

$\therefore a^m-1>m(a-1)$ কারণ $m>1$

বা $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}-1>\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n}$

$\therefore \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}}>1+\frac{1}{n}$ বা $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ প্রমাণিত।

অনু 4. ধরুন $k=\frac{m}{n}$, এবং $a=1+\frac{1}{m}$

$\therefore\ k<1\ (\because m<n)$ এবং $a>1$

$\therefore\ a^k-1<k(a-1)$ বা, $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{n}}<1+\frac{m}{n}\left(\frac{1}{m}\right)=1+\frac{1}{n}$

$\therefore \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ প্রমাণিত

সমাধান

অনুশীলনী VII :

অনু 1 : উপপাদ্য 5 ব্যবহার করে পাই

$$\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+a_3^{-1}+\ldots\ldots+a_n^{-1}}{n} > \left(\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{n}\right)^{-1} \qquad (\text{এখানে } m=-1<0\ )$$

$$=\left[\frac{\frac{n}{2}(a_1+a_n)}{n}\right]^{-1}$$

কারণ a_1, a_2,............a_n সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হওয়ায় $a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}$

$$\therefore\ \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots\ldots+\frac{1}{a_n} > \frac{2n}{a_1+a_n}$$

2. ধরুন $A_i=a_i^{\,p}$ এবং $m=\dfrac{q}{p}<1$ $\qquad$ $(i=1,\ 2,\ldots.n)$ ধরলে

$$\frac{A_1^{\,m}+A_2^{\,m}+\ldots\ldots.A_n^{\,m}}{n} < \left(\frac{A_1+A_2+\ldots\ldots+A_n}{n}\right)^m$$

বা $$\frac{\left(a_1^{\,q}+a_2^{\,q}+\ldots\ldots+a_n^{\,q}\right)}{n} < \left(\frac{a_1^{\,p}+a_2^{\,p}+\ldots\ldots+a_n^{\,p}}{n}\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\therefore\ \left(a_1^{\,q}+a_2^{\,q}+\ldots\ldots+a_n^{\,q}\right)^p < n^{p-q}\left(a_1^{\,p}+a_2^{\,p}+\ldots.a_n^{\,p}\right)^q$$

অনুশীলনী VIII

1. $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\geq(ax+by)^2$, বা $1\geq(ax+by)^2$ বা $1\geq|\,ax+by\,|$. প্রমাণিত।

2. $\left(a^2+b^2+1\right)\left(c^2+d^2+1\right)=\left(a^2+b^2+1^2\right)\left(c^2+d^2+1^2\right)\geq(ac+bd+1)^2$ প্রমাণিত।

3. (a,b,c,d) এবং (bd,ca,ad,bc) এই দুটি সেট নিয়ে কশি অসমতা ব্যবহার করলে পাই

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(b^2d^2+c^2a^2+a^2d^2+b^2c^2\right)\geq(abd+bca+cad+bcd)^2$$

বা $\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(b^2+a^2\right)\left(c^2+d^2\right)\geq(abd+bca+cad+bcd)^2$ প্রমাণিত।

অনু 4. (i) $\left\{\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2} \ldots\ldots \sqrt{a_n}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \ldots\ldots \frac{1}{\sqrt{a_3}}\right\}$ সেট দুটি নিয়ে উপপাদ্য 5 ব্যবহার করতে হবে।

(ii) $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}, \{1, 1, \ldots\ldots 1\}$ সেট নিয়ে উপপাদ্য 5 ব্যবহার করতে হবে।

(iii) $\{1, 1, \ldots\ldots 1\}, \left\{\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2} \ldots\ldots \sqrt{a_n}\right\}$ সেট নিয়ে উপপাদ্য 5 ব্যবহার করতে হবে।

অনু 5. কশি অসমতা থেকে লেখা যায় $\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq (ax+by+cz)^2$

বা $1 \geq (ax+by+cz)^2$

বর্গমূল লিখলে পাই $-1 \leq ax+by+cz \leq 1$

অনু 6. না।

উদাহরণ হিসাবে ধরি $x = 3$, এবং $a_1=1$, $a_2 = 0$, $b_1=2$, $b_2 = -2$

$\therefore \left(1^3+0^3\right)\left(2^3+(-2)^3\right)=0$ এবং $(1\ 2+0.(-2))^3 = 8$ এবং $0 < 8$

অনু 7 এর প্রমাণ:

প্রথমত মনে করি p, q সমচিহ্ন যুক্ত। 1,2,....n এর যে কোন দুটি সূচক i, j নেওয়া হল। অতএব $a_i^p - a_j^p$ এবং $a_i^q - a_j^q$ সমচিহ্নযুক্ত হবে।

$\therefore \left(a_i^p - a_j^p\right)\left(a_i^q - a_j^q\right) \geq 0$; বা $a_i^{p+q} + a_j^{p+q} \geq a_i^p a_j^q + a_j^p a_i^q$

1,2,......n এর মধ্যে এইভাবে দুটি করে সূচক i, j মোট n_{c_2} উপায়ে নেওয়া যেতে পারে এবং উপরের মত অসমতাগুলিতে সব ক্ষেত্রে "=" চিহ্ন হবে না। সুতরাং এইভাবে দুটি করে সূচক নিয়ে অসমতাগুলি যোগ করলে আমরা পাব।

$$(n-1)\left(a_1^{p+q} + a_2^{p+q} + \ldots + a_n^{p+q}\right) > \sum_{i,j} a_i^p a_j^q \qquad i = 1,2,\ldots\ldots n$$

$$j = 1,2,\ldots\ldots n,\ i \neq j$$

বা $n\left(a_1^{p+q} + a_2^{p+q} + \ldots + a_n^{p+q}\right) > a_1^{p+q} + a_2^{p+q} + \ldots\ldots + a_n^{p+q} + \sum a_i^p a_j^q$

$$= \left(a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p\right)\left(a_1^q + a_2^q + \ldots\ldots + a_n^q\right)$$

বা $\dfrac{a_1^{p+q}+a_2^{p+q}+.....+a_n^{p+q}}{n} > \dfrac{a_1^{p}+a_2^{p}+....+a_n^{p}}{n}\cdot\dfrac{a_i^{q}+a_2^{q}.....+a_n^{q}}{n}$

দ্বিতীয়ত যখন p,q বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে তখন $\left(a_i^{p}-a_j^{p}\right)$ এবং $\left(a_i^{q}-a_j^{q}\right)$ বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে যাতে $\left(a_i^{p}-a_j^{p}\right)\left(a_i^{q}-a_j^{q}\right)<0$ বা $\left(a_i^{p+q}+a_j^{p+q}\right)\le a_i^{p}a_j^{q}+a_i^{q}a_j^{p}$ যেখানে সমস্ত i, j এর জন্য "=" প্রযুক্ত হবে না। অতএব প্রথম অংশের মত এখানে খালি অসমতা চিহ্নটি ">" এর বদলে "<" হবে

প্রমাণিত।

1.6 উপপাদ্য 9 এর শেষাংশ :

n = 1 হলে $s_1=a_1$ এবং $1+s_n=1+a_1<\dfrac{1}{1-s_n}$ কারন $1-s_n^{\,2}<1$, যেহেতু $s_n^{\,2}>0$.

মনে করি (2) অংশটি n = m এর জন্য সত্য অর্থাৎ

$1+s_m\le(1+a_1)(1+a_2)..........(1+a_m)<\dfrac{1}{10s_m}$ যখন $s_m<1$

এখন $(1+a_1)(1+a_2).......(1+a_n)(1+a_{m+1})\ge(1+s_m)(1+a_{m+1})=1+(s_m+a_{m+1})+s_m a_{m+1}$

$$=1+s_{m+1}+s_m a_{m+1}\qquad (\text{ কারণ } s_{m+1}=s_m+a_{m+1})$$

$$>1+s_{m+1}$$

আবার যেহেতু $1>1-a^2{}_{m+1}=(1-a_{m+1})(1+a_{m+1})$ অর্থাৎ, $\dfrac{1}{1-a_{m+1}}>1+a_{m+1}$

এবং $\dfrac{1}{1-s_m}>(1+a_1)(1+a_2)....(1+a_m)$ অসমতা দুটিকে একসাথে করলে পাই

$$(1+a_1)(1+a_2)....(1+a_m)\,(1+a_{m+1})<\frac{1}{(1-s_m)(1-a_{m+1})}=\frac{1}{1-(s_m+a_{m+1})+(s_m a_{m+1})}$$

$$=\frac{1}{1-s_{m+1}+s_m a_{m+1}}$$

$$<\frac{1}{1-s_{m+1}}$$ প্রমাণিত।

এবার মনে করি উপপাদ্যটি $n=m$ এর জন্য সত্য। অতএব

$$m(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_mb_m)\le(a_1+a_2+\ldots+a_m)(b_1+b_2+\ldots+b_m)\ldots\ldots\ldots(1)$$

কিন্তু আমরা জানি
$$\left.\begin{array}{l} a_1b_1+a_{m+1}b_{m+1}\le a_1b_{m+1}+b_1a_{m+1}\\ a_2b_2+a_{m+1}b_{m+1}\le a_2b_{m+1}+b_2a_{m+1}\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ a_mb_m+a_{m+1}b_{m+1}\le a_mb_{m+1}+b_ma_{m+1}\end{array}\right\}\text{ মোট } n \text{ সংখ্যক অসমতা}$$

এই m-সংখ্যক অসমতা 1-এর সাথে যোগ করলে হয় —

$$(m+1)(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_{m+1}b_{m+1})-a_{m+1}b_{m+1}\le(a_1+a_2+\ldots+a_{m+1})(b_1+b_2+\ldots+b_{m+1})$$
$$-a_{m+1}b_{m+1}$$

সুতরাং $(m+1)(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_{m+1}b_{m+1})\le(a_1+a_2+\ldots+a_{m+1})(b_1+b_2+\ldots+b_{m+1})$

এখন গাণিতিক অরোহ্ পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণিত হয়।

উপপাদ্য 10 এর অনু 1 : এখানে $\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\ldots\ldots,\sqrt{n}\right\}$ ও $\left(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{n}\right)$ সেট্ দুটি নিয়ে উপপাদ্য 10 এর অসমতা ব্যবহার করলে হয়

$$n(1+2+\ldots+n)\ge\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\ldots+\sqrt{n}\right)^2,\quad\left(\because\ \sqrt{1}<\sqrt{2}\ldots<\sqrt{n}\right)$$

বা, $n^2\dfrac{n+1}{2}>\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}\right)^2$, সুতরাং ধনাত্মক বর্গমূল নিলে

$$n\sqrt{\frac{n+1}{2}}\ge\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}\right)$$ প্রমাণিত।

সমাধান অনুচ্ছেদ 1.7.2 এর অনুশীলনী

অনু 1. সত্য নয় কারণ উদাহরণ হিসাবে যদি $x=2,\ y=-5$ নেওয়া হয় তবে

$$|x-y|=|7|=7,\qquad |x|-|y|=2-5=-3\qquad 7>-3$$

$\therefore |x-y|\le|x|-|y|$ সত্য নয়।

অনু 2. কোন প্রতিপাদ্য অপ্রমাণের জন্য উদাহরণই যথেষ্ট, যেমন অনু 44-এ করা হয়েছে। কিন্তু প্রমাণের জন্য উদাহরণ যথেষ্ট নয়, কাজেই অনুশীলনীটি উদাহরণের সাহায্যে প্রমাণ করা যাবে না।

এখন $|x| = |(x-y)+y| < |x-y| + |y| \Rightarrow |x-y| \geq |x| - |y|$

আবার $|y| = |x+(y-x)| \leq |x| + |y-x| = |x| + |x-y|$

বা $|y| - |x| \leq |x-y|$

$\therefore\ |x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$ প্রমাণিত।

সমাধান

অনুশীলনী IX

1. যদি $0 < a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n < 1$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে

$$1-(a_1 a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots a_n) \leq n-(a_1+a_2+\ldots\ldots\ldots+a_n)$$

সমাধান : এখানে $1-a_1,\ 1-a_2\ldots\ldots 1-a_n$ সংখ্যাগুলি নেওয়া হল। স্পষ্টতই $0<1-a_i<1$। এখন ভারেস্ট্রাসের অসমতা ব্যবহার করলে পাই

$$1-(1-a_1+1-a_2+1-a_3+\ldots+1-a_n) \leq \{1-(1-a_1)\}\{1-(1-a_2)\}\ldots\ldots\{1-(1-a_n)\}$$

বা, $1-n+(a_1+a_2+\ldots+a_n) \leq a_1 a_2 \ldots\ldots\ldots a_n$

$\therefore\ 1-(a_1 a_2 \ldots a_n) < n-(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)$

অনু 2. n যদি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে দেখান যে

$$\frac{1.3.7\ldots\ldots(2^n-1)}{2.4.8\ldots\ldots\ldots 2^n} < \frac{2^n}{2^{n+1}-1}$$

সমাধান : ধরি $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{2^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots a_n = \frac{1}{2^n}$ অতএব $0 < a_n < 1$

ভারেস্ট্রাসের অসমতা থেকে পাই

$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots\ldots(1-a_n) < \frac{1}{1+a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}$$

বা, $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\frac{1}{2^n}}$

বা, $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2^2}\cdot\frac{7}{2^3}\ldots\ldots\frac{(2^n-1)}{2^n} < \frac{1-\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2^{n+1}}{2^{n+1}-1}$

বা, $\frac{1\cdot 3\cdot 7\ldots\ldots(2^n-1)}{2\cdot 4\cdot 8\ldots\ldots 2^n} < \frac{2^n}{2^{n+1}-1}$

উপপাদ্য 10 এর দ্বিতীয় অংশ :

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \ldots\ldots \geq a_n$ এবং $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \ldots\ldots \leq b_n$

যেহেতু $a_1 \geq a_2$ এবং $b_1 \leq b_2$ $\qquad \therefore (a_1-a_2)(b_1-b_2) \leq 0$

বা, $a_1b_1 + a_2b_2 \leq a_1b_2 + a_2b_1$

অনুরূপভাবে যেহেতু $a_2 \geq a_3, b_2 \leq b_3,$ $\qquad \therefore a_2b_2 + a_3b_3 \leq a_2b_3 + a_3b_2$

এবং $a_1 \geq a_3,\ b_1 \leq b_3$ বলে $\qquad a_1b_3 + a_1b_1 \leq a_1b_3 + a_3b_1$

যোগ করলে পাই $2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \leq a_1(b_2+b_3) + a_2(b_1+b_3) + a_3(b_2+b_1)$

উভয়পক্ষে $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ যোগ করলে হয়

$3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \leq (a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)$

$\therefore$ (ii) অংশটি $n = 3$-এর জন্য সত্যি

অনু 1. যদি $a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3$ ধনাত্মক হয় তবে প্রমাণ করুন....

α, β, γ যদি এমন মূলদ সংখ্যা হয় যাতে $\alpha+\beta+\gamma=1$ তবে হোল্ডারের অসমতা থেকে বলা যায়

$$a_1{}^{\alpha}a_2{}^{\beta}a_3{}^{\gamma} + b_1{}^{\alpha}b_2{}^{\beta}b_3{}^{\gamma} \leq (a_1+b_1)^{\alpha}(a_2+b_2)^{\beta}(a_3+b_3)^{\gamma}$$

আমরা এখানে $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$ ধরলাম এবং $\{a_1{}^3, b_1{}^3\}\{a_2{}^3, b_2{}^3\}, \{a_3{}^3, b_3{}^3\}$ এই তিনটি সেট নিলাম।

অতএব

$a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 \leq (a_1{}^3+b_1{}^3)^{1/3}(a_2{}^3+b_2{}^3)^{1/3}(a_3{}^3+b_3{}^3)^{1/3}$

বা $(a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3)^3 \leq (a_1{}^3+b_1{}^3)(a_2{}^3+b_2{}^3)(a_3{}^3+b_3{}^3)$ $\qquad$ প্রমাণিত

অনু 2. ধরলাম $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\frac{1}{4}$ এবং চারটি সেট $(a_1{}^4, b_1{}^4); (a_2{}^4, b_2{}^4); (a_3{}^4, b_3{}^4); (a_4{}^4, b_4{}^4)$

এখন হোল্ডার অসমতা অনুযায়ী

$$(a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4) \leq (a_1{}^4+b_1{}^4)^{1/4}(a_2{}^4+b_2{}^4)^{1/4}(a_3{}^4+b_3{}^4)^{1/4}(a_4{}^4+b_4{}^4)^{1/4}$$

বা, $(a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4)^4 \leq (a_1{}^4+b_1{}^4)(a_2{}^4+b_2{}^4)(a_3{}^4+b_3{}^4)(a_4{}^4+b_4{}^4)$

অনু 3. $\alpha = \frac{2}{5},\ \beta = \frac{3}{5}$ এবং $(a^5, b^5), (p^5, q^5)$ সেটদুটি নিলে, হোল্ডারের অসমতা অনুযায়ী

$$\left(a^2p^3 + b^2q^3\right) \le \left(a^5 + b^5\right)^{2/5}\left(p^5 + q^5\right)^{3/5}$$

বা $\left(a^3p^3 + b^2q^3\right)^5 \le \left(a^5 + b^5\right)^2\left(p^5 + q^5\right)^3$ প্রমাণিত।

অনু 4. $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$ এবং $\left(a_1^3, b_1^3 c_1^3\right); \left(a_1^3, b_2^3 c_2^3\right);\ \left(a_3^3, b_3^3, c_3^3\right)$ সেট তিনটি নিলে

$$\left(a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 + c_1c_2c_3\right) \le \left(a_1^3 + b_1^3 + c_1^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(a_2^3 + b_2^3 + c_2^3\right)^{1/3}\left(a_3^3 + b_3^3 + c_3^3\right)^{1/3}$$

বা $(\ldots\ldots\ldots\ldots)^3 \le \left(a_1^3 + b_1^3 + c_1^3\right)\ \left(a_2^3 + b_2^3 + c_2^3\right)\left(a_3^3 + b_3^3 + c_3^3\right)$ প্রমাণিত

সমাধান

অনুশীলনী XI

অনু 1. জেনসনের অসমতা থেকে বলা যায় $\left(a^3 + b^3\right)^{1/3} < \left(a^2 + b^2\right)^{1/2}$

বা $c < \left(a^2 + b^2\right)^{1/2}$ বা $a^2 + b^2 > c^2$

$\therefore$ C কোনটি সূক্ষ্মকোণ।

অনু 2. 1,a সংখ্যাগুলির উপর জেনসেন অসমতা প্রয়োগ করলে পাই

$\left(1 + a^x\right)^{1/x} < \left(1 + a^y\right)^{1/y}$ বা $\left(1 + a^x\right)^y < \left(1 + a^y\right)^x$

সমাধান

অনুশীলনী XII

অনু 1. $\left(a^3, b^3, c^3\right)\left(p^3, q^3, r^3\right)$ সেট দুটি এবং $r = \frac{1}{3} < 1$ নিয়ে মিঙ্কাউস্কি অসমতা ব্যবহার করে পাই

$$(a + b + c)^3 + (p + q + r)^3 \le \left[\left(a^3 + p^3\right)^{1/3} + \left(b^3 + q^3\right)^{1/3} + \left(c^3 + r^3\right)^{1/3}\right]^3$$

সমাধান 2. (a,b,c), (1,8,27) নিয়ে মিঙ্কাউস্কি অসমতায় $r = \frac{1}{3}$ বসালে পাই

$$\left(a^{1/3} + b^{1/3} + c^{1/3}\right)^3 + \left(1^{1/3} + 8^{1/3} + 27^{1/3}\right)^3 < \left[(a+1)^{1/3} + (b+8)^{1/3} + (c+27)^{1/3}\right]^3$$

কিন্তু যেহেতু $a^{1/3} + b^{1/3} + c^{1/3} = 127^{1/3}$

অতএব $127 + (1 + 2 + 3)^3 < \left[(a+1)^{1/3} + (b+8)^{1/3} + (c+27)^{1/3}\right]^3$

$$(343)^{1/3} < (a+1)^{2/3} + (b+8)^{1/3} + (c+27)^{1/3}$$

$7 < (a+1)^{1/3}(b+8)^{1/3}(c+27)^{1/3}$ প্রমাণিত।

একক 2 ❑ জটিল রাশি

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা

2.2 উদ্দেশ্য

2.3 জটিল রাশির সংজ্ঞা ও জটিল রাশির বীজগণিত — অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা।

2.4 জটিল রাশির ত্রিকোণমিতিক রূপায়ণ; অ্যামপ্লিটিউড্ ও মডিউলাস্।

2.5 জটিল রাশির বর্গমূল—একের ঘনমূল।

2.6 আরগাঁ সমতল, আরগাঁ চিত্র—আরগাঁ চিত্রের সাহায্যে দুটি জটিল রাশির যোগ ও বিয়োগ প্রক্রিয়া।

2.7 মডিউলাসের ধর্ম-দুটি জটিলরাশির গুণ ও ভাগফলের মডিউলাস ও অ্যামপ্লিটিউড্।

2.8 দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণাবলী

2.9 দ্য-ময়ভরের উপপাদ্য ও প্রয়োগ— জটিল সংখ্যার মূল নির্ণয় — উদাহরণাবলী

2.10 সারাংশ

2.11 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

2.12 উত্তরমালা

2.1 প্রস্তাবনা

দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান ব্যবহারিক ক্ষেত্রে অপরিহার্য। কিন্তু সব দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান বাস্তব সংখ্যার সেটে পাওয়া যায় না। উদাহরণ হিসেবে $x^2-1=0$ এবং $x^2+1=0$ এই দুটি দ্বিঘাত সমীকরণ লক্ষ্য করুন। $x^2-1=0$ সমীকরণটির সমাধান সেটটি হল $\{-1,1\}$ কিন্তু $x^2+1=0$ সমীকরণটির জন্য এরকম কোন সেট পাওয়া যাচ্ছে না কারণ কোন বাস্তব সংখ্যার বর্গ ঋণাত্মক হতে পারে না। তাই আমরা যদি এমন একটি রাশির কল্পনা করি যার বর্গ -1 তাহলে কিন্তু এই সমীকরণটির সমাধান করা যায়। এই কাল্পনিক রাশিটির নাম দেওয়া হ'ল i, ফলে $i^2 = -1$.

এখন $x^2+1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 = i^2 \Rightarrow x = i, -i,$

অতএব $x^2+1 = 0$ এই সমীকরণটির সমাধান সেটটি হল $\{-i, i\}$ এটি কোন বাস্তব সংখ্যার সেট নয়।

এবারে আর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ লক্ষ্য করুন।

$x^2-2ax+a^2+b^2 = 0$ ....(1)

একে লেখা যায় $(x-a)^2+b^2 = 0$

অথবা $(x-a)^2 = -b^2 = i^2b^2$ $\quad (\because i^2 = -1)$

বা, $x - a = \pm ib,$

অর্থাৎ $x = a+ib, \; a-ib$

$\therefore$ (1) সমীকরণটির সমাধান সেট্ হচ্ছে $\{a+ib, \; a-ib\}$.

ক্যান্টর ডেডেকিন্ড্ স্বতঃসিদ্ধের দ্বারা যেমনভাবে বাস্তব সংখ্যা এবং কোন অসীম সরলরেখার বিন্দুসমূহের মধ্যে এক-এক- অনুযোগ স্থাপন করা হয়েছে ঠিক একই রকমভাবে জটিলরাশি এবং কোন সমতলের বিন্দুগুলির মধ্যেও এক-এক-অনুযোগ স্থাপন সম্ভব। এর ফলে আমরা আরগাঁ সমতলে জটিল সংখ্যাগুলিকে রূপায়িত করতে পারি। এক্ষেত্রে বাস্তব সংখ্যার সঙ্গে জটিল রাশির একটি পার্থক্য পাঠকেরা লক্ষ্য করবেন। দুটি বাস্তব রাশির মধ্যে একটি ক্রম-সম্বন্ধ বিদ্যমান। অর্থাৎ a এবং b দুটি স্বতন্ত্র বাস্তবসংখ্যা হলে হয় $a < b$ আর নয়ত $a > b$ । কিন্তু দুটি জটিল রাশির মধ্যে এরকম কোন ক্রম-সম্বন্ধ নেই।

আপনারা দেখবেন আরগাঁ চিত্রে রূপায়িত জটিল সংখ্যার যোগ ও বিয়োগ প্রক্রিয়া ভেক্টর রাশির মত সামান্তরিক ধর্ম অনুসরণ করে। ফলে জটিলরাশিকে দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের প্রতিরূপ হিসাবেও দেখা যেতে পারে। কিন্তু দুটি জটিল রাশির গুণ ও ভাগ প্রক্রিয়ার অনুরূপ কোন প্রক্রিয়া ভেক্টর রাশি অনুসরণ করেনা।

2.9 অনুচ্ছেদে বর্ণিত দ্য-ময়ভারের উপপাদ্য ত্রিকোণমিতি এবং বীজগণিতের মধ্যে একটি সম্পর্ক রচনা করে। বস্তুত আমরা দ্য-ময়ভারের উপপাদ্যের প্রয়োগ অংশটিকে জটিল রাশির ত্রিকোণমিতি বলতে পারি।

পরিশেষে 2.11 অনুচ্ছেদে প্রশ্নাবলী সঙ্কলিত হল। এই সঙ্কলনে অনুচ্ছেদেগুলির ক্রম-অবলম্বন করা হয়েছে। উত্তরমালা অংশে অপেক্ষাকৃত কঠিন অঙ্কগুলির সমাধানের ইঙ্গিত দেওয়া হল।

2.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি অধ্যয়ন করে আপনি

- বীজগণিতে জটিল রাশির উৎপত্তি ও সংজ্ঞা এবং জটিল রাশির বীজগণিত অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা সম্পর্কে ধারণা করতে পারবেন।
- জটিল রাশির ত্রিকোণেমিতিক রূপায়ন, জটিল রাশির বর্গমূল এবং একের ঘনমূল নির্ণয়, আরগাঁ চিত্রের সাহায্যে দুটি জটিল রাশির যোগ ও বিয়োগ প্রক্রিয়া গুণ ও ভাগফলের মডিউলাস ও অ্যামপ্লিটিউড নির্ণয়।

2.3 জটিলরাশির সংজ্ঞা ও জটির রাশির বীজগণিত

সংজ্ঞা (1) a, b বাস্তব সংখ্যা এবং i −1 এর বর্গমূল $\left(\sqrt{-1}\right)$ হলে a+ib রাশিটিকে জটিলরাশি বলা হবে এবং সাধারণত একে z দ্বারা নির্দেশিত করা হবে।

(2) z = a + ib একটি জটিল সংখ্যা হ'লে (যেখানে a এবং b বাস্তব সংখ্যা) a এবং b-কে যথাক্রমে জটিল সংখ্যাটির বাস্তব অংশ (Real part) এবং কাল্পনিক অংশ (Imaginary part) বলা হবে এবং আমরা শিখব

a = Re(z) ও b = Im(z)

দ্রষ্টব্য (1) যদি b = 0 হয় তবে z = a+ i.0 = a হচ্ছে বিশুদ্ধ বাস্তব সংখ্যা আর যদি a = 0 হয় তবে z = ib একটি বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা।

দ্রষ্টব্য (2) বাস্তব সংখ্যাগুলির সেট্‌টি জটিল সংখ্যা সমূহের সেটের উপসেট্‌।

সংজ্ঞা ঃ (3) যে জটিল সংখ্যাটির বাস্তব অংশ এবং কাল্পনিক অংশ উভয়ই শূন্য তাকে আমরা জটিল সংখ্যা শূন্য বলব।

জটিল রাশির বীজগণিত

(1) জটিল সংখ্যার সমতা। দুটি জটিল সংখ্যা z_1 = a+ib এবং z_2 = c+id সমান হবে যদি এবং একমাত্র যদি $Re(z_1) = Re(z_2)$ এবং $Im(z_1) = Im(z_2)$ অর্থাৎ a = c এবং b = d হয়।

দ্রষ্টব্য : কোন জটিল সংখ্যা z = 0 হলে Re z = 0 এবং Im z = 0

(2) দুটি জটিল সংখ্যার যোগ। z_1 = a+ib এবং z_2 = c+id হলে

$$z_1+z_2 = (a+c)+i(b+d) = [Re(z_1)+Re(z_2)+i[Im(z_1)+Im(z_2)]$$

(3) দুটি জটিল সংখ্যার বিয়োগ। z_1 = a+ib এবং z_2 = c + id হলে

$$z_1-z_2 = (a-c)+i(b-d) = [Re(z_1)-Re(z_2)]+i[Im(z_1)-Im(z_2)]$$

দ্রষ্টব্য ঃ −a−ib জটিল সংখ্যাটি a+ib জটিল সংখ্যাটির ঋণাত্মক কারণ

$$(-a-ib)+(a+ib) = (-a+a)+i(-b+b) = 0+i0 = 0.$$

অতএব a+ib = z হলে −a −ib = −z । ফলে $z_1-z_2 = z_1+(-z_2)$ ।

(4) দুটি জটিল সংখ্যার গুণ। z_1 = a + ib এবং z_2 = c+id হলে

$$z_1 \times z_2 = (a+ib) \times (c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

(5) অনুবন্ধী জটিল রাশি $z = a+ib$ হলে $\bar{z} = a - ib$ রাশিটিকে z-এর অনুবন্ধী জটিল রাশি বলা হয়। নিচের বক্তব্যগুলো লক্ষ্য করুন এবং এদের সত্যতা যাচাই করুন।

(i) $\overline{(\bar{z})} = z$ (ii) $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(iii) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ (iv) $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

(v) $z\bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2 = a^2 + b^2$

(6) জটিল রাশির ভাগ

$z_1 = a + ib, \quad z_2 = a + id, \quad (c \neq 0,\ d \neq 0)$ হলে

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

2.4 জটিল রাশির ত্রিকোণমিতিক রূপায়ণ মডিউলাস্ (modulus) এবং অ্যামপ্লিটিউড্ (amplitude)।

ধরি $z = x + iy$ একটি জটিল সংখ্যা। এখন $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$ বসিয়ে পাই $z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$ এটা জটিল সংখ্যা z-এর ত্রিকোণমিতিক রূপায়ণ।

$x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$ সমীকরণ দুটি থেকে পাই $r = \sqrt{x^2+y^2}$ $(r \not< 0)$ এবং $\tan\theta = \frac{y}{x}$।

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \left[(\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2\right]^{1/2}$ হল z-এর মডিউলাস্। লেখা হবে $|z|$ (মড z) অর্থাৎ

$|z| = \left[(\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2\right]^{1/2}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ কে বলা হয় z-এর অ্যামপ্লিটিউড্ এবং লেখা হয় অ্যাম z বা amp z ! অর্থাৎ জটিল রাশির ত্রিকোণমিতিক রূপায়ণ হবে

$z = |z|\{\cos(\mathrm{amp}z) + i\sin(\mathrm{amp}z)\}$

x+iy কোন জটিল রাশি হলে এর **অ্যামপ্লিটিউড্** $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$-এর অসংখ্য মান পাওয়া যাবে। যে মানটি $-\pi$ এবং π-এর মধ্যবর্তী এবং $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ এবং $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ সমীকরণ দুটিকে সিদ্ধ করবে তাকে বলা হবে জটিল সংখ্যা $z = x + iy$ এর মুখ্য **অ্যামপ্লিটিউড্**।

উদাহরণ (1) 3–2i জটিল রাশিটির মডিউলাস এবং মুখ্য **অ্যামপ্লিটিউড্‌** নির্ণয় করুন।

উত্তর। ধরা যাক $z = 3-2i$। তাহলে $|z| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

মুখ্য **অ্যামপ্লিটিউড্‌** $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right)$ এর সেই মান যেটি

$\cos\theta = 4\frac{3}{\sqrt{13}}$ $\quad\sin\theta = \frac{-2}{\sqrt{13}}$ এবং $-\pi < \theta \le \pi$ সম্পর্কগুলোকে সিদ্ধ করবে। ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে পাই মুখ্যমান θ হল $-33^0 69'$।

উদাহরণ (2) $z = -1 + i\sqrt{3}$ জটিল রাশিটির **মডিউলাস** এবং **অ্যামপ্লিটিউড্‌** নির্ণয় করুন।

উত্তর। $z = -1 + i\sqrt{3}$-কে ত্রিকোণমিতিক আকারে রূপায়িত করে পাই

$$z = |z|\{\cos(\text{amp}\, z) + i\sin(\text{amp}\, z)\}$$ ।

যেখানে $|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$ এবং

$$\text{amp}\, z = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$$

মুখ্য মানটি $-\pi \le \text{amp}\, z \le \pi$ এই অসমীকরণ এবং $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ ও $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ সমীকরণ দুটিকে সিদ্ধ করবে। অর্থাৎ মুখ্যমানটি হল 120^0 বা $\frac{2\pi}{3}$ রেডিয়ান।

2.5 জটিল রাশির বর্গমূল — একের ঘনমূল।

ধরা যাক $z = a + ib$ (a এবং b বাস্তব) এর বর্গমূল নির্ণয় করতে হবে।

অর্থাৎ $\sqrt{z}$ এর মান নির্ণয় করতে হবে। কোন জটিল সংখ্যার বর্গমূল বাস্তব হতে পারে না তাই আমরা ধরি $\sqrt{z} = \sqrt{a+ib} = x + iy$

উভয়পক্ষের বর্গ নিয়ে পাই $a + ib = \left(x^2 - y^2\right) + 2ixy$

দুটি জটিল রাশির সমতার সূত্র থেকে পাই $x^2 - y^2 = a$ (1) এবং

$2xy = b$ (2)

অতএব $(x^2+y^2) = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = a^2+b^2$

$\therefore \quad x^2+y^2 = +\sqrt{a^2+b^2}$ ....(3) [দুটি বাস্তব রাশির বর্গের যোগফল ঋণাত্মক হতে পারে না]

(1) এবং (3) থেকে পাই

$$x^2 = \frac{1}{2}\left\{a+\sqrt{a^2+b^2}\right\} \qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{a+\sqrt{a^2+b^2}\right\}^{1/2}$$

বা

$$y^2 = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{a^2+b^2}-a\right\} \qquad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{a^2+b^2}-a\right\}^{1/2}$$

যেখানে $xy = \frac{b}{2}$

অতএব a + ib এর বর্গমূল দুটি হ'ল

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left\{\sqrt{a^2+b^2}+a\right\}^{1/2} + i\left\{\sqrt{a^2+b^2}-a\right\}^{1/2}\right]$$

উদাহরণ (1) i এর বর্গমূল নির্ণয় করুন।

i জটিল রাশিটিকে a + ib এর সঙ্গে তুলনা করে পাই

a = 0, b = 1।

a + ib-এর বর্গমূলের সূত্র ব্যবহার করে পাই

$$\sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left\{\sqrt{0^2+1^2}+0\right\}^{1/2} + i\left\{\sqrt{0^2+1^2}-0\right\}^{1/2}\right]$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}[1+i]$$

উদাহরণ (2) –7+24i এর বর্গমূল নির্ণয় করুন।

উত্তর। ধরা যাক $\sqrt{(-7+24i)} = x+iy$ (x বাস্তব, y বাস্তব)।

তাহলে $-7+24i = x^2 - y^2 + 2xyi$ ।

দুটি জটিল রাশির সমতার সূত্র থেকে পাই $-7 = x^2 - y^2$ (1)

$$24 = 2xy \qquad (2)$$

অতএব $\left(x^2+y^2\right)^2 = \left(x^2-y^2\right)^2 + (2xy)^2 = 49+576 = 625 = (25)^2$

$\therefore\ x^2+y^2 = 25$ (3)

(1) এবং (3) থেকে পাই $x^2 = 9,\ y^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 3,\quad y = \pm 4$

কিন্তু xy-এর গুণফল = 12 ধনাত্মক বলে x = 3, y = 4 অথবা x = –3, y = –4 x,y এর এই দুটি মানযুগল পাওয়া যায়। কাজেই নির্ণেয় বর্গমূল হবে 3+4i অথবা –3–4i । অর্থাৎ $\sqrt{-7+24i} = \pm(3+4i)$ ।

একের ঘনমূল।

$x^3 = 1$ সমীকরণটির বীজগুলি হ'ল একের ঘনমূল।

এখন $x^3 = 1$ হলে $x^3 - 1 = 0$ বা $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ অথবা } x^2+x+1 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \left(-1 \pm i\sqrt{3}\right)/2$$

অতএব একের ঘনমূলগুলি হল $1,\ -\frac{1}{2}+i\sqrt{\frac{3}{2}}$ এবং $-\frac{1}{2}-i\sqrt{\frac{3}{2}}$

এদের শেষ দুটি অর্থাৎ $-\frac{1}{2}+i\sqrt{\frac{3}{2}},\quad -\frac{1}{2}-i\sqrt{\frac{3}{2}}$ হল জটিল রাশি। এদের একটিকে যদি আমরা ω বলি তাহলে দেখতে পাব অন্যটি হবে ω^2 ।

প্রমাণ : ধরি $\omega=-\frac{1}{2}+i\sqrt{\frac{3}{2}}$ । তাহলে $\omega=-\cos 60^0+i\sin 60^0=+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\frac{2\pi}{3}$

$$\therefore \omega^2=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2=\left(\cos^2\frac{2\pi}{3}-\sin^2\frac{2\pi}{3}\right)+2i\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$=-\frac{1}{2}-i\sqrt{\frac{3}{2}}$$

অনুরূপভাবে যদি $\omega=-\frac{1}{2}-i\sqrt{\frac{3}{2}}$ ধরা হয় তবে $\omega=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$

এবং $\omega^2=\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^2=\cos\frac{8\pi}{3}+i\sin\frac{8\pi}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

$$=-\frac{1}{2}+i\sqrt{\frac{3}{2}}$$

একের জটিল ঘনমূল পরস্পর অনুবন্ধী এবং এদের গুণফল $\omega.\omega^2=\omega^3=\left[(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2\right]\frac{1}{4}=1$

ω এবং ω^2 অনুবন্ধী জটিল রাশি বলে $\omega+\omega^2=2\,\mathrm{Re}(\omega)=2\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

অর্থাৎ $1+\omega+\omega^2=0$

উদাহরণ 1. প্রমাণ করুন যে $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)=9$

উত্তর $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)=(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)$

[যেহেতু $\omega^4=\omega^3\cdot\omega=1\cdot\omega=\omega$

এবং $\omega^8=\left(\omega^4\right)^2=\omega$]

$$= \left[(1-\omega)(1-\omega^2)\right]^2$$

$$= \left[1-\omega-\omega^2+\omega^3\right]^2$$

$$= \left[1-(\omega+\omega^2)+1\right]^2$$

$$= \left[1+1+1\right]^2 = 3^2 = 9 \qquad \left[\because\ \omega+\omega^2 = -1\right]$$

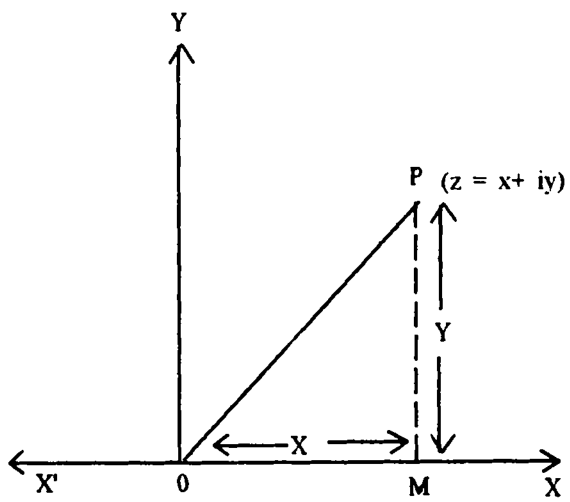
2.6 আরগাঁ সমতল, আরগাঁ চিত্র—আরগাঁ চিত্রের সাহায্যে দুটি জটিল রাশির যোগ ও বিয়োগ প্রক্রিয়া

যেহেতু একটি জটিল রাশি $z = x+iy$ দুটি বাস্তব রাশি x এবং y এর একটি নির্দিষ্ট ক্রমের সমবায় এবং যেহেতু কোন সমতলে একটি বিন্দুকে দুটি স্থানাঙ্ক (x,y) দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায় অতএব প্রত্যেক জটিল রাশি $z = x+iy$ এবং সমতলে একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x,y), এর মধ্যে একএক অনুযোগ (one to one correspondence) স্থাপন করা সম্ভব।

ধরি $z = x + iy$ একটি জটিল রাশি,

যেখানে x,y বাস্তব সংখ্যা। $x = Re(z)$-কে x- অক্ষে স্থাপন করে এবং $y = Im(z)$ কে y-অক্ষে স্থাপন করে, একটি বিন্দু $P = (x,y)$ পাওয়া যাবে যাকে আমরা জটিল রাশি z এর রূপায়ণ বলতে পারি। তখন z -কে বলা হবে P বিন্দুর জটিল স্থানাঙ্ক।

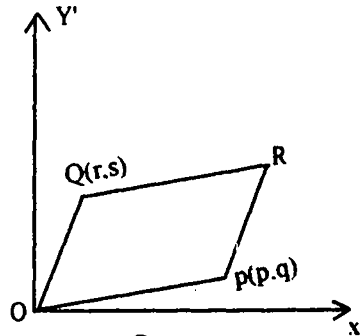
যেহেতু কোন জটিল রাশির জ্যামিতিক রূপায়ণে Re(z)-কে x অক্ষে এবং Im(z)-কে y-অক্ষে স্থাপন করা হয় তাই x-অক্ষকে বাস্তব অক্ষ এবং y-অক্ষকে কাল্পনিক অক্ষ বলা হয়। এই দুটি অক্ষ সমন্বিত কোন সমতলকে আরগাঁ সমতল (Argand's plane) এবং জটিল রাশির জ্যামিতিক চিত্রকে আরগাঁ চিত্র (Argand's diagram) বলা হয়।



চিত্র 2.1

2.6.1 উপপাদ্য : জটিল সমতলে দুটি জটিল সংখ্যার যোগ প্রক্রিয়া সামান্তরিক ধর্ম অনুসরণ করে

প্রমাণ : ধরি $\alpha = p + iq$, $\beta = r + is$ (p, q, r, s বাস্তব) দুটি জটিল সংখ্যা। এরা জটিল সমতলে যথাক্রমে P এবং Q বিন্দুর দ্বারা রূপায়িত হয়। তাহলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (p,q) এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে (r,s)। এখন OPRQ সামান্তরিকটি আঁকা হল। R বিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি (X Y) হয় তবে আমরা দেখব $X = p+r$ এবং $Y = q+s$



চিত্র 2.2

কারণ X = x অক্ষের উপর OR এর লম্ব অভিক্ষেপ

= x অক্ষের উপর OP এবং PR এর লম্ব অভিক্ষেপের সমষ্টি

= x অক্ষের উপর OP এবং OQ-এর লম্ব অভিক্ষেপের সমষ্টি

$= p + r$

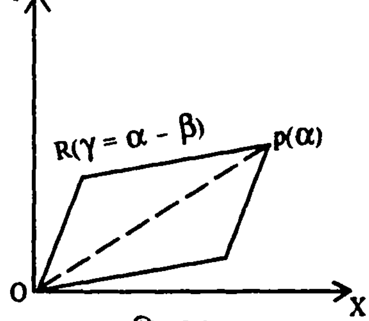
অনুরূপভাবে, $Y = q+s$ । অতএব R বিন্দু $(p+r)+i(q+s)$ জটিল সংখ্যাটিকে (যা $p+ iq$ এবং $r+is$ এর যোগফল) রূপায়িত করে।

অনুসিদ্ধান্ত : আরগাঁ চিত্রের সাহায্যে জটিল সংখ্যার যোগ প্রক্রিয়া সাধনের অনুরূপে জটিল সংখ্যার বিয়োগ প্রক্রিয়া সাধিত হয়।

ধরা যাক $\alpha = p+iq$ এবং $\beta = r+is$ [p, q, r, s সংখ্যাগুলি বাস্তব]

এবং আরগাঁ চিত্রে P ও Q বিন্দু দুটি যথাক্রমে α ও β জটিল সংখ্যাদ্বয়কে রূপায়িত করে। এখন আমরা যদি OQPR সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ করি তবে R বিন্দুটি $\alpha - \beta$ জটিল সংখ্যাকে রূপায়িত করবে। কারণ উপপাদ্য 2.6.1 থেকে পাই OQPR সামান্তরিকের OP কর্ণের প্রান্তবিন্দু $P=(=\alpha)$, OQ এবং OR সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের প্রান্ত বিন্দু $Q(=\beta)$ এবং $R(=\gamma)$ দ্বারা রূপায়িত জটিল সংখ্যাদ্বয়ের যোগফলের রূপায়ণ। অর্থাৎ

$\alpha = \beta + \gamma \Rightarrow \gamma = \alpha - \beta$ । লক্ষ্য করুন যে $|\alpha - \beta| = \overline{QP}$, এবং $amp(\alpha - \beta) = \angle XOR = QP$ রেখাংশের নতিকোণ।



চিত্র 2.3

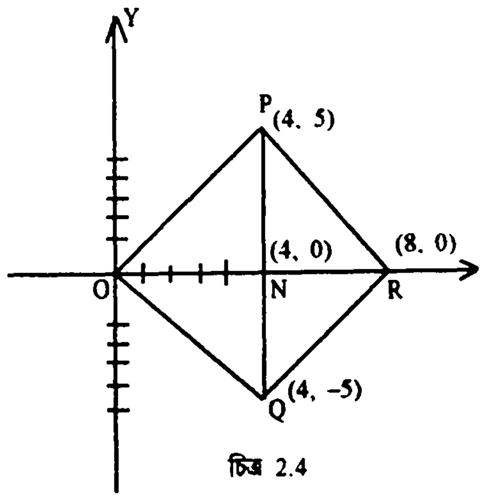
Q(β)

উদাহরণ 1. জটিল সমতলে চিত্রাঙ্কন করে নীচের যোগ ক্রিয়া সম্পন্ন করুন।

$$(4+5i)+(4-5i)$$

উত্তর। জটিল সমতলে P(4,5) বিন্দু 4+5i-কে এবং Q(4,-5) বিন্দু 4–5i-কে রূপায়িত করলে $\overrightarrow{OX}$ সরলরেখা PQ এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক। ধরা যাক $\overrightarrow{OX}$ এবং PQ এর ছেদবিন্দু N, ON কে R বিন্দু পর্যন্ত যদি এরূপে বাড়ান হয় যাতে ON = NR তবে OPRQ একটি সামান্তরিক হবে যার OR একটি কর্ণ এবং R মূল বিন্দুর বিপরীত কৌনিক বিন্দু। অতএব উপপাদ্য 2.61 অনুযায়ী (4+5i)+(4–5i) যোগফল R বিন্দু দ্বারা রূপায়িত হবে। কিন্তু চিত্রে R বিন্দুর স্থানাঙ্ক (8,0)

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল = 8+0i = 8



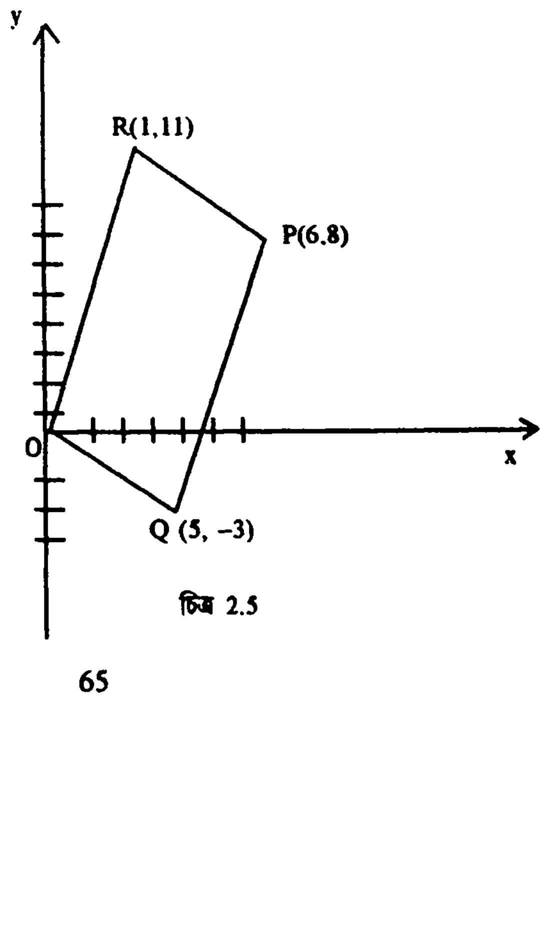
চিত্র 2.4

উদাহরণ 2. জটিল সমতলে চিত্রাঙ্কন করে নিচের বিয়োগ প্রক্রিয়া সম্পন্ন করুন।

$$(6+8i)-(5-3i)$$

উত্তর : জটিল সমতলে P(6,8) বিন্দু 6+8i কে এবং Q(5, -3) বিন্দু 5–3i কে রূপায়িত করলে, OQPR সামান্তরিকের R বিন্দুটির স্থানাঙ্ক হবে (1,11) 2.6.1 উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত থেকে পাই R(1,11) বিন্দুই হ'ল (6+8i)–(5–3i) জটিল রাশিটির রূপায়ণ।

অতএব (6+8i)–(5–3i) = 1+11i



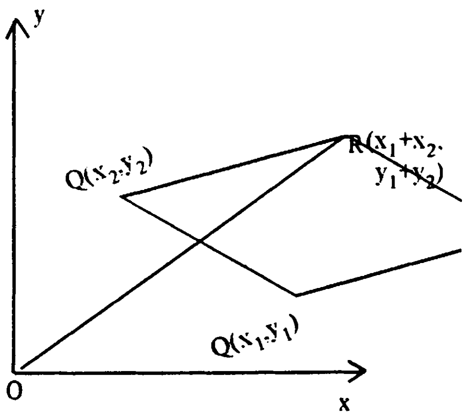
চিত্র 2.5

2.7 মডিউলাসের ধর্ম—দুটি জটিলরাশির গুণ ও ভাগফলের মডিউলাস ও অ্যামপ্লিটিউড্

এই অনুচ্ছেদে আমরা দুটি জটিল রাশির যোগ ও বিয়োগফলের মডিউলাস সম্পর্কিত দুটি অসমতা এবং দুটি জটিল রাশির গুণ ও ভাগফলের মডিউলাস এবং অ্যামাপ্লিডিউড্ বিষয় আলোচনা করা হবে।

2.7.1 উপপাদ্য। z_1 এবং z_2 জটিল সংখ্যাদ্বয়ের ক্ষেত্রে

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$



চিত্র 2.6

প্রথম প্রমাণ ধরা যাক্ $z_1 = x_1 + iy_1$ এবং $z_2 = x_2 + iy_2$ এবং আরগাঁ চিত্রে $P(x_1, y_1)$ বিন্দু $x_1 + iy_1$ কে ও $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু $x_2 + iy_2$-কে রূপায়িত করছে। তাহলে OPRQ সামন্তরিকের OR কর্ণের প্রান্তবিন্দু R হল $z_1 + z_2$ জটিল সংখ্যাটির রূপায়ণ; এবং R এর স্থানাঙ্ক হল $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

এখন $|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = |\overline{OP}|$

$$|z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = |\overline{OQ}|$$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} = \overrightarrow{OR}$$

ΔOPR-এর $\overline{OP}$ এবং $\overline{PR}$ বাহুদুটির সমষ্টি তৃতীয় বাহু $\overline{OR}$-এর চেয়ে ছোট হতে পারে না অর্থাৎ

$$|\overline{OP}| + |\overline{PR}| \ge |\overline{OR}|$$

বা, $|\overline{OR}| \le |\overline{OP}| + |\overline{PR}|$

বা, $|\overline{OR}| \le |\overline{OP}| + |\overline{OQ}| \qquad [\because |\overline{OQ}| = |\overline{PR}|]$

$\therefore |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

দ্বিতীয় প্রমাণ : ধরা যাক $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

তাহলে $|z_1| = r_1$ এবং $|z_2| = r_2$

$$\therefore\ z_1 + z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= (r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2) + i(r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2)$$

$$\therefore\ |z_1 + z_2| = \left[(r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2)^2 + (r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \left[r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad [\because \cos(\theta_1 - \theta_2) \le 1]$$

$$= r_1 + r_2 = |z_1| + |z_2|$$

$$\therefore\ |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

তৃতীয় প্রমাণ : $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$

$$= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \qquad [\because z_2\bar{z}_1 = (\overline{z_1\bar{z}_2})]$$

$$\le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| \qquad [\because \mathrm{Re}(z) \le |z|]$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2|$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \qquad (\because |\bar{z}_2| = |z_2|)$$

$$= (|z_1| + |z_2|)^2$$

$\therefore\ |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ [কারণ $|z_1|, |z_2|, |z_1 + z_2|$ কোনটাই ঋণাত্মক নয়]

2.7.2 উপপাদ্য । z_1 এবং z_2 জটিলসংখ্যা হলে

$$\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1|-|z_2|$$

প্রমাণ : $z_1 = (z_1 - z_2) + z_2$

$$\therefore |z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \le |z_1 - z_2| + |z_2| \qquad \text{(2.7.1 উপপাদ্য থেকে)}$$

$$\therefore |z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$$

অনুরূপভাবে $|z_2| - |z_1| \le |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$

অতএব $|z_1| - |z_2|$ এবং $|z_2| - |z_1|$ এরূপ দুটি বাস্তবসংখ্যা যারা প্রত্যেকেই $|z_1 - z_2|$ থেকে ক্ষুদ্রতর।

$$\therefore \big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|$$

2.7.3 উপপাদ্য । যদি u_1 এবং u_2 দুটি জটিল সংখ্যা এবং u_1 এর কোন অ্যামপ্লিটিউড θ_1 হয় আর u_2 এর কোন অ্যামপ্লিটিউড্ θ_2 হয় তাহলে $\theta_1 + \theta_2$, u_1u_2 এর একটি অ্যামপ্লিডিউড্ হবে।

u_1u_2 এর মডিউলাস হবে জটিল সংখ্যাদ্বয়ের মডিউলাসের গুণ।

প্রমাণ : ধরি $u_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ এবং $u_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

এখন $u_1u_2 = r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$= r_1r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$$

$$= r_1r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

$\therefore u_1u_2$ জটিল সংখ্যাটির একটি **অ্যামপ্লিটিউড্** হল $\theta_1 + \theta_2$ এবং u_1u_2 এর মডিউলাস হল $r_1r_2 = |u_1||u_2|$

দ্রষ্টব্য : জটিল সংখ্যাগুলির অ্যামপ্লিটিউডের মুখ্যমান ধরলে উপপাদ্যটি সত্য নাও হতে পারে।

উদাহরণ : ধরি $u_1 = 1 - i$, $u_2 = i$, $u_3 = -1 + i$

তাহলে $\operatorname{amp} u_1$ এর মুখ্যমান $-\frac{\pi}{4}$,

$amp\,u_2$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{2}$

$amp\,u_3$ এর মুখ্যমান $\frac{3\pi}{4}$

$u_1u_2 = 1+i, \quad u_2u_3 = -1-i$

$\therefore$ $amp(u_1u_2)$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2} = amp\,u_1$ এর মুখ্যমান $+amp\,u_2$ এর মুখ্যমান।

$amp(u_2u_3)$-এর মুখ্যমান $-\frac{3\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}$

কিন্তু $amp(u_2u_3)$ এর একটি মান হল $\frac{5\pi}{4}$ এবং $\frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}$

2.7.4 উপপাদ্য । $z_1 = r_1[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]$ এবং $z_2 = r_2[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$ দুটি জটিল সংখ্যা হলে $\frac{z_1}{z_2}(z_2 \neq 0)$ হবে একটি জটিলসংখ্যা যার

(i) মডিউলাস হবে $\frac{r_1}{r_2}$

(ii) অ্যামপ্লিটিউড্ হবে z_1 এবং z_2 এর অ্যামপ্লিটিউড্ দুটির অন্তর অথবা অন্তর থেকে 2π-এর কোন গুণিতকের ব্যবধানে অবস্থিত।

প্রমাণ : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$ = একটি জটিল সংখ্যা।

ধরি $\frac{z_1}{z_2} = r[\cos\phi + i\sin\phi]$

বা, $z_1 = r[\cos\phi + i\sin\phi]z_2$

$= r_2r[\cos\phi + i\sin\phi][\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$

$= rr_2[\cos(\phi+\theta_2) + i\sin(\phi+\theta_2)]$

বা, $r_1[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1] = rr_2[\cos(\phi+\theta_2) + i\sin(\phi+\theta_2)]$

$\therefore\ r_1\cos\theta_1 = rr_2\cos(\phi+\theta_2)$; $r_1\sin\theta_1 = rr_2\sin(\phi+\theta_2)$

$\therefore r_1^2 = r^2 r_2^2 \Rightarrow r_1 = rr_2$ [$\because$ r, r_1, r_2 অঋণাত্মক]

$$\Rightarrow r = \frac{r_1}{r_2}$$

আবার $\cos\theta_1 = \cos(\phi+\theta_2)$ এবং $\sin\theta_1 = \sin(\phi+\theta_2)$

$\therefore\ \theta_1 = \phi + \theta_2 + 2k\pi,$ [k পূর্ণসংখ্যা]

$\therefore\ \theta_1 - \theta_2 = \phi + 2k\pi,$ [k পূর্ণসংখ্যা]

2.8 দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণাবলী

উদাহরণ 1 : $z = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}$ জটিল রাশিটিকে মেরুজ (Polar) আকারে প্রকাশ করুন এবং এর থেকে $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান। ধরি $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ যেখানে $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 + i$

2.7.4 উপপাদ্য থেকে পাই

$$z = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\text{amp}z_1 - \text{amp}z_2) + i\sin(\text{amp}z_1 - \text{amp}z_2)] \ldots\ldots (1)$$

এখন, $|z_1| = 2$, $|z_2| = \sqrt{2}$, $\text{amp}z_1 = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{-1} = \dfrac{2\pi}{3}$, $\text{amp}z_2 = \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore$ (1) থেকে পাই

$$z = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

আবার $z=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)(1-i)}{2}=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$ ....(3)

$\therefore$ (2) ও (3) থেকে পাই

$$\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2} \text{ এবং } \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

অর্থাৎ $\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

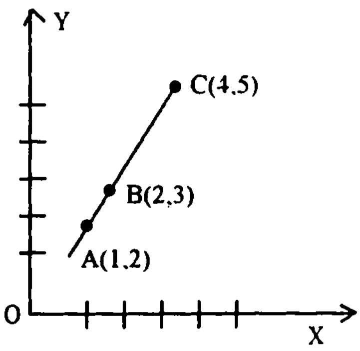
উদাহরণ 2. A, B, C বিন্দু তিনটি যথাক্রমে 1+2i, 2+3i, এবং 4+5i এই তিনটি জটিল রাশিকে নির্দেশ করছে। দেখান যে, A, B, C বিন্দুত্রয় সমরেখ।

সমাধান : A, B, C বিন্দু তিনটিকে আরগাঁ সমতলে স্থাপন করে পাই যে

A এর স্থানাঙ্ক (1,2),

B এর স্থানাঙ্ক (2,3)

C এর স্থানাঙ্ক (4,5)



চিত্র 2.7

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}$ রেখাংশের নতি $= 1 = \tan\dfrac{\pi}{4}$

এবং $\overrightarrow{BC}$ রেখাংশের নতি $=\dfrac{2}{2}=1=\tan\dfrac{\pi}{4}=\overrightarrow{AB}$ রেখাংশের নতি।

অতএব A,B,C বিন্দুত্রয় সমরেখ।

দ্বিতীয় পদ্ধতি। A,B,C বিন্দু নির্দেশক জটিল রাশি তিনটিকে যথাক্রমে z_1, z_2, z_3 ধরি।

2.6.1 উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত থেকে পাই, $\overline{AB}$ রেখাংশের নতিকোণ $=\text{amp}(z_2-z_1)$

$$=\text{amp}(1+i)$$

$$=\frac{\pi}{4},$$

অনুরূপভাবে $\overline{BC}$ রেখাংশের নতিকোণ $=\text{amp}(z_3-z_2)$

$$=\text{amp }(1+i)=\frac{\pi}{4}$$

অতএব A, B, C বিন্দুত্রয় সমরেখ।

উদাহরণ 3 : যদি z_1 এবং z_2 দুটি জটিল রাশি হয় তবে দেখান যে,

(i) $|z_1| \geq \frac{|Re(z_1)+Im(z_1)|}{\sqrt{2}}$

(ii) $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2 \leq 2|z_1||z_2|$

সমাধানঃ ধরা যাক্

(i) $z_1 = x_1-iy_1$, $\qquad (x_1, y_1$ বাস্তব)

বাস্তব রাশির বর্গ অঋণাত্মক বলে পাই $(x_1-y_1)^2 \geq 0$

অর্থাৎ $x_1^2+y_1^2 \geq 2x_1y_1 = 2|x_1||y_1|$

বা, $2(x_1^2+y_1^2) \geq x_1^2+y_1^2+2|x_1||y_1| = |x_1|^2+|y_1|^2+2|x_1||y_1|$

বা, $2(x_1^2+y_1^2) \geq (|x_1|+|y_1|)^2$

বা, $x_1^2+y_1^2 \geq \left(\frac{|x_1|+|y_1|}{\sqrt{2}}\right)^2$

বা, $|z_1|^2 \geq \left(\frac{|Re\,z_1|+|Im\,z_1|}{\sqrt{2}}\right)^2$

বা, $|z_1| \geq \frac{|Re\,z_1|+|Im\,z_1|}{\sqrt{2}}$

(ii) $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2 = z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1(\bar{\bar{z}}_2) \qquad [\because (\bar{\bar{z}}_2)=z_2]$

$= z_1\bar{z}_2+(\overline{z_1\bar{z}_2}) \qquad [\because \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1 . \bar{z}_2]$

$= z+\bar{z}, \qquad z=z_1\bar{z}_2$

$= 2Re\ z$

$\leq 2|z| = 2|z_1\bar{z}_2| = 2|z_1||\bar{z}_2| = 2|z_1||z_2|$

বা, $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2 \leq 2|z_1||z_2|$

উদাহরণ 4 : z_1 এবং z_2 দুটি জটিল রাশি $(z_1, z_2 \neq 0)$ এবং $|z_1| = |z_2|$, $\text{amp}z_1 + \text{amp}z_2 = 0$ হলে দেখান যে z_1, z_2 পরস্পর অনুবন্ধী জটিল রাশি।

সমাধান ঃ ধরা যাক, $|z_1| = |z_2| = r$ এবং $\text{amp}\, z_1 = -\text{amp}\, z_2 = \theta$

তাহ'লে $z_1 = |z_1|[\cos(\text{amp}\, z_1) + i\sin(\text{amp}\, z_1)]$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$

এবং $z_2 = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$

$= r[\cos\theta - i\sin\theta]$

অতএব প্রমাণিত হল যে, z_1, z_2 পরস্পর অনুবন্ধী জটিল রাশি।

উদাহরণ 5 : z_1, z_2 দুটি জটিল রাশি এবং $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ হলে প্রমাণ করুন যে $\text{amp}\, z_1$ এবং $\text{amp}\, z_2$ এর অন্তর $\frac{\pi}{2}$ অথবা $\frac{3\pi}{2}$ ।

সমাধান ঃ ধরা যাক্ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ এবং $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

প্রদত্ত শর্ত থেকে পাই $|z_1 + z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$

বা, $(z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})$

বা, $(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$

বা, $z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$

বা, $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0$

বা, $\text{Re}\ z_1\bar{z}_2 = 0$

বা, $r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) = 0$

বা, $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$

বা, $\theta_1 - \theta_2 = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, n অখণ্ড সংখ্যা।

বা, $\text{amp}z_1 - \text{amp}z_2 = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ।

অর্থাৎ $\text{amp}\ z_1$ এবং $\text{amp}\ z_2$-এর অন্তর $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, n অখণ্ড সংখ্যা।

উদাহরণ 6 : z একটি পরিবর্তনশীল জটিল রাশি এবং $\frac{z-i}{z+i}$ এর অ্যামপ্লিটিউড্‌ $\frac{\pi}{4}$ হলে দেখান যে z জটিল সমতলের একটি বৃত্তে অবস্থান করে।

সমাধান ঃ উপপাদ্য 2.7.4 থেকে পাই

$$\operatorname{amp}\frac{z-i}{z+i} = [\operatorname{amp}(z-i) - \operatorname{amp}(z+i)] + 2k\pi, \ k \text{ অখণ্ড সংখ্যা}$$

অর্থাৎ $\frac{\pi}{4} = \left[\tan^{-1}\frac{y-1}{x} - \tan^{-1}\frac{y+1}{x}\right] + 2k\pi, \ z = x+iy,$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{y-1}{x} - \frac{y+1}{x}}{1+\frac{(y-1)}{x}\frac{(y+1)}{x}} + 2k\pi$$

$$= \tan^{-1}\frac{-2x}{x^2+y^2-1} + 2k\pi$$

বা, $\tan\left(\frac{\pi}{4} - 2k\pi\right) = -\frac{2x}{x^2+y^2-1}$

বা, $\frac{-2x}{x^2+y^2-1} = 1$

বা, $x^2 + y^2 + 2x = 1$

বা, $(x+1)^2 + y^2 = 2$, **এটি একটি বৃত্তের সমীকরণ। অতএব প্রমাণিত হল যে $z = x+iy$ হলে (x,y) বিন্দুটি যার জটিল স্থানাঙ্ক z জটিল সমতলে একটি বৃত্তে অবস্থান করে।**

উদাহরণ 7. প্রমাণ করুন যে জটিল সমতলে $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$, (b বাস্তব) একটি সরলরেখার সমীকরণ।

সমাধান ঃ $\bar{a}z + a\bar{z} = \bar{a}z + \left(\overline{\bar{a}z}\right) = 2\operatorname{Re}(\bar{a}z)$

ধরা যাক $a = \alpha + i\beta$ এবং $z = x+iy$ । তাহলে

$$2\operatorname{Re}(\bar{a}z) = 2\operatorname{Re}[(\alpha - i\beta)(x+iy)]$$

$$= 2(\alpha x + \beta y)$$

অতএব $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0 \Rightarrow 2(\alpha x + \beta y) + b = 0$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y + \frac{b}{2} = 0,$$ একটি সরলরেখার সমীকরণ।

অর্থাৎ $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$ সমীকরণটি জটিল সমতলে একটি সরলরেখার সমীকরণ।

উদাহরণ 8. প্রমাণ করুন যে, একটি বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ হল

$$z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z + b = 0 \qquad (b \text{ বাস্তব})$$

দেখান যে এই বৃত্তের কেন্দ্র $-a$ এবং এর ব্যাসার্ধ $\sqrt{a\bar{a} - b}$

সমাধান : ধরা যাক, $z = x+iy$, $a = g + if$

তাহলে প্রদত্ত সমীকরণের বামপক্ষ $= x^2 + y^2 + 2\,\text{Re}(\bar{a}z) + b$

$$= x^2 + y^2 + 2\,\text{Re}(g - if)(x + iy) + b$$

$$= x^2 + y^2 + 2(gx + fy) + b$$

$$= x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + b$$

অতএব $z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z + b = 0$

$$\therefore x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + b = 0$$

অর্থাৎ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি সমীকরণ। বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ

$\sqrt{g^2 + f^2 - b} = \sqrt{a\bar{a} - b}$ । বৃত্তের কেন্দ্রের জটিল স্থানাঙ্ক $-g - if = -a$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{a\bar{a} - b}$

উদাহরণ 9. দেখান যে তিনটি জটিল রাশি z_1, z_2, z_3, এর একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হবার আবশ্যকীয় ও পর্য্যাপ্ত শর্ত হল

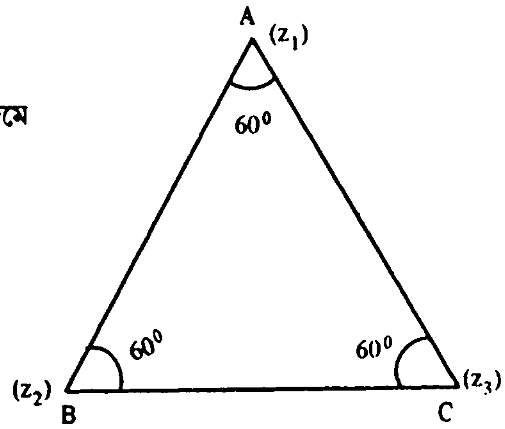
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

সমাধান : ধরি z_1, z_2, z_3 জটিল রাশি তিনটি যথাক্রমে A, B, ও C বিন্দুকে নির্দেশ করছে।

তাহলে $\overline{AB} = |z_2 - z_1|$

$$\overline{BC} = |z_3 - z_2|$$

$$\overline{CA} = |z_1 - z_3|$$



চিত্র 2.8

এখন ΔABC যদি একটি সমবাহু ত্রিভুজ হয় তবে

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\overline{AB}\,.\,\overline{AC}\sin 60^0 = \frac{1}{2}\overline{BC}\,.\,\overline{BA}\sin 60^0 = \frac{1}{2}\overline{CA}\,.\,\overline{CB}\sin 60^0$

অর্থাৎ $\frac{\overline{AB}\,.\,\overline{AC}}{\overline{BC}\,.\,\overline{BA}} = \frac{\overline{BC}\,.\,\overline{BA}}{\overline{CA}\,.\,\overline{CB}}$ বা, $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}}$

বা, $\frac{|z_3 - z_1|}{|z_3 - z_2|} = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - z_3|}$

বা, $\left|\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right| = \left|\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\right|$

$\text{amp}\left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right) = \text{amp}(z_3 - z_1) - \text{amp}(z_3 - z_2) = \angle BCA = 60^0$

এবং $\text{amp}\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\right) = \text{amp}(z_1 - z_2) - \text{amp}(z_1 - z_3) = \angle CAB = 60^0$

অর্থাৎ $\text{amp}\left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right) = \text{amp}\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\right)$..........(2)

(1) এবং (2) থেকে পাই $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$

অর্থাৎ $(z_3 - z_1)(z_1 - z_3) = (z_1 - z_2)(z_3 - z_2)$

বা, $2z_3z_1 - z_1^2 - z_3^2 = z_1z_3 - z_1z_2 - z_2z_3 + z_2^2$

বা, $z_2z_3 + z_3z_1 + z_1z_2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

অতএব শর্তটি আবশ্যকীয়।

বিপরীতক্রমে, যদি $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_2z_3 + z_3z_1 + z_1z_2$ হয় তাহলে

$z_1^2 + z_2^2\omega^3 + z_3^2\omega^3 - z_2z_3 - z_3z_1 - z_1z_2 = 0 \quad [\because \omega^3 = 1]$

বা, $z_1^2 + z_2^2\omega^3 + z_3^2\omega^3 + z_2z_3(\omega + \omega^2) + z_3z_1(\omega + \omega^2) + z_1z_2(\omega + \omega^2) = 0$

$[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

বা, $z_1(z_1+\omega z_2+\omega^2 z_3)+z_2\omega^2(z_1+\omega z_2+\omega^2 z_3)+z_3\omega(z_1+\omega z_2+\omega^2 z_3)=0$

$[\because\ \omega^4=\omega^3\ \omega=\omega]$

বা, $(z_1+\omega z_2+\omega^2 z_3)(z_1+\omega^2 z_2+\omega z_3)=0$

এখন যদি $z_1+\omega z_2+\omega^2 z_3=0$ অথবা, $z_1+\omega^2 z_2+\omega z_3=0$

বা, $z_1+\omega z_2+z_3(-1-\omega)=0$ অথবা, $z_1+\omega z_3+z_2(-1-\omega)=0$

বা, $(z_1-z_3)+\omega(z_2-z_3)=0$ অথবা, $(z_1-z_2)+\omega(z_3-z_2)=0$

বা, $z_1-z_3=-\omega(z_2-z_3)$ অথবা, $z_1-z_2=-\omega(z_3-z_2)$

বা, $|z_1-z_3|=|z_2-z_3|$ অথবা, $|z_1-z_2|=|z_3-z_2|$ $[\because |\omega|=1]$

অর্থাৎ $|z_1-z_3|=|z_2-z_3|=|z_1-z_2|$

=> $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

অতএব শর্তটি পর্য্যাপ্ত।

উদাহরণ 10. যদি তিনটি জটিল রাশি নিম্নলিখিত সম্পর্ক সিদ্ধ করে

$|z_1|=|z_2|=|z_3|$ এবং $z_1+z_2+z_3=0$

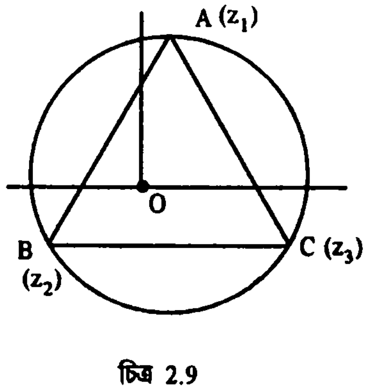
তবে প্রমাণ করুন যে ঐ তিনটি জটিল রাশি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি নির্দেশ করে।

প্রমাণ : যেহেতু $|z_1|=|z_2|=|z_3|$

মূলবিন্দু O, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র।

আবার যেহেতু $z_1+z_2+z_3=0$

$\therefore\ \dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}=0$



চিত্র 2.9

অর্থাৎ ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র মূলবিন্দু। যেহেতু ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র এবং ভরকেন্দ্র অভিন্ন। ত্রিভুজটি সমবাহু।

2.10 দ্য ময়ভরের (De Moivre) উপপাদ্য এবং এর প্রয়োগ

2.9.1 উপপাদ্য : n একটি পূর্ণসংখ্যা এবং θ একটি বাস্তব কোণ হলে

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

প্রমাণ : n = 0 হলে উপপাদ্যটি সত্য।

(i) ধরি n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। n = 1 হলে উপপাদ্যটি একটি অভেদ।

ধরা যাক যে $v = \cos\theta + i\sin\theta$ এবং n এর মান যখন k (k<n) তখন উপপাদ্যটি সত্য।

অর্থাৎ $v^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$

$$\therefore v^{k+1} = v^k . v = (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= (\cos k\theta.\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)$$

$$= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta$$

অতএব n = k-এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য হলে উপপাদ্যটি n = k+1-এর জন্য সত্য। কিন্তু উপপাদ্যটি n = 1 এর জন্য সত্য। $\therefore$ উপপাদ্যটি যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-এর জন্য সত্য।

(ii) ধরি n একটি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। অর্থাৎ n = – m (m ধনাত্মক)

তাহলে $v^n = v^{-m} = \dfrac{1}{v^m} = \dfrac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} = \cos m\theta - i\sin m\theta$

$$= \cos(-n)\theta - i\sin(-n)\theta$$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(i) এবং (ii) একসঙ্গে মিলিয়ে পাই n একটি পূর্ণসংখ্যা হলে

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

2.9.2 উপপাদ্য : n র‍্যাসনাল সংখ্যা এবং θ একটি বাস্তব কোণ হলে $\cos n\theta + i\sin n\theta$ হবে $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ এর একটি মান।

প্রমাণ। ধরি $n = \dfrac{p}{q}$ $p, q (q \neq o)$ অখণ্ড সংখ্যা, $q > 1$

$$\left(\cos\frac{p}{q}\theta + i\sin\frac{p}{q}\theta\right)^q = \cos(p\theta) + i\sin(p\theta)$$ প্রথম উপপাদ্যের প্রথম অংশ থেকে।

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^p$$ প্রথম উপপাদ্য থেকে।

অতএব $\cos\frac{p}{q}\theta + i\sin\frac{p}{q}\theta$ হল $(\cos\theta + i\sin\theta)^{p/q}$ এর একটি মান।

অর্থাৎ $\cos n\theta + i\sin n\theta$ হল $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ এর একটি মান।

2.9.3 দ্য ময়ভরের উপপাদ্যের সাহায্যে জটিল সংখ্যার মূল নির্ণয়।

n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হলে যে সংখ্যার n-তম ঘাত z সেই সংখ্যাকে z-এর n-তম মূল বলে।

ধরি $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r > 0$, $-\pi \le \theta \le \pi$ এবং $\sqrt[n]{r}$ হল r -এর ধনাত্মক n-তম মূল। আমরা দেখব

$$u = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$ (k = 0 অথবা অখণ্ড সংখ্যা)

হল z-এর n-তম মূল।

প্রমাণ : $u^n = r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)] = r[\cos\theta + i\sin\theta] = z$

অতএব $u = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$ z এর একটি n তম মূল।

আবার u-এর দুটি মান সমান বা অভিন্ন হবে যদি এবং একমাত্র যদি $\frac{\theta + 2k\pi}{n}$ এর sine এবং cosine k-এর দুটি ভিন্ন মানের জন্য সমান হয়।

অর্থাৎ যদি $\cos\left(\frac{\theta + 2k_1\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\theta + 2k_2\pi}{n}\right)$ এবং

$$\sin\left(\frac{\theta + 2k_1\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\theta + 2k_2\pi}{n}\right), \quad k_1 \ne k_2$$

$$\Rightarrow \frac{\theta + 2k_1\pi}{n} - \frac{\theta + 2k_2\pi}{n} = 2m\pi, \ m \in I$$

$$\Rightarrow k_1 - k_2 = mn$$

অর্থাৎ u-এর দুটি মান k-এর দুটি ভিন্ন মানের জন্য অভিন্ন হবে যদি k এর দুটি মানের অন্তর n-এর গুণিতক হয়।

অতএব $u=\sqrt[n]{z}$-এর n সংখ্যক স্বতন্ত্র মানগুলি হল

$$u=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right],\ k=0,1,2......(n-1)$$

যদি $-\pi\le\theta\le\pi$ হয় তবে $\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right]$-কে $\sqrt[n]{z}$ এর প্রধান মূল বলা হয়।

2.9.4 উদাহরণ : $(-16)^{\frac{1}{4}}$-এর মানগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান : $-16 = 16\cos\pi$

$= 16(\cos\pi + i\sin\pi)$

$= 16(\cos\pi + i\sin\pi)(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi)$

$= 16\ [\cos(2k+1)\pi + i\ \sin(2k+1)\pi]$

$$\therefore (-16)^{\frac{1}{4}}=(16)^{\frac{1}{4}}\left[\cos(2k+1)\frac{\pi}{4}+i\sin(2k+1)\frac{\pi}{4}\right],\quad k=0,1,2,3$$

অতএব $(-16)^{\frac{1}{4}}$ এর মানগুলি হল

$$u_1=2\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\,[1+i]$$

$$u_2=2\left[\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\,[-1+i]$$

$$u_3=2\left[\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right]=-\sqrt{2}\,[1+i]$$

$$u_4=2\left[\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\,[1-i]$$

2.9.5 উদাহরণ : প্রমাণ করুন যে, একের n-তম মূলগুলি একটি গুণোত্তর প্রগতি গঠন করে।

প্রমাণ। একের n-তম মূলগুলি হল $x^n = 1$ সমীকরণের বীজসমূহ।

এখন $x^n = 1$ বা, $x^n = (\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi)$, $\qquad k \in I$

$$\text{বা, } x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0,1,2,\ldots\ldots,(n-1)$$

$$= \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k$$

$$= z^k, \qquad z = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

অতএব 1-এর n তম মূলগুলি হল

$1, z, z^2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots z^k, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots z^{n-1}$

এরা একটি গুণোত্তর প্রগতি গঠন করে যার প্রথম পদ 1 এবং সাধারণ অনুপাত

$z = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

2.9.6 উদাহরণ : $\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ এবং n ও p পরস্পর মৌলিক সংখ্যা হলে প্রমাণ করুন যে

$$1 + \alpha^p + \alpha^{2p} + \ldots\ldots\ldots + \alpha^{(n-1)p} = 0$$

প্রমাণ। $\qquad 1 + \alpha^p + \alpha^{2p} + \ldots\ldots\ldots + \alpha^{(n-1)p}$

$$= 1 + z + z^2 + \ldots\ldots + z^{(n-1)} \text{ যেখানে } z = \alpha^p$$

$$= \frac{z^n - 1}{z - 1} = \frac{\alpha^{np} - 1}{\alpha^p - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\alpha^p = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^p = \cos\frac{2\pi p}{n} + i\sin\frac{2\pi p}{n} \neq 1$$

(যেহেতু p এবং n পরস্পর মৌলিক $p \neq kn, \quad k \in I$)

কিন্তু $\alpha^{np} = \left(\alpha^{n}\right)^{p} = (\cos 2\pi + i\sin 2\pi)^{p}$

$$= 1$$

$\therefore \alpha^{np} - 1 = 0$

অতএব $1 + \alpha^{p} + \alpha^{2p} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha^{(n-1)p} = 0$

2.9.7 উদাহরণ :

প্রমাণ করুন যে,

(i) $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots + \cos[\alpha + (n-1)\beta]$

$$= \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \cos\left[\alpha + \left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right]$$

(ii) $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots. + \sin\{\alpha + (n-1)\beta\}$

$$= \frac{\sin n\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \sin\left[\alpha\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right]$$

প্রমাণ : ধরি $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$,

$b = \cos\beta + i\sin\beta$

$P = \cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots.. + \cos(\alpha + (n-1)\beta)$

এবং $Q = \sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots.. + \sin(\alpha + (n-1)\beta)$

তাহলে $P + iQ = (\cos\alpha + i\sin\alpha) + [\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) + \ldots.$

$$= a + ab + ab^{2} + \ldots\ldots\ldots + ab^{n-1}$$

$$= a\left[1 + b + b^{2} + \ldots\ldots + b^{n-1}\right]$$

$$= a\frac{1-b^n}{1-b}$$

$$= a\,\frac{1-(\cos\beta+i\sin\beta)^n}{1-\cos\beta-i\sin\beta} = a\,\frac{(1-\cos n\beta)-i\sin n\beta}{(1-\cos\beta)-i\sin\beta}$$

$$= a\,\frac{2\sin^2\frac{n\beta}{2}-2i\sin\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n\beta}{2}}{2\sin^2\frac{\beta}{2}-2i\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$= a\,\frac{-2i\sin\frac{n\beta}{2}\left[\cos\frac{n\beta}{2}+i\sin\frac{n\beta}{2}\right]}{-2i\sin\frac{\beta}{2}\left[\cos\frac{\beta}{2}+i\sin\frac{\beta}{2}\right]}$$

$$= \frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\,(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left[\cos\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta+i\sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right]$$

$$= \frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\left[\cos\left\{\alpha+\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right\}+i\sin\left\{\alpha+\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right\}\right]$$

দুটি জটিল রাশির সমতার সূত্র থেকে পাই,

$$P=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\cos\left\{\alpha+\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right\},\quad Q=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\sin\left\{\alpha+\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right\}$$

2.9.8 উদাহরণ :

n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং

$$(1+z)^n = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots\ldots + p_n z^n$$

হলে প্রমাণ করুন যে,

(i) $p_0 - p_2 + p_4 - \cdots\cdots = 2^{\frac{n}{2}} \cos n\frac{\pi}{4}$

(ii) $p_1 - p_3 + p_5 - \cdots\cdots = 2^{\frac{n}{2}} \sin n\frac{\pi}{4}$

(iii) $p_0 + p_3 + p_6 + \cdots\cdots = \frac{2}{3}\left[2^{n-1} + \cos n\frac{\pi}{3}\right]$

(iv) $p_0 + p_4 + p_8 + \cdots\cdots = 2^{n-2} + 2^{\frac{(n-2)}{2}} \cos n\frac{\pi}{4}$

সমাধান :

প্রদত্ত সম্পর্ক

$$(1+z)^n = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p_n z^n$$

এর দুদিকে z এর বদলে i বসিয়ে পাই

$$(1+i)^n = p_0 + p_1 i + p_2 i^2 + p_3 i^3 + p_4 i^4 + \ldots\ldots + p_n i^n$$

$$= (p_0 - p_2 + p_4 - \ldots\ldots) + i\,(p_1 - p_3 + p_5 - \ldots\ldots)$$

বা, $\left\{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right\}^n = (p_0 - p_2 + p_4 - \ldots\ldots\ldots) + i\,(p_1 - p_3 + p_5 - \ldots\ldots\ldots)$

বা, $2^{\frac{n}{2}}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]^n = (p_0 - p_2 + p_4 - \ldots\ldots\ldots) + i(p_1 - p_3 + p_5 - \ldots\ldots\ldots)$

অর্থাৎ $z^{\frac{n}{2}}\left[\cos n\frac{\pi}{4} + i\sin n\frac{\pi}{4}\right] = (p_0 - p_2 + p_4 - \ldots\ldots\ldots) + i\,(p_1 - p_3 + p_5 - \ldots\ldots\ldots)$

$\therefore$ দুটি জটিল রাশির সমতার নিয়ম থেকে পাই

(i) $p_0 - p_2 + p_4 - \cdots\cdots = 2^{\frac{n}{2}} \cos n\frac{\pi}{4}$

(ii) $p_1 - p_3 + p_5 -$ ------------------------------------ $= 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}$

(iii) প্রদত্ত সম্পর্কের দুদিকে z এর বদলে পরপর 1, ω, ω^2 বসিয়ে পাই,

$$2^n = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + \dots + p_n$$

$$(1+\omega)^n = p_0 + p_1\omega + p_2\omega^2 + p_3 + p_4\omega + p_5\omega^2 + p_6 + \dots + p_n\omega^n \quad [\because \omega^3 = 1]$$

$$(1+\omega^2)^n = p_0 + p_1\omega^2 + p_2\omega^4 + p_3 + p_4\omega^8 + p_5\omega^{10} + p_6 + \dots + p_n\omega^{2n}$$

$$= p_0 + p_1\omega^2 + p_2\omega + p_3 + p_4\omega^2 + p_5\omega + p_6 + \dots + p_n\omega^{2n}$$

এই তিনটি সম্পর্ক থেকে পাই

$$2^n + (1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n = 3\,(p_0 + p_3 + p_6 + \dots\dots) \qquad [\because 1+\omega+\omega^2 = 0]$$

অর্থাৎ $[\,p_0 + p_3 + p_6 + \dots\dots\,] = \frac{1}{3}\left[2^n + (1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n\right]$

এখন $1+\omega = 1 + \left\{-\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

এবং $1+\omega^2 = 1 + \left\{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$

অতএব $(1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n = 2\cos n\frac{\pi}{3}$

ফলে $[p_0 + p_3 + p_6 + \dots\dots] = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos n\frac{\pi}{3}\right] = \frac{2}{3}\left[2^{n-1} + \cos n\frac{\pi}{3}\right]$

(iv) প্রদত্ত সম্পর্কের দুদিকে z-এর বদলে পরপর 1, i, –i, –1 বসিয়ে পাই

$$2^n = p_0 + p_1 + p_2 + \dots\dots + p_n$$

$$(1+i)^n = p_0 + p_1 i + p_2 i^2 + p_3 i^3 + p_4 i^4 + \dots\dots = p_0 + p_1 i - p_2 - p_3 i + p_4 + \dots$$

$$(1-i)^n = p_0 - p_1 i + p_2 i^2 - p_3 i^3 + p_4 i^4 + \dots = p_0 - p_1 i - p_2 + p_3 i + p_4 + \dots$$

$(1-1)^n = p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + p_4 - \ldots\ldots$

উপরের সম্পর্ক চারটি যোগ করে পাই

$$2^n + (1+i)^n + (1-i)^n = 4\left[p_0 + p_4 + p_8 + \ldots\right]$$

অর্থাৎ $p_0 + p_4 + p_8 + \ldots = \frac{1}{4}\left[2^n + (1+i)^n + (1-i)^n\right]$

এখন $1+i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

এবং $1-i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

অতএব $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \times 2\cos\frac{n\pi}{4} = 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}$

$$\therefore p_0 + p_4 + p_8 + \ldots\ldots = \frac{1}{4}\left[2^n + 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}\right]$$

$$= 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4} \text{ ।}$$

2.9.9 $\sin n\theta$ এবং $\cos n\theta$ এর বিস্তৃতি। (n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা)

n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হলে দ্য ময়ভরের উপপাদ্য থেকে পাই

$$\cos n\theta + i\sin\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$= \cos^n\theta + {}^nc_1 i\cos^{n-1}\theta\sin\theta + {}^nc_2 i^2\sin^2\theta\cos^{n-2}\theta +$$

$$+ {}^nc_3 i^3\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta + {}^nc_4 i^4\sin^4\theta\cos^{n-4}\theta +$$

$$+ {}^nc_5 i^5\sin^5\theta\cos^{n-5}\theta + {}^nc_6 i^6\sin^6\theta\cos^{n-6}\theta + \ldots\ldots$$

$$+ \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots$$

$$= \left[\cos^n\theta - {}^nc_2\sin^2\theta\cos^{n-2}\theta + {}^nc_4\sin^4\theta\cos^{n-4}\theta - \ldots\right]$$

$$+ i\left[{}^nc_1\sin\theta\cos^{n-1}\theta - {}^nc_3\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta + {}^nc_5\sin^5\theta\cos^{n-5}\theta - \ldots\right]$$

$\therefore$ দুটি জটিল রাশির সমতার সূত্র থেকে পাই

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - {}^n c_2 \cos^{n-2}\theta \sin^2\theta + {}^n c_4 \cos^{n-4}\theta \sin^4\theta - \cdots$$

এবং $\sin n\theta = {}^n c_1 \cos^{n-1}\theta \sin\theta - {}^n c_3 \cos^{n-3}\theta \sin^3\theta + n_{c_5} \cos^{n-5}\theta \sin^5\theta - \ldots$

2.9.10 উদাহরণ। $\cos 3\theta$ এবং $\sin 3\theta$-এর বিস্তৃতি লিখুন।

সমাধান : $\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$

$$= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$

$$= \left(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\right) + i\left[3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right]$$

$$= \left[\cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta)\right] + i\left[3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta\right]$$

$$= [4\cos^3\theta - 3\cos\theta] + i[3\sin\theta - 4\sin^3\theta]$$

$$= [4\cos^3\theta - 3\cos\theta] + i[3\sin\theta - 4\sin^3\theta]$$

অতএব, $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

2.9.11 যে কোন সংখ্যক কোণের যোগফলের সাইন, কোসাইন এবং ট্যানজেন্টের সূত্র।

ধরি $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots\alpha_n$ হল n সংখ্যক কোণ। এদের যোগফল হল

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_n$ । আমরা $\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_n)$, $\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_n)$,

এবং $\tan(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_n)$-এর সূত্র নির্ণয় করব।

আমরা যাচাই করে পাই

$$(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)\ldots(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n)$$

$$= \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$$

অতএব,

$\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$

$$= (\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)\ldots(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n)$$

$$= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots\ldots \cos\alpha_n (1 + i\tan\alpha_1)(1 + i\tan\alpha_2)\ldots\ldots(1 + i\tan\alpha_n)$$

$$= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots\ldots \cos\alpha_n \left[1 + iS_1 + i^2S_2 + i^3S_3 + \ldots\ldots\right]$$

$$= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots\ldots \cos\alpha_n \left[1 + iS_1 - S_2 - iS_3 + S_4 + iS_5 + \ldots\ldots\right]$$

$$= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots\ldots \cos\alpha_n \left[(1 - S_2 + S_4 - S_6 + \ldots) + i(S_1 - S_3 + S_5 - S_7 + \ldots)\right] \ldots (1)$$

এখানে S_r হল $\tan\alpha_1$, $\tan\alpha_2, \ldots\ldots \tan\alpha_n$ এর মধ্য থেকে r সংখ্যক নিয়ে গুণফলের সমষ্টি।

(1) সম্পর্কটির উভয়পক্ষের বাস্তব ও কাল্পনিক অংশের সমতা থেকে পাই

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n \left[1 - S_2 + S_4 - S_6 + \ldots\right] \quad (2)$$

এবং $\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n \left[S_1 - S_3 + S_5 - S_7 + \ldots\right]$ (3)

আবার (2) ও (3) থেকে পাই

$$\tan(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = \frac{S_1 - S_3 + S_5 - S_7 + \ldots}{1 - S_2 + S_4 - S_6 + \ldots}$$

2.9.12 উদাহরণ : (i) $\sin(A + B + C)$-এর বিস্তৃতি লিখুন। (ii) $\tan 4\theta$-এর সূত্র লিখুন।

উত্তর (i) $\sin(A + B + C) = \cos A \cos B \cos C\left[(\tan A + \tan B + \tan C) - \tan A \tan B \tan C\right]$

$$= \left[\sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C - \sin A \sin B \sin C\right]$$

(ii) উপরের (4)-নং সূত্রে $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \theta$ $(n = 4)$ বসিয়ে পাই

$$\tan 4\theta = \frac{S_1 - S_3}{1 - S_2 + S_4} = \frac{4\tan\theta - 4\tan^3\theta}{1 - 6\tan^2\theta + \tan^4\theta}$$

2.10 সারাংশ

$(x - a)^2 + b^2 = 0$ এই দ্বিঘাত সমীকরণটির কোন বাস্তব সমাধান পাওয়া যায় না, কেন না এমন কোন বাস্তব রাশি নেই যার বর্গ -1 । যদি আমরা -1 এর বর্গমূল হিসাবে i এই কাল্পনিক রাশিটি গ্রহণ করি তবে উপরের সমীকরণটির সমাধান হবে a + ib এবং a–ib ।

a + ib এবং a–ib একজোড়া অনুবন্ধী জটিল রাশি।

আরগাঁ সমতল; মডিউলাস্, অ্যামপ্লিটিউড।

একটি জটিল রাশি $z = x+iy$, (x, y বাস্তব এবং $i=\sqrt{-1}$ এবং কোন সমতলস্থ বিন্দু P– (যার ঐ সমতলে অবস্থিত কোন সমকোণী অক্ষগোষ্ঠী সাপেক্ষে স্থানাঙ্ক (x, y) এর মধ্যে একটি একএকঅনুযোগ স্থাপন করা সম্ভব। ফলে কোন সমতলের বিন্দুগুলির সাহায্যে জটিলরাশি সমূহ প্রদর্শন করা সম্ভব।

যে সমতলে বিন্দুর সাহায্যে জটিল রাশিগুলি প্রদর্শিত হয় তাকে আরগাঁ সমতল বলা হয়।

আরগাঁ সমতলে মূল বিন্দু O এবং $z = x + iy$ এর প্রতিরূপ $P(x,y)$ হলে OP দূরত্ব $=\sqrt{x^2+y^2}$ হবে জটিল রাশি z-এর মডিউলাস। এই বক্তব্যটি সংক্ষেপে লেখা হবে $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ এইভাবে। OP রেখাংশ x-অক্ষের (বাস্তব অক্ষের) ধনাত্মক দিকের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে বলা হবে জটিল রাশি z-এর অ্যামপ্লিটিউড্ বা amp z ।

ধরি $z = x + iy$ জটিল রাশিটির আরগাঁ সমতলে প্রতিরূপ P বিন্দু, যার স্থানাঙ্ক (x,y) । $P(x;y)$ বিন্দুটির মেরুজ স্থানাঙ্ক (r,θ) হলে

$z = r\,[\cos\theta + i\sin\theta]$। $|z|= r$ এবং $\text{amp}\, z=\theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ ।

amp z এর মুখ্যমান θ নীচের সম্পর্কগুলি থেকে নির্ণীত হয়।

(i) $-\pi\le\theta\le\pi$ (ii) $\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (iii) $\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

দুটি জটিল রাশির সমতার সূত্র :

যদি $a + ib = c + id$ হয় তবে $a = c$ এবং $b = d$. (a,b,c,d বাস্তব সংখ্যা এবং $i=\sqrt{-1}$)

$z = x + iy$, একটি জটিল রাশি হলে এর অনুবন্ধী জটিল রাশি $x - iy$ -কে $\bar{z}$ দিয়ে নির্দেশিত করা হয় এবং নীচের সম্পর্কগুলি সিদ্ধ হয়।

(i) $z+\bar{z}=2x=2\,\text{Re}(z)$ (ii) $z-\bar{z}=2i\,\text{Im}(z)$

(iii) $z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$

একের ঘনমূল : $x^3=1$ সমীকরণের বীজগুলিকে একের ঘনমূল বলে। এই সমীকরণের $x = 1$ বীজটি বাস্তব। অন্য বীজ দুটি পরস্পর অনুবন্ধী জটিল রাশি। এদের একটি ω হলে অন্যটি হবে ω^2 ; এবং নিচের সম্পর্কগুলি সিদ্ধ হবে।

(i) $1+\omega+\omega^2=0$ (ii) $\omega^3=1$

দ্য ময়ভরের উপপাদ্য। n একটি পূর্ণসংখ্যা এবং θ একটি বাস্তব কোণ হলে $\cos n\theta + i\sin n\theta$ হবে $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$-এর একমাত্র মান; আর n একটি র‍্যাসনাল সংখ্যা হলে $\cos n\theta+i\sin n\theta$ হবে $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$-এর একটি মান।

2.11 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. নীচের জটিল রাশিগুলির বাস্তব ও কাল্পনিক অংশগুলো আলাদা করুন।

(i) $\dfrac{(1+i)^2}{1-i}$ (ii) $\left(\dfrac{1+2i}{1-2i}\right)^2-\left(\dfrac{1-2i}{1+2i}\right)^2$ (iii) $\dfrac{(1+2i)(2+3i)}{3-i}$

2. নীচের জটিল রাশিগুলির মডিউলাস এবং অ্যামপ্লিটিউড্ নির্ণয় করুন।

(a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\sqrt{3}$ (b) $-\sqrt{3}+i$ (c) $-1-i$

3. নীচের জটিল রাশিগুলির বর্গমূল নির্ণয় করুন।

(i) $5-12i$ (ii) $a^2-1-2ia$ (a বাস্তব) (iii) $2a+2i\sqrt{1-a^2}$ (a, বাস্তব)

4. ω একের জটিল ঘনমূল হলে দেখান যে

$$\left(a+b\omega+c\omega^2\right)^2+(b+c\omega+a\omega^2)^2+(c+a\omega+b\omega^2)^2=0$$

5. কোন আরগাঁ চিত্রে একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি তিনটি জটিল রাশি z_1, z_2, z_3 এর প্রতিরূপ। $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ এই জটিল রাশির মডিউলাস ও অ্যামপ্লিটিউডের তাৎপর্য্য ঐ ত্রিভুজের বাহু এবং কোণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করুন।

6. z একটি পরিবর্তনশীল জটিল রাশি এবং $\dfrac{z-i}{z+i}$ এর অ্যামপ্লিটিউড্ $\dfrac{\pi}{4}$ হলে দেখান যে z জটিল সমতলে একটি বৃত্তে অবস্থান করে।

7. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$ হলে প্রমাণ করুন যে

(i) $\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

(ii) $\sin 3\gamma+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

8. n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হলে এবং $(5+2i)^n=a_n+ib_n$ (a_n, b_n বাস্তব) হলে প্রমাণ করুন যে $a_n{}^2+b_n{}^2=29^n$।

এরপর 29^3-কে দুটি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি রূপে প্রকাশ করুন।

9. নীচের সমীকরণগুলি সমাধান করুন।

(i) $x^3+8=0$ (ii) $x^5+x^3+x^2+1=0$ (iii) $x^6+x^3+1=0$

(iv) $x^8=(x+1)^8$ (v) $(x+1)^6=(x-1)^6$

10. নীচের জটিল রাশিগুলির মান নির্ণয় করুন।

(i) $(-i)^{1/4}$ (ii) $i^{1/2}+(-i)^{1/2}$

11. প্রমাণ করুন $\sin 7\theta = 7\sin\theta - 56\sin^3\theta + 112\sin^5\theta - 64\sin^7\theta$

12. দেখান যে $\cos^6\theta = \frac{1}{32}[\cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10]$

13. একটি বস্তুকণার উপর দুটি বল প্রযুক্ত হয়েছে। প্রথম বলটির মান 4 কেজি ওয়েট এবং এটি উত্তর দিক বরাবর ক্রিয়াশীল। আর দ্বিতীয় বলটির মান 8 কেজি ওয়েট্ যেটি উত্তর পূর্বদিক বরাবর ক্রিয়াশীল। বল দুটিকে জটিল রাশির সাহায্যে প্রকাশ করুন এবং লব্ধি বলটির মান ও দিশা নির্ণয় করুন।

2.12 উত্তরমালা

1. (i) $-1+i$ (ii) $0+\frac{-48}{25}i$ (iii) $-\frac{19}{10}+\frac{17}{10}i$

2. (a) $1, \frac{\pi}{3}$ (b) $2, \frac{5\pi}{6}$ (c) $\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}$

3. (i) $3-2i$, (ii) $(a-i)^2$ (iii) $\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}$

5. $A\to z_1, B\to z_2, c\to z_3$ হলে $\left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right| = \frac{AB}{AC}$ এবং $\text{amp}\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \angle BAC$

6. বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2+2(x-y)+1=0$

7. $a=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $b=\cos\beta+i\sin\beta$ এবং $c=\cos\gamma+i\sin\gamma$ বসিয়ে দেখুন $a+b+c=0$ আবার $a+b+c=0$ হলে $a^3+b^3+c^3=3abc$। এই সম্পর্ক থেকে প্রমাণ করুন।

8. দ্য-ময়ভর উপপাদ্য প্রয়োগ করে দেখান $a_n=(29)^{n/2}\cos n\theta$ এবং $b_n=(29)^{n/2}\sin n\theta$।

$a_3^2+b_3^2=(29)^3$। $a_3=65,\ b_3=142$

9. (i) $-2,\ 1\pm\sqrt{3}i$, (ii) $-1, \pm i, \frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{3}i\right)$ (iii) $\cos\frac{(6k+2)\pi}{9} \pm i\sin\frac{(6k+2)\pi}{9}$

$k = 0,1,2$

(iv) $\frac{x}{x+1} = t$, বসিয়ে দ্য'ময়ভারের উপপাদ্য প্রয়োগ করুন;

$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\cot\frac{k\pi}{8}, \quad k = 1,2,\ldots\ldots,7$

(v) $\frac{x-1}{x+1} = t$, বসিয়ে দ্য'ময়ভারের উপপাদ্য প্রয়োগ করুন; $x = i\cot\frac{k\pi}{6}, \quad k = 1,2,\ldots,5$

10. (i) $\cos(4k-1)\frac{\pi}{8} + i\sin(4k-1)\frac{\pi}{8}$, $k = 0, 1, 2, 3$

(ii) $\left\{\cos(4k+1)\frac{\pi}{4} + i\sin(4k+1)\frac{\pi}{4}\right\} + \left\{\cos(4m-1)\frac{\pi}{4} + i\sin(4m-1)\frac{\pi}{4}\right\}$,

$k = 0,1$

$m = 0,1$

$= \pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2}i$

11. 2.9.9 অনুচ্ছেদ দেখুন।

12. $z = \cos\theta + i\sin\theta$ বসিয়ে পাওয়া যায় $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$ ।

অতএব $\cos^6\theta = \frac{1}{2^6}\left[z + \frac{1}{z}\right]^6$ । দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই

$$\cos^6\theta = \frac{1}{2^6}\left[\left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right) + 6\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + 15\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 20\right]$$

দ্য-ময়ভারের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই $z^k + \frac{1}{z^k} = 2\cos k\theta$ ।

13. পূবদিকে বরাবর বাস্তব অক্ষ এবং উত্তরদিক বরাবর কাল্পনিক অক্ষ স্থাপন করুন। তাহলে প্রথম বলটি $z_1 = 4i$ এবং দ্বিতীয় বলটি $z_2 = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ । লব্ধি বল হবে $z_1 + z_2$ । এর মডিউলাস এবং অ্যামপ্লিটিউড্ নির্ণয় করুন।

মান $= |z_1 + z_2| = 11.191$ কেজি ওয়েট্। দিশা = 1.04 রেডিয়ান কোণ বাস্তব অক্ষের সঙ্গে।

একক 3 ❑ জটিল রাশির অপেক্ষক

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা

সূচক অপেক্ষক e^x, বৃত্তীয় অপেক্ষক sinx, cosx, tanx ইত্যাদি। পরাবৃত্তীয় অপেক্ষক sinhx, coshx ইত্যাদি। লগারিদম (logx) অপেক্ষকগুলির সঙ্গে আপনারা পূর্ব পরিচিত। e^x হল $e(\cong 2.71828)$ এই ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার x তম ঘাত, sinx, cosx, tanx এই বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলি x রেডিয়ান কোণ বিশিষ্ট কোন সমকোণী ত্রিভুজের দুটি বাহুর অনুপাত। x ধনাত্মক রাশি হলে logx হল সেই সংখ্যা y যার সূচক x (অর্থাৎ $\log x = y$ হলে $x = e^y$) কিন্তু x জটিল রাশি হলে e^x, sinx, cosx, tanx, logx ইত্যাদি অপেক্ষকগুলির অর্থহীন হয়ে পড়ে।

তাই জটিল রাশির ক্ষেত্রে এইসব অপেক্ষকগুলির সংজ্ঞা জানার প্রয়োজন।

এই এককটিতে জটিল রাশির সূচক অপেক্ষক, বৃত্তীয় অপেক্ষক, পরাবৃত্তীয় অপেক্ষক, লগারিদম্, বিপরীত বৃত্তীয় ও পরাবৃত্তীয় অপেক্ষকের সংজ্ঞা জানতে পারবেন। এই সংজ্ঞাগুলি বাস্তব চলের অপেক্ষকগুলির সংজ্ঞার জটিল রাশির ক্ষেত্রে সম্প্রসারণ।

সংজ্ঞাগুলি এমনভাবে সম্প্রসারিত হচ্ছে যে কাল্পনিক অংশ বর্জিত হলে সম্প্রসারিত সংজ্ঞা বাস্তব চলের অপেক্ষকের সংজ্ঞার সঙ্গে মিলে যায়।

উদাহরণ হিসাবে জটিল রাশি z-এর সূচক অপেক্ষক e^z-এর সংজ্ঞা নিয়ে আলোচনা দেখুন। $z = x + iy$ হলে (x,y বাস্তব)

$$e^z = e^{x+iy}$$

$$= e^x[\cos y + i\sin y]$$

z এর কাল্পনিক অংশ $y = 0$ বসালে পাই

$$e^z = e^x[\cos 0 + i\sin 0] = e^x$$

আবার e^z এর সংজ্ঞাতে $x = 0$ বসিয়ে পাই

$e^{iy} = \cos y + i\sin y$ (এখানে y বাস্তব সংখ্যা)। এটিকে অয়লারের (Euler) সূত্র বলা হয়। অয়লারের সূত্র থেকে বাস্তব চলের বৃত্তীয় অপেক্ষকের সংজ্ঞা পাওয়া যায়।

$$\cos y = \frac{1}{2}\left[e^{iy} + e^{-iy}\right] \text{ এবং } \sin y = \frac{1}{2i}\left[e^{iy} - e^{-iy}\right]$$

জটিল রাশির ক্ষেত্রে বৃত্তীয় অপেক্ষকের সংজ্ঞা হল

$$\cos z = \frac{1}{2}\left[e^{iz} + e^{-iz}\right], \qquad \sin z = \frac{1}{2i}\left[e^{iz} - e^{-iz}\right].$$

x ধনাত্মক বাস্তব রাশি না হলে এর লগারিদম্ সংজ্ঞাত নয়। কিন্তু শূন্য ব্যতীত সব জটিল রাশির লগারিদম্ সংজ্ঞাত। জটিল রাশির লগারিদম্ একটি বহুমান বিশিষ্ট অপেক্ষক। $z\,(\neq 0)$ জটিল রাশি হলে এর সংজ্ঞা নিম্নরূপ। $\mathrm{Log} z = \log|z| + i\,\mathrm{amp}\, z + 2ni\pi$ (n = অখণ্ড সংখ্যা) যেহেতু কোণ ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা $-p$ $(p > 0)$-কে আমরা $-p+i0$ লিখে জটিল রাশি বলে ভাবতে পারি তাই $-p$-এর লগারিদম হবে

$$\mathrm{Log}(-p) = \log|-p| + i\,\mathrm{amp}(-p) + 2ni\pi$$

$$= \log|p| + (2n+1)i\pi, \qquad n = \text{অখণ্ড সংখ্যা।}$$

অর্থাৎ **জটিল রাশির ক্ষেত্রে ঋণাত্মক বাস্তব রাশির লগারিদম সংজ্ঞাত এবং এটি একটি বহুমান বিশিষ্ট জটিল রাশি।**

এরকমভাবে আপনারা দেখবেন জটিল রাশির অপেক্ষকগুলি বাস্তব চলের অপেক্ষকগুলির জটিল রাশির ক্ষেত্রে সম্প্রসারণ।

3.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে আপনি যে কাজগুলি করতে সক্ষম হবেন সেগুলি হল :

- কোন একটি জটিল রাশিকে সূচক অপেক্ষক, যথা $Ae^{i\alpha}$ রূপে প্রকাশ করতে পারবেন।
- কোন জটিল রাশির বৃত্তীয় অপেক্ষককে সূচক অপেক্ষকের মাধ্যমে এবং বিপরীতক্রমে সূচক অপেক্ষককে বৃত্তীয় অপেক্ষকের মাধ্যমে লিখতে পারবেন।
- কোন জটিল রাশির বৃত্তীয় অপেক্ষককে সূচক অপেক্ষকের মাধ্যমে এবং বিপরীতক্রমে সূচক অপেক্ষককে বৃত্তীয় অপেক্ষকের মাধ্যমে লিখতে পারবেন।
- এই এককটি পাঠ করে আপনি যে কোন জটিল রাশিকে লগারিদম্ অপেক্ষক রূপে আবার বিপরীতক্রমে লগারিদম্‌কে জটিল রাশি রূপে লিখতে পারবেন।

3.3 সূচক অপেক্ষক e^Z (The Exponential Function)

সংজ্ঞা : $z = x + iy$ (x, y বাস্তব) একটি জটিল রাশি হলে তার সূচক অপেক্ষক e^z বা $\exp(z)$ বা $E(z)$ এর সংজ্ঞা নিম্নরূপ।

$$e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x \ [\cos y + i \sin y] \quad \ldots\ldots (1)$$

$y = 0$ হলে $z = x$ একটি বিশুদ্ধ বাস্তব রাশি এবং তখন $e^z = e^x$।

আবার যখন $x = 0$ অর্থাৎ $z = iy$ একটি বিশুদ্ধ কাল্পনিক রাশি তখন (1) থেকে আমরা পাই

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad \ldots\ldots (2)$$

(2) সূত্রটিকে অয়লারের (Euler) সূত্র বলা হয়। z একটি জটিল রাশি। $|z| = r$ এবং $\text{amp}\, z = \theta$ হলে আমরা অয়লারের সূত্র প্রয়োগ করে লিখব

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta} \quad \ldots\ldots (3)$$

3.3.1 সূচক ফাংশনের সূচক সূত্র। (Index Law for the exponential function)

z_1, z_2 দুটি জটিল রাশি হলে প্রমাণ করা যায় যে

$$e^{z_1}\ e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

প্রমাণ। ধরি $z_1 = x_1 + iy_1$ এবং $z_2 = x_2 + iy_2$ ($x_1, x_2,\ y_1, y_2$ বাস্তব)

তাহলে $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

এবং $e^{z_1+z_2} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}$

$$= e^{(x_1+x_2)}\left[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4) \quad [33\ (1)\ \text{থেকে}]$$

আবার $e^{z_1}.e^{z_2} = e^{x_1}\left[\cos y_1 + i\sin y_1\right].e^{x_2}\left[\cos y_2 + i\sin y_2\right]$

$$= e^{x_1}.e^{x_2}\left[\cos y_1 + i\sin y_1\right]\left[\cos y_2 + i\sin y_2\right]$$

$$= e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)\right] \ldots\ldots\ldots (5)$$

(4) ও (5) থেকে পাই $e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

অনুশীলনী 3.3.1 (a) প্রমাণ করুন যে, $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$ যেখানে z_1, z_2 হল দুটি জটিল রাশি।

উদাহরণ 1 : প্রমাণ করুন যে (i) $\left|e^z\right| = e^x$

(ii) $\left(\overline{e^z}\right) = e^{\bar{z}}$, $\quad z = x+iy$, $\quad$ (x,y বাস্তব এবং $i=\sqrt{-1}$)

প্রমাণ : (i) $|e^z| = \left|\, e^x[\cos y + i\sin y]\,\right| = \left|\, e^x\right|\left|\,\cos y + i\sin y\,\right| = e^x.1 = e^x$

(ii) $\left(\overline{e^z}\right) = \left[\overline{e^x\left(\cos y + i\sin y\right)}\right] = e^x\cos y - ie^x\sin y$

$$= e^x\left[\cos y - i\sin y\right] = e^x[\cos(-y)+i\sin(-y)]$$

$$= e^x.e^{-iy}$$

$$= e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$$

উদাহরণ 2 : প্রমাণ করুন যে n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হলে

$$\left(e^z\right)^n = e^{nz}$$

প্রমাণ : $z_1, z_2 \ldots\ldots z_n$ n সংখ্যক জটিল সংখ্যা হলে,

$e^{z_1+z_2+\ldots\ldots+z_n} = e^{z_1}.e^{z_2}\ldots\ldots e^{z_n}$

এবার $z_1 = z_2 = \ldots\ldots = z_n = z$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$e^{nz} = e^z.e^z\ldots\ldots e^z \quad$ (n-সংখ্যক বার)

$= \left(e^z\right)^n$ ।

দ্রষ্টব্য : উদাহরণ 2-এর $\left(e^z\right)^n = e^{nz}$ সম্পর্কটিতে $z = e^{i\theta}$ বসিয়ে পাই

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{ni\theta} = e^{in\theta}$$

অয়লারের সূত্র ব্যবহার করে পাই

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

উদাহরণ 3 : প্রমাণ করুন যে,

(i) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ এবং (ii) $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i}$

প্রমাণ : অয়লারের সূত্র $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ । এই সূত্রে $\phi = -\theta$ বসিয়ে পাই

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

বা $$e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

আবার $$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\therefore\ e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

এবং $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

দ্রষ্টব্য। উপরের উদাহরণে $\cos\theta$ এবং $\sin\theta$-র জন্য প্রাপ্ত সম্পর্ক দুটিকে (বাস্তব কোণ θ-এর জন্য) $\cos\theta$ এবং $\sin\theta$-এর অয়লারের সংজ্ঞা বলা হয়।

3.4 জটিল চলের বৃত্তীয় অপেক্ষক। (Circular functions of a complex Variable)

θ বাস্তব রাশি হলে $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, ইত্যাদি বৃত্তীয় অপেক্ষকের মান সমকোণী ত্রিভুজের দুটি বাহুর অনুপাত হিসাবে পাওয়া যায়। কিন্তু θ যখন জটিল রাশি তখন বৃত্তীয় অপেক্ষক সমূহের মান এভাবে নির্ণয় করা সম্ভব হয় না। জটিল রাশির বৃত্তীয় অপেক্ষকের সংজ্ঞা নীচে দেওয়া হল।

3.4.1 সংজ্ঞা :

$z = x + iy$ (x, y বাস্তব) একটি জটিল রাশি হলে,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cot z = \frac{1}{\tan z}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sec z = \frac{1}{\cos z}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}$$

দ্রষ্টব্য 1. $y = 0$ হলে $z = x =$ একটি বাস্তব রাশি এবং তখন sinz ও cosz এর সংজ্ঞা ও অয়লারের সংজ্ঞা অভিন্ন।

দ্রষ্টব্য 2. sinz এবং cosz এর সংজ্ঞা থেকে পাই

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos z$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z$$

ফলে, $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

এবং $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$

3.4.2 উদাহরণ : z_1, z_2 জটিল রাশি হ'লে প্রমাণ করুন যে

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \text{(i)}$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \qquad \text{(ii)}$$

$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{\tan z_1 + \tan z_2}{1 - \tan z_1 \tan z_2} \qquad \text{(iii)}$$

প্রমাণ : $\sin(z_1 + z_2) = \frac{1}{2i}\left[e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right]$

$= \frac{1}{2i}\left[e^{iz_1} e^{iz_2} - e^{-iz_1} e^{-iz_2}\right]$ [সূচক ফাংশনের সূচক নিয়ম থেকে]

$$= \frac{1}{2i}\left[(\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) - (\cos z_1 - i \sin z_1)(\cos z_2 - i \sin z_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[2i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2)\right]$$

$$= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \qquad \text{(i)}$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \frac{1}{2}\left[e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{iz_1} e^{iz_2} + e^{-iz_1} e^{-iz_2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2) + (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2)\right] .$$

$$= \frac{1}{2}\left[2(\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2)\right] = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \text{ ....(ii)}$$

অতএব $\tan(z_1 + z_2) = \dfrac{\sin(z_1 + z_2)}{\cos(z_1 + z_2)}$

$$= \frac{\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2}{\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2} \quad \text{[(i) এবং (ii) থেকে]}$$

$$= \frac{\tan z_1 - \tan z_2}{1 - \tan z_1 \tan z_2} \text{ ....(iii)}$$

3.4.3 উদাহরণ ঃ

$z_1 z_2$ জটিল রাশি হলে, জটিল রাশির বৃত্তীয় অপেক্ষকের সংজ্ঞা প্রয়োগ করে প্রমাণ করুন যে,

$$\cos z_1 + \cos z_2 = 2\cos\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)\cos\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)$$

প্রমাণ : $\cos z_1 + \cos z_2 = \cos\left(\dfrac{z_1 + z_2}{2} + \dfrac{z_1 - z_2}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{z_1 + z_2}{2} - \dfrac{z_1 - z_2}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{e^{i\left(\frac{z_1+z_2}{2}+\frac{z_1-z_2}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{z_1+z_2}{2}-\frac{z_1-z_2}{2}\right)}\right\} + \left\{e^{i\left(\frac{z_1+z_2}{2}-\frac{z_1-z_2}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{z_1+z_2}{2}-\frac{z_1-z_2}{2}\right)}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{e^{i\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)} e^{i\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)} e^{-i\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)}\right\} + \left\{e^{i\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)} . e^{-i\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)} . e^{i\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{\cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) + i\sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\right\}\left\{\cos\frac{z_1-z_2}{2} + i\sin\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)\right\}\right.$$

$$+\left\{\cos\frac{z_1+z_2}{2} - i\sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\right\}\left\{\cos\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right) - i\sin\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)\right\}$$

$$+\left\{\cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) + i\sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\right\}\left\{\cos\frac{z_1-z_2}{2} - i\sin\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)\right\}$$

$$\left.+\left\{\cos\frac{z_1+z_2}{2} - i\sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\right\}\left\{\cos\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right) + i\sin\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[4\cos\frac{z_1+z_2}{2}\cos\frac{z_1-z_2}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{z_1+z_2}{2}\cos\frac{z_1-z_2}{2}$$

3.4.4 জটিল রাশির সূচক ও বৃত্তীয় অপেক্ষকের পর্যাবৃত্ততা। (Periodicity of Exponential and circular functions of a complex variable)

সংজ্ঞা : কোন অপেক্ষক $f(z)$ পর্যাবৃত্তীয় হবে যদি এমন একটি বাস্তব বা জটিল সংখ্যা λ পাওয়া যায় যাতে নিচের সম্পর্কটি সত্য হয়

$f(z+\lambda) = f(z)$ । λ -কে $f(z)$-এর একটি পর্যায় বলা হয়।

3.4.5 অনুশীলনী। সংজ্ঞা প্রয়োগ করে দেখান যে

1. সূচক অপেক্ষক পর্যাবৃত্তীয় এবং এর পর্যায় $2n\pi$

2. সাইন ও কোসাইন অপেক্ষকদ্বয় পর্যাবৃত্তীয় এদের পর্যায় $2n\pi$

3.5 জটিল রাশির লগারিদম্ [Logarithm of a Complex Number]

সংজ্ঞা : দুটি জটিল রাশি z এবং w-এর মধ্যে যদি নীচের সম্পর্কটি সিদ্ধ হয়

$$z = \exp w = e^w$$

তবে w-কে z-এর একটি লগারিদম বলা হয়। এক্ষেত্রে লেখা হয়

$w = \mathrm{Log}_e z$ ।

$w = \mathrm{Log}_e z$ হলে $z = e^w = e^w . 1 = e^w \ [\cos 2n\pi + i\sin 2n\pi]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$= e^w . e^{2ni\pi}$$

$$= e^{w+2ni\pi}$$

অর্থাৎ $\mathrm{Log}_e z$ এর একটি মান w হলে $w + 2ni\pi$ হবে অন্য মান সমূহ। ফলে প্রমাণিত হল যে কোন জটিল রাশির লগারিদম্ বহুমান বিশিষ্ট অপেক্ষক।

ধরি z একটি জটিল রাশি যার **মডিউলাস** $|z| = r$ এবং **অ্যামপ্লিটিউড** হল θ, যেখানে $-\pi \le \theta \le \pi$ । তাহলে

$$z = |z|[\cos(\mathrm{amp}\ z) + i\sin(\mathrm{amp}\ z)]$$

$$= r[\cos\theta + i\sin\theta]$$

$$= re^{i\theta}$$

এখন $w = u + iv$ (u, v বাস্তব) হলে, $z = e^w$ সম্পর্কটি থেকে পাই

$$re^{i\theta} = e^{u+iv} = e^u . e^{iv}$$

$$\Rightarrow r[\cos\theta + i\sin\theta] = e^u[\cos v + i\sin v]$$

$$\Rightarrow e^u\cos v = r\cos\theta, \quad e^u\sin v = r\sin\theta$$

$$\Rightarrow u = \log r \text{ এবং } \cos v = \cos\theta, \quad \sin v = \sin\theta \Rightarrow v = \theta + 2n\pi$$

$$\therefore w = \mathrm{Log}_e z = u + iv$$

$$= \log r + i(\theta + 2n\pi)$$

$$= \log|z| + i\,\mathrm{amp}\ z + 2n\pi i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Log z এর মুখ্যমানকে log z লেখা হয় এবং Log z এর সাধারণ মানে n = 0 বসিয়ে এই মুখ্যমান নির্ণয় করা হয়। অর্থাৎ

$\log z = \log|z| + i\ \mathrm{amp}\ z$, ফলে

$\text{Log}z = \log z + 2n\pi i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$

দ্রষ্টব্য। Logz এর সংজ্ঞা থেকে পাই logz e^z-এর বিপরীত অপেক্ষক। শূন্য ব্যতীত সব জটিল রাশির লগারিদম সংজ্ঞাত।

(i) $\exp(\text{Log}z) = z \ (z \neq 0)$

(ii) $\text{Log}(\exp z)$ এর একটি মান হল z । অন্য মানগুলি হল $z + 2ni\pi$, n = অখণ্ড সংখ্যা।

3.5.1 উদাহরণ : Log4i এবং log4i নির্ণয় করুন।

উত্তর। Log z এর সংজ্ঞা থেকে পাই

$$\begin{aligned}\text{Log } 4i &= \log 4i + 2ni\pi \\ &= \log |4i| + i\,\text{amp}(4i) + 2ni\pi \\ &= \log 4 + i\frac{\pi}{2} + 2ni\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots\end{aligned}$$

$$\log 4i = \log 4 + i\frac{\pi}{2}$$

3.5.2 উদাহরণ : $\exp z = -2$ হলে z এর মানগুলি নির্ণয় করুন।

উত্তর। ধরা যাক্ $z = x + iy$, $\qquad$ (x,y বাস্তব)।

তাহলে $-2 = \exp z = \exp(x+iy) = e^x [\cos y + i \sin y]$

$\Rightarrow e^x \cos y = -2$ এবং $e^x \sin y = 0$

$\Rightarrow e^x = 2, \qquad \cos y = -1, \qquad \sin y = 0$

$\Rightarrow x = \log 2, \qquad y = (2n+1)\pi$

$\Rightarrow z = \log 2 + i(2n+1)\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots\ldots$

3.6 সামান্যীকৃত ঘাত (The Generalised Power)

সংজ্ঞা : $a(\neq 0)$ এবং z উভয়েই জটিল সংখ্যা হলে a^z-কে $a^z = e^{z\,\text{Log}a}$ এই সমীকরণ দ্বারা সংজ্ঞাত হয়।

যেহেতু $\text{Log}a = \log a + 2mi\pi \qquad$ (m = অখণ্ড সংখ্যা)

$a^z = e^{z\,\text{Log}a} = e^{z[\log a + 2mi\pi]}$ স্পষ্টত, a^z-এর অসীম সংখ্যক মান আছে। a^zএর মুখ্যমান হবে $e^{z\log a}$ (m = 0 নিয়ে)

3.6.1 দ্য ময়ভরের উপপাদ্যের সর্বাধিক সামান্যীকৃত আকার।

z এবং γ জটিল কিংবা বাস্তব রাশি হলে এবং m অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য হলে

$$\cos\gamma(z + 2m\pi) + i\sin\gamma(z + 2m\pi)$$

হবে $(\cos z+i\sin z)^{\gamma}$ -এর একটি মান।

প্রমাণ : $(\cos z+i\sin z)^{\gamma}=\left(e^{iz}\right)^{\gamma}$ [জটিল চলের বৃত্তীয় অপেক্ষকের সংজ্ঞা থেকে]

$$= e^{\gamma\, \mathrm{Log}\{\exp(iz)\}} \qquad [\ a^z \text{ এর সংজ্ঞা থেকে }]$$

$$= e^{\gamma\{\log e^{iz}+2mi\pi\}} \qquad [\ \text{লগারিদ্‌মের সংজ্ঞা থেকে }]$$

$$= e^{\gamma i\{z+2m\pi\}}$$

$$= \cos\gamma(z+2m\pi)+i\sin\gamma(z+2m\pi)$$

3.6.2 অনুসিদ্ধান্ত : $z=r[\cos\theta+i\sin\theta]$, $r=|z|$, $\theta=\mathrm{amp}\, z$ এবং n বাস্তব অথবা জটিল সংখ্যা হলে

$$z^n = e^{n\log r}\{\cos n(\theta+2p\pi)+i\sin n(\theta+2p\pi)\}$$

প্রমাণ $z^n = e^{n\log z} = e^{n}\{\log|z|+i\mathrm{amp}z+2pi\pi\}$, $\qquad p = 0$ অথবা অখণ্ড সংখ্যা।

$$= e^{n\{\log r+i\theta+2pi\pi\}},$$

$$= e^{n\log r}\ e^{in(\theta+2p\pi)}$$

$$= e^{n\log r}\ \{\cos n(\theta+2p\pi)+i\sin n(\theta+2p\pi)\},$$

$p=0$, অথবা অখণ্ড সংখ্যা।

3.6.3 উদাহরণ ঃ

প্রমাণ করুন যে i^i এর মান সমূহ একটি গুণোত্তর প্রগতি গঠন করে।

প্রমাণ : $i^i = e^{i\,\mathrm{Log}\, i}$

$$= e^{i\{\log|i|+i\,\mathrm{amp}\, i+2ni\pi\}}, \qquad n = \text{শূন্য অথবা অখণ্ড সংখ্যা।}$$

$$= e^{i\left\{0+i\frac{\pi}{2}+2ni\pi\right\}}$$

$$= e^{-\pi/2-2n\pi}$$

$$= e^{-\pi/2}\ e^{-2n\pi}, \qquad n = 0 \text{ অথবা অখণ্ড সংখ্যা।}$$

অতএব i^i -এর মানগুলি হল

$$\ldots\ldots\ldots e^{-\pi/2}\ e^{4\pi}, e^{-\pi/2}\ e^{2\pi}, e^{-\pi/2}, e^{-\frac{\pi}{2}}\ e^{-2\pi}, e^{-\pi/2}\ e^{-4\pi}, \ldots$$

অর্থাৎ মানগুলি একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে যার সাধারণ অনুপাত $e^{-2\pi}$.

3.7 পরাবৃত্তীয় অপেক্ষক [Hyperbolic Functions]

পরাবৃত্তীয় অপেক্ষকগুলি নিম্নলিখিত সম্পর্কগুলি দ্বারা সংজ্ঞাত হয়।

হাইপারবোলিক কোসাইন : $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ....(1)

হাইপারবোলিক সাইন : $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ....(2)

হাইপারবোলিক ট্যানজেন্ট : $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ ....(3)

হাইপারবোলিক কোট্যানজেন্ট : $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$ ....(4)

হাইপারবোলিক সেক্যান্ট : $\mathrm{sech}\, x = \dfrac{1}{\cosh x}$ ....(5)

হাইপারবোলিক কোসেক্যান্ট : $\mathrm{cosech}\, x = \dfrac{1}{\sinh x}$ ....(6)

উপরের সূত্রগুলির প্রত্যেকটিতে x জটিল রাশি।

3.7.1 পরাবৃত্তীয় ও বৃত্তীয় অপেক্ষকের মধ্যে সম্পর্ক।

z জটিল রাশি হলে, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{zi}$ এই সম্পর্কে

z = ix বসিয়ে পাই $\sin ix = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2i} = i\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$= i \sinh x \text{ ---------------- } (1)$$

অনুরূপভাবে, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ এই সম্পর্কে z = ix বসিয়ে পাই

$$\cos(ix) = \cosh x \text{ --------- } (2)$$

3.7.2 অনুশীলনী ঃ প্রমাণ করুন যে, $\cosh(ix) = \cos x$ এবং $\sinh(ix) = i\sin x$

3.7.3 পরাবৃত্তীয় অপেক্ষকের পর্যাবৃত্ততা (Periodicity of Hyperbolic functions) :

$\cosh x = \cos ix = \cos(ix+2n\pi)$ [বৃত্তীয় অপেক্ষকের পর্যাবৃত্ততা থেকে]

$= \cos i\,[x-2in\pi]$

$= \cosh\,[x-2in\pi]$

$= \cosh\,[x+2m\pi i]$, m অখণ্ড সংখ্যা। .....(1)

অনুরূপভাবে $\sinh x = -i\sin(ix)$

$= -i\sin[ix+2n\pi]$

$= -i\sin i[x-2ni\pi]$

$= -i.i\sinh[x-2in\pi]$

$= \sinh\,[x-2in\pi]$

$= \sinh\,[x+2m\pi i]$ m অখণ্ড সংখ্যা। ....(2)

(1) এবং (2) থেকে পাই পরাবৃত্তীয় অপেক্ষক সমূহ পর্যাবৃত্ত এবং এদের পর্যায় $2\pi i$.

3.7.4 অনুশীলনী ঃ প্রমাণ করুন যে tanh z এর পর্যায় πi ।

প্রমাণ $\tanh(z+k\pi i) = \dfrac{\sinh(z+k\pi i)}{\cosh(z+k\pi i)}$

$$= \frac{-i\sin i(z+k\pi i)}{\cos i(z+k\pi i)}$$

$$= -i\,\frac{\sin(iz-k\pi)}{\cos(iz-k\pi)} = -i\,\frac{\sin(iz)\cos k\pi}{\cos(iz)\cos k\pi}$$

$$= -i\,\frac{\sin(iz)}{\cos(iz)}$$

$$= -i.i\,\frac{\sinh z}{\cosh z} = \tanh z$$

3.7.5 উদাহরণ ঃ

(i) sin (x+iy) এবং (ii) sech (x+iy) জটিল রাশি দুটির বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ আলাদা করুন।

সমাধান

(i) $\sin(x+iy) = \sin x \cos(iy)+\cos x \sin(iy)$ [3.4.2 উদাহরণ দেখুন]

$= \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$ [3.7.1 অনুচ্ছেদ দেখুন]

(ii) $$\operatorname{sech}(x+iy) = \frac{1}{\cosh(x+iy)}$$

$$= \frac{1}{\cos i(x+iy)} = \frac{1}{\cos(-y+ix)} = \frac{1}{\cos(ix)\cos y + \sin(ix)\sin y}$$

$$= \frac{1}{\cosh x \cos y + i \sinh x \sin y}$$

$$= \frac{\cosh x \cos y - i \sinh x \sin y}{\cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y}$$

$$= \frac{\cosh x \cos y - i \sinh x \sin y}{\cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x(1-\cos^2 y)}$$

$$= \frac{\cosh x \cos y - i \sinh x \sin y}{(\cosh^2 x - \sinh^2 x)\cos^2 y + \sinh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh x \cos y - i \sinh x \sin y}{\cos^2 y + \sinh^2 x}$$

3.8 জটিল রাশির বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক [Inverse Circular Functions of a Complex Number]

সংজ্ঞা। ধরি z একটি প্রদত্ত জটিল রাশি এবং ω এমন একটি জটিল রাশি যার কোসাইন হচ্ছে z অর্থাৎ $\cos\,\omega = z$ তাহলে ω হবে z-এর একটি বিপরীত কোসাইন (Inverse Cosine)।

এস্থলে $\omega = \cos^{-1}z$ লেখা হবে।

এখন $\cos\omega = z \Rightarrow$

$\sin\omega = \pm\sqrt{1-z^2}$

অতএব $i\sin\omega = \pm\sqrt{z^2-1}$

এবং $\cos\omega + i\sin\omega = e^{i\omega} = z \pm \sqrt{z^2-1}$

অর্থাৎ $\omega = -i\,\mathrm{Log}\left[z \pm \sqrt{z^2-1}\right]$

জটিল রাশির লগারিদম অপেক্ষক বহুমান বিশিষ্ট বলে ω বহুমান বিশিষ্ট হবে এবং ω এর মানগুলিকে $\cos^{-1} z$ দিয়ে লেখা হবে।

$\sin\omega$ এর মান $\sqrt{1-z^2}$ নিলে এবং লগারিদমের মুখ্যমান নিলে আমরা ω-এর মুখ্যমানটি পাব। এই মানটিকে $\cos^{-1} z$ লেখা হবে।

ফলে, $$\cos^{-1} z = -i\log\left[z + i\sqrt{1-z^2}\right]$$

$$= -i\log\left[z + \sqrt{z^2-1}\right]$$

এবং $$\cos^{-1} z = -i\,\mathrm{Log}\left[z \pm \sqrt{z^2-1}\right]$$

সংজ্ঞা 2. ধরা যাক্ z একটি প্রদত্ত জটিল রাশি এবং ω এমন একটি জটিল রাশি যার সাইন হচ্ছে z অর্থাৎ $z = \sin\omega$। তাহলে ω-কে z-এর একটি বিপরীত সাইন অপেক্ষক বলা হবে। এস্থলে আমরা লিখব $\omega = \sin^{-1} z$

$\sin\omega = z \Rightarrow$

$\cos\omega = \pm\sqrt{1-z^2}$

অতএব $e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega = \pm\sqrt{1-z^2} + iz$

$$= i\left[z \pm \sqrt{z^2-1}\right]$$

$\Rightarrow \omega = -i\,\mathrm{Log}i\left[z \pm \sqrt{z^2-1}\right]$

ω একটি বহুমান বিশিষ্ট অপেক্ষক। এর মানগুলিকে $\sin^{-1} z$ বলা হয়।

অর্থাৎ $\sin^{-1} z = -i\,\mathrm{Log}i\left[z \pm \sqrt{z^2-1}\right]$

$\cos\omega$ এর মান $\sqrt{1-z^2}$ এবং লগারিদমের মুখ্যমান নিলে আমরা ω এর মুখ্যমান পাব। একে লেখা হবে $\sin^{-1} z$। অর্থাৎ

$$\sin^{-1} z = -i\log\left[iz+\sqrt{1-z^2}\right]$$

সংজ্ঞা 3. যদি $\tan z = \omega$ হয় তবে z কে ω এর বিপরীত ট্যানজেন্ট বলা হবে। এবং $z = \tan^{-1}\omega$. লেখা হবে।

এক্ষেত্রে $\omega = \tan z$

$$= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$$

অর্থাৎ $\dfrac{i\omega}{1} = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$

$$\Rightarrow e^{2iz} = \frac{1+i\omega}{1-i\omega} \qquad [\omega \neq -i]$$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{2}i\,\mathrm{Log}\frac{1+i\omega}{1-i\omega}$$

z একটি বহুমান বিশিষ্ট অপেক্ষক। z-এর মানগুলিকে $\mathrm{Tan}^{-1}\omega$ লেখা হয়। এবং এর মুখ্যমানটিকে $\tan^{-1} w$ লেখা হবে।

তাই $\mathrm{Tan}^{-1}\omega = -\dfrac{1}{2}i\,\mathrm{Log}\dfrac{1+i\omega}{1-i\omega}$

$$\tan^{-1}\omega = -\frac{1}{2}i\log\frac{1+i\omega}{1-i\omega}$$

(iii) ধরি $\mathrm{Tan}^{-1}(1+2i) = z$ তাহলে $1+2i = \tan z$

অর্থাৎ $1+2i = \dfrac{1}{i}\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$

বা, $i-2 = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} = \dfrac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$

বা, $\dfrac{2-i}{1} = \dfrac{1-e^{2iz}}{1+e^{2iz}}$

বা, $\dfrac{1+2-i}{1-(2-i)}=\dfrac{2}{2e^{2iz}}=e^{-2iz}$

বা, $e^{2iz}=\dfrac{i-1}{3-i}=\dfrac{(i-1)(3+i)}{10}=\dfrac{1}{5}(i-2)$

$$\therefore\ z=\frac{1}{2i}\,\mathrm{Log}\left(\frac{i-2}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\log\left|\frac{i-2}{5}\right|+i\,\mathrm{amp}\frac{i-2}{5}+2ni\pi\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[-\frac{1}{2}\log 5+i\tan^{-1}\frac{1}{-2}+2ni\pi\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[-\frac{1}{2}\log 5+i\left\{\pi-\tan^{-1}\frac{1}{2}\right\}+2ni\pi\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\pi-\tan^{-1}\frac{1}{2}\right]+n\pi+\frac{i}{4}\log 5$$

মুখ্যমান $=\dfrac{1}{2}\left[\pi-\tan^{-1}\dfrac{1}{2}\right]+\dfrac{i}{4}\log 5$

3.8.1 উদাহরণ ঃ

(i) $\cos^{-1}2$ (ii) $\sin^{-1}i$ এবং (iii) $\tan^{-1}(1+2i)$-এর মানগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান। (i) ধরি $\cos^{-1}2=z$। তাহলে $\cos z = 2$ => $\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=2$

অর্থাৎ $t+\dfrac{1}{t}=2.2=4$, $\qquad t=e^{iz}$

বা, $t^2-4t+1=0$

বা, $t=2\pm\sqrt{3}$

বা, $e^{iz}=2\pm\sqrt{3}$

বা, $z = -i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$

$$= -i\left[\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2ni\pi\right]$$

$$= 2n\pi - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$$

$\therefore\ \cos^{-1} 2 = 2n\pi \pm i\ln\left(2 + \sqrt{3}\right),$ $n =$ অখণ্ড সংখ্যা।

মুখ্যমান $\cos^{-1} 2 = i\ln\left(2 + \sqrt{3}\right),$

(ii) ধরি $\sin^{-1} i = z$ তাহলে $\sin z = i \Rightarrow \dfrac{t - \frac{1}{t}}{2i} = i,\ \ t = e^{iz}$

অর্থাৎ $t - \dfrac{1}{t} = -2 \Rightarrow t^2 + 2t - 1 = 0$

$$\Rightarrow t^2 + 2t + 1 = 2$$

$$\Rightarrow t = -1 \pm \sqrt{2}$$

ফলে, $z = -i\,\mathrm{Log}\left[-1 \pm \sqrt{2}\right]$

$t = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$ হলে $z = -i\left\{\log\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2ni\pi\right\}$

$$= 2n\pi - i\log\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$$= 2n\pi + i\log\left(\sqrt{2} + 1\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$t = -1 - \sqrt{2} = -\left(\sqrt{2} + 1\right)$ হলে, $z = -i\,\mathrm{Log}\left\{-\left(\sqrt{2} + 1\right)\right\}$

$$= -i\left\{\log\left(\sqrt{2} + 1\right) + i\pi + 2ni\pi\right\}$$

$$= (2n + 1)\pi - i\log\left(\sqrt{2} + 1\right) \ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) ও (2) থেকে পাই

$$z = \sin^{-1} i = n\pi + (-1)^n \log\left(\sqrt{2}+1\right)i$$

মুখ্যমান $\sin^{-1} i = \log\left(\sqrt{2}+1\right) i$

3.9 জটিল রাশির বিপরীত পরাবৃত্তীয় অপেক্ষক [Inverse Hyperbolic functions of a complex variable]

সংজ্ঞা 1 : কোন প্রদত্ত জটিল রাশি z -এর জন্য

$$\sinh \omega = z$$

সমীকরণটির বীজগুলি হল $\sinh^{-1} z$ এর মান।

এখন $\sinh \omega = z$

$$\therefore\ t - \frac{1}{t} = 2z, \quad t = e^{\omega}$$

বা, $t^2 - 2zt - 1 = 0$

বা, $(t-z)^2 = z^2 + 1$

বা, $t = z \pm \sqrt{z^2+1}$

$\therefore\ \omega = \text{Log}\left[z \pm \sqrt{z^2+1}\right]$। ω একটি বহুমান বিশিষ্ট অপেক্ষক। এর মানগুলিকে $\sinh^{-1} z$ দিয়ে নির্দেশিত করা হয়।

$$\therefore\ \sinh^{-1} z = \text{Log}\left[z \pm \sqrt{z^2+1}\right]$$

সংজ্ঞা 2 : ধরি z একটি প্রদত্ত জটিল রাশি এবং ω হচ্ছে এমন একটি জটিল রাশি যার হাইপারবোলিক কোসাইন হল z অর্থাৎ $\cosh \omega = z$। তাহলে ω হবে z-এর বিপরীত হাইপারবোলিক কোসাইন। অর্থাৎ $\omega = \cosh^{-1} z$।

যদি $\cosh \omega = z$ তাহলে

$$e^{\omega} + e^{-\omega} = 2z$$

বা, $e^{2\omega} - 2ze^{\omega} + 1 = 0$

বা, $t^2 - 2zt + 1 = 0, \qquad t = e^{\omega}$.

বা, $t = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$

$\therefore\ \omega = \text{Log}\left[z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right]$

বহুমান বিশিষ্ট অপেক্ষক ω এর মানগুলিকে $\cosh^{-1} z$ দিয়ে নির্দেশিত করা হয়।

$\therefore\ \cosh^{-1} z = \text{Log}\left[z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right]$

সংজ্ঞা 3। ধরা যাক z একটি প্রদত্ত জটিল রাশি। যদি $\tanh\ \omega = z$ হয় তবে ω কে z এর বিপরীত হাইপারবোলিক ট্যানজেন্ট বলা হবে।

$$\tanh\ \omega = z$$

$$\text{বা, } \frac{\sinh \omega}{\cosh \omega} = z$$

$$\text{বা, } \frac{\cosh \omega + \sinh \omega}{\cosh \omega - \sinh \omega} = \frac{1+z}{1-z} \qquad (z \neq \pm 1)$$

$$\text{বা, } e^{2\omega} = \frac{1+z}{1-z}$$

অর্থাৎ, $\qquad \omega = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+z}{1-z}$

ω একটি বহুমান বিশিষ্ট অপেক্ষক। এর মানগুলিকে $\text{Tanh}^{-1} z$ দিয়ে নির্দেশিত করা হয়।

$$\therefore\ \text{Tanh}^{-1} z = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+z}{1-z} \qquad (z \neq \pm 1)$$

অনুরূপভাবে $\text{cosech}^{-1} z$, $\text{sech}^{-1} z$ এবং $\coth^{-1} z$ অপেক্ষকগুলিকে সংজ্ঞাত করা যায়।

3.9.1 বিপরীত বৃত্তীয় এবং বিপরীত পরাবৃত্তীয় অপেক্ষকের মধ্যে সম্পর্ক। (Relation between inverse circular and inverse hyperbolic functions)

(i) ধরা যাক $z = \sinh u$

তাহলে $z = -i \sin iu$

$\therefore\ iz = \sin iu$

$\therefore\ u = \frac{1}{i} \sin^{-1}(iz) = -i \sin^{-1}(iz)$

অর্থাৎ $\sinh^{-1} z = -i\sin^{-1}(iz)$

(ii) অনুরূপভাবে cosh u = z হলে, $z = \cos(iu) \Rightarrow iu = \cos^{-1} z$

অর্থাৎ $u = \cosh^{-1} z = -i\cos^{-1}(z)$

(iii) ধরা যাক z = tanh u

তাহলে $z = -i\tan(iu) \Rightarrow \tan(iu) = iz$

$$\Rightarrow u = -i\,\mathrm{Tan}^{-1}(iz)$$

অর্থাৎ $\mathrm{Tanh}^{-1} z = -i\mathrm{Tan}^{-1}(iz)$

3.9.2 উদাহরণ ঃ

(i) $\cosh^{-1}2i$ এবং (ii) $\tanh^{-1}(1-i)$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

(i) ধরা যাক $\cosh^{-1} 2i = z$ তাহলে

$$\cosh z = 2i \Rightarrow$$

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = 2i \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 4i, \quad t = e^z$$

বা $t^2 - 4it + 1 = 0$

বা $t^2 - 4it + 4i^2 + 1 - 4i^2 = 0$

বা $(t-2i)^2 = -5 = 5i^2$

বা $t = 2i \pm \sqrt{5}\,i = \left(2 \pm \sqrt{5}\right) i$

$\therefore z = \mathrm{Log}\left[\left(2 \pm \sqrt{5}\right) i\right]$

এখন, $\mathrm{Log}\left[\left(2+\sqrt{5}\right) i\right] = \log\left|\left(2+\sqrt{5}\right) i\right| + i\,\mathrm{amp}\left[\left(2+\sqrt{5}\right) i\right] + 2ni\pi$

$$= \log\left(2+\sqrt{5}\right) + i\frac{\pi}{2} + 2ni\pi \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

এবং $\mathrm{Log}\left[\left(2-\sqrt{5}\right) i\right] = \log\left|\left(2-\sqrt{5}\right) i\right| + i\mathrm{amp}\left[\left(2-\sqrt{5}\right) i\right] + 2ni\pi$

$$= \log\left[\sqrt{5}-2\right] + i\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2ni\pi \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

(i) এবং (2) থেকে পাই

$$z=\cosh^{-1}(2i)=\log\left[\sqrt{5}\pm 2\right]+\left(2n\pm\frac{1}{2}\right)i\pi$$

(ii) ধরা যাক $\text{Tanh}^{-1}(1-i)=z$ তাহলে $\tanh z = 1-i$

অর্থাৎ $\dfrac{\sinh z}{\cosh z}=\dfrac{1-i}{1}$

$$\Rightarrow \frac{\cosh z+\sinh z}{\cosh z-\sinh z}=\frac{1+(1-i)}{1-(1-i)}=\frac{2-i}{i}=\frac{2i-i^2}{i^2}=\frac{1+2i}{-1}$$

$$\Rightarrow e^{2z}=-(1+2i)$$

$$\Rightarrow z=\frac{1}{2}\text{Log}\left[-(1+2i)\right]=\frac{1}{2}\left[\log|-1-2i|+i\,\text{amp}(-1-2i)+2ni\pi\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\log 5+i\left(\pi+\tan^{-1}2\right)+2ni\pi\right]$$

$$=\frac{1}{4}\log 5+i\left\{\frac{1}{2}\tan^{-1}2+\frac{1}{2}(2n+1)\pi\right\}$$

$n = 0$, অথবা অখণ্ড সংখ্যা।

3.10 দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ

উদাহরণ 1. e^{-3-4i} এই জটিল রাশিটির মডিউলাস এবং অ্যামপ্লিটিউডের মুখ্যমান নির্ণয় করুন।

সমাধান। $e^{-3-4i}=e^{-3}.e^{-4i}$

$$=e^{-3}\left[\cos 4-i\sin 4\right]$$

$$=e^{-3}\cos 4-ie^{-3}\sin 4$$

অতএব মডিউলাস $=e^{-3}$

মুখ্য অ্যামপ্লিটিউড্ θ হলে, $-\pi\le\theta\le\pi$ এবং $\cos\theta=\cos 4$

$$\sin\theta=-\sin 4$$

সম্পর্কগুলি সিদ্ধ হবে। ফলে $\theta = 2\pi - 4$

উদাহরণ 2. z জটিল রাশি হলে $e^z = 0$ সমীকরণের কোনও সমাধান নেই, প্রমাণ করুন।

প্রমাণ। ধরাযাক $z = x + iy$ । তাহলে $e^z = 0 \Rightarrow e^{x+iy} = 0$

$$\Rightarrow e^x [\cos y + i \sin y] = 0$$

$$\Rightarrow e^x \cos y = 0 \text{ এবং } e^x \sin y = 0$$

যেহেতু $e^x \neq 0$, $\cos y = 0$ এবং $\sin y = 0$। কিন্তু এটি অসম্ভব।

অতএব $e^z = 0$ সমীকরণের কোনও সমাধান নেই।

উদাহরণ 3. Log(1+i)-এর সাধারণ মান এবং মুখ্যমান নির্ণয় করুন।

সমাধান। $\text{Log} z = \log|z| + i\,\text{amp}\, z + 2ni\pi$ সূত্রে $z = 1+i$ বসিয়ে পাই

$$\text{Log}(1+i) = \log|1+i| + i\,\text{amp}(1+i) + 2ni\pi$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 + i\frac{\pi}{4} + 2ni\pi, \qquad n = 0 \text{ অথবা অখণ্ড সংখ্যা।}$$

$$\therefore \text{ মুখ্যমান } = \frac{1}{2}\log 2 + i\frac{\pi}{4}$$

উদাহরণ 4. $\text{Log}\{\text{Log}(\cos\theta + i\sin\theta)\}$-কে $A + iB$ আকারে লিখুন।

সমাধান : $\text{Log}(\cos\theta + i\sin\theta) = \log|\cos\theta + i\sin\theta| + i\,\text{amp}(\cos\theta + i\sin\theta) + 2ni\pi$

$$= \log 1 + i\theta + 2ni\pi$$

$$= i[\theta + 2n\pi], \qquad n = 0 \text{ অথবা অখণ্ড সংখ্যা।}$$

$$\therefore \text{Log}\{\text{Log}(\cos\theta + i\sin\theta)\} = \text{Log}[(\theta + 2n\pi)i]$$

$$= \log\{|\theta + 2n\pi||i|\} + i\,\text{amp}\{(\theta + 2n\pi)i\} + i2k\pi$$

$$= \log|\theta + 2n\pi| + i\frac{\pi}{2} + i2k\pi$$

$$= \log|\theta + 2n\pi| + i\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

উদাহরণ 5. প্রমাণ করুন যে $\dfrac{(1+i)^{1-i} \text{ এর মুখ্যমান}}{(1-i)^{1+i} \text{ এর মুখ্যমান}} = \sin(\log 2) + i\cos(\log 2)$

সমাধান : a^z এর মুখ্যমান $= e^{z\log a}$

$$= e^{z\{\log|a| + i\,\mathrm{amp}\,a\}}$$

অতএব নির্ণেয় রাশি $$= \frac{e^{(1-i)\left[\log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right]}}{e^{(1+i)\left[\log\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4}\right]}}$$

$$= \frac{e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot e^{i\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right]}}{e^{\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot e^{i\left[\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}\right]}}$$ [$\ln a = \log_e a = \log a$]

$$= e^{i\left[2\frac{\pi}{4} - 2\times\frac{1}{2}\ln 2\right]}$$

$$= e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right)}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right)$$

$$= \sin(\ln 2) + i\cos(\ln 2)$$

উদাহরণ 6. প্রমাণ করুন যে $\sin\left[\log i^i\right] = -1$

সমাধান : $i^i = e^{i\log i}$

$$= e^{i\{\log|i| + i\,\mathrm{amp}\,i\}}$$

$$= e^{i\left\{0 + i\frac{\pi}{2}\right\}}$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}}$$

অতএব $\log i^i = \log e^{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}$ ।

$$\therefore \sin\left[\log i^i\right] = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

উদাহরণ 7. নিচের সমীকরণ দুটির সাধারন সমাধান নির্ণয় করুন।

(a) $\cos z = -2$ (b) $\sinh z = -2$

সমাধান (a) $\cos z = -2 \Rightarrow e^{iz} + e^{-iz} = -4$

$$\Rightarrow t + \frac{1}{t} = -4, \quad t = e^{iz}$$

$$\Rightarrow t^2 + 4t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 + 4t + 4 = 3$$

$$\Rightarrow (t+2)^2 = 3$$

$$\Rightarrow t = -2 \pm \sqrt{3}$$

অর্থাৎ, $e^{iz} = -2 \pm \sqrt{3}$

$$\therefore \; z = -i\,\mathrm{Log}\left[-2 \pm \sqrt{3}\right]$$

অর্থাৎ $z = -i\,\mathrm{Log}\left[-2 + \sqrt{3}\right]$ অথবা $z = -i\,\mathrm{Log}\left[-2 - \sqrt{3}\right]$

প্রথম ক্ষেত্রে $z = -i\left[\log\left|-2+\sqrt{3}\right| + i\,\mathrm{amp}\left(-2+\sqrt{3}\right) + 2ni\pi\right]$

$$= -i\left[\log\left(2-\sqrt{3}\right) + i\pi + 2ni\pi\right]$$

$$= -i\left[\log\left(2-\sqrt{3}\right) + (2n+1)i\pi\right]$$

$z = (2n+1)\pi - i\log\left(2-\sqrt{3}\right)$ .... (1)

আবার দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $z = -i\,\mathrm{Log}\left[-2-\sqrt{3}\right]$

$$= -i\left\{\log\left|-2-\sqrt{3}\right| + i\,\mathrm{amp}\left(-2-\sqrt{3}\right) + 2ni\pi\right\}$$

$$= -i\left\{\log\left(2+\sqrt{3}\right) + i\pi + 2ni\pi\right\}$$

$$= (2n+1)\pi - i\log\left(2+\sqrt{3}\right)$$

$$= (2\pi+1)\,\pi + i\log\left(2-\sqrt{3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) এবং (2) থেকে পাই $z = (2n+1)\pi \pm i\log\left(2-\sqrt{3}\right)$

(b) যদি $\sinh z = z$ তাহলে $e^z - e^{-z} = 4$

বা, $t - \dfrac{1}{t} = 4,\qquad t = e^z$

বা, $t^2 - 4t - 1 = 0$

বা, $t^2 - 4t + 4 = 5$

বা, $(t-2)^2 = 5$

বা, $t = 2 \pm \sqrt{5}$

$\therefore\ z = \mathrm{Log}\left[2 \pm \sqrt{5}\right]$

অর্থাৎ $z = \mathrm{Log}\left(2+\sqrt{5}\right)$

$z = \mathrm{Log}\left(2+\sqrt{5}\right) \Rightarrow$

$z = \log\left(2+\sqrt{5}\right) + i\,\mathrm{amp}\left(\sqrt{5}+2\right) + 2ni\pi$

$= 2ni\pi + \log\left(\sqrt{5}+2\right)$ ....(1)

অথবা $z = \mathrm{Log}\left(2-\sqrt{5}\right)$

আবার $z = \mathrm{Log}\left(2-\sqrt{5}\right) \Rightarrow$

$z = \log\left(\sqrt{5}-2\right) + i\,\mathrm{amp}\left(2-\sqrt{5}\right) + 2ni\pi$

$= (2n+1)i\pi + \log\left(\sqrt{5}-2\right)$

$= (2n+1)i\pi - \log\left(\sqrt{5}+2\right)$ ....(2)

(1) এবং (2) থেকে পাই

$$z = n\pi i + (-1)^n \log\left(\sqrt{5}+2\right)$$

উদাহরণ 8. প্রমাণ করুন যে $\tan^{-1}(e^{ix}) - \tan^{-1}(e^{-ix}) = \tan^{-1} i$ সমীকরণটির সাধারণ সমাধান হচ্ছে $x = n\pi + (-1)^n \frac{1}{2}\pi$

সমাধান : যদি $\tan^{-1}(e^{ix}) - \tan^{-1}(e^{-ix}) = \tan^{-1} i$

তাহলে $\tan^{-1} \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{1 + e^{ix}.e^{-ix}} = \tan^{-1} i$

বা, $\tan^{-1} \dfrac{2i \sin x}{2} = \tan^{-1} i$

বা, $\tan^{-1}(i \sin x) = \tan^{-1} i$

বা, $\sin x = 1$

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$$

উদাহরণ 9. $\log \sin(x + iy) = u + iv, \qquad 0 < x < \pi$ হলে প্রমাণ করুন যে

(i) $u = \frac{1}{2}\log(\cosh^2 y - \cos^2 x)$

(ii) $v = \tan^{-1}(\cot x \tanh y)$

সমাধান : log sin (x+iy) = log | sin(x+iy) | + i amp [sin (x+iy)]........(1)

এখন sin(x+iy) = sinx cos(iy) + cosx sin(iy)

= sinx cosh y + icosx sinh y.................(2)

$$\therefore \ |\sin(x + iy)| = \left\{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y\right\}^{1/2}$$

$$= \left\{\left(1 - \cos^2 x\right)\cosh^2 y + \cos^2 x\left(\cosh^2 y - 1\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\cosh^2 y - \cos^2 x\right]^{\frac{1}{2}}$$

অতএব $\log |\sin(x+iy)| = \frac{1}{2}\log\left(\cosh^2 y - \cos^2 x\right)$

(2) থেকে পাই $\operatorname{amp}\{\sin(x+iy)\} = \tan^{-1}\left(\dfrac{\cos x \sinh y}{\sin x \cosh y}\right)$

$$= \tan^{-1}(\cot x \tanh y)$$

$\sin(x+iy)$-এর মডিউলাস এবং অ্যামপ্লিটিউডের মান (1) সম্পর্কে বসিয়ে পাই

$$\log \sin(x+iy) = \frac{1}{2}\log\left(\cosh^2 y - \cos^2 x\right)^{\frac{1}{2}} + i\tan^{-1}(\cot x \tanh y)$$

$= u + iv$ (প্রদত্ত।)

$$\therefore u = \frac{1}{2}\log\left(\cosh^2 y - \cos^2 x\right),\ v = \tan^{-1}(\cot x \tanh y)$$

উদাহরণ 10. $\tan(\alpha + i\beta) = x + iy$ হলে প্রমাণ করুন যে,

(i) $x^2 + y^2 + 2x\cot 2\alpha = 1$

(ii) $x^2 + y^2 - 2y\coth 2\beta = -1$

সমাধান : $\tan(\alpha + i\beta) = x + iy \Rightarrow \alpha + i\beta = \tan^{-1}(x+iy)$ .... (1)

$$\Rightarrow \alpha - i\beta = \tan^{-1}(x - iy) \quad \text{..................} (2)$$

(1) এবং (2) থেকে পাই $2\alpha = \tan^{-1}(x+iy) + \tan^{-1}(x-iy)$

$$= \tan^{-1}\frac{(x+iy)+(x-iy)}{1-(x+iy)(x-iy)}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2-y^2} \quad \text{..................} (3)$$

এবং $$zi\beta = \tan^{-1}(x+iy) - \tan^{-1}(x-iy)$$

$$= \tan^{-1}\frac{2iy}{1+x^2+y^2} \quad \text{..................} (4)$$

(3) ও (4) থেকে পাই $\tan 2\alpha = \dfrac{2x}{1-x^2-y^2}$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x\cot 2\alpha = 1$$

এবং $\tan 2i\beta = i\tanh 2\beta = \dfrac{2iy}{1+x^2+y^2} \Rightarrow$

$$x^2+y^2-2y\coth 2\beta = -1$$

3.11 সারাংশ

(a) জটিল চলের সূচক অপেক্ষক

$z = x + iy$ (x,y বাস্তব) একটি জটিল রাশি হলে,

$$e^z = e^x[\cos y + i\sin y] \quad \text{.......... (1)}$$

z বিশুদ্ধ কাল্পনিক রাশি অর্থাৎ $z = iy$ হলে

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \quad \text{.......... (2)}$$

z_1, z_2 দুটি জটিল রাশি হলে, $e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ .... (3)

(b) জটিল চলের বৃত্তীয় অপেক্ষক

z একটি জটিল রাশি হলে,

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left[e^{iz}-e^{-iz}\right] \quad \text{.......... (4)}$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left[e^{iz}+e^{-iz}\right] \quad \text{.......... (5)}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} \quad \text{.......... (6)}$$

$$\cot z = \frac{1}{\tan z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z} \quad \text{.......... (7)}$$

(c) জটিল রাশির লগারিদম্।

z একটি জটিল রাশি হলে তার লগারিদম্ একটি বহুমান বিশিষ্ট অপেক্ষক।

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i\operatorname{amp} z + 2ni\pi \quad \text{.......... (8)}$$

n = অখণ্ড সংখ্যা।

[উপরের সংজ্ঞায় amp z হল z-এর অ্যাম্প্লিটিউডের মুখ্যমান।]

Log z এর মুখ্যমান logz যেখানে

$\log z = \log |z| + i \operatorname{amp} z$ ....(9)

a(≠ 0) এবং z উভয়েই জটিল রাশি হলে

$a^z = e^{z\log a}$ ....(10)

(d) পরাবৃত্তীয় অপেক্ষক।

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \text{............(11)}$$

$$\cosh z = \frac{e^z - e^z}{2} \qquad \text{............(12)}$$

$$\tan z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \qquad \text{............(13)}$$

$$\coth z = \frac{1}{\tanh z}, \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{cosech} z = \frac{1}{\sinh z}, \quad \text{.......(14)}$$

(e) পরাবৃত্তীয় ও বৃত্তীয় অপেক্ষকের মধ্যে সম্পর্ক

$\sin(ix) = i\sinh x$ ....(15)

$\cos(ix) = \cosh x$ ....(16)

$\tan(ix) = i\tanh x$ ....(17)

$\sinh(ix) = i\sin x$ ....(18)

$\cosh(ix) = \cos x$ ....(19)

$\tanh(ix) = i\tan x$ ....(20)

(f) জটিল রাশির বিপরীত বৃত্তীয় ও পরাবৃত্তীয় অপেক্ষক।

$$\operatorname{Cos}^{-1} z = -i\operatorname{Log}\left[z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right], \quad \cos^{-1} z = -i\log\left[z + \sqrt{z^2 - 1}\right] \qquad \text{............(21)}$$

$$\operatorname{Sin}^{-1} z = -i\operatorname{Log} i\left[z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right], \quad \sin^{-1} z = -i\log\left[iz + \sqrt{1 - z^2}\right] \qquad \text{............(22)}$$

$$\operatorname{Tan}^{-1} z = -\frac{1}{2} i \operatorname{Log}\frac{1+iz}{1-iz}, \quad \tan^{-1} z = -\frac{1}{2} i \log\frac{1+iz}{1-iz} \qquad \text{............(23)}$$

উপরের মূলগুলিতে $\cos^{-1} z, \sin^{-1} z$ এবং $\tan^{-1} z$ হল যথাক্রমে $\text{Cos}^{-1}z, \text{Sin}^{-1}z$ এবং $\text{Tan}^{-1}z$ এর মুখ্যমান।

$$\text{Cosh}^{-1}z = \text{Log}\left[z \pm \sqrt{z^2-1}\right] \quad \ldots\ldots (24)$$

$$\text{Sinh}^{-1}z = \text{Log}\left[z \pm \sqrt{z^2+1}\right] \quad \ldots\ldots (25)$$

$$\text{Tanx}^{-1}z = \frac{1}{2}\text{Log}\frac{1+z}{1+z} \qquad z \neq \pm 1 \quad \ldots\ldots (26)$$

(g) বিপরীত বৃত্তীয় ও বিপরীত পরাবৃত্তীয় অপেক্ষকের মধ্যে সম্পর্ক।

$$\sinh^{-1} z = -i\sin^{-1}(iz) \quad \ldots\ldots (27)$$

$$\cosh^{-1} z = -i\cos^{-1} z \quad \ldots\ldots (28)$$

$$\tanh^{-1} z = -i\tan^{-1}(iz) \quad \ldots\ldots (29)$$

3.12 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. নিম্নলিখিত জটিল রাশিগুলিকে বাস্তব এবং কাল্পনিক অংশে বিভক্ত করুন।

(a) $\exp\left(5+\frac{i\pi}{2}\right)$ (b) $\exp(5+3i)^2$

2. sinz এবং cosz এর সংজ্ঞা থেকে প্রমাণ করুন যে

(i) $\cos 2z = 2\cos^2 z - 1$ (ii) $\frac{\sin 2z}{1+\cos 2z} = \cot z$

3. প্রমাণ করুন যে $\text{Log}\frac{3-i}{3+i} = 2i\left[n\pi - \tan^{-1}\frac{1}{3}\right]$

4. নিম্নলিখিত জটিল রাশিগুলির মডিউলাস্ এবং অ্যামপ্লিটিউড্ নির্ণয় করুন

(a) $\left(\sqrt{i}\right)^{\sqrt{i}}$ (b) $i^{\log(1+i)}$

5. প্রমাণ করুন যে $\tan\left[i\log\left(\frac{a-ib}{a+ib}\right)\right] = \frac{2ab}{a^2-b^2}$

6. z জটিলরাশি হলে প্রমাণ করুন

(a) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ (b) $\cosh^2 z + \sinh^2 z = \cosh 2z$

7. α, β জটিল রাশি হলে প্রমাণ করুন যে

(i) $\cosh(\alpha+\beta) - \cosh(\alpha-\beta) = 2\sinh\alpha\sinh\beta$

(ii) $\sinh(\alpha+\beta)\cosh(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}[\sinh 2\alpha + \sinh 2\beta]$

8. $\tan(x+iy) = \sin(u+iv)$ হলে প্রমাণ করুন যে $\frac{\sin 2x}{\sinh 2y} = \frac{\tan u}{\tanh v}$

9. $\cosh^{-1}(x+iy) + \cosh^{-1}(x-iy) = \cosh^{-1}\alpha$ হলে প্রমাণ করুন যে

(i) $\alpha > 1$ হলে (x,y) একটি উপবৃত্তে অবস্থিত এবং (ii) $\alpha < 1$ হলে (x,y) একটি পরাবৃত্তে অবস্থিত।

10. প্রমাণ করুন যে জটিল রাশি a^z এর মান সমূহ দ্বারা রূপায়িত বিন্দুগুলি আরগাঁ সমতলে

$r = e^{\frac{1}{u}(u^2+v^2)\log\sigma} \; e^{-\frac{v}{u}\theta}$ এই ধ্রুবকোণী কুণ্ডলী (Equiangular Spiral) এর উপর অবস্থান করে। এখানে $z = u + iv$ এবং $a = \sigma(\cos\psi + i\sin\psi)$ ।

11. $\sin^{-1}(u+iv) = p+iq$ (u, v, p, q বাস্তব) হলে প্রমাণ করুন যে $\sin^2 p$ এবং $\cosh^2 q$ রাশি দুটি $x^2 - x(1+u^2+v^2) + u^2 = 0$ সমীকরণের বীজ।

12. $|\sin(x+iy)| = 1$ (x,y বাস্তব) হলে প্রমাণ করুন যে $\cosh 2y - \cos 2x = 2$

3.13 উত্তরমালা

1 (a) $0 + e^5.i$, (b) $e^{16}[\cos30 + i\sin30]$

2 (ii) $\sin z = \frac{1}{2i}\left[e^{2iz} - e^{-2iz}\right] = \frac{1}{2i}\left[\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\right]$

$$= \frac{1}{2i}[2i\sin z.\, 2\cos z]$$

$$= 2\sin z\cos z$$

$$1 + \cos 2z = 1 + \frac{1}{2}\left[e^{2iz} + e^{-2iz}\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left[\left\{e^{iz} + e^{-iz}\right\}^2 - 2\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left\{e^{iz} + e^{-iz}\right\}^2 - 1$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{iz} + e^{-iz}\right]^2 = 2 \times \frac{1}{4}\left[e^{iz} + e^{-iz}\right]^2$$

$$= 2\cos^2 z$$

3. $\operatorname{Log}\dfrac{3-i}{3+i} = \log\left|\dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}i\right| + i\operatorname{amp}\left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}i\right) + 2ni\pi$

$$= -i\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) + 2ni\pi$$

$$= 2i\left[n\pi - \tan^{-1}\frac{1}{3}\right]$$

4. (a) $e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2n+\frac{1}{4}\right)\pi}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(2n+\dfrac{1}{4}\right)\pi$, $\sqrt{i} = \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$ ধরে।

(b) মুখ্যমান $e^{-\frac{\pi^2}{8} + i\frac{\pi}{4}\log 2}$ অতএব মডিউলাস $e^{-\frac{\pi^2}{8}}$ অ্যাম্প্লিটিউড্ $\dfrac{\pi}{4}\log 2$

5. $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$ ধরে সরল করুন।

7. (a) $\cosh z = \cos iz$ এবং $\sinh z = -i\sin(iz)$ সম্পর্কগুলি প্রয়োগ করুন

এবং $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$, সূত্র প্রয়োগ করুন।

(b) উপরের মত $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$ সূত্র প্রয়োগ করুন।

8. $\tan(x+iy) = \dfrac{\sin(x+iy)}{\cos(x+iy)} = \dfrac{2\sin(x+iy)\cos(x-iy)}{2\cos(x+iy)\cos(x-iy)} = \dfrac{\sin 2x + i\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$

$\sin(u+iv) = \sin u \cosh v + i\cos u \sinh v$

9. ধরি, $\cosh^{-1}(x+iy) = u+iv \Rightarrow \cosh^{-1}(x=iy) = u-iv$

$\therefore\ \cosh^{-1}(x+iy) + \cosh^{-1}(x-iy) = 2u = \cosh^{-1}\alpha$

অর্থাৎ $\cosh 2u = \alpha \Rightarrow \cosh^2 u + \sinh^2 u = \alpha$

আবার $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$

$\therefore\ \cosh^2 u = \dfrac{\alpha+1}{2}, \qquad \sinh^2 u = \dfrac{\alpha-1}{2}$

আবার $\cosh^{-1}(x+iy) = u+iv \Rightarrow \cosh(u+iv) = x+iy$

অর্থাৎ $\dfrac{1}{2}\left\{e^{u+iv} + e^{-u-iv}\right\} = x+iy \Rightarrow \cos v\dfrac{e^u+e^{-u}}{2} + i\sin v\dfrac{e^u-e^{-u}}{2} = x+iy$

$\Rightarrow x+iy = \cosh u\cos v + i\sinh u\sin v \Rightarrow x = \cosh u\cos v, \quad y = \sinh u\sin v$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{\cosh^2 u} + \dfrac{y^2}{\sinh^2 u} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{\frac{\alpha+1}{2}} + \dfrac{y^2}{\frac{\alpha-1}{2}} = 1$

10. ধরি $a^z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

তাহলে $re^{i\theta} = a^z = e^{z\mathrm{Log}\sigma}$

$$= e^{(u+iv)\log\sigma(\cos\psi + i\sin\psi)}$$

$$= e^{(u+iv)\{\log\sigma + i\psi + i2n\pi\}}$$

$$= e^{(u+iv)\{\log\sigma + i(\psi + i2n\pi)\}}$$

$$= e^{u\log\sigma - v(\psi+2n\pi) + i(v\log\sigma + u(\psi+2n\pi))}$$

উভয়পক্ষের **মডিউলাস** এবং **অ্যামপ্লিটিউডের** সমতা থেকে পাই

$r = e^{u\log\sigma - v(\psi+2n\pi)}$ এবং $\theta = v\log\sigma + u(\psi + 2n\pi)$

$$\Rightarrow \psi + 2n\pi = (\theta - v\log\sigma)/u$$

$\therefore\ r = e^{u\log\sigma - \frac{v}{u}(\theta - v\log\sigma)}$

$= e^{\left(u+\frac{v^2}{u}\right)\log\sigma - \frac{v}{u}\theta} = e^{1/u.(u^2+v^2)\log\sigma}\ e^{-\frac{v}{u}\theta}$ । এখন কোন ধ্রুবকোণী কুণ্ডলীর মেরুজ সমীকরণ (polar equation) হল $r = ae^{m\theta}$ । অতএব......

একক 4 ❑ বহুপদ রাশি, বহুপদ সমীকরণ-এর বীজ ও ধর্মসমূহ

গঠন

4.1 প্রস্তাবনা

x-একটি চলরাশি ও n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হলে $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ রাশিটিকে আমরা একটি বহুপদ রাশি (polynomial) বলি যদি a_0, a_1 ..... a_n এগুলি x-নিরপেক্ষ হয়। a_0, a_1, ... a_n সংখ্যাগুলিকে ঐ বহুপদ রাশির সহগ বলে। x-এর বিভিন্ন মানের জন্য উপরোক্ত বহুপদরাশিটির মানও সাধারণত বিভিন্ন হয়। x-এর যে মানের জন্য বহুপদ রাশিটির মান শূন্য হয় সেটিকে ঐ বহুপদরাশির একটি বীজ (root) বা শূন্য (zero) বলে। একটি বহুপদ রাশির একাধিক বীজও থাকতে পারে। সেগুলি বাস্তব বা জটিল রাশিও হতে পারে। কোনও বহুপদরাশির বীজগুলির সঙ্গে তার সহগগুলির কতকগুলি সুনির্দিষ্ট সম্পর্ক বর্তমান। এই এককটিতে ঐ সম্পর্কগুলি সম্বন্ধেই আলোচনা হবে। এই প্রসঙ্গে স্মরণীয় $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ সম্পর্কটিকে বহুপদ সমীকরণ বলে। x-এর যে বাস্তব বা জটিল মানের জন্য উপরোক্ত সম্পর্কটি সিদ্ধ হয় তাকে ঐ সমীকরণটির বীজ বা শূন্য বলে। স্পষ্টতই কোন বহুপদরাশি ও সংশ্লিষ্ট বহুপদ সমীকরণের বীজগুলি একই।

4.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠের পর আপনি

- বীজগাণিতের মৌলিক উপপাদ্যটি [প্রত্যেক বীজগণিতিক সমীকরণের অন্তত একটি বীজ (বাস্তব বা কাল্পনিক) থাকে] বীজগণিতের বিভিন্ন ক্ষেত্রে প্রয়োগ করতে পারবেন।
- বীজগাণিতিক সমীকরণের বীজ ও সহগের মধ্যে সম্পর্কগুলি বীজগণিতের বিভিন্ন ক্ষেত্রে ব্যবহার করতে পারবেন।
- বীজগাণিতিক সমীকরণের বীজের প্রকৃতিগুলি নির্ণয় করতে পারবেন।
- বীজগাণিতিক সমীকরণগুলি বিভিন্ন পদ্ধতিতে সমাধান করে বীজগুলির মান বার করতে পারবেন।

বাস্তব ক্ষেত্রে অর্থাৎ পদার্থবিদ্যা, নির্মিতিবিদ্যা (architecture) বা অন্যান্য শাখায় প্রায়শই আমরা বহুপদ রাশি বা সমীকরণ পাই যার সমাধান অত্যাবশ্যক। এই এককটির মাধ্যমে কিছু পদ্ধতির সঙ্গে পাঠকের পরিচয় ঘটবে যা এই ধরনের সমস্যা নিরসন করতে সহায়ক হবে। এমনকি সঠিক সমাধান না পাওয়া গেলেও তার একটি আনুমানিক মান বা অবস্থান সম্পর্কে জানা সম্ভব হবে।

4.3 বহুপদ রাশি

4.3.1 সংজ্ঞা :

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ আকারকে n ঘাত-এর বহুপদ রাশি বলা হবে যখন a_0, a_1, a_2, ... a_n বাস্তব ধ্রুবক $a_0 \neq 0$ এবং প্রতিটি পদের x-এর ঘাত ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

সংজ্ঞা থেকে স্পষ্ট যে, শূন্য ঘাতের বহুপদ রাশি একটি ধ্রুবক।

বহুপদ রাশির সব সহগগুলি শূন্য হলে অর্থাৎ $a_0 = a_1 = \ldots\ldots = a_n = 0$ হলে বহুপদ রাশিটিকে শূন্য বহুপদরাশি বলা হবে।

বহুপদ রাশির প্রতিটি সহগ অশূন্য হলে বহুপদ রাশিটিকে সম্পূর্ণ বহুপদরাশি (complete polynomial) বলা হবে, অন্যথায় অসম্পূর্ণ বহুপদ রাশি বলা হবে।

$x^2 + 1$ অসম্পূর্ণ বহুপদ রাশি কারণ x-যুক্ত পদের সহগ শূন্য।

$3x^2 + 2x^2 + x + 1$ একটি সম্পূর্ণ বহুপদরাশি।

দুটি বহুপদ রাশি —

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n$$

এবং $b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots\ldots + b_m$

সমান হবে যদি (i) $n = m$

এবং (ii) $a_i = b_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ হয়।

বহুপদ রাশির যোগ ও বিয়োগ ঃ

ধরা যাক $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n$ এবং $b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots\ldots + b_m$ দুটি বহুপদ রাশি এবং $m < n$।

বহুপদ রাশি দুটির যোগফল একটি n-ঘাত এর বহুপদ রাশি হবে এবং বহুপদ রাশিটি,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-(m+1)}x^{m+1} + (a_{n-m} + b_0)\,x^m + \ldots\ldots\ldots + (a_n + b_m).$$

একই ভাবে দুটি বহুপদ রাশির বিয়োগফল একটি বহুপদ রাশি।

বহুপদ রাশির গুণ ও ভাগ ঃ

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n, \qquad a_0 \neq 0 \ \ldots\ldots (1)$$

এবং $g(x) \equiv b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots\cdots + b_m, \qquad b_0 \neq 0 \ \ldots\ldots (2)$

দুইটি বহুপদ রাশি।

এই বহুপদ রাশি দু'টিকে গুণ করলে একটি বহুপদ রাশি পাবেন যার ঘাত হবে $m + n$.

ধরা যাক $m < n$ । এখন (1)-কে (2) দ্বারা ভাগ করলে দু'টি অবিকল্প (Uniquely) বহুপদ রাশি $q(x)$ এবং $r(x)$ পাওয়া সম্ভব যাতে

$$f(x) = g(x).\ q(x) + r(x)$$

যেখানে, $q(x)$ এর ঘাত $n - m$ এবং $r(x)$ -এর ঘাত m-এর থেকে ছোট হবে। $q(x)$ এবং $r(x)$ যথাক্রমে ভাগফল এবং ভাগশেষ বলে। $g(x) = x - h$ হলে, $q(x)$ এবং $r(x)$ হবে যথাক্রমে $n - 1$ এবং শূন্য ঘাত বিশিষ্ট বহুপদ রাশি। ধরা যাক $r(x) = R$

$$\therefore \quad f(x) = (x - h) \quad q(x) + R$$

এই সম্বন্ধে, $x = h$ বসালে, $R = f(h)$ অর্থাৎ ভাগশেষ $= f(h)$

4.4 বহুপদ রাশির ভাগ সংক্রান্ত আলোচনা

4.4.1 ভাগ এ্যাল্‌গোরিদম্ (Division Algorithm) :

উপপাদ্য ঃ

ধরুন, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n, \quad a_0 \neq 0$

$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m, b_0 \neq 0$

এবং $m \leq n$

এখন দুটি অবিকল্প বহুপদ রাশি $q(x)$ এবং $r(x)$ পাওয়া যাবে যাতে,

$f(x) = g(x). q(x) + r(x)$

যেখানে $q(x)$-এর ঘাত $n - m$ এবং $r(x)$, এর ঘাত m-এর ছোট। $r(n)$ শূন্য বহুপদ রাশি যখন $f(x)$, $g(x)$ দ্বারা বিভাজ্য।

প্রমাণ ঃ

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n, \qquad a_0 \neq 0$

$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m, \qquad b_0 \neq 0$

ধরা যাক, $= f_1(x) = f(x) - \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} \cdot g(x)$

$= f(x) - c_0x^{n-m} \cdot g(x)$ .... (A) যেখানে, $c_0 = \frac{a_0}{b_0}$

বা, $f(x) = c_0x^{n-m}\ g(x) + f_1(x)$.

এখন, (1) $f_1(x)$ হয় শূন্য বহুপদ রাশি বা $f_1(x)$-এর ঘাত $< m$ নতুবা (II)$f_1(x)$-এর ঘাত $\geq m$.

$f_1(x)$ শূন্য বহুপদ রাশি বা $f_1(x)$-এর ঘাত $<m$ হলে,

$f(x) = q(x)\ g(x) + r(x)$

যেখানে, $q(x) = c_0x^{n-m}$ এবং $r(x) = f_1(x)$

এবার, ধরা যাক, $f_1(x)$ এর ঘাত $n_1 \geq m$.

এখন, বারবার (A) মান-এর ব্যবহার করে $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_n(x)$, ... বহুপদরাশিগুলি পাওয়া যায় যাদের ঘাতগুলি ক্রমশঃ কমতে থাকে এবং একসময় $f_{k+1}(x)$ পাওয়া যায়, যার ঘাত $n_{k+1}<m$ হয় বা $f_{k-1}(x)$ এক শূন্য বহুপদরাশিতে পরিণত হয়।

এখন, $f(x)=c_0x^{n-m}\cdot g(x)+f_1(x)$

$$f_1(x)=c_1x^{n_1-m}\cdot g(x)+f_2(x)$$

$$f_2(x)=c_2x^{n_2-m}\cdot g(x)+f_3(x)$$

....

....

$$f_k(x)=c_k\cdot x^{n_k-m}\cdot g(x)+f_{k+1}(x)$$

$$\therefore \quad f(x)=\left(c_0x^{n-m}+c_1x^{n_1-m}+\cdots\cdots+c_kx^{n_k-m}\right)\cdot g(x)+f_{k+1}(x)$$

$$=q(x)\cdot g(x)+f_{k+1}(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x) \quad \ldots\ldots\ldots (i)$$

যেখানে, $q(x)=c_0x^{n-m}+c_1x^{n_1-m}+\cdots\cdots+c_kx^{n_k-m}$

এবং $r(x) = f_{k+1}(x)$.

এখন দ্রষ্টব্য যে এই $q(x)$ এবং $r(x)$ অবিকল্প। যদি সম্ভব হয় ধরা যাক $q(x)$ এবং $r(x)$ অবিকল্প নয়, অর্থাৎ $q(x)$ এবং $r(x)$ ভিন্ন আরও দুটি বহুপদ রাশি $q_1(x)$ এবং $r_1(x)$ যথাক্রমে $n-m$ এবং $< m$ ঘাতযুক্ত, পাওয়া যায় যাদের জন্য $f(x) = q_1(x).\ g(x) + r_1(x)$ .... (ii)

(i) এবং (ii) থেকে,

$$[q(x)-q_1(x)]\ .\ g(x)+[r(x)-r_1(x)]=0$$

বা, $r_1(x)-r(x)=[q(x)-q_1(x)].\ g(x)$ .... (iii)

(iii)-এর বামদিকের বহুপদ রাশির ঘাত $< m$ কিন্তু ডানদিকের ঘাত $> m$. ইহা অসম্ভব। সুতরাং (iii) সম্বন্ধটি সত্য হবে যখন,

$$r_1(x)=r(x)$$

এবং $q_1(x) = q(x)$

$\therefore$ $r(x)$ এবং $q(x)$ অবিকল্প।

4.4.2 ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem) :

কোনও বহুপদ রাশি $f(x)$-কে বহুপদ রাশি $x-h$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(h)$.

প্রমাণ ঃ

ধরা যাক $g(x) = x - h$ এবং $f(x)$-এর ঘাত n. এখন 4.4.1 অনুসারে দুটি বহুপদ রাশি $q(x)$ এবং $r(x)$ বর্তমান যাদের ঘাত যথাক্রমে $n-1$ এবং শূন্য এবং $f(x) = q(x).\ (x-h) + r(x)$.

এই সম্বন্ধে $x = h$ বসালে,

$r(h) = f(h)$

$\because$ $r(x)$ শূন্য ঘাতবিশিষ্ট বহুপদ রাশি

$\therefore$ $r(x) =$ ধ্রুবক।

$\therefore$ ভাগশেষ $= f(h)$.

উদাহরণ ঃ $x^3 + x^2 + x + 1$ -কে $x + 1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে

$(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$ বা 0.

অর্থাৎ, $x + 1$ দ্বারা $x^3 + x^2 + x + 1$ রাশিটি বিভাজ্য।

4.4.3 সংশ্লেষণ ভাগ (Synthetic Division) :

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n \; (a_0 \neq 0)$ একটি n ঘাত বহুপদ রাশিকে $x - h$ দ্বারা ভাগ করলে দুটি বহুপদ রাশি $q(x)$ $(n - 1$ ঘাতের) এবং R (শূন্য ঘাতের) পাওয়া যায় যাতে,

$f(x) = (x - h) \; q(x) + R$

উপরোক্ত $q(x)$ এবং R সংশ্লেষণ ভাগ পদ্ধতিতে কিভাবে পাওয়া যায় তা নীচে দেখানো হলো।

h	a_0	a_1	a_2	....	a_{n-1}	a_n
		b_0h	b_1h	....	$b_{n-2}h$	$b_{n-1}h$
	$a_0 \; (= b_0)$	$a_1 + b_0h$	$a_2 + b_1h$	....	$a_{n-1} + b_{n-2}h$	$a_n + b_{n-1}h$
		$(= b_1)$	$(= b_2)$		$(= b_{n-1})$	$(= R)$
						ভাগশেষ

ভাগফলের সহগ

$\therefore \; q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_{n-1}$

এবং $R = a_n + b_{n-1}h$

উদাহরণ ঃ ভাগ সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে $x^5 + 5x^4 + x^3 + 5x^2 + 2x + 11$-কে $x + 2$ দ্বারা ভাগ করে ভাগফল এবং ভাগশেষ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে

$h = -2$	1	5	1	5	2	11
		-2	-6	10	-30	56
	1	3	-5	15	-28	67

ভাগফল $= x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 15x - 28$

ভাগশেষ $= 67$

অনুশীলনী $x^4 + x^3 + x - 2$ কে $x - 3$ দ্বারা ভাগ করে ভাগফল এবং ভাগশেষ নির্ণয় করুন।

4.4.4 সংশ্লেষণ ভাগের প্রয়োগ

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots\dots + a_n,\ a_0 \neq 0$ -কে $x - h$-এর মাধ্যমে প্রকাশ।

ভাগের নিয়মানুযায়ী $f(x)$-কে $x - h$ দ্বারা ভাগ করলে পাওয়া যায় ঃ

$$f(x) = f_1(x).(x - h) + R_1 \quad \dots\dots\dots\dots (i)$$

যেখানে, $f_1(x)$, $n - 1$ ঘাতের ভাগফল এবং R_1 ভাগশেষ।

আবার $f_1(x)$-কে $x - h$ দ্বারা ভাগ করলে পাওয়া যায়

$$f_1(x) = f_2(x)(x - h) + R_2 \quad \dots\dots\dots\dots (ii)$$

যেখানে, $f_2(x)$, $n - 2$ ঘাতের ভাগফল এবং R_2 ভাগশেষ।

এই প্রক্রিয়াকে বারবার প্রয়োগ করলে পাওয়া যায়

$$\left.\begin{array}{l} f_2(x) = f_3(x)(x - h) + R_3 \\ f_3(x) = f_4(x)(x - h) + R_4 \\ \dots\dots\ \dots\dots\dots \\ f_{n-1}(x) = f_n(x)(x - h) + R_n \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots (iii)$$

যেখানে, $f_n(x)$ শূন্য ঘাতের ভাগফল এবং সংশ্লিষ্ট R_n ভাগশেষ।

$$\begin{aligned} \text{সুতরাং, } f(x) &= f_1(x)(x - h) + R_1 \\ &= \{f_2(x)(x - h) + R_2\}(x - h) + R_1 \\ &= f_2(x).(x - h)^2 + R_2(x - h) + R_1 \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= f_n(x)(x - h)^n + R_n(x - h)^{n-1} + R_{n-1}(x - h)^{n-2} + \dots\dots + R_2(x - h) + R_1 \end{aligned}$$

উদাহরণ ঃ

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x + 7$ কে $x - 1$-এর ঘাতক্রমে প্রকাশ করুন।

সমাধান ঃ

1	1	–4	3	3	7
		1	–3	0	3
	1	–3	0	3	10
		1	–2	–2	
	1	–2	–2	1	
		1	–1		
	1	–1	–3		
		1			
	1	0			
	1				

$\therefore\ f(x) = 1\,(x-1)^4 + 0.(x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 1(x-1) + 10$

$= (x-1)^4 - 3\,(x-1)^2 + (x-1) + 10.$

উদাহরণ 2. $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 6x - 2$ হলে $f(x+2)$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

এখানে $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 6x - 2$

সংশ্লেষণ ভাগ পদ্ধতিতে প্রথমে $f(x)$-কে $(x-2)$-এর ঘাতক্রম প্রকাশ করতে আমরা নীচের কাজটি সম্পন্ন করি

+2	1	–1	2	6	–2
		2	2	8	28
	1	1	4	14	26
		2	6	20	
	1	3	10	34	
		2	10		
	1	5	20		
		2			
	1	7			
	1				

$\therefore\ f(x) = (x-2)^4 + 7(x-2)^3 + 20(x-2)^2 + 34(x-2) + 26$

এখন $x = x + 2$ বসালে,

$f(x+2) = x^4 + 7x^3 + 20x + 34x + 26$

অনুশীলনী ঃ

(1) $x^4 - 3x^3 + 10x^2$ -কে $x + 3$-এর ঘাতক্রমে প্রকাশ করুন।

(2) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ হলে $f(x+1)$ নির্ণয় করুন।

4.4.5 টেলারের উপপাদ্য (Taylor's theorem)

সংশ্লেষণ ভাগের দ্বারা $f(x)$-কে কিভাবে $x - h$ এর ঘাতক্রমে প্রকাশ করা হয় দেখলেন। এবার টেলার' কিভাবে ঐ প্রকাশটি করেছিলেন তা দেখানো হলো।

টেলার-এর উপপাদ্য

যদি $f(x)$, n ঘাতের বহুপদ রাশি হয় তবে, যে কোনও h-এর জন্য

$$f(x) = f(h) + f'(h)(x-h) + \frac{f''(h)}{2!}(x-h)^2 + \cdots + \frac{f^n(h)}{n!}(x-h)^n$$

প্রমাণ ঃ

ধরা যাক $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n,\ \ a_0 \neq 0$

ধরা যাক $f(x) = A_n + A_{n-1}(x-h) + A_{n-2}(x-h)^2 + \cdots + A_0(x-h)^n$

এখন, $f(h) = A_n,\ f'(h) = A_{n-1},\ A_{n-2} = \dfrac{f''(h)}{2!}$

....

$$A_k = \frac{f^{n-k}(h)}{(n-k)!},\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ A_0 = \frac{f^n(h)}{n!}$$

যেখানে, $f^r(x) = \dfrac{d^r f(x)}{dx^r}$

$$\therefore\ f(x) = f(h) + f'(h).(x-h) + \frac{f''(h)}{2!}(x-h)^2 + \cdots + \frac{f^n(h)}{n!}(x-h)^n$$

সিদ্ধান্ত ঃ

এখন, 4.4.4 এবং 4.4.5 থেকে দেখা যাচ্ছে, সংশ্লেষণ ভাগ পদ্ধতিতে

$$R_n = \frac{f^{n-1}(h)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x)\Big|_{x=h}$$

4.5 বহুপদ রাশির শূন্য (Zeros of a polynomial) :

α কে বহুপদ রাশি $f(x)$-এর বীজ (root) বা শূন্য (zero) বলা হবে যদি $f(\alpha) = 0$ হয়, অর্থাৎ $(x-\alpha)$, $f(x)$-এর এর একটি উৎপাদক হয়।

α -কে বহুপদ রাশি $f(x)$-এর r মাত্রার বীজ বা শূন্য বলা হবে যদি $(x-\alpha)^r$, $f(x)$-এর উৎপাদক হয় কিন্তু $(x-\alpha)^{r+1}$, $f(x)$-এর উৎপাদক না হয়।

উদাহরণ স্বরূপ ঃ

$f(x) = x^8 - x^6 + x^4 - x^3 - x + 1$

$x = 1$, $f(x)$-এর একটি শূন্য কারণ,

$f(1) = 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 = 0$

4.5.1 উপপাদ্য ঃ

$x = \alpha$ বহুপদরাশি $f(x)$-এর r-তম শূন্য হবে যদি এবং একমাত্র যদি

$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots\ldots f^{r-1}(\alpha) = \ldots\ldots 0$ এবং $f^r(\alpha) \neq 0$ হয়।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $x = \alpha$, $f(x)$-এর r-তম শূন্য।

$\therefore$ $(x-\alpha)^r$, $f(x)$-এর একটি উৎপাদক কিন্তু $(x-\alpha)^{r+1}$ উৎপাদক নয়।

$\therefore \quad f(x) = (x-\alpha)^r . q(x)$,

যেখানে $q(\alpha) \neq 0$ অন্যথায় $(x-\alpha)$, $q(x)$-এর সুতরাং $f(x)$-এর একটি উৎপাদক হবে।

এখন, $f'(x) = (x-\alpha)^r \; q'(x) + r(x-\alpha)^{r-1}.q(x)$

$= (x-\alpha)^{r-1}[(x-\alpha).\, q'(x) + r.\, q(x)]$

$= (x-\alpha)^{r-1} \; \psi(x)$ যেখানে,

$\psi(x) = (x-\alpha)\, q'(x) + r.q(x)$

$\therefore \quad \psi(\alpha) = r.\, q(\alpha) \neq 0$

$\therefore \quad f'(\alpha) = 0$

$f''(x) = (x-\alpha)^{r-2}[(x-\alpha).\, \psi(x) + (r-1)\, \psi(x)]$

$= (x-\alpha)^{r-2}.\, \gamma(x)$

যেখানে, $\gamma(x) = (x-\alpha).\,\psi'(x) + (r-1).\psi(x)$

এবং $\gamma(\alpha) \neq 0.$

$\therefore f''(\alpha) = 0$

....

.. ..

$f^{r-1}(x) = (x-\alpha).\,g(x)$-যেখানে $g(\alpha) \neq 0$

$\therefore f^{r-1}(\alpha) = 0$

$\therefore f^{r}(x) = (x-\alpha).\,g'(x) + q(x)$

$\therefore f^{r}(\alpha) = g(\alpha) \neq 0.$

বিপরীত পক্ষে ধরা যাক

$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots = f^{r-1}(\alpha) = 0$

এবং $f^{r}(\alpha) \neq 0$

$\therefore$ টেলারের উপপাদ্য থেকে পাই

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots\cdots + \frac{f^n(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{f^r(\alpha)}{r!}(x-\alpha)^r + \cdots\cdots + \frac{f^n(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

$$= (x-\alpha)^r\left[\frac{f^r(\alpha)}{r!} + \frac{f^{r+1}(\alpha)}{(r+1)!}(x-\alpha) + \cdots\cdots + \frac{f^n(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^{n-r}\right]$$

$$= (x-\alpha)^r \cdot q(x)$$

যেখানে, $q(x) = \frac{f^r(\alpha)}{r!} + \frac{f^{r+1}(\alpha)}{(r+1)!}(x-\alpha) + \cdots\cdots + \frac{f^n(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^{n-r}$

$$q(\alpha) = \frac{f^r(\alpha)}{r!} \neq 0$$

$\therefore \ \alpha$, $f(x)$-এর r-তম শূন্য।

উদাহরণ ঃ

$x = \alpha$, $f(x) = x^4 + px^2 + qx + r$ -এর রাশিটির তৃতীয় ক্রমিক শূন্য (zero of 3rd order) হলে প্রমাণ করুন,

$8p^3 + 27q^2 = 0$ এবং $p^2 + 12r = 0$

সমাধান :

$$f(x) = x^4 + px^2 + qx + r$$

যেহেতু, $x = \alpha$, $f(x)$-এর তিন তম শূন্য,

$\therefore \quad f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0.$

এখন, $f'(x) = 4x^3 + 2px + q$

$$f''(x) = 12x^2 + 2p.$$

$\therefore \quad f(\alpha) = 0,\ f'(\alpha) = 0$ এবং $f''(\alpha) = 0$ থেকে,

$$\alpha^4 + p\alpha^2 + q\alpha + r = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$4\alpha^3 + 2p\alpha + q = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

$$12\alpha^2 + 2p = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$$

$\therefore \quad p = -6\alpha^2,\ q = -4\alpha^3 + 12\alpha^3 = 8\alpha^3$

$$r = -\alpha^4 + 6\alpha^4 - 8\alpha^4 = -3\alpha^4$$

এখন, $p = -6\alpha^2$ এবং $q = +8\alpha^3$ হতে,

$$\left(\frac{p}{-6}\right)^3 = \left(\frac{q}{8}\right)^2 \text{ বা, } 8p^3 + 27q^2 = 0$$

আবার, $p = -6\alpha^2$ এবং $r = -3\alpha^4$ হতে,

$$\left(-\frac{p}{6}\right)^2 = \frac{r}{-3} \text{ বা, } p^2 + 12r = 0$$

4.5.2 উপপাদ্য

n-ঘাত যুক্ত বহুপদ রাশির মান কখনই n-এর বেশি x-এর ভিন্নমানের জন্য শূন্য হতে পারে না।

প্রমাণ : ধরা যাক $f(x)$, n-ঘাতযুক্ত একটি বহুপদ রাশি এবং $x = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n, \alpha_{n+1}$ এর জন্য $f(x)$-এর মান শূন্য, যেখানে, $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n, n+1, i \neq j$. যেহেতু α_i, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n+1$, $f(x)$ এর শূন্য সংজ্ঞা হতে পাই, $x - \alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n+1$, $f(x)$-এর একটি উৎপাদক।

$\therefore (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots\ldots(x - \alpha_{n+1})$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ। কিন্তু, এটি কখনই সম্ভব নয় কারণ $f(x)$ এর ঘাত যখন n তখন $f(x)$-এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত কোনও রূপের এর ঘাত $n+1$ হতে পারে না।

$\therefore$ n ঘাতযুক্ত বহুপদ রাশির কখনই n-এর বেশি শূন্য থাকতে পারে না।

উদাহরণ ঃ $x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 34x - 24$ বহুপদ রাশির শূন্যগুলি 1, 2, 4 এবং –3.

4.5.3 উপপাদ্য

ধরা যাক $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1}x + a_n$; $a_0 \neq 0$ এবং $|x| \geq \left|\frac{a_k}{a_0}\right| + 1$ যখন $|a_i|$, $i = 1, 2, \dots\dots, n$ এর মধ্যে $|a_k|$-এর মান সর্বোচ্চ, তখন $|a_0x^n| > |a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots\dots + a_n|$

প্রমাণ এখানে $|a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots\dots + a_n| \leq |a_1||x|^{n-1} + |a_2||x|^{n-2} + \dots\dots\dots + |a_n|$

$$\leq |a_k|\{|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \dots\dots + 1\}$$

$[\because |a_i| \leq |a_k|, i = 1, 2, \dots\dots, n]$

$$\leq |a_k|\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} < |a_k|\frac{|x|^n}{|x| - 1} \text{ যখন } x > 1$$

এখন, $|a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots\dots + a_n| < |a_0x^n|$

যদি, $|a_k|\frac{|x|^n}{|x| - 1} \leq |a_0x^n| = |a_0||x|^n$ এবং $x > 1$

অর্থাৎ যদি $|a_k| \leq |a_0| (|x| - 1)$ এবং $x > 1$

অর্থাৎ যদি $|x| > \left|\frac{a_k}{a_0}\right| + 1$ যে সর্ত দেওয়াই আছে।

সুতরাং $|a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots\dots + a_n| < |a_0x^n|$

উদাহরণ ঃ ধরা যাক $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 2x + 1$

এখানে, $|a_k| = 7$, $|a_0| = 5$, $n = 4$

$$\therefore \quad \left|\frac{a_k}{a_0}\right| + 1 = \frac{7}{5} + 1 = 2 \cdot 4$$

ধরা যাক $x = 3$.

তখন, $|a_0x^n| = |5x^4| = |5 \times (3)^4| = 405$

$|a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots\dots + a_n| = |-4x^3 + 7x^2 - 2x + 1| = |-4(3)^3 + 7(3)^2 - 2(3) + 1| = 51$

$\therefore \quad |5x^4| > |-4x^3 + 7x^2 - 2x + 1|$

বা, $5x^4 > |14x^3 - 7x^2 + 2x - 1|$

4.5.4 উপপাদ্য

ধরা যাক $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n,\ a_0 \neq 0$

যখন, $|x| \leq \frac{|a_n|}{|a_n|+|a_k|}$ এবং $|a_k|$ এর মান $|a_i|$, $i = 1, 2, ..., n - 1$ এর মধ্যে সর্বোচ্চ,

তখন $|a_n| > |a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x|$.

প্রমাণ ঃ

উপপাদ্য 4.5.3 থেকে জানা আছে যে বহুপদরাশি,

$a_ny^n + a_{n-1}\,y^{n-1} + ... + a_1y + a_0$-এর জন্য

$|a_ny^n| > |a_{n-1}y^{n-1} + a_{n-2}y^{n-2} + ... + a_1y + a_0|$

যখন, $|y| \geq \frac{|a_k|}{|a_n|} + 1$, $|a_k|$ = সর্বোচ্চ $\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, ..., |a_1|, |a_0|\}$

এবং $y > 1$.

এখন, $y = \frac{1}{x}$ বসালে আমরা দেখি,

$$\left|\frac{a_n}{x^n}\right| > \left|\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_{n-2}}{x^{x-2}} + ... + a_0\right|$$

যখন, $\frac{1}{|x|} \geq \frac{|a_k|+|a_n|}{|a_n|}$

বা, $|a_n| > |a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + ... + a_1x^{n-1} + a_0x^n|$

যখন, $|x| \leq \frac{|a_n|}{|a_k|+|a_n|}$

বা, $|a_n| > |a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x|$

যখন, $|x| \leq \frac{|a_n|}{|a_k|+|a_n|}$

উদাহরণ ঃ ধরা যাক $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 2x + 1$.

এখানে, $|a_k| = 7$, $|a_n| = 1$, $n = 4$.

$$\frac{|a_n|}{|a_k|+|a_n|} = \frac{1}{7+1} = \frac{1}{8}$$

ধরা যাক $x = \frac{1}{10}\left(< \frac{1}{8}\right)$

$= 0.1$

এখন, $|5x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 2x|$

$= |5 \times (0.1)^4 - 4 \times (0.1)^3 + 7 \times (0.1)^2 - 2 \times (0.1)|$

$= 0.1335 < 1 = |a_n|$

4.6 অনুশীলনী

1. $x^4 + 3x^2 + x - 5$-কে $2x + 5$ দ্বারা ভাগ করে ভাগফল এবং ভাগশেষ নির্ণয় করুন।
2. ভাগ এ্যালগোরিদম্ এর সাহায্যে $x^5 - 2x^3 + 7x - 6$ কে $x^3 - 3x + 2$ দ্বারা ভাগ করুন।
3. $2x^4 + 4ax^3 - 12x^3 + 10x - 5b + a$, $x - 1$ দ্বারা বিভাজ্য হলে a এবং b এর মধ্যে সম্পর্ক বার করুন।
4. $x^3 + 3px + q$-এর একটি উৎপাদক $(x - \alpha)^2$ হওয়ার শর্ত নির্ণয় করুন।
5. $3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$ বহুপদ রাশিটিকে $(x - 1)$-এর ঘাতের বহুপদ রাশি আকারে প্রকাশ করুন।

সংকেতসহ উত্তরমালা ঃ

1. $x^4 + 3x^2 + x - 5$ কে $2x + 5$ দিয়ে ভাগ করা মানে $2\left(x + \frac{5}{2}\right)$ দিয়ে ভাগ করা।

প্রথমে সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে $x^4 + 3x^2 + x - 5$-কে $x + \frac{5}{2}$ দিয়ে ভাগ করুন।

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
-\frac{5}{2} & 1 & 0 & 3 & 1 & -5 \\
 & & -\frac{5}{2} & \frac{25}{4} & -\frac{185}{8} & \frac{885}{16} \\
\hline
 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{37}{4} & -\frac{177}{8} & \frac{805}{16}
\end{array}$$

$x^4 + 3x^2 + x - 5$ কে $x+\frac{5}{2}$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল $x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{37}{4}x - \frac{177}{8}$ এবং ভাগশেষ $\frac{805}{16}$

এই ভাগফলকে 2 দিয়ে ভাগ করলে নির্ণেয় ভাগফল পাওয়া যাবে এবং ভাগশেষ অপরিবর্তিত থাকবে।

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $= \frac{x^3}{2} - \frac{5}{4}x^2 + \frac{37}{8}x - \frac{177}{16}$

এবং ভাগশেষ $= \frac{805}{16}$

2. ভাগফল = $x^2 + 1$, ভাগশেষ = $-2x^2 + 10x - 8$

   $(q(x))$ $\qquad$ $(r(x))$

3. $a = b$

4. $4p^3 + q^2 = 0$

5. $3(x-1)^3 + 5(x-1)^2 + 6(x-1) + 10.$

4.7 বহুপদ সমীকরণ

$a_n x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n,\ a_0 \neq 0$ n-ঘাত এর বহুপদ রাশি হলে, n ঘাতের বহুপদ সমীকরণটি হবে

$$a_n x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$a_n, a_1 \ldots\ldots\ldots a_n$ সহগগুলি প্রত্যেকটি অশূন্য হলে (1)-কে সম্পূর্ণ সমীকরণ অন্যথায় অসম্পূর্ণ সমীকরণ বলা হবে।

$x^6 + 6x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 7 = 0$ একটি 6 ঘাত বিশিষ্ট সম্পূর্ণ সমীকরণ।

$x^3 + 1 = 0$ একটি 3-ঘাত বিশিষ্ট অসম্পূর্ণ সমীকরণ।

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n,\ a_0 \neq 0$ বহুপদ রাশির শূন্যগুলিকে (1) সমীকরণের বীজ বলা হয়।

$\therefore$ α, (1)-এর বীজ হলে,

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_n = 0$$

4.8 বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্য (Fundamental Theorem of Algebra)

নিম্নলিখিত তথ্যটি বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্য রূপে পরিচিত।

প্রতিটি বহুপদ সমীকরণের অন্তত একটি বীজ (বাস্তব বা কাল্পনিক) থাকে।

উপপাদ্যটির প্রমাণের আলোচনা আমাদের এই গ্রন্থের আলোচ্য বিষয়ের বাহিরে।

4.8.1 উপপাদ্য ঃ প্রতিটি n ঘাত বিশিষ্ট বহুপদ সমীকরণের মাত্র এবং কেবলমাত্র n-সংখ্যক বীজ (বাস্তব বা কাল্পনিক) থাকে।

প্রমাণ : ধরা যাক $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+.........+a_{n-1}x+a_n=0$ ...... A যেখানে $a_0\neq 0$

একটি n-ঘাত বিশিষ্ট বহুপদ সমীকরণ।

এখন বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্য থেকে, (A) -এর একটি বীজ থাকবে। ধরা যাক α_1, (A)-এর একটি বীজ, অর্থাৎ $f(\alpha_1)=0$

$\therefore\ (x-\alpha_1)$ এখন f(x)-এর একটি উৎপাদক।

এখন ভাগ **এ্যালগোরিদম্**-এর সাহায্যে একটি (n–1)-ঘাত বিশিষ্ট বহুপদ রাশি $f_1(x)$ পাবেন যাতে,

$$f(x)=(x-\alpha_1)\,f_1(x)\ ....(A_1)$$

আবার, $f_1(x)=0$ একটি (n–1) ঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ।

মৌলিক উপপাদ্য হতে $f_1(x)=0$ এর একটি বীজ α_2 পাওয়া যায়।

যার জন্য পাই $f_1(x)=(x-\alpha_2),\ f_2(x)$ ....(A_2)

যেখানে, $f_2(x)$, (n–2) ঘাত বিশিষ্ট বহুপদ রাশি।

এখন, (A), (A_1) এবং (A_2) হতে,

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\,f_2(x)$$

এভাবে, অগ্রসর হলে n ধাপের পর আমরা পাই

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)........(x-\alpha_n)\,f_n(x)\ ......(A_n)$$

যেখানে $f_n(x)$, 0-ঘাত বিশিষ্ট বহুপদ রাশি।

অর্থাৎ $f_n(x)$ একটি ধ্রুবক।

এখন, (A_n)-এর উভয়পক্ষের x^n-এর সহগ তুলনা করলে পাওয়া যায় $f_n(x) = a_0$

$$\therefore\ f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)..........(x-\alpha_n) \quad \text{...}(B)$$

(B) হতে দেখা যায়, $f(\alpha_i) = 0,\ i = 1, 2, ...n.$

$\therefore\ f(x) = 0$ এর n-টি বীজ $\alpha_1, \alpha_2......\alpha_n$

এবার প্রমাণ করা হবে $f(x) = 0$ এর ঐ n-সংখ্যক বীজ ছাড়া আর কোনও অন্য বীজ নাই।

যদি সম্ভব হয় ধরা যাক, $x = \alpha$, $f(x) = 0$ এর একটি অতিরিক্ত বীজ, যেটি $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ হতে ভিন্ন।

$\therefore f(\alpha) = 0$

এখন (B) হতে পাই,

$$a_0(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)......(\alpha-\alpha_n) = f(\alpha) = 0$$

$\because\ a_0 \neq 0,\ \ \therefore\ \alpha-\alpha_1,\ \alpha-\alpha_2, ...,\ \ \alpha-\alpha_n$ এর মধ্যে কোনও না কোনও একটি উৎপাদক শূন্য হবে। কিন্তু ইহা অসম্ভব, কারণ $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ প্রতিটি ভিন্ন ভিন্ন না হলেও, তাদের আলাদা আলাদা উৎপাদকে লেখা সম্ভব।

$\therefore$ n-ঘাত বিশিষ্ট প্রতিটি বহুপদ সমীকরণের n-সংখ্যক বীজ থাকবে এবং n-এর বেশি বীজ থাকতে পারে না।

4.8.2 উপপাদ্য : যদি f(x) = 0 একটি বহুপদ সমীকরণ হয় এবং x এর দুটি মান α, β-এর জন্য $f(\alpha) . f(\beta) < 0$ হয় তবে α এবং β এর মধ্যে f(x) = 0-এর অন্তত একটি বীজ থাকবে।

প্রমাণ : যেহেতু $f(x)$ সন্তত, $f(x)$, $f(\alpha)$ এবং $f(\beta)$ এর মধ্যে অবস্থিত প্রতিটি মান অন্তত পক্ষে একবার নেবে। যেহেতু $f(\alpha).f(\beta) < 0$, $f(\alpha)$ ও $f(\beta)$ মান দুটির একটি ধনাত্মক ও অন্যটি ঋণাত্মক হবে অর্থাৎ 0, $f(\alpha)$ এবং $f(\beta)$ এর মধ্যে অবস্থিত। $\therefore\ \alpha, \beta$-এর মধ্যস্থিত কোন না কোন x-এর মানে $f(x) = 0$ হবে অর্থাৎ, $f(x) = 0$ এর α, β-এর মধ্যে অন্তত একটি বীজ আছে।

উদাহরণ : $f(x) \equiv x^2 - 6x + 8 = 0$

$f(1) = 1-6+8 > 0$ এবং $f(3) = 9-18+8 < 0$

$\therefore$ 1 এবং 3 এর মধ্যে $f(x) = 0$ এর একটি বীজ আছে। স্পষ্টতই, $f(2) = 0$ এবং $1 < 2 < 3$

4.8.3 **বীজের চিহ্ন সংক্রান্ত দেকার্ত-এর নিয়ম** (Descarte's Rule of Sign)

$f(x) = 0$ সমীকরণের ধনাত্মক বীজ সমূহের সংখ্যা $f(x)$ বহুপদ রাশির সহগের চিহ্ন পরিবর্তনের সংখ্যার সঙ্গে সমান হবে অথবা তা থেকে জোড়সংখ্যক কম হবে।

$f(x) = 0$ সমীকরণের ঋণাত্মক বীজ সমূহের সংখ্যা $f(-x)$ বহুপদ রাশির সহগের চিহ্ন পরিবর্তনের সংখ্যা সমান হবে অথবা তা থেকে জোড় সংখ্যক কম হবে।

এই নিয়মের মাধ্যমে বীজের প্রকৃতি জানা যাবে।

উদাহরণ : $x^6 + x^4 - x^2 + x + 3 = 0$

এর বীজের প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে, $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + x + 3$

$f(x)$-এর সহগের চিহ্নের সারিটি হলো

$$+ \quad + \quad + \quad + \quad +$$

$f(x)$-এর সহগের চিহ্নের কোনও পরিবর্তন হয়নি।

$\therefore$ $f(x) = 0$ এর ধনাত্মক বীজ নেই।

$f(-x) = x^6 + x^4 + x^2 - x + 3$ এর সহগের চিহ্নের সারিটি,

$$\begin{array}{ccccc} & & & 1 & 2 \\ + & + & + & - & + \end{array}$$

এখানে, চিহ্নের দু'টি মাত্র পরিবর্তন হয়েছে।

$\therefore$ $f(x) = 0$ এর সর্বোচ্চ ঋণাত্মক বীজের সংখ্যা 2. অর্থাৎ, $f(x) = 0$ সমীকরণটির ঋণাত্মক বীজের সংখ্যা হবে 2 বা 0 । যেহেতু $f(x) = 0$ এর মোট বীজ সংখ্যা 6, অতএব এটির কাল্পনিক বীজ থাকবে অন্তত 4টি।

এই প্রসঙ্গে স্মরণীয় (1), $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি বীজ অমূলদ $a+\sqrt{b}$ হলে, ইহার সহযোগী অমূলদ সংখ্যা $a-\sqrt{b}$, $f(x) = 0$ এর অপর একটি বীজ হবে।

(2) $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি বীজ $a + ib$, যেখানে, $i = \sqrt{-1}$ হলে, $a - ib$, $f(x) = 0$ এর অপর একটি বীজ হবে।

(3) **রোলের উপপাদ্য (Rolle's theorem) :** যদি $f(x) = 0$ সমীকরণ-এর পরপর দুটি বীজ বাস্তব বীজ $\alpha, \beta\,(\alpha < \beta)$ হয়, তবে $f'(x) = 0$ সমীকরণের অন্তত একটি বীজ বাস্তব হবে ও (α, β)-এর মধ্যে থাকবে।

(প্রমাণের জন্য EMT–01 দ্রষ্টব্য।)

4.9 সমীকরণের সহগের সঙ্গে বীজের সম্বন্ধ

ধরা যাক $$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0 \ldots\ldots (1)$$
$$a_0 \neq 0$$
একটি n-ঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ।

উপপাদ্য 4.8.2 থেকে দেখা যায় (1)-এর n-টি বীজ আছে। ধরা যাক বীজগুলি, $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots, \alpha_n$

$$\therefore\ a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$
$$= a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n)$$

বা, $$x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{a_0}$$
$$= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

$$x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}x^{n-2} + \ldots\ldots + \frac{a_{n-1}}{a_0}x + \frac{a_n}{a_0}$$
$$= x^n - \sum\alpha_1 x^{n-1} + \sum\alpha_1\alpha_2 x^{n-2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots + (-1)^r \sum\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_r x^{n-r} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^n \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n$$

এখন উভয় পক্ষের x-এর সমঘাতের সহগগুলি তুলনা করে,

$$\left.\begin{aligned}
&\sum\alpha_1 = -\frac{a_1}{a_0}\\
&\sum\alpha_1\alpha_2 = -\frac{a_2}{a_0}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_r = (-1)^n\frac{a_r}{a_0}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}
\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

(A) হল I-এর বীজ এবং সহগের মধ্যে সম্পর্ক।

উপরের সম্পর্ক থেকে দেখুন, যদি কোনও সমীকরণের বীজ দেওয়া থাকে তাহলে সমীকরণটি নির্ণয় করা যাবে।

ধরা যাক, একটি সমীকরণের বীজগুলি $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ .... দেওয়া আছে।

$\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n$ বীজ-সম্পন্ন সমীকরণটি হবে

$$x^n - \sum \alpha_1 x^{n-1} + \sum \alpha_1\alpha_2 x^{n-2} + ... + (-1)^r \sum \alpha_1\alpha_2 .... \alpha_r x^{n-r}$$

$$+ .... + (-1)^n \alpha_1\alpha_2 .... \alpha_n = 0$$

4.10 প্রতিসম অপেক্ষক (Symmetric Function)

একাধিক চলরাশির অপেক্ষককে প্রতিসম বলা হবে যদি অপেক্ষকের যে কোনও দুটি চলরাশির স্থান বিনিময় করলে অপেক্ষকটি অপরিবর্তিত থাকে।

যেমন, $x^2 + y^2 + z^2$, $xy + yz + zx$ ইত্যাদি প্রতিসম অপেক্ষক।

4.11 বহুবীজ (Multiple roots)

$x = \alpha$-কে $f(x) = 0$-এর r ক্রমের বহুবীজ বলা হবে যদি $(x - \alpha)^r$, $f(x)$-এর একটি উৎপাদক হয় অর্থাৎ, $f(x) = (x - \alpha)^r . \phi(x)$, যেখানে $\phi(\alpha) \neq 0$

এখন, $f'(x) = (x - \alpha)^{r-1} \{r . \phi(x) + (x - \alpha) . \phi'(x)\}$

$\therefore f(x) = 0$-এর $x = \alpha$, r-ক্রমের বহুবীজ হলে $f(x)$ এবং $f'(x)$-এর সাধারণ বৃহত্তম উৎপাদক হবে $(x - \alpha)^{r-1}$

4.12 সমীকরণের রূপান্তর (Transformation of Equations)

ধরা যাক একটি সমীকরণ দেওয়া আছে কিন্তু এর বীজগুলি জানা নেই। এখন যে কোনও একটি সমীকরণ তৈরি করা সম্ভব যার বীজগুলি প্রদত্ত সমীকরণের বীজগুলির সঙ্গে একটি সম্বন্ধে আবদ্ধ। যে পদ্ধতিতে নতুন সমীকরণটি বের করা হবে তাকেই সমীকরণের রূপান্তর বলা হবে।

উদাহরণ **1** : ধরা যাক

$$f(x) \equiv x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + ... + p_n = 0 ...(1)$$

সমীকরণের বীজগুলি $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. এখন এমন একটি সমীকরণ বার করুন যার বীজগুলি হবে, $m\alpha_1, m\alpha_2, ..., m\alpha_n$

ধরা যাক $y = mx$ বা, $x = \frac{y}{m}$

$x = \frac{y}{m}$, (1)–এ বসালে পাই,

$$\left(\frac{-y}{m}\right)^n + p_1\left(\frac{y}{m}\right)^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + p_{n-1}\left(\frac{y}{m}\right) + p_n = 0$$

বা, $y^n + mp_1y^{n-1} + m^2p_2y^{n-2} + \ldots . + m^{n-1}p_{n-1}y + m^np_n = 0$ .... (2)

(2)-নং সমীকরণের বীজগুলি হবে $m\alpha_1$, $m\alpha_2$ ...., $m\alpha_n$।

4.13 উদাহরণাবলী

উদাহরণ 1 : $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 = 0$ এর একটি বীজ $2 + i3$ হলে বাকি বীজগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান : স্পষ্টত $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 = 0$ সমীকরণের বীজসংখ্যা 4

আবার $2 + 3i$ একটি বীজ বলে $2 - 3i$ অপর একটি বীজ হবে।

$\therefore$ $(x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) = (x - 2)^2 + 9 = x^2 - 4x + 13$

$x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 = 0$ এর উৎপাদক হবে।

$x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13$-কে $x^2 - 4x + 13$ দিয়ে ভাগ করে অর্থাৎ বিভাজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই :

1	–2	6	22	13
1	–4	13		
	2	–7	22	
	2	–8	26	
		1	–4	13
		1	–4	13

1	–4	13
1	2	1

$\therefore$ $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 = (x^2 + 2x + 1)(x^2 - 4x + 13)$

প্রদত্ত সমীকরণটির বাকি বীজদ্বয় হবে $x^2 + 2x + 1 = 0$ বীজদ্বয়।

$x^2 + 2x + 1 = 0$-এর বীজগুলি $-1, -1$.

$\therefore\ x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 = 0$ এর বীজগুলি হলো $2 + 3i, 2 - 3i, -1, -1$.

উদাহরণ 2. $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x - 2 = 0$ এর একটি বীজ $2+\sqrt{3}$ হলে, বাকী বীজগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান : আমরা জানি $2+\sqrt{3}$ একটি বীজ বলে $2-\sqrt{3}$ অপর একটি বীজ হবে।

$$\therefore\ (x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3}) = (x-2)^2 - 3$$

$$= x^2 - 4x + 1$$

$x^2 - 4x + 1$, $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x - 2$ এর একটি উৎপাদক হবে।

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
1 & -3 & -5 & 9 & -2 & 1 & -4 & 1 \\
1 & -4 & 1 & & & & & \\
\hline
 & 1 & -6 & 9 & & 1 & 1 & -2 \\
 & 1 & -4 & 1 & & & & \\
\hline
 & & -2 & 8 & -2 & & & \\
 & & -2 & 8 & -2 & & & \\
\hline
\end{array}$$

$\therefore$ বিভাজন প্রক্রিয়ার (ভাগ এ্যালগোরিদম্-এর) সাহায্যে :

$x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x - 2 = (x^2 - 4x + 1)(x^2 + x - 2)$

$\therefore\ x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x - 2 = 0$ এর বাকি বীজগুলি,

$x^2 - x - 2 = 0$ এর বীজ হবে।

$x^2 - x - 2 = 0$ বা, $(x + 2)(x - 1) = 0$ বা, $x = 1, -2$

$\therefore\ x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x - 2 = 0$ এর বীজগুলি হবে,

$2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3},\ 1, -2$

উদাহরণ 3 : দেখান যে,

$$\frac{A^2}{x-a} + \frac{B^2}{x-b} + \frac{C^2}{x-c} + \ldots\ldots + \frac{L^2}{x-\ell} = x - m,$$

সমীকরণটির যেখানে, $a, b, c, \ldots\ldots, \ell$ বাস্তব এবং অভিন্ন, কোন কাল্পনিক বীজ নাই।

সমাধান : যদি সম্ভব হয় ধরা যাক $\alpha + i\beta$ সমীকরণটির কাল্পনিক বীজ।

অতএব $\alpha - i\beta$-ও সমীকরণটির অপর একটি বীজ হবে।

$$\therefore \frac{A^2}{\alpha+i\beta-a}+\frac{B^2}{\alpha+i\beta-b}+\frac{C^2}{\alpha+i\beta-c}+\ldots..+\frac{L^2}{\alpha+i\beta-\ell}$$

$$= \alpha + i\beta - m \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

এবং $$\frac{A^2}{\alpha-i\beta-a}+\frac{B^2}{\alpha-i\beta-b}+\frac{C^2}{\alpha-i\beta-c}+\ldots..+\frac{L^2}{\alpha-i\beta-\ell}$$

$$= \alpha - i\beta - m \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) এবং (2) হতে,

$$\left[\frac{A^2}{(\alpha-a)^2+\beta^2}+\frac{B^2}{(\alpha-b)^2+\beta^2}+\frac{C^2}{(\alpha-c)^2+\beta^2}+\ldots\ldots+\frac{L^2}{(\alpha-\ell)^2+\beta^2}+1\right]2i\beta=0$$

ইহা সম্ভব যখন মাত্র $\beta = 0$.

$$\therefore \frac{A^2}{x-a}+\frac{B^2}{x-b}+\ldots..+\frac{L^2}{x-\ell}=x-m$$

এর কোনও কাল্পনিক বীজ নাই।

উদাহরণ 4 : দেকার্তের নিয়ম অনুসারে $x^4 + 2x^2 + 3x - 1 = 0$ এর বীজগুলির প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

সমাধান :

ধরা যাক $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3x - 1$

$f(x)$-এর সহগের চিহ্নের সারি,

$$+ \quad + \quad + \quad -$$

$f(x)$-এর সহগের চিহ্নের একটি মাত্র পরিবর্তন আছে।

$\therefore$ দেকার্তের নিয়মে $f(x) = 0$-এর সর্বোচ্চ ধনাত্মক বীজের সংখ্যা এক, কমলে জোড় সংখ্যায় কমবে। কিন্তু এখানে জোড় সংখ্যায় কমার সম্ভাবনা নেই, তাই এখানে $f(x) = 0$-এর একটি মাত্র ধনাত্মক বীজ আছে।

$f(-x) = x^4 + 2x^2 - 3x - 1$

$f(-x)$-এর সহগের চিহ্নের সারি,

$$+ \quad + \quad - \quad -$$

এখানেও চিহ্নের পরিবর্তন সংখ্যা এক।

$\therefore$ $f(x) = 0$-এর ঋণাত্মক বীজের সর্বোচ্চ সংখ্যা এক।

$f(x) = 0$-এর মোট বীজসংখ্যা 4.

$\therefore$ কাল্পনিক বীজের ন্যূনতম সংখ্যা $= 4 - (1 + 1) = 2$

উদাহরণ 5. $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ এর বীজগুলি $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হলে মান নির্ণয় করুন।

(i) $\sum \alpha^2$, (ii) $\sum \alpha^2\beta$, (iii) $\sum \alpha^2\beta\gamma$, (iv) $\sum \alpha^2\beta^2$,

(v) $\sum \alpha^2\beta^2\gamma^2$, (vi) $\sum \frac{1}{\alpha}$, (vii) $\sum \frac{1}{\alpha\beta}$, (viii) $\sum \frac{1}{\alpha^2}$,

সমাধান : যেহেতু $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ সমীকরণটির চারটি বীজ।

$\therefore \sum \alpha = -p, \quad \sum \alpha\beta = q, \quad \sum \alpha\beta\gamma = -r, \quad \alpha\beta\gamma\delta = s.$

(i) $\sum \alpha^2 = (\sum \alpha)^2 - 2\sum \alpha\beta = p^2 - 2q$

(ii) $\sum \alpha^2\beta = \sum \alpha \cdot \sum \alpha\beta - 3\sum \alpha\beta\gamma = -pq + 3r$

(iii) $\sum \alpha^2\beta\gamma = \sum \alpha \cdot \sum \alpha\beta\gamma - 4\alpha\beta\gamma s = pr - 4s$

(iv) $\sum \alpha^2\beta^2 = (\sum \alpha\beta)^2 - 2\sum \alpha^2\beta\gamma - 6\alpha\beta\gamma\delta$

$= q^2 - 2(pr - 4s) - 6s = q^2 - 2pr + 2s$

(v) $\sum \alpha^2\beta^2\gamma^2 = (\sum \alpha\beta\gamma)^2 - 2\sum \alpha^2\beta^2\gamma\delta$

$= (\sum \alpha\beta\gamma)^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta \sum \alpha\beta = r^2 - 2qs$

(vi) $\sum \frac{1}{\alpha} = \frac{\sum \alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{r}{s}$

(vii) $\sum \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{\sum \alpha\beta}{\alpha\beta . \gamma\delta} = \frac{q}{s}$

(viii) $\sum \frac{1}{\alpha^2} = \left(\sum \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\sum \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{r^2}{s^2} - \frac{2q}{s}$

$= \frac{r^2 - 2qs}{s^2}$

উদাহরণ 6. $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots\dots\dots\dots + p_n = 0$-এর বীজগুলি $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\dots\dots\dots, \alpha_n$ হলে মান নির্ণয় করুন,

(i) $\sum \frac{\alpha_1}{\alpha_2^{\,2}}$, (ii) $\sum \frac{\alpha_1^{\,2} + \alpha_2^{\,2}}{\alpha_1\alpha_2}$, (iii) $\sum (\alpha_1 - \alpha_2)^2\alpha_3^{\,2}\alpha_4^{\,2} \dots\dots\dots \alpha_n^{\,2}$

সমাধান :

যেহেতু $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$, $x^n + p_1x^{n-1} + \ldots\ldots + p_n = 0$ সমীকরণটির বীজ সমষ্টি,

$$\sum\alpha_1 = -p_1,\ \sum\alpha_1\alpha_2 = p_2,\ \sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -p_3, \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\sum\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_r = (-1)^r . p_r, \ldots\ldots$$

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n = (-1)^n p_n.$$

(i) $$\sum\frac{\alpha_1^3}{\alpha_2^2} = \sum\alpha_1^3\cdot\sum\frac{1}{\alpha_2^2} - \sum\alpha_1$$

$$= \left(\sum\alpha_1^2\cdot\sum\alpha_1 - \sum\alpha_1^2\alpha_2\right)\left\{\left(\sum\frac{1}{\alpha_1}\right)^2 - 2\sum\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\right\} - \sum\alpha_1$$

$$= \left[\left\{(\sum\alpha_1)^2 - 2\sum\alpha_1\alpha_2\right\}\cdot\sum\alpha_1 - (\sum\alpha_1\cdot\sum\alpha_1\alpha_2 - 3\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\right]$$

$$\times\left[\left(\frac{\sum\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_{n-1}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n}\right)^2 - 2\frac{\sum\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_{n-2}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n}\right] - \sum\alpha_1$$

$$= \left[(p_1^2 - 2p_2)\cdot(-p_1) - (-p_1\cdot p_2 + 3p_3)\right]\times\left[\frac{p^2_{n-1}}{p_n^2} - 2\frac{p_{n-2}}{p_n}\right] + p_1$$

$$= \frac{1}{p_n^2}\left[3p_1p_2 - p_1^3 - 3p_3\right]\left(p_{n-1}^2 - 2p_np_{n-2}\right) + p_1$$

(ii) $$\sum\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_1\alpha_2} = \sum\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$$

$$= \sum\alpha_1\cdot\sum\frac{1}{\alpha_1} - n$$

$$= \sum\alpha_1\cdot\frac{\sum\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_{n-1}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n} - n$$

$$= (-p_1)\left(\frac{-p_{n-1}}{p_n}\right) - n$$

$$= \frac{p_1p_{n-1}}{p_n} - n$$

(iii) $\sum(\alpha_1-\alpha_2)^2\cdot\alpha_3^2\alpha_4^2........\alpha_n^2$

$$=\left(\alpha_1{}^2\alpha_2{}^2......\alpha_n{}^2\right)\sum\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{\alpha_1{}^2\alpha_2{}^2}$$

$$=p_n{}^2\sum\left(\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_2}\right)^2$$

$$=p_n{}^2\left[\sum\frac{n-1}{\alpha_1{}^2}-2\sum\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\right]$$

($\because$ α_1, $(\alpha_1-\alpha_2)^2$ আকারে $(n-1)$ বার আসবে।)

$$=p_n^2\left[(n-1)\cdot\left\{\frac{p_{n-1}^2}{p_n^2}-2\frac{p_{n-2}}{p_n}\right\}-2\frac{p_{n-2}}{p_n}\right]$$

$$=(n-1)p_{n-1}^2-2np_np_{n-2}.$$

উদাহরণ 7 : $x^2-qx+r=0$-এর বীজগুলি α, β, γ।

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2},\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\alpha^2},\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2},$$

বীজ-এর সমীকরণ নির্ণয় করুন এবং সমীকরণ থেকে

$\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)$-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান :

যেহেতু α, β, γ, $x^3-qx+r=0$ .... (1) সমীকরণটির বীজ

সুতরাং $\sum\alpha=0$, $\sum\alpha\beta=-q$ এবং $\alpha\beta\gamma=-r$

ধরা যাক $y=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}=\sum\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2}{\gamma^2}$

$$=\left(\sum\frac{1}{\alpha}\right)^2-2\sum\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{2}{\gamma^2}$$

$$=\left(\sum\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}\right)^2-2\frac{\sum\alpha}{\alpha\beta\gamma}-\frac{2}{\gamma^2}$$

$$=\frac{q^2}{r^2}-\frac{2}{\gamma^2}$$

$$\therefore\ \frac{2}{\gamma^2}=\frac{q^2}{r^2}-y=\frac{q^2-r^2y}{r^2}$$

$$\therefore\ \gamma^2=\frac{2r^2}{q^2-r^2y}\text{..........}(2)$$

$\because$ γ (1)-এর বীজ

$\therefore$ $r^3 - qr + r = 0$

বা, $r(r^2 - q) = -r$ বা, $r^2(r^2 - q)^2 = r^2$

$$\therefore\ \frac{2r^2}{q^2-r^2y}\left(\frac{2r^2}{q^2-r^2y}-q\right)^2=r^2$$

বা, $2\{2r^2-q(q^2-r^2y)\}^2=(q^2-r^2y)^3$

বা, $2\{4r^4-4r^2q(q^2-r^2y)+q^2(q^4-2q^2r^2y+r^4y^2)\}=\{q^6-3q^4r^2y+3q^2r^4y^2-r^6y^3\}$

বা, $r^6y^3 + (2q^2r^4 - 3q^2r^4)y^2 + (8r^4q - 4q^4r^2 + 3q^4r^2)y$

$+ (8r^4 - 8r^2q^3 + 2q^2 - q^6) = 0$

বা, $r^6y^3 - q^2r^4y^2 + (8r^4q - q^4r^2)y + (q^6 - 8r^2q^3 + 8r^4) = 0$

$\therefore$ $r^6x^3 - q^2r^4x^2 + (8r^4q - q^4r^2)x + (q^6 - 8r^2q^3 + 8r^4) = 0$

হল নির্ণেয় সমীকরণ যার বীজগুলি

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}, \qquad \frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\alpha^2}, \qquad \frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2},$$

$$\therefore \left(\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\beta_2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)$$

$$=\frac{8r^2q^3-8r^4-q^6}{r^6}$$

উদাহরণ 8. যদি $x^4+4x^3-8x^2+k=0$-এর চারটি আলাদা বাস্তব বীজ থাকে, তবে দেখান যে $0<k<3$.

সমাধান :

ধরা যাক $f(x)=x^4+4x^3-8x^2+k$

$f'(x)=4x^3-12x^2-16x=4x(x^2+3x-4)$

$$=4x\,(x+4)(x-1)$$

$\therefore$ $f'(x)=0$ সমীকরণের বীজগুলি $-4,\ 0,\ 1$.

এখন, $f(x)=0$ এর ভিন্ন বাস্তব বীজগুলি $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ হলে, রোল-এর উপপাদ্যের সাহায্যে বলা যায়

$-\infty<\alpha<-4<\beta<0<\gamma<1<\delta<\infty$

আমরা জানি $f(x)=0$ এর বীজগুলি $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ -এর অবস্থান যথাক্রমে $(-\infty,-4)$, $(-4,0)$, $(0,1)$ এবং $(1,\infty)$-এর মধ্যে।

x	$-\infty$	-4	0	1	∞
$f(x)$	$+$	$k-128$	k	$k-3$	$+$

$\therefore$ $k-128<0$, $k>0$, $k-3<0$ হবে।

অর্থাৎ, $k<128$, $k>0$, $k<3$ হবে।

$\therefore$ $0<k<3$.

উদাহরণ 9. $x^3-3x+2=0$ সমীকরণের বহুবীজগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান :

ধরা যাক $f(x) = x^3-3x+2$

$$\therefore\ f'(x)=3x^2-3$$

এখন, $f(x)$ এবং $f'(x)$-এর মধ্যে গরিষ্ঠ সাধারণ উৎপাদক নীচে নির্ণয় করি —

x^3-3x+2-কে $3x^2-3$ দ্বারা ভাগ ঃ—

	1	0	−3	2	3	0	−3
3 দিয়ে গুণ করে	3						
					1		
	3	0	−9	6			
	3	0	−3				
			−6	6			
−6 দিয়ে ভাগ করে			1	−1			

$3x^2-3$ কে $x-1$ দ্বারা ভাগ : —

3	0	−3	1	−1
3	−3		3	3
	3	−3		
	3	−3		

$\therefore$ $f(x)$ এবং $f'(x)$-এর মধ্যে গরিষ্ঠ সাধারণ উৎপাদক $x-1$.

$\therefore$ $f(x)=0$-এর 1 বহুবীজ এবং ক্রম 2.

উদাহরণ **10.** যদি $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0$ সমীকরণের বীজগুলি $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots,\alpha_n$ হয় তবে, দেখান যে

$$\left(\alpha_1^2+1\right)\left(\alpha_2^2+1\right)\ldots\ldots\left(\alpha_n^2+1\right)$$

$$=\left(1-p_2+p_4-\ldots\ldots\right)^2+\left(p_1-p_3+p_5-\ldots\ldots\right)^2$$

সমাধান :

যেহেতু $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots\alpha_n$ প্রদত্ত সমীকরণটির বীজসমূহ

সুতরাং $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots\ldots + p_{n-1}x + p_n = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n)$

এখন x = i এবং –i বসালে $\left(i=\sqrt{-1}\right)$ পাওয়া যায়

$$(i-\alpha_1)(i-\alpha_2)\ldots\ldots(i-\alpha_n)$$
$$= i^n\left[\left(1-p_2+p_4-\ldots\ldots\right)-i\left(p_1-p_3+p_5-\ldots\ldots\right)\right]\ldots\ldots\ (1)$$

$$(-i-\alpha_1)(-i-\alpha_2)\ldots\ldots(-i-\alpha_n)$$
$$= (-i)^n\left[\left(1-p_2+p_4-\ldots\ldots\right)+i\left(p_1-p_3+p_5-\ldots\ldots\right)\right]\quad\ldots\ldots\ (2)$$

(1) এবং (2) গুণ করলে পাই

$$\left(\alpha_1^2+1\right)\left(\alpha_2^2+1\right)\ldots\ldots\left(\alpha_n^2+1\right)$$
$$= \left(1-p_2+p_4-\ldots\ldots\right)^2+\left(p_1-p_3+p_5-\ldots\ldots\right)^2$$

অনুশীলনী

1. $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x + 2 = 0$ এর একটি বীজ $-2+\sqrt{3}$. সমীকরণটির বাকি বীজগুলি নির্ণয় করুন।

(**সংকেত** : 4.13 উদাহরণ 3-এর মতো। **উত্তর** : $-2\pm\sqrt{3},\ 1\pm\sqrt{-1}$)

2. দেখান যে, $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{4}{x-4}+\dfrac{5}{x-5}=6$ সমীকরণের কোনও কাল্পনিক বীজ নেই।

(**সংকেত** : 4.13 উদাহরণ 3-এর মতো।)

3. দেকার্তের নিয়মানুযায়ী, $x^4+15x^2+7x-11=0$ সমীকরণের বীজের প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

(**সংকেত** : 4.13 উদাহরণ 4-এর মতো। উত্তর ঃ ধনাত্মক –1 ঋণাত্মক –1, কাল্পনিক –2)

4. $x^4 - px^3 + qx^2 + rx + s = 0$-এর বীজগুলি $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

মান নির্ণয় করুন,

(i) $\sum\alpha^3\beta$, (ii) $\sum\alpha^4$, (iii) $\sum\dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2}$, (iv) $\sum\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$, (v) $\sum\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$.

উত্তর ঃ (i) $p^2q - 2q^2 - pr + 4s$, (ii) $p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr - 4s$,

(iii) $\dfrac{qr^2-2q^2s-prs+4s^2}{s^2}$, (iv) $\dfrac{pr}{s}-4$, (v) $\left(p^2-2q\right)\left(\dfrac{r^2-2qs}{s^2}\right)-4$

5. যদি $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ এর বীজ হলে, $\beta\gamma + \alpha\delta, \gamma\alpha + \beta\delta, \alpha\beta + \gamma\delta$ বীজ এর সমীকরণ নির্ণয় করুন এবং সেখান থেকে

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)$$

এর মান নির্ণয় করুন।

[**সংকেত** : ধরুন, $\lambda = \beta\gamma + \alpha\delta$, $\mu = \gamma\alpha + \beta\delta$, $\gamma = \alpha\beta + \gamma\delta$.

সমীকরণটি ঃ $x^3 - qx^2 + (pr - 4s)x - (r^2 - 4qs + p^2 s) = 0$

$(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma) = \lambda + \mu$, ইত্যাদি।

$\therefore (\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta) = (\lambda+\mu)(\mu+\nu)(\nu+\lambda)$

$= \ldots\ldots\ldots pqr - r^2 - p^2 s$]

6. $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$ সমীকরণের বীজগুলি $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হলে,

$(\alpha^2+3)(\beta^2+3)(\gamma^2+3)(\delta^2+3)$-এর মান নির্ণয় করুন।

(**সংকেত** : 4.13 উদাহরণ 10-এর মতো। x-এর স্থলে $\sqrt{3}\,i$ এবং $-\sqrt{3}\,i$ বসান। **উত্তর** : -57)

7. যে ত্রিঘাত সমীকরণের দুটি বীজ $1,\ 3+2\sqrt{-1}$, সেই সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

(**উত্তর ঃ** $x^3 - 7x^2 + 19x - 13 = 0$)

8. যদি $x^4 - 14x^2 + 24x - k = 0$ সমীকরণের বীজগুলি অসমান, বাস্তব হয়, তবে দেখান যে $8 < k < 11$.

(**সংকেত** : 4.13 উদাহরণ 8-এর মতো।)

9. $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0$ সমীকরণের বহুবীজ নির্ণয় করুন।

(**সংকেত** : 4.13 উদাহরণ 9-এর মতো। **উত্তর** : 2)

10. $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ সমীকরণের বীজদের মধ্যে নীচের সম্বন্ধ হওয়ার শর্ত নির্ণয় করুন।

(i) বীজগুলি গুণোত্তর প্রগতিতে আছে।

(ii) যে কোনও দুটি বীজ সমান ও বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

(iii) বীজগুলি সমান্তর প্রগতিতে আছে।

(**উত্তর** :

(i) $p^2 s = r^2$

(ii) $pqr - p^2 s - r^2 = 0$

(iii) $(36q - 11p^2)(4q + p^2) = 1600s$

এবং $p^3 - 4pq + 8r = 0$)

4.14 সারাংশ

বহুপদ রাশির সংজ্ঞা ঃ $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ আকারকে n-ঘাত-র বহুপদ রাশি বলা হবে যখন $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$ বাস্তব ধ্রুবক, $a_0 \neq 0$ এবং প্রতিটি পদের x-এর ঘাত ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

2. **বিভাজন প্রক্রিয়া (Division Algorithm)**

$f(x)$ এবং $g(x)$ দুটি বহুপদ রাশি, ঘাত যথাক্রমে n এবং m, $m \leq n$. এমন দু'টি অবিকল্প বহুপদ রাশি $g(x)$ এবং $r(x)$ পাওয়া যাবে, যাতে

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

$q(x)$-এর ঘাত $n - m$ এবং $r(x)$-এর ঘাত $< m$

3. **ভাগশেষ উপপাদ্য ঃ** বহুপদ রাশি $f(x)$-কে $x-h$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(h)$

4. **টেলার উপপাদ্য ঃ** যদি $f(x)$, n ঘাতের বহুপদ রাশি হয় তবে, যে কোনও h-এর জন্য

$$f(x) = f(h) + f'(h)(x-h) + \frac{f''(h)}{2!}(x-h)^2 +$$

$$\ldots\ldots\ldots + \frac{f^n(h)}{n!}(x-h)^n$$

5. **বহুপদ রাশির শূন্য ঃ**

α-কে বহুপদ রাশি $f(x)$ এর শূন্য বা বীজ বলা হবে যদি $f(\alpha) = 0$ হয়।

6. **উপপাদ্য :** $x = \alpha$ বহুপদ রাশি $f(x)$-এর r-তম শূন্য হবে যদি এবং এক মাত্র যদি $f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = f^{r-1}(\alpha) = 0$ এবং $f^r(\alpha) \neq 0$ হয়।

7. **উপপাদ্য :** n-ঘাত যুক্ত বহুপদ রাশির মান কখনই n-এর বেশি x-এর ভিন্নমানের জন্য শূন্য হতে পারে না।

8. **উপপাদ্য :** $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n, a_0 \neq 0$ যখন, $|x| \geq \frac{|a_k|}{|a_0|} + 1$, যেখানে, $|a_k|$-এর মান $|a_i|$, $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$ এর মধ্যে সর্বোচ্চ, তখন

$$|a_0x^n| > |a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + a_n|$$

9. **উপপাদ্য :** $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, a_0 \neq 0$

যখন $|x| \leq \frac{|a_n|}{|a_n| + |a_k|}$, যেখানে, $|a_k|$-এর মান $|a_i|$, $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n-1$ এর মধ্যে সর্বোচ্চ, তখন

$$|a_n| > |a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}x|$$

10. **বহুপদ সমীকরণ :**

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$-কে

n-ঘাতের বহুপদ সমীকরণ বলা হয়।

11. **বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্য :**

প্রতিটি বীজগাণিতিক সমীকরণের অন্তত একটি বীজ (বাস্তব বা কাল্পনিক) থাকবে।

12. **উপপাদ্য :** প্রতিটি n-ঘাত বিশিষ্ট বহুপদ সমীকরণের মাত্র এবং কেবলমাত্র n-সংখ্যক বীজ থাকবে।

13. **উপপাদ্য :** $f(x) = 0$ বহুপদ সমীকরণে, যদি $f(\alpha), f(\beta) < 0$ হয় তবে $f(x) = 0$-এর অন্তত একটি বীজ α এবং β-এর মধ্যবর্তী হবে।

14. $f(x) = 0$-এর একটি বীজ অমূলদ হলে, প্রতিযোগী অমূলদ সংখ্যাটিও $f(x) = 0$-এর একটি বীজ হবে।

15. $f(x) = 0$ এর একটি বীজ $a + ib$ হলে, $a - ib$ টিও $f(x) = 0$ এর বীজ হবে (যেখানে a, b বাস্তব এবং $i = \sqrt{-1}$)

16. সহগ ও বীজের সম্পর্ক :

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$, $a_0x^n + a_1x^{n-1} \ldots\ldots + a_n = 0$-এর

বীজ হলে, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_1}{a_0}, \ \sum_{i,j} \alpha_i\alpha_j = \frac{a_2}{a_0}, \ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots \sum \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots\ldots \alpha_r = (-1)^r \frac{a_r}{a_0}$

$\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_1\alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$

17. **বহুবীজ :** $x = \alpha$-কে $f(x) = 0$ এর r ক্রমবিশিষ্ট বহুবীজ বলা হবে যদি $(x-\alpha)^r$, $f(x)$-এর একটি উৎপাদক হয়।

4.15 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. দেখান যে $x^n + 1$, $x + 1$ দ্বারা বিভাজ্য হবে যখন n অযুগ্ম।

2. $x^5 + 5x^3 + 3x$ বহুপদ রাশিকে $x-1$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

3. ভাগ এ্যালগরিদম-এর সাহায্যে x^5-2x^3+7x-6-কে x^3-3x+2 দ্বারা ভাগ করুন।

4. প্রমাণ করুন ax^3+bx+c, $x^2 + px + 1$ দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি, $a^2-c^2 = ab$.

5. দেখান যে

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}+\frac{4}{x-4}+\frac{5}{x-5} = 6$$

সমীকরণের কোনও কাল্পনিক বীজ নাই।

6. $\alpha, \beta, \gamma, \; x^3+qx+r=0$ সমীকরণের বীজ।

$\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ বীজ-এর সমীকরণ নির্ণয় করুন।

7. $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3 = 0$ সমীকরণের বহুবীজ নির্ণয় করুন।

8. $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$-এর বীজগুলি $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

মান নির্ণয় করুন।

$$\text{(i) } \sum \alpha^2\beta, \quad \text{(ii) } \sum \alpha^2\beta\gamma, \quad \text{(iii) } \sum \frac{\alpha\beta}{\gamma}$$

9. দেখান যে $x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ সমীকরণের অন্ততপক্ষে একজোড়া কাল্পনিক বীজ আছে।

10. দেখান যে $27x^4 - 48x^2 - 12x + 13 = 0$ -এর দুটি ধনাত্মক বীজ $(0,1)$ এবং $(1,2)$ এর মধ্যে অবস্থিত এবং কোনও কাল্পনিক বীজ নাই।

4.16 উত্তরমালা

2. $(x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 15(x-1)^3 + 25(x-1)^2 + 23\,(x-1) + 9$

3. **ভাগফল** $= x^2 + 1$, **ভাগশেষ** $= -2x^2 + 10x - 8$

6. $r^2y^3 + 3r^2y^2 + (3r^2 + q^3)\,y + (r^2 + 2q^3) = 0$

7 1 একটি বহুবীজ এবং ক্রম 3. অন্য বীজটি –3

6. (i) $3r - pq$, (ii) $pr - 4s$, (iii) $\frac{3ps-qz}{s}$

একক 5 ❑ ত্রিঘাত ও চতুর্ঘাত সমীকরণ

5.1 প্রস্তাবনা

আগের পাঠে সমীকরণ এবং সমীকরণের বীজ সম্বন্ধে আলোচনা হয়েছে। দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান পদ্ধতিও আপনারা অবগত। এখন, ত্রিঘাত এবং চতুর্ঘাত সমীকরণের সমাধান পদ্ধতি আলোচিত হবে।

গবেষণায় ও ব্যবহারিক কাজে আমরা অনেক সময়েই যে বিভিন্ন সমীকণের সম্মুখীন হই তার মধ্যে ত্রিঘাত ও চতুর্ঘাত সমীকরণ বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। এই অধ্যায়ে ঐ সমীকরণগুলির সমাধানই আলোচ্য বিষয়।

5.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে আপনি যে বিষয়গুলি করতে পারবেন সেগুলি হল,

- যে কোনও ত্রিঘাত সমীকরণকে কার্ডানের পদ্ধতিতে সমাধান করে বীজগুলি নির্ণয় করতে পারবেন।
- যে কোনও চতুর্ঘাত সমীকরণকে অয়লারের, দেকার্তের, ফেরারির পদ্ধতিতে সমাধান করে বীজের মানগুলি বার করতে সক্ষম হবেন।

5.3 ত্রিঘাত সমীকরণ

তিনঘাত যুক্ত বহুপদ সমীকরণকে ত্রিঘাত সমীকরণ বলা হয়। ত্রিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0 \, ; \, a_0 \neq 0 \, \ldots\ldots\ldots (1)$$

ত্রিঘাত সমীকরণের তিনটি বীজ আছে। যেহেতু অমূলদ এবং কাল্পনিক বীজ জোড়ায় জোড়ায় থাকে, তাই প্রতিটি ত্রিঘাত সমীকরণের একটি বাস্তব মূলদ বীজ থাকবেই। ত্রিঘাত সমীকরণের একটি বাস্তব মূলদ বীজ জানা থাকলেই বিভাজন প্রক্রিয়ায় একটি দ্বিঘাত বহুপদ রাশি পাওয়া যাবে, যার বীজদ্বয় বার করার পদ্ধতি আমাদের জানা আছে।

নীচের ক্ষেত্রগুলিতে (1)-এর বীজগুলি বের করা সহজ ঃ—

(i) বীজগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকলে,

(ii) বীজগুলি গুণোত্তর প্রগতিতে থাকলে,

(iii) বীজগুলি বিপরীত প্রগতিতে থাকলে,

(iv) দু'টি বীজের যোগফল ধ্রুবক হলে,

(v) দু'টি বীজের গুণফল ধ্রুবক হলে,

(vi) দুটি বীজের অনুপাত জানা থাকলে, ইত্যাদি।

উদাহরণের সাহায্যে বিশেষ ক্ষেত্রগুলিতে বীজ নির্ণয় পদ্ধতি আলোচিত হলো।

(i) **বীজগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকলে ঃ**

উদাহরণ ঃ

$4x^3 - 24x^2 + 23x + 18 = 0$ সমীকরণটির বীজগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকলে বীজগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরা যাক বীজগুলি $\alpha - \beta, \alpha \, , \, \alpha + \beta$

বীজ ও সহগের সম্পর্ক থেকে,

$$(\alpha-\beta)+\alpha+(\alpha+\beta)=\frac{24}{4} \quad \text{বা, } \alpha = 2$$

এবং, $(\alpha-\beta)\cdot\alpha\cdot(\alpha+\beta)=-\frac{18}{4}$ বা, $\left(\alpha^2-\beta^2\right)\alpha=-\frac{18}{4}$

বা, $4-\beta^2=-\frac{18}{8}=-\frac{9}{4}$ বা, $\beta^2=4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$

$$\therefore \beta=\pm\frac{5}{2}$$

এমন, $\beta=\frac{5}{2}$ ধরলে বীজগুলি

$$2-\frac{5}{2}, 2, 2+\frac{5}{2} \quad \text{বা,} \quad -\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{4}$$

এবং $\beta=-\frac{5}{2}$ ধরলে বীজগুলি

$$2+\frac{5}{2}, 2, 2-\frac{5}{2} \quad \text{বা,} \quad \frac{9}{4}, 2, -\frac{1}{2}.$$

(ii) **বীজগুলি গুনোত্তর প্রগতিতে থাকলে ঃ**

উদাহরণ ঃ

$27x^3+42x^2-28x-8=0$ **সমীকরণের বীজগুলি গুণোত্তর প্রগতিতে থাকলে সেগুলি নির্ণয় করুন।**

সমাধান ঃ

ধরা যাক বীজগুলি $\frac{\alpha}{\beta}$, α, $\alpha\beta$

বীজ ও সহগের সম্পর্ক থেকে,

$$\frac{\alpha}{\beta}\ \alpha\ \alpha\beta=\frac{8}{27} \qquad \text{বা,}\ \alpha^3=\frac{8}{27} \qquad \text{বা,}\ \alpha=\frac{2}{3}.$$

এবং $\frac{\alpha}{\beta}+\alpha+\alpha\beta=-\frac{42}{27}$

বা, $\alpha\left(\frac{1+\beta+\beta^2}{\beta}\right)=-\frac{42}{27}$ বা, $\frac{1+\beta+\beta^2}{\beta}=-\frac{21}{9}$ $\quad\left[\because \alpha=\frac{2}{3}\right]$

বা, $9\beta^2+9\beta+9+21\beta=0$ বা, $3\beta^2+10\beta+3=0$

বা, $(3\beta+1)(\beta+3)=0$ বা, $\beta=-3$ এবং $\beta=-\frac{1}{3}$

যখন, $\beta=-3$ তখন বীজগুলি, $-\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, -2$

যখন, $\beta=-\frac{1}{3}$ তখন বীজগুলি, $-2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{9}$

(iii) **বীজগুলি বিপরীত প্রগতিতে থাকলে ঃ**

উদাহরণ ঃ

যদি $81x^3-18x^2-36x+8=0$ সমীকরণের বীজগুলি বিপরীত প্রগতিতে থাকে তবে সেগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

$$81x^3-18x^2-36x+8=0 \text{ .... } (1)$$

(1)-এ $x=\frac{1}{y}$ বসিয়ে,

$$8y^3-36y^2-18y+81=0 \text{ .... } (2)$$

এখন, (1)-এর বীজগুলি বিপরীত প্রগতিতে থাকলে (2)-এর বীজগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকবে।

ধরা যাক, (2)-এর বীজগুলি $\alpha-\beta, \alpha, \alpha+\beta$

$\therefore 3\alpha=\frac{36}{8}$ বা, $\alpha=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

এবং $\alpha(\alpha^2-\beta^2)=-\frac{81}{8}$ বা, $\frac{3}{2}\left(\frac{9}{4}-\beta^2\right)=-\frac{81}{8}$

বা, $\frac{9}{4}-\beta^2=-\frac{27}{4}$ বা, $\beta^2=\frac{27}{4}+\frac{9}{4}=\frac{36}{4}$ বা, $\beta=\pm\frac{6}{2}$

$=\pm 3$

যখন $\beta=3$ তখন (2) এর বীজগুলি

$\frac{3}{2}-3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}+3$ বা, $-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}$

এক্ষেত্রে, (1) এর বীজগুলি $-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}$

যখন, $\beta = -3$ তখন (2) এর বীজগুলি

$\frac{3}{2}+3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}-3$ বা, $\frac{9}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$

এক্ষেত্রে (1) এর বীজগুলি $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$

$\therefore$ (1) এর বীজগুলি $-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}$ বা, $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$

(iv) **দুটি বীজের যোগফল ধ্রুবক হলে ঃ**

উদাহরণ ঃ

$x^3 + 6x^2 - 3x - 18 = 0$ সমীকরণের বীজগুলির মধ্যে যে কোনো দু'টির যোগফল শূন্য হলে সেগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

ধরুন $\alpha, \beta, \gamma,$ $x^3 + 6x^2 - 3x - 18 = 0$ সমীকরণের বীজত্রয়, যেখানে $\alpha + \beta = 0$ .... (1)

এখন, $\alpha + \beta + \gamma = -6$ $\therefore \gamma = -6$ .... (2)

$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -3$ বা, $\alpha\beta + (\alpha + \beta)\gamma = -3$

বা, $\alpha\beta = -3$ $(\because \alpha + \beta = 0)$ .... (3)

(অথবা, $\alpha\beta\gamma = 18$ বা, $\alpha\beta = -3$ $(\because \gamma = -6)$)

(1) এবং (3) সমাধান করুন,

$\alpha = \pm\sqrt{3}$ এবং $\beta = -\alpha = \mp\sqrt{3}$

$\therefore$ বীজত্রয় হয়, $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -6$ নতুবা, $-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -6.$

(v) **দুটি বীজের গুণফল ধ্রুবক ঃ**

উদাহরণ ঃ

$x^3 + 5x^2 + 7x + 2 = 0$ সমীকরণটির দু'টি বীজের গুণফল এক হলে বীজগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

ধরা যাক, $x^3 + 5x^2 + 7x + 2 = 0$ এর বীজগুলি α, β, γ যেখানে, $\alpha \,.\, \beta = 1$ .... (1)

এখন, $\alpha\beta\gamma = -2$ বা, $\gamma = -2$ .... (2)

এবং $\alpha + \beta + \gamma = -5$ বা, $\alpha + \beta = -3$ .... (3)

(1) এবং (3) সমাধান করে,

$$\alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

যখন, $\alpha = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{2}{-3+\sqrt{5}} = \frac{2\left(-3-\sqrt{5}\right)}{9-5} = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

যখন, $\alpha = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. $\beta = \frac{2}{-3-\sqrt{5}} = \frac{2\left(-3+\sqrt{5}\right)}{9-5} = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

(vi) **দু'টি বীজের ভাগফল ধ্রুবক ঃ**

উদাহরণ ঃ

$24x^3 - 14x^2 - 63x + 45 = 0$ সমীকরণটির দু'টি বীজের ভাগফল 2 হলে বীজগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

ধরা যাক $24x^3 - 14x^2 - 63x + 45 = 0$ এর বীজগুলি α, β, γ ।

শর্তানুসারে $\frac{\alpha}{\beta} = 2$ বা, $\alpha = 2\beta$ .... (1)

$\alpha + \beta + \gamma = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$ বা, $3\beta + \gamma = \frac{7}{12}$ .... (2)

$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -\frac{\cancel{63}^{21}}{\cancel{24}_{8}} = -\frac{21}{8}$ বা, $2\beta^2 + 3\beta\gamma = -\frac{21}{8}$ .... (3)

(2) এবং (3) থেকে, $56\beta^2 - 14\beta - 21 = 0$ $\therefore \beta = \frac{3}{4}$ এবং $-\frac{1}{2}$

$\beta = \frac{3}{4}$ হলে, $\alpha = \frac{3}{2}$ এবং তখন, $\gamma = \frac{7}{12} - \frac{9}{4} = -\frac{5}{3}$

$\beta = -\frac{1}{2}$ হলে, $\alpha = -1$ এবং তখন, $\gamma = \frac{7}{12} + \frac{3}{2} = \frac{25}{12}$

আবার, $\alpha\beta\gamma = -\frac{45}{24}$ .... (4)

$\alpha = -1$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{25}{12}$ (4)-নং কে সিদ্ধ করে না।

$\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = \frac{3}{4}$, $\gamma = -\frac{5}{3}$ (4)-নং কে সিদ্ধ করে,

$\therefore$ সমীকরণের বীজগুলি, $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{3}$

5.3.1 এক-এর ঘনমূল নির্ণয় ঃ

ধরা যাক $\sqrt[3]{1} = x$

$\therefore$ $x^3 = 1$ বা, $x^3 - 1 = 0$ .... (1)

এটি একটি ত্রিঘাত সমীকরণ।

এটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষিত করে পাই

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$\therefore$ $x = 1$ এবং $x^2 + x + 1 = 0$

আবার, $x^2 + x + 1 = 0$ থেকে পাই $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

যেখানে $i = \sqrt{-1}$

$\therefore$ (1) এর বীজগুলি, 1, $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ এবং $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

এবং এই বীজগুলিই 1-এর ঘনমূল।

এবার যদি $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ধরি,

তাহলে, $\omega^2 = \frac{1 - 3 - 2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ 1 এর তিনটি ঘনমূলকে আমরা লিখতে পারি 1, ω, ω^2 যখন, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ এবং $\omega^3 = 1$

5.4 ত্রিঘাত সমীকরণকে প্রমাণ আকারে রূপান্তর (Transformation of a cubic equation to the standard form)

ত্রিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার হলো —

$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$ .... (1) $a_0 \neq 0$ এখন এই সমীকরণটিকে আমরা এমন এক সমীকরণে রূপান্তরিত করবো যার দ্বিতীয় পদটি (অর্থাৎ x^2- যুক্ত পদটি) অনুপস্থিত থাকবে। (অর্থাৎ x^2 -এর সহগ শূন্য হবে)।

এর জন্য ধরা যাক $y = x - h$ বা, $x = y + h$

$\therefore a_0(y + h)^3 + 3a_1(y + h)^2 + 3a_2(y + h) + a_3 = 0$

বা, $a_0(y^3 + 3hy^2 + 3h^2y + h^3) + 3a_1(y^2 + 2hy + h^2) + 3a_2(y + h) + a_3 = 0$

বা, $a_0y^3 + 3(a_0h + a_1)y^2 + 3(a_0h^2 + 2ha_1 + a_2)y + (a_0h^3 + 3a_1h^2 + 3a_2h + a_3) = 0$ ..... (2)

এখন, h-কে এমন ধরতে হবে যাতে, $a_0h + a_1 = 0$

$$\text{বা, } h = -\frac{a_1}{a_0}$$

2-নং সমীকরণে, $h = -\frac{a_1}{a_0}$ বসিয়ে পাই,

$$a_0y^3 + 3\left\{a_0\cdot\frac{a_1^2}{a_0^2} - 2\cdot\frac{a_1^2}{a_0} + a_2\right\}y + \left\{-\frac{a_0a_1^3}{a_0^3} + 3\frac{a_1^3}{a_0^2} - 3\frac{a_1a_2}{a_0} + a_3\right\} = 0$$

$$\text{বা, } a_0y^3 + 3\left\{\frac{a_1^2}{a_0} - 2\frac{a_1^2}{a_0} + a_2\right\}y + \left\{\frac{-a_1^3}{a_0^2} + 3\frac{a_1^3}{a_0^2} - \frac{3a_1a_2}{a_0} + a_3\right\} = 0$$

$$\text{বা, } y^3 + 3\cdot\frac{a_2a_0 - a_1^2}{a_0^2}y + \frac{a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3}{a_0^3} = 0 \text{ .... (3)}$$

(1)-এর বীজগুলি α, β, γ হলে (3) এর বীজগুলি হবে $\alpha + \frac{a_1}{a_0}$, $\beta + \frac{a_1}{a_0}$; $\gamma + \frac{a_1}{a_0}$

$\because$ (1) হতে, $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{3a_1}{a_0}$ বা, $\frac{a_1}{a_0} = -\frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)$

$\therefore$ (3)-এর বীজগুলি হবে

$$\frac{1}{3}(2\alpha - \beta - \gamma),\ \frac{1}{3}(2\beta - \gamma - \alpha),\ \frac{1}{3}(2\gamma - \alpha - \beta)$$

এখন এই বীজগুলিকে a_0 দ্বারা গুণ করলে সর্বশেষ রূপান্তরিত সমীকরণটি হবে,

$$z^3+3\left(a_0a_2-a_1^2\right)z+\left(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3\right)=0$$

বা, $Z^3+3HZ+G=0$ .... (4)

যেখানে, $Z=a_0y$, $H=a_0a_2-a_1^2$

এবং $G=a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3$

(4) এর বীজগুলি হ'ল

$$\frac{a_0}{3}(2\alpha-\beta-\gamma),\frac{a_0}{3}(2\beta-\gamma-\alpha),\frac{a_0}{3}(2\gamma-\alpha-\beta)$$

(4) নং সমীকরণটি হ'ল ত্রিঘাত সমীকরণের নির্দিষ্ট আকার (Standard form) ।

5.4.1 একটি ত্রিঘাত সমীকরণের বীজের অন্তরের বর্গবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় ঃ

ধরা যাক ত্রিঘাত সমীকরণটি

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0 \text{ .... } (1)$$

এবং এর বীজগুলি α, β, γ

নির্দিষ্ট আকারে রূপান্তরিত করলে পাওয়া যায়

$$y^3+\frac{3H}{a_0^2}y+\frac{G_1}{a_0^3}=0 \text{ .... } (2)$$

যখন $H=a_0a_2-a_1^2$, $G=a_0^2a_3-3a_0a_1a_2-2a_1^3$

এবং যার বীজগুলি হলো $\alpha_1=\alpha+\frac{a_1}{a_0}$, $\beta_1=\beta+\frac{a_1}{a_0}$, $\gamma_1=\gamma+\frac{a_1}{a_0}$

এখানে, $\alpha_1-\beta_1=\alpha-\beta$, $\beta_1-\gamma_1=\beta-\gamma$, $\gamma_1-\alpha_1=\gamma-\alpha$

এখন দেখা যাচ্ছে, (1)-নং এর যে কোনও দুটি বীজ-এর অন্তর (2) এর সেই সেই বীজের অন্তর এর সমান।
(2)-এর বীজগুলি $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$

ধরা যাক $z=(\beta_1-\gamma_1)^2=(\beta_1+\gamma_1)^2-4\beta_1\gamma_1$

$$=\alpha_1^2-\frac{4}{\alpha_1}\cdot\left(-\frac{G}{a_0^3}\right)$$

$$\left(\because \sum\alpha_1=0,\ \alpha_1\beta_1\gamma_1=-\frac{G}{a_0^3}\right)$$

বা, $\alpha_1^3 + 4\left(\frac{G}{a_0^3}\right) - \alpha_1 z = 0$ .... (3)

$\because$ α_1, (2)-এর একটি বীজ

$$\alpha_1^3 + \frac{3.H}{a_0^2}\alpha_1 + \frac{G}{a_0^3} = 0 \text{ .... (4)}$$

এখন (3) ও (4) থেকে পাই, $\left(\frac{3H}{a_0^2} + z\right)\alpha_1 = \frac{3G}{a_0^3}$

$$\text{বা, } \alpha_1 = \frac{3G}{a_0^3\left(\frac{3H}{a_0^2} + z\right)} = \frac{3G}{a_0\left(3H + a_0^2 z\right)}$$

(4) নং-এ $\alpha_1 = \frac{3G}{a_0\left(3H + a_0^2 z\right)}$ বসিয়ে পাই,

$$\frac{27G^3}{a_0^3\left(3H + a_0^2 z\right)^3} + \frac{3H}{a_0^2}\cdot\frac{3G}{a_0\left(3H + a_0^2 z\right)} + \frac{G}{a_0^3} = 0$$

বা, $G\left(3H + a_0^2 z\right)^3 + 9GH\left(3H + a_0^2 z\right)^2 + 27G^3 = 0$

বা, $a_0^6 z^3 + 3a_0^4 z^2 \cdot 3H + 3\cdot a_0^2 z.9H^2 + 27H^3 + 9H(a_0^4 z^2 + 6Ha_0^2 z + 9H^2) + 27G^2 = 0$

বা, $a_0^6 z^3 + 18a_0^4 Hz^2 + 81a_0^2 H^2 z + 108H^3 + 27G^2 = 0$

বা, $z^3 + \frac{18H}{a_0^2}z^2 + \frac{81H^2}{a_0^4}z + \frac{27}{a_0^6}\left(G^2 + 4H^3\right) = 0$ .... (5)

এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য ঃ $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2 = -\frac{27}{a_0^6}\left(G^2 + 4H^3\right)$

এবং $(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 = -\frac{18H}{a_0^2}$

এখান থেকে মূল ত্রিঘাত সমীকরণটির বীজগুলির প্রকৃতি নির্ণয় সম্ভব। যেমন—

(i) $G^2 + 4H^3 > 0$ হলে (1)-এর দুটি কাল্পনিক বীজ থাকবে।

(ii) $G^2 + 4H^3 < 0$ এবং $H < 0$ হলে, দেকার্তের চিহ্ন নিয়মানুযায়ী (5)-এর কোনও ঋণাত্মক বীজ থাকবে না। এক্ষেত্রে (1)-এর বীজগুলি বাস্তব এবং আলাদা।

(iii) $G^2 + 4H^3 = 0$ কিন্তু $H \neq 0$ হলে (1) এর যে কোনও দুটি বীজ সমান হবে।

(iv) $G^2 + 4H^3 = 0$ এবং $H = 0$ হলে, (1) এর বীজ তিনটি সমান হবে।

উদাহরণ ঃ ত্রিঘাত সমীকরণ $x^2 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$ এর বীজগুলির প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে, $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4$

সুতরাং, $H = a_0 a_2 - a_1^2$

এবং $G = a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3$

$\therefore \quad H = 1.3 - 4 = -1 < 0$

$G = 1.4 - 3.1.2.3 + 2.8 = 20 - 18 = 2$

$G^2 + 4H^3 = 4 + 4(-1)^3$

$= 0$

যেহেতু, $G^2 + 4H^3 = 0$ এবং $H \neq 0$

অতএব $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$-এর বীজগুলি বাস্তব এবং দুটি বীজ সমান।

5.5 কার্ডান পদ্ধতি (Cardan's Method)

ত্রিঘাত সমীকরণের সাধারণ সমাধানঃ ত্রিঘাত সমীকরণের বিভিন্ন পদ্ধতির মধ্যে কার্ডানের পদ্ধতি অন্যতম।

ধরা যাক ত্রিঘাত সমীকরণটি $a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0,\ a_0 \neq 0$ ...... (1)

(1)-এ $z = a_0x + a_1$ বসালে ত্রিঘাত সমীকরণটি নীচের নির্দিষ্ট আকারে রূপান্তরিত হবে।

$z^3 + 3Hz + G = 0$ .... (2)

যেখানে, $H = a_0a_2 - a_1^2$

এবং $G = a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3$

এখন ধরা যাক,

$z = u + v$

$z^3 - 3uvz - (u^3 + v^3) = 0$ .... (3)

(2) এবং (3) তুলনা করে পাই,

$uv = -H$ এবং $u^3 + v^3 = -G$

$$u^3 - v^3 = \sqrt{\left(u^3+v^3\right)^2 - 4u^3v^3} = \sqrt{G^2+4H^3}$$

$$\therefore \quad u^3 = \frac{1}{2}\left(-G+\sqrt{G^2+4H^3}\right)$$

এবং $v^3 = \frac{1}{2}\left(-G-\sqrt{G^2+4H^3}\right)$

এখন, α যদি ঘনমূল $\left\{\frac{1}{2}\left(-G+\sqrt{G^2+4H^3}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}$ -এর যে কোনও একটি মান হয় তবে, u-এর মানগুলি হবে যথাক্রমে $\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2$ যেখানে ω হল 1-এর কাল্পনিক ঘনমূল।

$\because\ u\upsilon = -H,\ \therefore$ u-এর মান অনুযায়ী

υ-এর মানগুলি হবে যথাক্রমে

$$-\frac{H}{\alpha}, \frac{-\omega^2 H}{\alpha}, \frac{-\omega H}{\alpha} \quad \left(\because \omega^3 = 1\right)$$

তখন z-এর মানগুলি হবে, $\alpha - \frac{H}{\alpha}$, $\alpha\omega - \frac{\omega^2 H}{\alpha}$ এবং $\alpha\omega^2 - \frac{\omega H}{\alpha}$.

সুতরাং x-এর মানগুলি হবে,

$$\frac{1}{a}\left(\alpha - \frac{H}{\alpha} - b\right), \frac{1}{a}\left(\omega\alpha - \frac{\omega^2 H}{\alpha} - b\right)$$

এবং $\frac{1}{a}\left(\omega^2\alpha - \frac{\omega H}{\alpha} - b\right)$

যদি $G^2 + 4H^3 < 0$, ধরা যাক, $G^2 + 4H^3 = -k^2$

তখন, $u^3 = \frac{1}{2}(-G+ik)$, $v^3 = \frac{1}{2}(-G-ik)$

ধরা যাক, $-\frac{G}{2} = r\cos\theta$ এবং $\frac{k}{2} = r\sin\theta$ যেখানে, $-\pi \le \theta \le \pi$

$\therefore\ u^3 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ এবং $r^2 = -H^3$

এখন, ডি-ময়ভার (De-Moivre's)-র উপপাদ্য থেকে, u-এর তিনটি মান পাওয়া যায়—

$$\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right), \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{2\pi+\theta}{3}+i\sin\frac{2\pi+\theta}{3}\right), \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{4\pi+\theta}{3}+i\sin\frac{4\pi+\theta}{3}\right)$$

এখন, $uv = -H$ থেকে, v-এর মানগুলি যথাক্রমে,

$$\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta}{3}-i\sin\frac{\theta}{3}\right), \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{2\pi+\theta}{3}-i\sin\frac{2\pi+\theta}{3}\right), \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{4\pi+\theta}{3}-i\sin\frac{4\pi+\theta}{3}\right)$$

$\therefore$ z-এর মানগুলি হবে যথাক্রমে,

$$2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta}{3},\ 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{2\pi+\theta}{3},\ 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{4\pi+\theta}{3}$$

বা, $2\sqrt{-H}\cos\frac{\theta}{3},\ 2\sqrt{-H}\cos\frac{2\pi+\theta}{3},\ 2\sqrt{-H}\cos\frac{4\pi+\theta}{3}$

$\therefore$ x-এর মানগুলি হবে যথাক্রমে,

$$\frac{1}{a}\left(2\sqrt{-H}\cos\frac{\theta}{3}-b\right),\ \frac{1}{a}\left(2\sqrt{-H}\cos\frac{2\pi+\theta}{3}-b\right),\ \frac{1}{a}\left(2\sqrt{-H}\cos\frac{4\pi+\theta}{3}-b\right)$$

উদাহরণ ঃ $x^3 + 15x^2 - 33x - 847 = 0$ ত্রিঘাত সমীকরণটির সমাধান করুন।

সমাধান ঃ $x^3 + 15x^2 - 33x - 847 = 0$ .... (1)

(1)-নং কে নির্দিষ্ট আকারে রূপান্তরের জন্য $x = z - 5$ বসালে পাওয়া যায়—

$\therefore\ (z-5)^3 + 15(z-5)^2 - 33(z-5) - 847 = 0$

বা, $z^3 - 108z - 432 = 0$ .... (2)

এখানে, $H = -36$ এবং $G = -432$

ধরা যাক, $z = u + v$, তখন কার্ডন পদ্ধতির সাহায্যে

$$u^3 = \frac{-G+\sqrt{G^2+4H^3}}{2} = \frac{+432+\sqrt{(432)^2+4(-36)^3}}{2}$$

$$= 216.$$

$\therefore\ u = 6, 6\omega, 6\omega^2$, যেখানে ω, 1-এর ঘনমূল।

এখন, $uv = -H$ থেকে (কার্ডন পদ্ধতি থেকে)

$$v = \frac{36}{6}, \frac{36}{6}\omega^2, \frac{36}{6}\omega$$

বা, 6, $6\omega^2$,6ω.

$\therefore$ (1)-এর বীজত্রয় হলো,

$$6 + 6 - 5,\ 6\omega + 6\omega^2 - 5,\ 6\omega^2 + 6\omega - 5$$

বা, $7, -11, -11 \quad (\because\ 1 + \omega + \omega^2 = 0)$

উদাহরণ ঃ $x^3 - 3x - 1 = 0$ সমীকরণটির সমাধান করুন।

সমাধান ঃ $x^3 - 3x - 1 = 0$ সমীকরণটি নির্দিষ্ট আকারেই আছে।

এখানে, $H = -1, G = -1$

ধরা যাক, $x = u + v$

কার্ডনের পদ্ধতি অনুযায়ী,

$$u^3 = \frac{1 + \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\ u = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore\ u = \left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right), \left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right), \left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right)$$

আবার, $uv = -H = 1$ থেকে

$$v = \left(\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9}\right), \left(\cos\frac{7\pi}{9} - i\sin\frac{7\pi}{9}\right), \left(\cos\frac{13\pi}{9} - i\sin\frac{13\pi}{9}\right)$$

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণটির বীজগুলি হবে,

$$2\cos\frac{\pi}{9},\ 2\cos\frac{7\pi}{9},\ 2\cos\frac{13\pi}{9}$$

5.6 দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ সমূহ

উদাহরণ 1. $a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a^3 = 0$ সমীকরণের বীজগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকার শর্ত নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরা যাক, $a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$ .... (1)-এর বীজগুলি $\alpha - \beta, \alpha, \alpha + \beta$

$$\therefore \quad 3\alpha = -\frac{3a_1}{a_0} \qquad \text{বা, } \alpha = -\frac{a_1}{a_0} \quad \text{.......... (2)}$$

$\because$ α, (1)-এর একটি বীজ,

$$\therefore \quad a_0\alpha^3 + 3a_1\alpha^2 + 3a_2\alpha + a_3 = 0 \quad \text{........... (3)}$$

এখন, (2) এবং (3) থেকে

$$-a_0 \cdot \frac{a_1^3}{a_0^3} + 3a_1 \cdot \frac{a_1^2}{a_0^2} - 3a_2\frac{a_1}{a_0} + a_3 = 0$$

বা, $-a_1^3 + 3a_1^3 - 3a_0a_1a_2 + a_0^2a_3 = 0$

বা, $2a_1^3 - 3a_0a_1a_2 + a_0^2a_3 = 0$

এটিই নির্ণেয় শর্ত।

উদাহরণ 2. $a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$ সমীকরণের বীজগুলি গুণোত্তর প্রগতিতে থাকার শর্ত নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরা যাক $a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$ .... (1)-এর বীজগুলি $\frac{\alpha}{\beta}, \alpha, \alpha\beta$

$$\therefore \quad \alpha\left(\frac{1}{\beta} + 1 + \beta\right) = -\frac{3a_1}{a_0} \quad \text{.......... (2)}$$

$$\alpha^2\left(\frac{1}{\beta} + 1 + \beta\right) = \frac{3a_2}{a_0} \quad \text{.......... (3) এবং } \alpha^3 = -\frac{a_3}{a_0} \quad \text{.......... (4)}$$

(2) এবং (3) থেকে,

$$\alpha = -\frac{3a_2}{a_0} \times \frac{a_0}{3a_1} = -\frac{a_2}{a_1}$$

α-র এই মান (4) -এ বসিয়ে,

$$\therefore \quad -\frac{a_2^3}{a_1^3} = -\frac{a_3}{a_0} \qquad \text{বা, } a_0a_2^3 = a_1^3a_3$$

এটিই নির্ণেয় শর্ত।

উদাহরণ 3. $a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$ এর বীজগুলি বিপরীত প্রগতিতে থাকার শর্ত নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ আমরা জানি $a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$ .... (1)-এর বীজগুলি বিপরীত প্রগতিতে থাকবে যদি $a_3x^3 + 3a_2x^2 + 3a_1x + a_0 = 0$ .... (2)—এর বীজগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকে।

আমরা জানি (উদাহরণ 1 দ্রষ্টব্য) $a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$-এর বীজগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকে যদি

$2a_1^3 - 3a_0a_1a_2 + a_0^2a_3 = 0$ হয়।

$\because$ (2)-এর বীজগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকবে যদি

$2(3a_2)^3 - 3 \,.\, a_3 \,.\, 3a_2 \,.\, 3a_1 + a_3^2 \,.\, a_0 = 0$

বা, $54a_2^3 - 27a_1a_2a_3 + a_0a_3^2 = 0$ এটাই নির্ণেয় শর্ত।

উদাহরণ 4. যদি $x^3 - 3x - 1 = 0$ এর বীজগুলি α, β, γ হয়, তবে যে সমীকরণের বীজগুলি $(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma), (\beta - \gamma)(\beta - \alpha), (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$ সেটি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ যেহেতু $x^3 - 3x + 1 = 0$ এর বীজগুলি α, β, γ : সুতরাং

$\alpha + \beta + \gamma = 0$ .... (1)

$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = -3$ .... (2)

$\alpha\beta\gamma = -1$ .... (3)

ধরা যাক, $y = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)$

$$= \alpha^2 - \alpha\gamma - \alpha\beta + \beta\gamma = \alpha^2 - \alpha(\beta + \gamma) + \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha}$$

$$= \alpha^2 + \alpha^2 - \frac{1}{\alpha} = 2\alpha^2 - \frac{1}{\alpha}$$

$\therefore \quad 2\alpha^2 - \alpha y - 1 = 0$ .... (4)

$\because \alpha$, $x^3 - 3x + 1 = 0$ এর একটি বীজ

$\therefore \quad \alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0$ .... (5)

(4) এবং (5) থেকে,

$(-y + 6)\alpha - 3 = 0 \;\therefore\; \alpha = \dfrac{3}{6 - y}$

(5) থেকে

$$\frac{27}{(6-y)^3}-3\cdot\frac{3}{6-y}+1=0$$

বা, $(6-y)^3-9(6-y)^2+27=0$

বা, $(6-y-9)(36-12y+y^2)+27=0$

বা, $(y+3)(y^2-12y+36)-27=0$

বা, $y^3-9y^2+81=0$

এটাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদাহরণ 5. $7x^2-12x^2-6x-5=0$ **সমীকরণের বীজগুলির প্রকৃতি নির্ণয় করুন।**

সমাধান ঃ এখানে, $a_0=7, a_1=-4, a_2=-2, a_3=-5.$

$H \;=a_0a_2-a_1{}^2=7.(-2)-(-4)^2=-14-16=-30$

$G \;=a_0{}^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1{}^3$

$\quad=49(-5)-3(7)(-4)(-2)+2(-4)^3$

$\quad=-245-168-128=-541$

$G^2+4H^3=(-541)^2+4(-30)^3$

$\qquad=184681>0$

∴ ত্রিঘাত সমীকরণের দু'টি কাল্পনিক বীজ এবং একটি বাস্তব বীজ আছে।

উদাহরণ 6. কার্ডন-এর পদ্ধতিতে $x^3+6x^2-12x+32=0$ **সমীকরণের বীজগুলি নির্ণয় করুন।**

সমাধান ঃ $x^3+6x^2-12x+32=0$ .... (1)

এখানে, $a_0=1, a_1=2, a_2=-4, a_3=32.$

(1)নং কে নির্দিষ্ট আকারে রূপান্তরের জন্য (1)-এ $x=y-2$ বসালে আমরা পাই,

$(y-2)^3+6(y-2)^2-12(y-2)+32=0$

বা, $y^3-6y^2+12y-8+6y^2-24y+24-12y+24+32=0$

বা, $y^3-24y+72=0$ .... (2)

এখানে, $H=-8, G=72$

ধরুন, $y=u+v$

(2)-এ $y=u+v$ বসিয়ে,

$uv=8$ এবং $u^3+v^3=-72.$

$$\therefore \quad u^3 = \frac{1}{2}\left(-G + \sqrt{G^2 + 4H^3}\right)$$

$$\text{এবং } v^3 = \frac{1}{2}\left(-G - \sqrt{G^2 + 4H^3}\right)$$

$$u^3 = \frac{1}{2}\left(-72 + \sqrt{5184 - 2048}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(-72 + 56) = -\frac{16}{2} = -8$$

$u = -2, -2\omega, -2\omega^2$, সেখানে, $1 + \omega + \omega^2 = 0$

$uv = 8$ থেকে v-এর মানগুলি হবে,

$v = -4, -4\omega^2, -4\omega.$

$\therefore$ (2)-এর বীজগুলি যথাক্রমে,

$-6, -2\omega - 4\omega^2, -2\omega^2 - 4\omega$

$\therefore$ (1)-এর বীজগুলি যথাক্রমে

$-8, -2\omega - 4\omega^2 - 2, -2\omega^2 - 4\omega - 2$

বা, $-8, -2\omega^2, -2\omega$

উদাহরণ 7. সমাধান করুন, $x^3 - 3x + 1 = 0$

সমাধান এখানে $x^3 - 3x + 1 = 0$ .... (1)

ধরা যাক $x = u + v$ .... (2)

$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$ .... (3)

(1) এবং (3) হতে পাই,

$uv = 1 \qquad \therefore u^3v^3 = 1$

এবং $u^3 + v^3 = -1$

$\therefore$ যে সমীকরণের বীজদ্বয় u^3, v^3 সেই সমীকরণটি

$t^2 + t + 1 = 0$

$$\therefore \quad t = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{3}\, i\right)$$

ধরাযাক্, $u^3 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $v^3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$$\because \quad u^3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \quad u = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \quad u = \left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right), \left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right) \text{ এবং } \left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$$

$u\,v = 1$ হতে,

$$v = \cos\frac{2\pi}{9} - i\sin\frac{2\pi}{9},\ \cos\frac{8\pi}{9} - i\sin\frac{8\pi}{9} \text{ এবং } \cos\frac{14\pi}{9} - i\sin\frac{14\pi}{9}$$

$\therefore$ (2)-এর মাধ্যমে, (1)-এর বীজগুলি

$$2\cos\frac{2\pi}{9},\ 2\cos\frac{8\pi}{9},\ 2\cos\frac{14\pi}{9}$$

অনুশীলনী

1. $x^2 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$ এর বীজগুলি নির্ণয় করুন। বীজগুলি সমান্তর প্রগতিতে আছে।
   [**উত্তর :** $-1, 2, 5$]
2. $2x^3 - 21x^2 + 42x - 16 = 0$ এর বীজগুলি নির্ণয় করুন। বীজগুলি গুণোত্তর প্রগতিতে আছে।
   [**উত্তর :** $\frac{1}{2}, 2, 8$]
3. $3x^3 - 22x^2 + 48x - 32 = 0$ এর বীজগুলি নির্ণয় করুন। বীজগুলি বিপরীত প্রগতিতে আছে।
   [**উত্তর :** $4, 2, \frac{4}{3}$]
4. $x^3 - 5x^2 - 16x + 80 = 0$ এর বীজগুলি নির্ণয় করুন। সমীকরণটির দু'টি বীজের যোগফল শূন্য।
   [**উত্তর :** $4, -4, 5$]
5. দুটি বীজের গুণফল -1 হলে, $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ এর বীজগুলি নির্ণয় করুন।
   [**উত্তর :** $\frac{1}{2}, -2, 1$]
6. $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ এর দুটি বীজ সমান হলে দেখান যে, $(bc - ad)^2 = 4(b^2 - ac)(c^2 - bd)$
7. কার্ডান পদ্ধতিতে নীচের সমীকরণগুলি সমাধান করুন ঃ

   (i) $x^3 - 3x^2 + 12x + 16 = 0$ [**উত্তর :** $-1,\ 2\left(1 \pm \sqrt{3}\,i\right)$]

   (ii) $x^3 + 12x + 65 = 0$ [উত্তর ঃ $2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4},\ 2\sqrt[3]{2}\omega - \sqrt[3]{4}\omega^2,\ 2\sqrt[3]{2}\omega^2 - \sqrt[3]{4}\omega$]

   (iii) $28x^3 - 9x^2 + 28 = 0$ [**উত্তর :** $-\frac{1}{4}, \frac{1}{7}\left(2 \pm \sqrt{3}\,i\right)$]

   (iv) $x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0$ [**উত্তর :** $-1,\ -1 \pm \sqrt{3}\,i$]

5.7 চতুর্ঘাত সমীকরণ

চতুর্ঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার হলো—

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0,\ a_0 \neq 0 \ \ldots\ldots\ (1)$$

যে কোনও চতুর্ঘাত সমীকরণকে দু'টি দ্বিঘাত সমীকরণের গুণফল আকারে লেখা সম্ভব—এই তত্ত্বকে ধরে নিয়েই দেকার্ত (Descarte's) চতুর্ঘাত সমীকরণের সমাধান পদ্ধতি উদ্ভাবন করেছেন। সেক্ষেত্রে দ্বিঘাত সমীকরণদুটির বীজগুলি নির্ণয় করলেও চতুর্ঘাত সমীকরণটির চারটি বীজ জানা হয়ে যাবে।

এছাড়া অয়লার, ফেরারী ও আরও অনেকে চতুর্ঘাত সমীকরণ সমাধানের বিশেষ বিশেষ পদ্ধতি উদ্ভাবন করেছেন। আমরা এখানে মাত্র তিনটি পদ্ধতিরই আলোচনা করবো।

5.8 সাধারণ আকার থেকে প্রমাণ আকারে (Standard form) রূপান্তর

এখানে $a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0 \ \ldots\ldots\ (1)$

এই সমীকরণে $x = y + h$ বসালে পাই,

$$a_0(y+h)^4 + 4a_1(y+h)^3 + 6a_2(y+h)^2 + 4a_3(y+h) + a_4 = 0$$

বা, $a_0(y^4 + 4hy^3 + 6h^2y^2 + 4h^3y + h^4) + 4a_1(y^3 + 3hy^2 + 3h^2y + h^3)$

$$+ 6a_2(y^2 + 2hy + h^2) + 4a_3(y+h) + a_4 = 0$$

বা, $a_0y^4 + 4(a_0h + a_1)y^3 + 6(a_0h^2 + 2a_1h + a_2)y^2 + 4(a_0h^3 + 3a_1h^2 + 3a_2h + a_3)y$

$$+ (a_0h^4 + 4a_1h^3 + 6a_2h^2 + 4a_3h + a_4) = 0$$

এখন, $h = -\dfrac{a_1}{a_0}$ ধরলে y^3-এর সহগ হয় শূন্য।

এবং এখন $a_0y^4 + 6\left(a_0 \cdot \dfrac{a_1^2}{a_0^2} - 2\dfrac{a_1^2}{a_0} + a_2\right)y^2 + 4\left(-a_0 \cdot \dfrac{a_1^3}{a_0^3} + 3a_1 \cdot \dfrac{a_1^2}{a_0^2} - 3a_2 \cdot \dfrac{a_1}{a_0} + a_3\right)y$

$$+\left(a_0 \cdot \frac{a_1^4}{a_0^4} - 4a_1 \cdot \frac{a_1^3}{a_0^3} + 6a_2 \cdot \frac{a_1^2}{a_0^2} - 4a_3 \cdot \frac{a_1}{a_0} + a_4\right) = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

এখন $y = \dfrac{z}{a_0}$ বসিয়ে পাই

$$z^4 + 6(a_0a_2 - a_1^2)z^2 + 4(a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3)z$$
$$+ (a_0^3a_4 - 4a_0^2a_1a_3 + 6a_0a_1^2a_2 - 3a_1^4) = 0$$

বা, $z^4 + 6(a_0a_2 - a_1^2)z^2 + 4(a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3)z$
$$+ a_0^2(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_1^2) - 3(a_0a_2 - a_1^2)^2 = 0$$

বা, $z^4 + 6Hz^2 + 4Gz + a_0^2I - 3H^2 = 0$ .... (3)

যেখানে, $H = a_0a_2 - a_1^2$, $G = a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3$

$I = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2$

এই (3) নং সমীকরণটিকেই বলে (1)-এর নির্দিষ্ট আকার। এখানে z ও x এর মধ্যে সম্পর্কটি হলো

$$z = a_0x + a_1 \text{ বা, } x = \frac{1}{a_0}(z - a_1)$$

উদাহরণ ঃ

$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 5x + 2 = 0$ চতুর্ঘাতকে নির্দিষ্ট আকারে রূপান্তরিত করুন।

সমাধান ঃ $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 5x + 2 = 0$ .... (i) তে $x = y + h$ বসালে পাই,

$$(y + h)^4 - 3(y + h)^3 + 5(y + h)^2 - 5(y + h) + 2 = 0$$

বা, $(y^4 + 4hy^3 + 6h^2y^2 + 4h^3y + h^4) - 3(y^3 + 3y^2h + 3yh^2 + h^3)$
$$+ 5(y^2 + 2hy + h^2) - 5(y + h) + 2 = 0$$

বা, $y^4 + (4h - 3)y^3 + (6h^2 - 9h + 5)y^2 + (4h^3 - 9h^2 + 10h - 5)y$
$$+ (h^4 - 3h^3 + 5h^2 - 5h + 2) = 0$$

$$4h - 3 = 0 \qquad \text{বা, } h = \frac{3}{4}.$$

$$\therefore \quad y^4 + \left(6\cdot\frac{9}{16} - 9\cdot\frac{3}{4} + 5\right)y^2 + \left(4\cdot\frac{27}{64} - 9\cdot\frac{9}{16} + 10\cdot\frac{3}{4} - 5\right)y$$
$$+\left(\frac{81}{256} - \frac{81}{64} + 5\cdot\frac{9}{16} - 5\cdot\frac{3}{4} + 2\right) = 0$$

$$\therefore \quad y^4 + \frac{26}{16}y^2 - \frac{14}{16}y + \frac{29}{256} = 0 \text{ .... (ii)}$$

এখন, (ii)-এ $y=\frac{z}{4}$ বসালে পাওয়া যায়,

$$\frac{z^4}{256}+\frac{26}{16}\cdot\frac{z^2}{16}-\frac{14}{16}\cdot\frac{z}{4}+\frac{29}{256}=0$$

বা, $z^4 + 26z^2 - 56z + 29 = 0$ .... (iii)

এটাই চতুর্ঘাত (i)-এর নির্দিষ্ট আকার

(iii) এবং (i) বীজের মধ্যে সম্পর্ক

$$x=\frac{1}{4}(z+3) \text{ .... (iv)}$$

5.9 চতুর্ঘাত সমীকরণের সমাধান পদ্ধতি

5.9.1 অয়লার (Euler)-এর সমাধান পদ্ধতি ঃ

$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$ .... (1) চতুর্ঘাতের প্রমাণ আকার—

$z^4 + 6Hz^2 + 4Gz + a_0^2I - 3H^2 = 0$ .... (2)

যেখানে, $x=\frac{1}{a_0}(z-a_1)$

$H = a_0a_2 - a_1^2$, $G = a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3$

$I = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2$

ধরা যাক, $z=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ .... (3)

বর্গ করুন,

$$z^2-(p+q+r) = 2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{qr}+\sqrt{rp}\right)$$

আবার বর্গ করুন,

$$z^4-2(p+q+r)\cdot z^2+(P+q+r)^2=4\left\{pq+qr+rp+2\sqrt{pqr}\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}\right)\right\}$$

বা, $z^4-2(p+q+r)\cdot z^2-8\sqrt{pqr}\,.z+(p+q+r)^2-4(pq+qr+rp)=0$ .... (4)

(2) এবং (4) থেকে

$$p + q + r = -3H, \ \sqrt{pqr} = -\frac{G}{2} \ ,$$

$$(p+q+r)^2 - 4(pq+qr+rp) = a_0^2 I - 3H^2$$

$$\therefore \quad p+q+r = -3H\,, \quad pq+qr+rp = 3H^2 - \frac{a_0^2 I}{4} \ .$$

$$pqr = \frac{G^2}{4}$$

$\therefore$ p, q, r বীজ-এর ত্রিঘাত সমীকরণটি,

$$t^2 + 3Ht^2 + \left(3H^2 - \frac{a_0^2 I}{4}\right)t - \frac{G^2}{4} = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

এই সমীকরণটিকে অয়লারের ত্রিঘাত বলে।

(5) নং সমীকরণকে লেখা যায়

$$4(t + H)^3 - a_0^2 I\,(t + H) - (G^2 + 4H^3 - a_0^2 IH) = 0$$

ধরা যাক, $t + H = a_0^2\theta$ এবং $G^2 + 4H^3 - a_0^2 IH = -a_0^3 J$

$\therefore$ (5) নং থেকে,

$$4a_0^3\theta^3 - a_0 I\theta + J = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ (6)$$

(6)-কে বলা হয় ক্রমহ্রাসমান ত্রিঘাত (Reducing cubic)

(6)-এর বীজগুলি $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3$ হলে (5)-এর বীজগুলি হবে,

$$p = a_0^2\theta_1 - H,\ q = a_0^2\theta_2 - H,\ r = a_0^2\theta_3 - H$$

$\therefore$ (2)-এর বীজগুলি হবে এরকম

$$\pm\sqrt{a_0^2\theta_1 - H} \ \pm \sqrt{a_0^2\theta_2 - H} \ \pm\sqrt{a_0^2\theta_3 - H}$$

$\because$ (2)-এর বীজ সংখ্যা হবে 4

$\therefore$ যে p, q, r-এর মান

$\sqrt{pqr} = -\dfrac{G}{2}$ শর্তটি

সিদ্ধ করবে সেই p, q, r-এর মান গুলি কে নিয়ে (2)-এর 4 টি বীজ পাওয়া যাবে।

$\because \quad \sqrt{pqr} = -\frac{G}{2} \quad \therefore \sqrt{r} = -\frac{G}{2\sqrt{pq}}$

$\therefore$ $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ -এর বিভিন্ন মানের জন্য (2)-এর বীজগুলি হবে

$$\sqrt{p}+\sqrt{q}-\frac{G}{2\sqrt{pq}},\ \sqrt{p}-\sqrt{q}+\frac{G}{2\sqrt{pq}},\ -\sqrt{p}+\sqrt{q}+\frac{G}{2\sqrt{pq}},\ -\sqrt{p}-\sqrt{q}-\frac{G}{2\sqrt{pq}}$$

এবার, $x=\frac{1}{a_0}(z-a_1)$ -এর দ্বারা (1) এর বীজগুলি হবে,

$$\frac{1}{a_0}\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}-\frac{G}{2\sqrt{pq}}-a_1\right),\ \frac{1}{a_0}\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}+\frac{G}{2\sqrt{pq}}-a_1\right),$$

$$\frac{1}{a_0}\left(-\sqrt{p}+\sqrt{q}+\frac{G}{2\sqrt{pq}}-a_1\right),\frac{1}{a_0}\left(-\sqrt{p}-\sqrt{q}-\frac{G}{2\sqrt{pq}}-a_1\right)$$

উদাহরণ ঃ অয়লারের পদ্ধতিতে $x^4-3x^3+5x^2-5x+2=0$ সমীকরণটির সমাধান করুন।

সমাধান ঃ এখানে $x^4-3x^3+5x^2-5x+2=0$ .... (1)

$x=\frac{1}{4}(z+3)$ বসালে (1)-এর নির্দিষ্ট আকার হবে

$z^4+26z^2-56z+29=0$ .... (2)

ধরা যাক, $z=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$

$\therefore \quad z^4-2(p+q+r)\cdot z^2-8\sqrt{pqr}\cdot z+(p+q+r)^2-4(pq+qr+rp)=0$ .... (3)

(2) এবং (3) থেকে,

$p+q+r=-13,\qquad pqr=49\ (\because \sqrt{pqr}=7)$

$pq+qr+rp=35$

$\therefore$ p, q, r বীজের সমীকরণ,

$t^3+13t^2+35t-49=0$ .... (4)

(4)-এর বীজগুলি 1, – 7, –7

$\therefore\ p = 1, q = -7, r = -7$

$\therefore\ \sqrt{p} = \pm 1,\ \sqrt{q} = \pm i\sqrt{7},\ \sqrt{r} = \pm i\sqrt{7}$

এখন, $\sqrt{pqr} = 7$ এর সাহায্যে

$$z = -1 + i\sqrt{7} + i\sqrt{7} = -1 + i2\sqrt{7}$$

$$z = -1 - i\sqrt{7} - i\sqrt{7} = -1 - i2\sqrt{7}$$

$$z = 1 + i\sqrt{7} - i\sqrt{7} = 1$$

$$z = 1 - i\sqrt{7} + i\sqrt{7} = 1$$

$\therefore$ (1)-এর বীজগুলি,

$$\frac{1}{4}\left(-1 + i2\sqrt{7} + 3\right),\ \frac{1}{4}\left(-1 - i2\sqrt{7} + 3\right),\ \frac{1}{4}(1+3),\ \frac{1}{4}(1+3)$$

বা, $\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{7}\right),\ \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{7}\right), 1, 1$

উদাহরণ ঃ অয়লার-এর পদ্ধতিতে $x^4 - 2x^2 + 8x - 3 = 0$ সমীকরণটির সমাধান করুন।

সমাধান ঃ $x^4 - 2x^2 + 8x - 3 = 0$ .... (1)

এটা চতুর্ঘাতের প্রমাণ আকারে দেওয়া আছে।

ধরা যাক, $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$

$\therefore\ x^4 - 2(p+q+r)x^2 - 8\sqrt{pqr}\cdot x + (p+q+r)^2 - 4(pq+qr+rp) = 0$ .... (2)

(1) এবং (2) তুলনা করলে পাই।

$$p + q + r = 1,\ \sqrt{pqr} = -1,\qquad (P + q + r)^2 - 4(pq + qr + rp) = -3$$

বা, $p + q + r = 1,\ pqr = 1$ এবং $pq + qr + rp = 1$

p, q, r বীজ-এর সমীকরণটি

$$t^3 - t^2 + t - 1 = 0 \text{ .... } (3)$$

(3)-এর বীজগুলি যথাক্রমে $1, \pm i$.

অর্থাৎ, $p = 1,\quad q = i,$

$\sqrt{p}=\pm 1$, $\sqrt{q}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\sqrt{r}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

$\sqrt{pqr}=-1$ এর সাহায্যে,

$$x=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)=-1+\sqrt{2}$$

$$x=-1-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)=-1-\sqrt{2}$$

$$x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)=1+\sqrt{2}i$$

$$x=1-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)=1-\sqrt{2}i$$

$\therefore$ (1) এর বীজগুলি $-1\pm\sqrt{2}$, $1\pm\sqrt{2}i$

5.9.2. দেকার্ত (Descartes) এর সমাধান পদ্ধতি ঃ

দেকার্তের পদ্ধতিতে যে কোনও চতুর্ঘাতের সমীকরণকে প্রথমেই নির্দিষ্ট আকারে রূপান্তরিত করা হয়। এখন চতুর্ঘাতের নির্দিষ্ট আকার হলো—

$$x^4 + 6Hx^2 + 4Gx + + a_0^2I - 3H^2 = 0 \text{ .... } (1)$$

ধরা যাক, $x^2 + 6Hx^2 + 4Gx + a_0^2I - 3H^2 = (x^2 + \lambda x + \mu)(x^2 - \lambda x + \nu)$

উভয় দিকে, x-এর বিভিন্ন ঘাত-এর সহগ তুলনা করলে পাই

$$\mu+\nu-\lambda^2=+6H \text{ .... (i)}$$

$$\lambda(\nu-\mu)=4G \text{ .... (ii)}$$

এবং $\mu\nu=a_0^2I-3H^2$ .... (iii)

(i) এবং (ii) থেকে,

$$\mu+\nu=\lambda^2+6H, \qquad \mu-\nu=\frac{4G}{\lambda}$$

$$\therefore \quad 2\mu=6H+\lambda^2-\frac{4G}{\lambda}, \qquad 2\nu=6H+\lambda^2+\frac{4G}{\lambda}$$

$$\therefore \quad 4\mu\nu = \left(6H+\lambda^2\right)^2 - \frac{16G^2}{\lambda^2}$$

বা, $$4\left(a_0^2 I - 3H^2\right) = \left(6H+\lambda^2\right)^2 - \frac{16G^2}{\lambda^2}$$

বা, $$\lambda^6 + 12H\lambda^4 + 4\left(12H^2 - a_0^2 I\right)\lambda^2 - 16G^2 = 0$$

এখন $\lambda^2 = t$ বসালে, এটি নীচে উল্লিখিত ত্রিঘাত সমীকরণে রূপান্তরিত হবে

$$\therefore \quad t^3 + 12Ht^2 + 4\,(12H^2 - a_0^2 I)\,t - 16G^2 = 0$$

এই ত্রিঘাত সমীকণটির সমাধান করে λ-র মান নির্ণয় সম্ভব এবং তখন μ , ν-এর ও মান বার করা যায়। λ, μ, ν জানা হলে, দ্বিঘাত উৎপাদকদ্বয় সমাধান করে (1)-এর চারটি বীজ পাওয়া যাবে।

উদাহরণ ঃ দেকার্তের সমাধানের পদ্ধতি অনুসরণে সমাধান করুন $x^4 + 32x - 60 = 0$

সমাধান ঃ ধরা যাক, $x^4 + 32x - 60 = (x^2 + \lambda x + \mu)\,(x^2 - \lambda x + \nu)$

$$= x^4 + (\mu + \nu - \lambda^2)\,x^2 + \lambda(\nu - \mu)\,x + \mu\nu \;\ldots\ldots\; \text{(i)}$$

$$\therefore\ \mu + \nu - \lambda^2 = 0 \;\ldots\; \text{(i)},\ \lambda(\nu - \mu) = 32 \;\ldots\; \text{(ii)}\ \ \mu\nu = -60 \;\ldots\; \text{(iii)}$$

(i) এবং (ii) থেকে, $\mu + \nu = \lambda^2,\ \ \nu - \mu = \dfrac{32}{\lambda}$

$$\therefore \quad 2\nu = \lambda^2 + \frac{32}{\lambda} \text{ এবং } 2\mu = \lambda^2 - \frac{32}{\lambda}$$

$$\therefore \quad 4\mu\nu = \lambda^4 - \frac{32^2}{\lambda^2}$$

$$-240 = \lambda^4 - \frac{32^2}{\lambda^2} \text{ ((iii)-এর ব্যবহারে)}$$

বা, $$\lambda^6 + 240\lambda^2 - 1024 = 0 \;\ldots\ldots\; \text{(iv)}$$

$\lambda^2 = 4$ দ্বারা (iv) সিদ্ধ হয়।

$$\therefore \quad \lambda = \pm 2$$

যদি $\lambda = 2$, তখন

$$\therefore \quad \mu + \nu = 4 \text{ এবং } \nu - \mu = 16$$

$$\therefore \quad \mu = -6,\ \nu = 10$$

$\therefore$ (1) হতে $x^4 + 32x - 60 = (x^2 + 2x - 6)(x^2 - 2x + 10)$

$\therefore$ $x^4 + 32x - 60 = 0$ এর বীজগুলি, $x^2 + 2x - 6 = 0$ এবং

$x^2 - 2x + 10 = 0$ এর বীজ হবে।

$x^2 + 2x - 6 = 0$ এবং $x^2 - 2x + 10 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণদ্বয়ের বীজগুলি যথাক্রমে $-1 \pm \sqrt{7}$ এবং $1 \pm 3i$.

$\therefore$ $x^4 + 32x - 60 = 0$ এর বীজগুলি $-1 \pm \sqrt{7}$, $1 \pm 3i$.

5.9.3 ফেরারি (Ferrari)-র পদ্ধতি ঃ

চতুর্ঘাত সমীকরণ, $a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$ .... (1)

ধরুন, $a_0(a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4)$

$= (a_0x^2 + 2a_1x + \lambda)^2 - (2mx + n)^2$ .... (2)

$= a_0^2x^4 + 4a_1^2x^2 + \lambda^2 + 4a_0a_1x^3 + 2a_0\lambda x^2 + 4a_1\lambda x + \lambda^2 - 4m^2x^2 - 4mnx - n^2$

$= a_0^2x^4 + 4a_0a_1x^3 + (4a_1^2 + 2a_0\lambda - 4m^2)x^2 + (4a_1\lambda - 4mn)x + (\lambda^2 - n^2)$

সহগের তুলনা করে,

$\therefore$ $4a_1^2 + 2a_0\lambda - 4m^2 = 6a_2a_0$

$$\therefore \quad m^2 = \frac{1}{2}\left[2a_1^2 + a_0\lambda - 3a_2a_0\right] \text{ .... (i)}$$

$4a_1\lambda - 4mn = 4a_3a_0$ $\quad \therefore mn = a_1\lambda - a_0a_3$ .... (ii)

এবং $\lambda^2 - n^2 = a_0a_4$. $\quad \therefore n^2 = \lambda^2 - a_0a_4$ .... (iii)

(i), (ii) এবং (iii) থেকে,

$$(a_1\lambda - a_0a_3)^2 = \frac{1}{2}(2a_1^2 + a_0\lambda - 3a_2a_0)(\lambda^2 - a_0a_4) \text{ .... (3)}$$

এটি λ-র একটি ত্রিঘাত সমীকরণ।

λ-র একটি বাস্তব বীজ (2)-কে সিদ্ধ করবে।

এখন (3)-এর এই বাস্তব মানের সাহায্যে m^2, n^2 এবং mn পাওয়া যাবে। যে সমস্ত m, n-এর মান mn-কে সিদ্ধ করবে, সেই m, n এর মানগুলি (2)-এ বসালে

$a_0x^2 + (2a_1 + 2m)x + (\lambda + n)$ এবং $a_0x^2 + 2(a_1 - m)x + (\lambda - n)$ দুটি দ্বিঘাত উৎপাদক পাওয়া যায়।

এখন, $a_0x^2 + 2(a_1 + m)x + (\lambda + n) = 0$ এবং $a_0x^2 + 2(a_1 - m)x + (\lambda - n) = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণদ্বয়ের বীজগুলিই হবে (1) এর বীজ। ∴ (1)-এর বীজগুলি,

$$\frac{-(a_1+m)\pm\sqrt{(a_1+m)^2-a_0(\lambda+n)}}{a_0},\ \frac{-(a_1-m)\pm\sqrt{(a_1-m)^2-a_0(\lambda-n)}}{a_0}$$

উদাহরণ ঃ ফেরারির পদ্ধতিতে সমাধান করুন ঃ

$$x^4 - 4x^3 + 5x + 2 = 0$$

সমাধান ঃ $x^4 - 4x^3 + 5x + 2 = 0$ .... (1)

এখানে $a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_2 = 0,\ a_3 = \frac{5}{4},\ a_4 = 2.$

এটিকে সাধারণ আকারের সঙ্গে তুলনা করে পাই,

ধরা যাক, $x^4 - 4x^3 + 5x + 2 = (x^2 - 2x + \lambda)^2 - (mx + n)^2$

$$= x^4 + 4x^2 + \lambda^2 - 4x^3 + 2\lambda x^2 - 4\lambda x - m^2x^2 - 2mnx - n^2$$

$$= x^4 - 4x^3 + (4 + 2\lambda - m^2)x^2 - 2(2\lambda + mn)x + (\lambda^2 - n^2)$$

$\therefore\ 4+2\lambda-m^2=0$ $\qquad\therefore\ m^2=4+2\lambda$ .... (i)

$-2(2\lambda+mn)=5$ $\qquad\therefore\ mn=-2\lambda-\frac{5}{2}$

$\therefore\ 2mn=-4\lambda-5$ .... (ii)

$\lambda^2 - n^2 = 2$ $\qquad\therefore\ n^2=\lambda^2-2$ .... (iii)

(i), (ii), (iii) থেকে

$$4(4+2\lambda)(\lambda^2-2)=16\lambda^2+25+40\lambda$$

$$\therefore\ 4(4\lambda^2-8+2\lambda^3-4\lambda)=16\lambda^2+25+40\lambda$$

$$8\lambda^3-56\lambda-57=0 \text{ .... (2)}$$

সমীকরণটি $\lambda=-\frac{3}{2}$ দ্বারা সিদ্ধ হয়,

(2) এর একটি বীজ $-\frac{3}{2}$

$\therefore$ (i), (ii), (iii) থেকে, $m^2 = 4 - 3 = 1$

$$mn = +3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}, \quad n^2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ m এবং n একই চিহ্নযুক্ত হবে।

ধনাত্মক চিহ্ন ধরে, $m = 1, \; n = \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad x^4 - 4x^3 + 5x + 2 = \left(x^2 - 2x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= (x^2 - x - 1)(x^2 - 3x - 2).$$

$x^2 - x - 1 = 0$ এবং $x^2 - 3x - 2 = 0$ এর বীজগুলি

যথাক্রমে, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ এবং $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

$\therefore$ (1) এর বীজগুলি $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \; \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

5.10 দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ সমূহ

উদাহরণ 1. $16x^4 - 64x^3 + 56x^2 + 16x - 15 = 0$ এর বীজগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকলে বীজগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরা যাক বীজগুলি $\alpha - 3\beta, \alpha - \beta, \alpha + \beta, \alpha + 3\beta$

$\therefore 4\alpha = 4 \;\; \therefore \alpha = 1$ .... (i)

$$(\alpha - 3\beta)(\alpha - \beta) + (\alpha - 3\beta)(\alpha + \beta) + (\alpha - 3\beta)(\alpha + 3\beta)$$

$$+ (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)(\alpha + 3\beta) + (\alpha + \beta)(\alpha + 3\beta) = \frac{56}{16}$$

$$\therefore \quad 2\alpha(\alpha - 3\beta) + (\alpha^2 - 9\beta^2) + (\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha + 3\beta) \,.\, 2\alpha = \frac{56}{16}$$

$$\therefore \quad 6\alpha^2 - 10\beta^2 = \frac{7}{2}$$

$$10\beta^2 = 6\alpha^2 - \frac{7}{2} = 6 - \frac{7}{2} \quad (\because \alpha = 1)$$

$\therefore \quad \beta^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore \beta = \pm\frac{1}{2}$ .... (ii)

$\beta = \frac{1}{2}$ ধরলে, বীজগুলি হয়

$$1-\frac{3}{2},\ 1-\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{3}{2}$$

বা, $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$

$\beta = -\frac{1}{2}$ ধরলে, বীজগুলি হয়

$$1+\frac{3}{2},\ 1+\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{3}{2}$$

বা, $\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

$\therefore 16x^4 - 64x^3 + 56x^2 + 16x - 15 = 0$ এর বীজগুলি,

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$$

উদাহরণ 2. যদি $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$ সমীকরণের দুটি বীজের যোগফল শূন্য হলে, বীজগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরা যাক বীজগুলি $\alpha, -\alpha, \beta, \gamma$

$\therefore \beta + \gamma = 2$ .... (i)

$-\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha\beta - \alpha\gamma + \beta\gamma = 4$

বা, $\beta\gamma - \alpha^2 = 4$ .... (ii)

$-\alpha^2\beta - \alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma = -6$

বা, $\alpha^2(\beta + \gamma) = 6$ .... (iii)

$-\alpha^2\beta\gamma = -21$

বা, $\alpha^2\beta\gamma = 21$ .... (iv)

(i) এবং (iii) থেকে, $\alpha^2 = 3$ বা, $\alpha = \pm 3$

(iv) থেকে $\beta\gamma = 7$

β, γ বীজ-এর সমীকরণ হবে

$$y^2 - 2y + 7 = 0 \quad \text{বা,} \quad y = \frac{2 \pm \sqrt{4-28}}{2}$$

$$= 1 \pm i\sqrt{6}$$

$\therefore \quad \beta = 1 + i\sqrt{6}\,,\ \gamma = 1 - i\sqrt{6}$

$\therefore \quad x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$-এর বীজগুলি,

$3, -3,\ 1+i\sqrt{6}\,,\ 1-i\sqrt{6}$

উদাহরণ 3. যদি $3x^4 - 40x^3 + 130x^2 - 120x + 27 = 0$-এর বীজগুলি গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে, তবে বীজগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরা যাক বীজগুলি $\frac{\alpha}{\beta^3}, \frac{\alpha}{\beta}, \alpha\beta, \alpha\beta^3$

$$\therefore \quad \alpha^2\left(\frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{\beta^2} + 2 + \beta^2 + \beta^4\right) = \frac{130}{3} \quad \text{............ (i)}$$

এবং $\alpha^4 = 9$ .... (ii)

(ii) থেকে $\alpha = \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}i$

এখন $\alpha = \pm\sqrt{3}$ ধরলে

(i) হতে পাই,

$$3\left\{\left(\frac{1}{\beta^2} + \beta^2\right)^2 + \left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right)\right\} = \frac{130}{3}$$

বা, $3\left(t^2 + t\right) = \frac{130}{3}$ যেখানে, $t = \beta^2 + \frac{1}{\beta^2}$

$\therefore \quad 9t^2 + 96 - 130 = 0$

$\therefore \quad t = \dfrac{-9 \pm 69}{18} = \dfrac{10}{3}, -\dfrac{13}{3}$

যেহেতু $t = \beta^2 + \dfrac{1}{\beta^2}$ ঋণাত্মক হতে পারে না।

$t = \dfrac{10}{3}$ ধরে

$\beta^2 + \dfrac{1}{\beta^2} = \dfrac{10}{3}$; $\qquad \therefore \quad \beta + \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ (ধনাত্মক ধরে)

এবং $\beta - \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (ধনাত্মক ধরে)

$\therefore \quad \beta = \sqrt{3}$

সুতরাং $3x^4 - 40x^3 + 130x^2 - 120x + 27 = 0$ এর বীজগুলি হবে $\dfrac{1}{3}$, 1, 3, 9

$\alpha = \pm\sqrt{3}i$ ধরলে t -এর বীজগুলি কাল্পনিক হবে। তাই α-এর ঐ মান দুটি আমরা অবজ্ঞা করলাম।

উদাহরণ 4. অয়লারের পদ্ধতি অনুসরণে $x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 3 = 0$ সমীকরণটির সমাধান করুন।

সমাধান ঃ এখানে $x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 3 = 0$ .... (1)

(1)-এ $x = y + h$ বসান,

$(y + h)^4 - (y + h)^3 + 2(y + h)^2 + (y + h) + 3 = 0$

বা, $(y^4 + 4hy^3 + 6h^2y^2 + 4h^3y + h^4) - (y^3 + 3hy^2 + 3h^2y + h^3)$

$+ 2(y^2 + 2hy + h^2) + (y + h) + 3 = 0$

বা, $y^4 + (4h - 1)y^3 + (6h^2 - 3h + 2)y^2 + (4h^3 - 3h^2 + 4h + 1)y$

$+ (h^4 - h^3 + 2h^2 + h + 3) = 0$

y^3-এর সহগ শূন্য করার জন্য ধরলাম, $h = \dfrac{1}{4}$

সুতরাং রূপান্তরিত সমীকরণটি হলো

$\therefore \quad y^4 + \dfrac{26}{16}y^2 + \dfrac{30}{16}y + \dfrac{861}{256} = 0$ .... (2)

আবার (2)-এ $y = \frac{z}{4}$ বসালে পাই

$$\frac{z^4}{256}+\frac{26z^2}{256}+\frac{30z}{64}+\frac{861}{256}=0$$

বা, $z^4+26z^2+120z+861=0$ .... (3)

ধরা যাক, $z=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ .... (4)

$$z^4-2(p+q+r)z^2-8\sqrt{pqr}\,.z+(p+q+r)^2-4(pq+qr+rp)=0 \text{ .... (5)}$$

(3) এবং (5) থেকে

$p+q+r=-13$, $\sqrt{pqr}=-15$ বা, $pqr = 225$

এবং, $(p + q + r)^2 - 4(pq + qr + rp) = 861$

$169 - 4 (pq + qr + rp) = 861$

বা, $pq + qr + rp = -173.$

এখন p, q, r বীজের সমীকরণটি

$t^3 + 13t^2 - 173t - 225 = 0$ .... (6)

$t = 9$ বসালে (6) নং সিদ্ধ হয়। $\therefore$ (6) এর একটি

বীজ 9 বা, $t - 9$, $t^3 + 13t^2 - 173t - 225$

এর একটি উৎপাদক

t = 9	1	13	–173	–225
		9	198	225
	1	22	25	0

$\therefore$ (6) -এর অপর বীজগুলি পাওয়া যাবে,

$t^2 + 22t + 25 = 0$ সমীকরণ থেকে

$\therefore$ (6)-এর অপর বীজগুলি, $t=\frac{-22\pm\sqrt{484-100}}{2}$

$$=-11\pm4\sqrt{6}$$

ধরুন, $p = 9, q = -11 + 4\sqrt{6}, r = -11 - 4\sqrt{6}$

$$\therefore \sqrt{p} = \pm 3,\ \sqrt{q} = \pm i\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}$$

$$= \pm i\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$$

$$\sqrt{r} = \pm i\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \pm i\left(2\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$$

$$\because \sqrt{pqr} = -15 \qquad \therefore \sqrt{r} = -\frac{15}{\sqrt{pq}}$$

$\therefore \sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{r}$ এর দলগুলি হবে,

$\sqrt{p} = 3,\ \sqrt{q} = i\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right),\ \sqrt{r} = i\left(2\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$ .... (i)

$\sqrt{p} = 3,\ \sqrt{q} = -i\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right),\ \sqrt{r} = -i\left(2\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$ .... (ii)

$\sqrt{p} = -3,\ \sqrt{q} = -i\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right),\ \sqrt{r} = i\left(2\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$ .... (iii)

$\sqrt{p} = -3,\ \sqrt{q} = i\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right),\ \sqrt{r} = -i\left(2\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$ .... (iv)

$$\therefore \quad z = 3 + i4\sqrt{2},\ 3 - i4\sqrt{2},\ -3 + i2\sqrt{3},\ -3 - i2\sqrt{3}$$

$$\because y = \frac{z}{4}$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{4}\left(3 \pm i4\sqrt{2}\right),\ \frac{1}{4}\left(-3 \pm i2\sqrt{3}\right)$$

এবং $x = y + \frac{1}{4}$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{4}\left(3 \pm i4\sqrt{2} + 1\right),\ \frac{1}{4}\left(-3 \pm i2\sqrt{3} + 1\right)$$

$$= 1 \pm i\sqrt{2},\quad \frac{1}{2}\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right)$$

$\therefore$ (1)-এর বীজগুলি, $1 \pm i\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right)$

উদাহরণ 5. দেকার্তের নিয়মে সমাধান করুন ঃ

$$x^4 - 5x^2 - 6x - 5 = 0$$

সমাধান ঃ ধরা যাক, $x^4 - 5x^2 - 6x - 5 = (x^2 + \lambda x + \mu)(x^2 - \lambda x + \nu)$ .... (1)

$\therefore \quad \mu + \nu - \lambda^2 = -5$ .... (i)

$\lambda(\nu - \mu) = -6$ .... (ii)

$\mu\nu = -5$ .... (iii)

(i) এবং (ii) যোগ করে, $\quad 2\nu = \lambda^2 - 5 - \dfrac{6}{\lambda}$

(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে, $\quad 2\mu = \lambda^2 - 5 + \dfrac{6}{p}$ .... (iv)

(iii) এবং (iv) থেকে,

$$\left(\lambda^2 - 5 - \frac{6}{\lambda}\right)\left(\lambda^2 - 5 + \frac{6}{\lambda}\right) = -20$$

বা, $\left(\lambda^2 - 5\right)^2 - \dfrac{36}{\lambda^2} = -20$

বা, $\lambda^4 - 10\lambda^2 + 25 - \dfrac{36}{\lambda^2} = -20$

বা, $\lambda^6 - 10\lambda^4 + 45\lambda^2 - 36 = 0$

$\lambda^2 = t$ ধরলে,

$t^3 - 10t^2 + 45t - 36 = 0$ .... (v)

$t = 1$, (v) কে সিদ্ধ করে। $\therefore$ (v)-এর একটি বীজ।

$\therefore \; \lambda^2 = 1$ থেকে, $\lambda = \pm 1$

$\lambda = 1$ ধরে, (iv) থেকে, $\mu = 1, \;\; \nu = -5$

$\therefore$ (1) থেকে, $x^4 - 5x^2 - 6x - 5 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x - 5)$ .... (2)

$\therefore \; x^2 + x + 1 = 0$ এবং $x^2 - x - 5 = 0$ এর বীজগুলিই (1)-এর বীজ।

$\therefore$ (1)-এর বীজগুলি

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \;\; \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$\lambda = -1$ ধরে, (iv) থেকে, $\mu = -5, \;\; \nu = 1$

$\therefore$ (1) থেকে

$x^4 - 5x^2 - 6x - 5 = (x^2 - x - 5)(x^2 + x + 1)$

এটা (2)

$\therefore$ নির্ণেয় বীজগুলি

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \;\; \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

উদাহরণ 6. ফেরারি-র পদ্ধতিতে সমাধান করুন ঃ

$$x^4 - 9x^3 + 28x^2 - 38x + 24 = 0$$

সমাধান ঃ $x^4 - 9x^3 + 28x^2 - 38x + 24 = 0$ .... (1)

ধরা যাক, $x^4 - 9x^3 + 28x^2 - 38x + 24 = \left(x^2 - \frac{9}{2}x + \lambda\right)^2 - (2mx + n)^2$ .... (2)

উভয়পক্ষের সহগ তুলনা করে পাই,

$2\lambda + \frac{81}{4} - 4m^2 = 28$ বা, $4m^2 = 2\lambda + \frac{81}{4} - 28$

$= 2\lambda - \frac{31}{4}$

বা, $m^2 = \frac{\lambda}{2} - \frac{31}{16}$ .... (i)

$-9\lambda - 4mn = -38$

বা, $mn = \frac{38}{4} - \frac{9}{4}\lambda$ .... (ii)

$\lambda^2 - n^2 = 24$

বা, $n^2 = \lambda^2 - 24$ .... (iii)

(i), (ii), (iii) থেকে,

$\left(2\lambda - \frac{31}{4}\right)(4\lambda^2 - 96) = (38 - 9\lambda)^2$ .... (iv)

$\lambda = 7$, (iv)-কে সিদ্ধ করে।

$\lambda = 7$ (i), (ii) এবং (iii) তে বসিয়ে,

$m = \pm\frac{5}{4}$, $n = \pm 5$, $mn = -\frac{25}{4}$

$\because$ $mn = -\frac{25}{4}$

$\therefore$ হয়, $m = \frac{5}{4}$ এবং $n = -5$

নতুবা $m = -\frac{5}{4}$ এবং $n = 5$.

এখন, $m=\frac{5}{4}$ এবং $n=-5$ হলে,

$x^4-9x^3+28x^2-38x+24$

$$=\left(x^2-\frac{9}{2}x+7\right)^2-\left(\frac{5}{2}x-5\right)^2$$

$$=\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2-7x+12\right)\ \ldots\ldots\ (3)$$

$\therefore$ (1)-এর বীজগুলিই $x^2-2x+2=0$ এবং

$x^2-7x+12=0$-এর বীজ।

$\therefore$ (1) এর বীজগুলি $\dfrac{2\pm i2}{2}$, 4, 3.

বা, $1\pm i$, 4 এবং 3

$m=-\frac{5}{4}$ এবং $n=5$ হলে

$x^4-9x^3+28x^2-38x+24$

$$=\left(x^2-\frac{9}{2}x+7\right)^2-\left(-\frac{5}{2}x+5\right)^2$$

$$=\left(x^2-7x+12\right)\left(x^2-2x+2\right)$$ এটা (3),

$\therefore$ (1)-এর বীজগুলি $1\pm i$, 4 এবং 3.

অনুশীলনী – 1

1. যদি $x^4+2x^3-21x^2-22x+40=0$ এর বীজগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকে তবে, বীজগুলি নির্ণয় করুন।
2. যদি $x^4+15x^3+70x^2+120x+64=0$ এর বীজগুলি গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে তবে বীজগুলি নির্ণয় করুন।
3. অয়লারের পদ্ধতিতে সমাধান করুন ঃ
   $x^4-x^3+2x^2+x+3=0$
4. দেকার্তের নিয়মে সমাধান করুন ঃ
   $x^4-6x^2+16x-15=0$
5. ফেরারি-র নিয়মে সমাধান করুন ঃ
   $x^4-18x^2+32x-15=0$

5.11 সারাংশ

1. ত্রিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার

   $a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$; .... (A) $a_0 \neq 0$

   ত্রিঘাত সমীকরণের প্রমাণ আকার

   $z^3 + 3Hz + G = 0$

   যেখানে, $H = a_0a_2 - a_1^2$ এবং $G = a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3$

2. ত্রিঘাত সমীকরণের বীজের প্রকৃতি নির্ণয় ঃ

   (i) $G^2 + 4H^3 > 0$ হলে, (A) এর দুটি কাল্পননিক বীজ থাকবে।

   (ii) $G^2 + 4H^3 < 0$ এবং $H < 0$ হলে, (A) এর বীজগুলি বাস্তব এবং আলাদা।

   (iii) $G^2 + 4H^3 = 0$ কিন্তু $H \neq 0$ হলে, (A) এর যে কোন দু'টি বীজ সমান হবে।

   (iv) $G^2 + 4H^3 = 0$ এবং $H = 0$ হলে, (A) এর বীজ তিনটি সমান হবে।

3. কার্ডান পদ্ধতি তে ত্রিঘাত সমীকরণ-এর বীজ নির্ণয়।

4. চতুর্ঘাত সমীকরণ-এর সাধারণ আকার

   $a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$, ... (B) $a_0 \neq 0$

   চতুর্ঘাত সমীকরণের প্রমাণ আকার

   $z^4 + 6Hz^2 + 4Gz + a_0^2I - 3H^2 = 0$

   যেখানে, $H = a_0a_2 - a_1^2$, $G = a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3$

   $I = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2$

5. অয়লারের চতুর্ঘাত (প্রমাণ আকার) সমীকরণের সমাধান পদ্ধতি।

6. দেকার্তের সমাধান পদ্ধতি।

7. ফেরারির সমাধান পদ্ধতি।

5.12 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$-এর বীজগুলি নির্ণয় করুন, যদি দু'টি বীজের যোগফল শূন্য হয়।

2. যদি $3x^3 - 22x^2 + 48x - 32 = 0$ সমীকরণটির বীজগুলি বিপরীত প্রগতিতে থাকে, তবে বীজগুলি নির্ণয় করুন।

3. যদি $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$-এর বীজগুলি গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে, বীজগুলি নির্ণয় করুন।

4. কার্ডন পদ্ধতিতে সমাধান করুন ঃ

   (i) $x^3 - 30x + 133 = 0$

   (ii) $x^3 - 3x^2 + 12x + 16 = 0$

5. $x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40 = 0$-এর বীজগুলি সমান্তর প্রগতিতে আছে। বীজগুলি নির্ণয় করুন।

6. $3x^4 - 40x^3 + 130x^2 - 120x + 27 = 0$ -এর বীজগুলি গুণোত্তর প্রগতিতে আছে। বীজগুলি নির্ণয় করুন।

7. অয়লারের নিয়মে সমাধান করুন ঃ

(i) $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 5x + 2 = 0$

(ii) $x^4 - 4x^2 - 3x + 6 = 0$

8. দেকার্তের নিয়মে সমাধান করুন ঃ

(i) $x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 6x + 9 = 0$

(ii) $x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 3 = 0$

9. ফেরারি-র নিয়মে সমাধান করুন ঃ

(i) $x^4 - 18x^2 + 32x - 15 = 0$

(ii) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3 = 0$

5.13 উত্তরমালা

অনুশীলনী – 1

(1) $-5, -2, 1, 4$ (2) $-1, -2, -4, -8$ (3) $1 \pm i\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}$

(4) $-1 \pm \sqrt{6}$, $1 \pm i\sqrt{2}$ (5) $-5, 1, 1, 3$

সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

(1) $2, -2, 5$ (2) $4, 2, \frac{4}{3}$ (3) $\frac{2}{3}, 2, 6$

(4) (i) $-7, \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}i$ (ii) $-1, 2(1 \pm \sqrt{3}i)$ (5) $-5, -2, 1, 4$

(6) $\frac{1}{3}, 1, 3, 9$ (7) (i) $1, 1, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{7}i)$ (ii) $1, 2, \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{3}i)$

(8) (i) $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{13}), \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{21})$ (ii) $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i), 1 \pm \sqrt{2}i$

(9) (i) $1, 1, 3, -5$ (ii) $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{13}), \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$

একক 6 ☐ অন্যোন্য বিশেষ সমীকরণ

গঠন

6.1 প্রস্তাবনা

দ্বিঘাত (quadratic), ত্রিঘাত (cubic) এবং চতুর্থঘাত (biquadratic) বহুপদীয় সমীকরণের (polynomial/algebraic equation) বীজ (root) নির্ণয় করার সাধারণ পদ্ধতি সম্বন্ধে আপনারা পড়েছেন ; যেমন— ত্রিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে কার্ডানের (Cardan's) পদ্ধতি এবং চতুর্থঘাতের ক্ষেত্রে ফেরারির (Ferrari's) পদ্ধতি। তবে পঞ্চম বা উচ্চতর ঘাতসম্পন্ন বহুপদীয় সমীকরণের সমাধান নির্ণয়ের কোনো সাধারণ বিশ্লেষণমূলক পদ্ধতি নেই। তাহলেও কয়েকটি বিশেষ সমীকরণ আছে, যেক্ষেত্রে পঞ্চম বা উচ্চতর হলেও তাদের বীজ সম্বন্ধে সাধারণ অনুসন্ধান সম্ভব। এই প্রকারের দুটি সমীকরণ—(i) অন্যোন্য সমীকরণ ও (ii) দ্বিপদী সমীকরণ সম্বন্ধে এখানে আলোচনা করা হল।

6.2 উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টির উদ্দেশ্য হল—

- অন্যোন্য ও দ্বিপদী সমীকরণের সংজ্ঞা দেওয়া।
- এই সকল সমীকরণের বিভিন্ন ধর্মের অনুসন্ধান।
- এই সব ধর্ম কাজে লাগিয়ে উপযুক্ত সমীকরণের বীজ নির্ণয়।

6.3 অন্যোন্য সমীকরণ (Reciprocal Equation)

সংজ্ঞা ঃ $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots\dots\dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \dots\dots (1)\ (a_0 \neq 0)$

এই সমীকরণের একটি বীজ α হলে যদি $\frac{1}{\alpha}$-ও এই সমীকরণের অপর একটি বীজ হয় তবে এই সমীকরণটিকে অন্যোন্য সমীকরণ (Reciprocal Equation) বলা হবে।

এখানে $a_n \neq 0$ ধরা হয়েছে যার ফলে $\alpha \neq 0$.

মন্তব্য 1. যদি $a_n = 0$, তবে সমীকরণ (1)-এর বাঁদিকে বহুপদীয় রাশিমালা থেকে x উৎপাদকটিকে আলাদা করে নিয়ে $a_0x^{n-1} + a_1x^{x-2} + \dots\dots\dots + a_{n-1} = 0$ এই সমীকরণটি বিচার করতে হবে।

মন্তব্য 2. যদি অন্যোন্য সমীকরণে $y = \frac{1}{x}$ এই রূপান্তরটি প্রয়োগ করা হয়, তবে সমীকরণটির রূপ বা চেহারা অপরিবর্তিত থাকে, অর্থাৎ সমীকরণ (1)-এর n সংখ্যক বীজ যদি $\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots, \alpha_n$ হয়, এবং সমীকরণ (1) অন্যোন্য হয়, তবে, যে n-ঘাত সম্পন্ন সমীকরণের বীজ $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots\dots, \frac{1}{\alpha_n}$, সেটিও সমীকরণ (1)-ই হবে।

উদাহরণ 1. $6x^5 + \frac{15}{2}x^4 + 3x^3 + 3x^2 + \frac{15}{2}x + 6 = 0$

সমীকরণটিতে $y = \frac{1}{x}$ এই রূপান্তর করলে পাই,

$$\frac{6}{y^5} + \frac{15}{2y^4} + \frac{3}{y^3} + \frac{3}{y^2} + \frac{15}{2y} + 6 = 0$$

বা, $6 + \frac{15}{2}y + 3y^2 + 3y^3 + \frac{15}{2}y^4 + 6y^5 = 0$

অর্থাৎ প্রদত্ত সমীকরণটিই ফিরে পাই।

এটি একটি অন্যোন্য সমীকরণ।

6.3.1 অন্যোন্য সমীকরণের শ্রেণীবিভাজন

ধরা যাক $f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \dots\dots (1)$ একটি অন্যোন্য সমীকরণ। অতএব সমীকরণ (1)-এ x-এর পরিবর্তে $\frac{1}{x}$ বসালে এটির রূপ অপরিবর্তিত থাকবে।

এখন $f\left(\frac{1}{x}\right) \equiv \frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$

এবং $x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$

কিন্তু (1) অন্যোন্য হওয়াতে, $f(x) = 0$ এবং $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

অর্থাৎ (1) এবং (2) উভয়েই একই সমীকরণ।

$\therefore$ আমরা লিখতে পারি,

$k(a_0 + a_1x + \dots\dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1}x + a_n \dots\dots\dots (3)$

যেখানে k একটি ধ্রুবক।

(3) একটি অভেদ হওয়াতে, x-এর বিভিন্ন ঘাতের সহগগুলি উভয়পক্ষে সমান হবে।

$\therefore \quad a_0 = ka_n, a_1 = ka_{n-1}, \dots\dots\dots, a_n = ka_0 \dots\dots\dots\dots (4)$

$\therefore \quad k^2 = 1$

বা, $k = +1$ বা, $k = -1 \qquad \dots\dots\dots\dots (5)$

$k = 1$ হলে অন্যোন্য সমীকরণটিকে বলা হবে প্রথম শ্রেণীর (**first type**) অন্যোন্য সমীকরণ, এবং $k = -1$ হলে সমীকরণটি দ্বিতীয় শ্রেণীর অন্যোন্য সমীকরণ (**second type**)।

অতএব প্রথম শ্রেণীর অন্যোন্য সমীকরণের ক্ষেত্রে,

$a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, \dots\dots\dots\dots$ ইত্যাদি। সমীকরণ (1) প্রথম শ্রেণীর অন্যোন্য হলে, একে লেখা যাবে,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots\dots\dots\dots + a_1x + a_0 = 0$$

অর্থাৎ বাঁদিকে, প্রথম ও শেষ হতে সমদূরত্ব সম্পন্ন পদগুলির সহগগুলির মান সমান, এবং বীজগাণিতিক চিহ্নও এক (**same magnitude and sign**)।

অপরপক্ষে, সমীকরণ (1) যদি দ্বিতীয় শ্রেণীর অন্যোন্য হয়, তবে $k = -1$, এবং $a_0 = -a_n, a_1 = -a_{n-1}$, ………. ইত্যাদি। (1)-এর রূপ এখানে হবে,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots\dots\dots\dots - a_1x - a_0 = 0$$

অর্থাৎ বাঁদিকের প্রথম ও শেষদিক থেকে সমদূরত্ব-সম্পন্ন পদগুলির সহগগুলির মান সমান হলেও, চিহ্ন আলাদা।

উদাহরণ 1. $x^5 - 6x^4 + 18x^3 + 18x^2 - 6x + 1 = 0$, প্রথম শ্রেণীর অন্যোন্য সমীকরণ।

উদাহরণ 2. $x^5 - 6x^4 - 18x^3 + 18x^2 + 6x - 1 = 0$ দ্বিতীয় শ্রেণীর অন্যোন্য সমীকরণ।

উদাহরণ 3. $x^6 - 5x^5 + 9x^4 - 9x^2 + 5x^5 - 1 = 0$ দ্বিতীয় শ্রেণীর অন্যোন্য সমীকরণ।

মন্তব্য 1. একটি দ্বিতীয় শ্রেণীর অন্যোন্য সমীকরণের ঘাত যুগ্ম হলে, যথা $n = 2p$ হলে, তবে $a_p = -a_p$, বা, $a_p = 0$ হবে। অর্থাৎ x^p (মধ্যপদ)-এর সহগ শূন্য হবে। যেমন উপরের উদাহরণ 3.

মন্তব্য 2. অন্যোন্য সমীকরণের একটি বীজ α হলে, $\frac{1}{\alpha}$-ও ঐ সমীকরণটির বীজ হয়। অতএব, সমীকরণের ঘাত অযুগ্ম হলে, একটি বীজ থাকতেই হবে যে নিজেই নিজের অন্যোন্যক (reciprocal) । অর্থাৎ $\alpha = \frac{1}{\alpha}$, বা, $\alpha^2 = 1$, বা, $\alpha = \pm 1$

$\therefore$ অযুগ্ম ঘাতের অন্যোন্য সমীকরণের অতএব একটি বীজ 1 বা -1 হবেই।

$f(x) = 0$ একটি n -ঘাতের প্রথম শ্রেণীর অন্যোন্য সমীকরণ হলে $f(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$ হবে, এবং $f(x) = 0$ দ্বিতীয় শ্রেণীর হলে $f(x) = -x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$ হবে।

প্রমাণ ঃ (i) $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0$ প্রথম শ্রেণীর হলে $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}$ ইত্যাদি।

$$\therefore \quad f(x) = x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots\cdots + \frac{a_n}{x^n}\right)$$

$$= x^n\left\{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots\cdots + a_0\left(\frac{1}{x}\right)^n\right\} = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

(ii) $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots.. + a_n = 0$ দ্বিতীয় শ্রেণীর হলে

$\therefore \quad a_0 = -a_n$, $a_1 = -a_{n-1}$ .... ইত্যাদি।

$$f(x) = x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots\cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right)$$

$$= x^n\left(-a_n - \frac{a_{n-1}}{x} - \frac{a_{n-2}}{x^2} - \cdots\cdots - \frac{a_0}{x^n}\right)$$

$$= -x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$ প্রমাণিত।

$f(x) = 0$ প্রথম শ্রেণীর অযুগ্ম ঘাত বিশিষ্ট অন্যোন্য সমীকরণ হলে অর্থাৎ $f(x) \equiv a_0x^{2m-1} + a_1x^{2m} + \ldots\ldots + a_{2n+1} = 0$ হলে, সমীকরণটি $x = -1$ দ্বারা সিদ্ধ হয়, কারণ $-a_0 + a_1 - a_2 - \ldots\ldots + a_{2m+1} = 0$ আবার সমীকরণটি দ্বিতীয় শ্রেণীর অযুগ্মঘাত বিশিষ্ট হলে $x = 1$ দ্বারা সিদ্ধ হয়, কারণ $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{2n+1} = 0$ । সুতরাং, প্রথম শ্রেণীর অযুগ্ম ঘাত বিশিষ্ট অন্যোন্য সমীকরণের একটি বীজ -1 এবং দ্বিতীয় শ্রেণীর অযুগ্মঘাত বিশিষ্ট অন্যোন্য সমীকরণের একটি বীজ $+1$ হবেই।

6.3.2 অন্যোন্য সমীকরণের আদর্শ রূপ

উপপাদ্য 1. যে কোনো শ্রেণীর অন্যোন্য সমীকরণের বীজগুলি কোন যুগ্মঘাতের প্রথম শ্রেণীর অন্যোন্য সমীকরণের বীজের সাহায্যে জানা যায়।

প্রমাণ ঃ

ক্ষেত্র 1.

ধরা যাক $f(x) = a_0x^{2m+1} + a_1x^{2m} + \ldots\ldots + a_{2m}x + a_{2m+1} = 0 \ldots\ldots (1)$

একটি প্রথম শ্রেণীর অযুগ্মঘাতের অন্যোন্য সমীকরণ। আমরা দেখেছি,

$$x^{2m+1}f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \text{ ।}$$

যেহেতু $a_0 = a_{2m+1}$, $a_1 = a_{2m}$ .... ইত্যাদি,

সুতরাং $f(x) = a_0(x^{2m+1} + 1) + a_1x(x^{2m-1} + 1) + \ldots\ldots + a_mx^m(x + 1)$

$(x + 1), (x^3 + 1), \ldots\ldots, (x^{2m-1} + 1), (x^{2m+1} + 1)$ এই রাশিগুলির প্রতিটিই $(x + 1)$ দ্বারা সম্পূর্ণ বিভাজ্য। অতএব $f(x)$-কে লেখা যায়, $f(x) = (x + 1)\,\phi(x)$, বা, $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{x+1}$

যেখানে $\phi(x)$, 2m ঘাতের বহুপদরাশি।

$$\therefore \quad \phi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}+1}$$

$$\therefore \quad x^{2m}\phi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^{2m+1}f\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x} = \frac{f(x)}{1+x} = \phi(x)$$

$\therefore \quad \phi(x) = 0$ একটি অন্যোন্য সমীকরণ,

কারণ $\phi(x)=0$-এর অশূন্য বীজগুলি, $\phi\left(\frac{1}{x}\right)=0$ এর ও বীজ।

এটি প্রথম শ্রেণীর এবং এর ঘাত যুগ্ম (2m)।

(6.3. 1-এর মন্তব্য 2 অনুসারে)

এখন $f(x) = 0 \Rightarrow (x + 1)\,\phi(x) = 0$, সুতরাং $f(x) = 0$, একটি বীজ -1, অন্যান্য বীজগুলি $\phi(x) = 0$ এর বীজ। উপপাদ্যটি এক্ষেত্রে প্রমাণিত হল।

ক্ষেত্র 2. এবার ধরা যাক সমীকরণ (1) দ্বিতীয় শ্রেণীর এবং এর ঘাত অযুগ্ম।

তাহলে $x^{2m+1} f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$, $n = 2m + 1$ হলে, এখন, যেহেতু $a_0 = -a_{2m+1}$, $a_1 = -a_{2m}$ .... ইত্যাদি,

$$\therefore\ f(x) = a_0(x^{2m+1} - 1) + a_1 x\,(x^{2m-1} - 1) + \ldots\ldots + a_m x^m (x - 1).$$

সুতরাং, $f(x)$, $(x - 1)$ দ্বারা সম্পূর্ণ বিভাজ্য, এবং ধরা যাক

$$\frac{f(x)}{x-1} = \phi(x)$$ যেখানে $\phi(x)$, 2m ঘাতের বহুপদরাশি।

তাহলে $$x^{2m}\phi\left(\frac{1}{x}\right) = x^{2m}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}-1} = \frac{x^{2m+1}f\left(\frac{1}{x}\right)}{1-x} = \frac{-f(x)}{1-x} = \frac{f(x)}{x-1} = \phi(x)$$ (6.3.1 মন্তব্য 2)

$\therefore\ \phi(x)=0$, একটি প্রথম শ্রেণীর যুগ্মঘাতের অন্যোন্য সমীকরণ।

$f(x) = 0$ এর একটি বীজ $+1$ এবং অন্যোন্য বীজগুলি $\phi(x)=0$ সমীকরনের বীজ দ্বারা নির্ণিত হয়।

অতএব এক্ষেত্রেও উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

ক্ষেত্র 3. সর্বশেষে, সমীকরণ কে দ্বিতীয় শ্রেণীর অন্যোন্য এবং ঘাতকে যুগ্ম (= 2m) নেওয়া যাক।

$$f(x)\ a_0 x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \ldots\ldots + a_{2m} = 0$$

$$\therefore\quad x^{2m} f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$ এবং

$a_m = 0$ (কারণ, $a_0 = -a_{2m}$, $a_1 = -a_{2m-1}$ ইত্যাদি)

$$\therefore\quad f(x) = a_0(x^{2m} - 1) + a_1 x\,(x^{2m-2} - 1) + \ldots\ldots + a_{m-1}x^{m-1}(x^2 - 1)$$

সুতরাং $f(x)$, $x^2 - 1$ দ্বারা বিভাজ্য।

$\therefore$ এক্ষেত্রে ধরা যাক, $\dfrac{f(x)}{x^2-1}=\phi(x)$; $\phi(x)$ একটি $2m-2$ ঘাতের বহুপদরাশি।

তাহলে, $$x^{2m-2}\phi\left(\frac{1}{x}\right)=x^{2m-2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{x^{2m}f\left(\frac{1}{x}\right)}{1-x^2}=\frac{-f(x)}{1-x^2}=\frac{f(x)}{x^2-1}$$

$$=\phi(x).$$

এখানে, $\phi(x)=0$, যুগ্মঘাতের প্রথম শ্রেণীর অন্যোন্য সমীকরণ। (6.3.1 মন্তব্য 2)

$f(x)=0$-এর দুটি বীজ $+1, -1$ এবং অন্যোন্য বীজগুলি $\phi(x)=0$ সমীকরণ থেকে নির্ণিত হয়।

অতএব আপনরা দেখলেন যে প্রতিটি ক্ষেত্রেই একটি অন্যোন্য সমীকরণ $f(x)=0$, কে $(x-1)$ বা, $(x+1)$, বা, x^2-1 দ্বারা ভাগ করে, $\phi(x)=0$ একটি প্রথম শ্রেণীর যুগ্মঘাতের সমীকরণ পাওয়া যায়।

প্রথম শ্রেণীর যুগ্মঘাত বিশিষ্ট অন্যোন্য সমীকরণের এই রূপটিকে বলা হয় **অন্যোন্য সমীকরণের আদর্শ রূপ**। কোন অন্যোন্য সমীকরণের সমাধান, কার্য ও একটি আদর্শরূপ বিশিষ্ট সমীকরণের সমাধানের উপর নির্ভরশীল।

6.3.3. অন্যোন্য সমীকরণের সমাধান

উপপাদ্য 2. একটি যুগ্ম $(2m)$ ঘাতের প্রথম শ্রেণীর অন্যোন্য সমীকরণের বীজগুলি একটি m ঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ দ্বারা নির্ধারিত হয়।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক

$$a_0x^{2m}+a_1x^{2m-1}+\dots\dots+a_{2m-1}x+a_{2m}=0\ \dots\dots\dots (1)$$

একটি যুগ্ম ঘাত বিশিষ্ট প্রথম শ্রেণীর অন্যোন্য সমীকরণ, যার ঘাত $2m$।

এটিকে x^m দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\dots\dots+a_{2m}x^{-m}=0,\ (\text{এখানে } a_0=a_{2m},\ a_1=a_{2n-1}\ \dots\dots \text{ইত্যাদি})$$

বা, $$a_0\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+a_1\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+\dots\dots+a_{m-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_m=0\ \dots\dots (2)$$

(সমীকরণটি প্রথম শ্রেণীর)

$x+\dfrac{1}{x}=z$ এবং $x^r+\dfrac{1}{x^r}=u_r$ লিখলে,

$$u_2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = z^2 - 2$$

$$u_3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = z^3 - 3z \text{ .... ইত্যাদি।}$$

আবার, $\left(x + \frac{1}{x}\right)u_{r-1} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{r-1} + \frac{1}{x^{r-1}}\right) = \left(x^r + \frac{1}{x^r}\right) + \left(x^{r-2} + \frac{1}{x^{r-2}}\right)$

$\therefore\ zu_{r-1} = u_r + u_{r-2}$

$\therefore\ u_r = zu_{r-1} - u_{r-2}$

এই সম্পর্কে, $r = 3, 4, \ldots\ldots, m$ পরপর বসালে,

$u_3 = zu_2 - u_1 = z(z^2 - 2) - z = z^3 - 3z$

$u_4 = zu_3 - u_2 = z^4 - 4z^2 + 2,$ .... ইত্যাদি।

অতএব (2) -তে $u_2, \ldots\ldots, u_m$ এর মান z-এর মাধ্যমে বসালে সেই z-এর একটি m-ঘাতের সমীকরণ পাই।

সেই সমীকরণের যে কোনো একটি বীজ z নির্ণীত হলে, $x + \frac{1}{x} = z$, x-এর এই দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করে,

আমরা প্রতিটি z-এর জন্য, x-এর দুটি মান পাই।

এভাবে (1)-এর 2m-সংখ্যক বীজই নির্ণয় করা যায়। অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

মন্তব্য ঃ আমরা দেখলাম, যে কোনও অন্যোন্য সমীকরণের সমাধান একটি আদর্শ রূপ সমীকরণের সমাধান দ্বারা নির্ণয় হয় (উপপাদ্য 1); আবার আদর্শ রূপ সমীকরণের ঘাত 2m হলে একটি m ঘাত বিশিষ্ট সমীকরণের সমাধানের সাহায্যে আদর্শ সমীকরণের সমাধান পাওয়া যায়।

6.3.4 উদাহরণমালা

উদাহরণ 1. সমাধান করুন।

$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 1 = 0$

সমাধান। এটি একটি প্রথম শ্রেণীর অন্যোন্য সমীকরণ।

একে এভাবে লেখা যায়,

$(x^4 + 1) - 8(x^3 + x) + 17x^2 = 0.$

x^2 দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17=0$$

বা, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+15=0$

$z=x+\frac{1}{x}$ লিখলে,

$z^2 - 8z + 15 = 0$

এর দুটি বীজ হল, $z = 3$ এবং 5

অতএব, $x+\frac{1}{x}=3$ থেকে পাই,

$x^2 - 3x + 1 = 0$

বা, $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

এবং $x+\frac{1}{x}=5$ থেকে পাই,

$x^2 - 5x + 1 = 0$

বা, $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

অতএব প্রদত্ত সমীকরণের চারটি বীজ হল, $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ এবং $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

উদাহরণ 2. সমাধান করুন।

$$10x^5 + 25x^4 + 16x^3 + 16x^2 + 25x + 10 = 0$$

এটি প্রথমশ্রেণীর অন্যোন্য সমীকরণ, তবে এর ঘাত অযুগ্ম। এটিকে এভাবে লিখি,

$$10(x^5 + 1) + 25x (x^3 + 1) + 16x^2(x + 1) = 0$$

বা, $(x + 1) [10(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + 25x (x^2 - x + 1) + 16x^2] = 0$

$(x + 1)$ উৎপাদকটি থেকে $x = -1$ বীজটি পাওয়া গেল।

অন্যান্য বীজের জন্য,

$$10(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + 25x\,(x^2 - x + 1) + 16x^2 = 0$$

বা, $10x^4 + 15x^3 + x^2 + 15x + 10 = 0$

এই অন্যোন্য সমীকরণটি সমাধান করতে হবে। এটি আদর্শ রূপ-বিশিষ্ট।

একে লেখা যায়, $10(x^4 + 1) + 15x\,(x^2 + 1) + x^2 = 0$

x^2 দ্বারা ভাগ দিলে,

$$10\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 15\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

বা, $$10\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 15\left(x + \frac{1}{x}\right) - 19 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = z$ বসালে,

$$10z^2 + 15z - 19 = 0$$

যার সমাধান হল, $z = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{985}{20}}$

z-এর এই দুটি মানের জন্যে, $x + \frac{1}{x} = z$-কে সমাধান করে, x-এর চারটি মান পাওয়া যায়।

এই চারটি এবং $x = -1$ হল প্রদত্ত সমীকরণের সম্পূর্ণ সমাধান।

উদাহরণ 3. সমাধান করুন।

$$x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 6x - 1 = 0$$

সমাধান। এটি দ্বিতীয় শ্রেণীর অন্যোন্য সমীকরণ। একে এভাবে লেখা যায়,

$$x^5 - 1 - 6x(x^3 - 1) + 16x^2(x - 1) = 0$$

বা, $(x - 1)[(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - 6x(x^2 + x + 1) + 16x^2] = 0$

$(x - 1)$ উৎপাদক থেকে $x = 1$ বীজটি পাওয়া যায়।

অন্যোন্য বীজের জন্য,

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - 6x(x^2 + x + 1) + 16x^2 = 0$$

বা, $x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 5x + 1 = 0$

এটি প্রথমশ্রেণীর যুগ্মঘাতের অন্যোন্য সমীকরণ। (আদর্শ রূপ-বিশিষ্ট)

x^2 দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+11=0$$

বা, $$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$$

$x+\frac{1}{x}=z$ বসিয়ে,

$$z^2-5z+9=0$$

$$z=\frac{5\pm i\sqrt{11}}{2}$$

z-এর দুটি মান পেলাম। z-এর প্রতিটি মানের জন্য আবার $x+\frac{1}{x}=z$ হতে x-এর দুটি সমাধান হবে। $x=1$ বীজই পূর্বেই পাওয়া গেছে।

উদাহরণ 4. সমাধান করুন।

$$x^{10}-3x^8+5x^6-5x^4+3x^2-1=0$$

সমাধান। প্রদত্ত সমীকরণকে লিখুন,

$$(x^{10}-1)-3x^2(x^6-1)+5x^4(x^2-1)=0$$

x^2-1 দ্বারা উভয়পক্ষে ভাগ করে পাই, সংক্ষেপে সিন্‌থেটিক ভাগের নিয়মে লিখলে,

1	–3	5	–5	3	–1	
	1	–2	3	–2	1	
	–2	3	–2	1	:	0

$x^8-2x^6+3x^4-2x^2+1=0$, এটি যুগ্মঘাতের প্রথম শ্রেণীর অন্যোন্য।

বা, $$\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3=0$$

$x+\frac{1}{x}=z$ বসাবার পর,

$$z^4-6z^2+9=0$$

বা, $(z^2-3)^2=0$

বা, $z^2=3$, বা, $z=\pm\sqrt{3}$

$\therefore \quad x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$ এবং $x+\frac{1}{x}=-\sqrt{3}$;

এবং $x=\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}, \frac{-\sqrt{3}\pm i}{2}$.

অতএব প্রদত্ত সমীকরণের বীজগুলি হল,

$$1, -1, \frac{\sqrt{3}\pm i}{2} \ \frac{\sqrt{3}\pm i}{2}, \ \frac{-\sqrt{3}\pm i}{2} \ \frac{-\sqrt{3}\pm i}{2}$$

উদাহরণ 5.

প্রমাণ করুন যে $a \neq 1$ হলে $(x+1)^4 = a(x^4+1)$ একটি অন্যোন্য সমীকরণ, এবং $a = -2$-র জন্য সমীকরণটি সমাধান করুন।

সমাধান।

$(x+1)^4 - a(x^4+1) = 0$

$a = 1$ হলে সমীকরণটি $4x^3 + 6x^2 + 4x = 0$ এইরূপ হয়।

বা, $x(4x^2 + 6x + 4) = 0$

যার একটি বীজ $x = 0$।

অতএব এটি অন্যোন্য সমীকরণ নয়।

তবে x উৎপাদকটি বাদ দিলে,

$4x^2 + 6x + 4 = 0$

একটি অন্যোন্য সমীকরণ।

$a \neq 1$ হলে, সমীকরণটির শূন্য বীজ নেই।

$f(x) \equiv (x+1)^4 - a(x^4+1) = 0$ ধরা যাক।

$$\therefore f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(x+1)^4}{x^4}-a\frac{1+x^4}{x^4}=\frac{(x+1)^4-a(1+x^4)}{x^4}=\frac{f(x)}{x^4}$$

$$\therefore \quad x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$$

$\therefore \quad f(x) = 0$, চতুর্থঘাতের প্রথম শ্রেণীর অন্যোন্য সমীকরণ।

$a = -2$ বসালে, আমরা পাই,

$(x-1)^4 + 2(x^4+1) = 0$

$3x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 3 = 0$

বা, $3(x^4+1) + 4x(x^2+1) + 6x^2 = 0$

বা, $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$

বা, $3\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$

বা, $x + \frac{1}{x} = z$ বসালে,

$3z^2 + 4z = 0.$

অতএব $z = 0$, এবং $z = -\frac{4}{3}$

$z = 0$ হলে, $x^2 + 1 = 0$ বা, $x = \pm i$

$z = -\frac{4}{3}$ হলে $3x^2 + 4x + 3 = 0$ বা, $x = \frac{-2 \pm i\sqrt{5}}{3}$

বীজগুলি হল, $\pm i, \frac{-2 \pm i\sqrt{5}}{3}$.

6.4 দ্বিপদী সমীকরণ (Binomial Equation)

দ্বিপদী সমীকরণের রূপ হল ঃ $Ax^n + B = 0$ .... (1) এইপ্রকার, অর্থাৎ বাঁদিকে দুটি পদ মাত্র থাকে।

A, B বাস্তব সংখ্যা A অশূন্য এবং n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। সমীকরণ (1)-কে লেখা যায়,

$$x^n + \left(\frac{B}{A}\right) = 0$$

যদি $\frac{B}{A}$ ধনাত্মক $= r^2$ হয়,

$x^n + r^2 = 0$, বা, $\frac{-x^n}{r^2} - 1 = 0$

$\frac{-x^n}{r^2} = y^n$ লিখলে,

(অর্থাৎ $x = \left(-r^2 y^n\right)^{\frac{1}{n}} = \left(-r^2\right)^{\frac{1}{n}} y$)

আমরা পাই $y^n - 1 = 0$ .... (i)

আবার $\frac{B}{A}$ ঋণাত্মক হলে,

$$\frac{B}{A} = -r^2$$

$$\left(\frac{x}{r^{\frac{2}{n}}}\right)^n - 1 = 0$$

বা, $\frac{x}{r^{\frac{2}{n}}} = X$ লিখলে,

$$X^n - 1 = 0 \quad .... \text{(ii)}$$

যে কোনো দ্বিপদী সমীকরণকেই অতএব $x^n - 1 = 0$, এই রূপে প্রকাশ করা যায়, এবং আমরা দ্বিপদী সমীকরণ বলতে এই সমীকরণটিকেই বুঝব।

$x^n - 1 = 0$ এই দ্বিপদ সমীকরণের n অযুগ্ম হলে, দেকার্ত (Descates) চিহ্ন নিয়ম অনুসারে কেবল একটি বাস্তব সমাধান থাকবে এবং তা হল -1, অন্যান্য সমাধান বা বীজগুলি কাল্পনিক হবে। সমীকরণে n যুগ্মসংখ্যা হলে দেকার্ত চিহ্ন নিয়মের সাহায্যে বলা যায় যে একটি ধনাত্মক বাস্তব ও একটি ঋণাত্মক বাস্তব বীজ থাকবে এবং তারা $+1, -1$ এবং অন্যোন্য বীজগুলি কাল্পনিক সংখ্যা।

n অযুগ্ম হলে $x^n - 1$-কে $x - 1$ দিয়ে ভাগ করে আমরা $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের জটিল বীজগুলি, $x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1 = 0$ এই অন্যোন্য সমীকরণ থেকে পাব, n যুগ্ম হলে $x^n - 1$ কে $x^2 - 1$ দিয়ে ভাগ করে, $x^{n-2} + x^{n-4} + ... + x^2 + 1 = 0$ এই অন্যোন্য সমীকরণের বীজগুলিই হবে $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের জটিল বীজ। $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বীজগুলিকে 1-এর (এককের) n-তম মূল বা n-তম বীজ বলা হয়।

বিভিন্ন n-এর জন্য কয়েকটি দ্বিপদী সমীকরণ ও তাদের বীজগুলি হল—

$n = 1 \quad x - 1 = 0$; বীজ $x = 1$

$n = 2 \quad x^2 - 1 = 0$; বীজ $x = \pm 1$

$n = 3 \quad x^3 - 1 = 0$; বীজ 1, এবং $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

এক্ষেত্রে দুটি জটিল বীজ আছে যার একটিকে ω বললে অপরটি হয় ω^2। এবং $1 + \omega + \omega^2 = 0$, $\omega^3 = 1$

$n = 4, \quad x^4 - 1 = 0$; বীজসমূহ $1, -1, i, -i$

$x = 5, \quad x^5 - 1 = 0$; বীজসমূহ হল 1, $\cos\frac{2\pi}{5} \pm i\sin\frac{2\pi}{5}$

$$\cos\frac{4\pi}{5} \pm i\sin\frac{4\pi}{5}$$

(ডি মভার উপপাদ্য অনুসারে)

ডিমভার উপপাদ্য অনুসারে $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বীজগুলি হল $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, যেখানে $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n-1$ ($k = 0$ হলে বীজ 1)

6.5 দ্বিপদী সমীকরণের বীজ সম্বন্ধে কয়েকটি উপপাদ্য

উপপাদ্য 1. $x^n - 1 = 0$ এই দ্বিপদী সমীকরণের একটি জটিল বীজ α হলে, α^r-ও ঐ সমীকরণের একটি বীজ হবে, যেখানে r পূর্ণসংখ্যা।

প্রমাণ ঃ α, প্রদত্ত সমীকরণের বীজ। অতএব $\alpha^n = 1$

অতএব $(\alpha^r)^n = (\alpha^n)^r = 1$.

অতএব α^r-ও, $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বীজ।

মন্তব্য 1. r অযুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হলে, $x^n + 1 = 0$ সমীকরণের জন্য উপরের তথ্যটি সত্য। অর্থাৎ $x^n + 1 = 0$ এর একটি বীজ α হলে, α^r ও ঐ সমীকরণের বীজ হবে, যদি r অযুগ্ম পূর্ণ সংখ্যা হয়।

উপপাদ্য 2. n ও m পরস্পর মৌলিক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, $x^n - 1 = 0$ এবং $x^m - 1 = 0$ এই সমীকরণদুটির 1 ব্যতীত অন্য কোনো সাধারণ বীজ (common root) নেই।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক প্রদত্ত সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ বীজ α। m এবং n পরস্পর মৌলিক বলে, মৌলসংখ্যার ধর্ম অনুযায়ী, দুটি পূর্ণসংখ্যা p, q পাওয়া যায়, যার জন্য

$$pn - qm = \pm 1$$

$$\therefore \ \alpha^{pn-qm} = \alpha^{\pm 1}$$

$$\therefore \ (\alpha^n)^p \cdot (\alpha^m)^{-q} = \alpha^{\pm 1}$$

বা, $1 = \alpha^{\pm 1}$ যেহেতু $\alpha^n = \alpha^m = 1$.

কেবলমাত্র α যদি 1 হয় তবেই এটি সম্ভব।

সুতরাং $x^m - 1 = 0$, $x^n - 1 = 0$ (যেখানে m, n পরস্পর মৌলিক) সমীকরণদুটির একমাত্র সাধারণ বীজ হল 1। অন্য কোনো সাধারণ বীজ নেই।

উপাপাদ্য 3. m ও n এই দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ.সা.গু) k হলে, $x^m - 1 = 0$ এবং $x^n - 1 = 0$ সমীকরণগুলির সাধারণ বীজগুলি হল $x^k - 1 = 0$ সমীকরণের বীজ।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $m = km'$, $n = kn'$, এখানে m', n' পরস্পর মৌলিক। সেক্ষেত্রে পূর্ণসংখ্যা p, q আছে যার জন্যে

$m'p - n'q = \pm 1$, বা, $mp - nq = \pm k$

α, $x^m - 1 = 0$ এবং $x^n - 1 = 0$ -র সাধারণ বীজ হলে,

$$\alpha^{\pm k} = \alpha^{(mp - nq)}$$

$$= (\alpha^m)^p (\alpha^n)^{-q} = 1$$

বা, $\alpha^k = 1$

অর্থাৎ α হল, $x^k - 1 = 0$ সমীকরণের বীজ। প্রমাণিত।

উপপাদ্য 4. $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের একটি জটিল বীজ যদি α হয় এবং n যদি মৌলিক সংখ্যা হয় তবে $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের সমস্ত বীজগুলি $1, \alpha, \alpha^2, \ldots\ldots, \alpha^{n-1}$ এইরূপে লেখা যায়।

প্রমাণ : $\alpha^n = 1$, অতএব $(\alpha^r)^n = (\alpha^n)^r = 1$, r পূর্ণসংখ্যা। অতএব $\alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ সবই $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বীজ। আমরা দেখাব এগুলি পরস্পর বিভিন্ন এবং 1 থেকেও আলাদা। $r < n$ হলে α^r-এর মান 1 হতে পারে না কারণ r, n পরস্পর মৌলিক। (সেক্ষেত্রে $\alpha^r - 1 = 0$, $\alpha^n - 1 = 0$ হতে হবে, যা উপপাদ্য 2 অনুযায়ী সম্ভব নয়) এখন যদি ধরি (α^r $(1 < r < n)$) এই বীজগুলির মধ্যে দুটি সমান, অর্থাৎ $\alpha^p = \alpha^q$, p, q $< n$, তাহলে $\alpha^{p-q} = 1$. কিন্তু তাও সম্ভব নয় কারণ $p - q < n$.

$\therefore$ α^p, α^q সমান হতে পারে না।

$\therefore$ $1, \alpha, \alpha^2, \ldots\ldots, \alpha^{n-1}$ এই কটিই $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের পরস্পর বিভিন্ন বীজ। (কারণ r পূর্ণ সংখ্যা এবং $r < n$ হলে r এর মান $1, 2, \ldots\ldots, n-1$—এই কটি হতে পারে, এবং $x^n - 1 = 0$-এর মোট n সংখ্যাক বীজ আছে।)

মন্তব্য : n মৌলিক না হলে কিন্তু যে কোনো একটি জটিল বীজ α জানা থাকলে অন্যান্য জটিল বীজগুলি $\alpha^2, \alpha^3 \ldots\ldots$ ইত্যাদি না হতে পারে। তবে যে কোনো n-এর জন্য, $\alpha, \alpha^2, \ldots\ldots \alpha^{n-1}$ জটিল বীজ হবে যদি α একটি বিশেষ বীজ হয়। এই বিশেষ বীজ সম্পর্কে আমরা 6.6 অনুঃ জানতে পারব।

উপপাদ্য 5. p, q, r, ... ইত্যাদি উৎপাদক দ্বারা গঠিত যৌগিক সংখ্যা n হলে, $x^p - 1 = 0$, $x^q - 1 = 0$, $x^r - 1 = 0$ ইত্যাদি সীমকরণের বীজগুলির প্রতিটিই $x^n - 1 = 0$ এর বীজ হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক α, $x^p - 1 = 0$ সমীকরণের একটি বীজ। তাহলে, $\alpha^p = 1$, এবং সেক্ষেত্রে $1 = (\alpha^p)^{qr} \ldots\ldots = \alpha^{pqr} = \alpha^n$

$\therefore$ $\alpha^n = 1$, এবং α, $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বীজ।

উপপাদ্য 6. n যদি, p, q, r, ... ইত্যাদি মৌলিক সংখ্যা দ্বারা গঠিত একটি যৌগিক সংখ্যা হয়, তবে $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বীজগুলিকে

$$\left(1+\alpha+\alpha^2+\cdots\cdots+\alpha^{p-1}\right)\left(1+\beta+\beta^2+\cdots\cdots+\beta^{q-1}\right)\left(1+\gamma+\gamma^2+\cdots\cdots+\gamma^{r-1}\right) \ldots\ldots\ldots$$

এই গুণফলের n পদগুলির দ্বারা প্রকাশ করা যাবে, যেখানে $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots\ldots$ ইত্যাদি যথাক্রমে $x^p - 1 = 0$, $x^q - 1 = 0$, $x^r - 1 = 0$ .... ইত্যাদি সমীকরণের বীজ।

প্রমাণ : n-এর মাত্র তিনটি উৎপাদক p, q, r এর ক্ষেত্রে উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যাক। সাধারণ প্রমাণটি অনুরূপ হবে।

$n = pqr$, এবং উপরের গুণফলটি এরূপ হবে,

$$\left(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{p-1}\right)\left(1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{q-1}\right)\left(1+\gamma+\gamma^2+\cdots+\gamma^{r-1}\right)$$

এর একটি যে কোনো পদ এরূপ ঃ $\alpha^m\beta^l\gamma^k$; $(1 \le m \le p-1, 1 \le l \le q-1, 1 \le k \le r-1)$

এখন, $\left(\alpha^m\right)^n = \alpha^{mn} = 1$

যেহেতু, উপপাদ্য 5 অনুসারে, α, $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বীজ।

একইভাবে, $\left(\beta^l\right)^n = 1 = \left(\gamma^k\right)^n$

অতএব, $\left(\alpha^m\beta^l\gamma^k\right)^n = 1$ অর্থাৎ

$\alpha^m\beta^l\gamma^k$ $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বীজ।

আবার, এই গুণফলের পদগুলি পরস্পর বিভিন্ন, কারণ,

যদি $\alpha^m\beta^l\gamma^k = \alpha^{m'}\beta^{l'}\gamma^{k'}$ হয়,

তবে $\alpha^{m-m'} = \beta^{l'-l}\gamma^{k'-k}$

বাঁদিকের পদটি, $x^p - 1 = 0$ সমীকরণের বীজ। $\left(\left(\alpha^{m-m'}\right)^p = 1\right)$

ডানদিকের পদটি, $x^{qr} - 1 = 0$ সমীকরণের বীজ। $\left[\left(\beta^{l'-l}\right)^{qr}\left(\gamma^{k'-k}\right)^{qr} = \left(\left(\beta^{l'-l}\right)^q\right)^r\left(\left(\gamma^{k'-k}\right)^q\right)^r = 1\right]$

কিন্তু p এবং qr পরস্পর মৌলিক, সুতরাং উপপাদ্য 2 অনুযায়ী, এদের মধ্যে 1 ব্যতীত সাধারণ বীজ নেই। অতএব $\alpha^m\beta^l\gamma^k$, $\alpha^{m'}\beta^{l'}\gamma^{k'}$ এর সমান হতে পারে না।

অতএব উপপাদ্যটি $n = pqr$ এর ক্ষেত্রে প্রমাণ হল।

উপপাদ্য 7. $n = p^a q^b r^c$ হলে যেখানে p, q, r এগুলি n-এর মৌলিক উৎপাদক, তবে $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বীজগুলি হল, $\alpha\beta\gamma$ এই জাতীয় n সংখ্যক সংখ্যা, যেখানে α, $x^{p^a} - 1 = 0$-এর বীজ, β, $x^{q^b} - 1 = 0$ এর বীজ, γ, $x^{r^c} - 1 = 0$ এর বীজ।

প্রমাণ ঃ $x^{p^a} - 1 = 0$ সমীকরণের p^a সংখ্যক বীজ আছে। এই উপপাদ্যটি প্রকৃতপক্ষে পূর্বের উপপাদ্যটির বিস্তৃত রূপ, যেখানে n-এর মৌলিক উৎপাদকগুলি একাধিকবার উপস্থিত আছে। প্রমাণও পূর্বের অনুরূপ।

মন্তব্য ঃ উপরের উপপাদ্যগুলি থেকে বোঝা গেল যে, $n = p$ বা, p^r ধরনের হলে, যেখানে p মৌলিক, $x^n - 1 = 0$ দ্বিপদ সমীকরণের সমাধান নির্ণয়ে দরকার হয়।

6.5.1 উদাহরণমালা

উদাহরণ 1. $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের α একটি জটিল বীজ, এবং n মৌলিক। প্রমাণ করুন $(1-\alpha)(1-\alpha^2) \ldots\ldots (1-\alpha^{n-1}) = n$.

সমাধান ঃ n মৌলিক, অতএব $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের সমস্ত বীজগুলি হল — $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$

$\therefore\ x^n - 1 \equiv (x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2) \ldots\ldots\ldots\ldots (x-\alpha^{n-1})$

বা, $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + x + 1 \equiv (x-\alpha) \ldots\ldots\ldots (x-\alpha^{n-1})$

এটি একটি অভেদ।

যেখানে $x = 1$ বসালে উপরের সম্পর্কটি পাওয়া যায়।

উদাহরণ 2. $x^5 - 1 = 0$ সমীকরণের একটি জটিল বীজ α হলে, $\alpha + 2\alpha^4$, $\alpha^2 - 2\alpha^3$, $\alpha^3 + 2\alpha^2$ এবং $\alpha^4 + 2\alpha$ যে সমীকরণের বীজ সেটি নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x^5 - 1 = 0$ -র বীজগুলি হল $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ (5 মৌলিক)

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$\therefore\ \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ হল $\quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

এই সমীকরণের বীজ। সমীকরণে $2x = t$ বসালে $t^4 + 2t^3 + 4t^2 + 8t + 1 = 0$ এর বীজগুলি 2α .... ইত্যাদি

$\therefore\ 2\alpha, 2\alpha^2, 2\alpha^3, 2\alpha^4$ হল, $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 = 0$

সমীকরণের বীজ।

অতএব, $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$

$$\equiv\ (x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^3)(x-\alpha^4)(x-2\alpha)(x-2\alpha^2)(x-2\alpha^3)(x-2\alpha^4)$$

$$=\ (x-\alpha)(x-2\alpha^4)(x-\alpha^2)(x-2\alpha^3)(x-\alpha^3)(x-2\alpha^2)(x-\alpha^4)(x-2\alpha)$$

$$\therefore\ x^8 + 3x^7 + 7x^6 + 15x^5 + 31x^4 + 30x^3 + 28x^2 + 24x + 16$$

$$\equiv \left\{x^2 - (\alpha + 2\alpha^4)x + 2\right\}\left\{x^2 - (\alpha^2 + 2\alpha^3)x + 2\right\}\left\{x^2 - (\alpha^3 + 2\alpha^2)x + 2\right\}\cdot\left\{x^2 - (\alpha^4 + 2\alpha)x + 2\right\}$$

দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ করে, এবং $z = x + \dfrac{1}{x}$ বসিয়ে পাই,

$$z^4 + 3z^3 - z^2 - 3z + 11 \equiv \left\{z - (\alpha + 2\alpha^4)\right\}\left\{z - (\alpha^2 + 2\alpha^3)\right\}\left\{z - (\alpha^3 + 2\alpha^2)\right\}\left\{z - (\alpha^4 + 2\alpha)\right\}$$

$\therefore$ **$z^4 + 3z^3 - z^2 - 3z + 11 = 0$ সমীকরণই হল উদ্দিষ্ট সমীকরণ।**

6.6 দ্বিপদী সমীকরণের বিশেষ বীজ (Special Roots) সম্বন্ধে আলোচনা

$x^n - 1 = 0$ দ্বারা প্রকাশিত প্রতিটি দ্বিপদী সমীকরণেরই এমন কিছু বীজ থাকে, যেগুলি ঐ একই জাতীয় কিন্তু নিম্নতর ঘাতের সমীকরণের বীজ নয়। এগুলিকে ঐ সমীকরণের বিশেষ বীজ (Special root) বলা হয়। অর্থাৎ m যদি n অপেক্ষা যে কোনো ক্ষুদ্র ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় তাহলে $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের যে সমস্ত বীজ, $x^m - 1 = 0$ সমীকরণের বীজ নয়, তাদেরকে $x^n - 1 = 0$ এর বিশেষ বীজ বলা হবে।

এদেরকে 1-এর বিশেষ n-তম বীজও বলা হয়।

উপপাদ্য 1. $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বিশেষ বীজগুলি হল $\cos\frac{2r\pi}{n} + i\sin\frac{2r\pi}{n}$, r যেখানে n অপেক্ষা ক্ষুদ্র ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং r ও n পরস্পর মৌলিক।

প্রমাণ $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বীজগুলি হল 1 এবং $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$।

এর মধ্যে 1 বিশেষ বীজ নয়। বাকিগুলির কোনোটি বিশেষ কিনা সেটাই আমরা বিবেচনা করব।

প্রথমে ধরা যাক k, n পরস্পর মৌলিক নয়। ধরা যাক তাহলে k ও n এর গ.সা.গু d, $d > 1$ এবং $n = ld$, $k = md$, যেখানে l, m পূর্ণসংখ্যা, $l < n$, $m < k$.

অতএব $$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^l = \cos 2\frac{kl}{n}\pi + i\sin 2\frac{kl}{n}\pi$$

$$= \cos\frac{2mld}{n}\pi + i\sin\frac{2mld}{n}\pi = \cos 2m\pi + i\sin 2m\pi = 1$$

$$\therefore \quad \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \ x^l - 1 = 0 \text{ সমীকরণের বীজ যেখানে } l < n$$

অতএব এটি অর্থাৎ $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $x^n - 1 = 0$-এর বিশেষ বীজ নয়।

এবার ধরা যাক k, n পরস্পর মৌলিক। যদি সম্ভব হয় তো মনে করি $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ হল $x^p - 1 = 0$ সমীকরণের বীজ, যেখানে $p < n$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$$\therefore \quad \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^p = 1$$

বা, $$\cos\frac{2kp\pi}{n} + i\sin\frac{2kp\pi}{n} = 1,$$

অর্থাৎ, $\sin\frac{2kp\pi}{n}=0$ এবং $\cos\frac{2kp\pi}{n}=1$

অতএব $\frac{kp}{n}$ পূর্ণসংখ্যা। অর্থাৎ kp, n দ্বারা বিভাজ্য।

অর্থাৎ p, n দ্বারা বিভাজ্য (কারণ k, n দ্বারা বিভাজ্য নয়।) কিন্তু $p < n$ হওয়াতে তা অসম্ভব।

অতএব, $\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $x^p - 1 = 0$ সমীকরণের বীজ হতে পারে না $(k < n)$ ।

অতএব, k, n পরস্পর মৌলিক হলে,

$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ হল $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বিশেষ বীজ।

মন্তব্য 1. n মৌলিক সংখ্যা হলে 1 ব্যতীত $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের প্রতিটি জটিল বীজই বিশেষ বীজ।

মন্তব্য 2. $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বিশেষ বীজের সংখ্যা, n অপেক্ষা কম এবং n এর সঙ্গে মৌলিক ধনাত্মক সংজ্ঞাগুলির সংখ্যার সমান।

উপপাদ্য 2. α, $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বিশেষ বীজ হলে, $\frac{1}{\alpha}$-ও ঐ সমীকরণের বিশেষ বীজ।

প্রমাণ : $\alpha=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ যেখানে $k < n$, k ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং k, n পরস্পর মৌলিক।

$$\therefore\ \frac{1}{\alpha}=\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}=\cos\frac{2}{n}(n-k)\pi+i\sin\frac{2}{n}(n-k)\pi$$

কিন্তু $0 < n-k < n$, এবং $n - k$, n পরস্পর মৌলিক।

অতএব উপপাদ্য 1 অনুযায়ী, $\frac{1}{\alpha}$ -ও $x^n - 1 = 0$ এর বিশেষ বীজ।

উপপাদ্য 3. α, $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বিশেষ বীজ হলে ঐ সমীকরণের সকল বীজকে $1, \alpha, \alpha^2, \ldots\ldots, \alpha^{n-1}$ রূপে লেখা যায়।

প্রমাণ : $1, \alpha, \alpha^2, \ldots\ldots, \alpha^{n-1}$ প্রতিটি অবশ্যই $x^n - 1 = 0$ এর বীজ। আমরা দেখাব যে, α বিশেষ বীজ হলে, ওপরের এই বীজগুলি পরস্পর বিভিন্ন হবে।

সম্ভব হলে ধরা যাক $\alpha^p = \alpha^q$, $0 \le p, q \le n-1$

এবং $p > q$

তবে $\alpha^{p-q} = 1$, বা, α হল $x^{p-q} - 1 = 0$ এর বীজ।

কিন্তু $p-q<n$, এবং α, $x^n-1=0$ এর বিশেষ বীজ হওয়াতে এটি অসম্ভব। অতঃপর, α, α^2, ..., α^{n-1} অবশ্যই বিভিন্ন।

উপপাদ্য 4. α যদি $x^n-1=0$ সমীকরণের একটি বিশেষ বীজ হয় এবং p ও n যদি পরস্পর মৌলিক হয়, তবে α^p-ও ঐ $x^n-1=0$ সমীকরণের একটি বিশেষ বীজ।

প্রমাণ ঃ $(\alpha^p)^n=\alpha^{np}=1$ অতএব α^p, $x^n-1=0$ এর বীজ। সম্ভব হলে ধরা যাক α^p, $x^m-1=0$ এরও বীজ, যেখানে m, n অপেক্ষা ছোট ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

অতএব $(\alpha^p)^m=1$ বা, $\alpha^{pm}=1$

কিন্তু α, $x^n-1=0$ এর বিশেষ বীজ, অতএব $pm\geq n$.

এখন, p, n এর সঙ্গে মৌলিক এবং $m<n$.

অতএব, $pm\neq n$, অর্থাৎ $pm>n$.

ধরা যাক, $pm=nq+r$, q, r পূর্ণসংখ্যা $0\leq r<n$.

$$\therefore\ 1=\alpha^{pm}=\alpha^{nq}.\alpha^r=\alpha^r\ (\because\ \alpha^n=1)$$

$\therefore\ r=0$, বা $pm=nq$

সুতরাং, m, n দ্বারা বিভাজ্য, কারণ p, n পরস্পর মৌলিক। কিন্তু $m<n$ হওয়াতে এটি অসম্ভব।

অতএব, α^p হল, $x^n-1=0$ এর বিশেষ বীজ।

মন্তব্য ঃ p, n এর সঙ্গে মৌলিক হলে α^p, $x^n-1=0$ এর বিশেষ বীজ হবে। এভাবে প্রাপ্ত সমস্ত বিশেষ বীজই পরস্পর বিভিন্ন না হতে পারে।

উপপাদ্য 5. α, $x^n-1=0$ সমীকরণের একটি বিশেষ বীজ হলে, ঐ সমীকরণের সমস্ত বিশেষ বীজের সেটটি হল—

{ α^m |m, n অপেক্ষা ক্ষুদ্র এবং n এর সঙ্গে পরস্পর মৌলিক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, বা, $m=1$ }

প্রমাণ ঃ p, q ধরা যাক n অপেক্ষা ক্ষুদ্র এবং n এর সঙ্গে মৌলিক পূর্ণসংখ্যা। তখন α^p, α^q উভয়েই $x^n-1=0$ এর বিশেষ বীজ (উপপাদ্য 4 অনুসারে)। α^p ও α^q, এরা পরস্পর বিভিন্ন, কারণ অন্যথায় $\alpha^p=\alpha^q$ হলে $\alpha^{p-q}=1$ হত কিন্তু যেহেতু $p-q<n$, α বিশেষ বীজ হতে পারত না। অর্থাৎ, α^m সর্বদাই $x^n-1=0$ এর বিশেষ বীজ, যেখানে m ও n পরস্পর মৌলিক।

আমরা আরও দেখব যে $x^n-1=0$-এর প্রতিটি বিশেষ বীজই উপরের সেটটিতে আছে।

ধরা যাক, β, $x^n-1=0$ এর একটি বিশেষ বীজ। অতএব এখন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা s আছে যাতে $\beta=\alpha$ যেখানে $1\leq s\leq n-1$ (উপপাদ্য 2 অনুসারে) (কারণ β, ঐ সমীকরণের একটি বীজ এবং $\beta\neq 1$)

এখন s যদি n এর সঙ্গে মৌলিক না হয়, তাহলে তাদের মধ্যের গসাগু-টি ধরি $d\neq 1$, অতএব s ও n-কে লেখা যায় $s=s_1d$, $n=n_1d$, $s_1<s$, $n_1<n$, s_1 ও n_1 ধনাত্মক সংখ্যা।

তাহলে, $\beta^{n_1} = \alpha^{sn_1} = \alpha^{s_1 dn_1} = \alpha^{s_1 n} = 1^{s_1} = 1$

$\therefore$ β হলে, $x^{n_1} - 1 = 0$ এর বীজ যেখানে $n_1 < n$ । কিন্তু β, $x^n - 1 = 0$ এর বিশেষ বীজ হওয়াতে এটি অসম্ভব। অতএব s, n এর সঙ্গে মৌলিক হতে হবে। উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

মন্তব্য : $x^n - 1 = 0$ এর পরস্পর বিভিন্ন বিশেষ বীজগুলি হল α^p, যেখানে $p < n$, p, n পরস্পর মৌলিক।

6.6.1 দ্বিপদী সমীকরণের বিশেষ বীজের সংখ্যা

1. n মৌলিক হলে, $x^n - 1 = 0$ এর বিশেষ বীজ আছে $n - 1$ টি।
2. $n = p^r$, p মৌলিক হলে, n সঙ্গে মৌলিক নয় এবং n অপেক্ষা ক্ষুদ্র এরূপ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাগুলি হল : p, 2p, 3p, ..., p^{r-1} p অতএব, n অপেক্ষা ক্ষুদ্র এবং n-এর সঙ্গে মৌলিক সংখ্যাগুলির সংখ্যা :

   $$n - p^{r-1} = p^r\left(1 - \frac{1}{p}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

   এবং এটিই হল $x^n - 1 = 0$ এর বিশেষ বীজের সংখ্যা।
3. $n = p^r q^s$ যেখানে p, q পরস্পর বিভিন্ন এবং দুটিই মৌলিক।

   এক্ষেত্রে $x^n - 1 = 0$-এর বিশেষ বীজের সংখ্যা $n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$

   (সংখ্যার তত্ত্ব Theory of Numbers দ্রষ্টব্য) ইত্যাদি।

6.7 উদাহরণমালা

উদাহরণ 1. $x^6 - 1 = 0$ সমীকরণের বিশেষ বীজগুলি নির্ণয় করুন।

সমাধান : 6-এর মৌলিক উৎপাদক 2 ও 3. অতএব $x^2 - 1 = 0$ এবং $x^3 - 1 = 0$ সমীকরণের সমস্ত বীজই $x^6 = 1$ এর বীজ, এবং এই বীজগুলি প্রদত্ত সমীকরণের বিশেষ বীজ নয়।

$$x^6 - 1 \equiv (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x^3 - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

[এখানে $(x^3-1)(x + 1)$ হল $x^2 - 1$, $x^3 - 1$ -এর ল.সা.গু]

অতএব বিশেষ বীজগুলি হল $x^2 - x + 1 = 0$ সমীকরণের বীজ।

উদাহরণ 2. $x^{12} - 1 = 0$ **সমীকরণের বিশেষ বীজ নির্ণয় করুন।**

সমাধান : এক্ষেত্রে আমরা বিশেষ বীজগুলিকে লিখি $\cos\frac{2\pi r}{12} + i\sin\frac{2\pi r}{12}$, **যেখানে r, 12 অপেক্ষা ক্ষুদ্র এবং 12-র সঙ্গে মৌলিক ধনঃ পূর্ণসংখ্যা অথবা, r = 1.**

$\therefore$ r হতে পারে 5, 7 বা, 11 বা, 1

$\therefore$ বিশেষ বীজগুলি হল,

$$\cos\frac{\pi}{6} \pm i\sin\frac{\pi}{6} \text{ (r = 1 বা 11 এর জন্য)}$$

এবং $\cos\frac{5\pi}{6} \pm i\sin\frac{5\pi}{6}$ (r = 5 বা 7 এর জন্য)।

বিকল্পভাবে, উদাহরণ 1-এর পদ্ধতি অনুসারেও অঙ্কটি কষা যায়। $x^{12} - 1 = 0$, এর বিশেষ নয় এরূপ বীজগুলি $x - 1 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^3 - 1 = 0$, $x^4 - 1 = 0$ এবং $x^6 - 1 = 0$ সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়।

$(x-1)$, (x^2-1), (x^3-1), (x^4-1), (x^6-1) এর ল.সা.গু হল $(x^6-1)(x^2+1)$

$\therefore$ $(x^6-1)(x^2+1) = 0$ সমীকরণের দেয় বীজগুলি বিশেষ বীজ নয়।

এখন $\dfrac{x^{12}-1}{(x^6-1)(x^2+1)} = \dfrac{x^6+1}{x^2+1} = x^4 - x^2 - 1$ অতএব $x^4 - x^2 - 1 = 0$ এই সমীকরণের বীজগুলি, প্রদত্ত সমীকরণের বিশেষ বীজ।

$$x^4 - x^2 - 1 = 0 \text{ (অন্যোন্য সমীকরণ)}$$

বা, $x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 1 = 0$

বা, $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = 3$

$\therefore$ $x + \dfrac{1}{x} = \pm\sqrt{3}$, যার থেকে পাই,

$\dfrac{\sqrt{3} \pm i}{2}$, $\dfrac{-\sqrt{3} \pm i}{2}$ এই চারটি বীজ। এইগুলি বিশেষ বীজ।

উদাহরণ 3. $x^9 - 1 = 0$ সমীকরণের বিশেষ বীজ নির্ণয় করুন। এবং দেখান যে,

$$2\cos\frac{2\pi}{9},\ 2\cos\frac{4\pi}{9},\ 2\cos\frac{8\pi}{9}$$

$x^3 - 3x + 1 = 0$ সমীকরণের বীজ।

সমাধান : 9-এর সঙ্গে মৌলিক এবং 9 অপেক্ষা ক্ষুদ্র ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাগুলি হল, 2, 4, 5, 7, 8 । $9 = 3^2$

বিশেষ বীজের সংখ্যা $= 9\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6$

অতএব, $x^9 - 1 = 0$ সমীকরণের বিশেষ বীজগুলি হল,

$$\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad k = 1, 2, 4, 5, 7, 8$$

অর্থাৎ, $\cos\frac{2\pi}{9} \pm i\sin\frac{2\pi}{9} \quad (k = 1, 8)$

$\cos\frac{4\pi}{9} \pm i\sin\frac{4\pi}{9}$ $(k = 2, 7)$ এবং $\frac{8\pi}{9} \pm i\sin\frac{8\pi}{9} (k = 4, 5)$

যথাক্রমে এদেরকে $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ বলা যাক যেখানে

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1}, \ \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_4}, \ \alpha_5 = \frac{1}{\alpha_6}$$

$x^9 - 1 = 0$ সমীকরণের বিশেষ বীজগুলির জন্য ($x^9 - 1$ কে $x^3 - 1$ দিয়ে ভাগ করে)

$$x^6 + x^3 + 1 = 0$$

এই সমীকরণটি পাওয়া যায়।

$\therefore \ \alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_6$ এই সমীকরণের বীজ।

$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1, \alpha_3 + \alpha_4 = \beta_2, \alpha_5 + \alpha_6 = \beta_3$ লিখুন।

$$\therefore \ \beta_1 = 2\cos\frac{2\pi}{9}, \ \beta_2 = 2\cos\frac{4\pi}{9}, \ \beta_3 = 2\cos\frac{8\pi}{9}$$

আমাদের $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ যে সমীকরণের বীজ সেটি নির্ণয় করতে হবে।

এখন,

$$x^6 + x^3 + 1 \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5)(x - \alpha_6)$$
$$= (x^2 - \beta_1 x + 1)(x^2 - \beta_2 x + 1)(x^2 - \beta_3 x + 1)$$

x^3 দিয়ে ভাগ করে পাই—

$$\therefore \ x^3 + \frac{1}{x^3} + 1 \equiv \left(x + \frac{1}{x} - \beta_1\right)\left(x + \frac{1}{x} - \beta_2\right)\left(x + \frac{1}{x} - \beta_3\right)$$

$x + \frac{1}{x} = t$ বসালে,

$$t^3 - 3t + 1 \equiv (t - \beta_1)(t - \beta_2)(t - \beta_3)$$

$\therefore \ t^3 - 3t + 1 = 0$ হল প্রয়োজনীয় সমীকরণ।

উদাহরণ 4. দেখান যে $x^{10}-1=0$ সমীকরণের বিশেষ বীজগুলি হল $x^5+1=0$ সমীকরণের সম্পূর্ণ জটিল বীজগুলি।

সমাধান ঃ 10 এর সঙ্গে মৌলিক সংখ্যাগুলি (<10) হল, 3, 7 ও 9.

এবং 10 এর মৌলিক উৎপাদক হল 2 ও 5 ।

অতএব $x^2-1=0$ এবং $x^5-1=0$ সমীকরণের সব বীজই $x^{10}=1$ এর বীজ যারা বিশেষ বীজ নয়।

অতএব $x^{10}-1=0$-র বিশেষ বীজের সংখ্যা

$$10\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=10\cdot\frac{1\cdot4}{10}=4 \text{ টি}$$

x^2-1 এবং x^5-1 এর লসাগু হল $(x+1)(x^5-1)$

অতএব $x^{10}-1=0$ এর বিশেষ বীজের জন্য,

$$\frac{x^{10}-1}{(x+1)(x^5-1)}=\frac{x^5+1}{x+1}$$

অর্থাৎ $x^5+1=0$ সমীকরণের 1-ব্যতীত বাকি (জটিল) বীজগুলি হল $x^{10}-1=0$ এর বিশেষ বীজ।

উদাহরণ 5. n, অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে দেখান যে $x^{2n}-1=0$ এবং $x^n-1=0$ সমীকরণদুটির বিশেষ বীজের সংখ্যা সমান।

সমাধান ঃ মনে করি $n=p_1^{r_1}\ p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$ যেখানে $p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots p_k$ পরস্পর বিভিন্ন মৌলিক সংখ্যা এবং কোনোটিই 2 নয় (কারণ n অযুগ্ম)

$$x^n-1=0 \text{ এর বিশেষ বীজের সংখ্যা } n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

এখন $2n=2\cdot p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$ যেখানে $2, p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots p_k$ পরস্পর মৌলিক।

$x^{2n}-1=0$ সমীকরণের বিশেষ বীজের সংজ্ঞা

$$2n\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

$$= \quad n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

6.8 সারাংশ

আমরা দেখলাম :

1. $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ সমীকরণটিকে অন্যোন্য সমীকরণ বলা হবে যদি এর যে কোনো বীজ α হলে $\frac{1}{\alpha}$-ও তার একটি বীজ।

2. অন্যোন্য সমীকরণ দুটি শ্রেণীর হয়। প্রথম শ্রেণীর অন্যোন্য সমীকরণের ক্ষেত্রে $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, \ldots$ ইত্যাদি। দ্বিতীয় শ্রেণীর ক্ষেত্রে $a_0 = -a_n, a_1 = -a_{n-1} \ldots$ ইত্যাদি।

3. যে কোনো শ্রেণীর অন্যোন্য সমীকরণের বীজগুলি, সর্বদাই কোনো প্রথম শ্রেণীর যুগ্মঘাত-যুক্ত অন্যোন্য সমীকরণের বীজগুলির উপর নির্ভরশীল।

4. $x^n - 1 = 0$ সমীকণকে দ্বিপদী সমীকরণ বলে। এই সমীকরণের বীজগুলি
$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, 2, \ldots n-1 \text{।}$$

5. n যদি মৌলিক সংখ্যা হয় এবং α যদি $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের একটি জটিল বীজ হয় তবে সমীকরণটির সমস্ত বীজগুলি $1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{n-1}$ হবে।

   যদি n যদি কয়েকটি মৌলিক সংখ্যার গুণফল হয় যথা $n = pqr$ (যেখানে p, q, r ইত্যাদি মৌলিক) তবে $x^p - 1 = 0, x^q - 1 = 0, x^r - 1 = 0$ ইত্যাদি প্রতিটি সমীকরণের বীজই $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বীজ হবে।

   $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বীজগুলির ধর্ম হিসাবে আরও কিছু উপপাদ্য আমরা পেয়েছি।

6. m, n ধনাত্মক সংখ্যা এবং $m < n$ হলে, $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের যে সকল বীজ, $x^m - 1 = 0$ সমীকরণের (যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা $m < n$) বীজ নয়, তাদের $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বিশেষ বীজ বলা হয়।

7. $x^n - 1$ সমীকরণের বিশেষ বীজগুলি হল
$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$ যেখানে k, n পরস্পর মৌলিক এবং $k < n$.

8. α যদি $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের একটি বিশেষ বীজ হয়, তবে সমীকরণটির সমস্ত বীজ হল $1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{n-1}$

9. α যদি $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের একটি বিশেষ বীজ হয়, তবে সমীকরণটির সমস্ত বিশেষ বীজের সেটটি হল

   $\{\alpha^m \mid m = 1$ বা m ও n পরস্পর মৌলিক ও $m < n\}$

10. n মৌলিক হলে, $x^n - 1 = 0$ সমীকরণের বিশেষ বীজের সংখ্যা $n - 1$, $n = p^r q^s$ এইরূপ হলে (যেখানে p, q পরস্পর বিভিন্ন মৌলিক)

    বিশেষ বীজের সংখ্যা $n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)$

6.9 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

প্রঃ 1. নীচের অন্যোন্য সমীকরণগুলি সমাধান করুন।

(i) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$

(ii) $3x^5 + 7x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 7x - 3 = 0$

(iii) $x^6 + 8x^4 + 8x^2 + 1 = 0$

(iv) $x^7 + 4x^6 + 4x^5 + x^4 - x^3 - 4x^2 - 4x - 1 = 0$

প্রঃ 2. দেখান যে নীচের সমীকরণগুলি অন্যোন্য এবং এদের সমাধান করুন।

(i) $(x^2 + x + 1)^3 + x^6 - x^3 + 1 = 0$

(ii) $x^5 + 1 + (x^3 + 1)(x^2 - x + 1) = 0$

প্রঃ 3. $x^7 - 1 = 0$ সমীকণটি সমাধান করুন এবং দেখান যে $2\cos\frac{2\pi}{7}$, $2\cos\frac{4\pi}{7}$, $2\cos\frac{8\pi}{7}$ হল

$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ সমীকরণের বীজ।

প্রঃ 4. α, $x^8 - 1 = 0$ সমীকরণের বিশেষ বীজ হলে দেখান যে

$$(\alpha+2)(\alpha^2+2)\cdots\cdots(\alpha^7+2)=\frac{2^8-1}{3}$$

এবং $$1+3\alpha+5\alpha^2+\cdots\cdots+15\alpha^7=\frac{16}{\alpha-1}$$

প্রঃ 5. $x^{15} - 1 = 0$ সমীকরণের বিশেষ বীজগুলি নির্ণয় করুন। দেখান যে, $2\cos\frac{2\pi}{15}$, $2\cos\frac{4\pi}{15}$, $2\cos\frac{8\pi}{15}$, $2\cos\frac{16\pi}{15}$ হল $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0$

প্রঃ 6. $z=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$ এই রূপান্তরের দ্বারা

$4x^4 - 85x^3 + 357x^2 - 340x + 64 = 0$

সমীকরণকে একটি অন্যোন্য সমীকরণে রূপান্তরিত করুন, এবং এটি সমাধান করুন।

প্রঃ 7. দেখান যে n মৌলিক সংখ্যা হলে, $x^{2n} - 1 = 0$ সমীকরণের বিশেষ বীজগুলি হল $x^n + 1 = 0$ এর জটিল বীজগুলি।

6.10 উত্তরমালা

1. (i) $\pm i, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ (ii) $1, \pm i, -3, -\frac{1}{3}$ (iii) $\pm i, \frac{\pm(3+\sqrt{5})i}{2}, \frac{\pm(3-\sqrt{5})i}{2}$

(iv) $\pm 1, \pm i, -1, \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5})$

2. (i) $\pm i, \pm i, \frac{1}{4}(3 \pm \sqrt{7}i)$ (ii) $-1, \pm i, \frac{1}{4}(3 \pm \sqrt{7}i)$

3. **সংকেত :** বীজগুলি $\cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$\alpha = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$ ধরলে বীজগুলি $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^3}$, $x^7 - 1$-কে $x - 1$ দিয়ে ভাগ করে পাই

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x - \alpha)\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)(x - \alpha^2)\left(x - \frac{1}{\alpha^2}\right)(x - \alpha^3)\left(x - \frac{1}{\alpha^3}\right)$$

$$= \left\{x^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)x + 1\right\}\left\{x^2 - \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)x + 1\right\}\left\{x^2 - \left(\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}\right) + 1\right\}$$

x^3 দিয়ে ভাগ করে

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = \left\{\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right\}\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)\right\}\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}\right)\right\}$$

$x + \frac{1}{x} = t$ বসালে

$$t^3 + t^2 - 2t - 1 = \left(t - 2\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(t - 2\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(t - 2\frac{\cos 8\pi}{7}\right)$$

4. **সংকেত :** বিশেষ বীজগুলি হল $\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{3\pi}{4} \pm i\sin\frac{3\pi}{4}$

$\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \alpha$ ধরলে, সমস্ত বীজগুলি $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6, \alpha^7$

সুতরাং, $(x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2) \ldots\ldots (x-\alpha^7) = x^8 - 1$

এখানে $x = -2$ বসান এবং দেখান $(2+\alpha)(2+\alpha^2)-(2+\alpha^7)=\dfrac{2^8-1}{3}$

এবার দেখান যে, $(\alpha - 1)(15\alpha^7 + 13\alpha^6 + \ldots\ldots + 3\alpha + 1)$

$$= \alpha(15\alpha^7 + 13\alpha^6 + \ldots + 3\alpha + 1) - 15\alpha^7 - 13\alpha^6 - \ldots\ldots - 3\alpha - 1$$
$$= 15\alpha^8 - 2(\alpha^7 + \alpha^6 + \ldots\ldots \alpha + 1) + 1 = 16$$

($\because$ $\alpha^8 = 1$, এবং $1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^7 = 0$)

5. **সংকেত ঃ** উদাহরণ 3-এর মতো করুন।

6. $\frac{1}{4}, 1, 4, 16$

7. **সংকেত ঃ** উদাহরণ 4 অনুসরণ করুন।

ব্যবহৃত পুস্তকের তালিকা ঃ

(i) Theory of Equations, W. S. Burnside, A. W. Panton, S. Chand & Co. 1954

(ii) Higher Algebra (Classical), S. K. Mapa, Asoke Prakasan, 2000

(iii) Higher Algebra Barnard and Child, Macmillan 1952.

একক 7 ❑ ক্রমিক ভগ্নাংশ (Continued Fraction)

7.1 প্রস্তাবনা

নীচে যে ভগ্নাংশটি উদাহরণ স্বরূপ উল্লেখিত হল সেই জাতীয় ভগ্নাংশের কথা আমরা বিদ্যালয় পাঠ্য থেকে জানি ঃ—

$$2+\cfrac{3}{5-\cfrac{6}{4+\cfrac{2}{3+\cfrac{1}{5}}}}$$

ভগ্নাংশের নিয়ম মেনে সরল করে আমরা এর মান $=\dfrac{385}{137}$ পাই।

এখন সাধারণভাবে এই জাতীয় ভগ্নাংশ সম্বন্ধে আরও ভাল করে জানতে হলে এবং নানা প্রয়োগ দেখতে হলে এ জাতীয় ভগ্নাংশের তত্ত্ব সম্বন্ধে জ্ঞান প্রয়োজন। এই জাতীয় ভগ্নাংশকে সাধারণতঃ ক্রমিক ভগ্নাংশ (Continued Fraction) বলা হয়। সপ্তদশ অষ্টাদশ শতাব্দীতে ইউরোপে এই বিষয়ে প্রচুর পড়াশুনো হয়েছে। পূর্ণসংখ্যার আলোচনায় ক্রমিক ভগ্নাংশের প্রয়োগ রয়েছে। বর্তমান কালে কম্পিউটার সাহায্যে বহু গণনা পদ্ধতিতে ক্রমিক ভগ্নাংশের ব্যবহার হয়েছে। এই এককে আমরা ক্রমিক ভগ্নাংশ সম্বন্ধে আলোচনা করব।

7.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনি

- ক্রমিক ভগ্নাংশের সাহায্যে বিশেষ ধরনের সমীকরণের সমাধান করে বীজগুলি নির্ণয় করতে সক্ষম হবেন।
- করণী-কে অসীম ক্রমিক ভগ্নাংশ রূপে প্রকাশ করে তার বিভিন্ন আসন্ন মান নির্ণয় করতে পারবেন।

7.3 ক্রমিক ভগ্নাংশ (Continued Fraction) পরিচিতি

a_1, a_2 ......, b_1, b_2 .... কতগুলি ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে

$$a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \cfrac{b_5}{a_5 + \cdots a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n}}}}}$$

এইরূপ ভগ্নাংশকে ক্রমিক ভগ্নাংশ বলা হয়। এখানে $a_1, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots \frac{b_n}{a_n}$ এগুলিকে যথাক্রমে প্রথম পদ, দ্বিতীয় পদ ...... n-তম পদ বলা হয়। এখানে ক্রমিক ভগ্নাংশটিতে n-সংখ্যক পদ আছে।

উপরের ক্রমিক ভগ্নাংশটিকে

$$a_1 + \frac{b_2}{a_2 +}\,\frac{b_3}{a_3 +}\,\frac{b_4}{a_4 +}\cdots\frac{b_n}{a_n}$$

এইরূপে লেখা হয়। উপরের ক্রমিক ভগ্নাংশে সসীম সংখ্যক পদ আছে।

আমরা প্রথম একটি পদ, প্রথম দুইটি পদের যোগফল, প্রথম তিনটি পদের যোগফল এদের যথাক্রমে u_1, u_2, u_3 দিয়ে চিহ্নিত করলে পাই,

$$u_1 = \frac{a_1}{1},\ u_2 = a_1 + \frac{b_2}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + b_2}{a_2}$$

$$u_3 = a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3}} = \frac{\left\{a_1\left(a_2 + \frac{b_3}{a_3}\right) + b_2\right\}}{\left(a_2 + \frac{b_3}{a_3}\right)}$$

$$= \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 b_3 + b_2 a_3}{a_2 a_3 + b_3} = \frac{a_3(a_1 a_2 + b_2) + a_1 b_3}{a_2 a_3 + b_3}$$

এইভাবে n-তম পদ পর্যন্ত যোগ করে যা পাওয়া যায় তাকে u_n দিয়ে চিহ্নিত করলে, উপরের ক্রমিক ভগ্নাংশের যোগফল u_n। এখন উপরের $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$ এর রাশিগুলিকে যথাক্রমে $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots\ldots \frac{p_n}{q_n}$ দিয়ে লিখতে পারা যায়, যেখানে $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ গুলি হল $u_1, u_2 \ldots\ldots u_n$ -এর লব (numerator) এবং $q_1, q_2, \ldots\ldots q_n$ হল হর (denominator). এখানে (p_1, q_1) বা, $(p_2, q_2) \ldots\ldots (p_n, q_n)$ -এর রূপে এদের মধ্যে কোনো সাধারণ উৎপাদক থাকলেও সেটাকে বাদ (cancel) করা হয়নি অর্থাৎ লঘিষ্ঠ ভগ্নাংশে পরিণত করা হয়নি। এরকম 'প্রথা অনুসরণ' করে আমরা ক্রমিক ভগ্নাংশের পদ গুলিকে লিখব। (এর কারণ, এই প্রথা অনুসরণ করলে এদের একটি সাধারণ সূত্রে লেখা যাবে)। উপরের আলোচনা থেকে পাই

$p_1 = a_1,\ q_1 = 1,\ p_2 = a_2 a_1 + b_2,\ q_2 = a_2,$

$p_3 = a_3 (a_2 a_1 + b_2) + b_3 a_1 = a_3 p_2 + b_3 p_1$

$q_3 = a_3 a_2 + b_3 = a_3 q_2 + b_3 q_1$ ইত্যাদি।

আমরা পরে প্রমাণ করব যে সাধারণ ভাবে লেখা যায় $p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}$

$$q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}$$

$$n = 2, 3, \ldots\ldots$$

$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots\ldots \frac{p_n}{q_n}$ -কে যথাক্রমে প্রথম কনভারজেন্ট, দ্বিতীয় কনভারজেন্ট, ... n-তম কনভারজেন্ট বলা হয়।

মন্তব্য ঃ ক্রমিক ভগ্নাংশের গঠন থেকে সহজেই বোঝা যায় যে যদি কোনো ক্রমিক ভগ্নাংশে a_2, b_2, b_3 কে একটি অশূন্য সংখ্যা দিয়ে গুণ করা হয়, তার ফলে ক্রমিক ভগ্নাংশটির মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। এভাবে a_3, b_3, b_4 কে অথবা a_r, b_r, b_{r+1} কে কোনো অশূন্য সংখ্যা দিয়ে গুণ করলেও ক্রমিক ভগ্নাংশের মান অপরিবর্তিত থাকে।

উদাহরণ স্বরূপ

$$\frac{3}{6+}\frac{3}{6+}\frac{3}{6+}\cdots = \frac{1}{2+}\frac{1}{6+}\frac{1}{2+}\frac{1}{6+}\cdots$$

(যেহেতু b_2, a_2, b_3 -কে $\frac{1}{3}$ দিয়ে গুণ ও b_4, a_4, b_5 -কে $\frac{1}{3}$ দিয়ে গুণ করে এবং এভাবে করে গেলে বামের ক্রমিক ভগ্নাংশ ডানের ক্রমিক ভগ্নাংশে পরিণত হয়।

উদাহরণ 2. $\frac{1}{2+}\frac{2}{3+}\frac{3}{4+}\frac{4}{5+}$ এই ক্রমিক ভগ্নাংশের বিভিন্ন কন্ভারজেন্ট নির্ণয় করুন।

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{2+\frac{2}{3}} = \frac{3}{8}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{1}{2+\frac{2}{3+\frac{3}{4}}} = \frac{15}{38}$$

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{1}{2+\frac{2}{3+\frac{3}{4+\frac{4}{5}}}} = \frac{87}{222}$$

উদাহরণ 3. $\frac{1}{1-}\frac{2}{2-}\frac{3}{3-}\frac{4}{4}$ এই ক্রমিক ভগ্নাংশের বিভিন্ন কনভারজেন্ট নির্ণয় করুন।

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{1-\frac{2}{2}} = \frac{2}{0}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{1}{1-\frac{2}{2-\frac{3}{3}}} = \frac{3}{-3}$$

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{1}{1-\frac{2}{2-\frac{3}{3-\frac{4}{4}}}} = \frac{1}{1-\frac{2}{2-\frac{12}{8}}} = \frac{1}{1-\frac{16}{4}} = \frac{4}{-12}$$

7.3.1. অসীম ক্রমিক ভগ্নাংশ (Infinite Continued Fraction)

যদি ক্রমিক ভগ্নাংশের পদসংখ্যা অসীম হয় তা হলে তার মান নির্ণয় করতে সিকুয়েন্সের কন্ভারজেন্স-এর ধারণা প্রয়োজন। যদি n-তম কন্ভারজেন্ট $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ হয়, তবে অসীম ক্রমিক ভগ্নাংশটি অভিসারী হবে যখন

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$ এটির কোনো নির্দিষ্ট মান থাকে। এই নির্দিষ্ট লিমিটকেই অসীম ক্রমিক ভগ্নাংশের মান বলা হবে। ঐ সিকুয়েন্সের কোনো সসীম লিমিট না থকলে ক্রমিক ভগ্নাংশটি অর্থহীন হবে।

7.3.1.1 আবৃত্ত ক্রমিক ভগ্নাংশ (Recurring Continued Fraction)

যদি একটি অসীম ক্রমিক ভগ্নাংশ এমন হয় যে একটি পদের পর থেকে কয়েকটি পদ পরপর বারংবার আসতে থাকে অর্থাৎ তারাই পুনঃপুনঃ পদ হিসাবে থাকে, তাহলে ঐ ক্রমিক ভগ্নাংশকে আবৃত্ত ক্রমিক ভগ্নাংশ বলা হয় যেমন ঃ

$$1+\frac{2}{3+}\frac{2}{3+}\frac{2}{3+}\cdots\cdots \text{ অসীম পর্যন্ত}$$

এখানে $\frac{2}{3}$ পদটি সর্বদাই দ্বিতীয় পদ থেকে শুরু করে বারংবার আসছে— আমরা এক্ষেত্রে ভগ্নাংশটিকে লিখব

$$1+\underset{*}{\frac{2}{3}}\ ।$$

আবার যদি,

$$\frac{d}{c+}\frac{a}{b+}\frac{b}{a+}\frac{c}{d+}\frac{b}{a+}\frac{c}{d+}\frac{b}{a+}\frac{c}{d+}\cdots\cdots \text{ এই ক্রমিক ভগ্নাংশটি}$$

$$\frac{d}{c+}\frac{a}{b+}\underset{*}{\frac{b}{a+}}\underset{*}{\frac{c}{d+}} \text{ এইরূপে লিখতে পারি।}$$

এখানে, তারকা চিহ্নিত পদদুটি বারংবার ও পরপর আসছে। অতএব এটিও আবৃত্ত ক্রমিক ভগ্নাংশ।

7.3.2 সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ (Simple Continued Fraction)

একটি ক্রমিক ভগ্নাংশ যদি এমন হয় যে তার রূপ হল

$$F = a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+}\cdots\cdots\frac{1}{+a_n}$$

যেখানে a_1, a_2, a_3, a_4 .... এগুলি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, তাহলে এইরূপ ক্রমিক ভগ্নাংশকে সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ বলা হয়। সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ সসীম পদযুক্ত অথবা অসীম সংখ্যক পদযুক্ত হতে পারে।

উপরের সসীম ক্রমিক ভগ্নাংশকে

$$\langle a_1, a_2, a_3, \cdots a_n \rangle$$

এই রূপেও লেখা যায়।

ফলে $\langle a_1, a_2, \cdots a_n \rangle = a_1 + \dfrac{1}{\langle a_2, a_3 \cdots a_n \rangle}$

$$\langle a_2, a_3, \cdots a_n \rangle = a_2 + \frac{1}{\langle a_3, a_4, \cdots a_n \rangle}$$

অসীম সরল ক্রমিক ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে

$\langle a_1, a_2 \cdots \rangle$ এইভাবে লেখা হয়।

7.4 আরোহ পদ্ধতি ও ইউক্লিডের ভাগ প্রক্রিয়া (Method of Induction and Euclidean Division algorithm)

7.4.1 আরোহ পদ্ধতি ঃ

আমরা দুইটি রূপে আরোহী পদ্ধতি (Method of Induction) উল্লেখ করছি।

প্রথম রূপ ঃ ধনত্মক পূর্ণসংখ্যার একটি সাবসেট S যদি এরূপ হয় যে (1) $1 \varepsilon S$ এবং (2) হলে, $m \varepsilon S$ হলে $m + 1 \varepsilon S$ হবে। তাহলে S সেটে সমস্ত ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাগুলি আছে।

দ্বিতীয় রূপ ঃ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার একটি যেটি S যদি এমন হয় যে (1) K (একটি নির্দিষ্ট) পূর্ণ সংখ্যা S-এ থাকে এবং (2) $m \varepsilon S$ হলে $m + 1 \varepsilon S$ হয় (যেখানে $m \geq k$) তাহলে K এবং $K + 1$, $K + 2$ ...... অর্থাৎ K থেকে বড় সমস্ত ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা S সেটে আছে।

আরোহ পদ্ধতি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার ধর্ম থেকে প্রমাণিত হয়। আমরা এখানে এর সত্যতা স্বীকার করে নেব।

কোন উপপাদ্য যদি সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার n-এর জন্য সত্য প্রমাণ করতে হয়, তবে আরোহ পদ্ধতি অনুসারে প্রথমে $n = 1$ এর জন্য সত্য দেখাতে হয়। তারপর উপপাদ্যটি n-এর একটি নির্দিষ্ট মান $n = m$-এর জন্য সত্য স্বীকার করে দেখাতে হয় যে উপপাদ্যটি $n = m + 1$ এর জন্য ও সত্য। এই দুটি শর্ত পূরণ হলে আমরা বলতে পারি যে আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী উপপাদ্যটি সমস্ত ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য সত্য।

7.4.2 ইউক্লিডীয় ভাগ প্রক্রিয়া পদ্ধতি (Euclidean Division Algorithm)

একটি পূর্ণসংখ্যা দিয়ে অন্য একটি পূর্ণসংখ্যাকে ভাগ করলে একটি ভাগ ফল পাওয়া যায় এবং একটি পূর্ণ সংখ্যা অবশিষ্ট থাকে। এই ভাগ পদ্ধতিকে অবলম্বন করে পূর্ণ সংখ্যা সমূহের অনেক ধর্ম নির্ণয় করা যায়।

ইউক্লিডীয় ভাগ প্রক্রিয়া

যদি a ও b দুটি পূর্ণ সংখ্যা হয় যেখানে $b > 0$; তবে এমন দুটি পূর্ণ সংখ্যা q ও r আছে যে

(1) .... $a = bq + r,$ যেখানে $0 \le r < b$

এবং q ও r অনন্য।

এখানে q -কে ভাগফল (quotient) এবং r -কে অবশেষ (remainder) বলা হয়। (a ভাজ্য ও b ভাজক)

প্রমাণ ঃ যদি আমরা

........, $-3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b$ .... এই সিকুয়েন্স পরীক্ষা করি

তবে সহজেই বুঝতে পারি (আর্কিমেডীয় ধর্ম অনুসারে) উপরের সিকুয়েন্সে এমন দুইটি পরপর সংখ্যা পাব যে a তার মধ্যে থাকবে। যেহেতু একটি মাত্র ক্ষেত্রেই এই রকম হতে পারে অতএব q এবং r অনন্যভাবে নিরূপিত হয়।

উদাহরণস্বরূপ যদি $a > 0$ হয় এবং xb ও $(x + 1)b$-এর মধ্যে a থাকে, যেখানে $x > 0$, তা হলে $q = x$ এবং $r = a - xb$ যেহেতু $xb \le a < (x + 1)b$ অতএব $a - xb \ge 0$ এবং $a - xb < b$. অনুরূপ ভাবে $a < 0$ হলে, এমন একটি $(-y)$, $y > 0$ পাওয়া যাবে যে,—$(y + 1) b \le a < -yb$

সুতরাং $a - \{-(y+1)\}b = r \ge 0$ এবং $r < b$.

যদি a, b এর একটি গুনিতক হয় তবে সহজেই বোঝা যায় $r = 0$

মন্তব্য ঃ আমরা ই. ভা. প.-তে b -কে ধনাত্মক ধরেছি। যদি b ঋণাত্মক হয় তবে $c = -b$ বসালে $c > 0$ এবং ই. ভা. প. অনুসারে

$a = cq + r$ যেখানে $0 \le r < c$

$= -bq + r$,,

$= b(-q) + r$,,

অতএব অনন্য দুইটি সংখ্যা $-q$ ও r পাওয়া যায় যাতে $a = b(-q) + r$ হয়, যেখানে $0 \le r < -b$.

উদাহরণ 4. $a = 5, b = 2$ হলে আমরা যদি $-6, -4, -2; 0, 2, 4, 6$ .... সিকুয়েন্স পরীক্ষা করি তবে দেখি যে $4 < 5 < 6$ বা, $2b < a < 3b$ (এখানে $x = 2 > 0$)

$\therefore a = 2b + (a - 2b) = 2b + 1$ এখানে $q = 2, r = 1 < 2$

আবার যদি ধরি

$a = -5, b = 2$ তা হলে আমরা যদি $-6, -4, -2, 0, 4, 6,$ .... পরীক্ষা করি

তবে দেখি যে $-6 < -5 < -4$ বা, $-3b < -a < -2b$ (এখানে $y = 2$)

$r = a - \{-(y + 1)b\} = -5 + (2 + 1) 2 = 1$

$-5 = -3(2) + 1$

7.5 ক্রমিক ভগ্নাংশের কন্‌ভারজেন্টের রেকারেন্স ফর্মুলা

উপপাদ্য 1.

$$a_1 + \frac{b_2}{a_2 +} \frac{b_3}{a_3 + \cdots} \frac{b_n}{a_n + \cdots}$$

এই ক্রমিক ভগ্নাংশে, যদি n-তম কন্‌ভারজেন্ট হয় $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ হয়, তা হলে

$$\left.\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

এই ফর্মুলা (বা সূত্র) n = 2, 3, ... ইত্যাদির জন্য সত্য। (এখানে ফর্মুলা প্রয়োগের জন্য $p_0 = 1$, $q_0 = 0$ ধরে নেওয়া হবে।)

প্রমাণ ঃ $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1}{1}$ অর্থাৎ $p_1 = a_1, q_1 = 1$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 a_1 + b_2}{a_2} = \frac{a_2 p_1 + b_2 p_0}{a_2 q_1 + b_2 q_0}$$

অর্থাৎ, $p_2 = a_2 p_1 + b_2 p_0$

$$q_2 = a_2 q_1 + b_2 q_0$$

অতএব n = 2 এর জন্য (2) সত্য।

ধরা যাক n = m (≥ 2) এর জন্য (2) সত্য।

m-তম কন্‌ভারজেন্ট থেকে (m + 1)-তম কন্‌ভারজেন্ট পাওয়া যেতে পারে যদি a_m স্থানে আমরা $a_m + \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} = a'_m$ লিখি। অর্থাৎ

$u_{m+1} = \frac{p'_m}{q'_m}$ যেখানে, প্রদত্ত ক্রমিক ভগ্নাংশে a_m স্থানে $a'_m = a_m + \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}$ লেখা হয়েছে।

অতএব,

$$u_{m+1}=\frac{a'_m p_{m-1}+b_m p_{m-2}}{a'_m q_{m-1}+b_m q_{m-2}} \qquad [\because \text{ (2) } n=m \text{ এর জন্য সত্য }]$$

$$=\frac{\left(a_m+\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}\right)p_{m-1}+b_m p_{m-2}}{\left(a_m+\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}\right)q_{m-1}+b_m q_{m-2}}$$

$$=\frac{a_{m+1}\left(a_m p_{m-1}+b_m p_{m-2}\right)+b_{m+1}p_{m-1}}{a_{m+1}\left(a_m q_{m-1}+b_m q_{m-2}\right)+b_{m+1}q_{m-1}}$$

$$=\frac{a_{m+1}p_m+b_{m+1}\,p_{m-1}}{a_{m+1}q_m+b_{m+1}q_{m-1}} \qquad (n=m \text{ এর জন্য (2)-এর প্রয়োগ করে})$$

$$=\frac{p_{m-1}}{q_{m+1}}$$

অতএব $p_{m+1}=a_{m+1}p_m+b_{m+1}p_{m-1}$.

$q_{m+1}=a_{m+1}\,q_m+b_{m+1}\,q_{m-1}$

অতএব আরোহ্ পদ্ধতি প্রয়োগ করে আমরা প্রমাণ করলাম যে (2) ফর্মুলা দুটি $n\geq 2$ সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার জন্য সত্য।

উদাহরণ 5.

$$\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots \quad \text{বা,}\ \frac{1}{\dot{a}+}\frac{1}{\dot{b}}$$

এই আবৃত্ত ক্রমিক ভগ্নাংশের n-তম কনভারজেন্ট $\frac{p_n}{q_n}$ হলে p_n, q_n সমূহের জন্য নিম্নের সমীকরণ দুটি সত্য ঃ

$$p_n-(ab+2)p_{n-2}+p_{n-4}=0$$

$$q_n-(ab+2)q_{n-2}+q_{n-4}=0$$

[এখানে $p_1 = 1, q_1 = a, \dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}} = \dfrac{b}{ab+1}$

$p_2 = b, q_2 = ab + 1$

$p_3 = a_3p_2 + b_3p_1$

....

n জোড় সংখ্যা হলে $p_n = b\,p_{n-1} + p_{n-2}$ ..... (i) কারণ $a_n = b \;\; b_n = 1$

$q_n = bq_{n-1} + q_{n-2}$ $a_{n-1} = a, b_{n-1} = 1$

$p_{n-1} = ap_{n-2} + p_{n-3}$ ..... (ii) $a_{n-2} = b, b_{n-2} = 1$

$q_{n-1} = aq_{n-2} + q_{n-3}$

$p_{n-2} = bp_{n-3} + p_{n-4}$ .... (iii)

$q_{n-2} = bq_{n-3} + q_{n-4}$

(i), (ii), (iii) থেকে p_{n-1} ও p_{n-3} অপনয়ন করে পাই

$$\begin{aligned} p_n &= bp_{n-1} + p_{n-2} \\ &= b(ap_{n-2} + p_{n-3}) + p_{n-2} \\ &= (ab+1)\,p_{n-2} + p_{n-2} - p_{n-4} = (ab+2)\,p_{n-2} - p_{n-4} \end{aligned}$$

অনুরূপে q_n-এর বেলায়ও পাই $q_n = (ab+2)\,q_{n-2} - q_{n-4}$

n বিজোড় হলে কেবল মাত্র a স্থানে b ও b স্থানে a হবে। ফলে সম্পর্কটি একরূপেই থাকবে।

(উদাহণটি আপনি সম্পূর্ণ সমাধান করুন।)

উদাহরণ 6. দেখাতে হবে,

$$2 - \frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\cdots\cdots$$

এর n-তম কন্‌ভারজেন্ট হল $\dfrac{n+1}{n}$।

প্রথম কন্‌ভারজেন্ট $\dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{2}{1}$

দ্বিতীয় কন্‌ভারজেন্ট $= 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

$\therefore\; p_2 = 3,\; q_2 = 2$

ধরা যাক, $n = m - 1$ ও m এর জন্য সম্পর্কটি সত্য, অর্থাৎ $\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} = \frac{m-1+1}{m-1}$

এবং $\frac{p_m}{q_m} = \frac{m+1}{m}$ যেখানে m নির্দিষ্ট ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$$\therefore \quad \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} = \frac{a_m p_m + b_m p_{m-1}}{a_m q_m + b_m q_{m-1}}$$

এখানে, $a_m = 2, b_m = -1$

অতএব, $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} = \frac{2(m+1)-m}{2m-(m-1)} = \frac{m+2}{m+1} = \frac{(m+1)+1}{(m+1)}$

অতএব আরোহ্ পদ্ধতি অনুযায়ী যে কোনও n-এর জন্য $\frac{p_n}{q_n} = \frac{n+1}{n}$ সত্য। আর যেহেতু $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

অতএব অসীম ভগ্নাংশটির মান হল 1.

উদাহরণ 7.

$x > 1$ একটি বাস্তব সংখ্যা এমন যে, $x = a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+}\frac{1}{a_5+}$

$\frac{1}{x}$ এর ক্রমিক ভগ্নাংশ এবং কন্‌ভারজেন্টগুলি কিরূপ?

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+} \cdots\cdots$$

x-এর কন্‌ভরজেন্টগুলি $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots\ldots$ হলে $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1}{1}$, $\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}$ ইত্যাদি

যেহেতু $\frac{1}{x} = \frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+} \cdots\cdots$

অতএব $\frac{1}{x}$-এর প্রথম কন্‌ভারজেন্ট $\frac{p_1'}{q_1'} = \frac{1}{a_1} = \frac{q_1}{p_1}$

দ্বিতীয় কন্‌ভারজেন্ট $\frac{p_2'}{q_2'} = \frac{a_2}{a_2 a_1 + 1} = \frac{q_2}{p_2}$

অতএব $\frac{1}{x}$ এর n-তম কন্‌ভারজেন্ট

$$=\frac{p'_n}{q'_n}=\frac{a'_n p'_{n-1}+b'_n p'_{n-2}}{a'_n q'_{n-1}+b'_n q'_{n-2}}$$

অতএব $\frac{p'_3}{q'_3}=\frac{a'_3 p'_2+b'_3 p'_1}{a'_3 q'_2+b'_3 q'_1}=\frac{a_3 q_2+q_1}{a_3 p_2+p_1}=\frac{q_3}{p_3}$

আরোহ্ পদ্ধতি প্রয়োগ করে দেখানো যায় যে $\frac{1}{x}$ এর n-তম কনভারজেন্ট $=\frac{p_n}{q_n}$

উদাহরণ 8. $\frac{3}{2+}\frac{3}{2+}\frac{3}{2+}$ .... এই অসীম ক্রমিক ভগ্নাংশের মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ অসীম ক্রমিক ভগ্নাংশটি = x হলে সহজেই আমরা দেখছি যে

$$x=\frac{3}{2+}$$

অতএব আমরা পাই

$x=\frac{3}{2+x}\Rightarrow x^2+2x-3=0\Rightarrow x=-3,1$ যেহেতু x ঋণাত্মক নয়, অতএব $x=1$.

উদাহরণ 9. দেখাতে হবে যে

$\frac{b}{a+}\frac{b}{a+}\frac{b}{a+}$ .... এর n-তম কন্‌ভারজেন্ট হল $\frac{p_n}{q_n}$

যেখানে $p_n=-\frac{\alpha\beta(\alpha^n-\beta^n)}{\alpha-\beta}$

$$q_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

যেখানে α , β হল $x^2-ax-b=0$ এর বীজ।

প্রমাণ ঃ $\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=-b$

আবার $\frac{p_1}{q_1}=\frac{b}{a}$ $\therefore p_1=b,\ q_1=a$ অতএব $p_1=-\alpha\beta,\ q_1=\alpha+\beta$. অতএব $n=1$ এর জন্য p_n, q_n এর মান মিলছে।

এবার p_n, q_n এর ফর্মুলা $\left.\begin{array}{l} n = m-1 \\ \text{এবং } n = m \end{array}\right\}$ এর জন্য সত্য ধরলে

আমরা দেখি

$$p_{m+1} = ap_m + bp_{m-1}$$

$$= a\left\{-\frac{\alpha\beta(\alpha^m - \beta^m)}{\alpha-\beta}\right\} - \frac{b\alpha\beta(\alpha^{m-1} - \beta^{m-1})}{\alpha-\beta}$$

$$= \frac{ab(\alpha^n - \beta^m) + b^2(\alpha^{m-1} - \beta^{m-1})}{\alpha-\beta} = \frac{b\{(\alpha+\beta)(\alpha^n - \beta^n) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})\}}{\alpha-\beta}$$

$$= \frac{b(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})}{\alpha-\beta}$$

অতএব p_{m+1} এর জন্য ও ফর্মুলাটি সত্য। একইভাবে q_{m+1}-এর জন্যও ফর্মুলাটি সত্য দেখান যায়। (আপনি দেখান)। অতএব আরোহ্ পদ্ধতি অনুযায়ী n এর সমাপ্ত ধনাত্মক মান $(n \geq 2)$ এর জন্য ফর্মুলাটি সত্য।

উপপাদ্য 2 : সসীম সরল ক্রমিক ভগ্নাংশের পদসংখ্যা প্রয়োজনমতো জোড় বা বিজোড় করা যেতে পারে।

ধরা যাক সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ

$$a_1 + \frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\quad\frac{1}{+a_n}\text{-তে}$$

n-সংখ্যক পদ আছে।

যদি $a_n \neq 1$, তা হলে $a_n > 1$ হবে, এবং তখন $(\because\ a_n - 1 \geq 1)$

$$a_1 + \frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\quad\frac{1}{+a_n}$$

$$= a_1 + \frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\quad\frac{1}{+(a_n-1)+}\,\frac{1}{1}\ \ (n+1 \text{ সংখ্যক পদ})$$

আর $a_n = 1$ হলে ক্রমিক ভগ্নাংশটি লেখা যায়

$$a_1 + \frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\quad\frac{1}{a_{n-1}+1}\ \ ((n-1) \text{ সংখ্যক পদ})$$

অতএব পদসংখ্যা n থাকলে ক্রমিক ভগ্নাংশটির পদসংখ্যা হয় n + 1 না হয় (n − 1) করা যায়। ফলে উপপাদ্যটি সত্য।

উপপাদ্য 3. যে কোনো র‍্যাশনাল মূলদ সংখ্যাকে একটি অসীম সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ হিসাবে লিখতে পারা যায়।

প্রমাণ ঃ র‍্যাশনাল (মূলদ) সংখ্যাটি ধনাত্মক ধরে আমরা প্রমাণ করব। কেননা ধনাত্মকের জন্য সত্য হলে ঋণাত্মক সংখ্যার জন্য সত্য হবে। (কারণ তাকে -1 গুণিত একটি ধনাত্মক রাশি হিসাবে লেখা যায়)।

ধরা যাক $\frac{A}{B}$ একটি র‍্যাশনাল সংখ্যা, যেখানে A, B দুইটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

ইউক্লিডীয় ভাগ পদ্ধতি অনুসরণ করে বলতে পারি

$A = Ba_1 + r_1$ যেখানে $0 \le r_1 < B$ এবং $a_1 \ge 0$

(i) .... r_1 শূন্য হলে $\frac{A}{B} = a_1$ এবং এটি একটি সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ। r_1 শূন্য না হলে, আমরা B-কে r_1 দিয়ে ভাগ করে পাই

(ii) ...... $B = a_2 r_1 + r_2$ যেখানে $a_2 \ge 1$

$r_2 = 0$ হলে $\frac{A}{B} = a_1 + \frac{1}{a_2}$ যা একটি সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ। আবার r_2 শূন্য না হলে, r_1 -কে r_2 দিয়ে ভাগ করে পাই

$r_1 = a_3 r_2 + r_3$, $a_3 \ge 1$

এখানে $r_3 = 0$ হলে $\frac{A}{B} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}$ এবং $0 \le r_3 < r_2$.

এরূপে আমরা যাব এবং সসীম বার করবার পর এক সময় $r_n = 0$ হতে বাধ্য কারণ প্রতি পদক্ষেপে r_1, r_2 ...... পূর্ণ সংখ্যাগুলি এমন যে $r_1 > r_2 > r_3 > \ldots\ldots > r_n \ge 0$. ভাগশেষ শূন্য হওয়ার জন্য সর্বোচ্চপক্ষে r_1 সংখ্যক পদক্ষেপের বেশি দরকার হবে না, কেননা প্রতি পদক্ষেপে অনন্ত 1 করে ভাগশেষ কমবে।

অতএব এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা n আছে যে

(n) .... $r_{n-2} = a_n r_{n-1} + 0 \quad a_n \ge 1.$

এগুলি (i) থেকে (n) ব্যবহার করে পাই

$$\frac{A}{B} = a_1 + \frac{r_1}{B} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{B}{r_1}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_2}{r_1}}$$

$$= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{r_3}{r_2}}}$$

$$=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+\frac{r_3}{r_2}}$$

$$=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+\frac{r_4}{r_3}}$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\frac{1}{a_{n-1}+\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}}$$

$$=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\frac{1}{+a_{n-1}+}\frac{1}{a_n}$$

অতএব প্রমাণিত হল যে কোন র‍্যাশনাল সংখ্যাকে একটি সরল ক্রমিক ভগ্নাংশে পরিণত করা সম্ভব।

একটি র‍্যাশনাল সংখ্যাকে দুইটি বিভিন্ন সরল ক্রমিক ভগ্নাংশে লেখা যায় কিনা তা নির্ণয় করতে আমরা ধরি $\frac{A}{B}=<a_1,a_2\cdots\cdots a_n>=<b_1,b_2\cdots\cdots b_m>$ এখন যেহেতু a_1 এবং b_1 উভয়েই $\frac{A}{B}$ সংখ্যার বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা-অংশ অতএব $a_1=b_1$ কিন্তু

$$<a_1,a_2\cdots\cdots a_n>=a_1+\frac{1}{<a_2,a_3,\cdots\cdots a_n>}$$

$$<b_1,b_2\cdots\cdots b_m>=b_1+\frac{1}{<b_2,b_3,\cdots\cdots b_m>}$$

অতএব $<a_2,a_3,\cdots\cdots a_n>=<b_2,b_3,\cdots\cdots b_m>$

এইভাবে অগ্রসর হয়ে দেখতে পাব যে $a_2=b_2$ ইত্যাদি এবং সবশেষে $n=m$ এবং $a_n=b_m$

কেননা যদি আমরা মনে করি $n<m$ তাহলে আমরা পাই $a_1=b_1, a_2=b_2 \ldots\ldots a_n=<b_n,b_{n+1}\ldots\ldots b_m>$ কিন্তু এটা সম্ভব নয়। কেননা a_n একটি পূর্ণ সংখ্যা এবং $<b_n,b_{n+1},\cdots\cdots b_m>$ পূর্ণসংখ্যা নয়। অতএব $n<m$ হতে পারে না, অতএব $n=m$

(অবশ্য শেষ পদটির বেলায় তফাৎ থাকতে পারে—উপপাদ্য 2 দেখুন)

মন্তব্য ঃ কোনো বাস্তব সংখ্যা র‍্যাশনাল না হলে তাকে কখনও সসীম সরল ক্রমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যায় না। কেননা প্রত্যেকটি সসীম সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ একটি র‍্যাশনাল সংখ্যার সমান।

7.6 উদাহরণের সাহায্যে সরল ক্রমিক ভগ্নাংশের বিভিন্ন ধর্ম

ধরা যাক $F = a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +}\cdots$

একটি সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ।

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ এদের যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ... আংশিক কোশেন্ট (partial quotient) বলা হয়।

আবার, $f_1 = a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +}\cdots$

$$f_2 = a_2 + \frac{1}{a_3 +}\frac{1}{a_4 +}\cdots$$

$$f_3 = a_3 + \frac{1}{a_4 +}\cdots$$

....

$$f_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1} +}\frac{1}{a_{n+2} +}\cdots$$

লিখলে আমরা $f_1, f_2, \ldots\ldots f_n$ ইত্যাদিকে বলে থাকি সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ-এর যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, ... n- তম সম্পূর্ণ কোশেন্ট (complete quotient). উপরের সংজ্ঞা থেকে সহজেই দেখা যাচ্ছে যে,

$$F = f_1 \text{ এবং } f_1 = a_1 + \frac{1}{f_2} = a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{f_3}$$

$$= a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +}\frac{1}{f_4}$$

$$= a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +}\cdots\frac{1}{a_{n-1} +}\frac{1}{f_n}$$

আবার আমরা জানি $u_1 = \frac{p_1}{q_1}, u_2 = \frac{p_2}{q_2}, \cdots, u_n = \frac{p_n}{q_n}$

ইত্যাদি হল প্রথম, দ্বিতীয়, ... n-তম কন্‌ভারজেন্ট।

$$u_1 = a_1\,,\; u_2 = a_1 + \frac{1}{a_2}\,, u_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 +}\,\frac{1}{a_3}$$

....

$$u_n = a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +} \cdots\cdots \frac{1}{a_{n-1} +}\frac{1}{a_n}$$

উপপাদ্য 4 : $a_1 + \dfrac{1}{a_2 +}\dfrac{1}{a_3 +}\cdots\cdots$

এই সরল ক্রমিক ভগ্নাংশের n-তম কন্‌ভারজেন্টটি $\dfrac{p_n}{q_n}$ হলে ($p_0 = 1$, $q_0 = 0$ ধরে)

$$p_n = a_n\, p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

প্রমাণ ঃ (উপপাদ্য 1-এর পদ্ধতি অনুসরণ করে প্রথমে $n = 2$ এর জন্য প্রমাণ করুন। পরে উপরের ফর্মুলাটি $n = m, m-1$ এর জন্য সত্য ধরে প্রমাণ করুন যে ফর্মুলাটি $m + 1$-এর জন্য সত্য। এবার আরোহ্ প্রণালী প্রয়োগ করে প্রমাণ করুন যে উপরের ফর্মুলাটি প্রতিটি n-এর জন্য সত)

উদাহরণ 9.

$\dfrac{22}{7}$ -কে সরল ক্রমিক ভগ্নাংশে পরিণত করুন।

$$22 = 3\times 7 + 1$$

$$7 = 7\times 1 + 0$$

অতএব $\dfrac{22}{7} = 3 + \dfrac{1}{7}$ হ্ল সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ।

উদাহরণ 10.

3·14159 কে সরল ক্রমিক ভগ্নাংশে পরিণত করুন।

$$3\cdot 14159 = 3 + \frac{14159}{100000}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{\cfrac{100000}{14159}}$$

$$=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{887}{14159}}$$

$$=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{\cfrac{14159}{887}}}=3+\frac{1}{7+}\,\cfrac{1}{15+\cfrac{854}{887}}\quad=3+\frac{1}{7+}\,\frac{1}{15+}\,\cfrac{1}{1+\cfrac{33}{854}}$$

$$=3+\frac{1}{7+}\,\frac{1}{15+}\,\frac{1}{1+}\,\cfrac{1}{25+\cfrac{29}{33}}$$

$$=3+\frac{1}{7+}\,\frac{1}{15+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{25+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{7+}\,\frac{1}{4}$$

$$=3+\frac{1}{7+}\,\frac{1}{15+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{25+}\,\frac{1}{1+}\,\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{29}}$$

উদাহরণ 11.

$\sqrt{8}-2$ -কে একটি সরল ক্রমিক ভগ্নাংশে পরিণত করুন।

$\sqrt{8}-2$ এই সংখ্যাটি $\sqrt{8}-2>0$ এবং $\sqrt{8}-2<1$.

অতএব $\sqrt{8}-2=\dfrac{4}{\sqrt{8}+2}=\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{8}+2}{4}}$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{8}-2}{4}}$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{8}+2}}$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\left(\sqrt{8}-2\right)}}$$

অতএব দেখা যাচ্ছে সংখ্যাটি আবার ফিরে আসছে।

অতএব এটি একটি আবৃত্ত ক্রমিক ভগ্নাংশ এবং

$$=\frac{1}{\dot{1}+}\,\frac{1}{\dot{4}+}$$

উদাহরণ 12. নিম্নের সংখ্যাগুলিকে সরল ক্রা ভগ্নাংশ-এ (সরল ক্রমিক ভগ্নাংশে) পরিণত করুন এবং পদ সংখ্যা জোড় ও বিজোড় উভয় রূপে প্রকাশ করুন

(i) $\frac{9}{19}$, (ii) $\frac{33}{47}$, (iii) $\frac{101}{43}$

এখানে আমরা (ii)-এর সমাধান দেখাব। অপর দুইটি আপনারা করুন।

$$\frac{33}{47}=\frac{1}{\frac{47}{33}}=\frac{1}{1+\frac{14}{33}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{33}{14}}}=\frac{1}{1+}\frac{1}{2+\frac{5}{14}}$$

$$=\frac{1}{1+}\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{4}{5}}}$$

$$=\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}$$

$$=\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4}$$

এখানে পদসংখ্যা = 5

ক্রমিক ভগ্নাংশকে যদি লিখি

$$=\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1}$$

তবে পদসংখ্যা 6 হয়।

7.7 সরল ক্রমিক ভগ্নাংশের কন্‌ভারজেন্ট সমূহের বিভিন্ন ধর্ম (Properties of Convergents of a simple harmonic continued fraction)

$$F = a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3 +} \quad \frac{1}{a_n +} \qquad (1)$$

এই ক্রমিক ভগ্নাংশের বিভিন্ন কন্‌ভারজেন্টগুলি হল $u_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $u_2 = \frac{p_2}{q_2}$, $\ldots\ldots u_n = \frac{p_n}{q_n} \ldots\ldots$

আমরা উপপাদ্য 4 থেকে জানি,

$$u_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \text{ যখন } n \geq 2$$

যেখানে $p_1 = a_1, q_1 = 1$ এবং,

$p_0 = 1, q_0 = 0$ নেওয়া হয়েছে।

আবার আমরা n-তম সম্পূর্ণ কোশেন্ট f_n-এর সাহায্যে F-কে লিখতে পারি

$$F = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \ldots\ldots \frac{1}{a_{n-1} +} \frac{1}{f_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

যেখানে $f_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1} +} \frac{1}{a_{n+2} +} \ldots\ldots$

উপপাদ্য 2 প্রয়োগ করে আমরা F-কে প্রকাশ করতে পারি [(2) এর রূপটির সাহায্যে] এখন $F = \frac{p'_n}{q'_n}$ যেখানে p'_n, q'_n (2) এর n-তম কন্‌ভারজেন্ট এর লব ও হর।

(1) ও (2)-এর মধ্যে প্রথম (n – 1) তম কন্‌ভারজেন্ট পর্যন্ত সকলেই এক। অতএব,

$$F = \frac{p'_n}{q'_n} = \frac{f_n p_{n-1} + p_{n-2}}{f_n q_{n-1} + q_{n-2}} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

এবার আমরা নিম্নের উপপাদ্যের মাধ্যমে F-এর কন্‌ভারজেন্টগুলির ধর্ম-সমূহ আলোচনা করব।

উপপাদ্য 5.

সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots$ এর (n – 2)-তম ও (n – 1)-তম এবং n-তম কন্‌ভারজেন্ট-গুলি যথাক্রমে $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}},\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},\frac{p_n}{q_n}$ হলে, নিম্নের সম্বন্ধগুলি সত্য :

(a) $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$

(b) $p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n=a_n(-1)^{n-1}\quad(n\geq 2)$

(c) $\left|\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|=\frac{1}{q_nq_{n-1}}\quad(n\geq 2)$

(d) $\frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p_n}{p_{n-1}}$, $\frac{q_n}{q_{n-1}}$ এই ভগ্নাংশগুলি তাদের নিম্নতম পদে বা লঘিষ্ঠ ভগ্নাংশে আছে (অর্থাৎ p_n, q_n এর মধ্যে কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই, ইত্যাদি)

(e) $\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{q_1q_2}-\frac{1}{q_2q_3}+\frac{1}{q_3q_4}\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}$

(f) $\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}$

(g) $\left|\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}\right|=\frac{a_n}{q_nq_{n-2}}$

প্রমাণ : আমরা প্রথমে (a) প্রমাণ করছি। (a)-এর সাহায্য নিয়ে অন্যগুলি পরে প্রমাণ করব।

(a) $\quad p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n$

$=(a_np_{n-1}+p_{n-2})q_{n-1}-p_{n-1}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})$

$=p_{n-2}q_{n-1}-p_{n-1}q_{n-2}$

$=(-1)(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})$ .... (1.1)

(1.1) -এ n এর বদলে n – 1 লিখে আমরা পাই

$p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1}=(-1)(p_{n-2}q_{n-3}-p_{n-3}q_{n-2})$ .... (1.2)

এভাবে n-এর মান 1 করে কমানো হলে আমরা পরপর পাই

$$p_{n-2}\, q_{n-3} - p_{n-3}\, q_{n-2} = (-1)\,(p_{n-3}q_{n-4} - q_{n-3}\, p_{n-4}) \;\ldots\ldots\; (1.3)$$

$$p_2q_1 - p_1q_2 = (-1)(p_1q_0 - p_0q_1) = (-1)(-1) \;\ldots\ldots\; (1.\ n-1)$$

এখন (1.1), (1.2), ..., (1. n − 1) এর গুণ করলে আমরা পাই

$$p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^{n-1}(-1) = (-1)^n$$

এটাই (a) অভেদ। প্রমাণিত

(b) $p_nq_{n-2} - p_{n-2}\, q_n = (a_np_{n-1} + p_{n-2})\, q_{n-2} - p_{n-2}(a_nq_{n-1} + q_{n-2})$

$= a_n(p_{n-1}\, q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}) = a_n(-1)^{n-1}$ ((a) প্রয়োগ করে) ($n \geq 2$)

অতএব (b) প্রমাণিত হল।

(c) এবং (f) $\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n}{q_nq_{n-1}} = \dfrac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}$ ((a) প্রয়োগ করে)

অতএব, $\left|\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \dfrac{1}{|q_nq_{n-1}|} = \dfrac{1}{q_nq_{n-1}}$

যেহেতু $a_1, a_2, \ldots\ldots$ ধনাত্মক অতএব q_n, q_{n-1} এরা ধনাত্মক

(d) $p_n, q_n, p_{n-1}, q_{n-1}$ প্রত্যেকে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং (a) থেকে আমরা জানি

$$p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^n$$

এখন p_n, q_n এর মধ্যে 1 ব্যতীত যদি কোনো পূর্ণসংখ্যা সাধারণ উৎপাদক হিসাবে থাকে, তবে ডান পক্ষেও থাকতে বাধ্য। কিন্তু ডান পক্ষ = 1 অথবা −1, অতএব p_n, q_n পরস্পর মৌলিক। একই ভাবে p_{n-1}, q_{n-1} পরস্পর মৌলিক। আবার p_n, p_{n-1} এর মধ্যেও কোনও সাধারণ উৎপাদক থাকতে পারে না। অনুরূপ ভাবে q_{n-1} ও q_n পরস্পর মৌলিক।

সুতরাং $\dfrac{p_n}{q_n}$, $\dfrac{q_n}{q_{n-1}}$, $\dfrac{p_n}{p_{n-1}}$ এগুলি লঘিষ্ঠ ভগ্নাংশের আকার আছে।

(e) (a) থেকে আমরা পাই

$$p_nq_{n-1} - p_{n-1}\, q_n = (-1)^n$$

যেহেতু q_nq_{n-1} ধনাত্মক, উপরের সম্বন্ধটি q_nq_{n-1} দিয়ে ভাগ করলে পাই

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}} \quad \cdots\cdots\cdots(2.1)$$

(2.1) এ n-এর স্থানে n − 1 লিখে পাই

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=\frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}q_{n-2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ (2.2)$$

এভাবে পরপর আমরা (n −1) সংখ্যকে সম্বন্ধ পাই যাদের সর্বশেষটি হল

$$\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_1}{q_1}=\frac{(-1)^2}{q_2q_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ (2.\ n-1)$$

উপরের (2.1) থেকে (2. n −1) পর্যন্ত সম্বন্ধগুলি যোগ করে পাই

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_1}{q_1}=\frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}+\frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}q_{n-2}}+\cdots+\frac{(-1)^2}{q_2q_1}$$

$$=\frac{1}{q_2q_1}-\frac{1}{q_3q_2}+\frac{1}{q_4q_3}-\cdots+\frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}$$

(g) (b) থেকে $q_n\, q_{n-2}$ দিয়ে ভাগ করে পাই

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=\frac{a_n(-1)^n}{q_nq_{n-2}}$$

অতএব উভয় পক্ষের মডুলাস নিয়ে (g) পাওয়া যায়।

উ পপাদ্য 6. সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ

$$F=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+}\ \cdots\cdots$$

এর n-তম কন্‌ভারজেন্ট $u_n=\frac{p_n}{q_n}$ হলে, নিম্নের অসমতাগুলি সত্য ঃ

$u_1 < u_3 < u_5 < u_7 < \ldots\ldots\ldots < u_8 < u_6 < u_4 < u_2$

অর্থাৎ u_1, u_3, u_5, u_7 ……… বিজোড় কন্‌ভারজেন্ট সমূহ একটি ক্রমবর্ধমান সিকুয়েন্স তৈরি করে এবং u_2,

u_4, u_6, u_8 .... জোড় কন্‌ভারজেন্ট সমূহ একটি ক্রম-ক্ষীয়মান সিকুয়েন্স তৈরি করে; এবং প্রতিটি বিজোড় কন্‌ভারজেন্ট প্রতিটি জোড় কন্‌ভারজেন্ট থেকে ছোটো।

প্রমাণ ঃ

$$(u_n - u_{n-2})(u_n - u_{n-1})$$

$$= \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}\right)\left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$$

$$= \frac{(p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n)}{q_n q_{n-2}} \cdot \frac{(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)}{q_n q_{n-1}}$$

$$= \frac{a_n (-1)^{n-1} (-1)^n}{q_n^2 \, q_{n-1} q_{n-2}} \qquad \text{[(a) ও (b) উপপাদ্য 5 থেকে]}$$

$$= \frac{-a_n}{q_n^2 \, q_{n-1} q_{n-2}} < 0 \qquad \text{(যেহেতু } q_n, q_{n-1}, q_{n-2} \text{ প্রত্যেকে ধনাত্মক)}$$

অতএব $u_n - u_{n-2}$ ও $u_n - u_{n-1}$ রাশি দুটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত। অতএব u_n এর মান u_{n-1} ও u_{n-2}-এর মধ্যবর্তী। কিন্তু u_{n-1} ও u_{n-2} মধ্যে কোনটি বড় কোনটি ছোট আমরা এখনও জানি না।

কিন্তু আমরা দেখছি যে—

$$u_1 = a_1$$

$$u_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} > u_1$$

$$u_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} < u_2, \quad u_4 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}}$$

অতএব, $u_1 < u_2$, $u_3 < u_2$

অতএব $u_1 < u_3 < u_2$

আবার $u_3 < u_4 < u_2$

অতএব আমরা পাই $u_1 < u_3 < u_4 < u_2$

এইভাবে আমরা বলতে পারি (যেহেতু $u_5 - u_3$ ও $u_5 - u_4$ পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত এবং $u_4 > u_3$) অতএব $u_5 - u_4$ ঋণাত্মক এবং $u_5 - u_3$ ধনাত্মক। অর্থাৎ $u_3 < u_5 < u_4$

অতএব,

$$u_1 < u_3 < u_5 < u_4 < u_2$$

আবার $u_6 - u_4$ ও $u_6 - u_5$ পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত এবং $u_5 < u_4$. অতএব $u_6 - u_4 < 0$ ও $u_6 - u_5 > 0$

অতএব $u_1 < u_3 < u_5 < u_6 < u_4 < u_2$

এভাবে অগ্রসর হয়ে আমরা পাই যে

$$u_1 < u_3 < u_5 < u_7 < u_9 \ldots\ldots\ldots$$

এবং $u_2 > u_4 > u_6 > u_8 > \ldots\ldots\ldots$

অর্থাৎ $\{u_{2n-1}\}$ একটি সতত বর্ধনশীল সিকুয়েন্স আর $\{u_{2n}\}$ একটি সতত ক্ষীয়মান সিকুয়েন্স। আবার যেহেতু $\{u_{2n-1}\}$ প্রত্যেকটি পদ $< u_2$ অতএব উহা সীমাবদ্ধ (bounded) এবং $\{u_{2n}\}$ সিকুয়েন্সটির প্রতিটি পদ u_1 অপেক্ষা বড়।

আবার

$$u_{2n} - u_{2n-1} = \frac{p_{2n}q_{2n-1} - q_{2n}p_{2n-1}}{q_{2n}q_{2n-1}}$$

$$= \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n}q_{2n-1}} = \frac{1}{q_{2n}q_{2n-1}} > 0$$

অতএব $u_{2n} > u_{2n-1}$ প্রতিটি n-এর জন্য; অতএব আমরা পাই

$u_1 < u_3 < u_5 < u_7 < \ldots\ldots\ldots < u_8 < u_6 < u_4 < u_2$

সুতরাং প্রতিটি বিজোড় কন্‌ভারজেন্ট প্রত্যেকটি জোড় কন্‌ভারজেন্ট অপেক্ষা ক্ষুদ্র। অতএব দুইটি পর পর কন্‌ভারজেন্ট জানা থাকলে F এর ঊর্ধ্ব ও অধঃসীমা জানা যায়।

এই ধর্মটি আরও পরিষ্কার হয় যদি আমরা F -কে লিখি

$$F = a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +} \cdots \frac{1}{a_n +}\frac{1}{f_{n+1}}$$

যেখানে $f_{n+1} = a_{n+1} + \dfrac{1}{a_{n+2} +}\dfrac{1}{a_{n+3} +} \cdots$

অতএব $F = \frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}} = \frac{f_{n+1}p_n + p_{n-1}}{f_{n+1}q_n + q_{n-1}}$ (রেফারেন্স ফর্মুলা প্রয়োগ করে)

অতএব $u_n - F = \left(\frac{p_n}{q_n} - F\right) = \frac{p_n\left(f_{n+1}q_n + q_{n-1}\right) - q_n\left(f_{n+1}p_n + p_{n-1}\right)}{q_n\left(f_{n+1}q_n + q_{n-1}\right)}$

$$= \frac{p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}}{q_n\left(f_{n+1}q_n + q_{n-1}\right)} = \frac{(-1)^n}{q_n\left(f_{n+1}q_n + q_{n-1}\right)}$$ [উপ. 5-এর (a) থেকে]

অতএব যদি n জোড় হয় তবে $u_n - F > 0$

আর যদি n বিজোড় হয় তবে $u_n - F < 0$

অর্থাৎ $u_{2n-1} < F < u_{2n}$।

যদি ক্রমিক ভগ্নাংশটি সসীম হয়, তবে একটি পূর্ণসংখ্যা N পাওয়া যাবে যাতে $\frac{p_N}{q_N} = F$ হবে, এবং সেক্ষেত্রে 2n বা 2n – 1 সংখ্যাগুলি N এর থেকে ছোট হলে অসমতাগুলি সত্য হবে।

অতএব আমরা পাই—

$$u_1 < u_3 < u_5 < \ldots\ldots < F < \ldots\ldots < u_6 < u_4 < u_2.$$

অতএব দুটি পরপর কন্‌ভারজেন্ট F-এর একটি অন্তরালের নির্দেশ করে, এবং কন্‌ভারজেন্টের n যত বড় হবে ততই অন্তরালটির দৈর্ঘ্য কমবে।

উপপাদ্য 7. সরল অসীম ক্রমিক ভগ্নাংশের বিজোড় কন্‌ভারজেন্ট সমূহ দ্বারা গঠিত সিকুয়েন্স ও জোড় কন্‌ভারজেন্ট দ্বারা গঠিত সিকুয়েন্স উভয়েই অভিসারী ও অভিসার বিন্দুদ্বয় সমান এবং তা ঐ অসীম সরল ক্রমিক ভগ্নাংশের মান।

প্রমাণ ঃ আগের উপপাদ্যে প্রমাণ করা হয়েছে যে

$$u_{2n-1} < F < u_{2n} \ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

আবার $\{u_{2n-1}\}$ একটি ক্রবর্ধমান সিকুয়েন্স যার প্রতিটি পদ $<u_2$. অতএব $\{u_{2n-1}\}$ একটি অভিসারী সিকুয়েন্স (বৈশ্লেষিক গণিত I দ্রষ্টব্য) আবার $\{u_{2n}\}$ একটি ক্রম হ্রাসমান সিকুয়েন্স যার প্রতিটি পদ $> u_1$ অতএব $\{u_{2n}\}$ অভিসারী। উপরের অসমতা (I) থেকে উভয় পক্ষের সিকুয়েন্সেরর লিমিট $n \to \infty$ নিলে আমরা দেখি

$$\lim_{n \to \infty} u_{2n-1} \le F \le \lim_{n \to \infty} u_{2n} \ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

আবার আমরা জানি (উপ. 4.(f))

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}$$

কিন্তু আমরা জানি $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1} > q_n$

$\therefore \quad q_{n+1} \to \infty$ যখন $n \to \infty$

অতএব $\quad |u_{2n} - u_{2n-1}|$

$$= \left|\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right| = \frac{1}{q_{2n}q_{2n-1}} \to 0 \text{ যখন } n \to \infty$$

অতএব $u_{2n} - u_{2n-1} \to 0$ যখন $n \to \infty$

অতএব $\lim\limits_{n \to \infty} u_{2n} = \lim\limits_{n \to \infty} u_{2n-1}$ ....(III)

অতএব (II) ও (III) থেকে

$\lim\limits_{n \to \infty} u_{2n} = F = \lim\limits_{n \to \infty} u_{2n-1}$. প্রমাণিত হল।

উপপাদ্য ৪. একটি অসীম সরল ক্রমিক ভগ্নাংশের প্রতিটি কন্‌ভারজেন্ট তার পূর্ববর্তী কন্‌ভারজেন্টের তুলনায় ক্রমিক ভগ্নাংশটির মানের নিকটতর।

প্রমাণ ঃ আমরা জানি $F = \dfrac{f_{n+1}p_n + p_{n-1}}{f_{n+1}q_n + q_{n-1}}$ যেখানে $f_{n+1} = a_{n+1} + \dfrac{1}{a_{n+2}+}\dfrac{1}{a_{n+3}+}\cdots\cdots$

অতএব $f_{n+1}(Fq_n - p_n) = p_{n-1} - Fq_{n-1}$

বা, $\quad f_{n+1}q_n\left(F - \dfrac{p_n}{q_n}\right) = q_{n-1}\left(\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - F\right)$

অতএব $\left|\dfrac{F - \dfrac{p_n}{q_n}}{\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - F}\right| = \dfrac{q_{n-1}}{q_n f_{n+1}} < 1$

$\left[\because f_{n+1} = a_{n+1} + \dfrac{1}{a_{n+2}+}\dfrac{1}{a_{n+3}+}\cdots > 1 \text{ এবং } q_n > q_{n-1}\right]$, সুতরাং $\left|F - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \left|F - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|$

অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত।

উপপাদ্য 9. $\frac{p_n}{q_n}$ যদি একটি সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ-এর n-তম কন্‌ভারজেন্ট হয় তবে q_n থেকে ক্ষুদ্রতর হরবিশিষ্ট এমন কোনো র‍্যাশনাল সংখ্যা নিলে সেই সংখ্যাটি যা $\frac{p_n}{q_n}$ অপেক্ষা যা সরল ক্রমিক ভগ্নাংশটির মানের নিকটতর নয়। অর্থাৎ র‍্যাশনাল সংখ্যাটি $\frac{r}{s}$ হলে $(s<q_n)$, $\left|F-\frac{r}{s}\right|>\left|F-\frac{p_n}{q_n}\right|$

প্রমাণ : $F=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\frac{1}{+a_n+}\cdots$

ধরি $\frac{r}{s}$ একটি ভগ্নাংশ যার হর $s<q_n$ । যদি সম্ভব হয় ধরলাম

$$\left|F-\frac{r}{s}\right|<\left|F-\frac{p_n}{q_n}\right| \quad \text{........(I)}$$

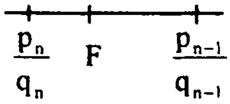
আমরা জানি

$$\left|F-\frac{p_n}{q_n}\right|<\left|F-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \quad \text{.......(II)}$$ (উপপাদ্য 8)

$\therefore$ (I) ও (II) থেকে

$$\left|F-\frac{r}{s}\right|<\left|F-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \quad \text{........ (III)}$$

যেহেতু $\frac{p_n}{q_n}$ এবং $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ এর মধ্যে F অবস্থিত,



অতএব,

$\frac{r}{s}$ সংখ্যাটি $\frac{p_n}{q_n}$ ও $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ এর মধ্যে আছে

সুতরাং $\left|\frac{r}{s}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|<\left|\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|=\frac{1}{q_nq_{n-1}}$

$$|rq_{n-1} - sp_{n-1}| < \frac{s}{q_n} < 1 \quad \because s < q_n$$

কিন্তু $|rq_{n-1} - sp_{n-1}|$ একটি পূর্ণসংখ্যা যা 1 এর চেয়ে ছোট হতে পারে না। সুতরাং (I)-এ যা ধরা হয়েছে তা সম্ভব নয়। অতএব $\frac{r}{s}$ সংখ্যাটি $\frac{p_n}{q_n}$ অপেক্ষা F-এর নিকটতর হার সম্ভব নয়। প্রমাণিত।

মন্তব্য : উপরের উপপাদ্য সমূহ থেকে আমরা সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ এর মান সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণা করতে পারছি। F-এর আসন্ন মান (approximate value) $\frac{p_n}{q_n}$ বা $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ নিলে, ভ্রান্তি (error)-র মাত্রা $\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|$ এর থেকে ক্ষুদ্রতর, যেহেতু F, $\frac{p_n}{q_n}$ ও $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ এর মধ্যবর্তী কোথাও আছে।

উপপাদ্য 10. $F = < a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots >$ সরল ক্রমিক ভগ্নাংশটির জন্য n-তম কনজারভেন্ট $\frac{p_n}{q_n}$ দ্বারা F-এর আসন্নায়ন (approximation) করলে ভ্রান্তির মাত্রা যদি ε হয়, তবে

$$\frac{1}{2q_{n+1}^2} < \varepsilon < \frac{1}{q_n^2}$$

(অর্থাৎ ভ্রান্তির একটি উর্ধ্বসীমা $\frac{1}{2q_n^2}$ এবং একটি অধঃসীমা $\frac{1}{2q_{n+1}^2}$)

প্রমাণ : F-কে নিম্নের মত করে লিখলে

$$F = a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +} \cdots \frac{1}{a_n +}\frac{1}{a_{n+1} +}\frac{1}{f_{n+2}}$$

যেখানে $f_{n+2} = a_{n+2} + \frac{1}{a_{n+3} +} \ldots\ldots$ হল (n + 2)-তম সম্পূর্ণ কোশেন্ট।

$f_{n+2} > a_{n+2} \geq 1.$

এখন $F=\dfrac{f_{n+2}p_{n+1}+p_n}{f_{n+2}\,q_{n+1}+q_n}$ (রেকারেন্স সম্পর্ক সাহায্যে)

আবার $\varepsilon=\left|F-\dfrac{p_n}{q_n}\right|=\left|\dfrac{f_{n+2}p_{n+1}+p_n}{f_{n+2}q_{n+1}+q_n}-\dfrac{p_n}{q_n}\right|$

$$=\frac{\left|f_{n+2}\left(p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}\right)\right|}{\left|f_{n+2}\,q_{n+1}+q_n\right|\left|q_n\right|}$$

$$=\frac{\left|f_{n+2}(-1)^{n+1}\right|}{q_n\left(f_{n+2}q_{n+1}+q_n\right)}=\frac{f_{n+2}}{q_n\left(f_{n+2}q_{n+1}+q_n\right)}$$

$$=\frac{1}{q_n\left(q_{n+1}+\dfrac{q_n}{f_{n+2}}\right)}$$

অতএব $\varepsilon<\dfrac{1}{q_nq_{n+1}}<\dfrac{1}{q_n^2}$ যেহেতু $q_{n+1}>q_n$ এবং $\dfrac{q_n}{f_{n+2}}>0$

এবং $\varepsilon>\dfrac{1}{q_n\left(q_{n+1}+q_n\right)}$ যেহেতু $f_{n+2}>1$

$\therefore\ \varepsilon>\dfrac{1}{2q_{n+1}\,q_{n+1}}$ যেহেতু $q_{n+1}>q_n$.

সুতরাং আমরা পেলাম

$$\frac{1}{2q_{n+1}^2}<\varepsilon<\frac{1}{q_n^2}\quad \text{প্রমাণিত}$$

মন্তব্য 1. আমরা উপরের প্রমাণে দেখেছি যে

$$\varepsilon<\frac{1}{q_nq_{n+1}}$$

এ থেকে পাই $\varepsilon<\dfrac{1}{q_n\left(a_{n+1}q_n+q_{n-1}\right)}<\dfrac{1}{a_{n+1}q_n^2}$

সুতরাং যদি a_{n+1} যথেষ্ট বড় সংখ্যা হয়, তা হলে $\frac{p_n}{q_n}$, F এর একটি ভাল আসন্ন মান।

মন্তব্য 2. F-এর আসন্নমান $\frac{p_n}{q_n}$-এর জন্য ভ্রান্তি যে কোনও প্রদত্ত সংখ্যা $\frac{1}{a}$ থেকে ছোট হবে যদি

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{a} \text{ হয়}$$

এটা সত্য যদি $\frac{1}{q_n^2} < \frac{1}{a}$

অর্থাৎ $q_n > \sqrt{a}$

7.8 অসীম ক্রমিক ভগ্নাংশ ও ইর‍্যাশনাল সংখ্যা (Irrational Number)

আমরা জানি (উপপাদ্য ও মন্তব্য দেখুন) কোন সসীম ক্রমিক ভগ্নাংশ সর্বদা একটি র‍্যাশনাল সংখ্যা সমান। অসীম ক্রমিক সরল ভগ্নাংশের মান কিরূপ হয় সে সম্বন্ধে সঠিক বলা না গেলেও যে কোন ইরাশনাল সংখ্যাকে একটি অসীম সরল ক্রমিক ভগ্নাংশে পরিণত করা যায় এটা আমরা প্রমাণ করতে পারি।

উপপাদ্য 11 কোনও ইর‍্যাশনাল সংখ্যাকে সর্বদা একটি অসীম সরল ক্রমিক ভগ্নাংশে অনন্যভাবে পরিণত করা যায়।

প্রমাণ : x একটি ধনাত্মক ইর‍্যাশনাল সংখ্যা হলে তার পূর্ণাংশ (Integral part) a_1 দ্বারা সূচিত করা যাক। (এটি সম্ভবপর, কারণ দুটি ক্রমিক পূর্ণ সংখ্যা a_1, $a_1 + 1$ সবর্দাই পাওয়া যাবে যাতে $a_1 < x < a_1 + 1$ হবে) $a_1 \geq 0$. আমরা এবার লিখি

$$x = a_1 + y$$

যেখানে $0 < y < 1$ এবং y একটি ইর‍্যাশনাল সংখ্যা অতএব $\frac{1}{y}$ একটি ইর‍্যাশনাল সংখ্যা $\frac{1}{y} = x_2$ লিখলে

$x = a_1 + \frac{1}{x_2}$, যেখানে $x_2 > 1$. এবার x_2-এর পূর্নাংশ a_2 হলে আমরা লিখি

$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}$, যেখানে $x_3 > 1$. এভাবে আমরা পাই

$$x_3 = a_3 + \frac{1}{x_4}$$

$$x_4 = a_4 + \frac{1}{x_5}$$

....

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$$

এখানে $x = x_1, x_2, x_3, x_4$ ..... এগুলি প্রত্যেকে ইর‍্যাশনাল এবং 1 থেকে বড়। এই পদ্ধতি অনুসরণ করে গেলে এটা কখনই শেষ হবে না। তাছাড়া $a_n < x_n < a_n + 1, \quad n = 1, 2,$ ....

এভাবে আমরা পাই

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +} \cdots \frac{1}{a_n +}\frac{1}{x_{n+1}}$$

যেহেতু $a_2 < x_2, a_3 < x_3$ ....

অতএব $a_1 + \frac{1}{a_2} > a_1 + \frac{1}{x_2}$

অর্থাৎ $a_1 + \frac{1}{a_2} > x$,

$a_2 + \frac{1}{a_3} > x_2$ · .... ইত্যাদি

এখন $a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3} < a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{x_3} = x$ ·

আবার, $a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +}\frac{1}{a_4} > x$

এভাবে আমরা দেখতে পাই যে,

$u_{2r-1} < x < u_{2r}$ ....(I)

যেখানে u_{2r-1} হল $F = a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +} \cdots \frac{1}{a_{2r-1} +} \cdots$ এই সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ এর $(2r-1)$-তম কন্‌ভারজেন্ট এবং u_{2r} হল তার $2r$-তম কন্‌ভারজেন্ট।

কিন্তু আমরা জানি $\{u_{2r-1}\}$ ও $\{u_{2r}\}$ এই সিকুয়েন্স দুটি অভিসারী এবং এদের লিমিট হল F. অতএব (I) থেকে আমরা পাই

$$\lim_{r \to \infty} u_{2r-1} \le x \le \lim_{r \to \infty} u_{2r}$$

অর্থাৎ $F \le x \le F$

অতএব $x = F$

অতএব দেখা গেল x এই ইর‍্যাশনাল সংখ্যাটিকে একটি অসীম সরল ক্রমিক ভগ্নাংশতে পরিণত করা যায়। F. যে একমাত্র এরূপ সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ তা প্রমাণ করতে আমরা মনে করি যদি সম্ভব হয়

$$a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots \quad ও \quad c_1 + \frac{1}{c_2+}\frac{1}{c_3+}\cdots$$

দুটি বিভিন্ন সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ যাদের মান x

যেহেতু $a_1 + \frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots = c_1 + \frac{1}{c_2+}\frac{1}{c_3+}\cdots$

এবং যেহেতু a_i, c_i ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a_1 = বামপক্ষের পূর্ণাংশ

c_1 = ডানপক্ষের পূর্ণাংশ

$\therefore a_1 = c_1$

অতএব $\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots = \frac{1}{c_2+}\frac{1}{c_3+}\cdots$

অতএব $a_2 + \frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+}\cdots = c_2 + \frac{1}{c_3+}\frac{1}{c_4+}\cdots$

আবার পূর্বের মত $a_2 = c_2$

এভাবে দেখা যায় $a_i = c_i$ $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots$

অতএব ভগ্নাংশ দুইটি একই।

অতএব একটি ইর‍্যাশনাল সংখ্যাকে একটি কেবলমাত্র একটি অসীম সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ-এ পরিণত করা যায়। প্রমাণিত

উদাহরণ ঃ $\sqrt{2}$ -কে একটি অসীম ক্রমিক ভগ্নাংশে পরিণত করুন।

যেহেতু $1 < \sqrt{2} < 2$

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2}-1\right) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2+}$$

অতএব $\sqrt{2}$ একটি আবৃত্ত সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ।

উদাহরণ ঃ

$$\pi = 3+\frac{1}{7+}\frac{1}{15+}\frac{1}{1+}\frac{1}{292+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}$$

হলে π -এর একটি আসন্নমান নির্ণয় করুন যার ভ্রান্তির পরিমান 10^{-6} থেকে ছোট।

সমাধান ঃ এই ক্রমিক ভগ্নাংশ-এর কন্‌ভারজেন্টগুলি যথাক্রমে

$$\frac{3}{1},\frac{22}{7},\frac{22\times15+3}{7\times15+1}=\frac{333}{106},\frac{333\times1+22}{106\times1+7}=\frac{355}{113},\frac{355\times292+333}{113\times292+106}=\frac{103993}{33102},\ldots\ldots$$

(আপনি নিজে করে দেখুন)

আমরা দেখেছি যে $\frac{p_n}{q_n}$ -কে আসন্ন মান নিলে ভ্রান্তি $\varepsilon<\frac{1}{q_nq_{n+1}}$ অতএব $\frac{22}{7}$ এই আসন্নমানের সাপেক্ষে ভ্রান্তি $<\frac{1}{7\times106}$, এবং $\frac{355}{113}$-এর আসন্ন মানের সাপেক্ষে ভ্রান্তি $<\frac{1}{113\times33102}<10^{-6}$

উদাহরণ ঃ $\sqrt{17}$ -কে সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ রূপে পরিণত করে উহার চার দশমিক পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় করুন।

$$\sqrt{17}=4+\left(\sqrt{17}-4\right)=4+\frac{1}{\sqrt{17}+4}=4+\frac{1}{8+\left(\sqrt{17}-4\right)}$$

$$=4+\frac{1}{8+\frac{1}{\sqrt{17}+4}}=4+\frac{1}{8+}\frac{1}{8+}\cdots$$

$$=4+\frac{1}{8+}$$

অতএব প্রথম কন্‌ভারজেন্ট $=\frac{4}{1}$

দ্বিতীয় কন্‌ভারজেন্ট $=\frac{33}{8}$

তৃতীয় কন্‌ভারজেন্ট $=\frac{8\times33+4}{8\times8+1}=\frac{268}{65}$

চতুর্থ কন্‌ভারজেন্ট $= \frac{8\times268+33}{8\times65+8} = \frac{2177}{528}$

অতএব $\sqrt{17}$-এর আসন্ন মান $\frac{268}{65}$ নিলে ভ্রান্তি মাত্রা $< \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{1}{65\times528} < 10^{-4}$.

অতএব $\frac{268}{65}$ চার দশমিক অবধি শুদ্ধ মান দিচ্ছে।

উদাহরণ ঃ কোন স. ক্র. ভ. F-এর দুটি ক্রমিক কন্‌ভারজেন্ট $\frac{p}{q}$ ও $\frac{p'}{q'}$ হলে, দেখান যে

$\frac{pp'}{qq'} > F^2$ যদি $p'q - pq' < 0$ হয়

এবং $\frac{pp'}{qq'} < F^2$ যদি $p'q - pq' > 0$ হয়।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক (n – 1)-তম কনভারজেন্ট $\frac{p}{q}$, n-তম হল $\frac{p'}{q'}$ এবং (n + 1)-তম সম্পূর্ণ কোশেন্ট হল f. তা হলে $F = \frac{fp'+p}{fq'+q}$

অতএব সরল করে দেখুন যে,

$$\frac{pp'}{qq'} - F^2 = \frac{pp'}{qq'} - \frac{(fp'+p)^2}{(fq'+q)^2} = -\frac{(f^2p'q'-pq)(p'q-pq')}{qq'(fq'+q)^2}$$

আমরা জানি $p' > p$ এবং $q' > q$ যেহেতু $\frac{p'}{q'}$ হল n-তম এবং $\frac{p}{q}$ হল (n – 1)-তম কনভারজেন্ট । আবার $f > 1$. অতএব $f^2p'q' - pq > 0$.

আবার আমরা জানি $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$

অতএব বর্তমান থেকে $p'q - pq' = (-1)^n$

n বিজোড় হল, $p'q - pq' = -1 < 0$

n জোড় হলে $p'q - pq' = 1 > 0$

অতএব প্রদত্ত কন্‌ভারজেন্টের মধ্যে বৃহত্তরটি জোড় সংখ্যার হলে $\frac{pp'}{qq'} < F^2$. আর অন্যক্ষেত্রে $\frac{pp'}{qq'} > F^2$

7.9 $cx - dy = \pm 1$ সমীকরণের ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যায় সমাধান যেখানে c, d ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং c, d পরস্পর মৌলিক।

$\frac{c}{d}$ ভগ্নাংশকে একটি সরল ক্রমিক ভগ্নাংশে পরিণত করলে আমরা পাই $\frac{c}{d} = < a_1, a_2, \cdots a_n >$

এদের বিভিন্ন কনভারজেন্টগুলি $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \cdots \frac{p_n}{q_n}$

এখানে $\frac{p_n}{q_n} = \frac{c}{d}$ আবার $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

অতএব $c = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$

$$d = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

কন্‌ভারজেন্ট সমূহের ধর্ম-অনুসারে

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$$

অতএব $c q_{n-1} - p_{n-1} d = (-1)^n$

অতএব দেখা যাচ্ছে যে n জোড়সংখ্যা হলে

$$c q_{n-1} - p_{n-1} d = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

আবার n বিজোড় সংখ্যা হলে

$$c q_{n-1} - p_{n-1} d = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

(i) ও (ii) থেকে আমরা দেখছি যে,

n জোড় সংখ্যা হলে, $x = q_{n-1}, y = p_{n-1}$ হবে $cx - dy = 1$-এর একটি সমাধান

আবার n বিজোড় সংখ্যা হলে $x = q_{n-1}, y = p_{n-1}$ হবে $cx - dy = -1$-এর একটি সমাধান

আবার আমরা জানি যে একটি সসীম সরল ক্রমিক ভগ্নাংশের পদসংখ্যা আমরা পরিবর্তন করতে পারি।

অর্থাৎ $\frac{c}{d} = < a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n - 1, 1 >$ যদি $a_n > 1$ হয়

এক্ষেত্রে $c = p_{n-1}, d = q_{n-1}$

এবং রেকারেন্স সম্পর্ক ঃ $p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n = (-1)^{n-1}$

অর্থাৎ $cq_n - dp_n = (-1)^{n-1}$

অতএব n বিজোড় ক্ষেত্রে, $a_n > 1$ হলে $cq_n - dp_n = 1$. **ফলে $x = q_n, y = p_n$** এই সমাধান হল $cx - dy = 1$ এই সমীকরণের।

যেখানে $\frac{c}{d}$ -এর ক্রমিক ভগ্নাংশের পদ সংখ্যা $n + 1$ করা হয়েছে।

আবার n বিজোড় ক্ষেত্রে $a_n = 1$ হলে

$$\frac{c}{d} = < a_1, a_2, \cdots a_{n-1} + 1 >$$

অর্থাৎ এই ক্রমিক ভগ্নাংশের পদসংখ্যা $n - 1$

$\therefore\ c = p_{n-1}, d = q_{n-1}$

যেহেতু $p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-2} = (-1)^{n-1} = 1$

$\therefore\ cq_{n-2} - p_{n-2}d = 1$

n বিজোড় অতএব **এক্ষেত্রে $x = q_{n-2}, y = p_{n-2}$**

সমাধান হল $cx - dy = 1$ এই সমীকরণের।

উদাহরণ ঃ $20x - 9y = 1$ এই সমীকরণের ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যায় সমাধান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\frac{c}{d} = \frac{20}{9} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{4+}\frac{1}{2}$

$$= 2 + \frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1}$$

অতএব $\frac{p_1}{q_1} = \frac{2}{1}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{9}{4}, \frac{p_3}{q_3} = \frac{9+2}{4+1} = \frac{11}{5}$

অতএব $x = 5, y = 11$ ঐ সমীকরণের সমাধান।

উদাহরণ ঃ $15x - 16y = 1$ এর একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সমাধান সরল ক্রমিক ভগ্নাংশের সাহায্যে নির্ণয় করুন

$$\left[\textbf{ইঙ্গিত ঃ}\ \frac{15}{16} = 0 + \frac{1}{1+}\frac{1}{14+}\frac{1}{1}\right] \qquad [\text{উঃ } x = 5, y = 14]$$

উদাহরণ ঃ $183x - 140y = 1$ এর পূর্ণসংখ্যায় একটি সমাধান নির্ণয় করুন। [**উঃ** $x = 127, y = 166$]

মন্তব্য ঃ উপরে আলোচিত $cx - dy = 1$-এই সমীকরণের একটি সমাধান আমরা পেয়েছি

$x = q_{n-1}, y = p_{n-1}$ ($\frac{c}{d}$-কে n (জোড়) পদের সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ রূপে প্রকাশ করে)

এখন ধরা যাক $y = p, x = q$ আর একটি সমাধান

অতএব $cq - dp = 1$

আবার $cq_{n-1} - dp_{n-1} = 1$

অতএব বিয়োগ করে $c(q - q_{n-1}) - d(p - p_{n-1}) = 0$ .... (i)

এখন যেহেতু c, d পরস্পর মৌলিক, অতএব $q - q_{n-1} = k_1 d$, এবং $p - q_{r-1} = k_2 c$ হবে যেখানে k_1, k_2 পূর্ণসংখ্যা। (i)-এ মান বসিয়ে পাই $ck_1 d - dk_2 c = 0$

কিন্তু $cd \neq 0$, $\therefore k_1 = k_2$,

অতএব $q = q_{n-1} + k_1 d$, $p = p_{n-1} + k_1 c$

যে কোনো k_1 (পূর্ণসংখ্যা) এর জন্য।

উদাহরণ ঃ $17x - 19y = 1$ এর একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা সমাধান সরল ক্রমিক ভগ্নাংশের সাহায্যে নির্ণয় করুন ও অন্যান্য পূর্ণসংখ্যার সমাধান নির্ণয় করুন।

$(x = 9, y = 8)$

$x = 9 + 19k, y = 8 + 17k$

7.10 সারাংশ

এই এককে দেখান হল যে ঃ

1. $a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots}}$ কে ক্রমিক ভগ্নাংশ বলে। ভগ্নাংশটির n-তম পদ অব্দি যোগফল $\frac{p_n}{q_n}$ কে n-তম কনভারজেন্ট বলে।

$p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}$ এবং $q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}$ হবে $n = 2, 3 \ldots\ldots$ নিলে

আর $p_1 = a_1$, $q_1 = 1$, $p_0 = 0$ এবং $q_0 = 0$ ধরা হয়েছে।

2. $F \equiv a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +}\frac{1}{a_4 +}$ কে সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ বলা হয়। এক্ষেত্রে $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ এবং $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, $n = 2, 3, \ldots$

3. দেখানো হয়েছে যে সসীম ক্রমিক ভগ্নাংশের পদসংখ্যা প্রয়োজন মতো জোড় বা বিজোড় করা যায়।

4. ইউক্লিডের ভাগ পদ্ধতি আলোচিত হয়েছে এবং এই পদ্ধতি ব্যবহার করে সরল ক্রমিক ভগ্নাংশের (স. ক্র. ভ.) বিভিন্ন ধর্ম আলোচনা করা হয়েছে।

5 কোন র‍্যাশনাল সংখ্যাকে (মূলদ সংখ্যা) একটি সরল ক্রমিক ভগ্নাংশে পরিণত করা যায়। আবার সসীম ক্রমিক ভগ্নাংশ একটি র‍্যাশনাল সংখ্যা। পদ অব্দি

6. $F = a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +}\cdots$ সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ হলে,

$$f_1 = a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +}\cdots, \; f_2 = a_2 + \frac{1}{a_3 +}\frac{1}{a_4 +}\cdots, \ldots f_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1} +}\frac{1}{a_{n+2} +}\cdots$$

এগুলিকে বলা হয় যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, ... n -তম সম্পূর্ণ কোশেন্ট।

সুতরাং $F = f_1$, $f_1 = a + \frac{1}{f_2}$, $F = a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +}\cdots\frac{1}{a_{n-1} +}\frac{1}{f_n}$ সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ কনভারজেন্টগুলির নিম্নলিখিত ধর্ম আছে ঃ

(i) $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$

(ii) $p_n q_{n-1} - p_{n-2} q_n = a_n (-1)^{n-1} (n \geq 2)$

(iii) $\left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) = \frac{1}{q_n q_{n-1}} \; (n \geq 2)$

(iv) $\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n}{p_{n-1}}, \frac{q_n}{q_{n-1}}$ ভগ্নাংশগুলি নিম্নতম পদে আছে।

(v) $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{q_1 q_2} - \frac{1}{q_2 q_3} + \frac{1}{q_3 q_4} \ldots\ldots + \frac{(-1)^4}{q_{n-1} q_n}$

(vi) $\dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\dfrac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}$

(vii) $\left|\dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}\right|=\dfrac{a_n}{q_n q_{n-2}}$

7. সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ $F=a_1+\dfrac{1}{a_2+}\dfrac{1}{a_3+}\cdots\cdots$ ক্ষেত্রে $u_n=\dfrac{p_n}{q_n}$ হলে, দেখান হল ঃ

(i) $u_1<u_3<u_5<\ldots\ldots<F<\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots<u_6<u_4<u_2$

অর্থাৎ, n জোড় সংখ্যা হলে $u_n-F>0$,

n বিজোড় সংখ্যা হলে $u_n-F<0$

(ii) $\{u_{2n}-1\}$ ও $\{u_{2n}\}$ সিকুয়েন্সগুলি অভিসারী এবং অভিসার বিন্দুদ্বয় সমান ও F-এর সমান।

(iii) অসীম ক্রমিক ভগ্নাংশ একটি কনভারজেন্ট তার পূর্ববর্তী কনভারজেন্টের তুলনায়, F এর নিকটতর।

(iv) যদি একটি র‍্যাশনাল সংখ্যা $\dfrac{r}{s}$ এমন নেওয়া হয় যে

$s<q_n$, তবে $\left|F-\dfrac{r}{s}\right|>\left|F-\dfrac{p_n}{q_n}\right|$

(v) $\dfrac{p_n}{q_n}$ দ্বারা F-এর আসন্নায়ন করলে ভ্রান্তির মাত্রা যদি ε-হয় তবে $\dfrac{1}{2q_{n+1}^2}<\varepsilon<\dfrac{1}{q_n^2}$

(8) দেখান হল যে, কোনো ইর‍্যাশনাল সংখ্যাকে সর্বদা একটি অসীম সরল ক্রমিক ভগ্নাংশে অনন্যভাবে পরিণত করা যায়।

(9) $cx-dy=\pm 1$ সমীকরণের ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যায় সমাধান নির্ণয় করা হয়েছে।

7.11 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. দেখান যে

$$\frac{2}{4+}\frac{2}{4+}\frac{2}{4+}\cdots\cdots=\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\cdots\cdots$$

2. (i) $\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{3+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{4+}\dfrac{1}{2+}$ এই ক্রমিক ভগ্নাংশের এর বিভিন্ন কনভারজেন্ট নির্ণয় করুন।

(ii) $5+\frac{1}{4+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1}$ এর বিভিন্ন কনভারজেন্ট নির্ণয় করুন।

3. 1.139 কে সরল ক্রমিক ভগ্নাংশে পরিণত করে, চতুর্থ কনভারজেন্ট নির্ণয় করুন।

4. $1+\frac{1}{\underset{\bullet}{2}+}\frac{1}{\underset{\bullet}{3}+}$ -এর মান নির্ণয় করুন।

5. 1 কি.মি., 0.62138 মাইলের সমান হলে, ক্রমিক ভগ্নাংশ ব্যবহার করে দেখান যে 1 কি. মি. ও 1 মাইলের অনুপাতের কয়েকটি আসন্নমান $\frac{5}{8}, \frac{18}{29}, \frac{23}{37}$

6. দেখান যে $a\left(x_1+\frac{1}{ax_2+}\frac{1}{x_3+}\frac{1}{ax_4+}\ldots\ldots 2n\right)$

$$=ax_1+\frac{1}{x_2+}\frac{1}{ax_3+}\frac{1}{x_4+}\ldots\; 2n \text{ পদ অব্দি}$$

7. দেখান যে $3+\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\ldots=3\left(1+\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\ldots\right)$

8. সরল ক্রমিক ভগ্নাংশে পরিণত করুন

(i) $\sqrt{6}$, (ii) $\sqrt{7}$, (iii) $\sqrt{13}$.

9. $3x^2-4x-1=0$ সমীকরণের ধনাত্মক বীজটিকে ক্রমিক ভগ্নাংশে পরিণত করুন এবং চতুর্থ কনভারজেন্ট নির্ণয় করুন।

10. দেখান যে $\left(a+\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\ldots\right)\left(\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\ldots\right)=\frac{a}{b}$

11. $F_1=\frac{1}{\underset{\bullet}{1}+}\frac{1}{3+}\frac{1}{\underset{\bullet}{5}+}\ldots$ এবং $F_2=\frac{1}{\underset{\bullet}{3}+}\frac{1}{1+}\frac{1}{\underset{\bullet}{5}+}\ldots$ F_1-F_2 কত?

12. $\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\ldots$ অসীম ক্রমিক ভগ্নাংশটির ক্ষেত্রে দেখান যে

$$p_{3n+3}=(abc+a+c)\,p_{3n}+(ab+1)\,q_{3n}$$

$$q_{3n+3}=(bc+1)\,p_{3n}+bq_{3n}$$

13. দেখান যে $\frac{1}{1-}\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\ldots$ ক্রমিক ভগ্নাংশে n তম কনভারজেন্ট n এবং ক্রমিক ভগ্নাংশটি অভিসারী নয়।

14. দেখান যে $\sqrt{14}$ এবং $\frac{449}{120}$ এর তফাৎ $\frac{1}{9000}$ এর চেয়ে কম।

15. $\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\cdots\cdots\frac{1}{4+}\cdots\cdots$ ক্রমিক ভগ্নাংশটির এমন কনভারজেন্ট নির্ণয় করুন যার ভ্রান্তির পরিমাণ 10^{-3} থেকে কম।

7.12 উত্তরমালা

1. b_2, a_2, b_3 কে $\frac{1}{2}$ দিয়ে গুণ করে ও b_4, a_4, b_5-কে $\frac{1}{2}$ দিয়ে গুণ করে—

2. (i) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{7}{17}, \frac{9}{22}, \frac{43}{105}, \frac{95}{232}$

   (ii) $5, \frac{21}{4}, \frac{68}{13}, \frac{157}{30}, \frac{225}{43}$

3. $1+\frac{1}{7+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3}$

4. **সমাধান :** $x = 1+\frac{1}{2\dot{+}}\,\frac{1}{3\dot{+}}$ ধরলে $x-1=\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3}\cdots\cdots$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+(x-1)}}$$

$$\therefore\ x-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x+2}}=\frac{x+2}{2x+5}$$

$2x^2+2x-7=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{15}}{2}$, কিন্তু ঋণাত্মক হতে পারে না সুতরাং $x=\frac{-1+\sqrt{15}}{2}$

5. এখানে $\frac{\text{1 কি. মি}}{\text{1 মা}}=\cdot 62138=\frac{62138}{100000}=\cfrac{1}{\cfrac{100000}{62138}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{62138}{37862}}}$

$$=\frac{1}{1+}\;\cfrac{1}{\cfrac{1}{1+\cfrac{24276}{37862}}}=\frac{1}{1+}\;\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{13586}{24276}}}$$

$$\cfrac{1+}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$$ নিলে পাই $$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{2}{3}}}=\cfrac{1}{1+\frac{3}{5}}=\frac{5}{8}$$

এইভাবে অন্যান্য কনভারজেন্ট দিতে হবে।

6. বামপক্ষ $=ax_1+\frac{a}{ax_2+}\frac{1}{x_3+}\frac{1}{ax_4+}$.......2n পদ অব্দি

$$1$$

$$=ax_1+\frac{1}{x_2+}\frac{a}{x_3+}\frac{1}{x_4+}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\quad ''$$

$$=ax_1+\frac{1}{x_2+}\frac{1}{ax_3+}\frac{1}{x_4+}.........2n$$ পদ অব্দি

8. (i) যেহেতু $2<\sqrt{6}<3$ সুতরাং

$$\sqrt{6}=2+\left(\sqrt{6}-2\right)=2+\frac{2}{\sqrt{6}+2}=2+\frac{2}{4+\sqrt{6}-2}$$

$$=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{\sqrt{6}-2}{2}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{6}+2}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\left(\sqrt{6}-2\right)}}$$

$$=2+\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\ \ldots\ldots$$

$$=2+\frac{1}{\dot{2}+}\frac{1}{\dot{4}}$$

(ii) উঃ $2+\frac{1}{\dot{1}+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{\dot{4}+}$ (iii) উঃ $3+\frac{1}{\dot{1}+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{\dot{6}+}$

9. ধনাত্মক বীজটি $\frac{2+\sqrt{7}}{3}$ এবং $2 > \frac{2+\sqrt{7}}{3} > 1$

$$\therefore \frac{2+\sqrt{7}}{3} = 1+\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}-1\right) = 1+\frac{\sqrt{7}-1}{3} = 1+\frac{6}{3\left(\sqrt{7}+1\right)}$$

$$= 1+\frac{2}{\sqrt{7}+1} = 1+\frac{1}{\frac{\sqrt{7}+1}{2}} = 1+\frac{1}{\frac{2+\sqrt{7}-1}{2}} = 1+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{7}-1}{2}}$$

$$= 1+\frac{1}{1+\frac{6}{2\left(\sqrt{7}+1\right)}} = 1+\frac{1}{1+\frac{3}{\sqrt{7}+1}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{\sqrt{7}+1}{3}}}$$

$$= 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{7}-2}{3}}} = 1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+\frac{3}{3\left(\sqrt{7}+2\right)}} = 1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{7}+2}}$$

$$= 1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+\frac{1}{4+\left(\sqrt{7}-2\right)}} = 1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+\frac{3}{\sqrt{7}+2}} = 1+\frac{1}{\dot{1}+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{\dot{4}+}$$

10. $x = a+\frac{1}{b+}\,\frac{1}{a+}\ \ldots \qquad \therefore \frac{1}{b+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{1}{b+}\ \ldots = x-a$

এখন $x = a+\frac{1}{b+\frac{1}{x}}$

এখান থেকে দেখান গুণফল $x(x-a) = \frac{a}{b}$

11. $F_1 = \frac{1}{\dot{1}+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{\dot{5}+}\ \ldots$ এবং $F_2 = \frac{1}{\dot{3}+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{\dot{5}+}\ \ldots$ হলে

$F_1 - F_2$ এর মান হল $\frac{1}{2}$ ।

12. $\frac{p_{3n+3}}{q_{3n+3}}=\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{\frac{p_{3n}}{q_{3n}}}=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{q_n}{p_n}}}}$ এই বার সরল করুণ।

14. $\frac{p_1}{q_1}=1, \frac{p_2}{q_2}=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2}}=\frac{2}{1}, \frac{p_3}{q_3}=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2}}}=\cfrac{1}{1-\cfrac{2}{3}}=\frac{3}{1}$ এই ভাবে দেখান যায়।

15. $\frac{p_n}{q_n}=\frac{30}{43}$

উপপাদ্য 4-এর প্রমাণ ঃ (সংকেত)

$$F=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots$$

এখানে $p_1=a_1, q_1=1, \frac{p_2}{q_2}=a_1+\frac{1}{a_2}=\frac{a_1a_2+1}{a_2}, \therefore p_2=a_2p_1+q_1 \;\; q_2=a_2q_1+q_0$

($p_0=1, q_0=0$ ধরে) $\therefore n=2$-এর জন্য সত্য।

মনে করি $n=m$ এর জন্য $p_m=a_m\, p_{m-1}+p_{m-2}$ ও $q_m=a_m\, q_{m-1}+q_{m-2}$ সত্য।

$$\therefore \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{a_m+}\frac{1}{a_{m+1}}$$

$$=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cfrac{1}{a_m+\cfrac{1}{a_{m+1}}}$$

এখন $\frac{p_n}{q_n}$-এ a_m-এর বদলে $a_m+\frac{1}{a_{m+1}}$ বসালে যদি কনভারজেন্ট $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$ হবে

$$\therefore \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}=\frac{\left(a_m+\frac{1}{a_{m+1}}\right)p_{m-1}+p_{m-2}}{\left(a_m+\frac{1}{a_{m+1}}\right)q_{m-1}+q_{m-2}}$$

$$= \frac{a_{m+1} a_m p_{m-1} + p_{m-1} + a_{m+1} p_{m-2}}{a_{m+1} a_m q_{m-1} + q_{m-1} + a_{m+1} q_{m-2}}$$

$$= \frac{a_{m+1}(a_m p_{m-1} + p_{m-2}) + p_{m-1}}{a_{m+1}(a_m q_{m-1} + q_{m-2}) + q_{m-1}}$$

$$= \frac{a_{m+1} p_m + p_{m-1}}{a_{m+1} q_m + q_{m-1}}$$. সুতরাং প্রমাণিত।

ব্যবহৃত পরিভাষা

Simple Continued Fraction	সরল ক্রমিক ভগ্নাংশ
Convergents	কন্‌ভারজেন্ট সমূহ
Method of induction	আরোহ পদ্ধতি
Euclidean division algorittem	ইউক্লিডীয় ভাগ প্রক্রিয়া
Rational number	র‍্যাশনাল সংখ্যা
Irrational number	ইর‍্যাশনাল সংখ্যা
Real number	বাস্তব সংখ্যা
Sequence	সিকুয়েন্স
Infinite Continued Fraction	অসীম ক্রমিক ভগ্নাংশ
Convergence	অভিসরণ
Convergent Sequence	অভিসারী সিকুয়েন্স
Recurrence formula	রেকারেন্স ফর্মুলা

একক 8 ❑ পূর্ণ সংখ্যাতত্ত্ব (Number Theory)

গঠন

8.1 প্রস্তাবনা

মানুষ যখন থেকে গণনা করতে শিখেছে অর্থাৎ একটি, দুটি, তিননটি ইত্যাদি সংখ্যাকে দ্রব্যের বা প্রাণীর জ্ঞান যখন থেকে হয়েছে, মানুষ স্বাভাবিক সংখ্যা (natural number) সম্বন্ধে ভাবতে শিখেছে। সভ্যতার অগ্রগতির সঙ্গে সঙ্গে সংখ্যার মাধুর্য্য ও মানুষের মনকে নাড়া দিয়েছে। এমন কি এক একটি সংখ্যার বিশেষ তাৎপর্য আছে বলে, মানুষ ভেবেছে। যাই হোক 1, 2, 3, ... ইত্যাদি করে অসংখ্য সংখ্যা আছে যাদের নান গুণ কল্পনা করে মানুষ প্রাচীনকাল থেকে এই সকল সংখ্যার নানা ধর্ম আবিষ্কার করেছে। আমাদের দেশে সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য স্বাভাবিক সংখ্যার সাহায্যে সমাধান প্রাচীনকালে জানা ছিল। আবার অতি বড় সংখ্যার প্রবর্তন ও ব্যবহার প্রাচীনকাল হতে আমাদের দেশে ছিল। এই অধ্যায়ে আমরা পূর্ণসংখ্যা বহুবিধ ধর্ম সম্বন্ধে আলোচনা করব।

8.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে আপনি যেগুলি করতে সক্ষম হবেন সেগুলি হল ঃ—

- সংখ্যাতত্ত্বের সাহায্যে মডিউলো-সংক্রান্ত গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।
- ফার্মার উপপাদ্য প্রমাণ করতে সক্ষম হবেন।

8.3 গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি (Method of Mathematical Induction)

পূর্ণসংখ্যাতত্ত্বে (Theory of Numbers) প্রধানতঃ স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural numbers) 1, 2, 3, 4, ... নিয়ে আলোচনা করা হয়। স্বাভাবিক সংখ্যা সমূহকে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা বলা হয়। একটি ধারণা প্রথমে পরিষ্কারভাবে বলে নেওয়া প্রয়োজন ঃ—

(1) ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার কতগুলি বিশেষ ধর্ম আমাদের কাজে লাগবে, যেমন (1) কতগুলি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার একটি সেট S থাকলে ঐ সেটে এমন একটি সংখ্যা থাকবে যা ঐ সেটের অন্যান্য সংখ্যা থেকে ছোট অর্থাৎ S সেটটির একটি ক্ষুদ্রতম সদস্য (least element) আছে। এই ধর্মকে Well ordering principle বা সুষম ক্রমনীতি বলা হয়।

উদাহরণ স্বরূপ

(i) $S = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$ এর ক্ষুদ্রতম সদস্য 1

(ii) $S = \{2, 6, 10, 14, ...\}$ এর ক্ষুদ্রতম সদস্য 2

(iii) $S = \{5, 9, 3, 7, 25\}$ এই সেটের ক্ষুদ্রতম সদস্য 3

(2) গণিতে যে সকল যুক্তির সাহায্যে কোন কিছু প্রমাণ করা হয়, তাতে কতগুলি সমার্থক বাক্য ব্যবহৃত হয়, যেগুলি সম্বন্ধে অবহিত হওয়া প্রয়োজন। প্রথমে আমরা এক একটি গাণিতিক বক্তব্যকে (mathematical statement) A, B, C, ... দ্বারা সূচিত করে ব্যাপারটি পরিষ্কার ভাবে বলব। বক্তব্যের উদাহরণ হিসাবে "5 এবং 3 এর যোগফল একটি জোড় সংখ্যা", অথবা "5 ও 3 এর গুণফল একটি বিজোড় সংখ্যা।" এই ধরনের অসংখ্য বক্তব্য বা statement আমরা ব্যবহার করি। এখন A ও B দুটি বক্তব্য যদি এমন হয় যে "A সত্য হলে B সত্য হবে" তবে এই বাক্যের পরিবর্তে "A এর সত্যতা B এর সত্যতাকে সূচিত করে" এই বাক্য ব্যবহার করা যায়। এই ধরনের সমার্থক বক্তব্য অর্থাৎ equivalent statement-এর ধারণা আমাদের পরিষ্কার থাকা দরকার। উদাহরণ ধরা যাক

A : দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা x, y উভয়েই জোড়।

B : দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার x, y-এর যোগফল জোড়।

এখানে পরিষ্কার "A সত্য হলে B সত্য"। আবার "B সত্য না হলে A সত্য নয়"। উপরের এই জাতীয় সমার্থক বক্তব্যকে আমরা নীচে সাধারণভাবে উল্লেখ করছি। A, B দুটি বক্তব্য হলে নিম্নের সম্বন্ধগুলি সমার্থক ঃ

(a) A, B-কে সূচিত করে (A implies B)

(b) যদি A সত্য হয়, তবে B সত্য।

(c) A সত্য হওয়ার জন্য B-এর সত্যতা প্রয়োজন।

(d) B এর সত্যতার জন্য A-এর সত্যতা যথেষ্ট শর্ত।

(e) প্রতীক সাহায্যে, $A \Rightarrow B$ (অর্থাৎ A সত্য হলে B সত্য)

(f) B সত্য না হলে A সত্য নয়।

এই অধ্যায়ে আমরা সাধারণত পূর্ণসংখ্যা বুঝাতে a, b, c, ... m, n .... x, y, z এর যে কোনও একটি প্রতীক ব্যবহার করব।

বহু গাণিতিক ধর্ম সমগ্র স্বাভাবিক সংখ্যার জন্য সত্য হয়। এক্ষেত্রে এই রূপ ধর্ম প্রমাণ করতে হলে প্রত্যেকটি স্বাভাবিক সংখ্যার জন্য ঐ ধর্মটির সত্যতা যাচাই করা সম্ভব নয়। কেননা তাহলে একটি অসীম সংখ্যক বার তার প্রমাণ। অতএব এ সকল ক্ষেত্রে স্বাভাবিক সংখ্যার সেটের একটি ধর্ম ব্যবহার করে, সীমিত সংখ্যক ধাপে ধর্মটির সকল স্বাভাবিক সংখ্যার জন্য সত্যতা প্রমাণ করা হয়। এই পদ্ধতিকেই গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি বা প্রণালী (Method of Mathematical Induction) বলা হয়।

এই পদ্ধতিটির নিম্নের দুইটি রূপ দেওয়া হল।

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি বা নীতি :—

প্রথম রূপ :

যদি S একটি এমন সেট হয় যার সদস্যসমূহ শুধু কতিপয় ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, এবং যদি নিম্নের শর্তদ্বয় সত্য হয় অর্থাৎ

(1) $1 \in S$

(2) $m \in S$ হলে $m + 1 \in S$ হয়

তা হলে প্রতিটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা S এর সদস্য।

দ্বিতীয় রূপ :

যদি S একটি এমন সেট হয়, যার সদস্যসমূহ শুধু কতিপয় ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, এবং যদি নিম্নের শর্তদ্বয় সত্য হয়;

(1) $k \in S$, যেখানে k একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(2) k থেকে বড় পূর্ণসংখ্যা $m \in S$ হলে $m + 1 \in S$ হয় তা হলে k থেকে বড় সমস্ত পূর্ণসংখ্যা S-এ থাকবে।

অতএব একটি উপপাদ্য সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার জন্য সত্য দেখাবার জন্য আমাদের প্রথমে একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট S গঠন করতে হবে যার যে কোন সদস্যের জন্য উপপাদ্যটি সত্য। এখন ঐ সেট S যদি দেখা যায় (1) ও (2) এই দুটি শর্ত পালন করে, তা হলে S সেটে সমগ্র ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা থাকবে। অর্থাৎ উপপাদ্যটি সমস্ত ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার জন্য সত্য হবে।

আরোহ প্রণালী আমরা বহু উপপাদ্য প্রমাণে ব্যবহার করি ও এই অধ্যায়ে করব। উদাহরণ হিসাবে আমরা খুব ছোট দুটি উপপাদ্য নেব।

উদা. 1. দেখান যে $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

প্রমাণ : n-এর যে সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার জন্য উপরের উপপাদ্যটি সত্য সেই সকল n-এর মান নিয়ে 'S' সেট গঠন করা যাক। এখন আমরা সহজেই দেখছি $n = 1$ হলে বামপক্ষ $= 1$, দক্ষিণ পক্ষ $=\frac{1}{2}.1.2$.

অতএব $1 \in S$ এখন যদি $m \in S$, অর্থাৎ যদি $1+2+3+\cdots+m=\frac{1}{2}m(m+1)$ হয়, তা হলে

$$1 + 2 + 3 + \ldots + m + (m + 1) = \{1 + 2 + \ldots + m\} + (m + 1)$$

$$= \frac{1}{2}m(m + 1) + (m + 1) = \frac{1}{2}(m + 1)(m + 2)$$

অতএব উপপাদ্যটি $n = m + 1$-এর জন্যও সত্য। সুতরাং S হল সমস্ত ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট।

উদাহরণ : 2. দেখান যে $\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-3}}$, 6 দ্বারা বিভাজ্য, যেখানে $n = 4, 5, 6, \ldots\ldots$

প্রমাণ : $n = 4$ হলে $\frac{\underline{|4}}{\underline{|1}} = 24$. অতএব উপপাদ্যটি $n = 4$ এর জন্য সত্য। ধরা যাক $n = m > 4$ এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য। তা হলে $\frac{\underline{|m}}{\underline{|m-3}}$, 6 দ্বারা বিভাজ্য।

অর্থাৎ $m(m - 1)(m - 2)$, 6 দ্বারা বিভাজ্য। এখন $n = m + 1$ হলে

$$\frac{\underline{|m+1}}{\underline{|m+1-3}} = (m + 1)\, m\, (m - 1) = m(m - 1)(m - 2 + 3)$$

$$= m(m - 1)(m - 2) + 3m(m - 1)$$

ডান পক্ষে প্রথম পদ 6 দ্বারা বিভাজ্য, দ্বিতীয় পদ 6 দ্বারা বিভাজ্য 'অতএব S সেটে m থাকিলে $m + 1 \in S$. অর্থাৎ উপপাদ্যটি দ্বিতীয় রূপের আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী $n \geq 4$ এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য।

উদাহরণ. a, b, n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে

$$(a + b)^n = a^n + {}^nc_1 a^{n-1}b^1 + \ldots + {}^nc_r a^{n-r}b^r + \ldots + {}^nc_{n-1}ab^{n-1} + {}^nc_n b^n.$$

(দ্বিপদ বিস্তৃতির উপপাদ্য)

প্রমাণ ঃ মনে করি যে সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার জন্য উপপাদ্যটি সত্যি তাদের সেট।

এখন $(a + b)^1 = a^1 + {}^1c_1\, b^1 \Rightarrow n = 1$ এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য। অতএব $1 \in s$. এখন মনে করি $m \in s$ অর্থাৎ

$$(a + b)^m = a^m + {}^mc_1\, a^{m-1}b + \ldots\ {}^mc_r a^{m-r} b^r + {}^mc_{r+1}\, a^{m-r-1}\, b^{r+1} + \ldots + {}^mc_{m-1}\, ab^{m-1} + {}^mc_n b^n$$

এখন $(a + b)^{m+1} = (a + b)^m (a + b)$

$$= a^{m+1} + ({}^mc_1 a^m b + a^m b) + ({}^mc_2 a^{m-1}b^2 + {}^mc_1 a^{m-1}b^2) + \ldots + ({}^mc_{r+1} a^{m-r} b^{r+1} + {}^mc_r a^{m-r} b^{r+1}) + \ldots + ({}^mc_{m-1}\, ab^m + {}^mc_m ab^m) + {}^mc_m b^{m+1}$$

$$= a^{m+1}({}^mc_1 + 1)a^m b + ({}^mc_1 + {}^mc_2)\, a^{m-1}\, b^2 + \ldots + ({}^mc_r + {}^mc_{r+1})\, a^{m-r}\, b^{r+1} + \ldots + ({}^mc_{m-1} + {}^mc_m)\, ab^m + {}^{m+1}c_{m+1}\, b^{m+1}$$

$$= a^{m+1} + {}^{m+1}c_1 a^m b + {}^{m+1}c_2\, a^{m-1}b^2 + \ldots + {}^{m+1}c_{r+1} a^{(m+1)-(r-1)} b^{(r+1)} + \ldots + {}^{m+1}c_m ab^m + {}^{m+1}c_{m+1} b^{m+1}$$

সুতরাং $m + 1 \in s$.

$\therefore$ সমগ্র পূর্ণ ধনাত্মক সংখ্যার সেট হল S।

8.4 বিভাজ্যতা ও ভাগ পদ্ধতি (Divisibility and method of Division algorithm)

বিভাজ্যতার সংজ্ঞা ঃ

একটি পূর্ণসংখ্যা b-কে একটি পূর্ণসংখ্যা a (যা শূন্য নয়) দ্বারা বিভাজ্য বলা হবে যদি এমন একটি পূর্ণসংখ্যা x পাওয়া যায় যার জন্য b=ax. এক্ষেত্রে প্রতীক সাহায্যে লেখা হয় a/b(a দ্বারা b বিভাজ্য)।

মন্তব্য 1.

যদি b, a দ্বারা বিভাজ্য না হয়, তবে প্রতীক সাহায্যে আমরা লিখি

$$a \nmid b.$$

মন্তব্য 2. এর দ্বারা b বিভাজ্য—এই বক্তব্যটি অন্যভাবে বলা যায় "a, b-কে ভাগ করে", অথবা 'a, b-এর একটি ভাজক (divisor)" অথবা, "b, a-এর একটি গুণিতক (multiple)."

উপপাদ্য 1.

(i) $a \mid b$ হলে $a \mid bc$, যেখানে c একটি পূর্ণসংখ্যা

(ii) $a \mid b$ ও $b \mid c$ হলে, $a \mid c$ (সংক্রমী নিয়ম transitive property)

(iii) $a \mid b$ ও $a \mid c$ হলে, $a \mid (bx + cy)$, যেখানে x, y পূর্ণসংখ্যা

(iv) $a \mid b$ ও $b \mid a$ হলে $a = b$ অথবা $a = -b$

(v) ($m \neq 0$) যদি a একটি পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে $a \mid b \Rightarrow ma \mid mb$ এবং $ma \mid mb \Rightarrow a \mid b$

(vi) যদি $a \mid b$, এবং $a > 0, b > 0$ হয় তবে $a \leq b$.

প্রমাণ ঃ

(i) $a \mid b \Rightarrow b = ax$, (x পূর্ণসংখ্যা) $\therefore bc = axc = a(xc)$ $\therefore a \mid bc$.

(ii) $a \mid b \Rightarrow b = ax$

$b \mid c \Rightarrow c = by$ (x, y পূর্ণ সংখ্যা)

$\therefore$ $c = by = axy = a(xy)$.

$\therefore$ $a \mid c$.

(iii) $a \mid b \Rightarrow b = au$, $a \mid c \Rightarrow c = av$, u, v পূর্ণ সংখ্যা

$\therefore$ $bx + cy = aux + avy = a(ux + vy)$

$\therefore$ $a \mid (bx + cy)$

(iv) $a \mid b \Rightarrow b = ax$

$b \mid a \Rightarrow a = by$ (x, y পূর্ণসংখ্যা)

$\therefore$ $a = by = axy$

এবং $b = ax = bxy$

কিন্তু a, b অশূন্য হওয়ায় $1 = xy$

অতএব $x = y = 1$ বা $a = b$

অথবা $x = y = -1$ বা $a = -b$

(v) $a \mid b \rightleftarrows b = xa$

m দিয়ে গুণ করলে $\rightleftarrows bm = x(am) \rightleftarrows am \mid bm$

(vi) $a \mid b \Rightarrow b = ax$

যেহেতু $a > 0, b > 0$, অতএব $x > 0$. যেহেতু x একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা অতএব $x \geq 1$: অতএব $b \geq a$.

উদাহরণ 1. দেখান যে $a \mid b$ হলে $a^2 \mid b^2$.

সংকেত ঃ $b^2 = a^2x^2$ এর পর করুন।

উদাহরণ 2. দেখান যে $a \mid b$ ও $c \mid d$ হলে $ac \mid bd$

সংকেত ঃ $bd = acxy$ ইত্যাদি

উদাহরণ 3. দেখান যে $a \mid b$ ও $x > y \geq 1$ হলে $a^y \mid b^x$

সমাধান ঃ $b = an$, n = পূর্ণসংখ্যা।

$\therefore\ b^x = a^x n^x = a^y(a^{x-y} n^x)$, $\Rightarrow a^y \mid b^x$, $\because\ a^{x-y} n^x$ পূর্ণসংখ্যা $(x > y \geq 1)$

উপপাদ্য 2. (ভাগ প্রক্রিয়া বা Division algorithm) যদি a, b দুইটি পূর্ণসংখ্যা এবং $a > 0$ প্রদত্ত থাকে, তবে এমন দুইটি পূর্ণসংখ্যা q ও r অনন্যভাবে পাওয়া যায় যে,

$b = qa + r$, যেখানে $0 \leq r < a$.

প্রমাণ ঃ নিম্নের উভয় দিকে অসীম সমান্তর সিকুয়েন্স পরীক্ষা করা যাক ঃ—

$\ldots\ldots\ldots,\ b - 3a,\ b - 2a,\ b - a,\ b,\ b + a,\ b + 2a,\ b + 3a,\ \ldots\ldots$

এই সমান্তর সিকুয়েন্স-এর সাধারণ অন্তর a : এবং পদগুলি ডানদিকে বাড়ছে। যে কোন পূর্ণসংখ্যা x এর জন্য এই সিকুয়েন্সের পরপর দুটি পদ পাওয়া যাবে যার মধ্যে x থাকবে অথবা x কোন একটি পদের সঙ্গে সমান হবে। অতএব a সংখ্যাটি এইরূপ দুইটি পদের মধ্যবর্তী হবে। অথবা এই পদগুলির একটি হবে। অর্থাৎ এমন একটি সংখ্যা q আছে যে (q ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে)

$$\left.\begin{array}{l} b - qa \geq 0 \text{ এবং} \\ \\ b - (q + 1)\, a < 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ (8.1)$$

অর্থাৎ $0 \leq b - qa < a$

(এখানে $b > 0$ হলে $q \geq 0$ হবে, আর $b < 0$ হলে $q < 0$ হবে)

যেহেতু উপরের সিকুয়েন্সের পরপর দুটি পদের পার্থক্য a, অতএব কেবল মাত্র একটি q আছে যার জন্য (8.1) সত্য, ফলে

$$r = b - qa \geq 0$$

এবং $r < a$.

অর্থাৎ $b = qa + r$, যেখানে $0 \leq r < a$

সম্পর্কটি অনন্য প্রমাণ করার জন্য ঃ—

যদি সম্ভব হয় ধরা যাক q, q_1 এবং r, r_1 সংখ্যা আছে যাতে

$$b = qa + r \qquad 0 \leq r < a \qquad \ldots.\ (8.2)$$

$$b = q_1 a + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < a \qquad \ldots.\ (8.3)$$

তা হলে $a(q - q_1) = r_1 - r$

অতএব $a \mid (r_1 - r)$

কিন্তু $|r_1 - r| < a$, উপরের (8.2) ও (8.3) দুই অসমতা থেকে। অতএব $a \mid (r_1 - r)$ হতে পারে কেবলমাত্র যদি $r_1 - r = 0$ হয় অর্থাৎ $r_1 = r$ হয় এবং সেক্ষেত্রে $q = q_1$. সুতরাং q ও r অনন্যভাবে পাওয়া যায়।

মন্তব্য ঃ উপরের উপপাদ্যটি আমরা $a > 0$ ধরে প্রমাণ করেছি।

যদি $a < 0$ হয়, সেক্ষেত্রে ভাগ প্রক্রিয়া এই ভাবে বলা যায়—a, b দুইটি পূর্ণসংখ্যার প্রদত্ত হলে, এমন দুটি পূর্ণসংখ্যা q ও r পাওয়া যাবে যে $0 \leq r < |a|$

এবং $b = q'a + r$ যেখানে q' ও r অনন্য।

প্রমাণ ঃ b, |a| এই দুটি সংখ্যার জন্য ভাগ প্রক্রিয়া সত্য ও এমন দুটি পূর্ণ সংখ্যা q ও r আছে যার জন্য

$$b = q\,|a| + r, \;........\; (8.4)\;\; 0 < r < |a|.$$ যেখানে q ও r অনন্য।

অতএব $a < 0$ হলে $|a| = -a$ এবং (8.4) থেকে পাই

$$b = -qa + r$$

অথবা, $b = q'a + r$ যেখানে $q' = -q$ এবং q ও r অনন্য হওয়ায়, q', r অনন্য এবং আমরা পাই

$$b = q'a + r$$

উদা. $b = 100,\ a = 9$

এখানে $q = 11$ এবং $r = 1$

কারণ $100 = 11 \times 9 + 1$

উদা. $b = -100,\ a = 9$

এখানে $q = -12,\ r = 8$, যেহেতু $-100 = -12 \times 9 + 8$

উদা. $b = -100,\ a = -9$

এখানে $q = 12,\ r = 8$

কেননা $-100 = 12 \times (-9) + 8$

উদা. $a = 70,\ b = 15$ হলে q ও r ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে নির্ণয় করুন।

$15 = 0 \times 70 + 15$

এখানে $q = 0,\ r = 15$

উদা. $b = 2250,\ a = 321.$ q ও r কত?

$$\begin{array}{r|l|l} 321 & 2250 & 7 \\ & \underline{2247} & \\ & \quad 3 & \end{array}$$

অতএব $2250 = 7 \times 321 + 3$

উদা. $b = -450, a = 62$ হলে q ও r নির্ণয় করুন।

$$
\begin{array}{r|r|l}
62 & -450 & -8 \\
 & -496 & \\
\hline
 & 46 &
\end{array}
$$

অতএব $-450 = (-8) \times 62 + 46$

$\therefore q = -8, r = 46 < 62$

উদা. $a = -253, b = -692$. q ও r কত? [উঃ $q = 3, r = 67$]

8.5 সাধারণ ভাজক ও বৃহত্তম সাধারণ ভাজক [Common divisor and Greatest Common divisior] বা জি. সি. ডি. (G.C.D) বা গ. সা. গু.

সাধারণ ভাজক (সংজ্ঞা) ঃ যদি $a \mid b$ ও $a \mid c$ হয় (যেখানে a, b, c পূর্ণসংখ্যা এবং $a \neq 0$), তবে a, b ও c এর সাধারণ ভাজক।

যদি $a \neq 0$ হয় এবং $a|b_1, a|b_2, \ldots\ldots a|b_n$ হয়, তবে a-কে $b_1, b_2, \ldots\ldots b_n$ -এর সাধারণ ভাজক বলা হয়।

সংজ্ঞা ঃ বৃহত্তম সাধারণ ভাজক (Greatest Common Divisor)

b ও c দুটি পূর্ণসংখ্যার (যাদের অন্তত একটি অশূন্যক) যে সকল সাধারণ ভাজক আছে, তাদের মধ্যে বৃহত্তম সংখ্যাকে b ও c এর বৃহত্তম সাধারণ ভাজক (Greatest Common Divisor) বা জি. সি. ডি. বলা হয়। সংজ্ঞা থেকে সহজেই অনুমেয় যে বৃহত্তম সাধারণ ভাজক একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

b ও c এর বৃহত্তম সাধারণ ভাজককে (b, c) এই প্রতীক দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

দুই এর অধিক সংখ্যক পূর্ণসংখ্যার $b_1, b_2, \ldots\ldots b_n$ এর ক্ষেত্রে বৃহত্তম সাধারণ ভাজক হচ্ছে g যেখানে g হচ্ছে $b_1, b_2 \ldots\ldots b_n$ সংখ্যা সমূহের সাধারণ ভাজকদের মধ্যে বৃহত্তম। প্রতীকের সাহায্যে বৃহত্তম সাধারণ ভাজককে $g = (b_1, b_2, \ldots\ldots b_n)$ এই রূপে লেখা হয়। বৃহত্তম সাধারণ ভাজককে আমরা সংক্ষেপে জি. সি. ডি. (g. c d) সংক্ষিপ্তভাবে লিখব।

উদা. (i) 1, 5 এর একমাত্র সাধারণ ভাজক 1 এবং $(1, 5) = 1$

(ii) 0, 3 এর বৃহত্তম সাধারণ ভাজক $(0, 3) = 3$

(iii) 9, 15 এর বৃহত্তম সাধারণ ভাজক $(9, 15) = 3$

(iv) 16, 36 এর বৃহত্তম সাধারণ ভাজক $(16, 36) = 4$

(v) 24, 40 এর বৃহত্তম সাধারণ ভাজক $= 8$

(vi) 6, 12, 24, 36 এর বৃহত্তম সাধারণ ভাজক = 6.

এবং (12, 24) = 12, (24, 36) = 12, (6, 36) = 6.

(vii) 12, 18, 36, 60 এই সংখ্যাগুলির সাধারণ ভাজকসমূহ হল 1, 2, 6. অতএব (12, 18, 36, 60) = 6

মন্তব্য 1. যদি (a, b) = 1 হয়, তবে a, b এর মধ্যে 1 ব্যতীত আর কোন সাধারণ ভাজক নেই। এ ক্ষেত্রে বলা হয় a, b পরস্পর মৌলিক।

মন্তব্য 2. যদি দুটি পূর্ণসংখ্যা a, b এর জন্য এমন দুটো পূর্ণসংখ্যা x_0, y_0 পাওয়া যায় যে

$$ax_0 + by_0 = 1.$$

তা হলে (a, b) = 1

কারণ উপ. 3 অনুসারে {ax + by} সংখ্যাগুলির মধ্যে ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক সংখ্যা হল g = (a, b). এখন যেহেতু 1 থেকে ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা নেই অতএব $ax_0 + by_0 = (a, b) = 1$.

উদাহরণ : যদি (a, m) = (b, m) = 1 হয় তবে (ab, m) = 1

প্রমাণ : ধরা যাক (ab, m) = x

যেখানে x একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

অতএব $x \mid ab$ এবং $x \mid m$.

$\therefore$ ab = xy এবং m = xz.

$(a, m) = 1 \Rightarrow (a, xz) = 1$ অতএব (a, x) = 1, (a, z) = 1 একইভাবে (b, x) = 1 এবং (b, z) = 1.

অতএব (ab, xz) = 1. অতএব (ab, m) = 1

উপপাদ্য 3. যদি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা b ও c এর জি. সি. ডি. g হয়, তা হলে পূর্ণসংখ্যা x_0, y_0 আছে যার জন্য $g = (b, c) = bx_0 + cy_0$

প্রমাণ : $S \equiv \{bx + cy \text{ , } x, y$ পূর্ণ সংখ্যা$\}$ এই সেটটি নেওয়া যাক। সুষম ক্রমনীতি (Well-Ordering Principle অনুযায়ী এই সেটে একটি ধনাত্মক পদ থাকবে যা S-এর সমস্ত ধনাত্মক পদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম। ঐ পদটি যদি $bx_0 + cy_0 = l$ ...... (8.5) হয় (যেখানে x_0, y_0 দুটি পূর্ণসংখ্যা), তবে আমরা প্রথমে প্রমাণ করব যে $l \mid b$ এবং $l \mid c$ ।

যদি সম্ভব হয় ধরা যাক $l \nmid b$ এবার b ও l এর মধ্যে ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে q ও r পূর্ণসংখ্যা এমন আছে যে $b = ql + r$, যেখানে $0 < r < l$.

$$\begin{aligned}\text{অতএব } r &= b - ql = b - q\,(bx_0 + cy_0)\\ &= b(1 - qx_0) - qcy_0\\ &= b(1 - qx_0) + c\,(-qy_0) \text{ .... (8.6)}\end{aligned}$$

অতএব (8.6) থেকে দেখা গেল r রয়েছে S সেটে। কিন্তু $r < l$. কিন্তু l যেহেতু S-এর ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক পদ, অতএব এটা সম্ভব নয়। অতএব $l \nmid b$ হতে পারে না। অতএব $l \mid b$. অনুরূপে $l \mid c$.

আবার g হল b ও c এর জি. সি. ডি.। অতএব $b = gB$, $c = gC$ এবং $l = bx_0 + cy_0$

$$= g\,(Bx_0 + Cy_0)$$

অতএব $g \mid l$. অতএব $g \le l$. কিন্তু b ও c এর বৃহত্তম সাধারণ ভাজক হল g. অতএব l, g অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না।

অতএব $g = l$.

$\therefore\ g = bx_0 + cy_0$

উদাহরণ 1. $b = 150$, $c = 225$ অতএব জি. সি. ডি. $= (150, 225) = 75$.

এখানে $225 \times 1 + (150)(-1) = 75$

$\therefore\ x_0 = -1,\ y_0 = 1.$

উদাহরণ 2. $b = 95$, $c = 205$. এদের জি. সি. ডি. ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে নির্ণয় করে $bx_0 + cy_0$ নির্ণয় করুন।

$(b\,,\,c) = 5$

ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা

$205 = 2 \times 95 + 15$ (205, 95 এর মধ্যে) .... (8.7)

$95 = 6 \times 15 + 5$ (95 ও 15 এর মধ্যে) .... (8.8)

$15 = 3 \times 5 + 0$ (15 ও 5 এর মধ্যে) .... (8.9)

অতএব, $5 = 95 - 6 \times 15$ .... (8.8) থেকে

$= 95 - 6 \times (205 - 2 \times 95)$

$= -\,6 \times 205 + 11 \times 95$

অতএব আমরা পেলাম, $x_0 = 11$, $y_0 = -6$

উপপাদ্য 4. জি. সি. ডি. $g = (b, c)$ -এর ধর্ম হল

(i) g হল $bx + cy$ -এর রূপ বিশিষ্ট সমস্ত সংখ্যার মধ্যে ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক সংখ্যা।

(ii) g হচ্ছে b ও c-এর ধনাত্মক সাধারণ ভাজক যা সমস্ত সাধারণ ভাজক দ্বারা বিভাজ্য।

প্রমাণ ঃ (i) উপপাদ্য 3 থেকে পাওয়া যাচ্ছে।

(ii) অংশ বুঝতে পারা যাচ্ছে কেন না $g = bx_0 + cy_0$ অতএব b ও c এর সাধারণ ভাজক $bx_0 + cy_0$ এরও ভাজক। অতএব b ও c এর ধনাত্মক সাধারণ ভাজকগুলি g এরও ভাজক।

উপপাদ্য 5. যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা m-এর জন্য $(ma, mb) = m(a, b)$

প্রমাণ ঃ উপপাদ্য 4 থেকে আমরা জানি

(ma, mb) = {max + mby এই রূপ সমস্ত পূর্ণসংখ্যার মধ্যে ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা}

= m × {ax + by এই রূপ সমস্ত পূর্ণসংখ্যার মধ্যে ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা}

$= m\,(a, b)$

উপপাদ্য 6. যদি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা d এমন হয় যে d|a এবং d|b তা হলে

$$\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{1}{d}(a, b)$$

প্রমাণ ঃ যেহেতু $d|a$, $d|b$ অতএব x ও y দুটি পূর্ণসংখ্যা আছে যার জন্য $a = xd$, $b = yd$.

অতএব $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = (x, y)$ .... (8.10)

আবার উপপাদ্য 5 অনুসারে

$(a, b) = (xd, yd) = d\,(x, y)$ .... (8.11)

(8.10), (8.11) হতে $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = (x, y) = \frac{1}{d}(a, b)$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\left(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}\right) = 1$ যেখানে $g = (a, b)$

উপরের উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\left(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}\right) = \frac{1}{g}(a, b) = 1$$

উপপাদ্য 7. যদি $(a, m) = (b, m) = 1$ হয়, তা হলে $(ab, m) = 1$

প্রমাণ ঃ উপপাদ্য 3-নং থেকে পাই যে পূর্ণসংখ্যা x_0, y_0 ও x_1, y_1 এমন আছে যে

$1 = ax_0 + my_0$, $\quad 1 = bx_1 + my_1$

অতএব, $(ax_0)(bx_1) = (1 - my_0)(1 - my_1)$

$= 1 - m\,(y_0 + y_1 - my_0y_1)$

অতএব

$$ab(x_0x_1) + my_2 = 1 \;........... (8.12)$$

যেখানে $y_2 = y_0 + y_1 - my_0y_1$

(8.12) থেকে বলা যায় যে ab ও m-এর জি. সি. ডি. হল 1, অর্থাৎ $(ab, m) = 1$

উপপাদ্য 8. $(a, b) = (a, -b) = (b, a) = (a, b + ax)$ যেখানে a, b, x পূর্ণসংখ্যা।

প্রমাণ ঃ $g = (a, b)$ হলে $g|a$, $g|b$, এবং g হল a, b এর বৃহত্তম সাধারণ ভাজক। অতএব $(a, -b) = g$. আবার বৃহত্তম সাধারণ ভাজকের সংজ্ঞাতে a, b যেই ক্রমেই থাকুক, কোনও ব্যতিক্রম হয় না। অতএব $(a, b) = (b, a)$ আবার $g = (a, b)$ হলে, $a = gx_1$, $b = gy_1$

যেখানে x_1, y_1 পূর্ণসংখ্যা। এবং $(x_1, y_1) = 1$

অতএব $x_1x_2 + y_1y_2 = 1$

অতএব $(a, b + ax) = (gx_1, gy_1 + gx_1x)$

$$= g(x_1, y_1 + x_1x) \;...... (8.13)$$

কিন্তু

$$x_1x_2 + y_1y_2 + y_2x_1\, x - x_1\, xy_2 = 1$$

$$\therefore\; x_1(x_2 - xy_2) + (y_1 + x_1x)\, y_2 = 1$$

$\therefore\; (x_1, y_1 + x_1x) = 1$ .... (8.14) অতএব (8.13) ও (8.14) থেকে $(a, b + ax) = g$

উপপাদ্য 9. $c \mid ab$ এবং $(b, c) = 1$ হলে $c \mid a$

প্রমাণ ঃ যেহেতু $(b, c) = 1$ অতএব পূর্ণসংখ্যা x_0, y_0 আছে যার জন্য $bx_0 + cy_0 = 1$ .... (8.15)

যেহেতু $c \mid ab$, অতএব $ab = xc$ .... (8.16)

$$\therefore\quad abx_0 = x_0xc$$

(8.15) থেকে $a(1 - cy_0) = x_0xc$

অথবা $a = c(x_0x + ay_0)$

অতএব a, c দ্বারা বিভাজ্য, অর্থাৎ $c \mid a$.

সংজ্ঞা ঃ পারস্পরিক মৌলিক সংখ্যা (relatively prime numbers) ঃ দুটি বা ততোধিক পূর্ণসংখ্যার সেটের মধ্যে যদি 1 ব্যতীত কোন সাধারণ ভাজক না থাকে তবে তাদের পারস্পরিক মৌলিক সংখ্যা বলা হয়।

(27, 100), (5, 6), (4, 9, 17) অথবা (6, 9, 25) সহজেই বোঝা যায় যে {a, b} পারস্পরিক মৌলিক হওয়ার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল $(a, b) = 1$.

সংজ্ঞা ঃ পারস্পরিক দ্বৈতভাবে মৌলিক (relatively pairwise prime numbers) ঃ দুই-এর অধিক সংখ্যক পূর্ণসংখ্যার সেটের ক্ষেত্রে যদি যে কোন দুটি পদ নিলে তারা পারস্পরিক মৌলিক হয় সেইক্ষেত্রে ঐ সেটের সংখ্যাগুলিকে পারস্পরিক দ্বৈতভাবে মৌলিক বলা হয়।

যেমন ঃ $\{5, 9, 16\}$ এটি দ্বৈতভাবে পারস্পরিক মৌলিক, কারণ $\{5, 9\}$, $\{9, 16\}$, $\{5, 16\}$ এরা প্রত্যেক পারস্পরিক মৌলিক।

মন্তব্য 1. কতকগুলি পূর্ণসংখ্যা দ্বৈতভাবে পারস্পরিক মৌলিক হলে, ঐ পূর্ণসংখ্যাগুলি পারস্পরিক মৌলিক। কারণ, $\{a, b, c, d\}$ একটি দ্বৈতভাবে পারস্পরিক মৌলিক সেট হলে, $(a, b) = 1$, $(b, c) = 1$, $(c, d) = 1$, $(a, c) = 1$, $(b, d) = 1$, $(a, d) = 1$ এখন a, b, c, d এর 1 ব্যতীত কোন ভাজক থাকতে পারে না, কেননা যদি $k > 1$ একটি ভাজক থাকে তবে $(a, b) \geq k$ হবে। কিন্তু $(a, b) = 1$. অতএব a, b, c, d পারস্পরিক মৌলিক।

মন্তব্য 2. কতগুলি পূর্ণসংখ্যা পারস্পরিক মৌলিক হলে তারা দ্বৈতভাবে মৌলিক নাও হতে পারে যেমন $\{6, 9, 16\}$ এই পূর্ণসংখ্যাগুলি পারস্পরিক মৌলিক, কিন্তু দ্বৈতভাবে মৌলিক নয়, কেননা $(6, 9) = 3$, $(6, 16) = 2$.

উপপাদ্য 10. (জি. সি. ডি. নির্ণয়ের ইউক্লিডীয় ভাগ পদ্ধতি)

দুটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা b, c-এর জি. সি. ডি. নির্ণয় করার জন্য b, c এর মধ্যে ভাগ পদ্ধতি প্রয়োগ করে ভাগশেষ r_1 থাকলে, পুনর্বার c ও r_1 এর মধ্যে ঐ ভাগ পদ্ধতি অনুসরণ করতে হবে, যতক্ষণ না ভাগশেষ শূন্য হয়। ভাগশেষ শূন্য হলে সে প্রক্রিয়ায় ভাজকই হল জি. সি. ডি.।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক b ও c দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এদের জন্য ভাগ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে দুটি অনন্য পূর্ণসংখ্যা q_1 ও r_1 পাই যেখানে

$$b = q_1 c + r_1 \text{ .... } (8.17)$$

যেখানে $0 \leq r_1 < c$.

$r_1 \neq 0$ হলে এবার c ও r_1 এর মধ্যে ঐ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে পাই

$$c = q_2 r_1 + r_2 \text{ .... } (8.18) \text{ যেখানে } 0 \leq r_2 < r_1$$

$r_2 \neq 0$ হলে এর পর r_1, r_2 এর জন্য ভাগ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে $r_1 = q_3 r_2 + r_3$ ... (8.19) যেখানে $|0 \leq r_3 < r_2|$

এভাবে এই প্রক্রিয়া করে যেতে হবে যতক্ষণ না অবশিষ্ট = 0 হয়।

যেহেতু $0 < r_k < r_{k-1} < r_{k-2} < \ldots\ldots < r_3 < r_2 < r_1$

অতএব প্রতিটি প্রক্রিয়ায় অবশেষ অন্তত 1 কম হবে। অতএব সীমিত সংখ্যক এই পদ্ধতি প্রয়োগ করে k এর কোন মানের জন্য $r_{k+1} = 0$ হবে।

অর্থাৎ $r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k$

$$r_{k-1} = q_{k+1} r_k + r_{k+1} \text{ .... } (1.k + 1)$$

$$= q_{k+1} r_{k+0}$$

অতএব $(1.k + 1)$, $(1.k)$, ... (1.1) পর্যন্ত সমীকরণগুলি থেকে আমরা পাই

$(b, c) = (b - cq_1, c) = (r_1, c) = (r_1, c - q_2r_1)$

$= (r_1, r_2) = (r_1 - r_2q_3, r_2) = (r_3, r_2)$ ....

এইভাবে নির্দিষ্ট সংখ্যক বার ভাগ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে পাই $(b, c) = (r_k, r_{k-1}) = (r_k, q_{k+1}r_k) = r_k$

অতএব b ও c এর জি. সি. ডি. এই প্রক্রিয়ায় নির্ণীত হল।

মন্তব্য 1. উপরের জি. সি. ডি. নির্ণয়ের পদ্ধতিকে ইউক্লিডীয় পদ্ধতি (Euclidean algorithm) বলা হয়। বলা বাহুল্য এই পদ্ধতির প্রয়োগ করে জি. সি. ডি বা গ. সা. গু. (H. C. F.) নির্ণয় করা যায়।

মন্তব্য 2. যেহেতু একটি ভাগ প্রক্রিয়ায় q ও r অনন্য, আমরা বলতে পারি যে উপরের পদ্ধতিতে জি. সি. ডি. অনন্যভাবে পাওয়া যায়।

মন্তব্য 3. উপরের ইউক্লিডীয় পদ্ধতি থেকে পাই

$$r_k = r_{k-2} - q_kr_{k-1}$$

আবার r_{k-1} অবনয়ন করলে

$$\begin{aligned} r_k &= r_{k-2} - q_k(r_{k-3} - q_{k-1} r_{k-2}) \\ &= r_{k-2} - q_kr_{k-3} + q_k q_{k-1} \cdot r_{k-2} \\ &= (1 + q_kq_{k-1}) r_{k-2} - q_kr_{k-3} \end{aligned}$$

এবার r_{k-2} এর মান বসিয়ে আমরা r_k-কে r_{k-3} ও r_{k-4} এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারি। এভাবে অবশেষে আমরা r_k-কে b ও c এর মাধ্যমে প্রকাশিত করতে পারব। অর্থাৎ

$$r_k = xb + yc$$

যেখানে x, y পূর্ণসংখ্যা, এরূপ পাওয়া যায়।

উদাহরণমালা :

1. ইউক্লিডের পদ্ধতি ব্যবহার করে জি. সি. ডি. নির্ণয় করুন :

   (a) 7469 এবং 2464

   (b) 2689 ও 4001

   (c) 1109 ও 4999

2. 2947 ও 3997 এর জি. সি. ডি. g নির্ণয় করুন এবং g-কে **2947x + 3997y এই রূপে লিখুন (x, y** পূর্ণ সংখ্যা)।

3. x, y নির্ণয় করুন যেখানে (a) $243x + 198y = 9$

   (b) $71x - 50y = 1$

   (c) $43x + 64y = 1$

সমাধান ঃ (a) ইউক্লিডীয় পদ্ধতি অনুসারে

$$243 = 198 + 45$$

$$198 = 4 \times 45 + 18$$

$$45 = 2 \times 18 + 9$$

$$18 = 2 \times 9 + 0$$

অতএব,

$$9 = 45 - 2 \times 18 = 45 - 2 \times (198 - 4 \times 45)$$

$$= 9 \times 45 - 2 \times 198$$

অতএব,

$$9 = 9 \times (243 - 198) - 2 \times 198$$

$$= 9 \times 243 - 11 \times 198$$

অতএব

$$x = 9, y = -11$$

3. দেখান যে পরপর তিনটি পূর্ণসংখ্যার গুণফল 6 দ্বারা বিভাজ্য।

(আরোহ পদ্ধতিতে করুন— $n(n+1)(n+2)$ এই সংখ্যা $n = 1, 2, 3$ ..... সকল মানের জন্য 6 দ্বারা বিভাজ্য প্রমাণ করতে হবে। প্রথমে $n = 1$ হলে $1, 2, 3 = 6$ । অতএব ইহা 6 দ্বারা বিভাজ্য। ধরা যাক $n = m$ এর জন্য বক্তব্যটি সত্য। অর্থাৎ $6|m(m+1)(m+2)$.

এখন $(m+1)(m+2)(m+3) = m(m+1)(m+2) + 3(m+1)(m+2)$ ...... (8.20)

কিন্তু ধরা হয়েছে যে $6|m(m+1)(m+2)$

আবার $2|(m+1)(m+2)$ অতএব $6|3(m+1)(m+2)$.

অতএব (8.20)-এর দক্ষিণ পক্ষের দুটি পদই 6 দ্বারা বিভাজ্য। অতএব $6|(m+1)(m+2)(m+3)$. অতএব আরোহ পদ্ধতি প্রয়োগ করে $n(n+1)(n+2)$. $n = 1, 2, 3,$ .... ইত্যাদির জন্য সত্য।

n ঋণাত্মক হলে $n = -m$ যেখানে m ধনাত্মক

অতএব এ ক্ষেত্রে $n(n+1)(n+2)$

$$= -m(1-m)(2-m)$$

কিন্তু $(-m), (1-m), (2-m)$ তিনটি পরপর স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল। অতএব দেখা গেল $n = m + 1$ এর জন্যও বক্তব্যটি সত্য। অতএব আরোহ পদ্ধতি অনুসারে বক্তব্যটি $n = 1, 2, 3,$ ..... সমস্ত ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার জন্য সত্য।

উদাহরণ 4. $ac \mid bc$ হলে দেখান যে $a|b$, যেখানে $c \neq 0$ .....। [উপপাদ্য 1-এর (v) ব্যবহার]

উদাহরণ 5. x, y বিজোড় পূর্ণসংখ্যা হলে দেখান যে $x^2 + y^2$ জোড় কিন্তু 4 দ্বারা বিভাজ্য নয়।

[$x = 2k + 1, y = 2m + 1$, যেখানে k, m পূর্ণসংখ্যা বসালেই দেখা য]

8.5.1 $ax + by = 1$ এই সমীকরণের পূর্ণসংখ্যা x, y-এর সমাধান যেখানে a, b প্রদত্ত দুটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা পারস্পরিক মৌলিক অর্থাৎ $(a, b) = 1$.

যেহেতু a, b পারস্পরিক মৌলিক অতএব তাদের জি. সি. ডি 1 এবং উপ. 3 অনুসারে x, y পূর্ণসংখ্যা আছে যার জন্য

$$ax + by = 1$$

এখন ইউক্লিডীয় ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে x ও y নির্ণয় করা সম্ভব (মন্তব্য 3 (উপপাদ্য 10))। আমরা দু'একটি উদাহরণ সাহায্যে ব্যাখ্যা করব।

উদাহরণ $a = 241, \quad b = 536$

এখানে $(a, b) = 1$.

ইউঃ ভাগ প্রক্রিয়া অনুসারে

$$536 = 2 \times 241 + 54$$

$$241 = 4 \times 54 - 25$$

$$54 = 2 \times 25 + 4$$

$$25 = 6 \times 4 + 1$$

অতএব শেষ ধাপ থেকে সুরু করে

$$\begin{aligned}1 &= 25 - 6 \times 4 = 25 - 6 \times (54 - 2 \times 25)\\ &= 13 \times 25 - 6 \times 54\\ &= 13 \times (241 - 4 \times 54) - 6 \times 54 = 13 \times 241 - 58 \times 54\\ &= 13 \times 241 - 58 \times (536 - 2 \times 241) = -58 \times 536 + 129 \times 241\end{aligned}$$

অতএব $x = 129, y = -58$.

এভাবে আমরা সর্বদা একটি সমাধান পাই।

মন্তব্য 1. উপরের পদ্ধতিতে আমরা একটি সমাধান পাচ্ছি। অন্যান্য সমাধান সম্বন্ধে আমরা এবার বিবেচনা করি। ধরা যাক x_1, y_1 ও x_2, y_2 এই দুটি সমাধান $ax + by = 1$ এর।

তা হলে $ax_1 + by_1 = 1$

$$ax_2 + by_2 = 1$$

$$\therefore\ a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$$

অতএব যেহেতু $(a, b) = 1$

$x_1 - x_2 = bk$

$y_1 - y_2 = -ak$ (k পূর্ণসংখ্যা)

অর্থাৎ (x_1, y_1) একটি সমাধান জানা থাকলে

$x_2 = x_1 - bk$

$y_2 = y_1 + ak$

k যে কোন পূর্ণ সংখ্যা।

অতএব আমরা $ax + by = 1$ এর সমস্ত সমাধান পেলাম।

উদা. 1. $203x + 59y = 1$ এর সমগ্র সমাধান নির্ণয় করুন।

[**ইঙ্গিত ঃ** যেহেতু $(203, 59) = 1$ অতএব ইউক্লিডীয় ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা একটি সমাধান পেতে পারি।

$203 = 3 \times 59 - 26$

$59 = 2 \times 26 + 7$

$26 = 3 \times 7 + 5$

$7 = 1 \times 5 + 2$

$5 = 2 \times 2 + 1$

অতএব

$$\begin{aligned}
1 &= 5 - 2 \times 2 \\
&= 5 - 2 \times (7 - 1 \times 5) \\
&= 3 \times 5 - 2 \times 7 \\
&= 3 \times (26 - 3 \times 7) - 2 \times 7 \\
&= 3 \times 26 - 11 \times 7 \\
&= 3 \times 26 - 11 \times (59 - 2 \times 26) \\
&= 25 \times 26 - 11 \times 59 \\
&= 25 \times (203 - 3 \times 59) - 11 \times 59 \\
&= 25 \times 203 - 86 \times 59
\end{aligned}$$

অতএব একটি সমাধান হল $x = 25, y = -86$

সাধারণ সমাধান হল $x = 25 + k \times 59$

$y = -86 - k \times 203$

উদা. 2. $203x - 59y = 1$ এর সাধারণ সমাধান নির্ণয় করুন। এই উদাহরণ ও আগের উদাহরণে তফাৎ নেই। $-y$ -এর স্থানে y' লিখলে $203x + 59y' = 1$

অতএব $\quad x = 25 + k \times 59,\ y' = -86 - k \times 203$

$\therefore \quad y = 86 + k \times 203$

উদা.3. $100x + 81y = 1$ এই সমাধান নির্ণয় করুন। $\qquad [x = -17 + 81k,\ y = 21 - 100k]$

8.6 সাধারণ গুণিতক (Common multiple)

সংজ্ঞা : $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ কতগুলি শূন্য নয় এমন পূর্ণসংখ্যা হলে, b -কে সংখ্যাগুলির একটি সাধারণ গুণিতক বলা হবে যদি $a_i \mid b$. $i = 1, 2 \ldots\ldots n$ হয়। যে কোন সংখ্যার সেট $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ এর সাধারণ গুণিতক আছেই কারণ $a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_n$ একটি গুণিতক।

লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (Least Common multiple) :

কতগুলি শূন্য নয় এমন পূর্ণসংখ্যার যতগুলি সাধারণ গুণিতক আছে তাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক গুণিতককে লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (Least Common multiple) বলা হয়। $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ এর ল. সা. গু.-র প্রতীক হল $[a_1, a_2, \ldots\ldots a_n]$

উপপাদ্য 11. $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ এর একটি সাধারণ গুণিতক b হলে, $[a_1, a_2, \ldots\ldots a_n] \mid b$ হবে।

প্রমাণ : $h = [a_1, a_2, \ldots\ldots a_n]$ লিখলাম। m একটি সাধারণ গুণিতক হলে, ভাগপ্রক্রিয়ার সাহায্যে লিখতে পারি $m = qh + r,\ \ 0 \le r < h$.

কিন্তু $a_i \mid h \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots n$

এবং $a_i \mid m \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots n$

কিন্তু $r = m - qh$

অতিএব $a_i \mid r \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots n$

অতএব r একটি সাধারণ গুণিতক।

কিন্তু $r < h$ এবং h হল ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক গুণিতক, অতএব এটা সম্ভব হবে, কেবলমাত্র যদি $r = 0$ হয়, অতএব $r = 0$ এবং $m = qh$ অর্থাৎ $h \mid m$.

উপপাদ্য 12.

$m > 0$ হলে $[ma, mb] = m[a, b]$

প্রমাণ : সংজ্ঞানুসারে $ma \mid [ma, mb]$

অতএব $[ma, mb]$, m-এর একটি গুণিতক

অতএব $[ma, mb] = mh_1$ যেখানে $h_1 > 0$.

কিন্তু $a|[a, b]$, $b|[a, b]$ $\therefore$ $am|m[a, b]$, $bm|m[a, b]$ অতএব 11. নং উপপাদ্য প্রয়োগ করে

$[am, bm]|m[a, b]$ অর্থাৎ $mh_1|m[a, b]$ অর্থাৎ $h_1|[a, b]$ .... (8.21)

আবার $am|[ma, mb]$, $bm|[ma, mb]$

অর্থাৎ $am|mh_1$, $bm|mh_1$

অর্থাৎ $a|h_1$, $b|h_1 \Rightarrow [a, b]|h_1$ .... (8.22)

(8.21) ও (8.22) হতে পাই $h_1 = [a, b]$

অতএব $[ma, mb] = m[a, b]$

উপপাদ্য 13. $[a, b]\,(a, b) = |ab|$

প্রমাণ ঃ প্রথমে a, b ধনাত্মক মনে করলাম

$(a, b) = g$ হলে $a = gx$, $b = gy$, যেখানে $(x, y) = 1$. অতএব পূর্ণসংখ্যা m, n আছে যার জন্য

$mx + ny = 1$ [উপ. 3 অনুসারে]

$[a, b] = [gx, gy] = g\,[x, y]$ .... (8.23) (উপ. 12)

যেহেতু $[x, y]$, x -এর গুণিতক $\therefore$ $[x, y] = px$

আবার $y|[x, y]$ $\therefore$ $y|px$. কিন্তু $(y, x) = 1$, অতএব $y|p$. অতএব $y \le p$ অতএব $xy \le px$ ..... (8.24) কিন্তু xy, x ও y এর সাধারণ গুণিতক হওয়ায় xy. ল.সা.গু px অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নয়। অতএব (8.24) থেকে $xy = px = [x, y]$ অতএব (8.23) ও (8.24) থেকে $(a, b)[a, b] = g^2[x, y] = g^2xy = gx.\ gy = ab = |ab|$

এখন a, b ধনাত্মক না হলেও উপরের বক্তব্য সত্য কারণ আমরা জানি

$$(a, b) = (-a, b) = (-a, -b) = (a, -b) > 0$$

এবং $[a, b] = [-a, b] = [a, -b] = [-a, -b] > 0$.

অতএব a, b ধনাত্মক না হলেও বক্তব্যটি সত্য।

উদাহরণ 1. $a, b(>0)$ পূর্ণসংখ্যা এবং $(a, b) = [a, b]$ প্রমাণ করুন $a = b$.

ধরি $[a, b] = h$, অতএব $(a, b) = h$ অতএব $a = hm$, $b = hn$. m, n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা

এখন $h = [a, b] = [hm, hn] = h\,[m, n]$

অতএব $[m, n] = 1$ অতএব $m = n = 1$ অতএব $a = b = h$

উদাহরণ 2. n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, $(n, n + 1)$ ও $[n, n + 1]$ এদের মান নির্ণয় করুন।

আমরা প্রমাণ করব যে, $[n, n + 1] = n(n + 1)$ এবং $(n, n + 1) = 1$.

প্রথমে $n = 1$ হলে $[1, 2] = 2$, $(1, 2) = 1$

ধরা যাক, $[m, m + 1] = m(m + 1)$ ও $(m, m + 1) = 1$.

এখন $(m + 1, m + 2) = x$ হলে $m + 1 = xp$

$$m + 2 = xq$$

যেখানে p, q ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $(p, q) = 1.$

আবার $xp + 1 = xq$ অথবা $x(q - p) = 1$

অথবা $x = 1, q - p = 1$

অতএব $(m + 1, m + 2) = 1$

উপপাদ্য 13. অনুযায়ী $[m + 1, m + 2] = (m + 1)(m + 2)$

সুতরাং আরোহ প্রণালী অনুযায়ী বিষয়টি সমস্ত n-এর জন্য প্রমাণিত হল।

উদাহরণ. সমাধান করুন ঃ $x + y = 100$

এবং $(x, y) = 5.$

(এখানে x, y পূর্ণসংখ্যা)

সমাধান ঃ এখানে $x = 5m, y = 5n$

যেখানে m, n পারস্পরিক মৌলিক। প্রথম সমীকরণে x, y এর মান বসিয়ে পাই।

$$m + n = 20$$

এই সমীকরণের অসীম সংখ্যক সমাধান আছে যেখানে m, n পারস্পরিক মৌলিক।

যেমন, $m = 1, n = 19$ $\quad m = 3, n = 17$ $\quad m = 7, n = 13$

$m = 19, n = 1$ $\quad m = 17, n = 3$ $\quad m = 13, n = 7$

$m = 9, n = 11$

$m = 11, n = 9$

আবার $m = -1, n = 21$ $\quad m = -3,$ $\quad n = 23$

$n = 21, n = -1,$ $\quad m = 23,$ $\quad n = -3$ ইত্যাদি

উদাহরণ. দেখান যে $(n - 1) \mid (n^k - 1)$, যেখানে k একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $n \geq 2.$

প্রমাণ ঃ $n^k - 1 = n - 1$ যদি $k = 1$

$$n^k - 1 = n^k - n^{k-1} + n^{k-1} - n^{k-2} + n^{k-2} - \ldots\ldots\ldots + n - 1$$

$$= n^{k-1}(n - 1) + n^{k-2}(n - 1) + \ldots\ldots\ldots + (n - 1)$$

$$= (n - 1)(n^{k-1} + n^{k-2} + \ldots\ldots + n + 1)$$ অতএব ইত্যাদি

উদাহরণ. দেখান যে $(n-1)^2 \mid (n^k - 1)$, যেখানে $n > 2$ এবং k ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, যদি এবং একমাত্র যদি $(n-1) \mid k$ হয়।

প্রমাণ ঃ

$$\begin{aligned} n^k - 1 &= ((n-1)+1)^k - 1 \\ &= [(n-1)^k + {}^kC_1(n-1)^{k-1} + {}^kC_2(n-1)^{k-2} + \dots + {}^kC_r(n-1)^{k-r} \\ &\qquad + \dots + {}^kC_{k-1}(n-1) + 1] - 1 \\ &= (n-1)\,[n-1)^{k-1} + {}^kC_1\,(n-1)^{k-2} + \dots + k] \\ &= (n-1)\,[(n-1)^{k-1} + k(n-1)^{k-2} + \dots + k] \end{aligned}$$

বন্ধনীর মধ্যে শেষ পদ ভিন্ন সকলেরই $(n-1)$ এই উৎপাদক আছে। এবং শেষের পদটি হল k, অতএব $(n-1)$ আর একটি উৎপাদক থাকার জন্য $(n-1) \mid k$ হতে হবে। এবং $(n-1) \nmid k$ হলে $(n-1)^2$ উৎপাদক হয় না।

8.7 মৌলিক সংখ্যা (Prime numbers)

এক ব্যতীত কোন স্বাভাবিক সংখ্যা (natural number) যদি 1 এবং ঐ সংখ্যা ছাড়া অন্য কোন পূর্ণসংখ্যা দিয়ে বিভাজ্য না হয় তবে ঐ স্বাভাবিক সংখ্যাকে মৌলিক সংখ্যা (prime number) বলা হয়। যেমন 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 ইত্যাদি।

কোন পূর্ণসংখ্যা মৌলিক না হলে তাকে যৌগিক (composite) বলা হয়। 4, 6, 8, 9 ইত্যাদি যৌগিক।

উপপাদ্য 14. 1 থেকে বড় যে কোন পূর্ণসংখ্যা n-কে মৌলিক সংখ্যা সমূহের গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা যেতে পারে।

প্রমাণ ঃ n মৌলিক হলে, n-ই একমাত্র উৎপাদক। n মৌলিক না হলে, অন্তত একটি সংখ্যা $n_1 > 1$ এমন আছে যে $n_1 \mid n$. অতএব $n = n_1 n_2$ যেখানে n_2 আর একটি পূর্ণসংখ্যা। এখানে $1 < n_1 < n$, $1 < n_2 < n$.

n_1 মৌলিক না হলে একই ভাবে $n_1 = n_3 n_4$ যেখানে $1 < n_3 < n_1$, $1 < n_4 < n_1$ হবে। এই প্রক্রিয়া n_2-এর জন্যও প্রযোজ্য $\therefore$ $n_2 = n_5 n_6$ যেখানে $1 < n_5 < n_2$, $1 < n_6 < n_2$ অতএব $n = n_1 n_2 = n_3 n_4 n_5 n_6$

এই প্রক্রিয়া এবার n_3, n_4, n_5, n_6 এর জন্য প্রযুক্ত হলে এবং যতক্ষণ সমস্ত সংখ্যাগুলি মৌলিক না হয়। অবশেষে আমরা n-কে কতগুলি মৌলিক সংখ্যার উৎপাদক হিসাবে পাওয়া যায়, যেটা আমরা লিখতে পারি

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

যেখানে $p_1, p_2, \dots p_r$ প্রত্যেকে মৌলিক সংখ্যা এবং $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$ নির্দেশ করছে যথাক্রমে p_1 কটি আছে, p_2 কটি আছে ইত্যাদি।

উপপাদ্য 15. p মৌলিক এবং $p \mid ab$ হলে, $p \mid a$ অথবা $p \mid b$ হবে।

প্রমাণ ঃ $p \nmid a$ হলে $(a, p) = 1$ অতএব উপ. 9 অনুসারে $p \mid b$. অনুসারে $p \mid b$. অনুরূপভাবে $p \nmid b$ হলে, $p \mid a$ হবে। এখানে উল্লেখযোগ্য $p \mid a$ হলে $p \mid b$ হতে পারে বা $p \nmid b$ হতে পারে।

উপপাদ্য 16. p মৌলিক হলে এবং $p \mid a_1 a_2 \dots a_n$ হলে, p, a_1, a_2 ..... a_n অন্তত একটি ভাজক।

প্রমাণ ঃ আগের উপপাদ্য অনুসারে $p \nmid a_1$ হলে, $p \mid a_2 a_3 \dots a_4$ হবে। আবার $p \nmid a_2$ হলে $p \mid a_3 a_4 \dots a_n$ হবে। এভাবে দেখা যাচ্ছে $a_1, a_2, \dots a_n$ এর অন্তত একটি ভাজক হবে p. (এখানে আরোহ পদ্ধতি দিয়েও করা যায়)।

পাটীগণিতের মূল প্রতিজ্ঞা (Fundamental Theorem of Arithmetic)

অথবা অনন্য উৎপাদকীকরণ প্রতিজ্ঞা (Unique Factorization Theorem)

উপপাদ্য 17. এক অপেক্ষা বৃহত্তর কোন পূর্ণসংখ্যা n-কে মৌলিক সংখ্যা সমূহের গুণফল হিসাবে কেবলমাত্র, অনন্যভাবে প্রকাশ করা সম্ভব। (মৌলিক উৎপাদক সমূহের মধ্যে বিন্যাসের তারতম্য তুচ্ছ করে)।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা n আছে যাকে দুটি আলাদাভাবে মৌলিক সংখ্যাসমূহের উৎপাদকের গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়। যে সকল মৌলিক উভয়ের মধ্যে বর্তমান, তাদের দিয়ে ভাগ করে পাই

$$p_1p_2 \ldots\ldots p_r = q_1q_2 \ldots\ldots\ldots q_s$$

যেখানে $p_i(i = 1, 2 \ldots\ldots r)$, $q_j(j = 1, 2 \ldots\ldots s)$ মৌলিক $p_1 \ldots\ldots p_r$ মৌলিকগুলি $q_1, \ldots\ldots q_s$ থেকে আলাদা। এখন $p_1|q_1 \ldots\ldots q_s$;

কিন্তু $q_1, \ldots\ldots q_s$ এগুলি মৌলিক এবং p_1-ও মৌলিক। অতএব এটি সম্ভব হতে হলে p_1 মৌলিক, $q_1, \ldots q_s$ এর মধ্যে থাকা প্রয়োজন। এভাবে $p_2, \ldots\ldots p_r$ প্রত্যেকটিই $q_1, \ldots\ldots q_s$ এর মধ্যে থাকা প্রয়োজন। আবার $q_1 \ldots\ldots q_s$ প্রত্যেকটি বামপক্ষ $p_1, \ldots\ldots p_r$ এর মধ্যে থাকা প্রয়োজন। অতএব এটা সম্ভব হতে হলে বামপক্ষে ও ডানপক্ষে একই প্রকার মৌলিক থাকতে হবে। অতএব কোন সংখ্যাকে কেবলমাত্র অনন্য ভাবেই মৌলিক সংখ্যার উৎপাদকের মাধ্যমে লেখা সম্ভব।

উপপাদ্য 18. অসীম সংখ্যক মৌলিক সংখ্যার অস্তিত্ব আছে। (ইউক্লিডের উপপাদ্য)

প্রমাণ ঃ যদি সমগ্র মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা সীমিত হয় ধরা যাক r সংখ্যক মৌলিক সংখ্যা আছে। তা হলে আমরা তাদের $p_1, p_2, \ldots\ldots p_r$ দ্বারা চিহ্নিত করলাম।

এবার আমরা একটি পূর্ণসংখ্যা

$$n = p_1p_2 \ldots\ldots p_r + 1 \text{ নিলাম।}$$

স্পষ্টত ঃ যেহেতু $p_i > 1$, $p_i \nmid n$. এখন মৌলিক সংখ্যার সংজ্ঞানুযায়ী n তাহলে একটি মৌলিক সংখ্যা কিন্তু $n > p_i$, $i = 1, 2, \ldots\ldots n$.

অথবা $p_1, p_2, \ldots\ldots p_r$ ব্যতীত আরও মৌলিক সংখ্যা আছে যার দ্বারা n বিভাজ্য। উভয় ক্ষেত্রেই দেখা যাচ্ছে মৌলিক সংখ্যা সীমিত সংখ্যক হতে পারে না।

মন্তব্য 1. এই উপপাদ্যে ব্যবহৃত সংখ্যা $p_1p_2 \ldots\ldots p_r + 1$ মৌলিক হতে পারে বা যৌগিক হতে পারে।

যেমন,	$2.3 + 1 = 7$	মৌলিক
	$2.3.5 + 1 = 31$	”
	$2.3.5.7 + 1 = 211$	”
কিন্তু	$2.7.11 + 1 = 155$	যৌগিক

মন্তব্য 2. মৌলিক সংখ্যাসমূহের মধ্যে পারস্পরিক অন্তর অনেক সময় বৃহৎ। k যদি একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় তবে

$(k + 1)! + 2, (k + 1)! + 3, ... (k + 1)! + k + 1$ এদের প্রত্যেকটি যৌগিক যেহেতু যথাক্রমে $2, 3, ... k + 1$ দ্বারা বিভাজ্য। অতএব দেখা গেল ঐ সংখ্যাগুলির আগের ও পরের মৌলিক সংখ্যার অন্তর অন্তত k হবে।

মন্তব্য 3. x একটি পূর্ণসংখ্যা হলে, তার থেকে বৃহত্তর মৌলিক সংখ্যা আছে কি? উচ্চতর সংখ্যাতত্ত্বে দেখানো হয়েছে যে যদি x থেকে বড় নয় এমন মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা $\pi(x)$, যেখানে $\lim\limits_{x \to \infty} \pi(x)\dfrac{\log x}{x} = 1$

অর্থাৎ $\pi(x)$, x ক্রমাগত বড় হলে $\dfrac{x}{\log x}$-এর নিকটবর্তী হবে।

কোন বড় সংখ্যা x নিয়ে তার থেকে ছোট কটি মৌলিক সংখ্যা আছে যে সম্বন্ধে আমরা ধারণা করতে পারি।

মন্তব্য 4. মৌলিক সংখ্যা

উদাহরণমালা ঃ

1. $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ..... p_r^{\alpha_r}$, $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ..... p_r^{\beta_r}$ হলে (α_1, ... α_r এবং β_1 ...... β_r ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, এবং p_1, p_2 ..... p_r প্রত্যেকটি মৌলিক হলে
   (i) (a, b) ও [a, b] নির্ণয় করুন।
   (ii) (a, b) = 1 হলে, α_1, β_1 এর মধ্যে সম্পর্ক কিরূপ?
   (iii) যদি a|b হয় α_1, β_1 এর মধ্যে সম্পর্ক কিরূপ?
2. (i) পরপর কটি বর্গমুক্ত সংখ্যা পাওয়া যেতে পারে?
   (ii) পরপর কটি ঘনমুক্ত সংখ্যা পাওয়া যেতে পারে?

[**সংজ্ঞা ঃ বর্গমুক্ত সংখ্যা ঃ** একটি সংখ্যাকে বর্গমুক্ত সংখ্যা বলা হবে যদি সংখ্যাটিকে মৌলিক সংখ্যার উৎপাদকে লিখলে, কোন মৌলিক সংখ্যার ঘাত এক এর বেশি না হয়।

সংজ্ঞা ঃ ঘনমুক্ত সংখ্যা ঃ একটি সংখ্যাকে ঘনমুক্ত সংখ্যা বলা হবে যদি সংখ্যাটিকে মৌলিক সংখ্যার উৎপাদকে লিখলে, কোন মৌলিক সংখ্যার ঘাত 2 এর বেশি না হয়।]

উদা. 3. যদি $\dfrac{a}{b}$ ও $\dfrac{c}{d}$ দুইটি সংখ্যা এমন হয় যে (a, b) = 1 এবং (c, d) = 1 এবং $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$ একটি পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে দেখান যে |b| = |d|.

উদা. 4. (i) x, y দুটি বিজোড় সংখ্যা হলে দেখান যে $x^2 + y^2$ কখনও পূর্ণবর্গ হতে পারে না।
   (ii) a, b দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং (a, b) = 1. ab পূর্ণবর্গ হলে দেখান যে a ও b প্রত্যেকে পূর্ণবর্গ।
   (iii) (a, b) = 1 এবং ab যদি একটি সংখ্যার k-তম ঘাত হয়, তবে দেখান যে a, b প্রত্যেকে কোন সংখ্যার k-তম ঘাত।

উদা. **5.** $(a, b, c)\,[a, b, c] = abc$ হলে দেখান যে $(a, b) = (b, c) = (c, a) = 1$

উদা. **6.** দেখান যে $[a, b, c]\,(ab, bc, ca) = |abc|$

উদা. **7.** নীচের বক্তব্যগুলির সত্যতা বা অসত্যতা পরীক্ষা করুন।

(সত্য হলে প্রমাণ করুন, সত্য না হলে উদাহরণ দিন)

(i) $(a, b) = (a, c)$ হলে $[a, b] = [a, c]$

(ii) $(a, b) = (a, c)$ হলে $(a^2, b^2) = (a^2, c^2)$

(iii) $(a, b) = (a, c)$ হলে $(a, b) = (a, b, c)$

(iv) p একটি মৌলিক সংখ্যা এবং $p|a$, $p|(a^2 + b^2)$ হলে $p|b$.

(v) p একটি মৌলিক সংখ্যা ও $p|a^2$ হলে $p|a$.

(vi) $a^3|c^3$ হলে $a|c$

(vii) $a^3|c^2$ হলে $a|c$

(viii) $a^2|c^3$ হলে $a|c$

(ix) $b|(a^2 + 1)$ হলে $b|(a^4 + 1)$

(x) $b|(a^2 - 1)$ হলে $b|(a^4 - 1)$

(xi) $(a, b, c) = ((a, b), (a, c))$

উদা. **8.** কিরূপ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-এর জন্য

$$\sum_{m=1}^{n} m \,|\, n! \text{ হবে?}$$

উদা. **9.** 1, 2, 3, ... n পর্যন্ত সংখ্যার সেট S এর মধ্যে 2 এর উচ্চতম ঘাতযুক্ত সংখ্যা 2^k হলে, দেখান যে 2^k, সেটের অন্য কোন সংখ্যার ভাজক নয়।

উদা. **10.** দেখান যে, একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n যা 2^k এরূপ নয়, এর জন্য এমন দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা m, k আছে যে

$$m + (m + 1) + ... + (m + k) = n.$$

উদা. **11.** $2^n - 1$ একটি মৌলিক সংখ্যা হলে, দেখান যে n হচ্ছে 2-এর কোন ঘাত।

উদা. **12.** যদি $2^n + 1$ একটি মৌলিক সংখ্যা হয়, প্রমাণ করুন যে a একটি মৌলিক সংখ্যা।

উদা. **13.** g ও l দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $g\,|\,l$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা দ্বয় x, y যদি এমন হয় যে $(x, y) = g$ এবং $[x, y] = l$ তবে ঐরূপ পূর্ণসংখ্যাজোড়ের সংখ্যা হল 2^k। যেখানে k হল l/g এর স্বতন্ত্র মৌলিক উৎপাদক সংখ্যা।

উদা. **14.** দেখান যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাকে

$$2^{j_0} + 2^{j_1} + \ldots + 2^{j_m}$$

এইরূপে অনন্যভাবে প্রকাশ করা যায়, যেখানে

$$0 \le j_0 < j_1 < \ldots.. < j_m$$

উদা. **15.** দেখান যে যে.

কান ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা a-কে

$$a = 3^m + b_{m-1}3^{m-1} + b_{m-2}3^{m-2} + \ldots.. + b_0$$

এই রূপে অনন্যভাবে প্রকাশ করা যায় যেখানে $b_1 = 0, 1$ অথবা -1

উদা. **16.** দেখান যে যেকোন a, b, n > 1 ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার জন্য

$$(a^n - b^n) \nmid (a^n + b^n)$$

উদা. **17.** যদি m > n হয় তবে দেখান যে

$$\left(a^{2^n} + 1\right) \nmid \left(a^{2^m} - 1\right)$$

8.8 সর্বসমতা (Congruence)

সংজ্ঞা ঃ শূন্য নয় এমন পূর্ণসংখ্যা m দ্বারা যদি (a – b), (দুটি পূর্ণসংখ্যা a, b এর বিয়োগফল) বিভাজ্য হয় তা হলে বলা হয় a সংখ্যাটি b মডিউলো m এর সঙ্গে সর্বসম। প্রতীক সাহায্যে লেখা হয় a ≡ b (মড্ m) প্রতীক সাহায্যে এই সর্বসমতা সম্পর্কটি লেখা হয় a ≡ b (মড্ m)

মন্তব্য 1. a – b যদি m দ্বারা বিভাজ্য হয়, তবে –m দ্বারাও a – b বিভাজ্য। অতএব আমরা শুধু ধনাত্মক m এর জন্য আলোচনা করব।

উপপাদ্য 19. a, b, c, d, x, y পূর্ণসংখ্যা হলে

(i) a ≡ b (মড্ m) b ≡ a (মড m),

b – a = 0 (মড্ m) সমার্থক বিবৃতি।

(ii) a ≡ a (মড্ m) প্রতি a ∈ I (পূর্ণসংখ্যার সেট)

(iii) যদি a ≡ b (মড m), b ≡ c (মড m) তা হলে a ≡ c (মড্ m)

(iv) যদি a ≡ b (মড m), c ≡ d (মড m) হয়, তবে ax + cy ≡ (bx + dy) (মড m)

(v) যদি a ≡ b (মড m), এবং c ≡ d (মড m), তবে ac ≡ bd (মড n

(vi) যদি a ≡ b (মড m) এবং dlm এবং d > 0, তবে a ≡ b (মড d)

প্রমাণ ঃ (i) সংজ্ঞা থেকে পাওয়া যাচ্ছে

(ii) যেহেতু $m \mid (a-b)$ এবং $m \mid (b-c)$, অতএব $m \mid ((a-b)+(b-c))$

অর্থাৎ $m \mid (a-c)$ অতএব $a \equiv c$ (মড m)

(iii) $\because$ $m \mid (a-b)$, $m \mid (c-d)$, এবং $ax + cy - bx - dy = x(a-b) + y(c-d)$

অতএব $ax + cy \equiv bx + dy$ (মড m)

(iv) $ac - bd = (a-b)c + b(c-d)$ $\therefore$ $m \mid (ac - bd)$.

অতএব $ac \equiv bd$ (মড m)

(v) $m \mid (a-b)$, $d \mid m$ অতএব $d \mid (a-b)$.

অতএব $a \equiv b$ (মড m)

উপ. 20. f একটি বহুপদ রাশি এবং উহার পদগুলির সহগ সমূহ পূর্ণসংখ্যা। যদি $a \equiv b$ (মড m), তবে $f(a) \equiv f(b)$ (মড m).

প্রমাণ ঃ যেহেতু $a \equiv b$ (মড m) অতএব $a^2 \equiv b^2$ (মড m), $a^3 \equiv b^3$ (মড m) ইত্যাদি। অতএব $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k$ হলে

$$f(a) - f(b) = a_1(a-b) + a_2(a^2 - b^2) + \ldots + a_k(a^k - b^k)$$

অতএব $f(a) - f(b) \equiv 0$(মড $(a-b)$)

কিন্তু $m \mid (a-b)$ অর্থাৎ $(a-b) \equiv 0$(মড (m))

অতএব $f(a) - f(b) \equiv 0$(মড (m))

অতএব $f(a) \equiv f(b)$ (মড m)

উপ. 21. $ax \equiv ay$ (মড m), যদি এবং কেবলমাত্র যদি $x \equiv y\left(\text{মড } \dfrac{m}{(a,m)}\right)$

প্রমাণ ঃ $(a, m) = g$ হলে $a = gp$, $m = gq$

যেখানে p, q পরস্পর মৌলিক।

অতএব $\dfrac{m}{(a,m)} = \dfrac{gq}{g} = q$

$$m \mid (a(x-y)) \Leftrightarrow gq \mid a(x-y) \Leftrightarrow q \mid p(x-y) \Leftrightarrow q \mid (x-y)$$

অতএব প্রমাণিত।

উপ. 22. যদি $ax \equiv ay$ (মড m) এবং $(a, m) = 1$, তবে $x \equiv y$ (মড m)

প্রমাণ ঃ $m \mid (ax - ay) \Leftrightarrow m \mid a(x-y) \Rightarrow m \mid (x-y)$ $\quad (\because (a,m) = 1)$

উপ. 23. $x \equiv y$ (মড m_i) $i = 1, 2, \ldots\ldots r$

যদিও কেবলমাত্র যদি $x \equiv y$ [মড $[m_1, m_2, \ldots\ldots m_r]$

প্রমাণ ঃ যেহেতু $m_i|(x-y)$, অতএব $(x-y)$, $m_1, m_2, \ldots\ldots m_r$ এর একটি সাধারণ গুণিতক। কিন্তু $[m_1, m_2, \ldots\ldots m_r]$ ক্ষুদ্রতম গুণিতক

অতএব $[m_1, m_2, \ldots\ldots m_r] \mid (x-y)$

বিপরীতক্রমে যদি $[m_1, m_2, \ldots\ldots m_r] \mid (x-y)$ হয়,

যেহেতু $m_i \mid [m_1, m_2, \ldots\ldots m_r]$, অতএব $m_i|(x-y)$, অতএব $x \equiv y$ (মড m_i)

8.9 অবশেষ মডুলো m এবং অবশেষ শ্রেণী মডুলো m (Residue modulo m and Residue class modulo m)

অবশেষ মডুলো m (Residue modulo m)

সংজ্ঞা ঃ যদি $x \equiv y$ (মড m) তাহলে y -কে বলা হয় মডিউলো m সাপেক্ষে x -এর অবশেষ।

মন্তব্য 1. y, x-এর অবশেষ হলে, অর্থাৎ $m|(x-y)$. অতএব $m|(y-x)$ অতএব x হল মডিউলো m সাপেক্ষে y-এর অবশেষ।

মন্তব্য 2. $x \equiv y$ (মড m) হলে $m|(x-y)$ অর্থাৎ $x - y = pm$, যেখানে p একটি পূর্ণসংখ্যা।

$\therefore x = pm + y$

উদা. 1. যদি $m = 5$ নেওয়া হয়

তবে $6 \equiv 1$ (মড 5), $7 \equiv 2$ (মড 5), $8 \equiv 3$ (মড 5)

$9 \equiv 4$ (মড 5), $10 \equiv 0$ (মড 5), $5 \equiv 0$ (মড 5) $4 \equiv 4$ (মড m)

উদা. 2. যদি $m = 6$ হয় তবে, $1 \equiv 1$ (মড 6)

$2 \equiv 2$ (মড 6), $3 \equiv 3$ (মড 6), $4 \equiv 4$ (মড 6),

$5 \equiv 5$ (মড 6), $6 \equiv 0$ (মড 6), $50 \equiv 2$ (মড 6)

উপ. 24. যদি $x \equiv y$ (মড m) হয়, তবে $(x, m) = (y_1 m)$

প্রমাণ ঃ $m|(x-y)$. অতএব যদি ভাগ প্রক্রিয়া প্রয়োগ

করা যায় $x = q_1 m + r_1$, $\quad 0 \le r_1 < m$

$y = q_2 m + r_2$. $\quad 0 \le r_2 < m$

অতএব $x - y = (q_1 - q_2)\, m + r_1 - r_2$

যেহেতু $m|(x-y)$, অতএব $m|(r_1 - r_2)$.

কিন্তু $|r_1 - r_2| < m$ অতএব $r_1 = r_2$ হতে হবে।

অতএব $(x, m) = (q_1 m + r_1, m) = (r_1, m) = (y, m)$

8.9.1 অবশেষ শ্রেণী মডিউলো m (Residue class modulo m)

আমরা দেখেছি কোন পূর্ণসংখ্যাকে যদি m (>0) দিয়ে ভাগ করা হয় তবে যে ভাগশেষ থাকে তা 0, 1, 2, 3, 4, ... (m−1) এগুলির একটি হতেই হবে। প্রকৃত পক্ষে সমগ্র পূর্ণসংখ্যাকে m-এর সাপেক্ষে ভাগশেষ অনুসারে m সংখ্যক শ্রেণীতে বিন্যস্ত করতে পারি। এবার আমরা অবশেষ শ্রেণী মডিউলো m-এর সংজ্ঞা দেব।

সংজ্ঞা ঃ কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা m-এর সাপেক্ষে একটি m সংখ্যক সভ্যযুক্ত পূর্ণসংখ্যার সেট S যদি এমন হয় যে কোন পূর্ণসংখ্যা x-এর জন্য একটি এবং কেবল একটি পূর্ণসংখ্যা $r \in S$ থাকবে যে

$$x \equiv r \text{ (মড্ } m)$$

উপরের শর্ত পালনকারী সেটকে সম্পূর্ণ অবশেষতন্ত্র (Complete residue system modulo m) মডিউলো m বলা হয়।

অবশেষ শ্রেণী (residue class modulo m) মডিউলো m

কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা m-এর জন্য সমগ্র পূর্ণসংখ্যাকে m সংখ্যক শ্রেণী-তে বিন্যস্ত করতে পারি এমন ভাবে যে একটি শ্রেণীভুক্ত যে কোন দুটি সংখ্যা x, y পরস্পর $x \equiv y$ (মড m) হবে।

এই প্রকার শ্রেণীভাগ করলে, 1 এবং m + 1, 2m + 1, 3m + 1 ইত্যাদি km + 1 (k = 0, ±1, ±2, ...) সকল সংখ্যা একটি শ্রেণীতে থাকবে।

অন্যান্য শ্রেণীগুলি হল km (k = 0, ± 1, ± 2, ...)

km + 2 (k = 0, ± 1, ± 2, ...)

km + 3 (k = 0. ± 1, ± 2, ...)

....

km + m − 1 (k = 0, ± 1, ± 2. ......)

এভাবে সমগ্র পূর্ণসংখ্যাকে m-সংখ্যক শ্রেণীতে স্থাপন করা হল। উপরের m-সংখ্যক শ্রেণী তৈরি হল। প্রত্যেকটি শ্রেণী থেকে একটি এবং কেবলমাত্র একটি সদস্য নিয়ে একটি সেট S তৈরি করলে সেই সেট S একটি সম্পূর্ণ অবশেষ তন্ত্র হবে। কারণ শ্রেণীগুলিতে যথাক্রমে 0, 1, 2, 3, ... m − 1 এই সংখ্যাগুলির সঙ্গে **সর্বসম** (মড m) পূর্ণসংখ্যাদের ঐ শ্রেণীতে নেওয়া হয়েছে।

ফার্মা (Fermat : 1601–1665)-র কয়েকটি উল্লেখযোগ্য অবদান আছে। এখানে দুটি বলা হচ্ছে। প্রথমটি একটি ভাগ সংক্রান্ত এবং দ্বিতীয়টি ফার্মা কর্তৃক প্রকাশিত বিখ্যাত উপপাদ্য (Fermat's last Theorem). যার প্রমাণ বিংশ শতাব্দীর শেষ পাদে করা হয়েছে।

1. ফার্মার উপপাদ্য ঃ

p একটি মৌল সংখ্যা v যা দ্বারা পূর্ণসংখ্যা a বিভাজ্য নয়। তাহলে

$$a^{p-1} \equiv 1 \text{ (মড } p)$$

প্রমাণ ঃ a এর প্রথম $(p - 1)$ গুণজাত সংখ্যাগুলি হল

$$m_1 = a, m_2 = 2a, m_3 = 3a, \ldots\ldots m_{p-1} = (p-1)a.$$

এই সংখ্যাগুলির কোন দুটিই $m_r \equiv m_s$ (মড p) হতে পারে না; কারণ তা হলে $m_r - m_s = (r - s)a$ সংখ্যাটিকে p দিয়ে বিভাজ্য হতে হয় অর্থাৎ তা হলে $p|(r - s)$ হতে হয়। কিন্তু এটা অসম্ভব যেহেতু $1 \leq r < s \leq (p - 1)$ এবং p, a এর উৎপাদক নয়। আবার $m_1, m_2 \ldots m_{p-1}$ এগুলির কোনটিই p দ্বারা বিভাজ্য হতে পারে না। অতএব $m_1, m_2 \ldots m_{p-1}$ সংখ্যাগুলিকে এমনভাবে সাজানো যাবে যাতে তারা যথাক্রমে 1 (মড p) 2 (মড p) …… (p – 1) (মড p) হয়।

$\therefore\ m_1 m_2 \ldots m_{p-1} = 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots (p - 1)\, a^{p-1} \equiv 1.2.3 \ldots\ldots (p - 1)$ (মড p)

অর্থাৎ $k(a^{p-1} - 1) \equiv 0$ (মড p) যেখানে $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots (p - 1)$

কিন্তু k, p দ্বারা বিভাজ্য নয়। অতএব $a^{p-1} - 1$, p দ্বারা বিভাজ্য।

অতএব $a^{p-1} \equiv 1$ (মড p) (প্রমাণিত)

পিথাগোরাসের উপপাদ্য বীজগণিতিক আকারে প্রকাশ করলে হয় $a^2 + b^2 = c^2$ যেখানে a. b, c একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য, (যেখানে c = অতিভুজের দৈর্ঘ্য)।

গণিতে দেখা যায় $a = 3, b = 4, c = 5$

$a = 12, b = 5, c = 13$

ইত্যাদি অনেক পূর্ণসংখ্যা সমাধান আছে।

সাধারণভাবে $a = (v^2 - u^2)\, r,\ b = (2uv)\, r,$

$c = (u^2 + v^2) r$

যেখানে u, v, r, পূর্ণসংখ্যা। এগুলি $a^2 + b^2 = c^2$ -এর সাধারণ পূর্ণসংখ্যা সমাধান।

ফার্মার শেষ উপপাদ্য (Fermat's Last Theorem)

ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $n > 2$ হলে

$$a^n + b^n = c^n$$

এই সমীকরণের পূর্ণসংখ্যাত্রয় (a, b, c)-এর জন্য কোন সমাধান নেই।

(মন্তব্য ঃ ফার্মা উপপাদ্যটি লিখে প্রমাণ দেন নি। বহু চেষ্টার পর সম্প্রতি এই উপপাদ্য সত্য বলে প্রমাণিত হয়েছে।)

উপ. 25. যদি k যে কোন একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় এবং $a_i \equiv b_i$ (মড m) $i = 1, 2, \ldots, k$ হয়

$$\text{তবে } \sum_{i=1}^{k} a_i \equiv \sum_{i=1}^{k} b_i \text{ (মড m)}$$

$$\text{এবং } \prod_{i=1}^{k} a_i \equiv \prod_{i=1}^{k} b_i \text{ (মড m)}$$

প্রমাণ ঃ যেহেতু $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2$ (মড m)

এবং $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2$ (মড m)

অতএব আরোহ প্রণালী প্রয়োগ সাহায্যে দেখানো যায় যে, যে কোন সসীম সংখ্যক সংখ্যা $a_1, a_2, \ldots a_k$ -এর উপপাদ্যটি সত্য।

উপ. 26. S একটি পূর্ণ সংখ্যার সেট এমন যে

(i) S-এর m সংখ্যক পদ আছে।

(ii) যদি $s, t \in S$ এমন হয় যে $s \equiv t$ (মড m) তাহলে $s = t$

উপরের শর্তদুটি পালনকারী সেট S একটি মডুলো m এর সাপেক্ষে একটি সম্পূর্ণ অবশেষ তন্ত্র।

(উপরের শর্তদুটি S-এর সম্পূর্ণ অবশেষতন্ত্র হওয়ার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট)

প্রমাণ ঃ যেহেতু m দিয়ে কোন পূর্ণসংখ্যাকে ভাগ করলে অবশেষ $0, 1, 2, \ldots m-1$ এই m রকমের হতে পারে এবং যেহেতু সংখ্যাগুলির কোন দুটিই (মড m) দ্বারা সংযুক্ত নয়, অতএব m সংখ্যক পদ S-এ থাকা প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট। আমরা সমগ্র পূর্ণসংখ্যাকে m সংখ্যক শ্রেণীতে ভাগ করতে পারি নিম্নের নিয়ম অনুসারে— যে সকল সংখ্যা পরস্পর অবশেষ মডুলো m দ্বারা সম্পর্কযুক্ত তারা একই শ্রেণীতে থাকবে।

(ii) ধর্মটি থেকে আমরা পাই যে অবশেষতন্ত্রে এক একটি শ্রেণী থেকে একটি ও কেবল একটি সদস্য S এ নেওয়া হয়েছে। ফলে অবশেষতন্ত্রটি সম্পূর্ণ।

উদা. দেখান যে $\{4, 17, -2, 100, 61\}$

মডুলো 5-এর সাপেক্ষে একটি সম্পূর্ণ অবশেষতন্ত্র।

প্রমাণ ঃ এখানে 5টি সদস্য আছে এবং যেহেতু $17-4, 4+2, 100-4, 61-4, 17+2, 100+2,$

$61+2, 17+100, 17+2, 100-17, 61-17, 100-61$

এদের কেউ 5 দ্বারা বিভাজ্য নয় অতএব সেটিই সম্পূর্ণ অবঃতন্ত্র (মড m)

অন্যভাবেও যুক্তি দেওয়া যেতে পারে। যেমন,

$4 \equiv 4$ (মড 5)

$17 \equiv 2$ (মড 5)

$-2 \equiv 3$ (মড 5)

$100 \equiv 0$ (মড 5)

$61 \equiv 1$ (মড 5)

অতএব দেখা গেল সংখ্যা 5টি পাঁচটি বিভিন্ন শ্রেণী থেকে নেওয়া হয়েছে। অতএব s সেটটি একটি সম্পূর্ণ অবশেষ তন্ত্র।

অবশেষ তন্ত্রের প্রয়োগ

আমরা 25 নং উপপাদ্যে দেখেছি যে $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ যদি কতগুলি পূর্ণসংখ্যা হয় যারা যথাক্রমে $b_1, b_2, \ldots$ b_n এর সঙ্গে অবশেষ (মড m) দ্বারা সম্পর্কিত তাহলে $a_1 a_2 \ldots\ldots a_n \equiv b_1 b_2 \ldots\ldots b_n$ (মড m) হবে।

এই উপপাদ্যের প্রয়োগ করে আমরা বহুক্ষেত্রে ভাগের অবশেষ নির্ণয় করতে পারি। যেমন ধরা যাক 2^{25} -কে 7 দিয়ে ভাগ করলে অবশেষ কত থাকবে? এখানে আমরা জানি $2^3 \equiv 1$ (মড 7)

সুতরাং $2^3 . 2^3 . \ldots\ldots 2^3$ (আটবার) $\equiv 1^8$ (মড 7) $= 1$ (মড 7)

অর্থাৎ $2^{24} \equiv 1$ (মড 7)

আবার $2 \equiv 2$ (মড 7)

অতএব $2^{24}\ 2 \equiv 1.2$ (মড 7)

অর্থাৎ $2^{25} \equiv 2$ (মড 7)

অতএব দেখা গেল $(2^{25} - 2)$, 7 দ্বারা বিভাজ্য।

অতএব 2^{25}-কে 7 দ্বারা ভাগ করলে 2 অবশিষ্ট থাকবে।

এরূপ আর একটি উদাহরণ নেওয়া যাক ঃ 3^{40} কে 23 দ্বারা ভাগ করলে কত অবশিষ্ট থাকবে?

এখানে $3^3 = 27 \equiv 4$ (মড 23)

অতএব $(3^3)^{13} \equiv 4^{13}$ (মড 23) .... (1)

কিন্তু $4^3 = 64 \equiv 18$ (মড 23)

$\therefore\ 4^4 \equiv 3$ (মড 23)

$\therefore\ 4^{12} \equiv 3^3$ (মড 23) $\equiv 4$ (মড 23)

$\therefore\ 4^{13} \equiv 16$ (মড 23) .... (2)

অতএব (1) ও (2) থেকে পাই $3^{39} \equiv 16$ (মড 23)

$\therefore\ 3^{40} \equiv 48$ (মড 23) $\equiv 2$ (মড 23)

অতএব 3^{40}-কে 23 দ্বারা ভাগ করিলে 2 অবশিষ্ট থাকে।

উদাহরণমালা

1. অঋণাত্মক ক্ষুদ্রতম অবশেষ (residue) নির্ণয় করুন।

   (i) 2^{1000} (মড 15) (ii) 16! (মড 17) (iii) –41260 (মড 1000)

2. ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n নির্ণয় করুন যেন $2^n \equiv 1$ (মড 17)

3. দেখান যে $2^{2^5}+1$, 641 দ্বারা বিভাজ্য।

4. দেখান যে 2^{15} $14^{40}+1$, 11 দ্বারা বিভাজ্য।

5. দেখান যে কোন বর্গসংখ্যা 0 অথবা 1 (মড 4) এর সঙ্গে সর্বসম।

6. দেখান যে $x^2+y^2=1839$ এই সমীকরণের পূর্ণসংখ্য x, y সমাধান নেই।

8.10 সমাধান

উদাহরণ মালা

1. (i) $a=p_1^{\alpha_1}\ldots\ldots p_r^{\alpha_r}$, $b=p_1^{\beta_1}\ldots\ldots p_r^{\beta_r}$

   অতএব জি. সি. ডি $=(a,b)=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}\,p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)}\ldots p_r^{\min(\alpha_r,\beta_r)}$

   ল. সা. গু. $=[a,b]=p_1^{\delta_1}\,p_1^{\delta_2}\ldots.p_r^{\delta_r}$ যেখানে $\delta_i \geq 0$ এবং $\delta_i=\max(\alpha_i, \beta_i)$

   (ii) $(a, b) = 1$ হলে $p_1, p_2 \ldots\ldots p_r$ প্রতিটি অনুপস্থিতি।

   অতএব $\min(\alpha_i, \beta_i) = 0$ অর্থাৎ $\alpha_i\beta_i = 0, i = 1, 2, 3, \ldots. r.$

   (iii) $a|b$, অতএব $\beta_i \geq \alpha_i \geq 0$. $i = 1, 2, \ldots\ldots r.$

2. (i) যেহেতু সবথেকে ছোট মৌলিক সংখ্যা হল 2 , অতএব পূর্ণসংখ্যাগুলির পরপর চারটি নিলে একটি 4 দ্বারা বিভাজ্য অর্থাৎ 2^2 একটি উৎপাদক থাকবে। অতএব পরপর তিনটির বেশি বর্গমুক্ত সংখ্যা নেই।

   (ii) পর পর ঘনমুক্ত সংখ্যা 7টির বেশি হতে পারে নাও যেহেতু $2^3=8$ পরপর আটটি সংখ্যা নিলে একটি 2^3 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

3. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}=$ পূর্ণসংখ্যা $= n$ (ধরা হল)

   অতএব $bd|(ad+bc)$ কিন্তু $(b, a) = 1, (c, d) = 1$

   অতএব যেহেতু $b|bc$, $\therefore b|ad \Rightarrow b|d$

   আবার $d|ad$, অতএব $d|b$ ($\because$ $(c, d) = 1$)

   $b|d$ এবং $d|b$ হওয়ায় $b = \pm d$

4. (i) $x = 2k + 1, y = 2m + 1$ (m, k পূর্ণসংখ্যা)

$x^2 + y^2 = 4k^2 + 4m^2 + 4k + 4m + 2$

$\therefore\ x^2 + y^2 = 4(k^2 + m^2 + k + m) + 2$

$= 2[2(k^2 + m^2 + k + m) + 1]$

$= 2 \times$ বিজোড় সংখ্যা

অতএব $x^2 + y^2$-এর 2 উৎপাদক আছে এবং 2^2 উৎপাদক নেই।

অতএব $x^2 + y^2$ কখনই বর্গ হতে পারে না।

(ii) যেহেতু $(a, b) = 1$ এবং ab পূর্ণবর্গ

অতএব $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ এবং $b = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_m^{\beta_m}$ হলে

$(p_i, q_j) = 1, \qquad i = 1, 2 \ldots\ldots k$

$j = 1, 2 \ldots\ldots m$

অতএব $q_1, \ldots q_m$ -গুলি $p_1 \ldots p_k$ থেকে স্বতন্ত্র

অতএব ab পূর্ণবর্গ হতে হবে $2 | \alpha_i \qquad i = 1, 2 \ldots k$

$2 | \beta_j \qquad j = 1, 2 \ldots m$

অর্থাৎ a ও b প্রত্যেকটি পূর্ণবর্গ

(iii) এটির যুক্তি (ii)-এর অনুরূপ।

5. $(a, b, c) = x$ হলে $a = ux, b = vy, c = wz$ যেখানে $(u, v, w) = 1$

$x[a, b, c] = uvwx^3$ (দেওয়া আছে) অর্থাৎ $[ux, vx, wx] = x[u, v, w]$

অতএব $[a, b, c] = x^2uvw = x[u, v, w]$

অতএব $xuvw = [u, v, w]$

যেহেতু $[u, v, w] = uvw$ থেকে বন হতে পারে না, অতএব $x = 1$ অর্থাৎ

$[a, b, c] = 1$

অতএব $[a, b, c] = abc$

অতএব a, b, c জোড়ায় জোড়ায় মৌলিক

অর্থাৎ $(a, b) = (b, c) = (c, a) = 1$

6. $a=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$, $b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots\ldots p_r^{\beta_r}$, $c=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\ldots p_r^{\gamma_r}$ যেখানে $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \geq 0$ এবং $p_1, \ldots p_r$ মৌলিক সংখ্যা (মৌল পাটীগণিতের প্রতিজ্ঞা অনুসারে)।

$$[a,b,c]=p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)}\,p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)}\ldots\ldots p_r^{\max(\alpha_r,\beta_r,\gamma_r)}$$

$$(ab,bc,ca)=p_1^{\min\{\alpha_1+\beta_1,\beta_1+\gamma_1,\gamma_1+\alpha_1\}}\ldots\,p_r^{\min\{\alpha_r+\beta_r,\beta_r+\gamma_r,\gamma_r+\alpha_r\}}$$

অতএব [a, b, c] (ab + bc + ca) এর গুণফলে p_1-এর ঘাত হবে

$$\max(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)+\min\{\alpha_1+\beta_1,\beta_1+\gamma_1,\gamma_1+\alpha_1\}=\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$$

অতএব [a, b, c] (ab + bc + ca)

$$=p_1^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}\,p_2^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\ldots\ldots p_r^{\alpha_r+\beta_r+\gamma_r}=abc\,.$$

7. (i) সত্য নয় $a=10, b=15, c=25$ হলে $(a,b)=(a,c)=5$

কিন্তু $[10, 15] = 30$ $[10, 25] = 50$ $\therefore [a,b] \neq [a,c]$

(ii) সত্য; $(a, b) = (a, c) = x$ হলে, $a = ux, b = vx, c = wx$.

অতএব $(u, v) = 1 = (u, w)$

অতএব $(a^2, b^2) = (x^2u^2, v^2x^2) = x^2(u^2, v^2)$

$= x^2$

$(a^2, c^2) = x^2$

(iii) সত্য ঃ যেহেতু $(a, b) = (a, c)$ $\therefore$ $a = ux, b = vx, c = wx$

$(u, v) = 1$ $(u, w) = 1$

$\therefore (a, b, c) = (ux, vx, wx)$

$= x(u, v, w)$

$= x$ যেহেতু $(u, v, w) = 1$

(iv) $p|a$ $\therefore a = px$ (p মৌলিক)

$p\,(a^2 + b^2)$ $\therefore a^2 + b^2 = py$

$\therefore\ p^2x^2 + b^2 = py$

$b^2 = py - p^2x^2 = p\,(y - px^2)$

$\therefore$ b^2 -এর একটি উৎপাদক p আছে। কিন্তু p মৌলিক হওয়ায় p, b-তে থাকবে। অতএব $p|b$.

অতএব সত্য।

(v) সত্য কেননা $p|a^7$ হওয়ায় ও p মৌলিক হওয়ায় a-তে p না থাকলে a^7 থাকতে পারে না। অতএব p a.

(vi) $a^3|c^3$, অতএব $c^3 = xa^3$ যদি $a \nmid c$ হয়,

$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$

$c^3 = p_1^{3\alpha_1} \ldots p_r^{3\alpha_r} q_1^{3\beta_1} \ldots q_s^{3\beta_s}$ ($\because$ c তে $p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ থাকা প্রয়োজন, অন্যান্য উৎপাদকও থাকতে পারে।)

অতএব $a|c$.

(vii) $a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ $\quad \therefore a^3 = p_1^{3\alpha_1} \ldots p_r^{3\alpha_r}$ $\quad \alpha_i > 0$

$a^3|c^2$, $\therefore c^2$-এ আছে $p_1^{3\alpha_1} \ldots p_r^{3\alpha_r}$

অতএব c -তে আছে $p_1^{3\alpha_1/2} \ldots p_r^{3\alpha_r/2}$

অতএব α_i জোড় হতে পারে, এবং কোন α_i বিজোড় হলে c -তে $p_j^{3\alpha_j}$ থাকতে হবে। অতএ: c -তে p_i গুলি সবই থাকায় $a|c$ হবে।

(viii) $a^2|a^3$ হলে $a|c$ নাও হতে পারে। যেমন যদি $a = 2^3$, $c = 2^2$ হয় তবে $a^2|c^3$, কিন্তু $a \nmid c$।

(ix) না, কারণ $a = 2$, $b = 5$ নিলে $b|(a^2 + 1)$ কিন্তু $b \nmid (a^4 + 1)$

(x) ঠিক যেহেতু $a^4 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1)$

(xi) সত্য : $(a, b, c) = x$ হলে যেখানে $a = xp$, $b = xq$, $c = xr$

যেখানে $(p, q, r) = 1$. $(a, b) = (xp, xq) = x(p, q)$

$(b, c) = (xq, xr) = x(q, r)$.

$$((a,b),(b,c)) = (x(p,q), x(q,r)) = x((p,q),(q,r))$$

যদি $((p,q),(q,r)) = y$ হয় তবে $\quad (p, q) = my$

$$(q, r) = ny$$

অতএব y হল p, q ও r এর

মধ্যে সাধারণ ভাজক। অতএব $(p, q, r) = y$. কিন্তু $(p, q, r) = 1$ অতএব $y = 1$.

অতএব $((p,q),(q,r)) = 1$

অতএব $(a, b, c) = ((a,b),(b,c))$

8. প্রশ্ন এই যে $\frac{n(n+1)}{2} \Big| \underline{|n}$ কিনা?

স্বাভাবিকভাবে $n + 1$ মৌলিক হলে হবে না।

$n + 1$ মৌলিক না হলে $n + 1 = xy$ $\quad \frac{(n+1)}{2} \Big| \underline{|n-1}$

$\therefore \frac{xy}{2} \Big| \underline{|n-1}$ হওয়া প্রয়োজন।

9. 2^k যদি এমন হয় যে $2^k \le n < 2^{k+1}$ তা হলে 2^k, S-এর অন্য কোন সংখ্যার ভাজক নয়।

10. $m+(m+1)+....+(m+k)=\dfrac{(k+1)(2m+k)}{2}=n$ হতে হবে

n বিজোড় হলে $k = 1$, $m=\dfrac{n-1}{2}$

n জোড় এবং $n \ne 2^p$ না হয় তবে n এর দুইটি উৎপাদক পাওয়া যাবে যার একটি বিজোড়;

$n = pq$ যেখানে q বিজোড়। $(k+1)\left(m+\dfrac{k}{2}\right)=pq$

$q = k + 1$ (k জোড়), $m+\dfrac{k}{2}=p$.

11. $2^n + 1$ মৌলিক। n যদি 2^k এই রূপের না হয় তবেই n-কে $m + (m + 1) + ... + (m + k)$ (উদা. 10) রূপে লেখা যায়, যেখানে m, k ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। অতএব n-কে p.q রূপে লেখা যায় যেখানে q একটি বিজোড় সংখ্যা।

$2^{pq} = (2^p)^q + 1 = a^q + 1$ যেখানে $a = 2^p$

$= (a + 1)(a^{q-1} - a^{q-2} + ... - q + 1)$

12. $2^n - 1$ মৌলিক। n মৌলিক না হলে $n = pq$ যেখানে p একটি মৌলিক। তাহলে

$2^{pq} - 1$

$= (2^p)^q - 1$

$= (2^p - 1)$

$= (2^{p(q-1)} + ... + 1)$

13. $l = [x, y]$, $g = (x, y)$

$\therefore$ $l|g = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}....p_k^{\alpha_k}$ (p_1, p_2, ... p_k মৌলিক)

যদি $x = g.p$

যেখানে p হল $l|g$ থেকে নেওয়া 1টা, 2টা, ... k উৎপাদক। আমরা k-সংখ্যক উৎপাদক থেকে কোন একটিকে নিতে পারি আবার নাও নিতে পারি। এভাবে প্রত্যেকটিকে দু-রকম নিতে পারি।

অতএব এইরূপ নেওয়ার সংখ্যা

$= 2, 2. ..... k$ সংখ্যক $= 2^k$

অতএব 2^k সংখ্যক (x, y) আছে।

$\therefore \frac{xy}{2} \| n-1$ হওয়া প্রয়োজন।

14. যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা x হয় 2^k হবে অথবা $2^{k-1} < x < 2^k$ এর মধ্যে থাকবে।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $x = 2^{k-1} + y$ লিখলে

$$y = x - 2^{k-1}$$
$$< 2^k - 2^{k-1}$$
$$= 2^{k-1}$$

$\therefore$ $y < 2^{k-1}$ অনুরূপভাবে y-কে

লিখলে $2^{m-1} < y < 2^m$ যেখানে $m \le k - 1$

এভাবে আবার y-কে $2^{m-1} + z$ ইত্যাদি লিখলে পাওয়া যায়।

এ পদ্ধতিতে k, m ইত্যাদির মান অনন্যভাবে পাওয়া যায়।

8.11 সারাংশ

এই এককে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি, বিভাজ্যতা ও ভাগ পদ্ধতি, সাধারণ ভাজক ও বৃহত্তম সাধারণ ভাজক, সাধারণ গুণিতক ও লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক ইত্যাদি বিষয়ে ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

মৌলিক সংখ্যা, পাটীগণিতের মূল প্রতিজ্ঞা, সর্বসমতা, অবশেষ (Residue) ও অবশেষ শ্রেণী মডুলো m Residue class modulo m) প্রভৃতি বিষয়ে উদাহরণ সহ গভীরে আলোচনা করা হয়েছে।

ফার্মার উপপাদ্যটি বিশেষভাবে লক্ষ্য করুন।

ফার্মার উপপাদ্য ঃ

p একটি মৌল সংখ্যা যা দ্বারা পূর্ণসংখ্যা a বিভাজ্য নয় তা হলে,

$a^{p-1} \equiv 1$ (মড p)

একক 09 ❑ সঞ্চয়ণ (সেট)

গঠন

9.1 প্রস্তাবনা

গণিতশাস্ত্রের প্রায় সব শাখাতেই সেটতত্ত্বের প্রয়োগ দেখা যায়। আধুনিক গণিতে সেটতত্ত্ব সঞ্চয়ণ (Set Theory) একটি বিশেষ প্রয়োজনীয় এবং মূলগত ধারণা। উনবিংশ শতাব্দীর শেষদিকে জার্মান অঙ্কশাস্ত্রবিদ জি. ক্যান্টর (G. Cantor) এই সঞ্চয়ণ তত্ত্বের উদ্ভাবন ও উন্নতিসাধন করেন। বিভিন্ন বস্তুকে দলবদ্ধ করা এবং সেগুলোকে এক একটি বিশিষ্ট একক হিসেবে ব্যাখ্যা করা হল সঞ্চয়ণের প্রাথমিক ধারণা।

এই বিভাগে প্রথমে সঞ্চয়ণের ধারণা, সংজ্ঞা এবং সঞ্চয়ণের সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। পরে পর্যায়ক্রমে সঞ্চয়ণের উপর বিভিন্ন বীজগাণিতিক প্রক্রিয়ার উল্লেখ, প্রয়োজয়নীয় সূত্রাবলি, সূত্রগুলোর প্রমাণ, ভেন্‌চিত্র এবং ভেন্‌চিত্রের সাহায্যে প্রক্রিয়াগুলোর ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

এই ভাগে উল্লেখিত বিষয়বস্তুসমূহ গণিতশাস্ত্রের যে কোনও শাখা পঠনপাঠনে খুবই প্রয়োজন।

9.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি শিক্ষার্থীদের সঞ্চয়ণের তত্ত্বের সঙ্গে পরিচিত করার উদ্দেশ্যে লিখিত হয়েছে। এই এককটি থেকে আপনি নীচের বিষয়গুলো সম্পর্কে অবহিত হবেন —

- সঞ্চয়ণের ধারণা।
- সঞ্চয়ণের প্রকাশ পদ্ধতি — গাণিতিক চিহ্নের সাহায্যে, সঞ্চয়ণের ধর্মের উল্লেখ করে এবং ভেন্-চিত্রের সাহায্যে।
- সঞ্চয়ণের উপর সংযোগ, ছেদ, পূরণ ইত্যাদি প্রক্রিয়ার প্রয়োগ।
- সঞ্চয়ণের বীজগণিত, সংযোগ সূত্র, বিনিময় সূত্র, বণ্টন সূত্রের প্রমাণ ও প্রয়োগ করা। ডি-মরগ্যান সূত্রটির প্রমাণ ও প্রয়োগ।
- এক বা একাধিক সঞ্চয়ণের কার্তিয় গুণন (Cartesian product) প্রক্রিয়া

9.3 সেট তত্ত্ব

9.3.1 সেট ঃ

আমাদের আয়ত্তাধীন সুসংজ্ঞাত এবং স্বতন্ত্র বস্তুসমূহের চয়ন (Collection) বা সমষ্টি সমষ্টিকে সঞ্চয়ণ (set) বলে। লক্ষণীয় এখানে দুটি বিশেষণ ব্যবহৃত হয়েছে — একটি 'সুসংজ্ঞাত' এবং অপরটি 'স্বতন্ত্র'। সুসংজ্ঞাত অর্থে লক্ষণীয় যে কোনও একটি বস্তু সংকলিত অংশে অন্তর্গত হয়েছে কি হয়নি তা অতি পরিষ্কারভাবে জানা সম্ভব।

কোনও সেটের অন্তর্গত বস্তুসমূহের প্রতিটি বস্তু হল ওই সেটের এক একটি বিন্দু (point) বা সদস্য (member) বা উপাদান (element)।

কোনও বিদ্যালয়ের একটি শ্রেণীর সব ছাত্র-ছাত্রীকে নিয়ে একটি সেট হতে পারে। ওই বিদ্যালয়ের কোন ছাত্র বা ছাত্রী হয় ঐ উল্লিখিত শ্রেণীটিতে পড়ে বা অন্য কোনও শ্রেণীতে পড়ে। ছাত্রটি বা ছাত্রীটি ঐ নির্দিষ্ট শ্রেণীতে পড়ে কি পড়ে না, তা পরিষ্কারভাবে বা স্বতন্ত্রভাবে বলা সম্ভব কোনওরূপ দ্বিমত না পোষণ করে। অর্থাৎ এক্ষেত্রে ওই ছাত্র বা ছাত্রীটি সেট-টির একজন সদস্য কি সদস্য নয় তা সুস্পষ্টভাবে জানা সম্ভব। অতএব এটি একটি সেটের উদাহরণ।

সমস্ত বুদ্ধিমান ছাত্র বা ছাত্রীদের একটি দল একটি সঞ্চয়ণ হতে পারে না। কারণ কোনও একজন ছাত্র বা ছাত্রী বুদ্ধিমান কি বুদ্ধিমান নয় তা স্বতন্ত্রভাবে বলা যায় না। কারো কারো মতে ছাত্র বা ছাত্রীটি বুদ্ধিমান আবার কারো কারো মতে বুদ্ধিমান নয়; অর্থাৎ এব্যাপারে দ্বিমত থাকতেই পারে। অতএব কোনও ছাত্র বা ছাত্রী এই দলটিতে অন্তর্ভুক্ত হবে কি হবে না অর্থাৎ ওই দলটির সদস্য কি সদস্য নয় তা পরিষ্কারভাবে বলা গেল না। অতএব এই সংকলনটি একটি সেট নয়।

কয়েকটি সঞ্চয়ণের (Set) উদাহরণ ঃ

(ক) একটি গ্রন্থাগারের বই-এর সংগ্রহ।

(খ) ফুটবলখেলার নিয়মাবলীর সংকলন।

(গ) ভারতবর্ষের নদীসমূহের সেট।

(ঘ) পৃথিবীর জীবিত বিজ্ঞানীদের গোষ্ঠী।

(ঙ) ইংরেজি বর্ণমালার মধ্যে পাঁচটি স্বরবর্ণের সংকলন।

সাধারণতঃ ইংরেজি বর্ণমালার বড় হরফের বর্ণ অর্থাৎ A, B, C, D .....এর একটি বর্ণদ্বারা কোনও সেটকে প্রকাশ করা হয়। আর ছোট হরফ অর্থাৎ a, b, c, d, e..... এর দ্বারা কোনও সেটের পদ বা সদস্য নির্দেশিত হয়। সব পদগুলোকে দ্বিতীয় বন্ধনীভূক্ত ''{ }'' করে সেটটিকে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ 1। A যদি 2 ও 20 এর মধ্যবর্তী বিজোড় সংখ্যাগুলির একটি সেট হয় তবে

$A = \{3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$

উদাহরণ 2। ইংরেজি বর্ণমালার ছোট হরফের বর্ণগুলি (26টি) নিয়ে তৈরি সেট A হলে আমরা লিখতে পারি

$A = \{a, b, c, d, e, f, \ldots\ldots\ldots, x, y, z\}$

এভাবে কোনও সেটকে প্রকাশ করার পদ্ধতির নাম ছকবন্ধীকরণ বা নিবন্ধীকরণ পদ্ধতি।

কখনও ':' বা '/' চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। কোনও একটি সেট B-এর একটি পদ x যদি P(x) ধর্ম মেনে চলে, তবে B সেটটি এভাবে প্রকাশ করা চলে ঃ

$B = \{x : P(x)\}$

বা, $B = \{x / P(x)\}$

এভাবে কোনও সেটকে প্রকাশ করার পদ্ধতির নাম ধর্মভিত্তিক পদ্ধতি। S যদি 5 দ্বারা বিভাজ্য পূর্ণসংখ্যা হয় তবে এরূপ সেটকে লেখা যায় : S= {x : x পূর্ণসংখ্যা এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য}

অথবা {x/x পূর্ণসংখ্যা যা 5 দ্বারা বিভাজ্য}

কোনও সেটের একটি উপাদান বা সদস্য x ; এই পদটিকে $x \in A$ এই চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ করা হয় এবং $x \notin A$ এই চিহ্নের অর্থ হল x, A সঞ্চয়ণটির উপাদান (element) বা সদস্য (member) নয়।

P যদি সকল মৌলিক সংখ্যা (prime numbers) নিয়ে গঠিত একটি সেট হয় তবে $3 \in P$, $2 \in P$ এবং $4 \notin P$, $9 \notin P$।

এবারে কিছু প্রচলিত এবং প্রয়োজনীয় সেটের সঙ্গে পরিচিত হোন। যেগুলো সেটতত্ত্বের পঠন-পাঠনে বারবার ব্যবহৃত হয়। যেমন ঃ

(ক) স্বাভাবিক সংখ্যার সঞ্চয়ণ : $N = \{1,2,3,4,.........\}$

(খ) মৌলিক সংখ্যার সঞ্চয়ণ : $P = \{2,3,5,7,11,13,17,.......\}$

(গ) পূর্ণ বা অখণ্ড সংখ্যার সঞ্চয়ণ : $Z = \{......., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

(ঘ) ধনাত্মক পূর্ণ/অখণ্ড সংখ্যার সঞ্চয়ণ : $Z^- = \{1,2,3,4,.......\}$

(ঙ) যুগ্ম পূর্ণ সংখ্যার সঞ্চয়ণ : $E = \{......, -2, 0, 2, 4, 6, 8,.........\}$

(চ) অযুগ্ম বা বিজোড় পূর্ণ-সংখ্যার সঞ্চয়ণ : $O = \{..., -1, 1, 3, 5, 7,.......\}$

(ছ) মূলদ সংখ্যার সঞ্চয়ণ : Q

(জ) অমূলদ সংখ্যার সঞ্চয়ণ : I

(ঝ) ধনাত্মক মূলদ সংখ্যার সঞ্চয়ণ : Q^-

(ঞ) শূন্যব্যতীত মূলদ সংখ্যার সঞ্চয়ণ : Q^*

(ট) বাস্তব সংখ্যার সঞ্চয়ণ : R

(ঠ) ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সঞ্চয়ণ : R^-

(ড) শূন্যব্যতীত বাস্তব সংখ্যার সঞ্চয়ণ : R^*

(ঢ) জটিল রাশির সঞ্চয়ণ : C

(ণ) শূন্য ব্যতীত জটিল রাশির সঞ্চয়ণ : C^*

এবারে নিচের সহজ প্রশ্নগুলোর সমাধানের চেষ্টা করুন ঃ-

অনুশীলনী 1

প্রশ্ন 1. নিচে উল্লিখিত সংকলনসমূহের মধ্যে কোনটি সেট এবং কোনটি সেট নয়?

(ক) যাঁরা চাঁদে গিয়েছেন তাদের দল।

(খ) সমস্ত মৌলিক সংখ্যা সমূহের সংকলন।

(গ) কোন বিদ্যালয়ের খুব ভালো টেনিস খেলোয়াড়দের দল।

(ঘ) বর্গক্ষেত্র নয় এরূপ আয়তক্ষেত্রগুলোর সংকলন।

(ঙ) ভারতবর্ষের সকল দীর্ঘ নদীসমূহের সংকলন।

প্রশ্ন 2. নিচের বক্তব্যগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক?

(ক) $0.3 \in N$

(খ) $-5 \notin N$

(গ) $\sqrt{2} \in Q$

(ঘ) $\sqrt{-1} \notin R$

9.3.2 সঞ্চয়নের প্রকারভেদ (Types of Sets) :

শূন্য সঞ্চয়ন ঃ যে সেটের কোনও পদ বা সদস্য নেই বা কোনও পদ হয়ই না সেই সেটকে শূন্য সেট (Null set) বা রিক্ত সেট (empty set) বলে।

ভারতবর্ষের মহিলা রাষ্ট্রপতিদের সেট একটি শূন্য সেটের উদাহরণ, কারণ এখন পর্যন্ত কোনও ভারতীয় মহিলা ভারতবর্ষের রাষ্ট্রপতি হননি।

আবার দেখুন, $x^2 + 3 = 0$ এই সমীকরণটির বাস্তববীজগুলো নিয়ে যদি একটি সঞ্চয়ণ A হয় তবে এই A সেটটিও একটি শূন্য সেট হবে, কারণ $x^2 + 3 = 0$ সমীকরণটির কোনও বাস্তব বীজ হয় না।

শূন্য সেট বা রিক্ত সেটকে গ্রীকবর্ণ ϕ (ফাই) চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

একপদী সেট ঃ যে সেট-এ কেবলমাত্র একটি পদ থাকে তাকে একপদী সেট (Singleton Set) বলে।

$A = \{0\}$, এটি কিন্তু শূন্য সেট নয়। এটি একপদী সেট। এই সেট-এর একটিমাত্র পদ আছে যেটি শূন্য '0' ।

$T = \{x / x+2 = 0\}$ আরেকটি একপদী সেট।

কারণ $x + 2 = 0$ সমীকরণটির একটিই বীজ আছে যেটি '–2' অর্থাৎ T সেট-টিতে একটিই পদ আছে ; কাজেই এটি একটি একপদী সেটের উদাহরণ।

মৌলিক সংখ্যার সেটের সমস্ত পদগুলোই অযুগ্ম শুধুমাত্র 2 ছাড়া। 2 হল একটি যুগ্ম সংখ্যা। অতএব বলা যেতে পারে যে যুগ্ম মৌলিক সংখ্যার সেট হল একটি একপদী সেট; এই সেটের একমাত্র পদটি হল '2'।

সসীম সেট ঃ যে সেটের সদস্যসংখ্যা সসীম তাকে সসীম সেট বলে। $A = \{x : x$ জোড় পূর্ণসংখ্যা যেখানে $0 < x < 100\}$ এটি একটি সসীম সেটের উদাহরণ। কারণ এখানে 0 থেকে বড় এবং 100 থেকে ছোটো সমস্ত জোড় পূর্ণসংখ্যাগুলো নিয়ে গঠিত এই সেটের পদসংখ্যা নির্দিষ্ট অর্থাৎ সসীম।

শূন্য সেট বা রিক্ত সেট কিংবা একপদী সেট সসীম সেট।

অসীম সেট ঃ যে সেটের পদসংখ্যা অসীম তাকে অসীম সেট বলে।

একটি সরলরেখার উপরিস্থিত সমস্ত বিন্দুগুলো নিয়ে গঠিত সেট-টি একটি অসীম সেট। কারণ, একটি সরলরেখার উপর অগুনতি বিন্দু আছে।

N, Q, R (পূর্বে উল্লিখিত) সেটগুলো এক একটি অসীম সেটের উদাহরণ।

এখন এ সম্পর্কে নিচের প্রশ্নটি সমাধানের চেষ্টা করুন।

অনুশীলনী 2

প্রশ্ন 3 কোন্ সেটগুলো অসীম সেট, কোনগুলো সসীম সেট ঃ-

(ক) সেট E

(খ) সেট ϕ

(গ) $2x+3 = 9$ সমীকরণটির সব বীজগুলো নিয়ে গঠিত সেট।

(ঘ) সপ্তাহের সবকটি দিন নিয়ে গঠিত সেট।

(ঙ) 0 এবং 1 এর মধ্যবর্তী বাস্তব সংখ্যাগুলি নিয়ে তৈরি সেট।

9.3.3 সেটের মাত্রা বা সেটের অঙ্কবাচক সংখ্যা :

একটি সসীম সেটের পদসংখ্যাকে সেই সেটের মাত্রা (Cardinality) বা সেট-টির অঙ্কবাচক সংখ্যা (Cardinal number) বলে।

n(A) এইরূপ চিহ্নের সাহায্যে A- সেটটির মাত্রা বা অঙ্কবাচক সংখ্যাকে নির্দেশ করা হয়।

A যদি ইংরেজি বর্ণমালার একটি সেট হয় তবে এই সেট-এর মাত্রা বা অঙ্কবাচক সংখ্যা অর্থাৎ $n(A) = 26$ (কারণ ইংরেজি বর্ণমালার মোট 26-টি বর্ণ আছে)

যদি $V = \{a, e, i, o, u\}$ হয় তবে $n(v) = 5$

শূন্য বা রিক্ত সেট হল একটি সসীম সেট এবং $n(\phi) = 0$

কারণ শূন্যসেট-এ একটিও পদ নেই অর্থাৎ এই সেটের পদ সংখ্যা = 0

9.3.4 সার্বিক সেট

পঠন পাঠনে ব্যবহৃত সব সেটগুলোকে সেট তত্ত্বে একটি বৃহৎ সেটের অংশ হিসেবে ধরা যেতে পারে এবং সেই বৃহৎ সেটটিকে সার্বিক সেট (universal set) বলে।

উদাহরণ হিসেবে বলা যেতে পারে যে সমতলের বিন্দু নিয়ে গঠিত বিভিন্ন সেট-এর জন্য সমতল জ্যামিতিতে সমতলে অবস্থিত সকল বিন্দুগুলি নিয়ে গঠিত বৃহৎ সেটটিকে একটি সার্বিক সেট ধরা যেতে পারে। অনুরূপভাবে পৃথিবীর বিভিন্ন মানুষ নিয়ে গঠিত বিভিন্ন সেট-এর জন্য পৃথিবীর সকলদেশের সকল নাগরিক নিয়ে গঠিত বৃহৎ সেটটিকে একটি সার্বিক সেট ধরা যেতে পারে।

সার্বিক সেটকে 'U' চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সার্বিক সেট কখনই একটি অনন্য সেট হতে পারে না।

উদাহরণ 3. অখণ্ড পূর্ণসংখ্যার সেট Z, মূলদ সংখ্যার সেট Q এবং সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট R-কে নিয়ে গঠিত বিভিন্ন সেটের জন্য একটি C সেটটিকে সার্বিক সেট হিসেবে ভাবা যেতে পারে।

9.3.5 উপসেট বা সাবসেট :

এবারে দুই বা দুই-এর বেশি সেট-এর মধ্যে সম্পর্ক নিয়ে আলোচনা করা হবে।

মনে করা যেতে পারে যে A : কলকাতার সকল নাগরিকদের নিয়ে তৈরি একটি সেট এবং

B : কলকাতার সকল মহিলা নাগরিকদের নিয়ে তৈরি আরেকটি সেট।

যেহেতু কলকাতার মহিলা নাগরিকেরা কলকাতার সমগ্র নাগরিকদের একটি অংশ তাই B সেটটির প্রত্যেক সদস্য বা পদ A সেটটির অন্তর্গত। এক্ষেত্রে বলা যেতে পারে যে, সমগ্র B সেটটি A সেটটির মধ্যে আছে। অবশ্য একথাও সত্যি যে A সেটটিতে কলকাতার পুরুষ নাগরিকরাও আছেন। এটুকু ধারণায় সাহায্যে এবারে আমরা উপসেট বা সাব সেট-এর সংজ্ঞায় পৌঁছুতে পারি —

উপসেট বা সাবসেট এর সংজ্ঞা — একটি সেট B অপর একটি সেট A-এর উপসেট বা সাবসেট (Subset) হবে যখন B-এর অন্তর্গত প্রত্যেকটি পদ A সেটটিরও পদ হবে। এই তথ্যটিকে $B \subseteq A$ অথবা $A \supseteq B$ এই চিহ্ন দ্বারা নির্দেশ করা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে একথা অবশ্যই বলা যায় যে সমগ্র B সেটটি A-সেটটির অন্তর্গত। যখন B সেটটির মধ্যে এরূপ কোনও পদ পাওয়া যায় যেটি A সেটটির মধ্যে নেই, তখন কিন্তু আমরা বলব যে B সেটটি A সেটটির অন্তর্গত নয়। এই ঘটনাটিকে আমরা $A \not\supseteq B$ অথবা $B \not\subseteq A$ করব।

উপরের আলোচনা ভালোভাবে বুঝতে সাহায্য করবে এরূপ কিছু উদাহরণ দেওয়া হল।

উদাহরণ 4

ধরা যাক $A = \{1, 3, 5, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ এবং $C = \{1, 5\}$ এরূপ তিনটি সেট।

এক্ষেত্রে $C \subseteq A$ এবং $C \subseteq B$ কারণ 1,5 এই পদদুটি C সেটটির সদস্য আবার A এবং B এই সেট দুটিরও পদ।

লক্ষ করুন যে এখানে $B \not\subseteq A$ কারণ B-এর মধ্যে দুটি সদস্য 2 এবং 7 আছে যারা A সেটটির মধ্যে নেই অর্থাৎ A-সেটটির পদ নয়। অথচ $B \not\subseteq A$ হতে হলে B সেটটির সব সদস্যই A সেটটির মধ্যে থাকার দরকার।

উদাহরণ 5

N, Z, Q, R এবং C এই পাঁচটি সেট-এর ক্ষেত্রে

$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$

(9.3.1 অংশে এদের পরিচয় দেখে নিন।)

উদাহরণ 6

A একটি সেট যার প্রতিটি সদস্য বা পদ 3-এর গুণিতক এবং পূর্ণসংখ্যা।

A সেটটি Z সেটটির একটি সাবসেট অর্থাৎ $A = \{3n : n \in Z\}$ এবং $A \subseteq Z$

উদাহরণ 7

1 এবং 2 এর মধ্যবর্তী সমস্ত বাস্তব সংখ্যা নিয়ে গঠিত A সেটটি R সেটের একটি উপসেট বা সাবসেট। এটিকে এভাবে দেখানো হয় : $A = \{ x \in R : 1 < x < 2\}$ এবং $A \subseteq R$

উদাহরণ 8

সমস্ত জটিল সংখ্যার সেট B যাদের সদস্যদের মাপাঙ্ক (modulus) একক; এই সেটটি C সেটের উপসেট $B = \{z \in C : |z| = 1\}$ এবং $B \subseteq C$.

9.3.6 সেটের সমতা

ধরা যাক A হল এরূপ একটি সেট যার প্রতিটি পদ যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যা (natural number) এবং 10 থেকে ছোটো। B হল অপর একটি সেট যেখানে B = {2, 4, 6, 8} ; লক্ষণীয় যে এই দুটি সেট A এবং B সমান। কারণ A-এর প্রতিটি পদ B সেটটির পদ আবার B এর প্রতিটি পদ A-এর সদস্য।

অতএব, দুটি সেট A ও B কে আমরা সমান বলব যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ হয় এবং এই তথ্যটিকে আমরা A=B চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করব দুটি সেট অসমান হলে সেই তথ্যটিকে আমরা $A \neq B$ লিখে প্রকাশ করব।

আবার মনে করুন $A = \{x / x^2 = 9\}$ এবং $B = \{-3, +3\}$

এক্ষেত্রেও A=B হবে।

আরও সূক্ষ্মভাবে দেখলে একথা অবশ্যই বলা যায় যে দুটি সেট সমান হলে সেট দুটির পদ বা সদস্য একই হবে।

9.3.7 প্রকৃত উপসেট

কখনও কখনও $A \subseteq B$ হলেও A=B হতে পারে। যখন $A \subseteq B$ অথচ A=B নয় অর্থাৎ $A \neq B$ তখন A-কে B -এর প্রকৃত উপসেট (Proper subset) বলা হয়। $A \subset B$ এই চিহ্নদ্বারা এটি প্রকাশিত হয়।

মনে করা যাক A = {1,3}, B={1,2,3} এবং C={1,3,2} এখানে A এবং B দুটি সেটই C-সেটটির অধসঞ্চয়ণ। A, C-এর প্রকৃত উপসেট কিন্তু B,C-এর প্রকৃত অধসঞ্চয়ণ (Proper subset) নয়, কারণ এখানে B=C।

অন্যভাবে আমরা বলতে পারি যে যদি $A \subseteq B$ হয় এবং যদি B-এর এরূপ একটি উপাদান y থাকে অর্থাৎ $(y \in B)$ যে পদটি A- সেট-এর উপাদান নয় (অর্থাৎ $y \notin A$)-তখন A- সেটটি B-এর একটি প্রকৃত অধসঞ্চয়ণ (Subset) হবে।

নিচে বর্ণিত সেটের ধর্মাবলী খুবই প্রয়োজনীয় ও স্মরণ রাখা দরকার।

i) প্রত্যেক সেট A, সার্বিক সেট U-এর একটি উপসেট। কারণ সংজ্ঞানুযায়ী A-এর সমস্ত সদস্য U-এর অন্তর্গত। আবার শূন্য সেট ϕ, A-সেটটির একটি উপসেট।

$$A \subseteq U, \ \phi \subseteq A$$

ii) প্রত্যেক সেট A নিজেরই (অর্থাৎ A-এরই) একটি উপসেট। কারণ একথা স্বাভাবিকভাবে বলা যায় যে A-এর প্রত্যেকটি সদস্য অবশ্যই A-এর অন্তর্গত। $A \subseteq A$

iii) যদি A-এর প্রতিটি সদস্য B-এর অন্তর্গত এবং B-এর প্রতিটি সদস্য C-এর অন্তর্গত হয় তবে অবশ্যই বলা যায় যে A-এর প্রতিটি সদস্য C-এর অন্তর্গত।

iv) যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ হয় তবে A এবং B উভয়েরই একই সদস্য আছে অর্থাৎ A=B । বিপরীতভাবে বলা যায় যে যদি A=B হয় তবে $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ হবে কারণ প্রতিটি সেট-ই তার নিজের একটি উপসেট।

উপরের এই ধর্মগুলোকে চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় এভাবে —

(i) যে কোনও A এর ক্ষেত্রে, $[\forall A], \phi \subseteq A \subseteq U$

(ii) যে কোনও সেট A এর ক্ষেত্রে, $A \subseteq A$

(iii) যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq C$ হয় তবে $A \subseteq C$

(iv) A=B হবে যখন এবং একমাত্র যখন

$A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ হবে।

আবার দেখুন ϕ এবং A সেট দুটি A-এর প্রকৃত উপসেট নয় অর্থাৎ অপ্রকৃত অধসঞ্চয়ণ (improper subset)।

এবারে নিচের অনুশীলনী নং 3 এর সমাধানের চেষ্টা করুন। সমাধানের জন্য এভাবে ভাবুন :

$A \subseteq B$ এই সম্পর্কটি প্রমাণ করার জন্য দেখাতে হবে যে $a \in A$ হলে $a \in B$ হবে অর্থাৎ $a \in A \Rightarrow a \in B$

আবার $A \nsubseteq B$ প্রমাণ করার জন্য দেখাতে হবে যে $x \in A$ অথচ $x \notin B$ অথবা $y \in B$ এবং $y \notin A$

নিচের অনুশীলনীর প্রশ্নগুলোর সমাধান করুন ঃ—

অনুশীলনী নং 3

প্রশ্ন 4 $A = \{1,2,3\}$ এই সেটটির সব কয়টি উপসেট বার করুন। এই উপসেটগুলোর মধ্যে কয়টি সেট-এ—

(ক) কোনও পদ নেই ; (খ) একটিমাত্র পদ আছে (গ) দুটি পদ আছে এবং (গ) তিনটি পদ আছে?

প্রশ্ন 5 যদি $A \subseteq B$, এবং $B \subseteq C$ হয় তবে দেখান যে $A \subseteq C$

প্রশ্ন 6 এরূপ একটি উদাহরণ দিন যেখানে A, B, C আছে এবং $A \nsubseteq B$, $B \nsubseteq C$ কিন্তু $A \subseteq C$ হবে।

প্রশ্ন 7 $A = \{x / x+1=3\}$, $B=\{1,2\}$ এবং

C হল সকল যুগ্ম মৌলিক সংখ্যার সেট ;

(ক) A এবং B এর মধ্যে সম্পর্কটি কিরূপ?

(খ) A এবং C এর মধ্যে কি সম্পর্ক?

প্রশ্ন 8 যদি A=B এবং $B \supseteq C$ হয় তবে A এবং C এই সেট দুটির মধ্যে কি সম্পর্ক বিদ্যমান হবে?

প্রশ্ন 9 নিচে দেওয়া বক্তব্যগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক? কোনটি ঠিক নয়?

(ক) $N \subseteq Z$ (গ) $\{0\} \subseteq \{1,2,3,4\}$

(খ) $Z \subseteq N$ (ঘ) $(2, 4, 6\} \subseteq \{2,4,8\}$

9.3.8 উপসেট গোষ্ঠী

আমরা সেট-এর সংজ্ঞায় দেখেছি যে সেটটির সদস্যদের একজায়গায় জড়ো করে বা সংগ্রহ করে সেটটি তৈরি হয়েছে। এখন কতকগুলো সেটকেই জড়ো করে বা সংগ্রহ করে একটি নতুন সেট গঠন করা যেতে পারে। তখন এই নতুন সেটটির সদস্য বা পদ হল এক একটি সেট অর্থাৎ এই নতুন সেটটি হল সেটের সেট।

অতএব কোন একটি সঞ্চয়ণ S-এর সকল অধসঞ্চয়ণগুলো নিয়ে তৈরি নতুন সঞ্চয়ণটিকে বলা হয় সেটটির উপসেট গোষ্ঠী (Power set)। S-সেটের উপসেট গোষ্ঠীকে P(S) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ 9 ধরা যাক $S = \{2,3,4\}$

এখানে $P(S) = \{ \phi, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{S\}\}$

এখানে লক্ষ করার বিষয় হল এই যে, শূন্য সেট ϕ এবং প্রদত্ত সেট S নিজেও উপসেট গোষ্ঠী P(S)-এর সদস্য। এর কারণ হল এই যে ϕ এবং S সেট দুটি উভয়েই S-এর উপসেট।

যদি S একটি সসীম (finite) সেট হয় তবে P(S)ও সসীম হবে। প্রকৃতপক্ষে S যদি n -সংখ্যক সদস্য নিয়ে তৈরি হয় তবে P(S) এর 2^n সংখ্যক উপসেট থাকবে।

9.3.9 ভেন্-চিত্র

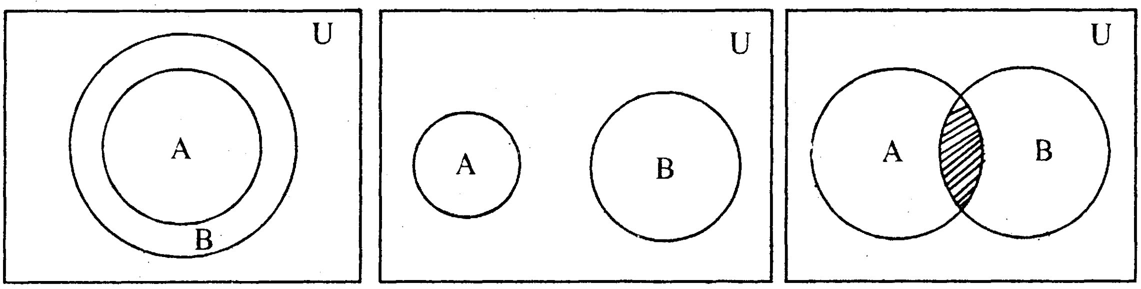
সেট সম্পর্কিত বিভিন্ন ধারণা ও বিভিন্ন সেটের মধ্যে সম্পর্কগুলো ভালোভাবে বুঝতে পারা যায় কিছু সাধারণ চিত্রের সাহায্যে। এরূপ চিত্রকে বলে ভেন্-চিত্র। ইংরেজ যুক্তিবিদ জন ভেন্ (1834-1923) এই চিত্রের উদ্ভাবক। তাই তাঁরই নামানুসারে চিত্রগুলোকে (সেট সম্পর্কিত) ভেন্চিত্র বলা হয়।

ভেন্-চিত্র হল সেটের চিত্ররূপ, যেখানে কোনও সেটকে সমতলে অঙ্কিত সীমাবদ্ধক্ষেত্র দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সার্বিক সেট U-কে প্রকাশ করা হয় একটি আয়তক্ষেত্র দ্বারা আবদ্ধ সমস্ত বিন্দু দ্বারা এবং অন্য সেটগুলো ঐ আয়তক্ষেত্রের মধ্যে অঙ্কিত বৃত্তাকার চিত্র দ্বারা। অবশ্য এই চিত্রগুলোর আকৃতি বৃত্ত, উপবৃত্ত বা অন্যকোনও চেহারার (অবশ্যই সীমাবদ্ধ) হতে পারে।

যদি $A \subseteq B$ হয় তবে A-এর চিত্রটি সম্পূর্ণভাবে B-এর চিত্রের মধ্যে অঙ্কিত হতে হবে। নিচে অঙ্কিত চিত্র নং 1(a) দেখুন।

যদি A এবং B সেট দুটির মধ্যে কোনও সাধারণ পদ না থাকে তবে A সেটটির বৃত্তকার চিত্র এবং B-এর বৃত্তাকার চিত্র দুটি আলাদাভাবে এঁকে দেখাতে হবে। চিত্র নং 1(b) দেখুন।

আবার যদি A এবং B যে কোনও দুটি এরূপ সেট হয় যে A সেটের মধ্যে এরূপ কিছু সদস্য আছে যারা B সেটের মধ্যে নেই, এবং B সেটটির মধ্যেও কিছু সদস্য আছে যারা A সেটের মধ্যে নেই আবার একইসঙ্গে এমন কিছু সদস্য বা পদ আছে যারা A এবং B উভয় সেটেরই সদস্য (উভয়ের মধ্যে সাধারণ) তখন চিত্র নং 1(c)-এর মতো চিত্র এঁকে প্রকাশ করা হয়।



চিত্র নং 1(a) চিত্র নং 1(b) চিত্র নং 1(c)

উদাহরণ 10 নিচের সেটগুলোর ভেন্‌-চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করুন

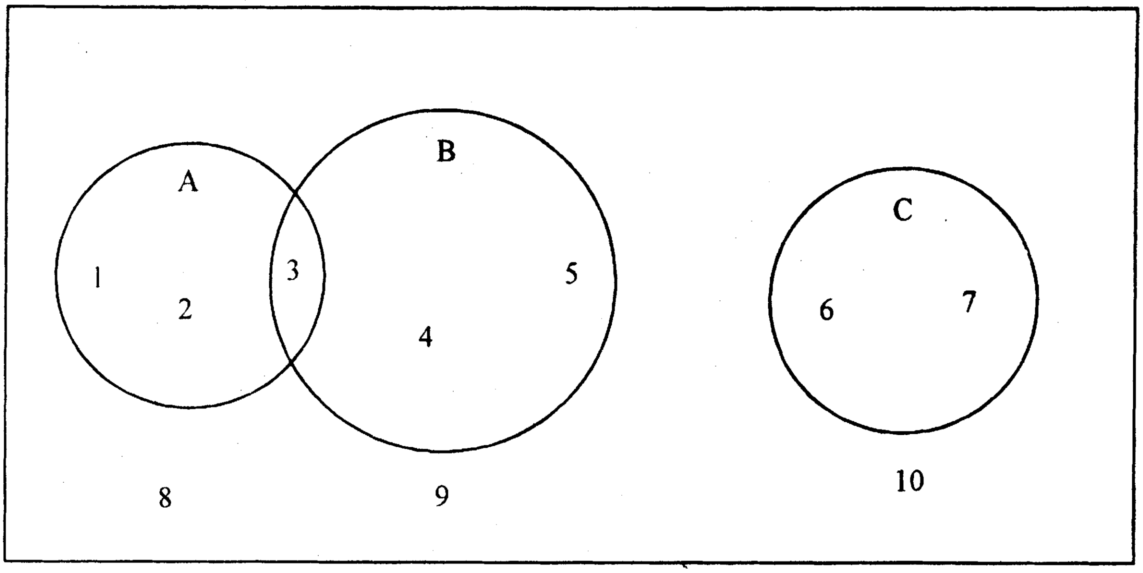
U = {1, 2, 3, 4......, 10}

A = {1, 2, 3}

B = {3, 4, 5}

C = {6, 7}

সমাধান : উপরের সেটগুলোর ভেন্‌চিত্র নিম্নরূপ :-



চিত্র নং 2

9.3.10 সেটের উপর বিভিন্ন প্রক্রিয়া

এবারে সেটের উপর বিভিন্ন প্রক্রিয়া (যেমন সংযোগ প্রক্রিয়া, ছেদ প্রক্রিয়া) এবং আরো দুটি সেট (পূরক ছেদ, বিচ্ছেদী ছেদ) নিয়ে আলোচনা করা হবে।

যে কোনও দুটি সেট থেকে সংযোগ প্রক্রিয়া বা ছেদ প্রক্রিয়ার সাহায্যে নতুন সেট গঠন করা যায়।

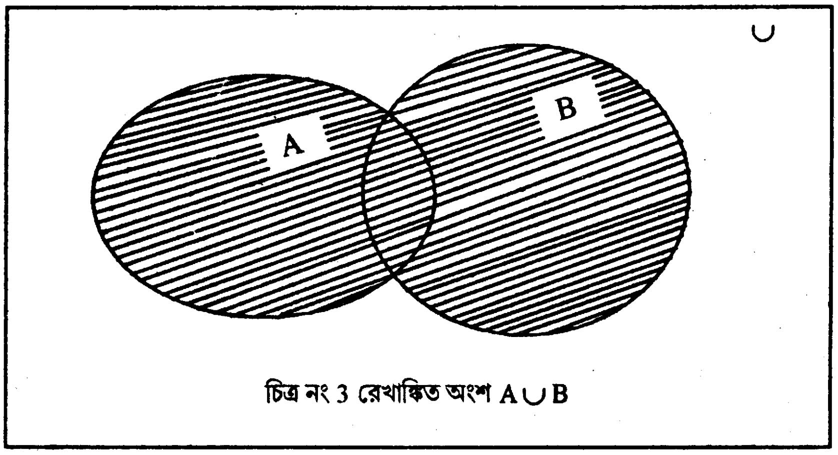
সংযোগ প্রক্রিয়া :

দুটি সেট A এবং B-এর সংযোগ (Union) বলতে আমরা একটি নতুন সেটকে বুঝব যার সদস্যরা হয় A সেটে আছে না হয় B সেটে আছে অথবা A ও B উভয় সেটেই আছে।

$A \cup B$ এই চিহ্নের সাহায্যে সংযোগ প্রক্রিয়া নির্দেশিত হয়।

অর্থাৎ $A \cup B = \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$

ভেন-চিত্রের সাহায্যে $A \cup B$ কে নিচের চিত্রে দেখানো হল —



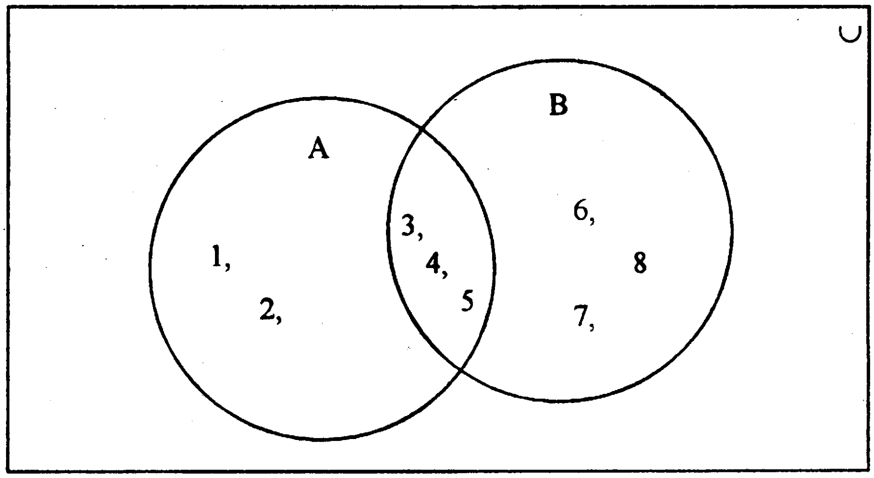
চিত্র নং 3 রেখাঙ্কিত অংশ $A \cup B$

উদাহরণ 11

মনে করুন $A = \{1,2,3,4,5\}$ এবং $B = \{3,4,5,6,7,8\}$

এখানে $AUB = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

এর ভেন্-চিত্র হবে নিম্নরূপ :



চিত্র নং 4

মন্তব্য

যেহেতু $A \cup B$ সেটটির সদস্যরা A সেটের সব সদস্য এবং B সেটের সব সদস্য নিয়ে গঠিত অতএব একথা অবশ্যই বলা যায় যে A এবং B উভয়েই $A \cup B$ এর উপসেট হবে।

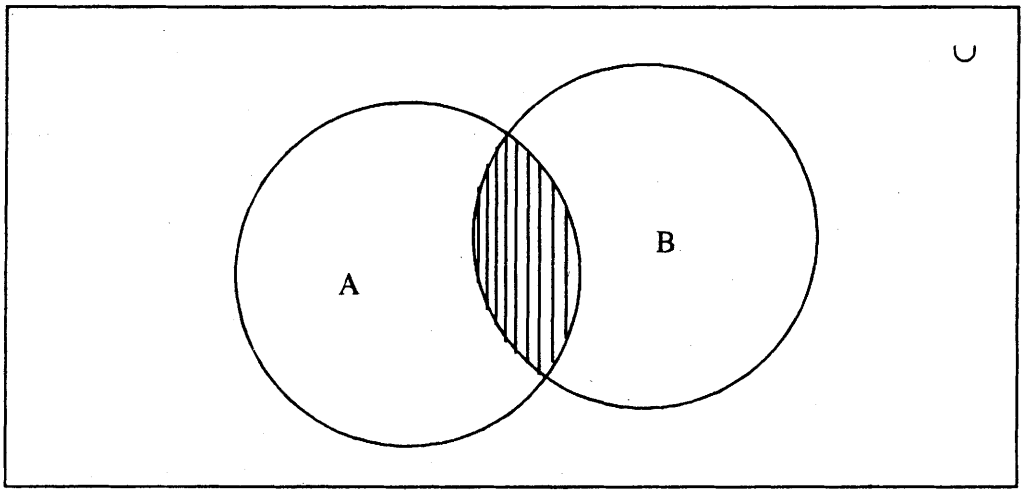
অর্থাৎ $A \subseteq A \cup B$ এবং $B \subseteq A \cup B$

ছেদ প্রক্রিয়া :

দুটি সেট A এবং B এর ছেদ (intersection) একটি নতুন সেট গঠন করবে যার সদস্যরা A এবং B উভয় সেটেরই অন্তর্গত হবে। চিহ্নের সাহায্যে ছেদ $A \cap B$, এভাবে প্রকাশিত হয়।

অর্থাৎ $A \cap B = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$

ছেদ-এর ভেনচিত্রটি নিম্নরূপ :



চিত্র নং 5। রেখাঙ্কিত অংশ $A \cap B$

উদাহরণ 12

যদি $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ এবং $B = \{4,5,7,9,10,12\}$ হয় তবে $A \cap B = \{4,5,7,9,10\}$

[এর ভেন্-চিত্রটি নিজে আঁকুন]

মন্তব্য :

(ক) যেহেতু $A \cap B$ এর সদস্যরা A এবং B এই উভয় সেটেরই অন্তর্গত অতএব $A \cap B$ এই নতুন সেটটি A এবং B উভয়েরই উপসেট হবে।

অর্থাৎ $A \cap B \subseteq A$ এবং $A \cap B \subseteq B$

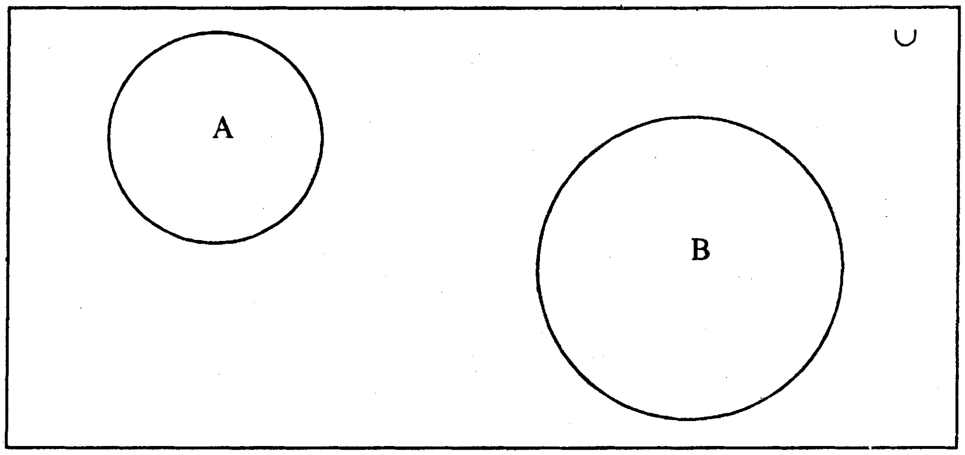
(খ) যখন $B \subset A$ হয় তখন $A \cap B = B$ হবে।

বিচ্ছেদী সেট :

দুটি সেট A এবং B পরস্পর বিচ্ছেদী (Disjoint) সেট হবে যখন উভয় সেটের মধ্যে একটিও সাধারণ সদস্য বা পদ থাকবে না।

অর্থাৎ $A \cap B = \phi$ (অর্থাৎ যখন সেট দুটির ছেদ একটি শূন্য সেট)

ভেন্-চিত্রের সাহায্যে বিচ্ছেদী সেটকে নিচে দেখানো হল :—



চিত্র নং 6। বিচ্ছেদী সেটদ্বয়

উদাহরণ 13

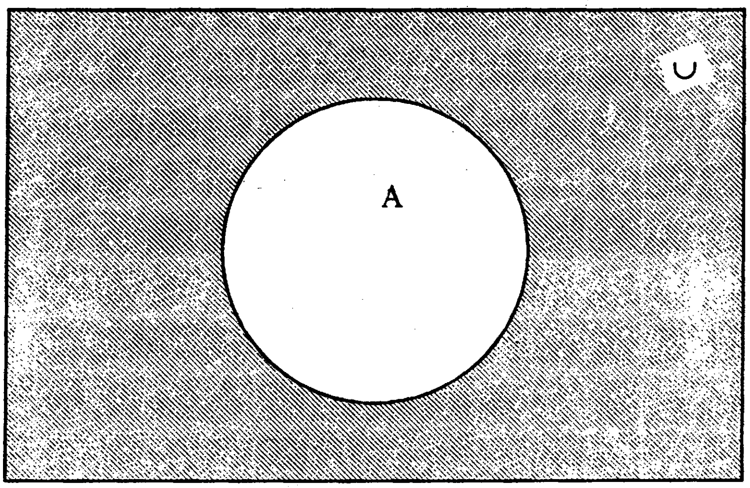
$A = \{1,2,3\}$ এবং $B = \{5,6,7,8\}$ হলে A এবং B এই দুটির মধ্যে কোনও সাধারণ সদস্য নেই কাজেই এই সেট দুটি পরস্পর বিচ্ছেদী সেট।

9.3.11 পূরক সেট

পূর্ববর্তী আলোচনায় আমরা দেখেছি যে সকল সেটই একটি সার্বিক সেটের ($\cup$-এর) উপসেট। একটি সেট (A)-র পূরক (Complementary) A^c হল একটি নতুন সেট যার সদস্যরা সার্বিক সেট ($\cup$)-এর অন্তর্গত কিন্তু তাদের কেউ-ই A সেটের মধ্যে নেই। সুতরাং $A^c = \{x : x \in \cup, x \notin A\}$

কখনও কখনও A সেটের পূরক A^c-কে A' অথবা $\overline{A}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

পূরক সেটের ভেনচিত্র এরূপ :—



চিত্র নং 7। রেখাঙ্কিত অংশ A^c বা A' বা $\overline{A}$ অর্থাৎ A সেটের পূরক।

উদাহরণ 14

(ক) মনে করা যাক $\cup = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$A = \{1,2,3,4,6,9\}$

এবং $B = \{2,5,7,8,10\}$

এবারে দেখুন —

$A \cap B = \phi$

$(A \cap B)^c = \phi^c = U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.........(i)

$A^c \cup B^c = \{2,5,7,8,10\}$ U $\{1,3,4,6,9\}$

$= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.......................(ii)

(i) এবং (ii) থেকে পাওয়া যায় —

$$(A \cap B)^c = A^c U B^c$$

(খ) ধরা যাক $\cup = \{a,b,c,d,e,........,x,y,z\}$

অর্থাৎ সার্বিক সেট U এর সদস্যরা হল ইংরেজি বর্ণমালার সবকটি বর্ণ। এখন যদি $V = \{a,e,i,o,u\}$ হয় অর্থাৎ V সেটের সদস্যরা হল ইংরেজি বর্ণমালার পাঁচটি স্বরবর্ণ। এক্ষেত্রে V^c, V সেটের পূরক সেট হবে একটি নতুন সেট যার পদগুলো হবে ইংরেজি বর্ণমালার ব্যঞ্জনবর্ণগুলো।

(গ) R সেটটি সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট। Q হল সমস্ত মূলদ সংখ্যার সেট। R কে সার্বিক সেট ধরলে Q^c হবে সমস্ত অমূলদ বাস্তব সংখ্যার সেট।

(ঘ) কোনও বিশ্ববিদ্যালয়ের সমস্ত ছাত্রছাত্রীদের নিয়ে তৈরি সেট U, সমস্ত ছাত্রদের নিয়ে গঠিত সেট M এবং সকল ছাত্রীদের সেট F হলে

$M \cup F = U$

কারণ প্রতিটি ছাত্রছাত্রীই U সেটের সদস্য। আবার হয় তারা M সেটের অন্তর্গত নতুবা F সেটের পদ।

$\therefore M \cap F = \phi$ (শূন্য সেট)

কারণ M-এর কোনও সদস্যই F সেটে নেই

অথবা F এর কোনও সদস্যই M সেটে নেই।

এরূপ ক্ষেত্রে, $M^c = F$: M সেটের পূরক সেট হল F সেট

$F^c = M$: F সেটের পূরক সেট হল M সেট

নিচের অনুশীলনীটি সমাধান করুন :—

অনুশীলনী ৪

প্রশ্ন 10. যদি $A \subset B$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $A \cup B = B$

প্রশ্ন 11. যদি $A \subseteq C$ এবং $B \subseteq C$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $A \cup B \subseteq C$

প্রশ্ন 12 যদি $A \subset B$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $A \cap B = A$

প্রশ্ন 13. যদি $C \subseteq A$ এবং $C \subseteq B$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $C \subseteq A \cap B$

9.3.12 সেটের বীজগণিত ও দ্বৈততা সূত্র :

সেটের উপর সংযোগ, ছেদ, পূরণ ইত্যাদি বিভিন্ন প্রক্রিয়া এবং সম্পর্ক নিয়ে কয়েকটি সূত্র (বা অভেদ) নিয়ে একটি সারণী দেখানো হল। সূত্রগুলো অতিপ্রয়োজনীয়। এই অভেদগুলো আমাদের পূর্ববর্তী আলোচনা অনুসারে তৈরি। এখানে দুটি সূত্রকে জোড়বদ্ধ করা হয়েছে (যেমন 1ক, 1খ)। এভাবে জোড়বদ্ধ করার কারণ হলো একটি অপরটির দ্বৈত।

দ্বৈততা সূত্র : -

যদি 'E_1' একটি সেট সম্পর্কিত সমীকরণ বা অভেদ হয় তবে E_1 -এর দ্বৈত সমীকরণ বা অভেদ হবে আরেকটি নতুন সমীকরণ (অবশ্যই সেট সম্পর্কিত) বা অভেদ 'E^1' যেটি পাওয়া যাবে E_1 থেকেই, শুধুমাত্র E_1-এর প্রক্রিয়া চিহ্নগুলো (সংযোগ, ছেদ) পরিবর্তন করে এবং চিহ্নগুলোর বিপরীত প্রক্রিয়া-চিহ্ন বসিয়ে। এভাবে সূত্র তৈরি করার নীতিকে দ্বৈততা নীতি বলে। E_1 এর $U, \cap, \bigcup, \phi$ চিহ্নগুলো E^1-এতে হবে $\cap, U, \phi, U$ (ক্রমানুসারে)

যেমন —

$(U \cap A)\, U(B \cap A) = A$ এই সমীকরণটি হবে

$(\phi\, UA) \cap (BUA) = A$ সমীকরণটির দ্বৈত সমীকরণ।

দ্বৈততার নীতি হল এই যে যদি কোনও সমীকরণ একটি অভেদ হয় তবে সেই সমীকরণটির দ্বৈত সমীকরণটিরও একটি অভেদ হবে।

সূত্র 1। বর্গৈকসম সূত্র : (ক) $A \cup A = A$

(খ) $A \cap A = A$

সূত্র 2। সংযোগ সূত্র : (ক) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(খ) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

সূত্র 3। বিনিময় সূত্র : (ক) $A \cup B = B \cup A$

(খ) $A \cap B = B \cap A$

সূত্র 4। বণ্টন সূত্র : (ক) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(খ) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

সূত্র 5। অভেদ সূত্র : (ক) $A\cup\phi=A$

(খ) $A\cap U=A$

সূত্র 6। অভেদ সূত্র : (ক) $A\cup U=U$

(খ) $A\cap\phi=\phi$

সূত্র 7। উদঘাতন সূত্র : $(A^c)^c=A$

সূত্র 8। পূরণ সূত্র : (ক) $AUA^c=U$

(খ) $A\cap A^c=\phi$

সূত্র 9। পূরণ সূত্র : (ক) $U^c=\phi$

(খ) $\phi^c=U$

সূত্র 10। ডি-মরগ্যানের সূত্র :

(ক) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

(খ) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

দ্রষ্টব্য : উপরের সূত্রাবলী দ্বৈততা নীতি মেনে তৈরি। এখানে (খ) সূত্রগুলো (ক) সূত্রের দ্বৈত। দ্বৈততা সূত্রে ϕ এবং U-এর ব্যবহার লক্ষণীয়।

9.3.13 সূত্রগুলোর প্রমাণ :

সূত্র 1। বর্গৈকসম সূত্র : $A\cup A=A$ এবং $A\cap A=A$

প্রমাণ : সংজ্ঞা থেকে সরাসরি পাওয়া যায়

সূত্র 2। সংযোগ সূত্র : (ক) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

প্রমাণ : ধরি $x\in(A\cup B)\cup C$

সংজ্ঞা থেকে পাই : $x\in A\cup B$ অথবা $x\in C$

$\Rightarrow x\in A$ অথবা $x\in B$ অথবা $x\in C$

$\Rightarrow x\in A$ অথবা $x\in(B\cup C)$

$\Rightarrow x\in A\cup(B\cup C)$

$\therefore\ (A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)$............(i)

আবার, ধরি $y\in A\cup(B\cup C)$

সংজ্ঞা থেকে পাই : $y\in A$ অথবা $y\in(B\cup C)$

$\Rightarrow y\in A$ অথবা $y\in B$ অথবা $y\in C$

$\Rightarrow y\in A\cup B$ অথবা $y\in C$

$\Rightarrow y\in (A\cup B)\cup C$

$\therefore\ A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\ \cup C$...........(ii)

(i) এবং (ii) থেকে পাই : $(A\cup B)\cup C = A\cup\ (B\cup C)$ (প্রমাণিত)

2। (খ) $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

প্রমাণ :

ধরি $x\in(A\cap B)\cap C$

সংজ্ঞা থেকে পাই : $x\in(A\cap B)$ এবং $x\in C$

$\Rightarrow x\in A$ এবং $x\in B$ অথবা $x\in C$

$\Rightarrow x\in A$ এবং $x\in(B\cap C)$

$\Rightarrow x\in A\cap(B\cap C)$

$\therefore\ (A\cap B)\cap C\subseteq A\cap(B\cap C)$.................(i)

আবার ধরি $y\in A\cap(B\cap C)$

সংজ্ঞা থেকে পাই : $y\in A$ এবং $y\in(B\cap C)$

$\Rightarrow y\in A$ এবং $y\in B$ এবং $y\in C$

$\Rightarrow y\in(A\cap B)$ এবং $y\in C$

$\Rightarrow y\in(A\cap B)\cap C$............(ii)

(i) এবং (ii) থেকে পাই :—

$(A\cap B)\cap C=(A\cap B)\cap C$ (প্রমাণিত)

সূত্র 3 বিনিময় সূত্র :

(ক) $A\cup B = B\cup A$

$x\in A\cup B\Rightarrow x\in A$ অথবা $x\in B$

$\Rightarrow x\in B$ অথবা $x\in A$

$\Rightarrow x\in BUA$

$\therefore A\cup B\subseteq B\cup A$.........(i)

আবার, $y\in B\cup A\Rightarrow y\in B$ অথবা $y\in A$

$\Rightarrow y\in A$ অথবা $y\in B$

$\Rightarrow y \in A \cup B$

$\therefore\ B \cup A \subseteq A \cup B$.............(ii)

(i) এবং (ii) থেকে পাই :—

$A \cup B = B \cup A$ (প্রমাণিত)

(খ) $A \cap B = B \cap A$

ধরি $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$

$\Rightarrow x \in B$ এবং $x \in A$

$\Rightarrow x \in B \cap A$

$\therefore\ A \cap B \subseteq B \cap A$...............(i)

আবার ধরি, $y \in B \cap A \Rightarrow y \in B$ এবং $y \in A$

$\Rightarrow y \in A$ এবং $y \in B$

$\Rightarrow y \in A \cap B$

$\therefore\ B \cap A \subseteq A \cap B$.........(ii)

(i) এবং (ii) থেকে পাই : —

$A \cap B = B \cap A$ (প্রমাণিত)।

সূত্র 4 বণ্টনসূত্র :

(ক) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

মনে করা যাক $x \in A \cup (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা $\{x \in B$ এবং $x \in C\}$

$\Rightarrow \{x \in A$ অথবা $x \in B\}$ এবং $\{x \in A$ অথবা $x \in C\}$

$\Rightarrow x \in A \cup B$ অথবা $x \in A \cup C$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\therefore\ A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$............(i)

আবার, মনে করা যাক $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\Rightarrow\ y \in (A \cup B)$ এবং $y \in (A \cup C)$

$\Rightarrow\ \{y \in A$ অথবা $y \in B\}$ এবং $\{y \in A$ অথবা $y \in C\}$

$\Rightarrow\ y \in A$ অথবা $\{y \in B$ এবং $y \in C\}$

$\Rightarrow\ y \in A$ অথবা $\{y \in B \cap C\}$

$\Rightarrow y \in A \cup (B \cap C)$

$\therefore (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.......(ii)

(i) এবং (ii) থেকে পাই :- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (প্রমাণিত)

সূত্র 4 (খ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ এবং $x \in (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$ অথবা $x \in C$

$\Rightarrow \{x \in A$ এবং $x \in B$ অথবা $\{x \in A$ এবং $x \in C\}$

$\Rightarrow x \in A \cap B$ অথবা $x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\therefore A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$......(i)

আবার, $Y \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\Rightarrow y \in A \cap B$ অথবা $y \in A \cap C$

$\Rightarrow \{y \in A$ এবং $y \in B\}$ অথবা $\{y \in A$ এবং $y \in C\}$

$\Rightarrow y \in A$ এবং $\{y \in B$ অথবা $y \in C\}$

$\Rightarrow y \in A$ এবং $y \in (B \cup C)$

$\Rightarrow y \in A \cap (B \cup C)$

$\therefore (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$......(ii)

(i) এবং (ii) থেকে পাওয়া যায় : —

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (প্রমাণিত)

সূত্র 5 অভেদ সূত্র :

(ক) $A \cup \phi = A$

$\because \phi \subset A$

$\therefore A \cup \phi = A$ [9.3.7-এর মন্তব্য (i) দ্রষ্টব্য]

(খ) $A \cap U = A$

$\because A \subset U$

$\therefore A \cap U = A$ [9.3.7-এর মন্তব্য (i) দেখুন]

(প্রমাণিত)

সূত্র 6 অভেদ সূত্র :

(ক) $A \cup U = U$

$\because A \subset U$

$\therefore A \cup U = U$ [9.3.7 এর মন্তব্য (i) দেখুন]

(খ) $A \cap \phi = \phi$

$\because \phi \subset A$

$\therefore A \cap \phi = \phi$ [9.3.7 এর দ্রষ্টব্য (i) দেখুন]

সূত্র 7 উদঘাতন সূত্র : $(A^c)^c = A$ বা $(A')' = A$

মনে করুন, $x \in (A^c)^c$

$\Rightarrow x \notin A^c$

$\Rightarrow x \in A$

$\therefore (A^c)^c \subseteq A$.................(i)

আবার, মনে করুন, $y \in A$

$\Rightarrow y \notin A^c$

$\Rightarrow y \in (A^c)^c$

$\therefore A \subseteq (A^c)^c$.................(ii)

$\therefore$ (i) এবং (ii) হতে পাওয়া যায় —

$(A^c)^c = A$ (প্রমাণিত)

সূত্র 8 পূরণ সূত্র : (ক) $A \cup A^c = U$

$\because A \in U$ [সেট A, সার্বিক সেটের পদ]

$\therefore A \subset U$

আবার $A^c \in U$

$\therefore A^c \subset U$

$\therefore A \cup A^c = U$ (প্রমাণিত)

(খ) $A \cap A^c = \phi$

সেট A এর পূরক সেট A^c

আবার A^c সেটের পূরণ A

$\therefore$ সেট A এবং সেট A^c দুটি পরস্পর বিচ্ছেদী সেট।

$\therefore A \cap A^c = \phi$ (প্রমাণিত)

সূত্র 9 পূরণ সূত্র :

(ক) $U^c = \phi$

U একটি সার্বিক সেট

$\therefore$ U-এর পূরক সেট একটি শূন্য সেট।

(খ) $\phi^c = U$

$\because$ ϕ একটি শূন্য সেট

$\therefore$ ϕ এর পূরক সেট সার্বিক সেট হবে।

(প্রমাণিত)

সূত্র 10 ডি-মরগ্যানের সূত্র

(ক) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

মনে করি $x \in (A \cup B)^c$

$\Rightarrow x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \notin A$ এবং $x \notin B$

$\Rightarrow x \notin A^c$ এবং $x \notin B^c$

$\Rightarrow x \in A^c \cap B^c$

$\therefore (A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$..............(i)

আবার মনে করি, $y \in A^c \cap B^c$

$\Rightarrow y \in A^c$ এবং $y \in B^c$

$\Rightarrow y \notin A$ এবং $y \notin B$

$\Rightarrow y \notin A \cup B$

$\Rightarrow y \notin (A \cup B)^c$

$\therefore A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$..............(ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পাই : —

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (প্রমাণিত)

(খ) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

মনে করি $x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \notin A \cap B$

$\Rightarrow x \notin A$ এবং $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A^c$ এবং $x \in B^c$

$\Rightarrow x \in A^c \cup B^c$

$\therefore (A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$..............................(i)

আবার, ধরি $y \in A^c \cup B^c$

$\Rightarrow y \in A^c$ অথবা $y \in B^c$

$\Rightarrow y \notin A$ অথবা $y \notin B$

$\Rightarrow y \notin A \cap B$

$\Rightarrow y \in (A \cap B)^c$

$\therefore A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$.........................(ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) থেকে পাই

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (প্রমাণিত)

(খ) সূত্রটিকে এভাবেও প্রমাণ করে দেখানো যায় : —

মনে করা যাক A^c এবং B^c দুটি সেট।

তাহলে সূত্র 10(ক) প্রয়োগ করে পাই —

$(A^c \cup B^c)^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c$

অথবা $(A^c \cup B^c)^c = A \cap B$ [উদ্‌ঘাতন সূত্র প্রয়োগে সূত্র 7]

অথবা $\{(A^c \cup B^c)^c\}^c = (A \cap B)^c$ [পূরণ সূত্রের সাহায্যে]

$\therefore A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ (প্রমাণিত)

মন্তব্য : উপরের সবকয়টি সূত্রই ভেন চিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়।

9.3.14 সঞ্চয়ণের অন্তর

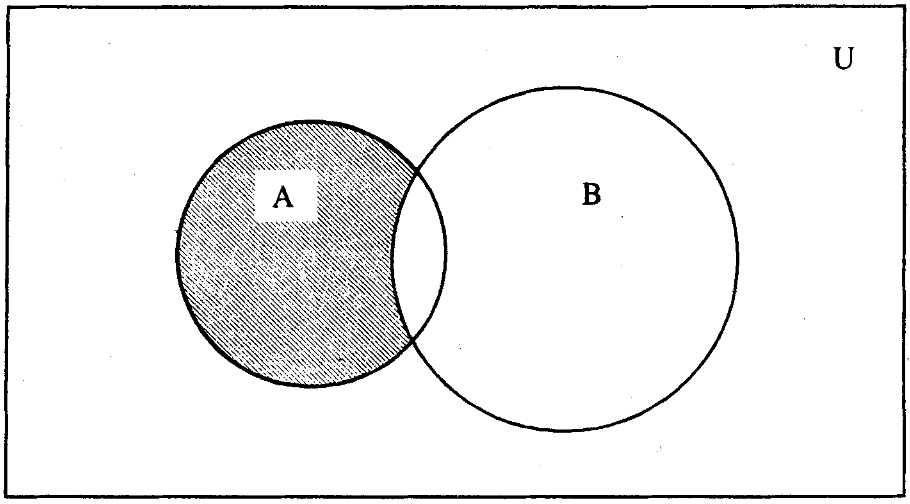
দুটি সেট A এবং B এর অন্তর $A-B$ একটি নতুন সেট হবে যার পদগুলো A সেট-এর সদস্য কিন্তু B সেটের সদস্য নয়। অর্থাৎ $A-B = \{x : x \in A, x \notin B\}$

$A-B$ কে 'A বিয়োগ B' ভাবেও পড়া যেতে পারে।

আবার, $A-B$ কে কখনও কখনও $A \setminus B$ অথবা $A \sim B$ চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়।

$B-A$ হবে আরেকটি নতুন সেট যার পদগুলো হবে B-এর সব সদস্য যারা A-সেটের সদস্য নয়।

ভেন্‌চিত্রের সাহায্যে A – B দেখানো হলো : —



চিত্র নং ৪ রেখাঙ্কিত অংশ A–B

উদাহরণ 15

$A = \{1,2,3,4,\}$, $B=\{3,4,5,6,7\}$, $C=\{6,7,8,9\}$ হলে

$A-B=\{1,2\}$; $B-A = \{5,6,7\}$

$A-C = \{1,2,3,4\}=A$

$C-A = \{6,7,8,9\}=C$

মন্তব্য

(ক) সেট A-এর মধ্যে সেট A–B অবশ্যই থাকবে।

অতএব $A-B \subset A$

অনুরূপভাবে $B-A \subset B$

(খ) $A-B = \phi$ যখন $A \subset B$

এবং $A-B = A$ যখন $A \cap B = \phi$

(গ) ভেন্‌চিত্রের সাহায্যে দেখা যেতে পারে যে

$A-B$, $A \cap B$ এবং $(B-A)$ এই সেট তিনটি পরস্পর বিচ্ছেদী সেট।

(ঘ) $(A-B)$ সেটটিকে পূরণ চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশিত হবে এভাবে :

$A-B = A\cap B^c$

প্রমাণ : ধরি $x\in A-B$

$\Rightarrow x\in A$ এবং $x\notin B$

$\Rightarrow x\in A$ এবং $x\in B^c$

$\Rightarrow x\in A\cap B^c$

$\therefore\ A-B \subseteq A\cap B^c$.........................(i)

আবার, ধরি $y\in A\cap B^c$

$\Rightarrow y\in A$ এবং $y\in B^c$

$\Rightarrow y\in A$ এবং $y\notin B$

$\Rightarrow y\in A-B$

$\therefore\ A\cap B^c\subset A-B$...........................(ii)

(i) ও (ii) থেকে পাওয়া যায় $A-B=A\cap B^c$

(প্রমাণিত)

9.3.15 প্রতিসম অন্তর

দুটি সেট A এবং B এর প্রতিসম অন্তর (Symmetric difference) $A\,\Delta\, B$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশিত হয় এবং প্রতিসম অন্তরের সংজ্ঞা হল

$$A\,\Delta\, B=(A-B)\cup(B-A)$$

অতএব $A\,\Delta\, B$ হল একটি নতুন সেট যার সদস্যরা হয় A সেটে অথবা B-তে আছে কিন্তু অবশ্যই উভয়ের $(A\cap B)$ মধ্যে নেই।

$\therefore\ A\,\Delta\, B$-কে এভাবেও লেখা যায়

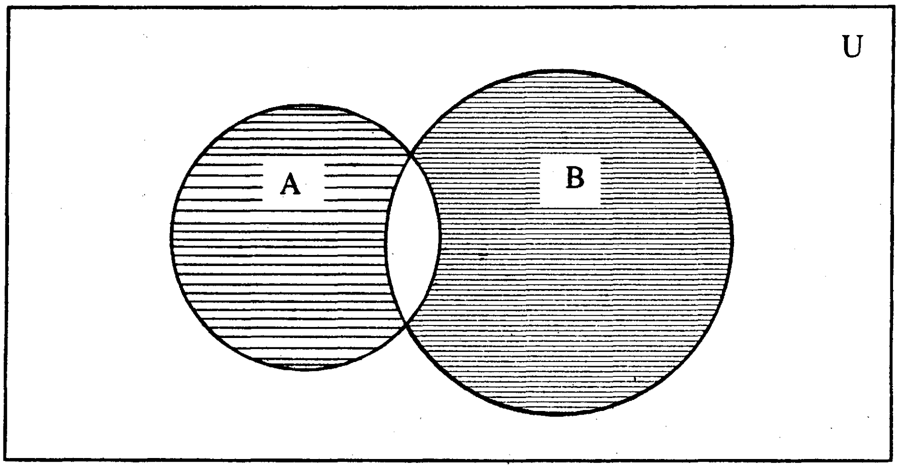
$$A\,\Delta\, B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

আবার, $\because\ A-B = A\cap B^c$

এবং $B-A = B\cap A^c$

$\therefore\ A\,\Delta\, B = (A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)$

ভেন্‌চিত্রটি নিম্নরূপ :



চিত্র নং 9 : রেখাঙ্কিত অংশ $A \Delta B$

উদাহরণ 16

যদি $A = \{1,2,3\}$

$B = \{3,4,5\}$ হয়

তবে, $A-B = \{1,2,\}$

এবং $B-A = \{4,5\}$

$\therefore\ A \Delta B = \{1,2,4,5\}$

মন্তব্য

(ক) $A \Delta \phi = A$

(খ) $A \Delta A = \phi$

(গ) $A \Delta B = B \Delta A$ [বিনিময় সূত্র]

(ঘ) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ [সংযোগ সূত্র]

প্রমাণ

$$B \Delta C = (B-C) \cup (C-B)$$

$$= (B \cap C') \cup (B' \cap C)$$

$$A \Delta (B\Delta C) = \{A \cap [(B \cap C') \cup (B' \cap C)]'\} \cup \{A' \cap [(B \cap C') \cup (B' \cap C)]\}$$

$$= \{A \cap [(B' \cup C) \cap (B \cup C')]\} \cup \{A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)\}$$

$$=\{A\cap[(B'\cap C')\cup(C\cap B)]\}\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A'\cap B'\cap C')$$

$$=(A\cap B'\cap C')\cup(A\cap B\cap C)\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A'\cap B'\cap C)$$

$$=(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A'\cap B'\cap C)$$

ডানপক্ষের মান একই থাকবে যখন A এবং C পরস্পর নিজেদের মধ্যে পরিবর্তিত হয়।

অতএব $A \Delta (B \Delta C) = C \Delta (B\Delta A)$

$$\left.\begin{array}{l} =(B \Delta C)\,\Delta C \\ =(A \Delta B)\,\Delta C \end{array}\right\}\text{ (বিনিময় সূত্র)}$$

9.3.16 কার্তিয় গুণন, গুণিত সেট

ধরা যাক A এবং B দুটি সেট। A ও B এর গুণিত সেট বা কার্তিয় গুণফল (Cartesian product) $A\times B$ (A ও B এর গুণফল রূপে পড়া যায়) হবে একটি নতুন সেট যার পদগুলি হল এক একটি ক্রমযুগল (ordered pair) (a,b) যেখানে $a\in A$ এবং $b\in B$.

অর্থাৎ $A\times B=\{(a,b) : a\in A,\ b\in B\}$

উদাহরণ 17

যদি $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{5,6\}$ হয়, তবে

$A\times B = \{(1,5), (1,6), (2,5), (2,6), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6)\}$

এবং $B\times A = \{5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4)\}$

মন্তব্য

(ক) $A\times B \neq B\times A$ অর্থাৎ কার্তিয় গুণনে বিনিময় সূত্রটি অচল।

(খ) যদি সেট A-তে m-সংখ্যক পদ থাকে এবং সেট B-তে n-সংখ্যক পদ থাকে তবে $A\times B$ সেটটিতে mn-সংখ্যক পদ থাকবে।

(গ) যদি A অথবা B এর যে কোনও একটি সেট শূন্য সেট হয় তখন অবশ্যই $A\times B$ সেটটি একটি শূন্য সেট হবে।

(ঘ) যদি A অথবা B এর যে কোনও একটি অসীম সেট হয় এবং অপরটি একটি অশূন্য সেট হয়, তবে $A\times B$ সেটটি একটি অসীম সেট হবে।

(ঙ) $A\times B = B\times A$ হবে যদি এবং একমাত্র যদি $A = B$ হয় এবং সেক্ষেত্রে $A\times B = A\times A = A^2$ হবে।

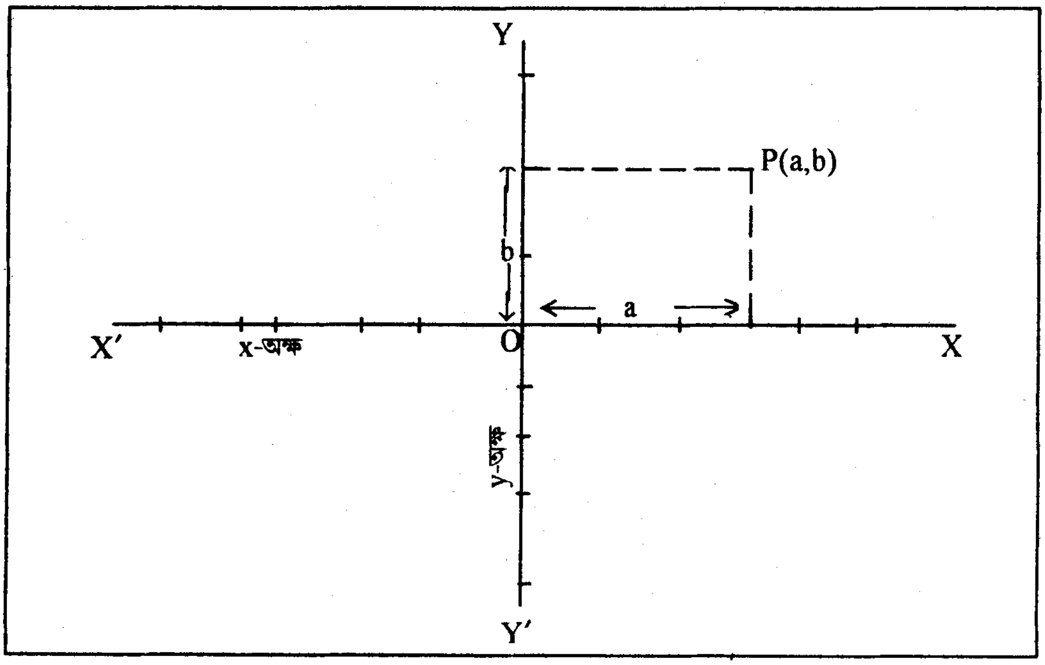
উদাহরণ 18

সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট R

এক্ষেত্রে $R\times R=R^2$ হল একটি নতুন সেট যার পদগুলো এক একটি বাস্তব সংখ্যার ক্রমযুগল। আমরা যে স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে অভ্যস্ত, সেখানে আমরা দেখেছি যে R^2 -এর পদগুলো দ্বিমাত্রিক সমতলে অবস্থিত বিন্দুগুলো নিয়ে গঠিত।

চিত্র নং 10 দেখুন —

এখানে প্রত্যেকটি বিন্দু P একটি ক্রমযুগল (a,b) দ্বারা প্রকাশিত। P-বিন্দুগামী উল্লম্ব-রেখাটি x-অক্ষকে মূলবিন্দু O থেকে a-দূরত্বে এবং P-বিন্দুগামী অনুভূমিক রেখাটি y-অক্ষকে O-বিন্দু থেকে b দূরত্বে ছেদ করে। R^2-কে সচরাচর কার্তিয় সমতল বলা হয়।



চিত্র নং 10

তিন বা তিনের বেশি সেটের কার্তিয় গুণফল :—

পূর্বের আলোচিত সেটের গুণন প্রক্রিয়ার (কার্তিয় গুণন)-ধারণাকে আরো প্রসারিত করা যায়।

যদি $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots, A_n$, কতকগুলো (n সংখ্যক) সসীম সেট হয় তখন এদের কার্তিয় গুণফল —

$A_1\times A_2\times A_3\times \ldots\ldots\ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) \; ; \; x_i \in A_{i,\ i=1,2,\ldots\ldots,n}\}$

একটি বিশেষক্ষেত্রে যদি $A_1=A_2=A_3=\ldots\ldots=A_n$ হয় তখন এই সেটগুলোর কার্তিয় গুণন A^n হবে একটি নতুন সেট যার পদগুলি ক্রমযুক্ত n দল $\{(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n); x_i \in A_i\}$। আমরা যেমন সাধারণভাবে $A\times A\times A$ কে A^3 দ্বারা প্রকাশ করি ঠিক সেইভাবেই লেখা যায় $A^n = \underbrace{A\times A\times A\times \ldots\ldots\ldots\times A}_{n \text{ সংখ্যক}}$

(অর্থাৎ যেখানে n-সংখ্যক A আছে।)

সাধারণত $R^3 = R\times R\times R$ ত্রৈমাসিক দেশকে (Three dimensional space) বোঝায়।

অনুশীলনী : 5

প্রশ্ন 14। সেট সম্পর্কিত সূত্রাবলীর সাহায্যে প্রমাণ করুন যে —

$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$

প্রশ্ন 15। প্রমাণ করুন যে দুটি সেট A, B হলে —

$$(A-B) \cap B = \phi$$

প্রশ্ন 16। যদি $n(A) = x$ এবং $n(B) = y$ হয় তবে $n(A \times B) =$ কত?

9.4 সারাংশ

এই এককে সেটতত্ত্বের প্রাথমিক ধারণাকে উপস্থাপন করা হয়েছে। বিশেষভাবে মূল বিষয়গুলো নিম্নরূপ :

সেট : সুসংজ্ঞাত এবং স্বতন্ত্র বস্তুসমূহের (আমাদের আয়ত্তাধীন) সংকলন, সমষ্টিকরণ এবং একত্রিকরণকে সেট বলে।

কয়েকটি সেটের উদাহরণ :

N : স্বাভাবিক সংখ্যার সঞ্চয়ণ	$\{1,2,3,\dots\dots\dots\}$
P : মৌলিক সংখ্যার সঞ্চয়ণ	$\{2,3,5,7,\dots\dots\dots\}$
Z : অখণ্ড সংখ্যার সঞ্চয়ণ	$\{-2,-1,0,1,2,3,\dots\dots\dots\}$
Q : মূলদ সংখ্যার সঞ্চয়ণ	
R : বাস্তব সংখ্যার সঞ্চয়ণ	
C : জটিল রাশির সঞ্চয়ণ	

সেটের প্রকারভেদ

শূন্য সঞ্চয়ণ : যে সেটের কোনও পদ নেই বা থাকে না তাকে শূন্য সেট বলে। ϕ চিহ্ন দ্বারা এই সেট প্রকাশিত হয়।

একপদী সঞ্চয়ণ : যে সেটে একটিমাত্র পদ থাকে তাকে একপদী সেট বলে।

সসীম সঞ্চয়ণ : যে সেটের পদের সংখ্যা সসীম তাকে সসীম সেট বলে।

অসীম সঞ্চয়ণ : যে সেটের পদসংখ্যা অসীম তাকে অসীম সেট বলে।

সার্বিক সঞ্চয়ণ : সেটতত্ত্বে ব্যবহৃত সকল সেটের সমস্ত সদস্য নিয়ে যে বৃহৎ সেট গঠিত হয় তাকে সার্বিক সেট বলে। U-এই চিহ্ন দ্বারা এই সেট নির্দেশিত হয়।

অধসঞ্চয়ণ : একটি সেট B অপর একটি সেট A এর উপসেট হবে যখন B এর প্রতিটি পদ A সেটেরও পদ হবে। $B \subseteq A$ অথবা $A \supseteq B$ এই চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সেটের সমতা : A এবং B সেট দুটি সমান হবে যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ হয়।

সংযোগ ও ছেদ প্রক্রিয়া :

A ও B এই দুটি সেটের সংযোগ $A \cup B$ একটি এমন সেট হবে যার পদগুলো হয় A এর পদ নতুবা B সেটের পদ অথবা A এবং B উভয় সেটেরই পদ।

A ও B এর ছেদ $A \cap B$ একটি এরূপ সেট হবে যার পদগুলো A এবং B উভয় সেটেরই পদ।

বিচ্ছেদী সেট :

দুটি সেট A এবং B দুটি সেট পরস্পর বিচ্ছেদী সেট হবে যখন $A \cap B = \phi$ [উভয় সেটের মধ্যে কোন সাধারণ পদ নেই।]

পূরক সেট : A সেটের পূরক সেট A^c বা A' এমন একটি সেট যার সদস্যরা সার্বিক সেট U এর অন্তর্গত এবং A সেটের অন্তর্গত নয়।

$$A^c \text{ বা } A' = \{x : x \in U, x \notin A\}$$

সেটের অন্তর : দুটি সেট A ও B এর অন্তর $A-B$ বা $A \sim B$ বা $A \setminus B$ হল এরূপ একটি সেট যার পদগুলো A-এর সদস্য কিন্তু B এর সদস্য নয়।

$$A-B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

প্রতিসম অন্তর : দুটি সেট A এবং B এর প্রতিসম অন্তর

$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$

$A \Delta B$ এই সেটটির পদগুলো A অথবা B তে থাকবে কিন্তু অবশ্যই উভয় সেটে থাকবে না।

কার্তিয় গুণন : A ও B এর কার্তিয় গুণন $A \times B$ দ্বারা প্রকাশিত হয় এবং $A \times B$ হল এরূপ একটি সেট যার পদগুলো হবে ক্রমযুগল (a,b) যেখানে $a \in A$ এবং $b \in B$

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

কয়েকটি প্রয়োজনীয় সূত্র ঃ

(i) $\left.\begin{array}{l}(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\end{array}\right\}$ সংযোগ সূত্র

(ii) $\left.\begin{array}{l}A \cup B = B \cup C \\ A \cap B = B \cap C\end{array}\right\}$ বিনিময় সূত্র

(iii) $\left.\begin{array}{l}A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\end{array}\right\}$ বণ্টন সূত্র

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(iv)} & (A\cup C)' = A'\cap B' \\ & (A\cap C)^c = A^c\cup B^c \\ \text{বা} & (A\cap C)' = A'\cup B'\end{array}\right\}\ \text{ডি-মরগ্যানের সূত্র}$$

9.5 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1। $s = \{1,2,3,4,5,.....\}$ হলে নিচে দেওয়া সেটগুলোর পদগুলো নির্ণয় করুন :—

(ক) $A = \{ x : x\in S',\ x$ যুগ্ম সংখ্যা এবং $x < 20\}$

(খ) $B = \{x : x\in S,\ \ 9 + x = 8\}$

$C = \{x :\ x\in S,\ \ x$ হল 5 এর গুণিতক$\}$

2। সার্বিক সেট $U = \{a,b,c,d,e,...., x, y, z\}$

(অর্থাৎ U, ইংরাজি বর্ণমালার সবকয়টি বর্ণ নিয়ে তৈরি।)

নিচে দেওয়া সেটগুলোর পদ নির্ণয় করুন এবং কোন দুটি সেট সমান সেটি দেখান :—

(ক) $A = \{\alpha\in U, \alpha$ একটি স্বরবর্ণ $\}$

(খ) $B = \{\beta\in U, \beta$ হল ইংরেজি শব্দ 'Life' এর বর্ণগুলো$\}$

(গ) $D = \{\delta\in U,\ \delta$ হল ইংরেজি শব্দ 'file' এর বর্ণগুলো$\}$

3। নিচের দেওয়া সেট দুটির মধ্যে কোনটি শূন্য সেট (ϕ) এবং কোনটি শূন্য সেট নয়?

(ক) $X = \{x : x^2 = 4$ এবং $3x = 9$

(খ) $Y = \{ y : y+3 = 3\}$

4। $A = \{2, 3, 4, 5\}$ এবং $B = \{x : x\in P,\ x$ যুগ্ম সংখ্যা$\}$ দেখান যে A সেটটি B সেটের উপসেট নয়।

5। কতকগুলো সেট দেওয়া আছে —

$\phi,\ A = \{1\},\ B = \{1, 3\},\ C = \{1, 5,9\}$

$D = \{1,2,3,4,5\},\ E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

এবং সার্বিক সেট $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

এবারে নিচের শূন্যস্থানে (— চিহ্নিত) $\subseteq$ অথবা $\not\subseteq$ (যেটিসঠিক চিহ্ন) বসান —

(ক) ϕ — A (খ) C — D (ক) D — E

(ঘ) B — D (ঙ) C — E (চ) D — U

6। প্রমাণ করুন যে $A = \{1,2,3,4,5\}$, $C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ সেটটির একটি প্রকৃত উপসেট।

7। সার্বিক সেট $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

সেট $A = \{1,2,4,6\}$, $B=\{3,5,7\}$ এবং $C = \{1,3,5,7,9\}$

হলে নিচের সেটগুলোর পদ নির্ণয় করুন : —

(ক) $A \cap B$ (খ) $A \cap C$ (গ) $A \cup B$ (ঘ) $A \cup C$

(ঙ) A (চ) C^c

8। সার্বিক সেট $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A = \{1,2,3,4\}$

$B = \{4,5,6,7\}$

$C = \{5,6,7,8,9\}$

$D = \{1,3,5,7,9\}$

$E = \{2,4,6,8\}$ হলে

নিচের সেটগুলো দেখান —

(ক) A^c (খ) B^c (গ) D^c (ঘ) E^c (ঙ) U^c

9। 8নং প্রশ্নে উল্লিখিত সেটগুলো থেকে নিচের সেটগুলো নির্ণয় করুন :—

(ক) $A \setminus B$ (খ) $B \setminus A$ (গ) $D \setminus E$ (ঘ) $E \setminus D$

10। 8নং প্রশ্নে দেওয়া সেটগুলো সম্পর্কে নিচের সেটগুলো নির্ণয় করুন : —

(ক) $A \cap (B \cup E)$

(খ) $(A \setminus B)$

(গ) $(A \cap D) \setminus B$

(ঘ) $(B \cap F) \cup (C \cap E)$

11। $A = \{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2,4,6,8,10,12\}$

এবং $C = \{3,6,9,12\}$ হলে দেখান যে,

$A - (B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$

12। যদি $A = \{2,16,32\}$, $B=\{1,4,8,16\}$ এবং $S = \{1,2,4,8,16,32\}$ হয়, তবে দেখান যে —

(ক) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(খ) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

13। $A \cup (B \setminus C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$

এই সমীকরণটির সম্পর্কে একটি উদাহরণ দেখান।

14। $B = C$ না হলেও $A \cap B = A \cap C$ হবে কি? উদাহরণের সাহায্যে দেখান।

15। A,B,C সেট তিনটি, সার্বিক সেট U এর উপসেট। প্রমাণ করুন যে, —

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

16। দেখান যে, $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

17। প্রমাণ করুন যে, $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$

18। A এবং B যে কোনও দুটি সেট হলে প্রমাণ করুন যে $A \cup B = B$ হবে যদি এবং একমাত্র যদি $A \subseteq B$ হয়।

19। A এবং B দুটি সেট এবং $A \subset B$ হলে দেখান যে,

$B^c \subset A^c$ এবং বিপরীতক্রমেও সম্পর্কটি সত্য হবে।

20। যদি $A \subseteq B$ এবং $C \subseteq D$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে,

$$A \times C \subseteq B \times D$$

21। যদি $A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5)\}$ হয় তবে সেট A এবং সেট B এর পদ নির্ণয় করুন।

22। A,B,C তিনটি সেট হলে প্রমাণ করুন যে

(ক) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(খ) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

23। ভেন্‌চিত্রের সাহায্যে ডি-মরগ্যানের সূত্র ব্যাখ্যা করুন : $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

24। ভেন্‌চিত্র আঁকুন : (ক) $A \cap B^c$ (খ) $(B \setminus A)^c$

25। ভেনচিত্রের সাহায্যে বণ্টন সূত্রটি দেখান : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

9.6 উত্তরমালা

9.6.1 অনুশীলনীর উত্তর : —

অনুশীলনী 1

প্র : 1। (ক), (খ) এবং (ঘ) সেট (গ) এবং (ঙ) সেট নয়।

প্র : 2। (খ) এবং (ঘ) সঠিক

অনুশীলনী 2

প্র : 3। (ক) — অসীম (খ) সসীম (গ) সসীম (ঘ) সসীম (ঙ) অসীম

অনুশীলনী 3

প্র: 4। উপসেটগুলো : $\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$

(ক) একটি (খ) তিনটি (গ) তিনটি (ঘ) একটি

প্র : 5। $x \in A \because A \subseteq B \quad \therefore\ x \in B$ আবার $B \subseteq C \ \therefore x \in c \ \therefore A \subseteq C$

প্র : 6। $A = \{0,1\}$, $B=\{2\}$, $C=\{0,1,3\}$

এখানে $A \not\subseteq B$, $B \not\subseteq C$, কিন্তু $A \subseteq C$

প্র : 7। (ক) $A = \{2\}$, $B=\{1,2\} \ \therefore A \subseteq B$

(খ) $A = \{2\}$, $C = \{2\} \ \therefore\ A = C$

প্র : 8। $A \supseteq C$

প্র : 9। (ক) সঠিক

অনুশীলনী 4

প্র : 10। $A \subset B$, $x \in A \cup B \ \therefore x \in A$ অথবা $x \in B$

যদি $x \in A$ হয় তবে $x \in B \ \because A \subseteq B$

যে কোনও ক্ষেত্রেই $x \in B \ \therefore\ A \cup B \subseteq B$

আবার $\because B \subseteq A \cup B \ \therefore A \cup B = B$

প্র : 11। $x \in A \cup B \ \therefore x \in A$ অথবা $x \in B$ কিন্তু $A \subseteq C$ এবং $B \subseteq C$

$\therefore$ যে কোনও ক্ষেত্রেই $x \in C \ \therefore\ A \cup B \subseteq C$

প্র : 12। ধরি $A \subset B$, এবং $x \in A \ \therefore\ x \in B$

$\therefore\ x \in A \cap B$

অতএব $A \subseteq A \cap B$

আবার $A \cap B \subseteq A \quad \therefore\ A \cap B = A$

প্র : 13। ধরি $x \in C$

$\because C \subseteq A$ এবং $C \subseteq B$

$\therefore x \in A$ এবং $x \in B$

$\therefore x \in A \cap B$

$\therefore\ C \subseteq A \cap B$

অনুশীলনী 5

প্র : 14। $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cap (B \cup B^c)$

$= A \cap U$

$= A$

প্র : 15। ধরি $x \in (A-B) \cap B$

$\therefore$ $x \in (A-B)$ এবং $x \in B$

আবার, $x \in (A-B)$ থেকে পাই $x \in A$ এবং $x \notin B$ এই দুটি ফল থেকে দেখা যাচ্ছে যে $x \in B$ আবার $x \notin B$ অর্থাৎ এরূপ কোনও পদ থাকতে পারে না যে একই সঙ্গে $x \in B$ এবং $x \notin B$ সিদ্ধ করবে।

$\therefore$ (A–B) এবং B দুটি পরস্পর বিচ্ছেদী সেট

$\therefore$ $(A-B) \cap B = \phi$

প্রশ্ন 16। A এর পদসংখ্যা = x

B এর পদসংখ্যা = y

$\therefore$ $A \times B$ এর পদসংখ্যা = xy

9.6.2 সর্বশেষ প্রশ্নাবলীর উত্তর : -

1। (ক) A সেটের পদগুলি স্বাভাবিক যুগ্মসংখ্যা এবং 20 থেকে কম।

$\therefore$ $A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$

(খ) 9+x = 8 এই সমীকরণের কোনও ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার বীজ নেই।

$\therefore$ $B = \phi$ (শূন্য সেট)

(গ) এখানে C একটি সসীম সেট এবং $C = \{5,10,15.....\}$

2। (ক) $A = \{a,e,i,o,u\}$ (খ) $B = \{l,i,f,e\}$ (গ) $D = \{f,i,l,e\}$

এখানে B=D

3। (ক) $x^2 = 4$ এবং $3x = 9$ এই সমীকরণ যুগল একই সঙ্গে সিদ্ধ করে এরূপ কোনও বীজ নেই।

$\therefore$ $X = \phi$ (শূন্য সেট)

(খ) $y+3 = 3$ $\therefore$ $y = 3-3 = 0$ $\therefore$ $Y = \{0\}$ অর্থাৎ $Y \neq \phi$

4। $3 \in A$ কিন্তু $3 \notin B$ (কারণ B যুগ্মসংখ্যার সেট এবং 3 যুগ্ম নয়)

$\therefore$ $A \not\subset B$

5। (ক) $\phi \subseteq A$ [শূন্য সেট সব সেটেরই উপসেট]

(খ) $C \nsubseteq D$ [$\because 9 \in C$ কিন্তু $9 \notin D$]

(গ) $D \nsubseteq E$ [$\because 2 \in D,\ 2 \notin E$]

(ঘ) $B \subseteq D$ [B এর পদগুলো D-তে আছে।]

(ঙ) $C \subseteq E$ [C এর পদগুলো E-তে আছে]

(চ) $D \subseteq U$ [D এর সদস্য অবশ্যই U-এর সদস্য]

6। $\because$ A এর প্রতিটি পদ C-এর পদ। $\therefore A \subseteq C$ আবার $10 \in C$ কিন্তু $10 \notin A$ $\therefore A \neq C$ $\therefore$ A সেটটি C সেটের প্রকৃত উপসেট, $A \subset C$.

7। (ক) $A \cap B = \phi$ (খ) $A \cap C = \{1\}$ (গ) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

(ঘ) $A \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$ (ঙ) $A = \{3,5,7,8,9,10\}$

(চ) $C^c = \{2,4,6,8,10\}$

8। (ক) $A^c = \{5,6,7,8,9\}$ (খ) $B^c = \{1, 2, 3, 8, 9\}$

(গ) $D^c = \{2, 4, 6, 8\}$ (ঘ) $E^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(ঙ) $U^c = \phi$

9। (ক) $A \setminus B = \{1, 2, 3\}$ (খ) $B \setminus A = \{6, 7\}$ (গ) $D \setminus E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(ঘ) $E \setminus D = \phi$ [$F \subseteq D \therefore F \setminus D = \phi$]

10। (ক) $B \cup E = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (খ) $A \setminus E = \{1,3,5\}$

$\therefore A \cap (B \cup E) = \{2,4,5\}$ $\therefore (A \setminus E)' = \{2,4,6,7,8,9\}$

(গ) $A \cap D = \{1,3,5\}$

$\therefore (A \cap D) \setminus B = \{1,3\}$

11। $B \cup C = \{2,3,4,6,8,9,10,12\}$

$\therefore A - (B \cup C) = \{1,5,7\}$

আবার, $A - B = \{1,5,7,9\}$

এবং, $A - C = \{1,5,7,8\}$

$\therefore (A - B) \cap (A - C) = \{1,5,7\}$

12। $A \cup B = \{1,2,4,8,16,32\} = S$

$A \cap B = \{16\}$

$A^c = S - A = \{1, 4, 8\}$, $B^c = S - B = \{2, 3, 2\}$

$\therefore A^c \cup B^c = \{1, 2, 4, 8, 32\} = S - A \cap B = (A \cap B)^c$

এবং $A^c \cap B^c = \phi = S^c = (A \cup B)^c$

13। $A=\{a\}$, $B=\{b\}$, $C=\{c\}$

$$A\cup(B\setminus C)=\{a\},$$

$$(A\cup B)\setminus(A\cup C)=\{b\}$$

14। $A=\{1,2\}$ $\quad B=\{2,3\}$ $\quad C=\{2,4\}$ হলে,

$$A\cap B=\{2\} \quad \text{এবং}$$

$$A\cap C=\{2\}$$

$\therefore\ A\cap B=A\cap C$ কিন্তু $B\neq C$

15। $(A\cup B)\cap(B\cup C)=(B\cup A)\cap(B\cup C)=B\cup(A\cap C)=B\cup(C\cap A)$

$$\begin{aligned}\therefore\ (A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A) &= (A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)\\ &= [B\cup(C\cap A)]\cap(C\cup A)\\ &= [B\cup(C\cap A)]\cup[(C\cap A)\cap(C\cup A)]\\ &= [(B\cap C)\cup(B\cap A)]\cup(C\cap A)\\ &= (A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)\end{aligned}$$

16। $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

$$=[(A\cap B)\cap(A\cap C)^c]\cup[(A^c\cap B^c)\cap(A\cap C)]$$

$$=[(A\cap B)\cap(A^c\cup C^c)]\cup[(A^c\cup B^c)\cap(A\cap C)]$$

$$=[(A\cap B\cap A^c)\cup(A\cap B\cap C^c)]\cup[(A^c\cap A\cap C)\cup(B^c\cap A\cap C)]$$

$$=(A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap B^c\cap C) \qquad \left[\begin{array}{l}\because A\cap B\cap A^c=\phi\ \text{এবং}\\ A^c\cap A\cap C=\phi\end{array}\right]$$

$$=A\cap[(B\cap C^c)\cup(B^c\cap C)]$$

$$=A\cap(B\Delta C)$$

17। বণ্টনসূত্র প্রয়োগ করলে —

$$(A\cup B)\cap(A\cup B^c)=A\cup(B\cap B^c)$$

$$\therefore\ (A\cup B)\cap(A\cup B^c)=A\cup\phi \qquad [\because B\cap B^c=\phi]$$

আবার, $A\cup\phi=A$

$$\therefore\ (A\cup B)\cap(A\cup B^c)=A$$

18। সংজ্ঞা থেকে $B \subseteq A \cup B$

$x \in A \cup B$

$x \in A$ অথবা $x \in B$

যদি $A \subseteq B$ তখন $x \in A \Rightarrow x \in B$

$\therefore\ x \in A \cup B$ এবং $A \subset B$

এখন $x \in B$ $\quad \therefore\ A \cup B \subseteq B \ \therefore\ A \cup B = B$

বিপরীতক্রমে যদি $A \cup B \subseteq B$ হয়, $A \subseteq A \cup B$ $\quad \therefore\ AUB = B$

19। $A \subset B$

$x \in B^c$ $\quad$ বিপরীতক্রমে $B^c \subset A^c$

$\therefore\ x \notin B$ $\quad \therefore (A^c)^c \subset (B^c)^c \ \therefore A \subset B^c$ অথবা $A \subset B$

এবং $x \notin A^c$ $\quad \therefore A \subset B$ যদি এবং একমাত্র যদি $B^c \subset A^c$

$\therefore\ B^c \subset A^c$

20। $(a, c) \in A \times C$

$\therefore\ a \in A$ এবং $c \in C$

$\because A \subseteq B$ $\quad \therefore a \in B$ $\quad$ আবার $\because C \subset D \ \therefore\ c \in D$

$\therefore\ (a,c) \in B \cdot D$

$\therefore\ A \times C \subseteq B \times D$

21। $A = \{1,2\}$, $\quad B = \{2,3,4,5\}$

22। (ক) $(x, y) \in A \times (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $y \in (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং ($y \in B$ অথবা $y \in C$)

$\Rightarrow (x,y) \in A \times B$ অথবা $(x,y) \in A \times C$

$\Rightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

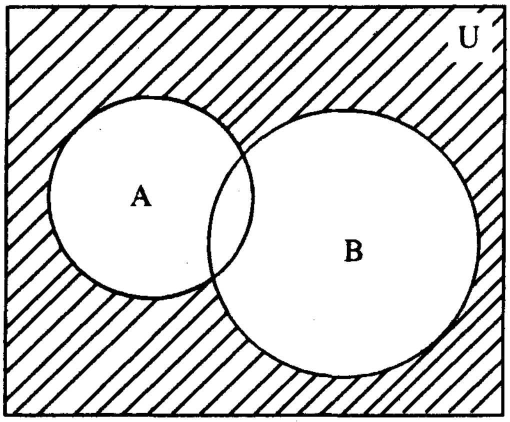
(খ) $(x, y) \in A \times (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $y \in B \cap C$

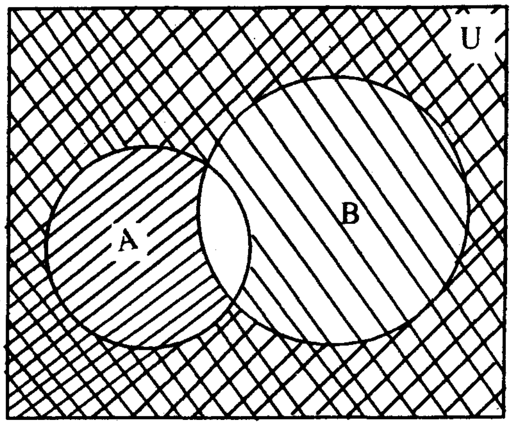
$\Rightarrow (x,y) \in A \times B$ এবং $(x,y) \in A \times C$

$\Rightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

23।



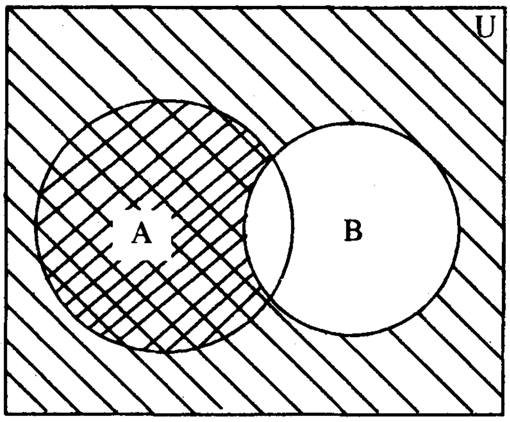
রেখাঙ্কিত অংশ : $(A \cup B)^c$



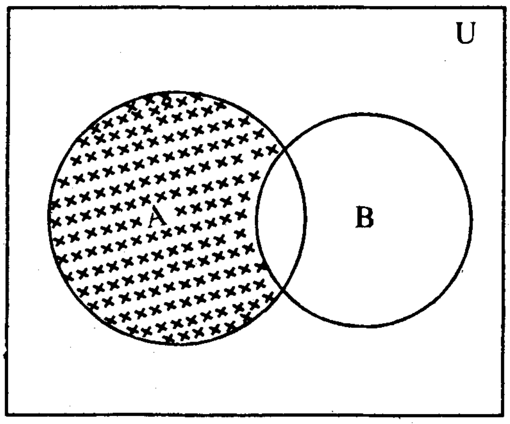
"XX" চিহ্নিত অংশ : $(A^c \cap B^c)$

ভিনচিত্রে দুটির চিহ্নিত অংশ সমান।

24। (ক)

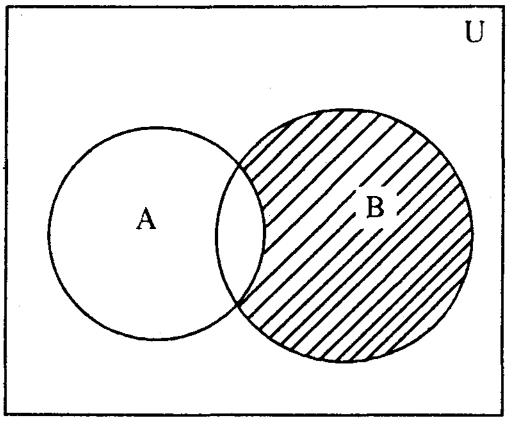


A এবং B^c এর ভেনচিত্র

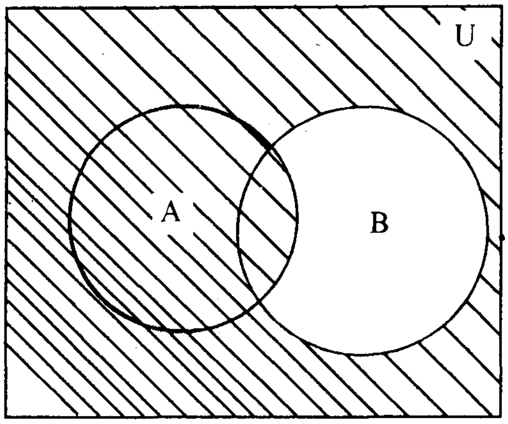


$A \cap B^c$ এর ভেনচিত্র
("xx" চিহ্নিত অংশ)

24। (খ)



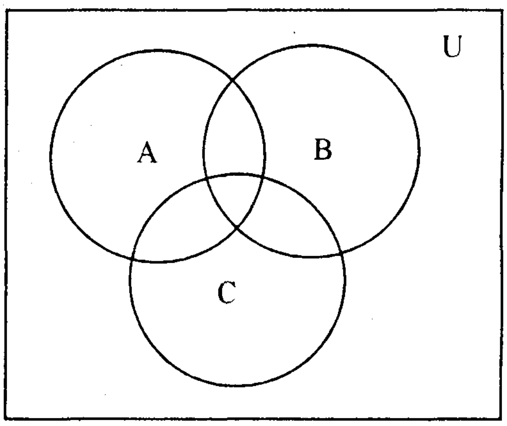
(B \ A) এর ভেন্‌চিত্র
(রেখাঙ্কিত অংশ)

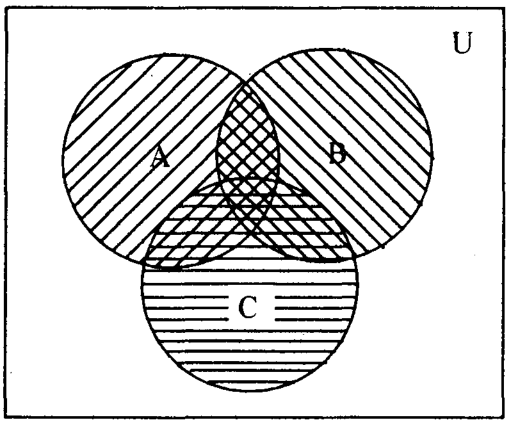


$(B \setminus A)^c$ এর ভেন্‌চিত্র
(রেখাঙ্কিত অংশ)

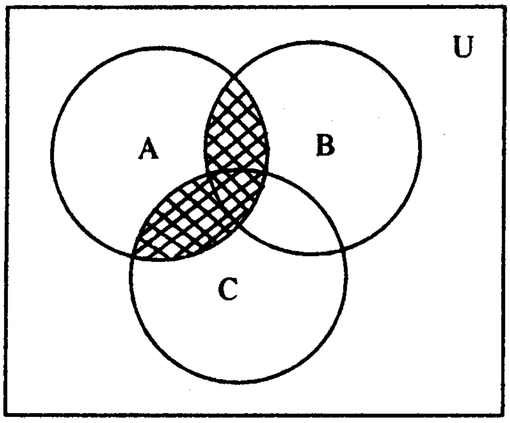
25। বণ্টন সূত্র $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ এর ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখান হল :

1ম চিত্র : তিনটি সেট A, B, C :

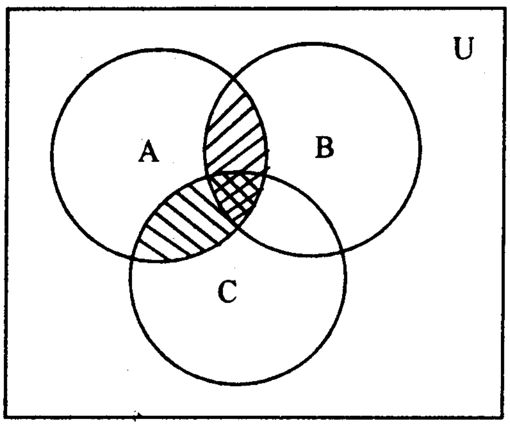




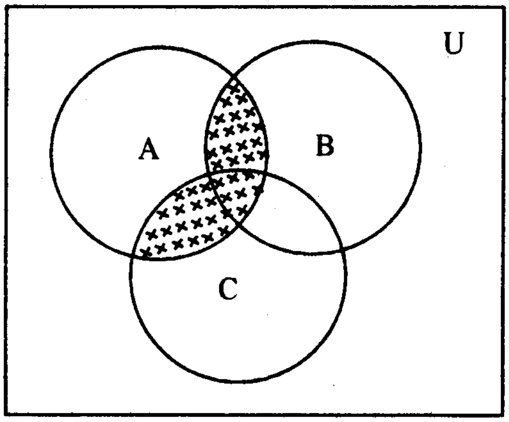
2য় চিত্র : A এবং $B \cup C$:



3য় চিত্র : $A \cap (B \cup C)$



4র্থ চিত্র : $(A \cap B)$ এবং $(A \cap C)$



5ম চিত্র : $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

9.7 প্রান্তলিপি

9.7.1 প্রতীক চিহ্ন

(1)	N স্বাভাবিক সংখ্যার সেট	The Set of Natural Numbers
(2)	Z অখণ্ড সংখ্যার সেট	The Set of Integers
(3)	Q মূলদ সংখ্যার সেট	The Set of Rational Numbers
(4)	II অমূলদ সংখ্যার সেট	The Set of Irrational Numbers
(5)	R বাস্তব সংখ্যার সেট	The Set of Real Numbers
(6)	C জটিল সংখ্যার সেট	The Set of Complex Numbers
(7)	ϕ শূন্যসেট বা রিক্ত সেট	Empty Set
(8)	$x \in A$ x, সেট A–এর একটি পদ	x belongs to A
(9)	$x \notin B$ x, সেট B-এর একটি পদ নয়	x does not belongs to B
(10)	$A \subseteq B$ A, B-এর অন্তর্গত	A is contained in B
(11)	$A \cup B$ A এবং B এর সংযোগ	Union of A and B
(12)	$C \cap D$ C এবং D এর ছেদ	Intersection of C and D
(13)	$A \subseteq B$ A, B এর উপসেট	A is a subset of B
(14)	$C \subset D$ C, D এর প্রকৃত উপসেট	C is a proper subset of D
(15)	$\left.\begin{array}{r} A-B,\ A \setminus B, \\ A \sim B \end{array}\right\}$ A এবং B এর অন্তর	The set of elements of A but not in B (The difference of A & B)
(16)	$A \Delta B$ A এবং B এর প্রতিসম অন্তর	The Symertric difference of A and B
(17)	A^c, A' A সেটের পূরণ	Complement of the set A
(18)	$A \times B$ A এবং B এর কার্তিয় গুণফল	Cartesian product of A & B
(19)	$\{x \mid x$: এর ধর্ম P$\}$ x এর ধর্ম P এরূপ সেট	The set of all x which satisfy the property P.
(20)	$\Rightarrow$ অনুসৃত হয়	Implies
(21)	n(A) সেটের অঙ্কবাচক সংখ্যা	Cardinal No. of the set A
(22)	$\therefore$ সুতরাং, অতএব	Therefore
(23)	$\because$ যেহেতু	Since

(24) $a < b$ a, b থেকে ছোট — a is less than b

(25) $c \geq d$ c, d থেকে বড় অথবা সমান — c is greater than equal to d

(26) $A \neq B$ A, B সমান নয় — A is not euqal to B

(27) $\forall x$ সকল x এর জন্য — for all x

9.7.2 ইংরেজি পরিভাষা

অসীম সেট	Infinite set
অভেদ সূত্র	Identity law
অনুভূমিক রেখা	Horizontal line
অপ্রকৃত উপসেট	Improper subset
অনন্য	Unique
অখণ্ড (পূর্ণ) সংখ্যা	Integers
অঙ্কবাচক সংখ্যা	Cardinal mumbers
উপসেট	Subset
উপসেট গোষ্ঠী	Power set
উদ্দেশ্য	Objective
উলম্ব রেখা	Vertical line
উদ্‌ঘাতন সূত্র	Involuation law
একপদী সেট	Singletone set
ক্রম	Order
ক্রমযুগল	Ordered pair
ত্রিমাত্রিক দেশ	Three dimensional space
কার্তিয় গুণন	Cartesian product
গঠন	Structure
ছেদ	Intersection
ছকবন্দীকরণ পদ্ধতি	Tabular method
ভেনচিত্র	Ven diagram
ডি-মরগ্যানের সূত্র	De-morgan's law

পদ, উপাদান	Element
পূরক	Complement
প্রকৃত উপসেট	Proper subset
পূরণ সূত্র	Complement law
প্রতিসম অন্তর	Symmetric difference
প্রসারিত	Extended
প্রক্রিয়া	Operations
বণ্টন সূত্র	Distributive law
বিনিময় সূত্র	Commutative law
বাস্তব সংখ্যা	Real numbers
বর্গৈকসম সূত্র	Idempotent law
সাধারণ	Common
সংযোগ	Union
স্বতন্ত্র	Distinct
সদস্য	Member
স্বাভাবিক সংখ্যা	Natural numbers
সার্বিক সেট	Universal set
সংগ্রহ/চয়ণ	Collection
সংযোগ সূত্র	Associative law
সম্পর্ক	Relations
মৌলিক সংখ্যা	Prime numbers
মূলদ সংখ্যা	Rational numbers
জটিল সংখ্যা	Complex numbers

একক 10 ❑ সম্বন্ধ বা সম্পর্ক, চিত্রণ (Relations, Mapping)

10.1 প্রস্তাবনা

আগের এককে সেট্ সম্পর্কে একটি প্রাথমিক ধারণা দেওয়া হয়েছে। এই্ এককটিতে সেটের বিভিন্ন প্রয়োগ, সম্পর্ক (Relations) ও চিত্রণ (Mapping)-এর আলোচনা হয়েছে। এই্ এককটি পাঠ করে সেটের প্রয়োগ সম্বন্ধে অবহিত হবেন।

উদ্দেশ্য

এই এককটিতে সে বিষয়গুলি আলোচিত হয়েছে সেগুলি হলো ঃ-

- কোন সেটের ওপর সংজ্ঞায়িত প্রতিবিম্ব সম্পর্ক (Reflexive Relation),
- সামঞ্জস্য সম্পর্ক অথবা প্রতিসম (Symmetric Relation),
- পরিযায়ী সম্পর্ক (Transitive Relation) এবং
- তুল্যতা সম্পর্কের কার্যকারিতা
- যে কোনও দুটি সেটের মধ্যে 'একৈক' (One-One) ও বহু-এক (Many-one) অপেক্ষকের ধারণা।

10.2 সম্পর্ক (Relation)

সংজ্ঞা ঃ যে কোনও দুটি সেট্ A এবং B-এর মধ্যে সম্বন্ধ বা সম্পর্ক হল $A \times B$ -এর একটি সাবসেট্। অতএব দুটি সেট A ও B-এর মধ্যে R একটি সম্পর্ক হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $R \subseteq A \times B$ । যদি A=B হয় তখন বলা হয় R, A সেটের ওপর একটি সম্পর্ক।

আমরা লিখি, a R b যদি এবং কেবলমাত্র যদি $(a,b) \in R$ এবং বলি a, b-এর সঙ্গে R সম্পর্কিত।

a, b-এর সঙ্গে R-সম্পর্কিত না হলে আমরা তা $(a,b) \notin R$ চিহ্নদ্বারা বা $a\bar{R}b$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করি।

উদাহরণ ঃ-

(1) ধরা যাক R সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট্। তখন "x, y-এর থেকে ছোট; $x,y \in R$" R-এর মধ্যে একটি সম্পর্ক। এই সম্পর্কটিকে ρ দ্বারা সূচিত করলে লেখা যায় :

$$\rho = \{(x, y) : \forall x, y \in R,\ x < y\}$$

যেহেতু 2<5, $(2,5) \in \rho$ অতএব $2\,\rho\,5$ কিন্তু $3\,\bar{\rho}\,2$ যেহেতু $3 \not< 2$

(2) ধরা যাক N সমস্ত স্বাভাবিক সংখ্যার সেট্ এবং $\rho = \{(x,y) \in N^2 x, y$ -এর একটি ভাজক $\}$, তখন $x\,\rho\,y$ -এর অর্থ হবে x, y-এর ভাজক। উদাহরণস্বরূপ $3\,\rho\,6$, কিন্তু $2\,\bar{\rho}\,5$ ।

10.3 প্রতিবিম্ব সম্পর্ক (Reflexive Relation)

যে কোনও একটি সেট্ A-এর ওপর একটি সম্পর্ক R-কে প্রতিবিম্ব সম্পর্ক বলা হবে যদি $a\,R\,a, \forall\, a \in A$ অর্থাৎ যদি $(a,a) \in R\ \ \forall a \in A$ হয় উদাহরণস্বরূপ, N সেটে ≤ সম্পর্কটি প্রতিবিম্ব সম্পর্ক যেহেতু প্রতিটি স্বাভাবিক সংখ্যা n-এর জন্যই $n \le n$ -সম্পর্কটি সিদ্ধ।

10.4 প্রতিসম বা সামঞ্জস্য সম্পর্ক (Symmetric Relation)

যে কোনও একটি সেট্ A-এর ওপর একটি সম্পর্ক R-কে সামঞ্জস্য বা প্রতিসম সম্পর্ক বলা হবে যদি

$a\,R\,b \Rightarrow b\,R\,a$

উদাহরণস্বরূপ R সেটে সংজ্ঞায়িত ρ সম্পর্কটি সামঞ্জস্য সম্পর্ক যখন $x\rho y$ হবে যদি $x, y > 0$ হয়।

10.5 পরিযায়ী সম্পর্ক (Transitive Relation)

যে কোনও একটি সেট্ A-এর ওপর একটি সম্পর্ক R-কে পরিযায়ী সম্পর্ক বলা হবে যদি

$a\,R\,b$ এবং $b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c$

উদাহরণস্বরূপ সেটে সংজ্ঞায়িত এ সম্পর্কটি পরিযায়ী যখন $x\rho y$ হবে যদি x, y -এর ভাজক হয়।

উদাহরণ (1) এমন একটি সম্পর্কের উদাহরণ দিন যেটি প্রতিবিম্ব সম্পর্ক সিদ্ধ করে কিন্তু সামঞ্জস্য সম্পর্ক অথবা পরিযায়ী সম্পর্ক সিদ্ধ করে না।

উত্তর —

ধরা যাক $A=\{1,2,3\}$

এবং $R=\{(1,1), (1,2), (2,3), (2,2), (3,3)\}$

এখানে R প্রতিবিম্ব সম্পর্ক সিদ্ধ করে যেহেতু $(a,a) \in R,\ \forall a \in R$

R সামঞ্জস্য সম্পর্ক সিদ্ধ করে না, যেহেতু $(1,2) \in R$ কিন্তু $(2,1) \notin R$

R পরিযায়ী সম্পর্ক সিদ্ধ করে না, যেহেতু $(1,2) \in R$ এবং $(2,3) \in R$ কিন্তু $(1,3) \notin R$

(2) এমন একটি সম্পর্কের উদাহরণ দিন যেটি সামঞ্জস্য সম্পর্ক এবং পরিযায়ী সম্পর্ক সিদ্ধ করে কিন্তু প্রতিবিম্ব সম্পর্ক সিদ্ধ করে না।

উত্তর —

ধরা যাক $A = \{a,b,c\}$ এবং $R=\{(a,a),(b,b)(a,b),(b,a)\}$

এখানে দেখুন R, A সেটের ওপর সামঞ্জস্য সম্পর্ক এবং পরিযায়ী সম্পর্ক সিদ্ধ করে কিন্তু প্রতিবিম্ব সম্পর্ক সিদ্ধ করে না কারণ যেহেতু $(c,c) \notin R$

10.6 তুল্যতা সম্পর্ক (Equivalence Relation)

যে কোনও একটি সঞ্চয়ণ A-এর ওপর একটি সম্পর্ক R-কে তুল্যতা সম্পর্ক বলা হয় যদি সম্পর্কটি প্রতিবিম্বিক (Reflexive) প্রতিসম (Symmetric) এবং পরিযায়ী (Transitive) হয়।

উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক $A = \{1,2\}$ এবং $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

এখানে স্পষ্টতঃ R, A সঞ্চয়ণের ওপর প্রতিবিম্বিক সামঞ্জস্যপূর্ণ এবং পরিযায়ী। সুতরাং R, A সঞ্চয়ণের ওপর সংজ্ঞায়িত একটি তুল্যতা সম্পর্ক।

10.7 তুল্যতা শ্রেণী (Equivalence Classes)

সংজ্ঞা ঃ-

ধরা যাক A একটি অশূন্য (non-empty) সেট এবং A সেটের ওপর সংজ্ঞায়িত R একটি তুল্যতা সম্পর্ক। A সেটের যে কোনও পদ a-র সঙ্গে R সম্পর্কিত সমস্ত পদ A-এর একটি সাবসেট্ নির্ণয় করে, যাকে A_a অথবা [a] দ্বারা সূচিত করা হয়। A_a অথবা [a]-কে তুল্যতা শ্রেণী বলে।

অতএব $[a]=\{x \in A : a R x\}$

উদাহরণস্বরূপ, সকল পূর্ণসংখ্যার সঞ্চয়ণের ওপর 'সঙ্গতিপূর্ণ মডুলো 5' ['Congruence modulo 5'] -এর তুল্যতা শ্রেণী নিম্নরূপ :—

$[0] = \{\ldots,-15, -10, -5, 0, 5, 10, 15,\ldots\ldots\}$

$[1] = \{\ldots., -9, -4, 1, 6, 11,\ldots\ldots..\}$

$[2] = \{\ldots., -8, -3, 2, 7, 12,\ldots\ldots.\}$

$[3] = \{\ldots., -7, -2, 3, 8,13\ldots..\}$

$[4] = \{\ldots.., -6, -1, 4, 9, 14\ldots.\}$

লক্ষ করুন যে, $[0] = [5]=[10]= \cdots$

$[1] = [6]=[11]= \cdots$

$[2] = [7] = [12]= \cdots$

$[3] = [8] = [13] = \cdots$

$[4] = [9] = [14] = \cdots$

অতএব এখানে কেবলমাত্র দুটি পৃথক তুল্যতা শ্রেণীর অস্তিত্ব আছে।

অনুশীলনী –1

a) প্রতিবিম্ব সম্পর্ক, সামঞ্জস্য সম্পর্ক, পরিযায়ী সম্পর্কের সংজ্ঞা দিন।

b) তুল্যতা সম্পর্ক বলতে কি বোঝায়? উদাহরণ দিন।

10.8 উপপাদ্য

যদি R যে কোনও একটি সেটের ওপর তুল্যতা সম্পর্ক হয়, তবে $a,b \in A$ এর জন্য (i) $[a] \cap [b]=\phi$ অথবা $[a]=[b]$ এবং (ii) $\cup \{[a] : a \in A\}=A$

প্রমাণ

ধরা যাক $[a] \cap [b] \neq \phi$ অতএব সেখানে এরকম একটি বিন্দুর p-এর অস্তিত্ব থাকবে যার জন্য $p \in [a] \cap [b]$।

সুতরাং $p \in [a]$ এবং $p \in [b]$

অর্থাৎ a R p এবং b R p

সামঞ্জস্য থেকে p R b অবশ্যই হবে।

অতএব পরিযায়ী সম্পর্ক হবে a R p এবং p R b $\Rightarrow$ aRb

আবার সামঞ্জস্য সম্পর্ক থেকে পাওয়া যায় b R a ।

এখন প্রমাণ করব যে $[a] = [b]$

ধরুন $x \in [a]$ তখন a R x

পূর্বেই প্রমাণিত, b R a সেজন্য পরিযায়ী সম্পর্ক থেকে পাই

b R a এবং a R x $\Rightarrow$ b R x

$$\therefore\ x \in [b]$$

$$\therefore x \in [a] \Rightarrow x \in [b]$$

$$\therefore\ [a] \subseteq [b] \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

আবার যদি $y \in [b]$ তখন b R y. কিন্তু জানা আছে a R b সিদ্ধ। অতএব পরিযায়ী সম্পর্ক থেকে a R b এবং b R y $\Rightarrow$ a R y সেজন্য $y \in [a]$

$$\therefore [b] \subseteq [a] \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) ও (2) থেকে, $[a] = [b]$

আবার যেহেতু R প্রতিবিম্ব সম্পর্ক সিদ্ধ করে সেজন্য $a \in [a]\ \ \forall a \in A$ -এর জন্য।

$$\therefore\ \cup \{[a] : a \in A\} = A$$

10.9 বিভাজন (Partitions or Decompositions)

ধরা যাক X একটি অশূন্য সেট। তখন X-এর কতকগুলি অশূন্য পৃথক (disjoint) সাবসেটের সংগ্রহকে, যার সংযোগ (Union) হল X, X-এর একটি বিভাজন (Partition or decomposition) বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ সেটটি {O, R} সেটটি R-এর একটি বিভাজন।

10.10 তুল্যতা সম্পর্কের মৌলিক উপপাদ্য (Fundamental theorem on equivalence Relation)

যে কোনও একটি অশূন্য সেট্ X-এর উপর সংজ্ঞায়িত প্রতিটি তুল্যতা সম্পর্ক R, X-এর একটি বিভাজন (Partition) নির্ণয় করে এবং বিপরীতক্রমে, X-এর যে কোনও বিভাজন X-এর ওপর একটি তুল্যতা সম্পর্ক নির্ণয় করে।

প্রমাণ ঃ এই উপপাদ্যটির প্রথম ভাগ পূর্বের উপপাদ্যে প্রমাণিত, যেখানে দেখানো হয়েছে যে R-এর দ্বারা নির্ণীত তুল্যতা শ্রেণীগুলি প্রত্যেকটি পৃথক (disjoint) এবং তাদের সংযোগ X।

অতএব তুল্যতা সম্পর্ক R, X-এর মধ্যে একটি বিভাজন নির্ণয় করে। এখানে মনে রাখতে হবে, বিভাজনের সেট্গুলি হল R-এর এক একটি তুল্যতা শ্রেণী।

এখন বিপরীত ক্ষেত্রে ধরা যাক $P = \{X_a, X_b, X_c, \ldots\ldots\}$

X-এর একটি বিভাজন : X সেটের ওপর একটি সম্পর্ক R যদি এমন ভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায় যে x R y সিদ্ধ হবে যদি কোনও একটি তুল্যতা শ্রেণীর x_i -এর জন্য, $x, y \in x_i$; এখন প্রমাণ করা যাবে যে R তুল্যতা সম্পর্ক সিদ্ধ করে।

যে কোনও $x \in X$ নেওয়া যাক। তখন $\exists X_i \in P$ যার জন্য $x \in X_i$

সুতরাং x R x সিদ্ধ হয় $\forall x \in X$ অর্থাৎ R সম্পর্কটি প্রতিবিম্বক।

আবার যদি x R y তখন $\exists X_i \in P$ যার জন্য $x \in X_i$ এবং $y \in X_i$ কিন্তু $x \in X_i$ এবং $y \in X_i \Rightarrow y \in X_i$ এবং $x \in X_i \Rightarrow y\,R\,x$

$\therefore$ R সম্পর্কটি সামঞ্জস্যপূর্ণ।

ধরা যাক x R y এবং y R z উভয়েই সিদ্ধ তখন R-এর সংজ্ঞা থেকে $\exists$ সাবসেট্ X_j এবং X_k (পৃথক হওয়া প্রয়োজনীয় নয়) যার জন্য $x, y \in X_j$ এবং $y, z \in X_k$ যেহেতু $y \in X_j$ এবং অবশ্যই $y \in X_k$ সেজন্য $X_j \cap X_k \neq \phi$ কিন্তু X_j এবং $X_K \in P$।

$\therefore\ X_J \cap X_K \neq \phi \Rightarrow X_j = X_k$

অবশ্যই $X_J = X_K \Rightarrow x, z \in X_J$

সেজন্য x R z সিদ্ধ।

অতএব প্রমাণিত হলো যে x R y এবং y R z $\Rightarrow$ x R z

$\therefore$ R সম্পর্কটি পরিযায়ী।

যেহেতু R প্রতিবিম্বিক, সামঞ্জস্যপূর্ণ এবং পরিযায়ী সুতরাং R একটি তুল্যতা সম্পর্ক।

অনুশীলনী–2

a) তুল্যতা সম্পর্কের মৌলিক উপপাদ্যটি বিবৃতিসহ প্রমাণ করুন।

b) এমন একটি সম্পর্কের উদাহরণ দিন যেটি সামঞ্জস্যপূর্ণ ও পরিযায়ী কিন্তু প্রতিবিম্বিক নয়।

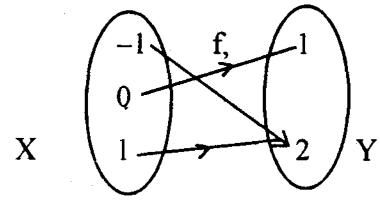
10.11 চিত্রণ (Mapping) বা অপেক্ষক (Function) :

ধরা যাক X ও Y দুটি অশূন্য সঞ্চয়ণ (Sets)। X-এর Y-তে চিত্রণ (mapping) বা X থেকে Y-তে অপেক্ষক (function) বলতে আমরা বুঝি এমন একটি নিয়ম (rule) যা x-এর প্রতিটি উপাদানের জন্য Y-এর একটিমাত্র উপাদান নির্ণয় করে। x যদি X-এর একটি উপাদান হয় তবে x-এর চিত্রণকে আমরা f(x) দিয়ে চিহ্নিত করি। f(x)-কে আমরা x-এর প্রতিবিম্ব (image) বা x-এর জন্য f-অপেক্ষকের মান (value of f at x) বলি। যেহেতু উল্লিখিত চিত্রণের মাধ্যমে X-এর প্রতিটি একক উপাদানের জন্য Y-এর একটিমাত্র উপাদানই পাওয়া যায় আমরা এই ধরণের চিত্রণকে বা অপেক্ষককে একমান বিশিষ্ট অপেক্ষক (single valued function) ও বলে থাকি। আমরা এই অনুচ্ছেদে শুধুমাত্র একমানবিশিষ্ট অপেক্ষক বা চিত্রণ নিয়েই আলোচনা করবো এবং সুবিধার্থে এই ধরনের অপেক্ষককে শুধুমাত্র অপেক্ষক বা চিত্রণ বলেই অভিহিত করবো। X-সঞ্চয়ণটিকে আমরা সাধারণত-সংজ্ঞাক্ষেত্র (domain) এবং Y-সঞ্চয়ণটিকে সহ-সংজ্ঞাক্ষেত্র (codomain) হিসেবে উল্লেখ করবো। X-এর সবকটি উপাদানের প্রতিবিম্বগুলির সংগ্রহটিকে আমরা ঐ অপেক্ষক বা চিত্রণটির বিস্তৃতি (range) বলবো এবং সেটিকে R(f) বা f(x) চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করবো। স্পষ্টত:

$R(f) = f(x) = \{f(x); x \in X\}$

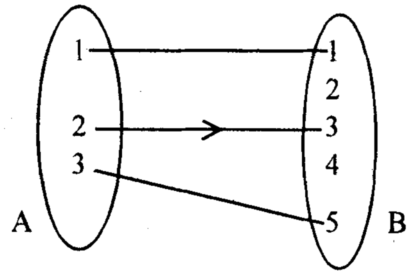
এই প্রসঙ্গে নিম্নলিখিত মন্তব্যগুলি অভিধেয় ঃ

(1) সংজ্ঞাক্ষেত্রের অনেকগুলি এমনকি সমস্ত উপাদানের একই প্রতিবিম্ব থাকতে পারে। যেমন নীচের $f : X \to Y$ অপেক্ষকটির ক্ষেত্রে ঘটেছে



$f(x) = x^2+1$

(2) সংজ্ঞাক্ষেত্রের সমস্ত উপাদানের প্রতিবিম্বগুলির সমষ্টি সহসংজ্ঞাক্ষেত্রের সমান না হতে পারে অর্থাৎ প্রতিবিম্বিত উপাদান ছাড়াও বাড়তি কিছু উপাদান সহসংজ্ঞাক্ষেত্রে থাকতেই পারে। যেমন নীচের $g : A \to B$ অপেক্ষকটির ক্ষেত্রে দেখা যাচ্ছে।



$f(x) = 2x-1$

এখানে $f(X) = \{1,3,5\} \subsetneq B$

এখন আরও দুটি চিত্রণ (Mapping) দেখা যাক।

এখন আরও দুটি চিত্রণ (Mapping) দেখা যাক :

$A = \{1, 2, 3, 4.......\}$, $B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$, যখন $f(x) = \frac{1}{x}$

$A = \{1, 2, 3, 4.......\}$, $B = \{1, 4, 9, 16.......\}$, যখন $f(x) = x^2$

উপরের দুটি চিত্রণে প্রতিটি পদ $a \in A$ এককভাবে চিত্রিত হচ্ছে B-এর আলাদা আলাদা পদে। এই ধরনের চিত্রণ-কে 'ঐকৈক চিত্রণ' (One-One mapping or injective mapping) বলা হয়। অর্থাৎ একটি চিত্রণকে আমরা ঐকৈক চিত্রণ (injective mapping) বলবো যদি ঐ চিত্রণে সংজ্ঞাক্ষেত্রের দুটি ভিন্ন উপাদান সবসময় সহসংজ্ঞাক্ষেত্রের দুটি ভিন্ন উপাদানে প্রতিবিম্বিত হয়। কোন চিত্রণে যদি সংজ্ঞাক্ষেত্রের একাধিক উপাদানের একই প্রতিবিম্ব হয় তবে প্রতিবিম্বিত হয় সেটিকে আমরা কখনও কখনও বহু-এক (many-one) চিত্রণ হিসেবে উল্লেখ করবো।

সহসংজ্ঞাক্ষেত্রের (Co-domain) প্রতিটি উপাদান যদি সংজ্ঞাক্ষেত্রের কোন একটি উপাদানের প্রতিবিম্ব (Image) হয় অর্থাৎ সহসংজ্ঞাক্ষেত্রে যদি কোনও অতিরিক্ত উপাদান না থাকে তবে ঐ চিত্রণটিকে সমাপতিত চিত্রণ (onto mapping or surjective mapping) বলা হয়।

অপরপক্ষে, যদি সহসংজ্ঞা ক্ষেত্রে অন্ততপক্ষে একটি উপাদানও সংজ্ঞাক্ষেত্রের কোনও উপাদানের প্রতিবিম্ব (image) না হয় তবে চিত্রণটিকে সহসংজ্ঞা ক্ষেত্রের ভেতরে সংজ্ঞাক্ষেত্রের অন্ত:পতিত চিত্রণ (into mapping) বলা হয়।

যদি $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ এবং

$f : A \rightarrow B$ এইভাবে সংজ্ঞায়িত হয় যে $f(x) = x+1$, তবে চিত্রণটি B সঞ্চয়ণের ওপর A-এর চিত্রণ বলা হবে।

ধরা যাক, $f : z \rightarrow z$ যেখানে $z =$ সকল পূর্ণসংখ্যার সেট্ এবং $f(x) = 2x$। এখানে স্পষ্ট দেখা যাচ্ছে যে সহসংজ্ঞাক্ষেত্রে অবিম্বিত পদ রয়েছে যেমন 3, 5, 7 ইত্যাদি। অতএব এই ধরনের চিত্রণ-কে সহসংজ্ঞাক্ষেত্রের ভেতরে সংজ্ঞাক্ষেত্রের চিত্রণ বা অন্তপাতিত চিত্রণ (into mapping) বলা হয়।

সহসংজ্ঞাক্ষেত্রের ভেতরে সংজ্ঞাক্ষেত্রের চিত্রণের সময় দেখা যাচ্ছে $f(A) \subsetneq B$,

সহসংজ্ঞাক্ষেত্রের ওপর সংজ্ঞাক্ষেত্রের চিত্রণের সময় স্পষ্টত: $f(A) = B$,

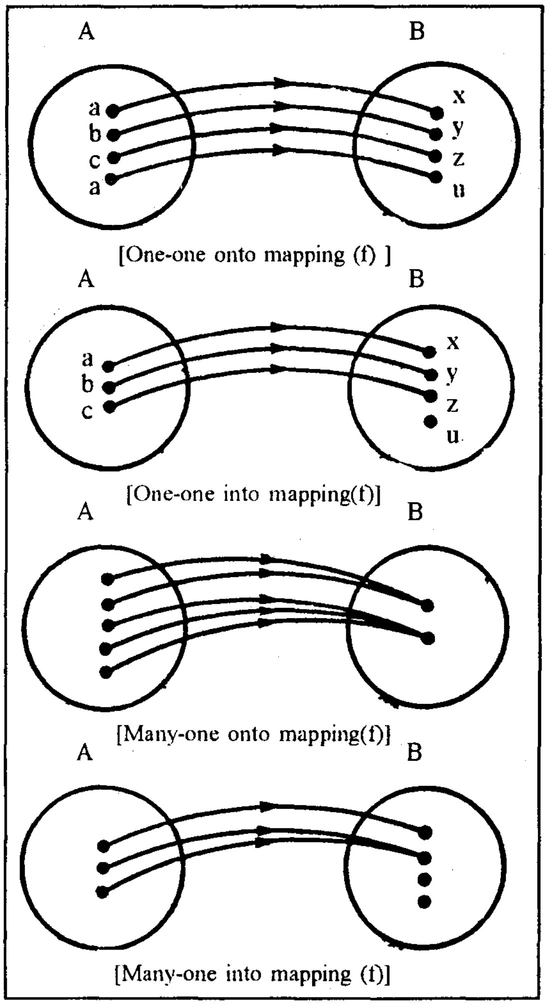
'ঐকৈক' এবং সমাপতিত (onto) চিত্রণ-কে একত্রে সমরূপ (Bijective) চিত্রণ বলা হয়।

ধরা যাক, A একটি অশূন্য সঞ্চয়ণ (non empty set) এবং f একটি এরূপ চিত্রণ যে

$$f : A \rightarrow A$$

অর্থাৎ এই যে, A সঞ্চয়ণের প্রত্যেকটি উপাদানগুলি নিজের ওপরেই চিত্রিত হচ্ছে। এরূপ চিত্রণ f -কে বলা হয় স্বভাব-চিত্রণ (end mapping) কিন্তু যদি $f(x) = x$ হয় তবে f-কে তখন বলা হয় অভেদ চিত্রণ (identity mapping)। অভেদ চিত্রণ অবশ্যই ঐকৈক এবং সহসংজ্ঞাক্ষেত্রের ওপর সংজ্ঞাক্ষেত্রের সমাপতিত চিত্রণ।

নীচের চিত্রণের ছবিগুলি ভালোভাবে লক্ষ্যণীয়।



[One-one onto mapping (f)]

চিত্র 10.1

এৈকেক সমাপিত চিত্রণ

[One-one into mapping(f)]

চিত্র 10.2

এৈকেক অন্তঃপতিত চিত্রণ

[Many-one onto mapping(f)]

চিত্র 10.3

বহু-এক সমাপতিত চিত্রণ

[Many-one into mapping (f)]

চিত্র 10.4

বহু-এক অন্তঃপতিত চিত্রণ

10.12 বিপরীত চিত্রণ (Inverse mapping)

ধরা যাক, $f : X \rightarrow Y$ একটি সমরূপ (bijective) চিত্রণ। এখন Y থেকে X-এ পতিত সেই চিত্রণটিকে f-এর বিপরীত চিত্রণ বলবো যা x-এর প্রতিবিম্ব f(x)-কে পুনরায় x-এই বিম্বিত করে এবং f-এর বিপরীত চিত্রণকে আমরা f^{-1} দ্বারা প্রকাশ করবো।

স্পষ্টতই সংজ্ঞানুসারে $f^{-1}(f(x)) = x$

উপপাদ্য I

ধরা যাক X,Y দুটি সঞ্চয়ণ এবং $f : X \rightarrow Y$

চিত্রণটি সমরূপ (bijective)।

তখন $f^{-1} : Y \rightarrow X$ চিত্রণটিও সমরূপ হবে।

প্রমাণ : প্রথমে আমরা প্রমাণ করব যে, f^{-1} হল 'ঐকৈক (injective)।

ধরা যাক y_1, y_2 y সেটের দুটি ভিন্ন পদ।

এবং $f^{-1}(y_1) = x_1$ এবং $f^{-1}(y_2) = x_2$ যেখানে $x_1, x_2 \in X$

তখন $y_1 = f(x_1)$ এবং $y_2 = f(x_2)$

যেহেতু f 'ঐকৈক', $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

অর্থাৎ $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow y_1 \neq y_2$

অতএব f^{-1} 'ঐকৈক'

এখন আমরা প্রমাণ করব যে f^{-1} সমাপতিত (Subjective)ও বটে।

ধরুন x, X সঞ্চয়ণের যে-কোনও একটি উপাদান।

তখন $\exists, y \in Y$ এরূপ যেন $y = f(x)$ অথবা $x = f^{-1}(y)$

অতএব, x হল f^{-1} সাপেক্ষে y পদের প্রতিবিম্ব যখন $y \in Y$

অতএব f^{-1} সমাপতিত (surjective) চিত্রণ।

উপপাদ্য II

যদি $f : X \to Y$ চিত্রণটি সমরূপ হয় তবে $f^{-1} : Y \to X$ চিত্রণটি অনন্য (Unique) হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক, $g : Y \to X$ এবং $h : Y \to X$ হল X-এর দুটি বিপরীত চিত্রণ। আমরা প্রমাণ করব যে, $g = h$

ধরা যাক Y সঞ্চয়ণের যে কোনও একটি পদ y।

এবং $g(y) = x$ এবং $h(y) = x_2$

যেহেতু g, f -এর বিপরীত চিত্রণ, অতএব

$$g(y) = x_1 \Rightarrow f(x_1) = y$$

অবশ্যই যেহেতু, h, f -এর বিপরীত চিত্রণ

$$h(y) = x_2 \Rightarrow f(x_2) = y$$

$$\therefore \; f(x_1) = f(x_2) = y$$

যেহেতু f 'ঐকৈক', $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$\Rightarrow g(y) = h(y) \;\; \forall y \in y.$$

অতএব, g=h

10.13 মিশ্র চিত্রণ (Composite mapping)

ধরা যাক x, y, z তিনটি সঞ্চয়ণ এবং

$f: X \to Y$ এবং $g: Y \to Z$

তখন f চিত্রণের অধীন একটি উপাদান $x \in X$ চিত্রিত হচ্ছে $y = f(x) \in Y$ উপাদান, যেটি আবার চিত্রিত হচ্ছে g চিত্রণের দ্বারা $g \in Z$ উপাদান এমনভাবে যেন

$z = g(y) = g(f(x))$

এই নতুন চিত্রণটিকে বলা হয় f এবং g-এর মিশ্র চিত্রণ। এটিকে সূচিত করা হয় g o f দ্বারা। এটির সংজ্ঞা নিম্নরূপ ঃ-

অতএব, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

দ্রষ্টব্য ঃ মিশ্র চিত্রণ বিনিময় সূত্র (Commutative rule) মেনে চলে না (প্রমাণ করুন)।

অনুশীলনী- 3

(a) বিপরীত চিত্রণ কখন সম্ভব?

(b) 'এক বনাম এক' চিত্রণের উদাহরণ দিন?

উপপাদ্য : ধরাযাক, X,Y,Z,W চারটি সঞ্চয়ণ এবং f, g, h তিনটি চিত্রণ যেখানে

$f: X \to Y, \quad g: Y \to Z, \quad h: Z \to W$

তখন, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

প্রমাণ : এখন $[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)), \quad \forall x \in X$

[মিশ্র চিত্রণের সংজ্ঞা থেকে]

$= h(gf(x))$ ["]

$= h(g \circ f)(x))$ ["]

$= (h \circ (g \circ f))(x)$ ["], $\forall x \in X$

$\therefore (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

10.14 উদাহরণমালা

(1) ধরুন Q হল সমস্ত মূলদ সংখ্যার সেট্ এবং $f: Q \to Q$ সংজ্ঞায়িত হলো $f(x) = 2x+3, \ \forall x \in R$ দেখান যে, f হল 'এক বনাম এক' এবং সহসংজ্ঞাক্ষেত্রের ওপর সংজ্ঞাক্ষেত্রের চিত্রণ। f^{-1} নির্ণয় করুন।

সমাধান :-

ধরুন $x, y \in R$ যেখানে $x \neq y$

$x \neq y \Rightarrow 2x+3 \neq 2y+3$

$\Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$\Rightarrow f$ হল 'এক বনাম এক' চিত্রণ।

ধরুন, y যে কোনও একটি বাস্তব সংখ্যা। যদি y = 2x+3 হয় তবে $x = \frac{y-3}{2}$, সেটি অবশ্যই বাস্তব সংখ্যা।

$$\therefore \ f\left(\frac{y-3}{2}\right) = y$$

$\therefore f$ চিত্রণের সাপেক্ষে $\frac{y-3}{2}$ পদের প্রতিবিম্ব (Image) y অতএব f অবশ্যই সহসংজ্ঞাক্ষেত্রের ওপর সংজ্ঞাক্ষেত্রের চিত্রণ।

যেহেতু f 'এক বনাম এক' এবং কো-ডোমেনের ওপর ডো-মেনের চিত্রণ, অতএব f^{-1}-এর অস্তিত্ব আছে। ধরুন f চিত্রণের সাপেক্ষে x পদের প্রতিবিম্ব (Image) x। তখন f(x) = y সেজন্য $x = f^{-1}(y)$ কিন্তু $x = \frac{y-3}{2}$

$\therefore \ f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$ অতএব f^{-1} এর সূত্র, $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}, \ (\forall y \in R)$

(2) ধরা যাক $f : R \to R : f(x) = \sin x$

$g : R \to R : g(x) = x^2$

তখন g o f চিত্রণটি নির্ণয় করুন।

সমাধান :-

$g \circ f : R \to R : (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sin x) = \sin^2 x$

(3) ধরুন $f : R \to R : f(x) = x^2$

$g : R \to R : g(x) = +3$

দেখান যে, $g \circ f \neq f \circ g$

সমাধান :-

$(g \circ f)(2) = g[f(2)] = g(2^2) = g(4) = 4+3 = 7$

$(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f(2+3) = f(5) = 5^2 = 25$

সাধারণভাবে,

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = x^2+3$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x+3) = (x+3)^2$

$\therefore\ g \circ f \neq f \circ g$ (প্রমাণিত)

10.15 সারাংশ (Summary)

যে কোনও একটি সঞ্চয়ণের A-এর ওপর একটি সম্পর্ক R-কে তুল্যতা সম্পর্ক বলা হয় যদি সম্পর্কটি

(i) প্রতিবিম্বিক (Reflexive Relations)

(ii) প্রতিসম (Symmetric Relations)

এবং (iii) পরিযায়ী সম্পর্ক (Transitive Relations) সিদ্ধ করে।

তুল্যতা সম্পর্কের মৌলিক উপপাদ্য (Fundamental theorem on equivalence Relation)-টি হল নিম্নরূপ:-

যে কোনও একটি অশূন্য সেট্ X-এর মধ্যে একটি তুল্যতা সম্পর্ক R, X-এর একটি বিভাগ (Partition) নির্ণয় করে এবং বিপরীতক্রমে, X-এর একটি বিভাগ R-এর মধ্যে তুল্যতা সম্পর্ক ঘটাতে প্রবৃত্ত করে।

চিত্রণের বিভিন্ন রূপগুলি এই রকম :-

1. 'এক-এক' (one one or injective) চিত্রণ

2. 'বহু-এক' (Many one) চিত্রণ

3. সহসংজ্ঞাক্ষেত্রের ওপর সংজ্ঞাক্ষেত্রের চিত্রণ (onto mapping)

4. সহসংজ্ঞাক্ষেত্রের ভেতরে সংজ্ঞাক্ষেত্রের চিত্রণ (into mapping)

ধরা যাক, $f : X \rightarrow Y$ একটি 'এক বনাম এক' (one one) এবং সহসংজ্ঞাক্ষেত্রের ওপর সংজ্ঞাক্ষেত্রে চিত্রণ। তখন এই চিত্রণটিকে

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

[যেখানে $\forall y \in Y,\ \forall x \in X$ এরূপ যেন $f(x) = y$] বলা হয় f-এর বিপরীত চিত্রণ (Inverse mapping).

মিশ্র চিত্রণ (Composite mapping) বিনিময় সূত্র (Commutative rule) মেনে চলে না।

ধরা যাক X, Y, Z, W চারটি সেট্ এবং f, g, h তিনটি চিত্রণ

যেখানে $f : X \rightarrow Y,\ g : Y \rightarrow Z,\ h : Z \rightarrow W$

তখন, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

10.16 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

(i) ধরা যাক $A = \{1,2,3\}$

এবং ধরা যাক $R_1 = \{1,1), (2,3), (3,1), (2,2), (1,2), (3,3)\}$

$R_2 = \{(2,2), (3,1), (1,3)\}$

$R_3 = \{(2,2)\}$

$R_4 = \{(1,2)\}$

$R_5 = \{(1,3), (3,3)\}$

$R_6 = A \times A$

$R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$, কি কি সম্পর্ক সিদ্ধ করে ?

(i) প্রতিবিম্ব সম্পর্ক (Reflexive Relation)

(ii) প্রতিসম সম্পর্ক (Symmetric Relation)

(iii) পরিযায়ী সম্পর্ক (Transitive Relation)

(2) ধরা যাক R = সকল বাস্তব সংখ্যার সঞ্চয়ণ।

একটি সম্পর্ক x R y যদি $x^2+y^2=1$ । দেখান যে R প্রতিসম সম্পর্ক সিদ্ধ করে কিন্তু প্রতিবিম্ব ও পরিযায়ী সম্পর্ক সিদ্ধ করে না।

(3) ধরা যাক $X=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $y=[-1,1]$, দেখান যে

$f: X \to Y : f(x) = \sin x,\ (x \in X)$ হল 'এক বনাম এক' এবং কো-ডোমেনের ওপর ডোমেনের চিত্রণ। বিপরীত চিত্রণ (Inverse map) $f^{-1}: Y \to X$ সংজ্ঞায়িত করুন।

(4) নীচের চিত্রণগুলির ক্ষেত্রে কোনগুলি 'এক বনাম এক' চিত্রণ

(a) $f(x) = 3$ (b) $f(x) = 3x+2$

(c) $f(x) = e^x$ (d) $f(x) = \sin x$

10.17 উত্তরমালা

সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

অনুশীলনী-1

(a) 10.3, 10.4, 10.5 দেখুন।

(b) 10.6 দেখুন।

অনুশীলনী-2

(a) 10.10 দেখুন।

(b) 10.5 -এর উদাহরণ 2 দেখুন।

অনুশীলনী-3

(a) 'এক বনাম এক' এবং কো-ডোমেনের ওপর ডোমেনের চিত্রণের ক্ষেত্রেই একমাত্র বিপরীত চিত্রণ সম্ভব।

(b) 10.11 দেখুন।

(1) R_1 প্রতিবিম্ব সম্পর্ক করে কিন্তু প্রতিসম ও পরিযায়ী সম্পর্ক সিদ্ধ করে না।

R_2 প্রতিসম সম্পর্ক সিদ্ধ করে কিন্তু প্রতিবিম্ব ও পরিযায়ী সম্পর্ক সিদ্ধ করে না।

R_3 প্রতিসম এবং পরিযায়ী সম্পর্ক সিদ্ধ করে কিন্তু প্রতিবিম্ব সম্পর্ক সিদ্ধ করে না।

R_4 পরিযায়ী সম্পর্ক সিদ্ধ করে কিন্তু প্রতিবিম্ব ও সামঞ্জস্য সম্পর্ক সিদ্ধ করে না।

R_5 পরিযায়ী সম্পর্ক সিদ্ধ করে কিন্তু প্রতিসম ও প্রতিবিম্ব সম্পর্ক সিদ্ধ করে না।

R_6 প্রতিবিম্ব সম্পর্ক, সামঞ্জস্য সম্পর্ক এবং পরিযায়ী সম্পর্ক সিদ্ধ করে।

(2) R প্রতিবিম্ব সম্পর্ক সিদ্ধ করে না, যেহেতু $(1,1) \notin R$ $(\because 1^2 + 1^2 = 2 \neq 1)$

R অবশ্যই পরিযায়ী সম্পর্ক সিদ্ধ করে না যেহেতু $(1,0) \in R$ এবং $(0,1) \in R$ কিন্তু $(1,1) \notin R$, R প্রতিসম সম্পর্ক সিদ্ধ করে কারণ যদি x R y, তখন $x^2+y^2 = 1$ এবং $y^2+x^2 = 1$ এবং সেজন্য y R x ।

(3) ধরা যাক $x_1, x_2 \in X$ এরূপ যেন $x_1 \neq x_2$

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ পরিসরে যেহেতু $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \sin x_1 \neq \sin x_2$

$$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

অতএব f অবশ্যই 'এক বনাম এক' ।

আবার যদি y, $[-1,1]$ $(= Y)$ পরিসরে কোনও বাস্তব সংখ্যা হয়, তখন সেখানে এরূপ একটি বাস্তব সংখ্যার অস্তিত্ব থাকে যেন $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $(= x)$ এরূপ যেন $\sin x = y$ অতএব f কো-ডোমেনের ওপর ডোমেনের চিত্রণ। অতএব f হল 'এক বনাম এক' এবং কো-ডোমেনের ওপর ডোমেনের চিত্রণ। অর্থাৎ f^{-1}-এর অস্তিত্ব আছে। বিপরীত চিত্রণ f^{-1} নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত হয়

$$f^{-1}(y) = \sin^{-1} y, \ (\forall y \in Y)$$

(4) a) 'এক বনাম এক' চিত্রণ নয়।

b) 'এক বনাম এক' চিত্রণ।

c) 'এক বনাম এক' চিত্রণ।

d) 'এক বনাম এক' চিত্রণ নয়।

একক 11 ❑ দল (Group) সংজ্ঞা, মূলধর্ম

গঠন

11.1 প্রস্তাবনা

গণিতের বিভিন্ন ধারার মধ্যে ''বিমূর্ত বীজগণিত'' বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য, পুরাতনী বীজগণিতে যে সকল প্রক্রিয়া প্রযুক্ত হয়, তার ভিত্তি নিয়ে আলোচনা, বিভিন্ন গাণিতিক তন্ত্রের গঠনশৈলী, স্বীকারভিত্তিক (axiomatic) পদ্ধতিতে বিশ্লেষণ, প্রয়োগ ইত্যাদিই বিমূর্ত বীজগণিতের আলোচ্য বিষয়বস্তু।

11.2 উদ্দেশ্য

বিমূর্ত বীজগণিতে বীজগণিতের মূল বা ভিত্তি সম্পর্কে বিভিন্ন ধ্যান-ধারণা মূর্ত হয়েছে। তাই বিমূর্ত বীজগণিত আয়ত্ত করলে বীজগণিতের অন্যান্য শাখায় সহজেই প্রবেশ এবং অনুধাবন করা সম্ভব।

11.3 পাঠ্যবস্তুর গঠন

11.3 (a) বিন্যাস দল (Permutation Group)

সংজ্ঞা ঃ বিন্যাস (Permutation) ঃ মনে কর s একটি সসীম সেট। একটি সমরূপ অপেক্ষক (bijective mapping) $f : s \to S$-কে S-এর একটি বিন্যাস বলা হয়। যদি $s = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ হয়, তবে s এর বিন্যাসের সংখ্যা $n!$। একটি বিন্যাস f কে নিম্নলিখিত উপায়ে প্রকাশ করা হয়ে থাকে।

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \cdots & f(a_n) \end{pmatrix}$$

অভেদ অপেক্ষক (identity mapping) একটি সমরূপ অপেক্ষক হওয়ায় এটিকে অভেদ বিন্যাস (identity permutation) বলা হয়। এটিকে i দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ $i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$

মনে করি $s = \{1, 2, 3, 4\}$। আমরা একটি বিন্যাস নিম্নলিখিত উপায়ে সংজ্ঞায়িত করব ঃ $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 1$, $f(4) = 3$

তাহলে $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ বা, $f = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

বা, $f = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ইত্যাদি আকারে প্রকাশ করতে পারি।

কিন্তু সাধারণত প্রথম আকারটিই সর্বাধিক প্রচলিত। এই পদ্ধতি ছাড়া f কে কখনও কখনও

$f = (1, 2\ 4\ 3) = (2\ 4\ 3\ 1)$ ... ইত্যাদি আকারেও প্রকাশ করা হয়ে থাকে। এর অর্থ $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(4) = 3$, $f(3) = 1$, যেখানে f, $s = \{1, 2, 3, 4\}$ এর একটি বিন্যাস। যদি $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ হয় তবে আমরা α কে $\alpha = (1)\ (2\ 4)\ (3)$ বা সংক্ষেপে $\alpha = (2\ 4)$ দ্বারা প্রকাশ করব।

সুতরাং $g = (1\ 3)$ যদি $s = \{1, 2, 3, 4\}$ সেটের বিন্যাস হয় তবে $g(1) = 3$, $g(2) = 2$, $g(3) = 1$, $g(4) = 4$

বিন্যাসের গুণন ঃ মনে করি s একটি সসীম সেট। $f : s \to S$ এবং $g : s \to S$ s-এর দুটি বিন্যাস। যেহেতু f-এর বিস্বাঞ্চল (range of f) = g-এর সংজ্ঞাঞ্চল (domain of definition) সুতরাং

$g.f : S \to s$ যথার্থ ভাবে সংজ্ঞায়িত। এটি s-এর একটি বিন্যাস। একই কারণে f.g, s-এর একটি বিন্যাস যদি

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \cdots & f(a_n) \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ g(a_1) & g(a_2) & \cdots & g(a_n) \end{pmatrix}$$

তাহলে f ও g এর সংযোজন $f.g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ f(g(a_1)) & f(g(a_2)) & \cdots & f(g(a_n)) \end{pmatrix}$

এবং $gf = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ g(f(a_1)) & g(f(a_2)) & \cdots & g(f(a_n)) \end{pmatrix}$

আমরা জানি $g.f \neq f.g$ সাধারণ ভাবে, কিন্তু $f(gh) = (fg)h$ সর্বদা সত্য।

সংজ্ঞা বিপরীত অপেক্ষক ঃ মনে করি s একটি সসীম সেট ও f, s এর একটি বিন্যাস। f বাইজেকটিভ অপেক্ষক হওয়ায় f^{-1} যথার্থভাবে সংজ্ঞায়িত এবং $f^{-1} : s \to s$ অর্থাৎ f^{-1} s এর একটি বিন্যাস।

যদি $f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \cdots & f(a_n) \end{pmatrix}$ হয় তবে

$f^{-1} = \begin{pmatrix} f(a_1) & f(a_2) & \cdots & f(a_n) \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ হবে।

উদাহরণ 1. যদি $s = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ হয় তবে,

$fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ যেহেতু $fg(1) = f(2) = 3,\ fg(2) = f(3) = 4$ ইত্যাদি

$gh = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ যেহেতু $gh(1) = g(h(1)) = g(4) = 1$

$gh(2) = g(h(2)) = g(2) = 3$ ইত্যাদি

$$\therefore\ f(gh) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

এবং $(f\,g)h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

স্পষ্টত $f(gh) = (fg)h$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

সংজ্ঞা চক্র (cycle) ঃ মনে করি $s = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$। s-এর একটি বিন্যাস f-কে একটি r চক্র বলা হবে যদি s-এ r সংখ্যক পদ $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}$ থাকে যাদের মধ্যে নিম্নলিখিত সম্পর্কগুলি বিদ্যমান থাকে ঃ

$$f(a_{i_1}) = a_{i_2},\ f(a_{i_2}) = a_{i_3}, \cdots f(a_{i_{j-1}}) = f(a_{i_r}) \cdots f(a_{i_r}) = a_{i_1}$$

উদাহরণ 2 ঃ মনে করি $s = \{1, 2, 3, 4\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

তাহলে $f = (2\ 3\ 4)$, $g = (2\ 4)$

সুতরাং f একটি 3-চক্র ও g একটি 2-চক্র।

সংজ্ঞা বিন্যাসের ঘাত ঃ যদি f, s এর একটি বিন্যাস হয় তবে $f^2 = p.\ f$, s-এর একটি বিন্যাস হবে, সংযোজন সূত্র (associativc law) থেকে আমরা পাই $f^n = f.f \ldots f$. এটিও s-এর একটি বিন্যাস। একই ভাবে f^{1} ও s-এর একটি বিন্যাস। $f^{-2} = f^{-1}.\ f^{-1}$, s-এর একটি বিন্যাস। $f^{-n} = f^{-1}.\ f^{-1} \ldots f^{-1}$ হিসাবে সংজ্ঞায়িত করব। এটিও s-এর একটি বিন্যাস।

সংজ্ঞা ঃ দ্বিচক্র (tansposition) ঃ একটি 2-চক্রকে দ্বিচক্র বা ট্রান্সপোজিশন বলে। এবার আমরা দুটি উপপাদ্য বিবৃত করব, যাদের প্রমাণ সিলেবাস বহির্ভূত।

উপপাদ্য 1 ঃ কোন একটি সসীম সেটের বিন্যাস সর্বদাই একটি চক্র হবে অথবা কতকগুলি বিচ্ছিন্ন (disjoint) চক্রের গুণন হিসেবে প্রকাশ করা যাবে।

উপপাদ্য 2 ঃ কোন একটি সসীম সেটের বিন্যাস কিছু সংখ্যক (সসীম কিন্তু নির্দিষ্ট নয়)। দ্বিচক্রের গুণন হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ 3 ঃ 1-চক্র অর্থাৎ অভেদ বিন্যাসকে $(a_r\ a_s)(a_s\ a_r)$ বা $(a_r a_s)\ (a_s a_r)(a_m a_n)(a_n a_m)$ অথবা $(a_r a_m)(a_m a_r)(a_m a_n)(a_n a_m)(a_p a_q)(a_q a_p)$ ইত্যাদি আকারে প্রকাশ করা যায়।

একটি 2-চক্র নিজেই একটি ট্রান্সপোজিশন বা দ্বিচক্র।

একটি 3-চক্র $(a_1\ a_2\ a_3) = (a_1\ a_3)\ (a_1\ a_2)$

একটি n-চক্র $(a_1\ a_2\ a_3\ \ldots .\ a_n) = (a_1\ a_n)(a_1 a_{n-1}) \ldots (a_1\ a_3)(\ a_1\ a_2)$

সংজ্ঞা ঃ একটি বিন্যাসকে (অ) যুগ্ম বিন্যাস বলা হবে যদি এটিকে (অ) যুগ্ম সংখ্যক দ্বিচক্রের গুণন হিসেবে প্রকাশ করা যায়।

উপপাদ্য 3 ঃ কোন একটি সেটের (সেটে অন্তত দুটি পদ থাকবে) যুগ্ম বিন্যাসের সংখ্যা 3 অযুগ্ম বিন্যাসের সংখ্যা সমান হবে।

উদাহরণ 4 ঃ s = (1, 2, 3) সেটে বিন্যাসগুলি নির্ণয় করুন ও উপপাদ্য 3-এর যথার্থতা বিচার করুন।

s সেটের বিন্যাসগুলি যথাক্রমে ঃ

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \rho_0\ ;\ \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)\ ;\ \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 3)$$

$$\rho_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3)\ ;\ \rho_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)$$

যুগ্ম বিন্যাসগুলি, ρ_0, ρ_1, ρ_2

অযুগ্ম বিন্যাসগুলি ρ_3, ρ_4, ρ_5

উপপাদ্য 3 টি সত্য প্রমাণিত হল।

সংজ্ঞা ঃ প্রতিসমদল (Symmetric Group) ঃ মনে করি $\{1, 2, \ldots, n\}$ এই সঞ্চয়নটির সকল বিন্যাস কে S_n দ্বারা চিহ্নিত করা হল। এখন আমরা প্রমাণ করব বিন্যাসের সংযোজনের (Composition) পরিপ্রেক্ষিতে S_n সঞ্চায়নটি একটি দল (group) গঠন করে।

a_1. f.g ; S_n সঞ্চয়নের বিন্যাস হলে আমরা প্রমাণ করেছি ρ.g ও s সঞ্চয়নটির বিন্যাস হবে।

a_2 অপেক্ষক সংযোজক সংযোজন (associative) সূত্র মেনে চলায়, বিন্যাসগুলিও সংযোজন সূত্র মেনে চলে।

a_3 অভেদ অপেক্ষক এই সঞ্চয়নের একটি পদ হওয়ায় এটি স্থিরক (identity)-এর কাজ করে।

a_4 যদি $f \in s_n$ হয় তবে $f^{-1} \in s_n$ পূর্বেই প্রমাণ করা হয়েছে।

সুতরাং (s, .) একটি দল গঠিত হল। এই দলটিকে n ঘাতের প্রতিসম দল (symmetric group of degree) বলা হয় এবং s_n দ্বারা সূচিত করা হয়।

উদাহরণ 5 ঃ 3-ঘাতের প্রতিসম দল s_3

আগেই দেখেছি s_3 তে ρ_0, ρ_1, ρ_2, ρ_3 ও ρ_5 পদগুলি আছে। s_3 সঞ্চয়নটির পদগুলির জন্য সংযোজন টেবিল (composition table) নীচে দেওয়া হল।

$\cdot$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_5	ρ_3	ρ_4
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_4	ρ_5	ρ_3
ρ_3	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_0	ρ_1	ρ_2
ρ_4	ρ_4	ρ_5	ρ_3	ρ_2	ρ_0	ρ_1
ρ_5	ρ_5	ρ_3	ρ_4	ρ_1	ρ_2	ρ_0

টেবিল থেকে একথা পরিষ্কার যে, ρ_0 এটির স্থিরক (identity)

ρ_1 এর বিপরীত পদ ρ_2

ρ_2 এর বিপরীত পদ ρ_1

ρ_3 এর বিপরীত পদ ρ_3

ρ_4 এর বিপরীত পদ ρ_4

ρ_5 এর বিপরীত পদ ρ_5

কিন্তু মূলকর্ণের পরিপ্রেক্ষিতে পদগুলি প্রতিসম না হওয়ায় এটি বিনিময় যোগ্য দল (commutative) নয়।

সুতরাং এটি একটি 6-ঘাতকের অ-বিনিময়যোগ্য (non-commutative) দল।

উদাহরণ ঃ মনে করি $s = \{1, 2, ..., n\}$

এই সঞ্চয়নের যুগ্ম বিন্যাসগুলি বিন্যাস সংযোজনের পরিপ্রেক্ষিতে একটি দল গঠন করে, যাকে আমরা বলি পালাক্রমিক (alternating) দল এবং A_n দ্বারা সূচিত করি। এই A_n সঞ্চয়নের $\frac{1}{2}(n!)$ সংখ্যক পদ থাকবে।

A_4 দলে $\frac{1}{2}(4!)$ সংখ্যক পদ থাকবে

A_3 দলে $\frac{1}{2}(3!)$ অর্থাৎ তিনটি পদ থাকবে এবং পদগুলি

যথাক্রমে $\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\rho_1 = (1\ 2\ 3)$ ও $\rho_2 = (1\ 3\ 2)$

প্রশ্নাবলী ঃ

1. যদি $s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ হয় এবং

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix},\ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$ হয় তবে,

$f.g$, $g.f$, f^{-1} g^{-1} বিন্যাসগুলি দেখান f ও g কি যুগ্ম বিন্যাস হবে?

উত্তর ঃ $fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ gf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$f = (1\ 2\ 4\ 5\ 6) = (1\ 6)\ (1\ 5)\ (1\ 4)\ (1\ 2)$, যুগ্ম বিন্যাস

$g = (2\ 6)\ (3\ 4\ 5) = (2\ 6)\ (3\ 5)\ (3\ 4)$ অযুগ্ম বিন্যাস।

2. S_3-এর উপদগুলি (sub groups) নির্ণয় করুন।

উত্তর ঃ $\{\rho_0\}$, s_3, $\{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$, $\{\rho_0, \rho_3\}$, $\{\rho_0, \rho_4\}$, $\{\rho_0, \rho_5\}$

3. যদি $s = \{1, 2, 3, 4\}$, $\alpha = (13)$ ও $\beta = (2\ 3\ 4)$ হয় তবে x এর মান বার করুন, যখন $\alpha . x = \beta$ হয়।

উত্তর ঃ $\alpha . x = \beta$ হওয়ায় $x = \alpha^{-1}\beta$ আবার $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$ সুতরাং $\alpha^{-1} \cdot \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore x = (1\ 3\ 4\ 2)$

11.3.1 একটিমাত্র দ্বিপদ-প্রক্রিয়া-বিশিষ্ট গাণিতিক-তন্ত্র বা বীজগাণিতিক শৈলী : (Mathematical System/Algebraic Structure)

দল বা যুথ (group) : সংজ্ঞা, উদাহরণ

দ্বিপদ প্রক্রিয়া (Binary composition / operation)

ধরা যাক A একটি অশূন্য (non-empty) সঞ্চয়ণ (set)। $A \times A$ থেকে A সেটে প্রজ্ঞাত যে কোনও একমানবিশিষ্ট চিত্রণ (single-valued mapping)-কে ঐ A সেটের একটি দ্বিপদ-প্রক্রিয়া বলা হয়। ঐ চিত্রণকে 'f' দিয়ে চিহ্নিত করলে, $f : A \times A \rightarrow A$। স্পষ্টত: কোনও দ্বিপদ প্রক্রিয়া A সেট-এর যে কোনও দুটি ক্রমিত (orderd) উপাদান থেকে A-এর মধ্যে একটি অনন্য (unique) উপাদান উৎপন্ন করে। '⊙' চিহ্নটি

উল্লিখিত দ্বিপদ-প্রক্রিয়াকে নির্দেশ করলে, u ও v ক্রমিত উপাদানদুটি ω উৎপন্ন করলে আমরা লিখি :

$$u \odot v = \omega, \qquad u, v, \omega \in A$$

বি: দ্র: (i) যদি $\omega \notin A$, তখন বলা হয় সঞ্চয়ণ A ঐ দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে "আবদ্ধ" (closed) নয়। যেমন, J বিজোড় পূর্ণসংখ্যার সেট হলে, $a, b \in J$, $a+b \notin J$; '+' চিহ্নটি যোগক্রিয়া বোঝায় কারণ, দুটি বিজোড় সংখ্যার যোগফল সর্বদাই যুগ্মসংখ্যা, যেমন 3+5 = 8; $(2m+1) + (2n+1) = 2(m+n) \notin J$

(ii) $u \odot v$ এবং $v \odot u$ সবসময় সমান হয় না। যেমন যদি $u, v \in z^+$, ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট হয় এবং $u \odot v = u - v$ হলে $u - v \neq v - u$, অর্থাৎ $u \odot v \neq v \odot u$। আবার $\odot$ যদি পাটীগাণিতিক গুণনক্রিয়া নির্দেশ করে, $uv = vu$, অর্থাৎ $u \odot v = v \odot u$। $u \odot v = v \odot u$ হলে, ঐ প্রক্রিয়াকে বিনিময়যোগ্য (commutative) বলা হয় যেমন, z সেটে গুণন প্রক্রিয়া বিনিময়যোগ্য, $3 \times 7 = 7 \times 3$

উদা 1. ধরা যাক Z সকল পূর্ণসংখ্যার সঞ্চয়ণ;

$\forall u, v \in Z$, $u \,.\, v = u.v$ এর গ.সা.গু

দুটি পূর্ণসংখ্যার গ.সা.গু পূর্ণসংখ্যাই হয়; কাজেই $u \circ v \in V$

$\therefore$ 'আবদ্ধ' ধর্ম বজায় আছে।

উদা 2. ধরা যাক Z সকল পূর্ণসংখ্যার সঞ্চয়ণ

$\forall u, v \in Z$, $u \circ v = u - v$, 'o' চিহ্নটি পাটীগণিতিক বিয়োগ প্রক্রিয়া নির্দেশ করে। দুটি পূর্ণসংখ্যার বিয়োগফল বা অন্তর অবশ্যই একটি পূর্ণসংখ্যা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক। $\therefore$ $u \circ v \in Z$;

Z সেটটি বিয়োগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে 'আবদ্ধ' (Closed)। কিন্তু এটি বিনিময়যোগ্য নয়, কারণ $u - v \neq v - u$, যেমন $7-5 \neq 5-7$

বি: দ্র: 'বিয়োগ' প্রক্রিয়াটি Z-এ আবদ্ধ কিন্তু Z^--এ আবদ্ধ নয়।

উদা 3. ধরা যাক R সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট এবং সজ্ঞাত দ্বিপদ প্রক্রিয়াটি 'যোগ', অর্থাৎ $\forall u, v \in R$, $u \circ v = u + v$ ('+' চিহ্নটি যোগক্রিয়া নির্দেশ করে)। স্পষ্টত: দুটি বাস্তব সংখ্যা u এবং v -এর জন্য সবসময় একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা ω বিদ্যমান এমনভাবে যে

$$u \circ v = u + v = \omega$$

$\therefore$ R সেটটি যোগ সাপেক্ষে 'আবদ্ধ'।

আবার, $u + v = v + u$; $\therefore$ যোগ R সেটে বিনিময়যোগ্য।

গাণিতিক তন্ত্র বা বীজগাণিতিক শৈলী (Mathematical System or Algebraic Structure)

কোনও একটি অশূন্য (non-empty) সেটে যদি এক বা একাধিক দ্বিপদ-প্রক্রিয়া সজ্ঞাত থাকে এবং কতিপয় স্বতঃসিদ্ধ আরোপিত থাকে, তবে সেই সঞ্চয়ণকে বলা হয় গাণিতিক তন্ত্র বা বীজগাণিতিক শৈলী।

দলতত্ত্ব (Group Theory)

দল (Group) :

একটিমাত্র দ্বিপদ প্রক্রিয়া বিশিষ্ট কোনও গাণিতিক তন্ত্রে যদি নিম্নোক্ত চারটি স্বত:সিদ্ধ (axions) সত্য হয়, তবে তাকে ঐ দ্বিপদ-প্রক্রিয়া সাপেক্ষে দল, যূথ বা গ্রুপ (Group) বলা হয়। সাধারণত: (G,O) চিহ্নটি 'গ্রুপ' বোঝাতে ব্যবহৃত হয়, 'o' চিহ্নটি G সঞ্চয়ণে সংজ্ঞাত দ্বিপদ-প্রক্রিয়াটিকে নির্দেশ করে।

(1) সঞ্চয়ণে G ঐ সংজ্ঞাত দ্বিপদ-প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে "আবদ্ধ" (closed) অর্থাৎ প্রতিটি ক্রমিত উপাদান যুগল $a, b \in G$ এর অনুষঙ্গী কেবলমাত্র একটিই উপাদান $c \in G$ বর্তমান এমনভাবে যে $a \text{ o } b = c$

(II) যে কোনও উপাদান $a, b, c, \in G$ এর জন্যই $(a \text{ o } b) \text{ o } c = a \text{ o } (b \text{ o } c)$ অর্থাৎ 'সংযোগ" ধর্ম (associative property) G সেটে 'o' দিয়ে চিহ্নিত দ্বিপদ-প্রক্রিয়া সাপেক্ষে সত্য।

(III) G সঞ্চয়ণে এমন একটি অনন্য (unique) উপাদান e বিদ্যমান যে $e \text{ o } a = a, \ \forall a \in G$ । এই গুণ-যুক্ত উপাদানকে বাম-স্থিরক উপাদান (left identity element) বা বাম-একক বলা হয় অর্থাৎ G সেটে সজ্ঞাত প্রক্রিয়া "o" সাপেক্ষে অস্তিত্ব বাম স্থিরক উপাদানরে অস্তিত্ব বর্তমান থাকবে। (existence of left identity)।

(IV) যে কোনও একটি উপাদান $a \in G$ এর অনুষঙ্গী অপর একটি উপাদান $a' \in G$ বর্তমান থাকবে যে $a' \text{ o } a = e$, এইরকম উপাদান a'-কে a-এর বাম-বিপরীত উপাদান বলা হয়; অর্থাৎ G সেটের যে কোন উপাদানের বাম-বিপরীত উপাদান G সেটে সজ্ঞাত 'o' চিহ্নিত দ্বিপদপ্রক্রিয়া সাপেক্ষে বর্তমান থাকবে (existence of left inverse)।

বি: দ্র: শেষোক্ত ধর্মদুটি (III) ও (IV)-এর পরিবর্তে ডান স্থিরক উপাদানের অস্থিত্ব ও ডান বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব থাকলেও G সঞ্চয়ণকে 'o' দিয়ে চিহ্নিত দ্বিপদ-প্রক্রিয়া সাপেক্ষে দল বা গ্রুপ বলা যায়। অর্থাৎ

$\forall a \in G,$ এর অনুষঙ্গী $\exists e' \in G,$ যে $a \text{ o } e' = a$ (existence of right identities)

এবং $\exists a'' \in G$ যে $a \text{ o } a'' = e'$ (existence of right inverse)

সংজ্ঞানুসারে e'-কে ডান স্থিরক উপাদান এবং a''-কে a-এর ডান বিপরীত উপাদান বলা হয়।

এখন সঙ্গতভাবেই প্রশ্ন উঠতে পারে যে কোনও সেটে সংজ্ঞাত কোনও দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে বাম-স্থিরক উপাদান ও ডান-স্থিরক-উপাদান কি অভিন্ন? বাম-বিপরীত-উপাদান ও ডান-বিপরীত-উপাদান কি অভিন্ন?

সকল পূর্ণসংখ্যার সঞ্চয়ণ Z ধরা যাক। Z সেটে পাটীগাণিতিক 'অন্তর' কে দ্বিপদ প্রক্রিয়া হিসেবে নেওয়া হল; অর্থাৎ $a, \ b \in Z, \ \ a \circ b = a - b$। অবশ্যই (i) 'আবদ্ধ' ধর্ম বর্তমান, কারণ দুটি পূর্ণসংখ্যার অন্তর পূর্ণসংখ্যাই হয়। অর্থাৎ যেকোনও দুটি উপাদান $a, b \in Z$ এর অনুষঙ্গী $\exists$ একটি উপাদান $c \in Z$ এমন যে $a \text{ o } b = a - b = c$। কিন্তু (ii) সংযোগ ধর্ম বিদ্যমান নয়, কারণ $\forall a, b, c \ \in Z, \ (a-b)-c \neq a-(b-c)$,

যেমন $(5-3)-1 = 1 \neq 5-(3-1) = 3$

আবার (iii) $e - a = e \circ a = a$ তখনই সম্ভব, যখন $e = 2a$; কাজেই ভিন্ন ভিন্ন উপাদান $a \in z$ এর অনুষঙ্গী বাম-স্থিরক-উপাদান e ও বিভিন্ন অর্থাৎ এই দ্বিপদ প্রক্রিয়ায় Z সেটে কোনও নির্দ্দিষ্ট বাম স্থিরক উপাদানের অস্থিত্ব নেই। পরন্তু, $a - e' = a \circ e' = a, \forall a \in Z$, যখন এই ডান-স্থিরক-উপাদান e' ও '0' (শূন্য) অভিন্ন অর্থাৎ, $\forall a \in Z$, $a \circ e' = a - o = a$। অতএব এই দ্বিপদ প্রক্রিয়া '$\circ$', $a \circ b = a - b$, $a, b \in Z$ সাপেক্ষে Z সঞ্চয়ণে একটি অনন্য (unique) ডান-স্থিরক-উপাদান বর্তমান।

(iv) অবশ্যই Z সঞ্চয়ণে যে কোনও উপাদানের বাম-বিপরীত উপাদান বর্তমান নেই। কিন্তু ডান-বিপরীত উপাদান বর্তমান; কারণ, $\forall a \in z, a - o = a$ এবং $a - a' = 0 \Rightarrow a' = a$ অর্থাৎ $a - a = 0$, অর্থাৎ 'a' নিজেই 'a' এর ডান-বিপরীত-উপাদান।

$\therefore$ প্রতিটি উপাদান $a \in Z$ এর জন্য একটি অনন্য (unique) ডান-বিপরীত-উপাদান বিদ্যমান।

(V) **বিনিময়/আবেলীয় ধর্ম** : একটি দ্বিপদ-প্রক্রিয়া বিশিষ্ট কোনও সেট G-কে (commutative property) তখনই আবেলীয় বা বিনিময়যোগ্য বলা হবে যখন $a \circ b = b \circ a$, $\forall a, b \in G$, এবং '$\circ$' চিহ্নটি G সঞ্চয়ণে সংজ্ঞাত দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

কোনও আবেলীয় সঞ্চয়ণে অবশ্যই বাম-স্থিরক-উপাদান ও ডান-স্থিরক-উপাদান অভিন্ন এবং বাম-বিপরীত-উপাদান ও ডান-বিপরীত-উপাদান অভিন্ন। যথা, Z সেটে $a+b = b+a$ এবং $a-b \neq b-a$, '+' যোগক্রিয়া এবং '–' অন্তর বোঝায়। অর্থাৎ Z সেটটি '+' সাপেক্ষে আবেলীয় কিন্তু '–' সাপেক্ষে আবেলীয় নয়।

ধরা যাক, একটি বিশেষ ধর্ম M সঞ্চয়ণে বিদ্যমান। যদি এই ধর্মটি M সঞ্চয়ণে প্রতিটি অধসেটে (Subset) বিদ্যমান থাকে, তাহলে সেইরকম ধর্মকে বলা হয় অনুক্রমী (hereditary)। স্পষ্টত: সংযোগ ও বিনিময় ধর্ম দুটি (associative and commutative properties) অনুক্রমী। কিন্তু আবদ্ধ ধর্ম (closure property) বা স্থিরক উপাদানের অস্তিত্ব এই অনুক্রমী ধর্মযুক্ত নয় যথা —

(i) সকল পূর্ণসংখ্যার সেট Z, যোগক্রিয়া '+' সাপেক্ষে আবদ্ধ, কিন্তু সকল পূর্ণ বিজোড় সংখ্যার সঞ্চয়ণে J (Z এর উপসেট) '+' সাপেক্ষে আবদ্ধ নয়, কারণ দুটি বিজোড় সংখ্যার যোগফল বিজোড় নয় অর্থাৎ $\forall a, b \in J$, $a + b \notin J$ অর্থাৎ, $9, 3, 7 \in J$, $3+7=10 \notin J$

(ii) গুণনক্রিয়া সাপেক্ষে Z সঞ্চয়ণে স্থিরক উপাদান 1, কিন্তু গুণন সাপেক্ষে সকল জোড়সংখ্যার সঞ্চয়ণে Z_e (Z-এর অধসেট)-এ কোনও স্থিরক উপাদান নেই।

এই দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়াই Z সঞ্চয়ণে আবেলীয়; $a, b \in z$, $a+b = b+a$ এবং $a.b = b.a$; Z_e উপসেটে, $2m+2n = 2n+Zm$ $m, n \in Z$, $2m.2n = 2n.2m$ অর্থাৎ ঐ দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়াই Z_e উপসেটে আবেলীয়।

অনুশীলনী

উদা 1 : দেখান যে সকল মূলদসংখ্যার সেট Q যোগ-প্রক্রিয়া সাপেক্ষে (additive) একটি আবেলীয় গ্রুপ।

'+' চিহ্নটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া 'যোগ' বোঝায়, অর্থাৎ, $a \circ b = a+b$, $a, b \in Q$,

(I) Q যোগ সাপেক্ষে 'আবদ্ধ', কারণ দুটি মূলদ সংখ্যার যোগফল একটি মূলদ সংখ্যা অর্থাৎ $a+b \in Q \ \forall a, b \in Q$

(II) যে কোনও উপাদান ত্রয় $a,b,c \in Q$ হলে

$(a+b) + c = a + (b+c)$

যেমন, $\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)+\frac{7}{15}=\frac{2}{5}+\left(\frac{1}{5}+\frac{7}{15}\right)=\frac{16}{15}$

অর্থাৎ (Q,+)-তে সংযোগ ধর্ম বজায় থাকে।

(iii) (Q,+)-তে অভিন্ন ও অনন্য বাম ও ডান স্থিরক উপাদান বর্তমান অর্থাৎ $\forall a \in Q, \exists \ 0 \in Q$ যে $0+a=a$ এবং $a + 0 = a$-তে

(IV) (Q,+) তে অভিন্ন ও অনন্য বাম ও ডান বিপরীত উপাদান বিদ্যমান। স্পষ্টত $\forall a \in Q_1 \exists -a \in Q$ যে $a+(-a) = (-a)+a = 0$

(V) যোগ প্রক্রিয়া Q সেটে আবেলীয়, কারণ $\forall a, b \in Q$,

$a+b = b+a$, যেমন, 3, $\frac{1}{5} \in Q$, $3+\frac{1}{5}=\frac{16}{5}=\frac{1}{5}+3$

$\therefore$ Q একটি যোজ্য আবেলীয় গ্রুপ।

উদাহরণ 2 : Q সেটে দ্বিপদ প্রক্রিয়া "গুণন" সাপেক্ষে

(I) আবদ্ধধর্ম বর্তমান। অর্থাৎ $\forall a, b \in Q$, $a.b \in Q$

যেমন, 2, $\frac{3}{7} \in Q$, $2.\frac{3}{7}=\frac{6}{7} \in Q$

(II) সংযোজ্যতা ধর্ম বর্তমান। অর্থাৎ, $(ab)c = a(bc)$, $\forall a, b, c \in Q$

যথা $\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}\right).7=\frac{3}{7}.\left(\frac{1}{3}.7\right)=1$

(III) একটি অনন্য ও অভিন্ন বাম ও ডান স্থিরক উপাদানের অস্তিত্ব বর্তমান। 1 এই সংখ্যাটি উক্ত স্থিরক। অর্থাৎ $\forall a \in Q$,

$$a.1 = 1.a = a$$

(IV) '0' ব্যতীত যে কোনও মূলদ সংখ্যার ডান ও বাম বিপরীত উপাদান বিদ্যমান অর্থাৎ $\forall a \in Q, a \neq o$, $\exists$ একটিমাত্র বাম ও ডান বিপরীত উপাদান $\frac{1}{a} \in Q$, যেহেতু $a.\frac{1}{a}=\frac{1}{a}.a=1$। $0 \in Q$, '0'-এর কোনও বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব নেই।

কাজেই, সকল মূলদ সংখ্যার সেট গুণন প্রক্রিয়া সাপেক্ষে দল বা গ্রুপ নয়।

তবে $Q-\{0\}$ অর্থাৎ শূন্যবিহীন (non-zero) মূলদ সংখ্যার সঞ্চয়ণ গুণ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে একটি আবেলীয় গ্রুপ। এই সেটে উপরোক্ত (I), (II), (III) ধর্মগুলি অবশ্যই সত্য। উপরন্তু যে কোনও উপাদানের অনন্য ও অভিন্ন ডান ও বাম বিপরীত উপাদান বিদ্যমান; অর্থাৎ $\forall a \in Q-\{0\}, \exists \frac{1}{a} \in Q-\{O\}$ যে $a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a$ $(\because a \neq 0)$। অতএব (iv) ধর্মটি পাওয়া গেল।

আবার $a.b = b.a, \quad a, b \in Q-\{0\}$

$\therefore Q-\{0\}$ গুণন প্রক্রিয়া সাপেক্ষে একটি আবেলীয় গ্রুপ।

উদাহরণ 3 সকল বাস্তবসংখ্যার সঞ্চয়ণ R এবং সকল জটিলসংখ্যার সেট C দ্বিপদ প্রক্রিয়া যোগ ও গুণন সাপেক্ষে গ্রুপ কিনা বিচার করুন।

ইঙ্গিত : উভয় ক্ষেত্রেই 'গুণন' সাপেক্ষে 0 (শূন্য)-এর বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব নেই।

11.3.2 দলের ধর্ম

এখানে আমরা দলের কতকগুলি ধর্ম সম্বন্ধে আলোচনা করবো।

প্রতিপাদ্য (Proposition) 1 : যে কোনও গ্রুপে (i) বাম স্থিরক উপাদানই ডান স্থিরক উপাদান এবং বিপরীতক্রম

(ii) কোনও উপাদানের বাম বিপরীত উপাদানই ঐ উপাদানের ডান বিপরীত উপাদান এবং বিপরীতক্রম

[এখন থেকে 'গুণ' চিহ্ন কোন দলে সংজ্ঞাত দ্বিপদ প্রক্রিয়ার চিহ্ন হিসাবে ব্যবহৃত হবে]

প্রমাণ : ধরা যাক G গ্রুপের e' বামস্থিরক এবং e" ডান স্থিরক।

গ্রুপের যে কোনও উপাদান a-এর জন্য পাই,

$e'a = a$ এবং $ae'' = a$

এখন $e' = e'e'' = e''$

লক্ষণীয়, বাম সমীকরণটি পাই, e'' ডান স্থিরক হওয়ায় এবং ডান সমীকরণটি পাই, e' বামস্থিরক হওয়ায়।

এবার দুটি স্থিরক এক হওয়ায় উভয়কেই আমরা e দ্বারা চিহ্নিত করলাম সুতরাং a' এবং a'' যদি a-এর যথাক্রমে বাম ও ডান বিপরীত উপাদান হয় তবে $a'a = e = aa''$

এখন $a' = a'e = a'(aa'') = (a'a)\, a'' = ea'' = a''$

সুতরাং গ্রুপের কোনও উপাদান-এরই বাম ও ডান বিপরীত উপাদানগুলি সমান।

প্রতিপাদ্য- 2 ঃ কোনও গ্রুপ G-তে স্থিরক উপাদানটি অনন্য (unique) (এটি ডান ও বাম উভয় স্থিরক উপাদান হিসাবেই কার্যকরী), যে কোনও উপাদান $a \in G$, এর অনুষঙ্গী একটি অনন্য বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব বর্তমান (এটিও বাম বা ডান, উভয় বিপরীত উপাদান হিসাবেই কার্যকরী)।

ধরা যাক, যদি সম্ভব হয়, e, f, G গ্রুপে দুটি বিভিন্ন স্থিরক উপাদান। তাহলে $ef = e$ যেহেতু f ডান স্থিরক

আবার, $ef = f$ $\quad \because$ e বাম স্থিরক

$\therefore\ e = ef = f$ ।

$\therefore$ স্থিরক উপাদানটি অনন্য (unique)।

ধরা যাক a', a'', $a \in G$ এর সম্ভাব্য দুটি বিপরীত উপাদান। তাহলে,

$a' = a'e = a'(aa'')$ (সংযোগধর্ম অনুসারে)

$= (a'a)a''$

$= ea'' = a''$

$\therefore$ প্রতিটি উপাদান $a \in G$ এর অনুষঙ্গী (Corresponding) একটি অনন্য (unique) বিপরীত উপাদান বিদ্যমান।

বি: দ্র: সাধারণত: গুণ প্রক্রিয়াসাপেক্ষে কোনও উপাদান $a \in G$-এর বিপরীত উপাদানটি a^{-1} দিয়ে চিহ্নিত হয়। আর যোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে এটিকে $-a$ দিয়ে চিহ্নিত করা হয়।

(i) $\because\ aa^{-1} = e = a^{-1}a$ a-কে a^{-1} এর বিপরীত উপাদানও বলা যায়।

অর্থাৎ $(a^{-1})^{-1} = a$

যেহেতু $(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}[a^{-1}(ab)]$ (সংযোগ ধর্ম অনুসারে)

$= b^{-1}[(a^{-1}a)b]$,,

$= b^{-1}[eb]$

$= b^{-1}b \quad = e$ $\quad [\because\ b^{-1}$, b-এর বিপরীত উপাদান]

সুতরাং $b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1}$

এইভাবে অগ্রসর হলে পাওয়া যায় :

$(a_1 a_2 \ldots\ldots a_n)^{-1} = a_n^{-1}\ a_{n-1}^{-1} \ldots\ldots a_2^{-1}\ a_1^{-1}$

প্রতিপাদ্য 3 : কোনও গ্রুপ G-তে নিম্নোক্ত সমীকরণদ্বয়

$px = q$ এবং $yp = q$ । $p, q \in G$,-এর সমাধানগুলি অনন্য।

প্রমাণ : $px = q$ থেকে পাই $p^{-1}(px) = p^{-1}q$

বা, $(p^{-1}p)x = p^{-1}q$ .... (সংযোগ ধর্ম অনুসারে)

বা, $ex = p^{-1}q$ (e, G-এ স্থিরক উপাদান হলে)

অর্থাৎ $x = p^{-1}q$

$\because$ $p, q \in G$, $p^{-1} \in G$ এবং $p^{-1}q$ এর অনুষঙ্গী একটি অনন্য উপাদান G-তে বিদ্যমান (আবদ্ধ ধর্ম অনুসারে)।

$yp = q$ থেকে পাই

$(yp)p^{-1} = qp^{-1}$

বা, $y(pp^{-1}) = qp^{-1}$ (সংযোগধর্ম অনুসারে)

বা, $y\,e = q\,p^{-1}$

অর্থাৎ $y = q\,p^{-1}$

$\because$ $q, p \in$ গ্রুপ G. $p^{-1} \in G$ এবং qp^{-1} এর অনুষঙ্গী একটি অনন্য উপাদান G -তে বিদ্যমান।

প্রতিপাদ্যটি প্রমাণিত।

প্রতিপাদ্য 4 : গ্রুপ G-এ যে কোনও উপাদান a, b, p, q এর জন্য

(i) $pa = pb \Rightarrow a = b$ (বাম অপসারণধর্ম)

(ii) $aq = bq \Rightarrow a = b$ (ডান অপসারণধর্ম)

[অপসারণ ধর্ম (Cancellation Property)]

প্রমাণ : (i) $p^{-1}(pa) = p^{-1}(pb)$

বা, $(p^{-1}p)a = (p^{-1}p)b$ [সংযোগ ধর্ম]

বা, $ea = eb$ [স্থিরক হলে]

অর্থাৎ, $a = b$

অনুরূপে (ii) প্রমাণ করা যায়।

দলক (Groupoid) : সংজ্ঞা

একটিমাত্র দ্বিপদ-প্রক্রিয়া বিশিষ্ট কোনও গাণিতিক তন্ত্রে যদি কেবলমাত্র "আবদ্ধ" ধর্মটি বজায় থাকে, তবে তাকে বলা হয় গ্রুপক (groupoid)।

ধরা যাক গাণিতিক তন্ত্রটি $(g, \circ)$, তাহলে,

$a.b \in G, \ \forall a, b \in G$

(i) ধরা যাক G সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সঞ্চয়ণ Z^- দ্বিপদ প্রক্রিয়া '$\circ$' হলো যোগক্রিয়া '+' দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সমষ্টি একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাই হয়,

অর্থাৎ, $\forall a, b \in z^+$, $a \circ b = a+b \in Z^-$

$\therefore$ Z^+ দ্বিপদপ্রক্রিয়া 'যোগ' সাপেক্ষে একটি দলক।

(ii) $(Z^-,-)$ তন্ত্রে $a \circ b = a-b$ দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার অন্তর ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা নাও হতে পারে,

অর্থাৎ $\exists a,b \in Z^-$, এমন যে $a \circ b = a-b \notin Z$

যথা $5, 7, \in Z$ কিন্তু $5-7 \notin Z^-$

$\therefore$ Z^-, দ্বিপদ প্রক্রিয়া '–' সাপেক্ষে দলক নয়।

কোনও উপাদান $a \in G$, যদি এমন হয় যে $a.a = a$, তবে সেই উপাদানকে "বর্গেকসম" (idempotent) বলা হয়। অবশ্যই স্থিরক উপাদান বর্গেকসম হবে; কারণ $e.e = e$

কোনও উপাদান $z \in G$; যদি এমন হয় যে, $z.a = z \quad \forall a \in G$, তাহলে এই রকম উপাদান 'z'-কে G-এ বাম শূন্যপদ (Left zero element) বলা হয়।

এইরকম উপাদান অবশ্যই বর্গেকসম (idempotent) হবে। কারণ $z\ .\ z = z$

অনুরূপভাবে ডান শূন্যপদ (right zero element) সংজ্ঞাত হয়। অর্থাৎ যদি কোনও উপাদান $z' \in G$ বিদ্যমান থাকে এমন ভাবে যে $\forall a \in G$, $a\,.\,z' = z'$, তাহলে এই z'-কে ডান শূন্যপদ বলা হয়।

যদি কোনও উপাদান একইসঙ্গে বাম ও ডান শূন্যপদ হয়, তাহলে তাকে "শূন্যপদ" বলা হয়। এটি একটি অনন্য উপাদান।

যদি দুটি উপাদান $a,b \in G$ এমন হয় যে $a \circ b = z$, $a \neq z$, $b \neq z$, a-কে শূন্যপদের বাম-ভাজক (left zero diviser) ও b-কে শূন্যপদের ডান-ভাজক (right zero devisor) বলা হয়।

উদাহরণ 1. সকল পূর্ণসংখ্যার সেট z-এ 'গুণ' প্রক্রিয়া বিচার করলে 'শূন্যপদটি' 0 (শূন্য), কারণ—

$\forall a \in z, \quad a.0 = 0.a = 0$

উদাহরণ 2. সকল জটিল সংখ্যার সেট $c = \{a + ib,\ a,b \in R\}$

এর মধ্যে সংজ্ঞাত গুণ প্রক্রিয়া '•' র জন্য আমরা দেখি : $(a + ib).(c + id) = (ac - bd) + i\,(bc + ad)$, $a,b,c,d \in R$, সকল বাস্তব সংখ্যার সেট, বিচার করলে 'শূন্যপদ'টি $0 + i0$। কারণ

$(a + ib).(0 + i0) = (0 + i0).(a + ib) = 0 + i0.$

উদাহরণ 3. সকল 2×2 বাস্তব সংখ্যার ম্যাট্রিক্স-এর সেট M নেওয়া হল, "শূন্যসম ম্যাট্রিক্স" (null matrix) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ এই M সেটে ম্যাট্রিক্স গুণ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে "শূন্যপদ" কারণ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

এবার

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1 & 1-1 \\ -1+1 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ শূন্যপদের বাম-ভাজক।

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ শূন্যপদের ডান-ভাজক।

স্মরণ করা যেতে পারে যে ম্যাট্রিক্স গুণন প্রক্রিয়া এই রকম : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$

অর্ধদল/সেমিগ্রুপ (Semi Group)

সংজ্ঞা : কোন দল (গ্রুপকে) যদি সংযোগধর্ম বজায় থাকে, তাহলে তাকে অর্ধদল (Semi Group) বলা হয় অর্থাৎ একটিমাত্র দ্বিপদ-প্রক্রিয়া বিশিষ্ট কোনও গাণিতিক-তন্ত্রে যদি আবদ্ধ ধর্ম ও সংযোগ ধর্ম বজায় থাকে, তাহলে তাকে অর্ধদল বা সেমিগ্রুপ বলে।

যেমন $(Z^{-},+)$, $(Z^{-},\circ)$ গাণিতিক-তন্ত্র দুটি অর্ধদল বা সেমিগ্রুপ কিন্তু $(z,-)$ অর্ধদল (সেমিগ্রুপ) নয়, তবে দলক বা গ্রুপক।

এখানে Z^{-} সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট; দ্বিপদ-প্রক্রিয়া যোগ '+' গুণন '$\cdot$' এবং বিয়োগ '–' চিহ্নগুলি দিয়ে বোঝান হয়েছে।

মোনয়েড (Monoid)

সংজ্ঞা : যদি কোনও সেমিগ্রুপে বা অর্ধদলে স্থিরক উপাদানটি (identity) বিদ্যমান থাকে, তবে তাকে "মোনয়েড" বলা হয় অর্থাৎ একটিমাত্র দ্বিপদ-প্রক্রিয়া বিশিষ্ট কোনও একটি গাণিতিক-তন্ত্র (G,0)-তে যদি (i) আবদ্ধ ধর্ম, (ii) সংযোগ ধর্ম (iii) স্থিরক উপাদানের অস্তিত্ব বজায় থাকে, তবে তাকে "মোনয়েড" বলা হয় অর্থাৎ $(G,\circ)$-কে তখনই 'মোনয়েড' বলা হবে যখন

$\forall a,b,c \in G$, '$\circ$' দ্বিপদ-প্রক্রিয়া সাপেক্ষে

(i) $a \circ b \in G$, (ii) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

(iii) $\exists\ e \in G$ এমন যে $e \circ a = a \circ e = a$

উদাহরণ 1 $(z\ \circ,)$ একটি মোনায়েড কারণ

(i) $\forall a,b \in z,\ a \circ b \in z$, যেমন $9,7 \in z,\ 9 \times 7 = 63 \in z$

(ii) $\forall a,b,c \in z, (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, যেমন $5,7,9 \in z,\ (5 \times 7) \times 9 = 5 \times (7 \times 9)$

(iii) 1 স্থিরক উপাদান, অতএব $1 \circ a = a \circ 1 = a,\ \forall a \in z$

উদাহরণ 2 : $(Z_e, \circ)$ একটি মোনয়েড নয় কারণ

(i) $\forall a, b \in K,\ a \times b \in K$

যদি $a = 2m \in K, b = 2n \in K$, হয় $a \times b = 4mn$: একটি জোড়সংখ্যা $\in k, m, n \in Z$

(ii) $a,\ b,\ c \in K, (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

সংযোগধর্ম বজায় আছে : Z : সরল পূর্ণসংখ্যার সেট গুণ সাপেক্ষে সংযোগ এবং $K \subset Z$, অতএব সংযোগধর্ম অনুক্রমী হওয়ায় K উপসেট বজায় থাকবে। কিন্তু K সেটে গুণ সাপেক্ষে কোনও স্থিরক-উপাদানের অস্তিত্ব নেই।

কাজেই $(K, \bullet)$ সেমিগ্রুপ, কিন্তু মোনয়েড নয়।

আপাতদল (Quasigroup)

যদি কোনও গ্রুপকে G-তে নিম্নোক্ত সমীকরণদ্বয় $px = q$ এবং $yp = q$; $p, q \in G$-এর অনন্য সমাধান বিদ্যমান থাকে, তবে ঐ গ্রুপকে বলা হয় আপাতদল বা কোয়াসিগ্রুপ বলে।

প্রতিপাদ্য 5 : কোনও আপাতদলে যদি সংযোগ ধর্ম বজায় থাকে, তবে সেটি দল বা গ্রুপ হবে।

প্রমাণ : ধরা যাক G একটি কুয়াসাই গ্রুপ, যার মধ্যে সংযোগধর্ম বজায় আছে। এখন,

$px = p$ ও $yp = p,\ p \in G$ সমীকরণদ্বয়ের সমাধান উপাদান দুটি p-এর অনুষঙ্গী যথাক্রমে ডান স্থিরক ও বাম স্থিরক উপাদান। ধরা যাক e, p -এর বাম-স্থিরক-উপাদান এবং ধরা যাক q, G-এর যে কোনও একটি উপাদান। ধরা যাক $r \in G$ $px = q$ এর সমাধান-উপাদান।

$\therefore pr = q$............(i)

এবার $eq = e(pr)$.............(i) থেকে

$=(ep)r$ $\because$ সংযোগধর্ম বর্তমান

$= pr$ $\because$ e, p-এর বাম স্থিরক

$= q$ ....(i) থেকে

$\therefore$ e, G-এর যে কোনও উপাদানের অনুষঙ্গী বাম-স্থিরক-উপাদান।

আবার সমীকরণ $yp = e$-এর সমাধান, p-এর বিপরীত উপাদান p^{-1} অবশ্যই $\in Q$; কারণ G একটি আপাতদল।

$\therefore$ G-এর মধ্যে 'আবদ্ধ' ধর্ম, 'সংযোগধর্ম,' বাম-স্থিরক উপাদান ও প্রতিটি উপাদানের বাম-বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব বিদ্যমান। কাজেই G একটি দল বা গ্রুপ।

উপরোক্ত প্রতিপাদ্যটি একটু ভিন্ন বিবৃতিতে প্রকাশ করা যায়।

বিকল্প বিবৃতি : যদি কোনও সেমিগ্রুপ G-তে, নিম্নোক্ত সমীকরণদ্বয়

$$px = q \text{ এবং } yp = q, \qquad \forall p, q \in G$$

-এর অনন্য সমাধান বিদ্যমান থাকে, তাহলে সেই সেমিগ্রুপটি গ্রুপ হবে।

পূর্বোক্ত বিবৃতির অনুষঙ্গী অনুরূপ প্রমাণের ধারাটি অনুসরণ করতে অনুরোধ করা হচ্ছে।

উপাদানের পূর্ণসাংখ্যক ঘাত ও ঘাতের সূত্রাবলী (Law of indices)

ধরা যাক একটি গ্রুপ (G,0)। সংযোগধর্ম অনুসারে $a\circ(a\circ c) = (a\circ b)\circ c,\ a,b,c \in G$; এখানে লঘুবন্ধনীটির সাহায্যে উপাদানযুগলের মধ্যে দ্বিপদ প্রক্রিয়ার ক্রম (order of association) নির্দেশিত হচ্ছে। উপরের অভেদটি থেকে স্পষ্টই বলা যায়, $a\circ(b\circ c)$ এবং $(a\circ b)\circ c$ এর অনুষঙ্গী অভিন্ন ও অনন্য উপাদান G-তে পাওয়া যাবে; কাজেই লঘুবন্ধনী ব্যবহার না করেই $a\circ b\circ c$ সেই একই উপাদান নির্দেশ করে। অনুরূপভাবে $a\circ b\circ c\circ d$ দ্ব্যর্থহীনভাবে $a\circ[b\circ(c\circ d)]$, $(a\circ b)\circ(c\circ d)$, $[(a\circ b)\circ c]\circ d$ প্রভৃতি দিয়ে নির্দেশিত সেই একই উপাদানকে বোঝায়। গুণ চিহ্নকে ব্যবহার করলে $a\circ b\circ c\circ d$ এর পরিবর্তে abcd লিখতে পারি। এইভাবে উপাদানের সংখ্যা ক্রমশ বৃদ্ধি করলেও এই সংযোগধর্মের কার্যকারিতায়, উপাদান যুগলগুলির মধ্যে দ্বিপদ ক্রিয়ার "ক্রম" যেমনই হোক না কেন সর্বশেষ, উপাদানটি একই হবে। অর্থাৎ কোনও অর্ধদল বা দলে প্রদত্ত সীমিত সংখ্যক ক্রমান্বিত (ordered) উপাদান যুগলগুলির মধ্যে দ্বিপদ-প্রক্রিয়া লব্ধ সর্বশেষ উপাদান তাদের পারস্পরিক প্রক্রিয়ার "ক্রম" (order) -এর উপর নির্ভরশীল নয়, এটি সর্বদাই একই।

$a \in G, \quad a^n = a\circ a\circ a \ldots\ldots\ldots\ldots \circ a$ (n সংখ্যক), $n \in Z^+$

$a^{-n} = a^{-1}\circ a^{-1}\circ \ldots\ldots\ldots\ldots \circ a^{-1}$ (n সংখ্যক), $n \in Z^+$

সংযোগ ধর্ম প্রয়োগ করে প্রমাণ করা যায় যে যদি a, G-এর যে কোনও একটি উপাদান হয় এবং $r, s \in Z$, r, s ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শূণ্য হোক না কেন,

(i) $a^r . a^s = a^{r+s} = a^{s+r}$

(ii) $(a^r)^s = a^{rs}$

(iii) $(a^n)^{-1} = a^{-n}$ (ঋণাত্মক ঘাত সংজ্ঞাত)

এবং (iv) $a^0 = 1\ (= e =$ G এর স্থিরক উপাদান)

উপাদানের "ক্রম" (Order of an element)

সংজ্ঞা : ধরা যাক G একটি গ্রুপ; সংজ্ঞাত দ্বিপদ-প্রক্রিয়া '$\circ$' 'গুণ' প্রক্রিয়ার চিহ্ন দিয়ে চিহ্নিত হল, অর্থাৎ $a, b \in G$, $a\circ b$-কে ab লেখা হল।

যদি ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এমন হয় যে $a^n = e$, $a \in G, e, G$ এর স্থিরক উপাদান তাহলে a উপাদানকে সসীম 'ক্রম' বিশিষ্ট বলা হয় এবং n-কে a-এর 'ক্রম' বলা হয় এবং 0(a) চিহ্ন দিয়ে নির্দেশ করা হয়। যথা : একক (1)-এর চতুর্থমূলের সেট $\{1, -1, i, -i\}$ গুণ সাপেক্ষে গ্রুপ। স্থিরক উপাদান 1; $(-1)^2=1$, $(i)^4=1$.

$\therefore\ O(-1) = 2, \qquad O(i) = 4.$

অনুশীলনী

1. সকল পূর্ণসংখ্যার সেট Z-এ পাটীগাণিতিক যোগ ও গুণ দুটি দ্বিপদ-প্রক্রিয়া। এই দুটি প্রক্রিয়া সাপেক্ষে Z একটি গ্রুপক, দুটি প্রক্রিয়া সাপেক্ষে 'আবদ্ধ' ধর্ম বজায় থাকে কারণ দুটি পূর্ণসংখ্যার যোগফল একটি পূর্ণসংখ্যা এবং দুটি পূর্ণসংখ্যার গুণফলও একটি পূর্ণসংখ্যা।

2. নিম্নোক্ত দ্বিপদ-প্রক্রিয়া দুটি Z সেটে সংজ্ঞাত হলো; Z সেটটি কি প্রকারের?

(i) $u \odot v = u, v$ এর গ. সা. গু

(ii) $u \circ v = u, v$ এর ল. সা. গু

u, v, Z সেটের যে কোনও দুটি উপাদান।

এই দুটি দ্বিপদ-প্রক্রিয়া সাপেক্ষে Z সেটটি **গ্রুপক** (Groupoid) কারণ, দুটি পূর্ণসংখ্যার গ.সা.গু ও ল.সা.গু পূর্ণসংখ্যাই হবে।

অর্থাৎ $u \odot v \in z$ এবং $u \circ v \in z$

সংযোগধর্ম বজায় আছে। কারণ (i) $(u \odot v) \odot w = u \odot (v \odot w)$

যেমন $4, 6, 12 \in z$, $(4 \odot 6) \odot 12 = 2 \odot 12 = 2$; $4 \odot (6 \odot 12) = 4 \odot 6 = 2$

অর্থাৎ $(4 \odot 6) \odot 12 = 4 \odot (6 \odot 12)$

এবং (ii) $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$ যেমন $4, 5, 12 \in z$

$(4 \circ 5) \circ 12 = 60 = 4 \circ (5 \circ 12)$

$\therefore$ Z সেটটিএই দুটি প্রক্রিয়া সাপেক্ষে অর্ধদল বা সেমিগ্রুপও বটে। কিন্তু এটি গ্রুপ নয়, কারণ $\odot$ সাপেক্ষে Z -এ স্থিরক উপাদান নেই এবং $\circ$ সাপেক্ষে স্থিরক 1 হলেও কোনও উপাদানের বিপরীত উপাদান $\notin Z$

বিঃ দ্রঃ 1 কে Z সেটে $\odot$ (গ.সা.গু) সাপেক্ষে "শূন্যপদ" বলা যায়, কারণ $\forall a \in Z$, $1 \odot a = 1$

(iii) Z সেটে সংজ্ঞাত দ্বিপদ-প্রক্রিয়া যদি ভাগ (division) হয়, তাহলে আবদ্ধ ধর্ম সর্বদা সত্য নয়, কারণ দুটি পূর্ণসংখ্যার ভাগফল সর্বদা পূর্ণসংখ্যা হয় না। কাজেই 'ভাগ' প্রক্রিয়া সাপেক্ষে Z সেট **দলক** (groupoid) নয়।

3. প্রদত্ত দ্বিপদ-প্রক্রিয়া সাপেক্ষে নিম্নোক্ত সেটগুলি কি প্রকারের আলোচনা করুন :—

(i) সকল মূলদ সংখ্যার সেট Q-তে এবং সকল বাস্তব সংখ্যার সেট R-এ পাটীগাণিতিক **যোগ** ও **গুণ** প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত। এই দুটি প্রক্রিয়া সাপেক্ষে উভয় সেটেই দলক (groupoid)। 0 শূন্য যোগ সাপেক্ষে এবং 1 গুণ সাপেক্ষে উভয় সেটেই স্থিরক উপাদান। যে কোনও উপাদান $a \in Q$ অথবা $a \in R$, যোগ সাপেক্ষে বিপরীত উপাদান $-a \in Q$ এবং $-a \in R$, কিন্তু গুণ সাপেক্ষে সকল উপাদানের বিপরীত উপাদান আছে কিনা শিক্ষার্থীগণকে পর্যবেক্ষণ করে দেখতে অনুরোধ করা হচ্ছে। 'সংযোগ' ধর্মটিও উভয় প্রক্রিয়া সাপেক্ষে সত্য কিনা পরীক্ষা করে দেখতে অনুরোধ করা হচ্ছে।

ইঙ্গিত : Q ও R উভয় সেটটি যোগ সাপেক্ষে দল বা গ্রুপ; উভয়সেট গুণ সাপেক্ষে মোনয়েড, গ্রুপ নয়, কারণ গুণ সাপেক্ষে 0 (শূন্য)-এর বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব উভয় সেটেই নেই।

(ii) ধরা যাক $C = \{a + ib;\ a,\ b \in R,\ i^2 = -1\}$ সকল জটিল সংখ্যা $a + ib$, $a, b \in R$-এর দুটি প্রধান দ্বিপদ-প্রক্রিয়া যোগ '+' ও গুণ '$\circ$' C সেটে এইভাবে সংজ্ঞাত $\in R$ হলে

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i\,(b + d)$$

$$(a + ib) \circ (c + ib) = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$$

যখন $a, b, c, d \in R$.

I. উভয় দ্বিপদ-প্রক্রিয়া যোগ ও গুণ সাপেক্ষে C সেটে 'আবদ্ধ ধর্ম'-এর সত্যতা বজায় আছে, কারণ $a + c$, $b + d$; এবং $ac - bd$, $ad + bc$ সব উপাদানগুলি বাস্তব।

$\therefore$ C যোগ ও গুণ সাপেক্ষে **দলক (Groupoid)**।

II. উভয় দ্বিপদ-প্রক্রিয়া যোগ ও গুণ সাপেক্ষে C সেটে 'সংযোগধর্ম' বজায় থাকে। কারণ

$$\begin{aligned}\{(a+ib)+(c+id)\}+(e+if) &= \{(a+c) + i\,(b+d)\} + (e+if) = (a+c+e)+i(b+d+f)\\ &= \{a+(c+e)\}+i\{b+(d+f)\} = (a+ib)+\{c+e)+i(d+f)\\ &= (a+ib)+\{(c+id)+(e+if)\},\ a, b, c, d, e, f \in R \text{..........(A)}\end{aligned}$$

$\because$ R সেটে যোগ-ক্রিয়া সংযোজ্য

$$\begin{aligned}\{(a+ib)\circ(c+ib)\}\circ(e+if) &= \{ac-bd)+i(bc+ad)\}\circ(e+if)\\ &= \{(ac-bd)e-(bc+ad)f\}\\ &\quad + i\{(bc+ad)e+(ac-bd)f\} \text{..................(B)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+ib)\circ\{(c+id)\circ(e+if)\} &= (a+ib)\circ\{(ce-df)+i(de+cf)\}\\ &= \{a(ce-df)-b(de+cf)\}+i\{a(de+cf)+b(ce-df)\} \text{...............(C)}\end{aligned}$$

$$a,b,c,d,e,f \in R$$

(A) থেকে প্রমাণিত 'যোগ' প্রক্রিয়া সাপেক্ষে C সেটে 'সংযোগ ধর্ম' সত্য।

(B) ও (C) থেকে প্রমাণিত হল যে

$\{(a+ib)\circ(c+id)\}\circ(e+if)=(a+ib)\circ\{(c+id)\circ(e+if)\}$

অর্থাৎ 'গুণ' প্রক্রিয়া সাপেক্ষে C সেটে সংযোগ ধর্ম সত্য।

$\therefore$ 'যোগ' ও 'গুণন' — উভয় প্রক্রিয়া সাপেক্ষে C সঞ্চয়ণটি অর্ধদল বা **সেমিগ্রুপ**।

(III) যোগ সাপেক্ষে স্থিরক উপাদান $(0+i0)\in C$

এবং গুণ সাপেক্ষে স্থিরক উপাদান $(1+i.0)\in C$

যেহেতু $(0+i0)+(a+ib)=(a+ib)=(a+ib)+(0+i0)$..............(A)

এবং $(1+i0)\circ(a+ib)=a+ib=(a+ib)\circ(1+i0)$............(B)

$$\forall a+ib\in C$$

$\therefore$ যোগ ও গুণ উভয় দ্বিপদ-প্রক্রিয়া সাপেক্ষে C দলাঙ্গ (monoid)।

(iv) যোগ সাপেক্ষে C-এর যেকোনও উপাদান (a+ib), $a,b\in R$ এর বিপরীত উপাদান — (a+ib)

$\because$ $(a+ib)+\{-(a+ib)\}=(a-b)+i(b-b)=0+i0$

$$=-(a+ib)+(a+ib)$$

গুণ সাপেক্ষে C-এর যেকোনও অশূন্য (non zero) উপাদান a+ib, $a\neq 0,\ b\neq 0$ এবং $a,b\in R$ এর অনুষঙ্গী বিপরীত উপাদান $\left\{\frac{a}{a^2+b^2}+i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)\right\}$, যেহেতু $(a+ib)\circ\left\{\frac{a}{a^2+b^2}+i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)\right\}$

$$=(1+i0)=\left\{\frac{a}{a^2+b^2}+i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)\right\}\circ(a+ib)$$

কিন্তু C (i) এর অন্তর্ভূক্ত শূন্য উপাদান (0+i0)-এর 'গুণ' সাপেক্ষে C(i)-এর মধ্যে কোনও বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব নেই।

$\therefore$ C(i) সকল জটিল সংখ্যার সেট 'যোগ' প্রক্রিয়া সাপেক্ষে **'গ্রুপ'** কিন্তু 'গুণ' প্রক্রিয়া সাপেক্ষে **দল** নয়।

কিন্তু C(i) এর পরিবর্তে যদি $C(i)-\{0+i0\}$ সেটটি অর্থাৎ শূন্য-বিহীন সকল জটিল সংক্যার সেট বিচার করা যায়, তাহলে স্বতঃসিদ্ধ I, II, III গুলি 'গুণ' সাপেক্ষে সত্য এবং IV-টির সত্যতাও বজায় থাকে।

$\therefore$ গুণ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে শূন্যবিহীন সকল জটিল সংখ্যার সেট $C-\{0+i0\}$ একটি **গ্রুপ**

আবার 'যোগ' প্রক্রিয়া সাপেক্ষে $C-\{0+i0\}$ সেটটি স্থিরক উপাদান অবর্তমান কারণ —

$(0+i0) \notin C(i) - \{0+0i\}$; স্বতঃসিদ্ধ (I), (II) সত্য।

$\therefore$ যোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে শূন্যবিহীন সকল জটিল সংখ্যার সেট $C-\{0+0i\}$ অর্ধদল বা **সেমিগ্রুপ** কিন্তু দলাঙ্গ নয় এবং ফলতঃ দলও নয়।

$C-\{0+i0\}$ সেটটিকে কখনও কখনও C^* চিহ্ন দিয়ে নির্দেশ করা হয়।

উদা 4. ধরা যাক X একটি অশূন্য সেট এবং P(X) হলো X এর সকল সাবসেটগুলির সেট।

সেট দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া,

(i) দুটি সাব সেটের "ছেদ" (intersection) ও (ii) সংযোগ (union) সংজ্ঞাত ও যথাক্রমে "$\cap$" ও "$\cup$" চিহ্ন দিয়ে নির্দেশিত। P(X) সেটের প্রকৃতি বিচার করুন।

উ : (I) P(x) সেটের এই দুটি দ্বিপদ-প্রক্রিয়া সাপেক্ষে "আবদ্ধ ধর্ম" বজায় আছে;

$\because$ A, $B \in S(X)$, $A \cap B \subset x$

$$\therefore \quad A \cap B \in P(X)$$

অর্থাৎ A, B সাবসেট দুটির 'ছেদ', X সেটের একটি সাবসেট, কাজেই P(X) সেটের একটি উপাদান।

অনুরূপভাবে A ও B সাবসেট দুটির "সংযোগ" (union), X সেটের একটি সাবসেট, অতএব P(X) সেটের একটি উপাদান। অর্থাৎ $A \cup B \in P(x)$ যদি $A, B \in P(X)$

$\therefore$ P(X) সেট **'ছেদ'** ($\cap$) ও **"সংযোগ"** ($\cup$) — দ্বিপদ-প্রক্রিয়াদ্বয় সাপেক্ষে **দলক** (Groupoid)

II. ধরা যাক A,B,C X সেটের যে কোনও তিনটি সাবসেট, অর্থাৎ সেট P(X) এর যে কোনও তিনটি উপাদান অর্থাৎ $A, B, C \subset x$ তাহলে

$$(A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C = A \cap \{B \cap C\} \subset X$$

$$\therefore \in P(X)$$

অনুরূপভাবে, $\{A \cup B\} \cup C = A \cup B \cup C = A \cup \{B \cup C\} \subset X, \therefore \in S(x)$

স্পষ্টত : ছেদ ও সংযোগ দ্বিপদ-প্রক্রিয়া সাপেক্ষে P(X) সেটে সংযোগ-ধর্ম সত্য।

$\therefore$ P(X) সেট, 'ছেদ' ও 'সংযোগ' প্রক্রিয়া সাপেক্ষে "সেমিগ্রুপ"।

III. P(X) সেটে ছেদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে স্থিরক উপাদান X সেট, কারণ অবশ্যই $X \subset X$ অর্থাৎ $X \in P(X)$ এবং যেহেতু $\forall A \in S(X)$, $A \cap X = A = X \cap A$

অনুরূপভাবে $P(X)$ সেটে সংযোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে স্থিরক উপাদান ϕ সেই শূন্য-সেট (null set) কারণ প্রথমত: $\phi \subset X, \quad \phi \in P(X)$ এবং

দ্বিতীয়ত: $\forall A \in P(X), \quad A \cup \phi = A = \phi \cup A$

$\therefore$ $P(X)$ সেটটি ছেদ প্রক্রিয়া ও সংযোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে "মোনয়েড," এবং এখানে স্থিরক উপাদান যথাক্রমে সেট X ও সেট ϕ।

IV. $P(X)$ সেটে চতুর্থ স্বত:সিদ্ধটি পূরণ হয় কিনা অর্থাৎ ছেদ ও সংযোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে x-এর কোনও সাবসেটের অনন্য বিপরীত সাবসেট-এর অস্তিত্ব বিদ্যমান কিনা, অর্থাৎ $P(X)$ ছেদ ও সংযোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে দল বা গ্রুপ কিনা শিক্ষার্থীদের পর্যবেক্ষণ করতে অনুরোধ করা হচ্ছে।

(i) ইউক্লিডীয় সমতল E^2-এ সকল 'চলন'-রূপান্তর T-এর সঞ্চয়ণ S(T) যখন

$T: \; x' = x + a, y' = y + b, \quad a, b \in R$

দলক (groupoid) হবে — প্রমাণ করুন।

(ii) আবেলীয় গ্রুপ হবার বাকি শর্তগুলি কি S(T)-এর ক্ষেত্রে সিদ্ধ হবে?

উ :- S(T) সেটে প্রক্রিয়া 'o' সংজ্ঞাত হলো এইভাবে—

$T_1, T_2 \in S(T)$ -এর জন্য

$T_1 : x' = x + a, \; y' = y + b \qquad a, b \in R$

$T_2 : x' = x + c, \; y' = y + d \qquad c, d \in R$

ধরা যাক (x,y)'T_1', চলনে (x', y')-এ রূপান্তরিত হল এবং অত:পর T_2 চলনে (x', y') রূপান্তরিত হল (x'', y'') এ

$$\therefore T_1 \circ T_2 : x'' = x' + c = x + a + c, \; a + c \in R$$

$$y'' = y' + d = y + b + d, \; b + d \in R$$

$\therefore$ $T_1 \circ T_2 \in S(T)$ $\quad \therefore$ আবদ্ধ ধর্ম বজায় আছে

$\therefore$ S(T) একটি দলক (groupoid)।

অনুরূপে দেখানো যায়, $T_2 \circ T_1 \; : x'' = x + c + a$

$$y'' = y + d + b$$

R আবেলীয় যোজ্যগ্রুপ, $\therefore$ $a + c = c + a;\ b + d = d + b$

$$\therefore T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$$

$\therefore$ সংজ্ঞাত দ্বিপদ প্রক্রিয়াটি S(T)-তে আবেলীয়

(ii) দেখা যাক, S(T) সঞ্চয়ণে প্রদত্ত দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে সংযোগ ধর্ম, অনন্য স্থিরক উপাদানের অস্তিত্ব, S(T) সেটে যেকোন উপাদানের অনন্য বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব শর্তগুলি সিদ্ধ হয় কিনা।

ধরা যাক $T_1, T_2, T_3 \in S(T)$

$T_1 : x' = x + a_1,\ y' = y + b_1 \qquad a_1, a_2, a_3 \in R$

$T_2 : x' = x + a_2,\ y' = y + b_2 \qquad b_1, b_2, b_3 \in R$

$T_3 : x' = x + a_3,\ y' = y + b_3$

এবার $(T_1 \circ T_2) \circ T_3 :\ x' = x + a_1 + a_2 + a_3$

$$y' = y + b_1 + b_2 + b_3$$

$T_1 \circ (T_2 \circ T_3)\ \ x' = x + a_2 + a_3 + a_1$

$$= x + a_1 + a_2 + a_3$$

$$y' = y + b_2 + b_3 + b_1$$

$$= y + b_1 + b_2 + b_3$$

যেহেতু R আবেলীয় যোজ্য গ্রুপ

$\therefore\ (T_1 o T_2)\, o T_3 = T_1 o\, (T_2 o T_3)$

অর্থাৎ সংযোগ ধর্ম S(T)-তে বজায় আছে।

ধরা যাক $T_0 : x' = x,\ \ y' = y,$ অবশ্যই $T_O \in S(T)$

$$T : x' = x + a,\ y' = y + b \quad a, b \in R,\ \ T \in S(T)$$

T, S(T) এর যে কোন একটি উপাদান।

সংজ্ঞাত দ্বিপদ-প্রক্রিয়া অনুসারে

$$T_0 \circ T = T \circ T_0 = T$$

কারণ ধরা যাক T চলনে $(x,y)\to(x',y')$ এবং $T_\circ$ চলনে

$(x';y')\to(x''y'')$, তাহলে

$$x''=x'=x+a$$

$$y''=y'=y+b$$

অর্থাৎ $T\circ T_0=T$, অনুরূপভাবে $T_\circ\circ T=T$

$\therefore$ T_0 ঃ $x'=x$, $y'=y$, S(T) সেটে সংজ্ঞাত প্রক্রিয়া সাপেক্ষে স্থিরক-উপাদান।

S(T) এর যে কোনও উপাদান $T: x'=x+a,\ y'=y+b$

এর বিপরীত উপাদান $T^{-1}: x'=x-a,\ y'=y-b\quad a, b\in R$

ধরা যাক, $T:(x,y)\to(x',y')$, $T^{-1}:\ (x',y')\to(x'',y'')$ তাহলে

$$\left.\begin{array}{l} x''=x'-a=(x+a)-a=x \text{ অর্থাৎ } x''=x \\ y''=y'-b=(y+b)-b=y \text{ অর্থাৎ } y''=y \end{array}\right\} T_\circ$$

$\therefore$ $T\,T^{-1}=\ T_0\ =T^{-1}T$ (অনুরূপে দেখানো যায়)

$\therefore$ S(T) প্রদত্ত দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে একটি **আবেলীয় গ্রুপ**।

উদা (i) এককে (Unity)-এর n-তম n-সংখ্যক মূল/বীজ

$$\alpha=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\quad k=0,1,2,\ \ldots\ldots\ldots n-1$$

যদি $\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ হয় তাহলে n-সংখ্যক মূল/বীজ

$1,\alpha,\alpha^2\ldots\ldots\ldots\ldots,\alpha^{n-1}$। ধরাযাক C এই n সংখ্যক উপাদান $1,\alpha,\alpha^2,\alpha^{n-1}$ এর সেট। গাণিতিক তন্ত্র (C,o) এর প্রকৃতি বিশ্লেষণ করা যাক।

1. যদি যেকোন দুটি উপাদান $\alpha^r,\alpha^s\in C\quad r,s\le n-1$,

তাহলে $\alpha^r\circ\alpha^s=\alpha^{r+s}\in c$ যদি $r+s\le n-1$ হয় যদি $r+s>n-1$, ধরা যাক

$r+s=n+p,\ \ p<n-1$

তাহলে $\alpha^{r+s}=\alpha^n.\alpha^p=\alpha^p\in C\ \because\ \alpha^n=1$

$\therefore$ C সেটটি গুণ সাপেক্ষে আবদ্ধ।

$\therefore$ (C, $\circ$) একটি দলক (groupoid)

II. $\left(\alpha^{r}.\alpha^{s}\right)\alpha^{t}=\alpha^{r+s}.\alpha^{t}=\alpha^{r+s+t}$

$$=\alpha^{r}.\alpha^{s+t}=\alpha^{r}.\left(\alpha^{s}.\alpha^{t}\right)$$

$\therefore$ (C, $\circ$)-তে সংযোগধর্ম বজায় আছে

III. 1, (C, $\circ$) তন্ত্রে স্থিরক উপাদান। কারণ যে কোনও উপাদান $\alpha^{r}\in C,\ r\le n-1$

$1.\alpha^{r}=\alpha^{r}.1=\alpha^{r}$

IV. প্রতিটি উপাদানের বিপরীত উপাদান C সেটে বিদ্যমান। যেমন $(\alpha)^{-1}=\alpha^{n-1}$, $(\alpha^{2})^{-1}=\alpha^{n-2}$..... ইত্যাদি

$\therefore \{C, o\}$ একটি গ্রুপ।

11.3.3 সসীম গাণিতিক-তন্ত্র

একটি দ্বিপদ-প্রক্রিয়া বিশিষ্ট কোনও গাণিতিক তন্ত্রে যদি উপাদানসংখ্যা সীমিত হয়, তাহলে তাকে সসীম গাণিতিক-তন্ত্র (Finite system) বলা হয়।

সীমিত সংখ্যক উপাদানযুক্ত দলকে বা অর্ধদলকে যথাক্রমে সসীম দল (finite group) বা সসীম অর্ধদল (finite semigroup) বলা হয়।

উপাদানের সংখ্যাকে ঐ তন্ত্রের "ক্রম" বা অর্ডার (order) বলা হয়।

যেমন :— (i) একক (unity)-এর n-তম বীজগুলির গুণ প্রক্রিয়া যুক্ত সেট।

এটির উপাদান সংখ্যা 'n' এবং এটি একটি দল (group)। কাজেই এটি 'n' ক্রমযুক্ত সসীম দল।

(ii) $\{z_p, o\}$ একটি অর্দ্ধদল এর 'ক্রম' 'p' ।

(ii) $\{z_p, +\}$ একটি দল, এর 'ক্রম' 'p'।

প্রতিপাদ্য 6 : যদি কোনও সসীম অর্ধদল (Semigroup) অপসারণ ধর্ম বজায় থাকে, তবে সেটি একটি গ্রুপ হবে।

প্রমাণ ঃ — ধরা যাক S একটি 'n'-ক্রমবিশিষ্ট সেমিগ্রুপ, যার মধ্যে 'অপসারণ ধর্ম' প্রযুক্ত হতে পারে, অর্থাৎ

(i) $pa = pb$ হলে $a = b$ (বাম অপসারণ ধর্ম)

(ii) $aq = bq$ হলে $a = b$ (ডান অপসারণ ধর্ম)

যখন $a,b,p,q \in S$

ধরা যাক S এর উপাদানগুলি $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n$ প্রতিটি স্বতন্ত্র।

$\because$ S অর্ধদল, আবদ্ধ ধর্ম অনুসারে, $a_i a_1, a_i a_2, \ldots, a_i a_n, a_i \in S$, প্রতিটি উপাদান $\in S$ এবং প্রতিটি উপাদানই স্বতন্ত্র, অপসারণ ধর্ম অনুসারে। এখন যেহেতু S এর উপাদান সংখ্যা ঠিক 'n' উপরোক্ত 'n' সংখ্যক দ্বিপদ-প্রক্রিয়ালব্ধ উপাদান $a_i a_1, a_i a_2, \ldots\ldots, a_i a_n \ldots$ (A) S-এরই উপাদান $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ ভিন্ন ক্রমানুসারে।

$\therefore$ (A) মধ্যে একটি এবং কেবলমাত্র একটি উপাদন, ধরি, $a_i a_j$ S-এর একটি নির্দিষ্ট উপাদান S-এর একটি নির্দিষ্ট উপাদান a_k এর সঙ্গে অভিন্ন।

$\therefore$ সমীকরণ $a_i x = a_k$ এর অনন্য সমাধান $x = a_j$ ।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় $y a_i = a_k$ সমীকরণেরও অনন্য সমাধান S-এর মধ্যে বিদ্যমান।

সুতরাং, 11.3.2 প্রতিপাদ্য 5 এর বিকল্প বিবৃতি অনুসারে প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী অর্ধদলটি একটি দল।

বিঃদ্রঃ উপরের প্রতিপাদ্যের মধ্যে প্রদত্ত শর্তটি অসীম-তন্ত্রে (infinite system) কার্যকরী নাও হতে পারে। যেমন Z^- 'গুণ' সাপেক্ষে অর্ধদল; অপসারণ ধর্ম বজায় আছে ; কিন্তু Z^- গুণ সাপেক্ষে গ্রুপ নয়। Z^--এ উপাদান সংখ্যা **অসীম**।

উদাহরণ : যে কোনও একটি পূর্ণসংখ্যা a,-কে $p \in N$ দিয়ে ভাগ করলে সম্ভাব্য ভাগশেষ যথাক্রমে $0,1,2\ldots\ldots(p-1)$, যদি a-এর অনুষঙ্গী ভাগশেষ r, $0 \le r \le p-1$, হয়, তাহলে আমরা লিখব $a \equiv r$ মড্ (p) এবং $a \in (r)$, অর্থাৎ a, (r) শ্রেণীর অন্তর্ভুক্ত; অর্থাৎ (r) শ্রেণীভুক্ত যেকোনও সংখ্যাকে $p.t + r$, t যে কোনও পূর্ণসংখ্যা, লেখা যায়। যে কোনও পূর্ণসংখ্যাই (0), (1), (2)........,(p–1), p-সংখ্যক শ্রেণীর মধ্যে যে কোন একটি শ্রেণীতে থাকবেই এবং কেবলমাত্র একটি শ্রেণীতেই থাকবে। যদি $a,b \in Z$ এমন হয় যে p দিয়ে ভাগ করলে দুটি সংখ্যারই ভাগশেষ একই থাকবে, তাহলে সংখ্যাদুটি একই শ্রেণীর অন্তর্ভুক্ত হবে। কাজেই p-এর সাপেক্ষে Z-এর ভাগফল-সেট (Quotient set)-এর p সংখ্যক উপাদানগুলি (0), (1), (2),.....(p–1); এই ভাগফল-সেটকে Z_p চিহ্নের সাহায্যে নির্দিষ্ট করা হয়। একে বলা হয় 'p-ভাজক সাপেক্ষে অবশিষ্টের শ্রেণীবিন্যাস" (residue classes modulo p)

এই p-সংখ্যক অবশিষ্ট শ্রেণী-উপাদান বিশিষ্ট ভাগফল সেটটি একটি সসীম-সেট, যার ক্রম (order) p.

উদাহরণস্বরূপ Z_5 বলতে বুঝি 5 টি শ্রেণী —

5 ভাজক সাপেক্ষে 5 টি অবশিষ্ট শ্রেণীবিন্যাস — (0), (1),(2) (3), (4) ।

যে কোনও পূর্ণসংখ্যা $a \in z$ কে লেখা যায় $a = 5d+r$, $r = 0,1,2,3,4$; অবশিষ্ট r এর মান অনুসারে a সংখ্যাটি কোন শ্রেণীতে যাবে সেটি নির্ণীত হবে, যেমন $17 = 5.3 + 2 \in (2)$ সমগ্র পূর্ণসংখ্যার সেটটি এই 5টি শ্রেণীতে বিভক্ত হবে অর্থাৎ $Z_5 = \{(0), (1), (2), (3), (4)\}$

যোগ ও গুণ এই দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া Z_p সেটে এইভবে সংজ্ঞাত :

$(a) + (b) = (a+b)$ যখন $(a), (b) \in Z_p$

$(a)\ (b) = (a.b)$

(a) শ্রেণীতে a ব্যতীত $a + tp$, $t = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$ সংখ্যাগুলি বিদ্যমান। তেমনি (b) শ্রেণীতে b ব্যতীত $b+rp$, $r=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ সংখ্যাগুলি বিদ্যমান। কখন কখন শ্রেণীগত উপস্থাপনায় a,b যথাক্রমে (a) ও (b) শ্রেণীর প্রতিনিধি হিসাবে ব্যবহৃত হয়, আলোচ্য শ্রেণীবিন্যাসে 0, 1, 2, 3, 4 সংখ্যাগুলি (0), (1), (2), (3), (4) শ্রেণীগুলির প্রতিভূ হিসাবে ব্যবহৃত হয়।

(a) শ্রেণীতে a ব্যতীত $a+tp$, $t=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ সংখ্যাগুলি বিদ্যমান; অনুরূপে (b) শ্রেণীতে b ব্যতীত $b+sp$, $s = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ সংখ্যাগুলি বিদ্যমান; শ্রেণীগত উপস্থাপনায় (a) এবং (b) শ্রেণীগুলির প্রতিভূ হিসাবে যথাক্রমে a, b সংখ্যাদ্বয় ব্যবহৃত হয়। এখন,

$$(a) + (b) = (a+tp) + (b+sp) = (\{a+tp\}+\{b+sp\})$$

$$= (a+b+\{t+s\}p) = (a+b) \in Z_p$$

আবার

$$(a).(b) = (a+tp).(b+sp) = (\{a+tp\}.\{b+sp\})$$

$$= (ab+\{as+bt+tsp\}p) = (a.b) \in Z_p$$

$\therefore\ Z_p$ সেটটি যোগ ও গুণ-দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষেই আবদ্ধ।

আবার, $(a) + (b) = (a+b) = (b+a) = (b)+(a)$ যেহেতু (Z+) ও (Z, .) উভয়েই বিনিময় যোগ্য।

এবং $(a).(b) = (a.b) = (b.a)=(b).(a)$

$\therefore\ Z_p$ সেটটি যোগ ও গুণ সাপেক্ষে আবেলীয়।

যোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে Z_p সেটটির প্রকৃতি কেমন আলোচনা করা যাক।

যেহেতু $(a)+(b) = (a+b)$, $(a), (b) \in Z(p)$ যোগ ''সাপেক্ষে'' Z_p আবদ্ধ আগেই দেখান হয়েছে।

এখন, $\{(a)+(b)\}+(c) = (a+b+c) = (a) + \{(b)+(c)\}$

অর্থাৎ ''সংযোগ'' ধর্ম বজায় আছে।

আবার, $(0) + (a) = (a) + (0) = (a)$

$\therefore$ (0) শ্রেণীটি Z_p সেটে যোগ সাপেক্ষে স্থিরক উপাদান; (a) শ্রেণীর বিপরীত উপাদান (p–a) শ্রেণী $0 \le a \le p-1$

কারণ (a)+(p–a) = (p) = (0)

(p–a) + (a) = (p) = (0)

$\therefore Z_p$ সেটে যোগ সাপেক্ষে যে কোন উপাদানের অনন্য বিপরীত উপাদান বিদ্যমান।

আবার (a)+(b) = (a+b) = (b)+(a) $[\because\ a, b \in z,\ \ a+b=b+a]$

$\therefore Z_p$ যোগ সাপেক্ষে আবেলীয় গ্রুপ।

$\therefore Z_p$ সেটটি আবেলীয় যোজ্য গ্রুপ।

এখন গুণন সাপেক্ষে Z_p সেটটির প্রকৃতি কেমন দেখা যাক।

উপরোক্ত আলোচনায় Z_p সেটটিতে গুণের সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে এবং দেখানো হয়েছে Z_p সেটটি গুণ সাপেক্ষে আবদ্ধ।

এবার {(a).(b)}.(c) = (a.b).(c)

= (a.b.c)

= (a).(b.c) = (a). {(b).(c)}

যেহেতু a,b,c $\in Z, Z$ গুণ সাপেক্ষে সংযোজ্য অর্থাৎ a.(b.c) = (a.b).c

$\therefore Z_p$ সেটে গুণ সাপেক্ষে সংযোগ ধর্ম বজায় আছে।

(1) শ্রেণীটি Z_p সেটে গুণ সাপেক্ষে স্থিরক উপাদান। যেহেতু

(1).(a) = (1.a) = (a.1) = (a).(1) = (a), (a)$\in Z_p$

[$\because$ Z সেট গুণসাপেক্ষে সংযোজ্য]

$\therefore Z_p$ সেটে 'গুণ' সাপেক্ষে অনন্য স্থিরক উপাদান বিদ্যমান এবং সেটি (1) শ্রেণী।

গুণ সাপেক্ষে Z_p সেটের সকল উপাদানের বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব নেই। যেমন 0-এর বিপরীত উপাদান Z_p তে নেই।

$\therefore Z_p$ সেটটি গুণ সাপেক্ষে আবেলীয় দলাঙ্গ (monoid) কিন্তু **দল** নয়।

প্রক্রিয়া-করণ-সারণী (Composition Table)

সসীম স্বল্পসংখ্যক উপাদানযুক্ত কোনও গাণিতিক তন্ত্রে আলোচিত পাঁচটি শর্ত বা স্বতঃসিদ্ধ বর্তায় কিনা তা সহজেই প্রক্রিয়া-করণ-সারণী পর্যবেক্ষণ করে অনুধাবন করা যায়। প্রদত্ত-তন্ত্রটি যদি দল হয়, তাহলে একে

অনেকসময় গ্রুপ-সারণী বলা হয়। প্রক্রিয়ার নামানুসারে সারণীর নামকরণ করা হয় অনেক সময়, যেমন যোগ-সারণী গুণ-সারণী......ইত্যাদি।

ধরা যাক G একটি 'n' ক্রমযুক্ত সসীম গ্রুপক। অর্থাৎ, n সংখ্যক স্বতন্ত্র (distinct) উপাদান G সেটে বর্তমান। নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে একটি সারণী প্রস্তুত করা যায় ঃ উপাদানগুলি অনুভূমিক (horizontally) এবং উল্লম্বভাবে (vertically) যে কোনও ক্রমানুসারে সাজান হলো। সারণীতে উপাদানগুলির প্রারম্ভিক অনুভূমিক ও উল্লম্ব সজ্জাকে যথাক্রমে 0-সারি (row) ও 0 খাত (column) আখ্যা দেওয়া যেতে পারে। সারণীতে k-তম সারি (row) এবং i-তম খাত (column)-এর ছেদবিন্দু (k,i)-তম অবস্থান নির্দিষ্ট করে। যদি p, 0-খাতে i তম উপাদান এবং q, 0-সারির j-তম উপাদান হয়, তাহলে প্রক্রিয়াজ উপাদান (Composed element) pq, সারণীতে (i – j) তম স্থানের উপাদান। এইভাবে একটি বর্গসারণী প্রস্তুত করা যেতে পারে। আমরা একটি দলক (groupoid) G নিয়ে শুরু করেছি। কাজেই আবদ্ধ ধর্মানুসারে প্রতিটি প্রক্রিয়াজ উপাদান সারণীতে বিদ্যমান থাকবে। সারণীটির বৈশিষ্ট্য বিশ্লেষণ করে প্রদত্ত গাণিতিক-তন্ত্রটির প্রকৃতি বলা সম্ভব।

উদাহরণ : G {1, –1, i, –i} সেটটির গুণ-সারণী প্রস্তুত করুন। সারণীর বৈশিষ্ট্য থেকে সেটের প্রকৃতি বিচার করুন।

G সেটটি একটি সসীম 4 ক্রমযুক্ত সেট, 4 টি স্বতন্ত্র উপাদান নিয়ে গঠিত। বর্গাকৃতি এই সারণীতে প্রতিটি সারি বা প্রতিটি খাতে চারিটি করে প্রক্রিয়াজ উপাদান প্রতিটি সেট-এরই উপাদান।

∴ আবদ্ধ ধর্ম G সেটে গুণ সাপেক্ষে বজায় আছে।

সংযোগ ধর্ম সরাসরি সারণীতে প্রতিভাত হয় না। G সেটটি G এর একটি সাবসেট। আবার G গুণ সাপেক্ষে সংযোজ্য এবং সংযোগ ধর্ম অনুসারী (hereditary)।

∴ এই সংযোগ ধর্ম G-এর সাবসেট G সেটেও বজায় থাকবে।

0-খাতের (column) উপাদানগুলির ক্রম এবং 0-সারিতে (row) 1-এর অনুষঙ্গী খাতে উপাদানগুলির ক্রম একই। অতএব ডানস্থিরক 1।

	1	–1	i	–i
i	i	–i	–1	1
–i	–i	i	1	–1
1	1	–1	i	–i
–1	–1	1	–i	i

প্রাক্রয়া সারণী 1

আবার 0 সারিতে উপাদানগুলির ক্রম এবং 0 খাতে অবস্থিত 1-এর অনুষঙ্গী সারিতে উপাদানগুলির ক্রম একই। অতএব বাম স্থিরক 1 ।

∴ G সেটে অনন্য স্থিরক উপাদানের অস্তিত্ব বিদ্যমান। উপাদানটি 1 ।

প্রতিটি উপাদানের বিপরীত উপাদান G সেটে বর্তমান।

$i^{-1} = -i, \ (-1)^{-1} = -1$

সারণী থেকে কোন উপাদানের বিপরীত উপাদান নির্ধারণ করা সম্ভব। যদি আমরা i-এর বিপরীত উপাদান নির্ধারণ করতে চাই, 0 সারি i নির্বাচন করে তার খাতে উপাদানগুলির মধ্যে স্থিরক উপাদান 1 এর অনুষঙ্গী

ঐ একই সারিতে 0 খাতে উপাদানটি, এখানে $-i$ উদ্দিষ্ট বিপরীত উপাদান (বাম) হবে। অনুরূপভাবে ডান-বিপরীত উপাদান নির্ধারণ করা যায় (প্রক্রিয়া সারণী 1)

G সেটটি 'গুণন' সাপেক্ষে বিনিময়যোগ্য বা আবেলীয়। সারণীতে এই আবেলীয় ধর্ম প্রতিফলিত হয়, যদি $a_{ik} = a_{ki}$ অর্থাৎ, সারণী যদি কর্ণ বরাবর প্রতিসম হয়; কিন্তু এক্ষেত্রে সারণীটি প্রস্তুত করার সময় 0-সারিতে এবং 0-খাতে উপাদানের ক্রম একই রাখতে হবে। আলোচ্য সেটটি কর্ণ (diagonal) বরাবর প্রতিসম।

$\therefore$ সারণী বিশ্লেষণ করে বলা যায়, $G\{1,-1,i,-i\}$ সেটটি গুণ সাপেক্ষে একটি আবেলীয় গ্রুপ (সারণী 2)।

	1	−1	i	−i
1	1	−1	i	−i
−1	−1	1	−i	i
i	i	−i	1	1
−i	−i	i	1	1

সারণী 2

আবার 0-খাতে অবস্থিত কোনও উপাদান, ধরা যাক p, বাম-শূন্য উপাদান হবে (left-zero-element), যদি p-এর অনুষঙ্গী সারিতে প্রতিটি উপাদানই p হয়। সদৃশ উপায়ে 0-সারিতে অবস্থিত উপাদান থেকে ডান-শূন্য-উপাদানকে পাওয়া যাবে।

আপাতদল (quasi group) এর ক্ষেত্রে $px = q$ সমীকরণের অনন্য সমাধান $\in, Q, \forall p, q \in Q$. সারণীতে 0-খাতে p-এর অবস্থান যেখানে, তার অনুষঙ্গী অনুভূমিক সারিতে Q এর উপাদানগুলির মধ্যে q কোনও না স্থানে বিদ্যমান থাকবে। q যে খাতে অবস্থিত তার অনুষঙ্গী O সারির উপাদানটি উল্লিখিত সমীকরণের সমাধান। উপরের উদাহরণ $ix = -1$ এর সমাধান $x = i$, $yi = -1$ এর সমাধান $y = i$, $-ix = 1$ এর সমাধান $x = i$, $y(-i) = 1$ এর সমাধান $y = i$

Q-এর প্রতিটি উপাদান-যুগলের অনুষঙ্গী এরূপ সমীকরণের সমাধান Q-এর উপাদান হিসাবে সারণীর প্রতিটি সারিতে বা খাতে পাওয়া যাবে। অর্থাৎ সারণীতে প্রতিটি সারিতে এবং প্রতিটি খাতে ভিন্ন ভিন্ন ক্রমে আপাতদল (quasi group) Q-এর প্রতিটি উপাদানই বিদ্যমান থাকবে। আপাতদলের এই বৈশিষ্ট্য পর্যবেক্ষণ করা যেতে পারে।

সদৃশ যুক্তিতে অর্থাৎ যেহেতু গুণ-সারণীর (1)-এর প্রতিটি সারিতে এবং প্রতিটি খাতে $G\{1, -1, i, -i\}$ সেটের প্রতিটি উপাদান বিদ্যমান, তাই সেটটি গুণ সাপেক্ষে আপাতদল (quasigroup)ও বলা যায়।

উদাহরণ : Z_5 সেটের যোগ-সারণী বিশ্লেষণ করে, যোগপ্রক্রিয়া সাপেক্ষে Z_5-এর প্রকৃতি বিচার করুন।

Z_5 সেট অর্থাৎ $Z/\{5$ ভাজক সাপেক্ষে অবশিষ্টের শ্রেণী বিন্যাস সেটের উপাদানগুলি 5টি শ্রেণী (0), (1), (2) (3), (4) ; প্রতিভূ হিসাবে 0, 1, 2, 3, 4 সংখ্যাগুলি সারণীতে ব্যবহৃত হলো।

উপাদানগুলিকে 0-অনুভূমিক সারি ও 0-উল্লম্ব খাতে একই ক্রমে লেখা হল। এখন Z_5-এ 'যোগ'-এর সংজ্ঞানুসারে

$$(a) + (b) = (a+b),$$

$$\forall (a), (b) \in Z_5$$

প্রক্রিয়াজ উপাদানগুলি সারণীর সারি বরাবর বা খাত বরাবর নিয়মমাফিক সুস্থিত হল। বর্গ সারণীটি প্রস্তুত হল।

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

সারণী 3

যোগ সাপেক্ষে Z_5

(1) একটি দলক (groupoid), যেহেতু সকল প্রক্রিয়াজ উপাদানই Z_5-এর একটি উপাদান।

(2) 0-সারির '0'-(শূন্যশ্রেণী)-র অনুষঙ্গী খাতের উপাদানগুলির ক্রম 0-খাতের উপাদানগুলির ক্রমের সঙ্গে অভিন্ন আবার 0-খাতের '0'— উপাদানের অনুষঙ্গী সারির উপাদানগুলির ক্রম এবং 0-সারির উপাদানগুলির ক্রম অভিন্ন।

$\therefore$ 0 শ্রেণী যোগসাপেক্ষে Z_5 সেটে স্থিরক উপাদান।

(3) প্রতিটি উপাদানের বিপরীত উপাদান Z_5-এ বিদ্যমান।

$(1)^{-1} = (4)$, $(2)^{-1} = (3)$

(4) প্রতিটি সারি এবং খাতে সেটের সকল উপাদান (বিভিন্ন ক্রমে) বিদ্যমান।

$\therefore$ সেটটি একটি আপাতদল (quasigroup)।

উদাহরণ ঃ Z_5 সেটের গুণ সারণী বিশ্লেষণ করে এর বৈশিষ্ট্যগুলি পর্যবেক্ষণ করুন।

Z_5 সেটের উপাদানগুলি সীমিত সংখ্যক 5টি শ্রেণী (0), (1), (2), (3), (4) ।

গুণ প্রক্রিয়া নিম্নোক্ত উপায়ে সংজ্ঞাত —

$(a).(b) = (a.b) \qquad (a), (b) \in Z_p$

সারণীটি প্রস্তুত করতে 0-সারি ও 0-খাতে একই ক্রমে উপাদানগুলি সাজান হলো; 0 1 2 3 4.

1. এটি একটি দলক (groupoid)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

সারণী 4

2. 0-শ্রেণী একটি শূন্য উপাদান (zero element), কারণ 0 সারির 0 উপাদানের অনুষঙ্গী খাতে সব কটি প্রক্রিয়াজ উপাদানই 0 অর্থাৎ এটি ডান-শূন্য উপাদান। আবার 0-খাতে 0-উপাদানের অনুষঙ্গী সারিতে সব কটি প্রক্রিয়াজ উপাদানই 0 ; অর্থাৎ এটি বাম-শূন্য উপাদান।

$\therefore$ Z_5 সেটে গুণ সাপেক্ষে 0-শ্রেণী একটি শূন্য উপাদান।

3. স্থিরক উপাদান 1।

0-খাতে 1-এর অনুষঙ্গী সারিতে প্রক্রিয়াজ উপাদানগুলি এবং 0 সারিতে উপাদানগুলি একই ক্রমতে বিন্যস্ত।

0 সারিতে 1 এর অনুষঙ্গী খাতে গুণজ উপাদানগুলির ক্রম এবং 0 খাতে বিন্যস্ত উপাদানগুলির ক্রম একই।

$\therefore$ 1 শ্রেণী বাম ও ডান স্থিরক উপাদান।

4. সারণীটি মূলকর্ণ সাপেক্ষে প্রতিসম। $\therefore$ Z_5 গুণ সাপেক্ষে আবেলীয়।

5. $(2)^{-1} = (3)$, $(3)^{-1} = (2)$, $(4)^{-1} = 4$

(0) শ্রেণীর বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব Z_5 সেটে নেই।

6. Z_5 সেট গুণ সাপেক্ষে দল (group) নয়।

7. সবকটি সারি বা সবকটি খাতে Z_5-এর উপাদানগুলি বিদ্যমান নেই। 0-সারির 0-শ্রেণীর অনুষঙ্গী খাতে সব কটি উপাদানই 0। আবার 0-খাতের 0-শ্রেণীর অনুষঙ্গী সারিতে সবকটি উপাদানই 0।

$\therefore$ Z_5 সেটটি গুণ সাপেক্ষে আপাতদল নয়।

ধরা যাক কোনও প্রক্রিয়াজ সারণী প্রস্তুত করার সময় 0-খাতে স্থিরক উপাদানকে প্রথম স্থানে রেখে উপাদানগুলিকে সাজান হল। এইবার 0-সারিতে প্রথমস্থানে স্থিরক-উপাদানটিকে রেখে 0-খাতের উপাদানগুলিকে যে "ক্রমে" সাজান আছে, অনুষঙ্গী (corresponding) বিপরীত উপাদানগুলিকে সেই একই "ক্রমে" সাজান হলো। এই রকম সারণীকে **স্বভাবী সারণী বা নর্মাল সারণী** (Normal table or Brandt table) বলা হয়। এই সারণীতে কর্ণ বরাবর উপাদানগুলি সবই স্থিরক উপাদান।

উদা : সারণী 3-কে এইভাবে সাজালে আমরা পাব।

0-খাত ঃ 0, 1, 2, 3, 4

0-সারি ঃ 0, 4, 3, 2, 1

এখানে প্রদত্ত সেট Z_5 সংজ্ঞাত প্রক্রিয়া "যোগ"

$(a) + (b) = (a+b)$, $(a), (b) \in Z_5$

স্থিরক উপাদান (0)

(0), (1), (2), (3), (4) শ্রেণীগুলির প্রতিভূ

0, 1, 2, 3, 4।

	0	4	3	2	1
0	0	4	3	2	1
1	1	0	4	3	2
2	2	1	0	4	3
3	3	2	1	0	4
4	4	3	2	1	0

সারণী 5

এখানে বিপরীত উপাদানগুলি : $(1)^{-1} = (4)$, $(2)^{-1} = (3)$, $(0)^{-1} = (0)$.

গাণিতিক-অধতন্ত্র (sub-systems)

ধরা যাক G একটি এক-প্রক্রিয়া-বিশিষ্ট দ্বিনিধানী-তন্ত্র (binary system); যদি G-এর একটি শূন্যবিহীন (non-empty) উপসেট H এমন হয় যে G এর মধ্যে যে দ্বিপদ-প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত, H সেই একই দ্বিপদ প্রক্রিয়া বিশিষ্ট নিজেই একটি দ্বিনিধানী-তন্ত্র, তাহলে H-কে G এর একটি **গাণিতিক অধতন্ত্র** বলা হয়।

যেমন ধরা যাক (i) G একটি গ্রুপক, (ii) $H \subset G$

(iii) G-এর মধ্যে যে দ্বিপদ প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত, H সেই একই দ্বিপদ-প্রক্রিয়া সাপেক্ষে আপাতদল (quasigroup), তাহলে H-কে G গ্রুপকের একটি অধআপাতদল বলা হয়।

একইভাবে H-কে অধদলক (subgroupoid), অধঅর্ধদল (subsemigroup) অধআপাতদল (sub-quasigroup) বা অধদল (subgroup) বলা হবে, H নিজেই যদি G-এর মধ্যে সংজ্ঞাত সেই একই দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে যথাক্রমে একটি দলক, অর্ধদল, আপাতদল অথবা দল হয়।

বিঃদ্র ঃ (a) সংযোগ ধর্ম অনুক্রমী (hereditary); কাজেই যদি G সংযোজ্য হয়, তবে G-এর প্রতিটি গাণিতিক অধতন্ত্রই সংযোজ্য হবে।

যেমন (i) কোনও অর্ধদলের একটি অধদলক (subgroupoid) অবশ্যই একটি অধঅর্ধদল (subsemigroup) হবে।

(ii) কোনও দলের একটি অধআপাতদল অবশ্যই একটি অধদল হবে।

(b) মূল-গাণিতিক-তন্ত্র ও অধতন্ত্র, উভয়ের মধ্যে একই দ্বিপদ-প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত থাকবে।

যেমন Z^- যোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে একটি অর্ধদল, কিন্তু গুণন-প্রক্রিয়া সাপেক্ষে অর্ধদল Z-এর অধঅর্ধদল (sub semigroup) নয়, পরন্তু, এটি যোজ্য গ্রুপ Z-এর একটি অধঅর্ধদল।

অধদলের (Subgroup) শর্তাবলী

কোনও দল G-এর একটি অধতন্ত্র H একটি অধদল হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি H-এর যে কোনও দুটি উপাদান h, k এর জন্য (i) $hk \in H$ (ii) $h^{-1} \in H$

প্রমাণ — প্রদত্ত শর্তানুসারে গ্রুপ G-এর একটি শূন্যবিহীন উপসেট H এমন যে G-এর মধ্যে যে দ্বিপদ প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত, H নিজেই সেই একই প্রক্রিয়া সাপেক্ষে একটি দ্বি-নিধনী তন্ত্র। উপরন্তু (i) থেকে বলা যায় আবদ্ধ ধর্ম H-এর মধ্যে বজায় আছে। (ii) থেকে বলা যায় H-এর অন্তর্ভুক্ত যে কোনও উপাদানের বিপরীত উপাদান H-এর মধ্যে বিদ্যমান।

আবার যেহেতু G একটি গ্রুপ এবং যেহেতু সংযোগ ধর্ম অনুক্রমী (hereditary), সুতরাং সংযোগ ধর্ম উপসেট H-এর মধ্যেই বজায় আছে।

পুনরায় (i) এবং (ii) থেকে বলা যায় যে কোন উপাদান $h \in H$ $hh^{-1} = 1 \in H$ অর্থাৎ স্থিরক উপাদান H-এর মধ্যে বিদ্যমান।

$\therefore$ H দল G-এর একটি অধদল।

বিকল্প বিবৃতি

গ্রুপ G-এর একটি উপ-তন্ত্র (Subsystem) H, G-এর একটি অধদল (Subgroup) হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি H-এর যে কোনও দুটি উপাদান h, k এর জন্য $h^{-1}k \in H$

প্রমাণ — শর্তটি প্রয়োজনীয়

ধরা যাক গ্রুপ G-এর একটি উপতন্ত্র H,G-এর একটি উপ-গ্রুপ।

$\therefore$ H, G-এর মধ্যে সংজ্ঞাত একই দ্বিপদ-প্রক্রিয়া সাপেক্ষে একটি গ্রুপ। যেহেতু H একটি গ্রুপ আবদ্ধ ধর্ম H-এর মধ্যে বজায় আছে এবং $h^{-1} \in H, \forall h \in H$

$$\therefore \; h^{-1}k \in H, \qquad h, k \in H$$

শর্তটি যথেষ্ট

প্রদত্ত শর্তানুসারে $h, k \in H$ হলে $h^{-1}k \in H$, সেটি গ্রুপ G-এর একটি অধতন্ত্র। প্রমাণ করতে হবে H, G-এর একটি অধদল (subgroup) ।

$\because$ H, গ্রুপ G-এর একটি গাণিতিক অধতন্ত্র অতএব $H \subset G$ এবং G-এর মধ্যে যে দ্বিপদ প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত, H-এর মধ্যে সেই একই দ্বিপদ প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত।

সংযোগধর্ম যেহেতু অনুক্রমী (hereditary), এবং G যেহেতু দল সংযোগ ধর্ম G তে প্রদত্ত প্রক্রিয়া সাপেক্ষ সত্য, ফলতঃ H-এর মধ্যেও ঐ একই প্রক্রিয়া সাপেক্ষে সংযোগ ধর্ম বজায় আছে।

আবার $k = h$ নির্বাচন করলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে

$$h^{-1}h = 1 \in H$$

$\therefore$ স্থিরক উপাদান 1, H-এর মধ্যে বিদ্যমান।

এখন $k = 1$ নির্বাচন করলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে

$$h^{-1}1 = h^{-1} \in H$$

অর্থাৎ যে কোনও উপাদান $h \in H$ এর বিপরীত উপাদান h^{-1}-এর অস্তিত্ব H-এর মধ্যে বিদ্যমান।

$\therefore (h^{-1})^{-1} \in H, h$ যে কোনও উপাদান $\in H$

কিন্তু $(h^{-1})^{-1} = h$

$\therefore \; hk = (h^{-1})^{-1}k \in H$

অর্থাৎ বলা যায় "আবদ্ধ ধর্ম" H-এর মধ্যে বজায় আছে।

কাজেই, H গ্রুপ G-এর একই দ্বিপদ-প্রক্রিয়া-বিশিষ্ট এমন একটি উপসেট যে (i) আবদ্ধ ধর্ম, (ii) সংযোগধর্ম, (iii) স্থিরক উপাদানের অস্তিত্ব এবং (iv) H-এর যে কোনও উপাদানের অনুষঙ্গী বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব, H-এর মধ্যে চারটি স্বতঃসিদ্ধই সত্য।

$\therefore$ H, গ্রুপ G এর একটি অধদল (Subgroup) ।

বিঃদ্রঃ (i) শিক্ষার্থীগণকে অনুরোধ করা হচ্ছে, তারা যেন পর্যবেক্ষণ করেন দল G ও তার যেকোনও অধদল H-এর স্থিরক উপাদান অভিন্ন এবং H-এর অন্তর্ভুক্ত যে কোনও উপাদানের বিপরীত উপাদান, G-এর সাপেক্ষে ঐ উপাদানের বিপরীত উপাদানও অভিন্ন।

এছাড়া, (ii) দল G-কে তার নিজেরই একটি অধদল ধরা যায়।

উদাহরণমালা

উদাহরণ 1. প্রমাণ করতে হবে যে কোনও একটি পূর্ণসংখ্যা 'p' $\in z$ এর সকল পূর্ণসংখ্যক গুণিতকের অধতন্ত্রটি pZ বিনিময়যোগ্য দল Z-এর অধদল।

ইঙ্গিত : $\{Z,+\}$ একটি দল। প্রমাণ করতে হবে G, np, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$ এর-সেট $\{Z,+\}$ এর একটি উপগ্রুপ। (i) G, Z এর একটি উপসেট অর্থাৎ $G \subset Z$ একই যোগক্রিয়া + Z এবং G তে সংজ্ঞাত। (ii) $\forall a, b \in G, a = rp, b = sp$ (ধরা যাক) $r, s \in Z, a + b = rp + sp = (r+s)p \in G \quad \because r + s \in Z$; অতএব আবদ্ধধর্ম বজায় আছে। (iii) সংযোগধর্ম $\{Z,+\}$ বজায় আছে এবং এটি অনুক্রমী (hereditary); অতএব সংযোগধর্ম যোগ সাপেক্ষে G সেটে বজায় আছে। (iv) স্থিরক উপাদান $0 \in G, 0 + a = a + 0 = a, \forall a \in G$ (v) $\forall np \in G, n = 0, \pm 1, \pm z, \ldots\ldots, -np$ অনুষঙ্গী বিপরীত উপাদান এবং $-np \in G$ প্রতিটি উপাদানের বিপরীত উপাদান G সেটে বিদ্যমান। অতএব G, $\{Z, +\}$এর একটি যোজ্য উপগ্রুপ।

2. যদি দল G-এর একটি অধদল H হয় এবং K, H এর একটি অধদল (Subgroup) হয় তাহলে প্রমাণ করতে হবে যে K, G-এর একটি অধদল (Subgroup)

ইঙ্গিত ঃ যেহেতু H, G এর অধদল, $H \subset G$, একই প্রক্রিয়া G এবং H-এ সংজ্ঞাত এবং ঐ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে H একটি দল। এবার K, H এর একটি অধদল অতএব $K \subset H$, একই দ্বিপদ-প্রক্রিয়ায় H ও K এ সংজ্ঞাত এবং K ঐ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে গ্রুপ।

$\because H \subset G, K \subset H \therefore K \subset G$, একই প্রক্রিয়া G ও K-তে সংজ্ঞাত।

K ঐ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে গ্রুপ। অতএব K, G-এর একটি উপগ্রুপ।

3. যদি H এবং K উভয়েই গ্রুপ G-এর অধদল হয়, তাহলে প্রমাণ করতে হবে যে তাদের ছেদ $H \cap K$ দল G-এর অধদল।

উ : যেহেতু H, K, গ্রুপ G-এর উপগ্রুপ, $H \subset G$, $K \subset G$ এবং একই দ্বিপদ প্রক্রিয়া G, H, K সেটে সংজ্ঞাত।

$\therefore H \cap K \subset G$ এবং একই প্রক্রিয়াযুক্ত।

ধরি h, K যেকোনও দুটি উপাদান $\in H$ এবং $\in K$

$\therefore$ h, K $\in H \cap K$

আবার যেহেতু H একটি অধদল $h^{-1}k \in H$ এবং যেহেতু K একটি অধদল, $h^{-1}k \in k$

$\therefore h^{-1}k \in H \cap K$

$\therefore H \cap K$ গ্রুপ G-এর একটি অধদল (Subgroup)

বিঃ দ্রঃ (i) অনুরূপ যুক্তির সাহায্যে প্রমাণ করা যায়, কোন একটি গ্রুপ G-এর সসীম সংখ্যক অধদল $H_1, H_2, H_3, \ldots\ldots\ldots, H_n$-এর ছেদ $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap \ldots\ldots\ldots \cap H_n$, G-এর অধদল হবে।

(ii) দুই বা ততোধিক অধদলের 'সংযোগ' (Union) অধদল হওয়ার কোন নিশ্চয়তা নেই।

4. প্রমাণ করতে হবে যে Z (সকল পূর্ণসংখ্যার সেট), Q (সকল মূলদ সংখ্যার সেট) R (সকল বাস্তব সংখ্যার সেট) যোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে গঠিত সকল জটিল সংখ্যার দল C-এর অধদল।

11.4 সারাংশ

গাণিতিক তন্ত্র বলতে সাধারণত আমরা বুঝি এমন একটি সঞ্চয়ণ (Set) যার মধ্যে একটি বা দুটি দ্বিনিধানী প্রক্রিয়া (binary) সংজ্ঞাত। (মনে রাখা দরকার এ ছাড়াও অন্য প্রকারের গাণিতিক তন্ত্র বর্তমান) এক প্রক্রিয়াযুক্ত গাণিতিক তন্ত্রে যদি চারিটি বিশিষ্ট স্বতঃসিদ্ধ আরোপিত হয়, তবে তাকে দল (group) বলা হয়। দলের কিছু প্রকৃতিগত বৈশিষ্ট্য আছে ভিন্ন ভিন্ন বৈশিষ্ট্যযুক্ত একপ্রক্রিয়াবিশিষ্ট তন্ত্রকে বিভিন্ন নামকরণ করা হয় যেমন কেবলমাত্র আবদ্ধধর্ম সত্য হলে বলা হয় দলক (groupoid), দলকে সংযোগধর্ম বজায় থাকলে বলা হয় অর্ধদল (semigroup) বা অর্দ্ধদলে স্থিরক উপাদানের অস্তিত্ব বজায় থাকলে তাকে বলা হয় দলাঙ্গ (monoid) দলাঙ্গে যদি সংজ্ঞাত প্রক্রিয়া সাপেক্ষে, প্রতিটি উপাদানের অনন্য বিপরীত উপাদান বিদ্যমান থাকে, তবে তাকে বলা হয় গ্রুপ বা দল বা যূথ। দলের উপাদানসংখ্যা সীমিত হলে, তাকে বলা হয় সসীম দল (finite group) উপাদান সংখ্যাকে ঐ গ্রুপের ক্রম (order) বলা হয়।

কোনও গাণিতিক তন্ত্রের একই প্রক্রিয়াযুক্ত কোনও অধসঞ্চয়ণে (subset) যদি উপরের উল্লিখিত অনুরূপ বৈশিষ্ট্যগুলি বজায় থাকে, তবে তাকে যথাক্রমে অধদলক (subgroupoid), অধঅর্ধদল (subsemigroup) অধদলাঙ্গ (submonoid), উপদল (subgroup), বলা হয়।

বিভিন্ন সাংখ্যক-তন্ত্র (numerical system), রূপান্তর-মণ্ডলী (Transformations), গণিতের বিভিন্ন পরিমণ্ডল থেকে বিভিন্ন গাণিতিক তন্ত্রের উদাহরণ পাওয়া যায়।

11.5 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী ও উত্তরমালা

1. ধরা যাক Z পূর্ণসংখ্যার সেট; '0' চিহ্নিত দ্বিপদ প্রক্রিয়া নিম্নোক্ত প্রকারে সংজ্ঞাত হল। প্রদত্ত ঐ দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে Z দল কিনা বিচার করুন।

(i) $u \circ v = u, v$ এর ল. সা. গু

$u, v \in Z, u.v \in Z,$ কারণ দুটি পূর্ণসংখ্যার ল. সা. গু সর্বদাই একটি পূর্ণসংখ্যা।

$\therefore$ 'আবদ্ধ' ধর্ম বজায় আছে।

'সংযোগধর্ম' বজায় আছে $(u.v).w = u.(v.w), u, v, w \in z$

উদা: $(5 \circ 20) \circ 8 = 20 \circ 8 = 40$

$5 \circ (20 \circ 8) = 5 \circ 40 = 40$ $\therefore (5 \circ 20) \circ 8 = 5 \circ (20 \circ 8)$

স্থিরক উপাদান 1

কারণ Z-এর যে কোনও উপাদান a-এর জন্য $1 \circ a = a \circ 1 = a$

কোনও উপাদানের বিপরীত উপাদান Z সেটে বিদ্যমান নেই দুটি পূর্ণসংখ্যার ল.সা.গু 1 কখনই হয় না।

$\therefore$ Z প্রদত্ত দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে দল নয়। এটি অর্ধদল (semigroup) দলাঙ্গ (monoid)ও বটে।

(ii) $u \circ v = u + v + uv$

$u, v \in Z,\ u \circ v \in Z$;

দুটি পূর্ণসংখ্যার যোগফল, গুণফল পূর্ণসংখ্যাই হয়। অতএব প্রদত্ত দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে Z সেটটি আবদ্ধ।

$u, v, w \in Z,\ (u.v).w = u.(v.w) ....(A)$

$(u.v).w = (u + v - uv).w$

$= u + v - uv + w - (u + v - uv)w$

$= u + v + w - uv - uw - vw + uvw .....(B)$

$u.(v.w) = u.(v + w - vw) = u + v + w - vw - u(v + w - vw)$

$= u + v + w - vw - uv - uw + uvw .....(C)$

(B) ও (C) থেকে (A) প্রমাণিত।

$\therefore$ প্রদত্ত প্রক্রিয়া সাপেক্ষে Z সেটটি সংযোজ্য।

$0 \in Z$, 0 (শূন্য) স্থিরক উপাদান, যেহেতু

$0.u = (0 + u - 0.u) = u.\ \forall u \in Z$

Z এর অন্তর্ভুক্ত সকল উপাদানের বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব নেই। একমাত্র 0 এবং 2-এর বিপরীত উপাদান যথাক্রমে 0 এবং 2।

$\therefore$ এই দ্বিপদ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে Z সেটটি দল নয়।

(iii) $u.v = u \div v$

z, 'ভাগ' প্রক্রিয়া সাপেক্ষে 'আবদ্ধ' নয়, কারণ দুটি পূর্ণসংখ্যার ভাগফল একটি পূর্ণসংখ্যা নাও হতে পারে।

উদাহরণ স্বরূপ $2 \div 3 \notin Z$

(iv) $u.v = u, v$-এর ল. সা. গু $- u, v$ এর গ.সা.গু

আবদ্ধ ধর্ম বজায় আছে; কারণ দুটি পূর্ণসংখ্যার ল. সা. গু এবং গ. সা. গু এবং তাদের বিয়োগফল পূর্ণসংখ্যা। এটি একটি দলক (groupoid) 'সংযোগ' ধর্ম, প্রযোজ্য নয়। স্থিরক উপাদানেরও অস্তিত্ব নেই।

2. গাণিতিক তন্ত্র (G,.) এর প্রকৃতি বিশ্লেষণ করুন। $G = \{a^n., \ n \in Z\}, a > 0$ যখন $G = \{a^n, n \in Z\}\ a > 0$

উঃ I. ধরা যাক $u = a^m,\ v = \overset{p}{a}, \alpha, m, p \in Z \ \therefore u, v \in G$

$u.v = a^m.a^p = a^{m+p} \ \in G \ \because \ m + p \in Z$

$\therefore$ গুণ সাপেক্ষে G **আবদ্ধ**

II. G, সকল বাস্তবসংখ্যার সেট R-এর একটি অধসঞ্চয়ণ (subset) গুণসাপেক্ষে সংযোজ্য এবং সংযোগ ধর্ম অনুক্রমী (hereditary)

$\therefore$ G সেটে গুণ-সাপেক্ষে সংযোগধর্ম বজায় আছে।

III. $1 = a^{\circ} \in G$, 1, G সেটে প্রদত্ত প্রক্রিয়া সাপেক্ষে স্থিরক উপাদান,

কারণ $1.a^m = a^m.1 = a^m, \ \ m \in Z$

IV. $a^{-m} \in G,\ a^m \in G$ এর অনন্য বিপরীত উপাদান।

V. প্রদত্ত প্রক্রিয়া G সেটে আবেলীয়।

$\therefore (G,\circ), G = \{a^n, n \in Z\}$ একটি আবেলীয় দল।

3. ধরা যাক $S = \{(a,\ b) : a_, b \in R, a \neq 0\}$ S-এর ওপর গুণ প্রক্রিয়া এইভাবে সংজ্ঞাত হলো যে

(a, b) (c,d) = (ac, bc+d)

I. $\because a \neq 0,\ ac \neq 0$ এবং ac, $bc+d \in R$

$\therefore (ac, bc + d) \in S$

$\therefore$ Q প্রদত্ত প্রক্রিয়া সাপেক্ষে S 'আবদ্ধ'।

II. ধরা যাক (a,b), (cd), (e,f) $\in S'$

তখন {(a,b) (c,d)} (e,f)=(ac, bc+d) (ef)

$= \{ace\ (bc+d)e+f\}$

$= (ace\ bce+de+f)$

আবার $(a,b)\{(c,d)(e,f)\} = (a,b)\ (ce,\ de+f)$

$= (ace,\ bce+(de+f))$

$= (ace,\ bce+de+f)$

$\therefore\ \{(a,b)\ (c,d)\}\ (e,f) = (a,b)\ \{c,d)\ (e,f)\}$

$\therefore$ "সংযোগ" ধর্ম প্রদত্ত প্রক্রিয়া সাপেক্ষে সত্য।

III. স্পষ্টত: (1,0) S সেটে প্রদত্ত প্রক্রিয়া সাপেক্ষে স্থিরক উপাদান; কারণ যে কোনও উপাদান (e,d) $\in$ s, এর জন্য আমরা পাই

$(1,0)\ (c,d) = (1c,\ 0.c+d) = (c,d)$

$(c,d)\ (1,0) = (c.1\ d.1+0) = (c,d)$

IV. $\left(\frac{1}{c},-\frac{d}{c}\right).(c,d) = (1-d+d) = (1,0)$

(c,d), S-এর যে কোনও উপাদান; $c \neq 0, c,d \in R$

$\because\ c \neq 0\ \ \frac{1}{c} \neq 0\ \ \frac{1}{c},-\frac{d}{c} \in R$, অতএব $\left(\frac{1}{c},-\frac{d}{c}\right) \in S$

S-এর যে কোনও উপাদানের বিপরীত উপাদানও S সেটের মধ্যে বিদ্যমান।

V. $(a,b)\ (c,d) = (ac,\ bc+d)$

$(c,d)\ (a,b) = (ca,\ da+b)$

$\therefore (ab)(c,d) \neq (c,d)(a,b)$ আবেলীয় নয়।

$\therefore$ প্রদত্ত দ্বিপদ-প্রক্রিয়া সাপেক্ষে S একটি গ্রুপ; কিন্তু আবেলীয় নয়।

4. যদি $G = \{a+b\sqrt{2},\ a,b \in Q, a, b,\ a$ ও b একই সঙ্গে 0 নয় $\}$ গাণিতিক তন্ত্র $\{G, .\}$ এর প্রকৃতি কিরূপ?

এখানে আমরা দেখি

$\therefore\ \left(a+b\sqrt{2}\right).\left(c+d\sqrt{2}\right) = \{ac+2bd)+(ad+bc\sqrt{2})\}$

$\because\ a,c,b,d \in Q,\ (ac+2bd),(ad+bd)\sqrt{2}) \in R$

$\therefore$ G -তে আবদ্ধ ধর্ম বজায় আছে।

II যোগ ও গুণ, Q সেট ও R সেটে সংযোজ্য এবং $G \subset R$, এবং সংযোগ ধর্মতে অনুক্রমী,

$\therefore$ G সেটে প্রদত্ত দ্বিপদ-প্রক্রিয়া সংযোজ্য।

III. $\left(1+0\sqrt{2}\right)$ স্থিরক উপাদান

$$\left(1+0\sqrt{2}\right)\left(c+d\sqrt{2}\right)=\left(1.c+d\sqrt{2}\right);\ \forall\left(c+d\sqrt{2}\right)\in G$$

অবশ্যই $\left(1+0.\sqrt{2}\right)\in G$

IV. $\left(a+b\sqrt{2}\right)$-এর বিপরীত উপাদান $\left(\dfrac{a}{a^2-2b^2}-\dfrac{b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}\right)$

যেহেতু

a,b একইসঙ্গে 0 নয়, $a,b\in Q$, অতএব $\dfrac{a}{a^2-2b^2}$ এবং $\dfrac{-b}{a^2-2b^2}\in Q$

$$\therefore \left(\frac{a}{a^2-2b^2}-\frac{b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}\right)\in G \quad \text{এবং} \quad \left(a+b\sqrt{2}\right)\left(\frac{a}{a^2-2b^2}-\frac{b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}\right)=1+0\sqrt{2}$$

V অবশ্যই $\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c+d\sqrt{2}\right)=\left(c+d\sqrt{2}\right)\left(a+b\sqrt{2}\right)$

$\because$ $a,b,c,d\in Q$, Q -তে গুণ ও যোগ আবেলীয়।

$\therefore$ (G, .) একটি আবেলীয় গ্রুপ।

5. প্রমাণ করুন নিম্নোক্ত চারটি ম্যাট্রিক্স-এর সঞ্চয়ণ M গুণ সাপেক্ষে একটি সসীম আবেলীয় দল।

$$M=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right\}$$

M সঞ্চয়ণটির উপাদান সংখ্যা 4, কাজেই M একটি 4-ক্রম যুক্ত সসীম সঞ্চয়ণ। ধরা যাক

$$M_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ M_2=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix},\ M_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\ M_4=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$M_1.M_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}=M_2$$

$$M_1 . M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = M_3$$

$$M_1 . M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = M_4$$

$$M_2 . M_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = M_4$$

$$M_2 . M_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = M_3$$

$$M_3 . M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = M_2$$

$$M_2 . M_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = M_1$$

	M_1	M_2	M_3	M_4
M_1	M_1	M_2	M_3	M_4
M_2	M_2	M_1	M_4	M_3
M_3	M_3	M_4	M_1	M_2
M_4	M_4	M_3	M_2	M_1

গুণ সারণীটি প্রস্তুত করা হল। সারণী থেকে পাই, গুণ সাপেক্ষে (i) আবদ্ধ দর্ম বজায় আছে, যেহেতু সকল প্রক্রিয়াজ উপাদানই সারণীতে বিদ্যমান।

(ii) M_1 (বাম ও ডান) স্থিরক উপাদান।

(iii) $(M_1)^{-1} = M_1,\ M_2^{-1} = M_2,\ \ M_3^{-1} = M_3,\ \ M_4^{-1} = M_4$

$\therefore$ প্রতিটি উপাদানের বিপরীত উপাদান M সেটে বিদ্যমান।

(iv) কর্ণ বরাবর সারণীটি প্রতিসম। M সেট গুণ সাপেক্ষে আবেলীয়।

(v) 2×2 বাস্তব ম্যাট্রিক্সের সেট Σ, গুণ সাপেক্ষে সংযোজ্য। M, Σ-এর একটি উপসেট অর্থাৎ $M \subset \Sigma$ সংযোগ ধর্ম অনুক্রমী। অতএব M সেট গুণ সাপেক্ষে সংযোজ্য।

$\therefore$ M সেট গুণ সাপেক্ষে একটি সসীম আবেলীয় গ্রুপ।

6. জটিল সংখ্যা যুগলের সেট C^2-এর মধ্যে ছয়টি প্রদত্ত রূপান্তর (transformation) $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ দ্বারা গঠিত সঞ্চয়ণ Γ-এর গুণ সাপেক্ষে প্রকৃতি সারণীর সাহায্যে বিশ্লেষণ করুন।

$(x, y)\gamma_1 = (x, y),\ \ (x, y)\gamma_2 = (\omega x, \omega^2 y), (x, y)\gamma_3 = (\omega^2 x, \omega y)$

$(x, y)\gamma_4 = (\omega^2 y, \omega x), (x, y)\gamma_5 = (y, x), (x, y)\gamma_6 = (\omega y, \omega^2 x)$

0-সারি এবং 0-খাতে একই ক্রমে উপাদানগুলিকে সাজিয়ে নিয়মানুযায়ী প্রক্রিয়া-সারণীটি প্রস্তুত হল।

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_5
γ_1	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6
γ_2	γ_2	γ_3	γ_1	γ_6	γ_4	γ_5
γ_3	γ_3	γ_1	γ_2	γ_5	γ_6	γ_4
γ_4	γ_4	γ_5	γ_6	γ_1	γ_2	γ_3
γ_5	γ_5	γ_6	γ_4	γ_3	γ_1	γ_2
γ_6	γ_6	γ_4	γ_5	γ_2	γ_3	γ_1

(i) গুণ সাপেক্ষে প্রক্রিয়াজ উপাদান Γ তেই আছে।

$\therefore$ 'আবদ্ধ' ধর্ম বজায় আছে।

(ii) এটি একটি আপাতদল কারণ প্রতিটি সারিতে এবং খাতে সঞ্চয়ণের সব কটি উপাদান বিদ্যমান।

(iii) 0-সারিতে γ_1 এর অনুষঙ্গী খাতে উপাদানগুলির ক্রম 0-খাতের উপাদানগুলির ক্রম অভিন্ন। অতএব γ_1 ডান-স্থিরক উপাদান। অনুরূপভাবে পর্যবেক্ষণ করলে দেখা যাবে γ_1 বাম-স্থিরক উপাদানও বটে। এককথায় Γ সেটে অনন্য স্থিরক উপাদান γ_1।

(iv) Γ সেটের মধ্যে গুণ সাপেক্ষে প্রতিটি উপাদানের অনন্য বিপরীত উপাদান বিদ্যমান। যেমন

$(\gamma_2)^{-1} = \gamma_3, (\gamma_4)^{-1} = \gamma_4, (\gamma_5)^{-1} = \gamma_5, (\gamma_6)^{-1} = \gamma_6, (\gamma_1)^{-1} = \gamma_1$।

(v) শূন্য উপাদান নেই

(vi) বিনিময়যোগ্য বা আবেলীয় নয়, কারণ (ij)-তম উপাদান ও (ji)-তম উপাদান অভিন্ন নয় বা সারণীটি মূলকর্ণ বরাবর প্রতিসম নয়, যেমন $\gamma_3\gamma_4 = \gamma_5$ এবং $\gamma_4\gamma_3 = \gamma_6$ অর্থাৎ $\gamma_3\gamma_4 \neq \gamma_4\gamma_3$

(vii) 'সংযোগ' ধর্ম প্রযোজ্য। উদাহরণ স্বরূপ,

$(\gamma_2 \cdot \gamma_3) \cdot \gamma_4 = \gamma_1 \cdot \gamma_4 = \gamma_4$

$\gamma_2 \cdot (\gamma_3 \cdot \gamma_4) = \gamma_2 \cdot \gamma_5 = \gamma_4 \quad \therefore (\gamma_2 \cdot \gamma_3)\gamma_4 = \gamma_2 \cdot (\gamma_3 \cdot \gamma_4)$

$\gamma_4 \cdot (\gamma_4 \cdot \gamma_5) = \gamma_4 \cdot \gamma_2 = \gamma_5$

$(\gamma_4 \cdot \gamma_4) \cdot \gamma_5 = \gamma_1 \cdot \gamma_5 = \gamma_5$

$\therefore \gamma_4(\gamma_4 \cdot \gamma_5) = (\gamma_4 \cdot \gamma_4)\ \gamma_5 \ldots\ldots$ ইত্যাদি

$\therefore$ Γ সেটটি গুণ সাপেক্ষে একটি দল; কিন্তু আবেলীয় দল নয়।

7. যোগ-প্রক্রিয়া ও গুণ-প্রক্রিয়া সাপেক্ষে Z_6 সেটের প্রক্রিয়াসারণী বিশ্লেষণ করে গাণিতিক-তন্ত্র দুটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

ইঙ্গিত : অনুশীলনীতে Z_5 আলোচিত হয়েছে।

8. একটি দ্বি-নিধানী প্রক্রিয়া $G = \{u, v, w, e\}$ সঞ্চয়ণে এমনভাবে সংজ্ঞাত যে $u \bullet u = v \bullet v = w \bullet w = e \bullet e = e$, এই প্রক্রিয়া সাপেক্ষে G সঞ্চয়ণটি যদি দল হয়, তাহলে এর দল সারণীটি প্রস্তুত করা সম্ভব কি?

ইঙ্গিত : প্রদত্ত সম্পর্ক থেকে বলা যায় e স্থিরক উপাদান এবং

$(u)^{-1} = u, (v)^{-1} = v, (w)^{-1} = w,$ এবং $(e)^{-1} = e$

স্থিরক উপাদান সর্বদাই নিজেই নিজের বিপরীত উপাদান। সম্ভাব্য সারণীটি :

	e	u	v	w
e	e	u	v	w
u	u	e	w	v
v	v	w	e	u
w	w	v	u	e

শিক্ষার্থীগণকে পর্যবেক্ষণ করতে অনুরোধ করা হচ্ছে যে এটি আবেলীয় দল।

9. ভাজক 10 সাপেক্ষে ভাগশেষের শ্রেণীবিন্যাস এবং দ্বিপদ প্রক্রিয়া গুণের সাপেক্ষে G = {2,4,6,8} 4. x = 8 এর গুণ সারণী প্রস্তুত করুন এবং G এর প্রকৃতি নির্ণয় করুন। 4.x = 8, y.8 = 2 সমীকরণদুটি সমাধান করুন।

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী সারণীটি প্রস্তুত হলো। 0-সারিতে 6-এর খাতে প্রক্রিয়াজ উপাদানগুলির ক্রম এবং 0-খাতে উপাদানগুলির ক্রম অভিন্ন। কাজেই 6 ডান স্থিরক উপাদান (identity) 0-খাতে অবস্থিত 6 এর অনুষঙ্গী সারিতে উপাদানগুলির ক্রম এর 0-সারিতে উপাদানগুলি ক্রম অভিন্ন। অতএব 6 বাম স্থিরক উপাদান। অতএব 6, G সঞ্চয়ণে সংজ্ঞাত প্রক্রিয়া সাপেক্ষে অনন্য স্থিরক উপাদান।

	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

সারণী

সারণীর প্রতিটি সারিতে এবং প্রতিটি খাতে সেটের প্রতিটি উপাদানই বিভিন্ন ক্রমে বিদ্যমান। অতএব {G, .} একটি কোয়াসাই গ্রুপ।

G সেটের প্রতিটি উপাদানের বিপরীত উপাদান G সঞ্চয়ণে বিদ্যমান।

$2^{-1} = 8, \; 4^{-1} = 4, \quad 6^{-1} = 6, \quad 8^{-1} = 2$

'সংযোগ' ধর্ম বজায় আছে; যেমন

2. (4.8) = 2.2 = 4 আবার (2.4).8 = 8.8 = 4

$\therefore 2\,(4.8) = (2.4).8$

$\therefore$ ভাজক 10 সাপেক্ষে ভাগশেষের শ্রেণীবিন্যাস এবং দ্বিপদ প্রক্রিয়া গুণ সাপেক্ষে G = {2,4,6,8} একটি আবেলীয় গ্রুপ।

4.x = 8 এর সমাধান নির্ণয় করতে গেলে প্রথমে 0-খাতে 4-এর অবস্থান দেখতে হবে; সেখান থেকে অনুষঙ্গী সারিতে 8-এর অবস্থান দেখতে হবে, এই 8-এর অনুষঙ্গী খাতে 0-সারিতে যে উপাদানটি আছে সেটি নির্ণেয় সমাধান।

$\therefore 4x = 8$ সমীকরণের সমাধান $x = 2$

অনুরূপে নির্ণয় করা যায় $y = 4$, $y.8 = 2$ সমীকরণটির সমাধান।

10(i) ইউক্লিডীয় সমতল E^2 -এর সকল অবিশিষ্ট অ্যাফাইন রূপান্তরের (non-singular affine transformation) সঞ্চয়ণ T (group) হবে। প্রমাণ করুন।

ইঙ্গিত : ধরা যাক T_1, T_2 দুটি উল্লিখিত অ্যাফাইন রূপান্তর।

$$T_1 : \left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1 \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned}\right\} \text{ এবং } T_2 : \left.\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (A)$$

$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ এবং $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$

তাহলে,

$$(x, y)T_1 = (a_1x + b_1y + c_1,\ a_2x + b_2y + c_2)$$

$$(x, y)T_2 = (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1,\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)$$

$\therefore T_1.T_2$ রূপান্তর

$$(x, y)\ T_1T_2 = \{(x, y)T_1\}T_2 = (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2)T_2$$

$$= (\alpha_1(a_1x + b_1y + c_1) + \beta_1(a_2x + b_2y + c_2) + \gamma_1,$$

$$\alpha_2(a_1x + b_1y + c_1) + \beta_2(a_2x + b_2y + c_2) + \gamma_2)$$

$$= (\{\alpha_1a_1 + \beta_1a_2\}x + \{\alpha_1b_1 + \beta_1b_2\}y + \{\alpha_1c_1 + \beta_1c_2 + \gamma_1\},$$

$$\{\alpha_2a_1 + \beta_2a_2\}x + \{\alpha_2b_1 + \beta_2b_2\}y + \{\alpha_2c_1 + \beta_2c_2 + \gamma_2\})$$

অর্থাৎ $T_1 \bullet T_2$ রূপান্তরের সমীকরণ

$$\left.\begin{aligned} x' &= (\alpha_1a_1 + \beta_1a_2)x + (\alpha_1b_1 + \beta_1b_2)y + (\alpha_1c_1 + \beta_1c_2 + \gamma_1) \\ y' &= (\alpha_2a_1 + \beta_2a_2)x + (\alpha_2b_1 + \beta_2b_2)y + (\alpha_2c_1 + \beta_2c_2 + \gamma_2) \end{aligned}\right\} \ldots (B)$$

$\because (\alpha_1a_1 + \beta_1a_2)(\alpha_2b_1 + \beta_2b_2) - (\alpha_2a_1 + \beta_2a_2)(\alpha_1b_1 + \beta_1b_2) \neq 0$

$\therefore\ T_1.T_2$ অবিশিষ্ট অ্যাফাইন রূপান্তর।

$\therefore$ T সেটে 'আবদ্ধ' ধর্ম বজায় আছে; অর্থাৎ T একটি দলক (Groupoid) ।

$\because$ সংযোগধর্ম সমস্ত রূপান্তরের সেট Σ -তে সত্য এবং T, Σ -এর একটি উপ-তন্ত্র, অতএব সংযোগধর্ম (associative property) T-এর ক্ষেত্রেও সত্য, যেহেতু সংযোগধর্ম অনুক্রমী (hereditry) অ্যাফাইন রূপান্তর $T_\circ : x' = x,\ y' = y$, T সেটে স্থির উপাদান (identity)

T_1 এর বিপরীত উপাদান অর্থাৎ $T_1^{-1} \in T$

T_1^{-1} এর সমীকরণ :

$$x' = \frac{b_2}{\delta}x - \frac{b_1}{\delta}y + (b_1c_2 - b_2c_1)/\delta$$

$$y' = \left(-\frac{a_2}{\delta}\right)x + \frac{a_1}{\delta}y + (c_1a_2 - c_2a_1)/\delta$$

$\delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ $\quad\therefore$ T_1 অবিশিষ্ট রূপান্তর।

এখন $\dfrac{b_2}{\delta}\cdot\dfrac{a_1}{\delta} - \left(\dfrac{-a_2}{\delta}\right)\left(\dfrac{-b_1}{\delta}\right) = (a_1b_2 - a_2b_1)/\delta^2 = \dfrac{1}{\delta} \neq 0$

$\therefore$ T^{-1} একটি অবিশিষ্ট অ্যাফাইন রূপান্তর; $T^{-1} \in T$

$\therefore$ সকল অবিশিষ্ট রূপান্তরের সঞ্চয়ণ $T(E^2)$ একটি দল।

10 (ii) ইউক্লিডিয়ান সমতল E^2-তে মূলবিন্দু-সাপেক্ষে ঘূর্ণনের সঞ্চয়ণ $T(\theta)$ একটি দল।

ধরা যাক $T(\theta_1), T(\theta_2)$ দুটি উল্লিখিত ঘূর্ণন $\in T(\theta)$

$$\left.\begin{aligned} T(\theta_1): x' &= x\cos\theta_1 - y\sin\theta_1 \\ y' &= x\sin\theta_1 + y\cos\theta_1 \end{aligned}\right\} \text{ এবং } \quad \begin{aligned} T(\theta_2): x' &= x\cos\theta_2 - y\sin\theta_2 \\ y' &= x\sin\theta_2 + y\cos\theta_2 \end{aligned}$$

$$(x, y)T(\theta_1).T(\theta_2) = \{(x, y)T.(\theta_1)\}.T(\theta_2)$$

$$= ((x\cos\theta_1 - y\sin\theta_1), (x\sin\theta_1 + y\cos\theta_1).T(\theta_2)$$

$$= (\{(x\cos\theta_2 - y\sin\theta_2)\cos\theta_1 - (x\sin\theta_2 + y\cos\theta_2)\sin\theta_1\},$$

$$\{(x\cos\theta_2 - y\sin\theta_2)\sin\theta_1 + (x\sin\theta_2 + y\cos\theta_2)\cos\theta_1\})$$

$$= (\{x\cos(\theta_1 + \theta_2) - y\sin(\theta_1 + \theta_2)\},$$

$$\{x\sin(\theta_1 + \theta_2) + y\cos(\theta_1 + \theta_2)\})$$

$$\therefore\ T(\theta_1).T(\theta_2): x' = x\cos(\theta_1 + \theta_2) - y\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y' = x\sin(\theta_1 + \theta_2) + y\cos(\theta_1 + \theta_2)$$

অর্থাৎ $T(\theta_1) \bullet T(\theta_2) = T(\theta_1 + \theta_2) \in T(\theta)$

$\therefore$ 'আবদ্ধ ধর্ম' $T(\theta)$ সঞ্চয়ণে সংজ্ঞাত দ্বিপদ-প্রক্রিয়া সাপেক্ষে বজায় আছে।

স্থিরক উপাদান $T(0)$: $x' = x,\ y' = y$ অর্থাৎ $(\theta = 0)$

যেহেতু $T(\theta) \bullet T(0) = T(0) \bullet T(\theta) = T(\theta)$

উদাহরণ 9 এর অনুসরণে $T(\theta)$ সেটে সংযোগধর্মের সত্যতা ও বিপরীত ঘূর্ণন উপাদানের অস্তিত্ব প্রমাণের জন্য শিক্ষার্থীগণকে অনুরোধ করা হচ্ছে।

বিনিময়যোগ্যতা কি বজায় আছে?

10. (iii) প্রমাণ করুন উপরোক্ত সমতলে মূলবিন্দু সাপেক্ষে ঘূর্ণনের অধসঞ্চয়ণ

$\left\{T(0), T\left(\frac{\pi}{2}\right), T(\pi), T\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right\}$ ঘূর্ণনের দল $T(\theta)$-এর একটি অধদল (subgroup)। এর একটি দল সারণী প্রস্তুত করে বৈশিষ্ট্যগুলি বিশ্লেষণ করুন।

11 (i) প্রমাণ করতে হবে যে,

$M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right.$ একটি 2×2 ম্যাট্রিক্স, যেখানে a, b, c, d পূর্ণসংখ্যা এবং $ad-bc = 1$ $\}$

প্রচলিত ম্যাট্রিক্স গুণ সাপেক্ষে একটি অবিনিময়যোগ্য দল (non-commutative group) ।

(ii) প্রমাণ করতে হবে $G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in R\right.$ এবং $ad \neq 0$ $\}$ স্বাভাবিক ম্যাট্রিক্স গুণ সাপেক্ষে একটি দল।

দেখাতে হবে $H \equiv \left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in R\right\}$

উপরোক্ত গ্রুপের অধদল। এই অধদল কি বিনিময়যোগ্য বা আবেলীয়?

(iii) যদি G একটি 2×2 ম্যাট্রিক্স $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ এর সঞ্চয়ণ হয়, সেখানে $a, b \in R$ এবং উভয়েই একসঙ্গে শূন্য নয়, তাহলে ম্যাট্রিক্স গুণ পদ্ধতি অনুসারে G কি একটি দল? যুক্তির সাহায্যে আপনার উত্তরকে প্রতিষ্ঠিত করুন।

12. (i) R^* শূন্যবিহীন সকল বাস্তবসংখ্যার সঞ্চয়ণ। দ্বিপদ প্রক্রিয়া '$\circ$' R^* সঞ্চয়ণে নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞাত। $a \circ b = |a|b, \forall a, b \in R;$

এই প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে R^* কি একটি দল?

ই ঃ 1 বামস্থিরক উপাদান কিন্তু ডান স্থিরক উপাদান নয়

উদাহরণ স্বরূপ $1.b = |1| b \; \forall b \in R^*$

কিন্তু $-5 \; 1 = |-5|.1 = 5 \neq -5$

12. (ii) C(i) একটি সেট, যার উপাদানগুলি a + ib, যেখানে $a^2 + b^2 = 1$, এবং $a, b \in R$; প্রমাণ করতে হবে $\{C(i), \bullet\}$ একটি দল, '•' চিহ্নটি জটিলসংখ্যার প্রচলিত গুণ পদ্ধতি নির্দেশ করে। দলটি কি আবেলীয়?

12 (iii) শূন্যবিহীন মূলদ সংখ্যার সঞ্চয়ণ Q^* অর্থাৎ $Q - \{0\}$ শূন্যবিহীন বাস্তব সংখ্যার সঞ্চয়ণ R^* অর্থাৎ $R - \{0\}$ প্রচলিত গুণ সাপেক্ষে আবেলীয় দল — প্রমাণ করুন।

13. প্রমাণ করুন (i) Z, সকল পূর্ণসংখ্যার সঞ্চয়ণ, (ii) Q, সকল মূলদ সংখ্যার সেট (iii) R, সকল বাস্তব সংখ্যার সঞ্চয়ণ প্রচলিত 'যোগ' প্রক্রিয়া সাপেক্ষে আবেলীয় দল।

(b) C(i), সকল জটিলসংখ্যা a + ib, $a, b \in R$,-এর সেট 'যোগ' সাপেক্ষে আবেলীয় গ্রুপ। C(i) সেটে 'যোগ', (+) -এর সংজ্ঞা নিম্নরূপ : $A, C \in C(i)$

$$\begin{array}{ll} A = a + ib & a, b \in R \\ C = c + ib & c, d \in R, \end{array} \qquad A + C = (a + c) + i(b + d)$$

13. (i) একটি গ্রুপ G $\forall a \in G$, $a = a^{-1}$, প্রমাণ করতে হবে যে G একটি আবেলীয় গ্রুপ। এই সিদ্ধান্তের বিপরীত কি সত্য?

ই : $a, b \in G \quad a = a^{-1}, b = b^{-1}$ তাহলে $ab = a^{-1}b^{-1}$ (আবদ্ধ ধর্ম) $= (ba)^{-1} \cdots (1)$

প্রদত্ত শর্তানুসারে $(ba) = (ba)^{-1} \ldots (2) \because ba \in G; (1)$ এবং (2) থেকে $ab = ba$ অর্থাৎ G একটি আবেলীয় গ্রুপ।

এই সিদ্ধান্তের বিপরীত, অর্থাৎ G একটি আবেলীয় গ্রুপ হলে, $\forall a \in G, a = a^{-1}$, সত্য নয়। যেমন যোজ্য গ্রুপ Z আবেলীয় 0 (শূন্য) ব্যতীত কোনও উপাদানই নিজের বিপরীত উপাদান নয়। $\forall a \in Z, \; a^{-1} = -a$ ।

(ii) $a, b \in G$, যেখানে G একটি গ্রুপ। দেখান যে $b^{-1}a^{-2}b = (b^{-1}ab)^{-2}$

ই : $(b^{-1}ab)^{-2} = (b^{-1}ab)^{-1}(b^{-1}ab)^{-1}$ সংযোগধর্ম ব্যবহার করুন।

$$= (b^{- \quad -1}b)(b^{-1}a^{-1}b)$$

$$= (b^{-1}a^{-1}) \, {}_{\backslash} \; {}^{\text{ь}-1}) (a^{-1}b) = (b^{-1}a^{-1})(a^{-1}b) = b^{-1}a^{-2}b$$

(iii) যদি a,b, G গ্রুপ/দলের দুটি উপাদান হয় এবং $(ab)^2 = a^2b^2$, তাহলে প্রমাণ করতে হবে যে G একটি "বিনিময়" বিশিষ্ট দল।

ই : সংযোগধর্ম ও অপসারণ ধর্ম ব্যবহার করা যেতে পারে।

(iv) যদি $a,b \in G$ গ্রুপ, এমনভাবে যে $b^2ab = a^{-1}$ তাহলে $(ba)^3 = a$; প্রমাণ করুন।

ই : সংযোগধর্ম ও প্রদত্ত শর্ত ব্যবহার করুন।

14. (i) প্রমাণ করুন সকল পূর্ণসংখ্যার সেট Z, সকল মূলদসংখ্যার যোজ্য গ্রুপ Q-এর একটি উপগ্রুপ।

ই : Q একটি যোজ্য গ্রুপ; Z, Q এর একটি উপসেট অর্থাৎ $Z \subset Q$; এবং Z একটি যোজ্য গ্রুপ।

$\therefore$ Z, Q-এর একটি উপগ্রুপ।

(ii) প্রমাণ করুন সকল যুগ্মসংখ্যার সেট K (শূন্যসহ)

যোজ্য গ্রুপ Z (সকল পূর্ণসংখ্যার সেট)-এর একটি উপগ্রুপ; কিন্তু সকল বিজোড় সংখ্যার সেট J যোজ্য গ্রুপ Z-এর উপগ্রুপ হবে কি?

একক 12 ❑ চক্রীয় দল বা চক্রীয়গ্রুপ (Cyclic group) ও স্বাভাবিক অধদল বা স্বাভাবিক সাবগ্রুপ (Normal Subgroup)

গঠন

12.1 প্রস্তাবনা

গ্রুপতত্ত্ব আধুনিক বীজগণিতের একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ মৌলিক ধারণা। বহু গুরুত্বপূর্ণ আবিষ্কারে এই তত্ত্ব ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়েছে। এই অধ্যায়ের প্রথম অনুচ্ছেদে একটি বিশেষ ধরণের দল বা গ্রুপ এবং দ্বিতীয় অনুচ্ছেদে একটি বিশেষ ধরনের অধদল (Subgroup) সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে।

12.2 উদ্দেশ্য

● এই এককটি পাঠ করে চক্রীয় দল (cyclic group) এবং স্বাভাবিক অধদল-এর (normal subgroup) সংজ্ঞা, তাদের ধর্ম ইত্যাদি বিষয়ে স্পষ্ট ধারণা লাভ হবে।

● গণিত শাস্ত্র ছাড়াও অন্যান্য বহুক্ষেত্রে এই বিশেষ দল এবং অধদলের প্রয়োজনীয়তাও উপলব্ধি হবে।

12.3 চক্রীয় দল বা চক্রীয় গ্রুপ (Cyclic group) ঃ সংজ্ঞা ও কতিপয় ধারণা

সংজ্ঞা ঃ চক্রীয় দল বা গ্রুপ একটি বিশেষ ধরনের দল বা গ্রুপ যার প্রতিটি উপাদান ঐ দল বা গ্রুপেরই একটি বিশেষ উপাদানের দ্বারা উৎপন্ন হয়। ঐ বিশেষ উপাদানটিকে চক্রীয় দলটির জনক (generator) বলা হয়। অর্থাৎ, যদি কোনও দল (G, o)-তে এমন একটি উপাদান 'a' থাকে যে ঐ দলের প্রত্যেক উপাদান $x = a^n$ (গুণন প্রক্রিয়া সাপেক্ষে) অথবা $x = na$ (যোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে), যখন n একটি পূর্ণসংখ্যা (ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক) তবে (G, o)-কে একটি চক্রীয় দল বলা হয় এবং 'a'-কে ঐ চক্রীয় দলের জনক বলা হয়।

এক্ষেত্রে আমরা লিখি $G = <a>$ অন্যভাবে বলা যায় $G = \{a^n / n \in z\}$ গুণ সাপেক্ষে

অথবা $G = \{na/n \in z\}$, যোগ সাপেক্ষে।

উদাহরণ 1. যদি $S = \{1, -1, i, -i\}$ হবে (S, .) একটি চক্রীয় দল এবং এই চক্রীয় দলের জনক i, কারণ এখানে $i = (i)^1$, $-1 = (i)^2$, $-i = (i)^3$ এবং $1 = (i)^4$, একইভাবে দেখানো যায় যে, $-i$ এই চক্রীয় দলের অপর এক জনক।

সুতরাং একই চক্রীয় দলের একাধিক জনক থাকতে পারে।

উদাহরণ 2. (Z, +) গ্রুপটি যোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে একটি চক্রীয় দল বা গ্রুপ। এই গ্রুপের জনক 1 অথবা -1. কারণ $Z = \{....., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ এবং $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1 = 3 \times 1$, $-3 = -3 \times 1$ ..... ইত্যাদি আবার $2 = -2 \times (-1)$, $3 = -3 \times (-1)$, $-2 = 2 \times (-1)$, ... ইত্যাদি। সুতরাং সংজ্ঞানুসারে (Z, +) চক্রীয় দল।

উদাহরণ 3. $S = \{-1, 1\}$ একটি সঞ্চয়ণ। এখানে (S, .) একটি চক্রীয় দল এবং এই দলের একমাত্র জনক -1।

উদাহরণ 4. $\{1, \omega, \omega^2\}$ গুণনসাপেক্ষে চক্রীয় দল। এই চক্রীয় দলের জনক দুইটি যথাক্রমে ω এবং ω^2।

12.4 উপপাদ্য 1

প্রত্যেক চক্রীয় দল বিনিময়যোগ্য (Commutative)

প্রমাণ ঃ ধরা যাক (G, o) একটি চক্রীয় দল এবং a এই দলটির একটি জনক। যদি x এবং y, G-এর যে কোনও দুইটি উপাদান হয়, তবে $x = a^r$ এবং $y = a^s$, যখন r এবং s দুটি পূর্ণসংখ্যা।

এখন $x \circ y = a^r \circ a^s = a^{r+s} = a^{s+r} = a^s \circ a^r = y \circ x$

সুতরাং $x \circ y = y \circ x, \forall x, y, \in G$.

$\therefore (G, o)$ বিনিময়যোগ্য দল।

যোগপ্রক্রিয়া সাপেক্ষেও প্রমাণটি অনুরূপভাবে করা যায়।

মন্তব্য ঃ প্রত্যেক চক্রীয় দল বিনিময়যোগ্য, কিন্তু প্রত্যেক বিনিময়যোগ্য দল চক্রীয় দল নয়।

উদাহরণ ঃ শূন্যবিহীন মূলদসংখ্যার সঞ্চয়ণটি (Set of non-zero rationals) গুণসাপেক্ষে একটি বিনিময়যোগ্য দল। কিন্তু এটি চক্রীয় দল নয়।

12.5 উপপাদ্য-2

a যদি চক্রীয় দল (G, o) এর একটি জনক হয়, তবে a^{-1} হবে (G, o)-এর অপর এক জনক।

প্রমাণ ঃ a পদটি (G, o) এর জনক

$\therefore G = \{a^n / n \in Z\}$

ধরা যাক, $H = \{(a^{-1})^n / n \in Z\}$

মনে করি $u \in G$

$\Rightarrow u = a^r$ যখন r একটি পূর্ণসংখ্যা

আবার $u = (a^{-1})^{-r}$

$\therefore \quad u \in H$, কারণ $-r$ একটি পূর্ণসংখ্যা

$\therefore u \in G \Rightarrow u \in H \therefore G \subseteq H$ .... (i)

আবার ধরি $v \in H$

$\therefore v = (a^{-1})^s$, যখন s একটি পূর্ণসংখ্যা

$\therefore v = (a)^{-s} \Rightarrow v \in G$, কারণ $-s$ একটি পূর্ণসংখ্যা।

সুতরাং $v \in H \Rightarrow v \in G \therefore H \subseteq G$ .... (ii)

(i) এবং (ii) থেকে পাই $G = H$

$\therefore G = \{(a^{-1})^n / n \in z\}$

$\therefore a^{-1}$ পদটিও (G, o) এর জনক।

12.6 উপপাদ্য-3

(G, o) যদি একটি সসীম (finite) চক্রীয় দল হয় যার একটি জনক a, তবে G–এর ক্রম n হবে অর্থাৎ O (G) = n হবে যদি এবং একমাত্র যদি O (a) = n হয়।

প্রমাণ ঃ মনে করি O (a) = n. সুতরাং $a, a^2, \ldots\ldots, a^n (= e)$ পদগুলিই G সঞ্চয়ণের ভিন্ন (distinct) পদসমূহ।

$\therefore \{a, a^2, \ldots\ldots, a^n\} \subseteq G \ldots$ (i)

আবার $G = \{a^n / n \in Z\}$

ধরা যাক u পদটি G এর যে কোনও একটি পদ।

$\therefore u = a^m$, যখন m একটি পূর্ণসংখ্যা

সুতরাং q এবং r এমন দুটি পূর্ণসংখ্যা পাওয়া যাবে যে $m = qn + r$ হয় যখন $o \leq r \leq n$

$\therefore u = a^m = a^{qn+r} = (a^n)^q \text{ o } a^r = e \text{ o } a^r = a^r$

$[\because O(a) = n \therefore a^n = e]$

$\therefore u = a^r$, যেখানে $o \leq r \leq n$

$\therefore u \in \{a^o, a, a^2, \ldots\ldots, a^{n-1}\}$

অর্থাৎ, $u \in \{a, a^2, \ldots\ldots, a^{n-1}, a^n (= e)\}$

$\therefore u \in G \Rightarrow u \in \{a, a^2, \ldots\ldots, a^n\}$

$\Rightarrow G \subseteq \{a, a^2, \ldots\ldots, a^n\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (ii)

$\therefore$ (i) এবং (ii) থেকে পাই $G = \{a, a^2, \ldots\ldots, a^n\}$

অর্থাৎ, O (G) = n

বিপরীতক্রমে (conversely) মনে করি O (G) = n

যেহেতু (G, o) একটি সসীম দল সুতরাং G এর প্রতিটি পদের ক্রম সসীম। ধরা যাক O (a) = k। অর্থাৎ $a^k = e$ যখন e হলো G–এর স্থিরক পদ (identity)।

সুতরাং $a, a^2, \ldots\ldots, a^{k-1}, a^k (= e)$ পদগুলি G সেটের ভিন্নপদ।

এখন যেহেতু O (G) = n, সুতরাং G–এর পদসংখ্যা n। সুতরাং k সংখ্যাটি n অপেক্ষা বড় হতে পারে না। সুতরাং $k \leq n$।

কিন্তু $k < n$ হতে পারে না কারণ আগের প্রমাণানুসারে $O(a) = k \Rightarrow O(G) = k$

$\therefore k = n. \therefore O(a) = n$

[টীকা ঃ এখানে 'G এর ক্রম n' বলতে বোঝায় G এর পৃথক পদসমূহের (distinct elements) সংখ্যা $= n$.

আবার G এর একটি পদ 'a এর ক্রম n' অর্থাৎ $O(a) = n$ বলতে বোঝায় যে $a^n = e$ (একসম পদ বা identity element)]

12.7 উপপাদ্য - 4.

(G, o) যদি একটি চক্রীয় গ্রুপ হয় যার জনক a, তবে G অসীম হবে যদি এবং একমাত্র যদি O (a) অসীম হয়।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক O(a) অসীম। সুতরাং $\{a, a^2, a^3, ...\}$ সঞ্চয়ণটি ভিন্ন ভিন্ন পদদ্বারা গঠিত একটি অসীম সঞ্চয়ণ। যদি এই সঞ্চয়ণটি অসীম না হয় তবে ধরা যাক, $a^p = a^q$, যখন p এবং q দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $p > q$।

এখন $a^p = a^q \Rightarrow a^{p-q} = e$ এবং এর দ্বারা প্রমাণিত হয় যে O(a) সসীম। কিন্তু স্বীকার করা হয়েছে যে O(a) অসীম। অতএব $ap^2 \neq aq^2$.

$\therefore \{a, a^2, a^3, ...\}$ সঞ্চয়ণটি ভিন্ন পদদ্বারা গঠিত একটি অসীম সঞ্চয়ণ।

আবার $\{a, a^2, a^3, ...\} \subset G$, কারণ (G, o) চক্রীয় দলটির জনক a.

সুতরাং O (G) অসীম।

বিপরীতক্রমে ধরা যাক O(G) অসীম। যদি সম্ভব হয় মনে করি O(a) সসীম। তাহলে O(G) সসীম হবে (উপপাদ্য 3-এর দ্বারা)। এটি অসম্ভব। সুতরাং O(a) অসীম হবে।

12.8 উপপাদ্য - 5.

যদি (G, o) একটি সসীম চক্রীয় গ্রুপ হয় যার ক্রম n এবং জনক a, তবে a^m ঐ দলের অপর একটি জনক হবে যদি এবং একমাত্র যদি m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় এবং m এবং n পরস্পর মৌলিক (prime to each other) হয়।

প্রমাণ ঃ প্রথমে ধরা যাক m এবং n পরস্পর মৌলিক (অর্থাৎ উভয়ের গরিষ্ঠ সাধারণ উৎপাদক 1) এবং $H = \langle a^m \rangle$.

স্পষ্টতই $H \subseteq G$, কারণ a^m-এর যে কোনও ঘাত (integral power) a-এরও একটি ঘাত হবে এবং এই কারণে সেই পদটি G-এরও একটি পদ হবে।

এখন যেহেতু m এবং n পরস্পর মৌলিক সুতরাং p এবং q এমন দু'টি পূর্ণসংখ্যা অবশ্যই থাকবে যে $pm + qn = 1$ হয়।

(যেমন 6 এবং 7 পরস্পর মৌলিক এবং $6 \times 6 + (-5) \times 7 = 1$)

$\therefore\ a^{pm + qn} = a$

বা, $a^{pm} . a^{qn} = a$ বা, $a^{pm} . (a^n)^q = a$

বা, $a^{pm} . e^q = a$ বা, $a^{pm} = a$

অর্থাৎ, $(a^m)^p = a$

সুতরাং a-এর যে কোনও ঘাত a^m-এর একটি পূর্ণসংখ্যার খাত হবে এবং এই কারণে G-এর যে কোনও পদ H এরও একটি পদ হবে। সুতরাং $G \subseteq H$. আবার আগে প্রমাণিত হয়েছে $H \subseteq G$। সুতরাং $H = G$ এবং a^m চক্রীয় গ্রুপ G-এর একটি জনক।

পক্ষান্তরে ধরা যাক, a^m চক্রীয় গ্রুপ G-এর একটি জনক। যদি সম্ভব হয় মনে করি m এবং n পরস্পর মৌলিক নয়। সুতরাং মনে করি m এবং n এর গরিষ্ঠ সাধারণ উৎপাদক d ($\neq 1$)। সুতরাং $d > 1$ এবং $\frac{m}{d}$ এবং $\frac{n}{d}$ অবশ্যই ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

এখন $(a^m)^{n/d} = (a^n)^{m/d} = e^{m/d} = e$,

আবার n/d একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $n/d < n$.

অতএব $O(a^m) < n$. সুতরাং a^m চক্রীয় দল G-এর জনক হতে পারে না কারণ a^m-এর ক্রম (order) G-এর ক্রমের সমান নয়। সুতরাং আমরা একটি বিরুদ্ধ সিদ্ধান্তে উপনীত হই। অতএব m এবং n পরস্পর মৌলিক হবে।

মন্তব্য ঃ উপরের উপপাদ্য থেকে প্রমাণিত হয় যে চক্রীয় দল $G = \langle a \rangle$ এর ক্রম যদি n হয় তবে G-এর জনকের সংখ্যা হবে n অপেক্ষা ছোট এবং n এর সঙ্গে মৌলিক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সংখ্যার সমান। অর্থাৎ যে চক্রীয় দলের জনক a এবং ক্রম 10 তার a ভিন্ন অন্য জনকগুলি হবে—a^3, a^7 এবং a^9 অর্থাৎ মোট চারটি জনক থাকবে।

উদাহরণ ঃ মনে করি $S = \{i, -1, -i, 1\}$. (S, .) এই চক্রীয় দলটির ক্রম 4. এখানে S-এর জনকসংখ্যা 2 কারণ 4 অপেক্ষা ছোট 4 এর সঙ্গে মৌলিক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা কেবল দুটি। এই সংখ্যা দুটি হল 1 এবং 3 এই কারণে জনক দুটি $(i)^1$ এবং $(i)^3$ অর্থাৎ i এবং $-i$.

12.9 উপপাদ্য -6

একটি অসীম চক্রীয় দলের কেবলমাত্র দু'টি জনক থাকে।

প্রমাণ ঃ মনে করি $G = \langle a \rangle$ একটি অসীম চক্রীয় গ্রুপ। সুতরাং G-এর পদগুলি 'a'-এর পূর্ণসংখ্যার ঘাত (integral powers) হবে। আমরা প্রমাণ করব যে এক্ষেত্রে a-এর দুটি পৃথক পূর্ণসংখ্যার ঘাত সমান হতে পারে না।

যদি সম্ভব হয় মনে করি $a^r = a^s$, যখন $r > s$

$\Rightarrow a^r . a^{-s} = a^s . a^{-s} = a^o = e$

সুতরাং a–এর ক্রম অর্থাৎ $O(a) \le r - s$; এর থেকে প্রমাণিত হয় যে O(a) সসীম। কিন্তু G অসীম ধরা হয়েছে। সুতরাং O(a) সসীম হতে পারে না (উপপাদ্য 4 দ্বারা)। অতএব a চক্রীয় দল G–এর জনক হতে পারে না।

$\therefore a^r \neq a^s$ যদি $r \neq s$ হয়।

$G = \{....., a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^o = e, a, a^2, a^3, ...\}$

আবার মনে করি a^m চক্রীয় গ্রুপ G–এর একটি পদ। যেহেতু $a^m = (a^{-1})^{-m}$; সুতরাং G–এর যে কোনও পদকে a^{-1} এর পূর্ণসংখ্যার ঘাত হিসেবে প্রকাশ করা যায়। সুতরাং a^{-1} পদটিও G–এর একটি জনক। এইভাবে প্রমাণিত হয় a এবং a^{-1} অসীম চক্রীয় দল G এর দু'টি পৃথক জনক (কারণ $a^1 \neq a^{-1}$ যেহেতু $1 \neq -1$)

এখন প্রমাণ করতে হবে যে যদি $m \neq 1, -1$ হয় তবে a^m ঐ চক্রীয় দলের জনক হতে পারে না।

যদি a^m জনক হয় তবে ঐ গ্রুপের 'a' পদটিও a^m–এর একটি ঘাত হবে। মনে করি $(a^m)^k = a$, k একটি পূর্ণসংখ্যা।

$\Rightarrow a^{mk} = a^1$. কিন্তু $mk \neq 1$

সুতরাং a–এর দুটি ভিন্নঘাত সমান।

কিন্তু এটি অসম্ভব (আগেই প্রমাণিত)।

সুতরাং a^m জনক হতে পারে না যদি $m \neq 1$ অথবা -1 হয়।

এইভাবে প্রমাণিত হলো যে অসীম চক্রীয় দল $G = \langle a \rangle$–এর কেবলমাত্র দু'টি জনক থাকতে পারে, a এবং a^{-1}.

12.10 উপপাদ্য-7

একটি চক্রীয় দলের যে কোনও অধদল (Subgroup) একটি চক্রীয় গ্রুপ।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক (G, 0) একটি চক্রীয় দল যার জনক a এবং মনে করি (H, 0), (G, 0) এর একটি অধদল।

(i) যদি H = G হয় তবে প্রমাণ নিষ্প্রয়োজন,

(ii) যদি $H = \{ e \}$ হয় তবে $H = \{e^n / n \in Z\}$ কারণ $e^n = e$, যে কোনও পূর্ণসংখ্যা n–এর জন্য।

$\therefore$ H একটি চক্রীয় দল।

(iii) যদি (H, 0) অধদলটি (G, 0) এর এমন একটি প্রকৃত অধদল (proper subgroup) হয় যে $H \neq \{e\}$ তবে অন্ততঃ একটি পদ $x \in H$ থাকবে যে $x \neq e$.

আবার যেহেতু $x \in G$, $\therefore x = a^k$, যেখানে k একটি পূর্ণসংখ্যা এবং $k \neq 0$.

আবার যেহেতু (H, 0) একটি উপগ্রুপ

সুতরাং $x^{-1} \in H$ এবং $x^{-1} = a^{-k}$

$\therefore a^k$ এবং a^{-k} এই দুটি পদই H-এ থাকবে।

সুতরাং a-এর কোন কোন পূর্ণসংখ্যার ঘাত H এ আছে। মনে করি এই ঘাতগুলির মধ্যে সর্বনিম্ন ঘাত a^m. এবারে প্রমাণ করা হবে a^m পদটিই (H, 0) এর জনক।

ধরা যাক $h \in H$ $\therefore h = a^p$, যখন p একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

সুতরাং q এবং r দুটি পূর্ণসংখ্যা অবশ্যই থাকবে যাতে $p = qm + r$ হয় (এখানে $0 \leq r < m$)

$\therefore p - qm = r$

আবার যেহেতু (H, 0) একটি দল, $a^m \in H \Rightarrow a^{-qm} \in H$.

আবার $a^p \in H$ এবং $a^{-qm} \in H \Rightarrow a^{p-qm} \in H$

$\therefore a^r \in H$

কিন্তু $0 \leq r < m$ এবং $a^r \in H$; এই দুটি সত্য হতে পারে যদি $r = 0$ হয় কারণ অন্যথায় a^m পদটি H সেটে a-এর সর্বাপেক্ষা ছোট ঘাত হতে পারে না, অতএব $p = qm$ এবং $h = (a^m)^q$, যখন q একটি পূর্ণসংখ্যা

$\therefore$ H-এর যে কোনও পদ $h = (a^m)^q$.

$\therefore$ (H, 0) অধদলটিও একটি চক্রীয় দল।

12.11 উপপাদ্য-8

যদি একটি সসীম চক্রীয় দলের ক্রম হয় n, তবে ঐ দলটির k-ক্রমবিশিষ্ট একটি উপগ্রুপ থাকবে যদি k সংখ্যাটি n-এর একটি ধনাত্মক উৎপাদক হয়।

প্রমাণ ঃ যদি $k = 1$ অথবা $k = n$ হয় তবে উপপাদ্যের প্রমাণ নিষ্প্রয়োজন।

সুতরাং ধরা যাক $1 < k < n$. অতএব $kp = n$, p একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

মনে করি $G = \langle a \rangle$ সুতরাং $O(a) = n$

আমরা প্রমাণ করব যে $\langle a^p \rangle$ চক্রীয় গ্রুপটি G-এর একটি অধদল যার ক্রম k.

মনে করি $b = a^p$. $\therefore b^k = a^{kp} = a^n = e$ $[\because O(a) = n]$

ধরি $O(b) = m$; সুতরাং m সংখ্যাটি k-এর একটি উৎপাদক। ... (i)

আবার $b^m = e \Rightarrow a^{pm} = e \Rightarrow n$ সংখ্যাটি pm এর একটি উৎপাদক।

$\Rightarrow k$ সংখ্যাটি m -এর উৎপাদক ... (ii)

$[\because n = pk]$

(i) এবং (ii) থেকে পাই $k = m$.

$\therefore O(b) = k$

সুতরাং b অর্থাৎ a^p দ্বারা উৎপন্ন অধদলটির ক্রম k এবং k সংখ্যাটি n-এর উৎপাদক।

টীকা ঃ k-ক্রমবিশিষ্ট একটি মাত্র অধদলই থাকবে যদি k সংখ্যাটি n-এর উৎপাদক হয়। ধরি $kp = n$; সুতরাং চক্রীয় দল $\langle a^p \rangle$ এর ক্রম k.

ধরা যাক k ক্রমবিশিষ্ট আরও একটি উপগ্রুপ $\langle a^s \rangle$ আছে।

$\therefore a^{sk} = e \therefore n$ সংখ্যাটি sk-এর উৎপাদক $[\because O(a) = n]$

$\therefore$ ধরা যাক $sk = nk_1 = pkk_1$, যখন k_1 একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা

$\therefore s = pk_1 \therefore a^s \in \langle a^p \rangle$

এখন যেহেতু $O(a^s) = k$ ধরা হয়েছে এবং $a^s \in \langle a^p \rangle$

সুতরাং a^s চক্রীয় দল $\langle a^p \rangle$-এর একটি জনক।

$$\therefore \langle a^s \rangle = \langle a^p \rangle$$

উদাহরণ 1. দেখান যে একক সংখ্যার n-তম মূলগুলি (n-th roots of unity) গুণ সাপেক্ষে একটি সসীম চক্রীয় গ্রুপ।

সমাধান ঃ মনে করি একক সংখ্যার n তম মূলগুলির সঞ্চয়ণটি G অর্থাৎ $G = \{x : x^n = 1\}$

এখন $x^n = 1$ হলে $x = (1)^{\frac{1}{n}}$

$$= (\cos 0 + \sin 0)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$= e^{\frac{i2k\pi}{n}}, \text{ যখন } k = o,\ 1,\ \ldots\ n-1$$

$$\therefore\ G = \left\{1, e^{\frac{i2\pi}{n}}, e^{\frac{i4\pi}{n}}, \ldots\ldots. e^{\frac{i2(n-1)\pi}{n}}\right\}$$

এখানে স্পষ্টতঃই $(G,\ \circ)$ দলটি গুণসাপেক্ষে একটি বিনিময়যোগ্য দল। আবার এই দলের প্রতিটি পদই $e^{\frac{i2\pi}{n}}$ এর বিভিন্ন ঘাত কারণ যখন $0 \le k \le n-1$, $e^{\frac{i2k\pi}{n}} = \left(e^{\frac{i2\pi}{n}}\right)^k \in G$

আবার যখন $k > n$, তখন $\exists\ q$ এবং s যার সাহায্যে আমরা লিখতে পারি $k = nq + s$,

যখন $0 \le s < n$

এখন $e^{\frac{i2k\pi}{n}} = e^{\frac{i2(nq+s).\pi}{n}} = e^{i2\pi q} . e^{\frac{i2s\pi}{n}}$

$= e^{\frac{i2s\pi}{n}} \in G$, কারণ $e^{i2\pi}$ এবং $0 \le s < n$

$\therefore$ $e^{\frac{i2\pi}{n}}$ এই দলের জনক এবং এটির সকল ঘাতই $(G, .)$ দলে বর্তমান।

আবার $\left(e^{\frac{i2\pi}{n}}\right)^n = e^{i2\pi} = 1$ (এখানে স্থিরক উপাদান)

সুতরাং $(G, .)$ একটি সসীম চক্রীয় দল।

উদাহরণ 2. প্রমাণ করুন যে $(Q, +)$ চক্রীয় গ্রুপ নয় এবং এর সাহায্যে প্রমাণ করুন $(R, +)$ ও চক্রীয় গ্রুপ নয়।

সমাধান ঃ যদি সম্ভব হয় মনে করি $(Q, +)$ একটি চক্রীয় গ্রুপ যার জনক a. সুতরাং a, Q-এর শূন্য ব্যতীত অন্য কোনও পদ এখন যেহেতু $(Q, +)$ যোগপ্রক্রিয়া সাপেক্ষে চক্রীয় গ্রুপ এবং a জনক সুতরাং Q এর প্রতিটি পদকে ma রূপে প্রকাশ করা যাবে, যেখানে m একটি পূর্ণসংখ্যা। এখন $\frac{1}{3}a$ অবশ্যই Q-এর একটি পদ। কিন্তু $\frac{1}{3}a$ কে কখনওই 'a'-এর একটি পূর্ণসংখ্যার গুণিতক রূপে (অর্থাৎ ma রূপে) প্রকাশ করা যাবে না।

সুতরাং $(Q, +)$ এর জনক a হতে পারে না।

$\therefore$ $(Q, +)$ চক্রীয় গ্রুপ নয়।

আবার (Q, +) গ্রুপটি (R, +)-এর উপগ্রুপ এবং (R, +) চক্রীয় গ্রুপ হলে (Q, +)ও চক্রীয় গ্রুপ হয় কারণ একটি চক্রীয় গ্রুপের উপগ্রুপ সবসময় চক্রীয় গ্রুপ। (উপপাদ্য 7)

কিন্তু (Q, +) চক্রীয় গ্রুপ নয়। (প্রমাণিত)

সুতরাং (R, +) চক্রীয় গ্রুপ নয়।

উদাহরণ 3. যে চক্রীয় গ্রুপের ক্রম (order) 60 তার কতগুলি জনক থাকতে পারে নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি চক্রীয় গ্রুপটি $\langle a \rangle$ এবং $a^{60} = e$ সুতরাং অন্য জনকগুলি 'a'-এর এমন একটি ঘাত যে ঘাতসংখ্যাটি 60-এর সঙ্গে পরস্পর মৌলিক।

সুতরাং এই চক্রীয় গ্রুপের জনকগুলি হল ঃ $a, a^7, a^{11}, a^{13}, a^{17}, a^{19}, a^{23}, a^{29}, a^{31}, a^{37}, a^{41}, a^{43}, a^{47}, a^{49}, a^{53}, a^{59}$.

সুতরাং চক্রীয় গ্রুপটির 16 টি জনক থাকবে।

উদাহরণ 4. যদি $a = (1\ 2\ 3\ 4)$ হয় তবে দেখান যে $S = \{a, a^2, a^3, a^4\}$ একটি চক্রীয় দল।

সমাধান ঃ আমরা জানি $a^2 = a.a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

আবার $a^3 = a^2.a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

এবং $a^4 = a^3.a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = I$$

$\Rightarrow y \in A \cup (B \cap C)$

$\therefore (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.......(ii)

(i) এবং (ii) থেকে পাই :- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (প্রমাণিত)

সূত্র 4 (খ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ এবং $x \in (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$ অথবা $x \in C$

$\Rightarrow \{x \in A$ এবং $x \in B$ অথবা $\{x \in A$ এবং $x \in C\}$

$\Rightarrow x \in A \cap B$ অথবা $x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\therefore A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$......(i)

আবার, $Y \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\Rightarrow y \in A \cap B$ অথবা $y \in A \cap C$

$\Rightarrow \{y \in A$ এবং $y \in B\}$ অথবা $\{y \in A$ এবং $y \in C\}$

$\Rightarrow y \in A$ এবং $\{y \in B$ অথবা $y \in C\}$

$\Rightarrow y \in A$ এবং $y \in (B \cup C)$

$\Rightarrow y \in A \cap (B \cup C)$

$\therefore (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$......(ii)

(i) এবং (ii) থেকে পাওয়া যায় : —

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (প্রমাণিত)

সূত্র 5 অভেদ সূত্র :

(ক) $A \cup \phi = A$

$\because \phi \subset A$

$\therefore A \cup \phi = A$ [9.3.7-এর মন্তব্য (i) দ্রষ্টব্য]

(খ) $A \cap U = A$

$\because A \subset U$

$\therefore A \cap U = A$ [9.3.7-এর মন্তব্য (i) দেখুন]

(প্রমাণিত)

যদি কোনও দলের অযথার্থ স্বাভাবিক অধদল ভিন্ন অন্য কোনও স্বাভাবিক অধদল না থাকে তবে ঐ দল কে সরল গ্রুপ (simple group) বলা হয়।

উদাহরণ ঃ ধরা যাক $(G, \circ) = (Z, +)$ এবং $(H, \circ) = (3Z, +)$

এখানে H এর তিনটি পৃথক বাম সহসেট আছে ঃ

$$\text{(i)} \quad 0 + H = \{3n / n \in Z\} = H$$

$$\text{(ii)} \quad 1 + H = \{3n + 1 / n \in Z\}$$

এবং $$\text{(iii)} \quad 2 + H = \{3n + 2 / n \in Z\}$$

অনুরূপে H-এর তিনটি পৃথক দক্ষিণ সহসেট হ'ল ঃ

$$\text{(i)} \quad H + 0 = \{3n / n \in Z\} = H$$

$$\text{(ii)} \quad H + 1 = \{3n + 1 / n \in Z\}$$

এবং $$\text{(iii)} \quad H + 2 = \{3n + 2 / n \in Z\}$$

এখানে স্পষ্টতঃই H-এর প্রতিটি বাম সহসেট তার দক্ষিণ সহসঞ্চয়ণের সমান বা অভিন্ন। সুতরাং (H,+) অধদলটি (G, +) এর স্বাভাবিক অধদল।

উপপাদ্য 1. $(H, \circ)$ অধদলটি $(G, \circ)$ গ্রুপের স্বাভাবিক উপগ্রুপ হবে যদি $h \in H$ এবং

$x \in G \Rightarrow x \circ h \circ x^{-1} \in H$

(অথবা যদি $x \circ h \circ x^{-1} \subset H$, প্রতিটি $x \in G$ এর জন্য)

প্রমাণ ঃ মনে করি $(H, \circ)$ স্বাভাবিক উপগ্রুপ।

$\therefore\ x \circ H = H \circ x,\ \forall x \in G.$

$h \in H$ এবং $x \in G \Rightarrow x \circ h = h_1 \circ x$, কোনও একটি $h_1 \in H$ এর জন্য।

$\Rightarrow x \circ h \circ x^{-1} = h_1 \Rightarrow x \circ h \circ x^{-1} \in H.$

বিপরীতক্রমে ধরা যাক, $x \circ h \circ x^{-1} \in H,\ \forall x \in G$ এবং $h \in H$

মনে করি $m \in x \circ H\ \therefore\ m = x \circ h_1$, যখন $h_1 \in H$

$= (x \circ h_1 \circ x^{-1}) \circ x$

$= h_2 \circ x$

$\therefore\ m \in x \circ H \Rightarrow p \in H \circ x$

$\therefore\ x \circ H \subset H \circ x\ \ldots$ (i)

আবার মনে করি $n \in H \circ x$

$$\therefore\ n = h_3 \circ x, \text{ যখন } h_3 \in H$$
$$= (x \circ x^{-1}) \circ h_3 \circ (x^{-1})^{-1}$$
$$= x \circ [x^{-1} \circ h_3 \circ (x^{-1})^{-1}]$$
$$= x \circ h_4, \text{ যেখানে } h_4 = x^{-1} \circ h_3 \circ (x^{-1})^{-1} \in H$$

$\therefore\ n \in H \circ x \Rightarrow n \in x \circ H$

$\therefore\ H \circ x \subset x \circ H \ldots$ (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই, $x \circ H = H \circ x$ এবং এটি G এর যে কোনও পদ x এর জন্য সত্য।

$\therefore$ $(H, \circ)$ অধদলটি $(G, \circ)$ এর স্বাভাবিক অধদল।

উপপাদ্য 2. $(H, \circ)$ উপগ্রুপটি $(G, \circ)$ দলের স্বাভাবিক অধদল হবে যদি এবং একমাত্র যদি $x \circ H \circ x^{-1} = H,\ \forall x \in G$ হয়।

প্রমাণ : ধরি $x \circ H \circ x^{-1} = H,\ \forall x \in G$ সুতরাং $x \circ h \circ x^{-1} \in H,\ \forall h \in H$ এবং $x \in G$

$\therefore$ উপপাদ্য (1) অনুসারে $(H, \circ)$ স্বাভাবিক অধদল।

আবার বিপরীতক্রমে ধরা যাক, $(H, \circ)$, $(G, \circ)$ এর স্বাভাবিক অধদল।

$\therefore\ x \circ H \circ x^{-1} \subseteq H,\ \forall x \in G \ldots$ (i)

এবং $x^{-1} \circ H \circ (x^{-1})^{-1} \subseteq H,\ \forall x \in G$

অর্থাৎ $x^{-1} \circ H \circ x \subseteq H,\ \forall x \in G \ldots$ (ii)

(ii) থেকে পাই, $x \circ (x^{-1} \circ H \circ x) \circ x^{-1} \subseteq x \circ H \circ x^{-1}$

অর্থাৎ, $H \subseteq x \circ H \circ x^{-1} \ldots$ (iii)

(i) এবং (iii) হতে পাই, $x \circ H \circ x^{-1} = H$

মন্তব্য : (পাঠকের সতর্কীকরণের জন্য) উপরের উপপাদ্য অনুসারে আমরা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি না যে $x \circ h \circ x^{-1} = h\ \forall x \in G$ এবং $\forall h \in H$.

উপপাদ্য 3. $(H, \circ)$ এবং $(K, \circ)$ যদি $(G, \circ)$ দলের দুইটি স্বাভাবিক অধদল হয় তবে $(H \cap K, \circ)$ অধদলটি $(G, \circ)$ দলের স্বাভাবিক অধদল হবে।

প্রমাণ ঃ $(H \cap K, \circ)$ যে $(G, \circ)$ দলের একটি অধদল হয় তা দলতত্ত্বে (Group Theory) পূর্বেই প্রমাণিত হয়েছে। এখন আমরা প্রমাণ করব যে এটি একটি স্বাভাবিক অধদল।

মনে করি $a \in H \cap K$ এবং x পদটি G সেটের যে কোনও পদ।

এখন $a \in H \cap K \Rightarrow a \in H$ এবং $a \in K$

$(H, \circ)$ এবং $(K, \circ)$ স্বাভাবিক অধদল।

সুতরাং $x^{-1} \circ a \circ x \in H$ এবং $x^{-1} \circ a \circ x \in K$

$\therefore\ a \in H \cap K$ এবং $x \in G \Rightarrow x^{-1} \circ a \circ x \in H \cap K$

সুতরাং প্রমাণিত হ'ল যে $(H \cap K, \circ)$ অধদলটি $(G, \circ)$-এর স্বাভাবিক অধদল।

উপপাদ্য 4. $(H, \circ)$ যদি $(G, \circ)$ এর একটি অধদল হয় এবং $(N, 0)$ যদি $(G, 0)$ এর একটি স্বাভাবিক অধদল হয় তবে $(H \cap N, \circ)$ অধদলটি $(H, \circ)$ এর একটি স্বাভাবিক অধদল।

প্রমাণ ঃ $(H \cap N, \circ)$ অবশ্যই $(H, \circ)$ একটি অধদল। এখন প্রমাণ করতে হবে যে এটি $(H, \circ)$ এর একটি স্বাভাবিক অধদল।

মনে করি $a \in H$ এবং $h \in H \cap N$

$\therefore\ h \in H$ এবং $h \in N$

আবার $a \circ h \circ a^{-1} \in N$ কারণ $(N, 0)$ স্বাভাবিক।

যেহেতু $h \in H$ এবং $a \in H$, অতএব $a \circ h \in H$

আবার যেহেতু $a \circ h \in H$ এবং $a^{-1} \in H$, অতএব $(a \circ h) \circ a^{-1} \in H$

সুতরাং $a \circ h \circ a^{-1} \in N$ এবং $a \circ h \circ a^{-1} \in H$

$\therefore\ a \circ h \circ a^{-1} \in H \cap N,\ \forall\ a \in H$

$\therefore\ (H \cap N, \circ)$ উপগ্রুপটি $(H, \circ)$ এর স্বাভাবিক অধদল।

[কারণ $(H, 0)$ একটি অধদল]

উপপাদ্য 5. $(H, \circ)$ যদি $(G, \circ)$ এর উপগ্রুপ হয় এবং যদি $[G : H] = 2$ হয় তবে $(H, \circ)$ উপগ্রুপটি $(G, \circ)$ এর স্বাভাবিক উপগ্রুপ।

প্রমাণ ঃ যেহেতু $[G : H] = 2$, সুতরাং H-এর কেবলমাত্র দুইটি বাম সহসেট আছে। এই দুইটি বাম সহসেট যথাক্রমে H এবং $G - H$. আবার, H এর কেবলমাত্র দুইটি দক্ষিণ সহসেট আছে যারা যথাক্রমে H এবং $G - H$.

সুতরাং H এর প্রতিটি বাম সহসেট এবং দক্ষিণ সহসেট অভিন্ন।

$\therefore$ $(H, \circ)$ স্বাভাবিক।

উদাহরণ 1. $(H, \circ)$ যদি $(G, \circ)$ এর স্বাভাবিক অধদল হয় এবং $(L, \circ)$ যদি $(G, \circ)$ এর অধদল হয় এবং যদি $H \subset L \subset G$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে $(H, \circ)$ অধদলটি $(L, \circ)$ এর স্বাভাবিক অধদল।

প্রমাণ ঃ এখানে স্পষ্টতই $(H, \circ)$ গ্রুপটি $(L, \circ)$ এর অধদল।

মনে করি l পদটি L-এর যে কোনও পদ

$\therefore$ $l \in G$ (কারণ $L \subset G$)

আবার যেহেতু (H, 0), (G, 0) এর স্বাভাবিক উপগ্রুপ এবং $l \in G$, অতএব $l \circ H \circ l^{-1} = H$

$\therefore$ $l \in L \Rightarrow l \circ H \circ l^{-1} = H$

$\therefore$ $(H, \circ)$ অধদলটি $(H, \circ)$ এর স্বাভাবিক অধদল।

উদাহরণ 2. দেখান যে একটি বিনিময়যোগ্য দলের প্রতিটি অধদলই স্বাভাবিক।

সমাধান ঃ মনে করি $(G, \circ)$ একটি বিনিময়যোগ্য গ্রুপ এবং $(H, \circ)$, $(G, \circ)$ এর একটি অধদল।

যেহেতু $(G, \circ)$ বিনিময়যোগ্য সুতরাং $x \circ H = H \circ x, \ \forall x \in H$

সুতরাং $(H, \circ)$ একটি স্বাভাবিক অধদল $\forall x \in H$।

উদাহরণ 3. $(N, \circ)$ এবং $(M, \circ)$ যদি $(G, \circ)$-এর স্বাভাবিক অধদল হয় এবং যদি $N \cap M = \{e\}$ হয় তবে দেখান যে N এর প্রতিটি পদ M এর প্রতিটি পদের সঙ্গে বিনিময়যোগ্য অর্থাৎ $n \circ m = m \circ n, \forall n \in N$ এবং $m \in M$.

সমাধান ঃ মনে করি N-এর যে কোনও পদ n এবং M এর যে কোনও পদ m.

N এবং M যেহেতু অধদল, $\therefore$ $n^{-1} \in N$ এবং $m^{-1} \in M$.

এখন $n \circ m \circ n^{-1} \circ m^{-1}$ পদটি বিবেচনা করা যাক।

যেহেতু (N, $\circ$) স্বাভাবিক, $n^{-1} \in N$ এবং $m \in M \subseteq G \Rightarrow m \circ n^{-1} \circ m^{-1} \in N$

সুতরাং $n \circ (m \circ n^{-1} \circ m^{-1}) \in N$ ... (i)

আবার যেহেতু (M, 0) স্বাভাবিক সুতরাং $n \circ m \circ n^{-1} \in M$, কারণ $n \in N \subseteq G$

$\therefore (n \circ m \circ n^{-1}) \circ m^{-1} \in M$ ... (ii)

(i) এবং (ii) থেকে পাই,

$n \circ m \circ n^{-1} \circ m^{-1} \in N \cap M$

$\Rightarrow n \circ m \circ n^{-1} \circ m^{-1} = e$ [$\because N \cap M = \{e\}$]

$\Rightarrow n \circ m \circ (m \circ n)^{-1} = e$

$\Rightarrow (n \circ m) \circ \{(m \circ n)^{-1} \circ (m \circ n)\} = e \circ (m \circ n)$.

$\Rightarrow n \circ m = m \circ n$.

উদাহরণ 4. (H, $\circ$) যদি (G, $\circ$) এর অধদল হয় এবং যদি $N(H) = \{x \in G : x \circ H \circ x^{-1} = H\}$ হয় তবে দেখান যে (N (H), 0), (G, 0) এর একটি অধদল।

সমাধান ঃ মনে করি $a, b \in N(H)$

$\therefore a \circ H \circ a^{-1} = H$ এবং $b \circ H \circ b^{-1} = H$ সংজ্ঞানুসারে।

$\therefore (a \circ b^{-1}) \circ H \circ (a \circ b^{-1})^{-1} = a \circ b^{-1} \circ H \circ b \circ a^{-1}$

$= a \circ (b^{-1} \circ H \circ b) \circ a^{-1} = a \circ H \circ a^{-1} = H$ [$\because b \circ H \circ b^{-1} = H \Rightarrow b^{-1} \circ H \circ b = H$]

$\therefore a \circ b^{-1} \in N(H)$.

$\therefore a \in N(H), b \in N(H) \Rightarrow a \circ b^{-1} \in N(H)$.

$\therefore$ (N (H), $\circ$), (G, $\circ$) এর একটি অধদল।

12.13 সারাংশ

(A) চক্রীয় দল (Cyclic group) ঃ

1. **সংজ্ঞা ঃ** যদি কোনও দল (G, $\circ$) তে এমন একটি উপাদান 'a' থাকে যে ঐ দলের প্রত্যেক উপাদান $x = a^n$ (গুণ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে) অথবা প্রতি উপাদান $x = na$ (যোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে) যখন n একটি পূর্ণসংখ্যা, তবে (G, $\circ$) কে একটি চক্রীয দল বলে এবং 'a' কে ঐ দলের জনক বলা হয়। এক্ষেত্রে লেখা হয় $G = \langle a \rangle$ অথবা লেখা হয় $G = \{a^n / n \in Z\}$, '$\circ$' প্রক্রিয়াটি গুণ।

এবং $G = \{na/n \in Z\}$, যখন '$\circ$' প্রক্রিয়াটি যোগ।

2. চক্রীয় দল সবসময় বিনিময়যোগ্য। কিন্তু সব বিনিময়যোগ্য দল চক্রীয় দল নয়।

3. কোনও চক্রীয় দলের জনক a হলে ঐ দলের অপর এক জনক হবে a^{-1}.

4. অসীম চক্রীয় দলের কেবলমাত্র দুটি জনক থাকতে পারে, a এবং a^{-1}.

5. সসীম চক্রীয় দলের দুই এর অধিক জনক থাকতে পারে।

6. একটি সসীম চক্রীয় দলের ক্রম n হলে এবং জনক a হলে a^m ঐ দলের অপর এক জনক হবে যদি m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় এবং m এবং n পরস্পর মৌলিক হয়।

7. কোনও সসীম চক্রীয় দলের ক্রম n হলে ঐ গ্রুপের জনক সংখ্যা হবে n এর চেয়ে ছোট এবং n এর সঙ্গে পরস্পর মৌলিক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার (1 সংখ্যাটিকে ধরে) সমান।

8. চক্রীয় দলের যে কোনও অধদল চক্রীয় দল হবে।

(B) স্বাভাবিক অধদল (Normal subgroup) :

1. **সংজ্ঞা :** যদি $(H, \circ)$ অধদলটি $(G, \circ)$ দলের এমন একটি অধদল হয় যে $a \circ H = H \circ a, \forall a \in G$ হয় তবে $(H, \circ)$ অধদলটিকে $(G, \circ)$ এর স্বাভাবিক অধদল বলা হয়।

2. $(H, \circ)$ অধদলটি $(G, \circ)$ দলের স্বাভাবিক অধদল হবে যদি এবং একমাত্র যদি $x \circ H \circ x^{-1} = H$, $\forall x \in G$ হয়।

3. $(H, \circ)$ এবং $(K, \circ)$ যদি $(G, \circ)$ দলের স্বাভাবিক অধদল হয় তবে $(H \cap K, \circ)$ অধদলটি $(G, \circ)$ গ্রুপের স্বাভাবিক অধদল হবে।

4. $(H, \circ)$ যদি $(G, \circ)$ এর একটি অধদল হয় এবং $(N, \circ)$ যদি $(G, \circ)$ এর একটি স্বাভাবিক অধদল হয় তবে $(H \cap N, 0)$ অধদলটি $(H, 0)$ এর একটি স্বাভাবিক অধদল হবে।

5. $(H, \circ)$ যদি $(G, \circ)$ এর অধদল হয় এবং যদি $[G : H] = 2$ হয় তবে $(H, \circ)$ অধদলটি $(G, \circ)$ এর স্বাভাবিক অধদল হবে।

12.14 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

(A)

(1) প্রমাণ করুন $\{1, -1, i, -i\}$ সেটটি গুণ সাপেক্ষে একটি চক্রীয় দল। এই গ্রুপের জনকগুলি কি কি?

(2) দেখান যে নীচের প্রক্রিয়া সারণিতে দেওয়া দল চক্রীয় দল ঃ

.	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

(3) প্রমাণ করুন ঃ কোন দলের ক্রম 3 হলে, সেটি একটি চক্রীয় গ্রুপ।

(4) চক্রীয় দল $\langle a \rangle$ এর ক্রম যদি 30 হয় তবে এই দলের জনকগুলি লিখুন।

(5) প্রমাণ করুন $\{1, \omega, \omega^2\}$ সঞ্চয়নটি গুণ সাপেক্ষে চক্রীয় দল যার জনকগুলি ω এবং ω^2.

(6) $G = \langle a \rangle$ চক্রীয় দলের ক্রম n , যদি m সংখ্যাটি n এর একটি ভাজক (divisor) হয় প্রমাণ করুন $<a^m>$ অধদলের ক্রম n/m.

(7) $G = \langle a \rangle$ চক্রীয় দলটির ক্রম n ; প্রমাণ করুন যে G এর যে কোনও অধদল H এর জনক a^m, যেখানে m সংখ্যাটি n এর একটি ভাজক।

(8) যদি $(G, \circ)$ একটি 6 ক্রমবিশিষ্ট বিনিময়যোগ্য দল হয় এবং এই দলে 3 ক্রমবিশিষ্ট একটি পদ থাকে, তবে প্রমাণ করুন যে (G, 0) একটি চক্রীয় দল।

(B)

(1) (G, 0) দলের যে কোন দুটি পদ a, b এর জন্য $(a \circ b)^3 = a^3 \circ b^3$ সম্পর্কটি সত্য। প্রমাণ করুন যে $H = \{x^3/x \in G\}$ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে $(G, \circ)$ এর স্বাভাবিক অধদল।

(2) $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \Big/ xz \neq 0 \right\}$, যখন x, y, z বাস্তব সংখ্যা। প্রমাণ করুন G গুণ সাপেক্ষে একটি দল।

যদি $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \right\}$, হয়, প্রমাণ করুন $(H, \circ)$ অধদল $(G, \circ)$ এর স্বাভাবিক অধদল।

(3) (G, 0) দলের একটি চক্রীয় অধদল $(T, \circ)$; $(T, \circ)$ যদি স্বাভাবিক অধদল হয় তবে প্রমাণ করুন যে $(T, \circ)$ এর প্রতিটি অধদলই $(G, \circ)$ এর স্বাভাবিক অধদল।

(4) প্রমাণ করুন যে চক্রীয় দলের যে কোনও অধদলই স্বাভাবিক।

(5) $(G, \circ)$ দলটির একটি অধদল $(H, \circ)$ এবং $N(H) = \{x \in G : x \circ H \circ x^{-1} = H\}$;

দেখান যে (i) (H, ∘) অধদল (N(H), ∘) এর স্বাভাবিক অধদল।

(ii) (H, ∘) (G, ∘) এর স্বাভাবিক অধদল হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি N (H) = G হয়।

(6) (H, ∘) যদি (G, ∘) এর একমাত্র সসীম অধদল হয় (ধরুন m ক্রমবিশিষ্ট) তবে দেখান যে (H, ∘) অধদলটি (G, ∘) এর স্বাভাবিক অধদল।

(7) (H, ∘) যদি (G, ∘) এর স্বাভাবিক অধদল হয় এবং (K, ∘) যদি (H, ∘) এর স্বাভাবিক অধদল হয়, তবে একটি উদাহরণের সাহায্যে দেখান যে (K, ∘) অধদলটি (G, ∘) এর স্বাভাবিক অধদল নাও হতে পারে।

(8) (H, ∘) এবং (K, ∘) যদি (G, ∘) এর স্বাভাবিক উপগ্রুপ হয় তবে প্রমাণ করুন যে (H∘K, ∘), (G, ∘) এর স্বাভাবিক অধদল।

12.15 উত্তরমালা

(A)

(1) i এবং $-i$

(4) $a, a^7, a^{11}, a^{13}, a^{17}, a^{19}, a^{23}, a^{29}$.

একক 13 ❑ অঙ্গন (Ring)

গঠন

13.1 প্রস্তাবনা

এর আগের অধ্যায়গুলিতে আপনারা একটি সেটের উপর দ্বিপদ প্রক্রিয়া (binary operation) কিভাবে সংজ্ঞাত হয় সে বিষয়ে জেনেছেন। এ সম্বন্ধে প্রাসঙ্গিক উপপাদ্যগুলি ও অন্তরসম্বন্ধ সম্পর্কেও আলোচনা করা হয়েছে। কিন্তু একটি সেটে একই সঙ্গে একাধিক দ্বিপদ প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত থাকতে পারে। এই অধ্যায়ে সেই ধরনের সেট সম্পর্কে আলোচনা করা হবে। উদাহরণ হিসাবে খুবই সাধারণভাবে ব্যবহৃত বাস্তব সংখ্যার সেটটি নেওয়া যাক। এখানে দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত—একটিকে বলা হয় যোগ এবং আরেকটিকে গুণ। আলোচনার সুবিধার জন্য যেকোনও সেটে যে দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত, তাদের একটিকে আমরা যোগ এবং অপরটিকে গুণ নামে ব্যবহার করব।

13.2 উদ্দেশ্য

এক জোড়া দ্বিপদ প্রক্রিয়া যুক্ত একটি সেটকে কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধ পূরণের সাপেক্ষে অঙ্গন (Ring) বলা হয়।

অঙ্গনটি যদি আরও কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ পূরণ করে, তখন সেটির বিশেষ নামকরণ করা হয়। অঙ্গনের এর যথাযথ সংজ্ঞা, বিভিন্ন উদাহরণ সহযোগে এই অধ্যায়ে আলোচনা করা হবে। অঙ্গনের অংশকে কখন অধঅঙ্গন (subring) বলা হয় তাও আলোচিত হবে এবং অধঅঙ্গনের বিভিন্ন ধর্মও সেই আলোচ্য সূচীতে থাকবে।

13.3 প্রাসঙ্গিক ধারণাসমূহ

অঙ্গন (ring)-এর আলোচনা করার পূর্বে কতকগুলি ধারণার পূর্ব উল্লেখ বিশেষ প্রয়োজন।

দ্বিপদ প্রক্রিয়া (binary operation) বলতে আমরা বুঝি $A \times A$ হতে A-তে একটি চিত্রণ (mapping)।

অর্থাৎ $a o b = c \in A$ যেখানে $A \times A$, A সেটটির কার্তেজিয় গুণ সেট।

আবার কোন একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া কোন সেট G-এর উপরে সুসংজ্ঞাত হলে এই দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে G-কে বলা হবে দল (Group) যদি এটি চারটি স্বতঃসিদ্ধপূরণ করে। যেগুলি হলো

(i) বদ্ধতা ধর্ম (Closure property)ঃ $a \circ b \in A \;\; \forall a, b \in A$

(ii) সংযোজ্যতা ধর্ম (Associative property) ঃ

$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \;\; \forall, a, b, c \in A$

(iii) স্থিরক উপাদান-এর বিদ্যমানতা (existence of identity element) ধর্ম (একক) অর্থাৎ $\exists e \in A$ যেন $a \circ e = e \circ a = a, \forall \in A$

(iv) বিপরীত উপাদানের বিদ্যমানতা (existence to inverse) ধর্ম $\forall \; a \in A, \exists a'$

যেন $a \circ a^{-1} = a^{-1} . a = e$

ঐ দ্বিপদ প্রক্রিয়াটি আরও একটি স্বতঃসিদ্ধ (বিনিময়ধর্ম বা commutative property) $a \circ b = b \circ a, \forall a, b \in A$ পালন করলে দলটিকে বিনিময়যোগ্য দল বা আবেলিয় দল বলে। কোনও সেটের উপরে দ্বিপদ প্রক্রিয়াটি প্রথম দুটি স্বতঃসিদ্ধ পালন করলে, সেটটিকে অর্ধদল (semi group) বলে।

13.4 অঙ্গন (ring) এবং অঙ্গনের বিভিন্ন উদাহরণ

কোনও সেট R দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া (একটিকে বলা হয় যোগ ও অপরটিকে গুণ) এর সাপেক্ষে অঙ্গন (Ring) বলা হয় যদি এটি যোগ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে একটি বিনিময় যোগ্য দল হয় ও গুণ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে একটি অর্ধদল হয় এবং দ্বিপদ প্রক্রিয়া দুটি সাপেক্ষে বাম ও ডান বণ্টন ধর্ম দুটি পালন করে। বিস্তারিতভাবে বলা হয় (R, +, .) একটি অঙ্গন (ring) হবে যদি

(1) $a + b \in R$; $\forall$ a, $b \in R$

(2) $(a + b) + c = a + (b + c)$; $\forall$ a, b, $c \in R$

(3) $\exists\, 0 \in R$ যেন $a + 0 = 0 + a = a$; $\forall\, a \in R$

(4) $\forall\, a \in R$, $\exists\, -a \in R$ যেন $a + (-a) = (-a) + a = 0$

(5) $a + b = b + a$; $\forall$ a, $b \in R$

(6) $a \cdot b \in R$; $\forall$ a, $b \in R$

(7) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $\forall$ a, b, $c \in R$

(8) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; $\forall$ a, b, $c \in R$

(9) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$; $\forall$ a, b, $c \in R$

অঙ্গনের উদাহরণ ঃ

(1) (Z, +, .) একটি অঙ্গন।

(2) যদি $R = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Z\}$ তবে (R, +, .) একটি অঙ্গন হবে। কোনও অঙ্গন (R, +, .) যদি গুণ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে বিনিময়যোগ্য (commutative) হয় তবে সেটিকে বিনিময়যোগ্য অঙ্গন বলা হয়।

(3) (Z, +, .) একটি বিনিময়যোগ্য অঙ্গন।

(4) (Z_e, +, .) একটি বিনিময়যোগ্য অঙ্গন যখন Z_e হলো সমস্ত জোড়সংখ্যার সেট।

গুণের এককযুক্ত অঙ্গন। কোনও অঙ্গনে {R, +, .} গুণের সাপেক্ষে একক থাকলে ঐ অঙ্গনটিকে এককযুক্ত অঙ্গন বলা হয়।

এককযুক্ত অঙ্গনের উদাহরণ ঃ

(5) পূর্ণসংখ্যার সেট Z সাধারণ যোগ ও গুণ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে অঙ্গন এবং 1 সংখ্যাটি গুণের একক হিসাবে নেওয়া যায়। অতএব {Z, +, .} অঙ্গনটি গুণের এককযুক্ত।

(6) পূর্ণসংখ্যার দ্বারা গঠিত 5-এর অবশিষ্ট শ্রেণীগুলির সেট। অবশিষ্ট শ্রেণীর সেট যোগ ও গুণের সাপেক্ষে একটি অঙ্গন গঠন করে যার মধ্যে [1] গুণের একক।

একইভাবে কোনও অঙ্গনের যদি গুণের সাপেক্ষে একক (বা স্থিরক উপাদান) না থাকে তাহলে এটিকে এককহীন অঙ্গন বলা যায়। যেমন

(7) জোড় সংখ্যার সেটটি সাধারণ যোগ ও গুণের সাপেক্ষে অঙ্গন হয় অথচ এর মধ্যে গুণের এককটি নেই।

(8) একটি সেট ধরা যাক যার উপাদানগুলি $n \times n$ মাপের ম্যাট্রিক্স এবং ম্যাট্রিক্সের পদগুলি জোড় সংখ্যা। সেটটি ম্যাট্রিক্স যোগ ও গুণের সাপেক্ষে একটি অঙ্গন হবে যার মধ্যে গুণের এককটি নেই।

(9) বাস্তব সংখ্যার সেটগুলির দ্বারা তৈরি $n \times n$ মাপের ম্যাট্রিক্সগুলি। ম্যাট্রিক্সের যোগ ও গুণের সাপেক্ষে একটি অঙ্গন গঠন করে যা কিন্তু বিনিময়যোগ্য নয়।

(10) জোড় সংখ্যাগুলির দ্বারা গঠিত $n \times n$ মাপের ম্যাট্রিক্সগুলি যোগ ও গুণ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে অঙ্গন গঠন করে যেটি বিনিময়যোগ্য অঙ্গন নয় এবং যার মধ্যে গুণের একক নেই।

ধরা যাক $(R, +, .)$ একটি অঙ্গন। R-এর একটি উপাদান a-কে শূন্যের বামভাজক (left divisor) বলা হবে যদি $a \neq 0$ হয় এবং R অঙ্গনে আরও একটি উপাদান b থাকে যেটি $b \neq 0$ এবং $ab = 0$ উপাদান b-কে তখন শূন্যের ডানভাজক (right divisor) বলা হয়। কোন অঙ্গনে শূন্যের ভাজক থাকলে তাকে শূন্যের ভাজকযুক্ত অঙ্গন বলা হবে।

(11) 4-এর সাপেক্ষে অবশিষ্ট শ্রেণীর সেট শ্রেণীর যোগ ও গুণ এর সাপেক্ষে এটি একটি অঙ্গন। এর মধ্যে $[0]$ যোগের একক। লক্ষ্যণীয় $[2]$ শ্রেণীটি শূন্যের ভাজক যেহেতু $[2] \neq [0]$ এবং $[2] \times [2] = [4] = [0]$ অর্থাৎ এটি এমন একটি অঙ্গন যার মধ্যে শূন্যের ভাজক আছে।

(12) যেহেতু $a \neq 0$ এর জন্য $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ হয় সুতরাং বাস্তব সংখ্যা দ্বারা গঠিত 2×2 মাপের ম্যাট্রিক্সগুলি একটি অঙ্গন গঠন করে যার মধ্যে শূন্যের ভাজক আছে।

আপনারা লক্ষ করুন বাস্তব সংখ্যার সেটটি সাধারণ যোগ ও গুণনের সাপেক্ষে অঙ্গন গঠন করে যার মধ্যে শূন্যের ভাজক নেই। এই ধরনের অঙ্গনকে আমরা পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র (Integral domain) বলি।

(13) ধরা যাক $S = \{[a, b]$ অন্তরালে সন্তত বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষকগুলি $\}$

এখানে $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f . g)(x) = f(x) . g(x)$ এইভাবে যোগ ও গুণ প্রক্রিয়াকে সংজ্ঞায়িত করলে এটি একটি অঙ্গন গঠন করে যেখানে $0(x) = 0$ ও $I(x) = 1$ যোগ ও গুণের সাপেক্ষে একক।

13.5 অঙ্গন সম্পর্কিত উপপাদ্যসমূহ

উপপাদ্য 1. যদি $(R, +, .)$ একটি অঙ্গন হয় ও a, b, c অঙ্গনের যে কোনও তিনটি উপাদান হয়, তাহলে

(i) $-(-a) = a$

(ii) $-(a + b) = -a - b$

(iii) $-(a - b) = a + b$

(iv) $(a - b) - c = a - (b + c)$

প্রমাণ ঃ (i) যেহেতু $a + (-a) = 0$ এবং $-a + a = 0$

সুতরাং $-(-a) = a$

(ii) $(a + b) + (-a - b)$

$= (b + a) + (-a - b)$ [যেহেতু $a + b = b + a$]

$= b + ((a + (-a)) + (-b))$ [সংযোজ্যতা সূত্র অনুসারে]

$= b + (-b)$

$= 0$

একইভাবে দেখান যায় $(-a - b) + (a + b) = 0$

সুতরাং $-a - b$, $a + b$ এর বিপরীত উপাদান

অর্থাৎ $-(a + b) = -a - b$

(iii) $a - b + (-a + b)$

$= -b + a + (-a + b)$ [যেহেতু $a - b = -b + a$]

$= (-b + 0) + b$

$= -b + b$

$= 0$

(iv) $a - (b + c) = a + \{-(b + c)\}$

$= a + (-b - c)$

$= (a + (-b)) + (-c)$

$= (a - b) - c$

উপপাদ্য 2. ধরা যাক a, b, c, $\{R, +, .\}$ রিং এর যে-কোনও তিনটি উপাদান তাহলে

(i) $a . 0 = 0 . a = 0$

(ii) $(-a) . (-b) = a . b$

(iii) $(b - c) . a = b . a - c . a$

(iv) $a . (-b) = -(a . b) = (-a) . b$

(v) $a . (b - c) = a . b - a . c$

প্রমাণ ঃ $a . a = a . (a + 0) = a . a + a . 0$

আবার $a \cdot a = a \cdot a + 0$

সুতরাং $a \cdot a + 0 = a \cdot a + a \cdot 0$

বা, $0 = a \cdot 0$

আবার $(0 + a) \cdot a = a \cdot a$

এখন $0 \cdot a + a \cdot a = 0 + a \cdot a$

সুতরাং $0 \cdot a = 0$

(ii) $a \cdot b + a. (-b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$

সুতরাং $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ (iv) প্রমাণিত

আবার $(-a + a) \cdot b = 0 \cdot b = 0$

অথবা, $-a.b + a.b = 0$

বা, $(-a \cdot b) + (a.b) - a \cdot b = 0 - (a \cdot b)$

বা, $-a \cdot b \qquad = -(a \cdot b)$

সুতরাং $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = (-a \cdot b)$ (iv) প্রমাণিত।

এখন a এর বদলে –a বসিয়ে পাই

$(-a) \cdot (-b) = -(-a) \cdot b = a \cdot b$

সুতরাং (ii) প্রমাণিত।

এখন $a \cdot (b - c) = a \cdot b + a \cdot (-c)$ বাম দিকের বণ্টন ধর্মানুসারে

$= a \cdot b - a \cdot c$ (iv) সূত্র অনুযায়ী।

সুতরাং (v) প্রমাণিত। একইভাবে ডান দিকের বণ্টন ধর্ম প্রয়োগে এটি প্রমাণ করা সম্ভব যে

$(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$ (iii) প্রমাণিত।

উপপাদ্য 3. $\{R, +, .\}$ একটি গুণের এককযুক্ত অঙ্গন হলে গুণের এককটি অনন্য হবে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক গুণের এককটি অনন্য নয় e এবং e' দুটিই গুণের একক। এখন ধর্মানুসারে

$$\left.\begin{array}{ll} a \cdot e = e \quad a = a & \forall a \in R \\ a \cdot e' = e' a = a & \forall a \in R \end{array}\right\}$$

সুতরাং বলা যায় $e \,.\, e' = e' \,.\, e = e'$

এবং $e.\, e' = e' \,.\, e = e$

অর্থাৎ, $e = e'$

উপপাদ্য 4. $\{R, +, .\}$ অঙ্গনে গুণের অপসারণ সূত্র প্রযোজ্য হবে যদি এর মধ্যে শূন্যের ভাজক না থাকে। বিপরীতক্রমে বলা যায় শূন্যের ভাজক না থাকলে রিং-এর ক্ষেত্রে গুণের অপসারণ সূত্রটি প্রযোজ্য।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $\{R, +, .\}$ রিং-এ শূন্যের কোনও ভাজক নেই। সুতরাং

$a \,.\, b = 0 \Rightarrow$ হয় $a = 0$ অথবা $b = 0$

অথবা বলা যায় $a \neq 0$ হলে $a \,.\, b = 0 \Rightarrow b = 0$

আমরা জানি অঙ্গনের ধর্মানুসারে $a \,.\, (b - c) = a \,.\, b - a \,.\, c$

এখন $a \,.\, b = a \,.\, c \Rightarrow a \,.\, b - a \,.\, c = 0$

বা, $a \,.\, (b - c) = 0$ কিন্তু $a \neq 0$ এবং অঙ্গনে শূন্যের কোনও ভাজক নেই। সুতরাং $b - c = 0$

বা, $b - c + c = 0 + c$

বা, $b = c$

আবার $b \neq 0$ $\quad b.\, c = 0 \Rightarrow c = 0$

এবার $b \,.\, a = c \,.\, a$ দেওয়া আছে

$\Rightarrow (b - c) \quad a = 0$ (যেহেতু $b \,.\, a - c \,.\, a = 0$)

$\Rightarrow b - c = 0$

$\Rightarrow b - c + c = 0 + c$

$\Rightarrow b = c$

সুতরাং শূন্যের ভাজক না থাকলে গুণের অপসারণ সূত্রটি প্রযোজ্য।

এবার ধরা যাক গুণের অপসারণ সূত্রটি $\{R, +, .\}$-এ প্রযোজ্য। এটা প্রমাণ করা সম্ভব যে $\{R, +, .\}$ -এ শূন্যের কোনও ভাজক নেই। ধরা যাক $a \neq 0$ এবং $a \,.\, b = 0$ আবার $a \,.\, b = 0 = a \,.\, 0$ বামদিকের অপসারণ সূত্র প্রয়োগে বলা সম্ভব $b = 0$

আবার ধরা যাক $a \,.\, b = 0$ ও $b \neq 0$

তাহলে $a \,.\, b = 0 = 0 \,.\, b$ গুণের অপসারণ সূত্র প্রয়োগে বলা সম্ভব $a = 0$

তাহলে $a \,.\, b = 0 \Rightarrow$ হয় $a = 0$ অথবা $b = 0$

অর্থাৎ, $\{R, +, .\}$-এ শূন্যের কোনও ভাজক নেই।

উপপাদ্য 5. কোনও অঙ্গনে গুণের এককটি কখনই শূন্যের ভাজক হবে না।

প্রমাণ : ধরা যাক, $\{R, +, .\}$ অঙ্গনে a উপাদানটি গুণের একক।

যেহেতু a শূন্য নয় a^{-1} ও R-এ থাকবে।

ধরা যাক $a \,.\, b = 0$

এখন $a^{-1} . (a . b) = a^{-1} . 0 = 0$

আবার $(a^{-1} . a) . b = 0$

বা, $1 . b = 0$

বা, $b = 0$

আবার $c \in R$ এবং $c . a = 0$ হলে একইভাবে দেখানো সম্ভব যে $c = 0$.

অর্থাৎ a শূন্যের বাম বা ডান ভাজক হতে পারে না।

13.6 পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র (Integral domain)

একটি অঙ্গন যার মধ্যে কমপক্ষে দুটি উপাদান আছে। যেটি গুণের সাপেক্ষে বিনিময়যোগ্য ও যার মধ্যে গুণের এককটি আছে এবং যার মধ্যে শূন্যের কোনও ভাজক নেই সেই অঙ্গনটিকে বলা হয় পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র। উদাহরণ হিসাবে বলা যায় পূর্ণ সংখ্যার সেট Z একটি পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র কিন্তু জোড় সংখ্যার সেটে Z_e মধ্যে গুণের একক এক নেই বলে সেটি পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র হতে পারে না।

সুতরাং পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্রের স্বতঃসিদ্ধগুলি এইভাবে বিবৃত করা যায়।

$\{D, +, .\}$ একটি পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র হবে। যদি

(i) যোগের সাপেক্ষে D একটি বিনিময়যোগ্য দল হয়।

(ii) গুণের সাপেক্ষে D একটি অর্ধদল হয়।

(iii) D-এর মধ্যে গুণের এককটি আছে ও (iv) গুণ প্রক্রিয়াটি D-তে বিনিময়যোগ্য।

উপপাদ্য 9. Z_p একটি p-এর অবশিষ্ট শ্রেণীর অঙ্গন (অবশিষ্ট শ্রেণীর যোগ ও গুণের সাপেক্ষে) Z_p একটি পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র হবে যদি এবং একমাত্র যদি p একটি মৌলিক সংখ্যা হয়।

ধরা যাক Z_p ও p অবশিষ্ট শ্রেণীর অঙ্গন যখন p একটি মৌলিক সংখ্যা।

এবার $[r], [s] \in Z_p$ এর জন্য $[r] . [s] = [0]$ হলে $r . s$ এমন একটি সংখ্যা হবে যা p দ্বারা সম্পূর্ণভাবে বিভাজ্য। r ও s এর গ. সা. গু. (r. s), p দিয়ে বিভাজ্য হলে, p, r এর অথবা s এর উৎপাদক হবে, কেননা p একটি মৌলিক সংখ্যা। অথবা বলা যায় $[r] = [0]$ হবে বা $[s] = [0]$ হবে। সুতরাং Z_p-তে [0]-এর কোনও উৎপাদক নেই। অথবা Z_p পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র হবে p যদি মৌলিক সংখ্যা না হয়।

তাহলে $p = m \cdot n \quad 1 < m < p,\ 1 < n < p$ পাওয়া যাবে সেক্ষেত্রে $[p] = [0] = [m] \cdot [n]$

যখন $[m] \neq [0]$ ও $[n] \neq [0]$

সুতরাং Z_p পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র নয়।

13.7 অঙ্গনের বৈশিষ্টাঙ্ক (Characteristic of a Ring)

সংজ্ঞা ঃ যদি এমন কোনও ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n পাওয়া যায় এমনভাবে যে $a + a + a + \ldots$ (n বার) $= na = 0 \ \forall \ a \in R$, যখন $\{R, +, .\}$ একটি রিং তখন n-এর ক্ষুদ্রতম মানকে বলা হয় $\{R, +, .\}$ এর বৈশিষ্টাঙ্ক। যদি এরকম কোন n না পাওয়া যায় তাহলে $\{R, +, .\}$এর বৈশিষ্টাঙ্ক শূন্য অথবা অসীম ধরা হয়।

উপপাদ্য 1. কোনও গুণের একক বিশিষ্ট অঙ্গন $\{R, +, .\}$ এর বৈশিষ্টাঙ্ক একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য হবে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $(R, +, .)$ একটি গুণের একক বিশিষ্ট অঙ্গন। আরও ধরা যাক গুণের একক 1-এর মাত্রা (order) অথবা $1 + 1 + 1 + 1 \ldots$ (n বার) $= 0$

বা $n . 1 = 0$

এবার $a \in R$ নেওয়া হল। এখন

$a + a + \ldots$ n সংখ্যক পর্যন্ত $= 1.a + 1.a + \ldots 1.a$

$= (1 + 1 + \ldots + 1) . a$ (বন্টন ধর্মানুসারে)

$= (n . 1) . a = 0 . a = 0$

অথবা, বলা যায় a-এর মাত্রা $\leq n$

অথবা, বলা যায় $\{R_1 + .\}$ এর বৈশিষ্টাঙ্ক n

একইভাবে 1 এর মাত্রা শূন্য হলে R-এর বৈশিষ্টাঙ্ক শূন্য হবে।

উপপাদ্য 2. কোনও পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্রের বৈশিষ্টাঙ্ক n অথবা শূন্য হবে যদি $\{R, +, .\}$ যে কোনও উপাদানের (শূন্য বাদে) মাত্রা ($\{R,+, .\}$ এর উপাদান হিসাবে) n অথবা শূন্য হবে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $\{R, +, .\}$ একটি পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র এবং $a \in R,\ a \neq 0$

ধরা যাক a-এর মাত্রা n অথবা দেওয়া আছে $na = 0$. ধরা যাক $b \in R$ এবং b একটি উপাদান যা শূন্য নয়।

এখন $na = 0 \Rightarrow (na) . b = 0$

$\Rightarrow (a + a + \ldots$ n সংখ্যক$) . b = 0$

$\Rightarrow (ab + ab + \dots$ n সংখ্যক $) = 0$

$\Rightarrow a .(b + b + \dots$ n সংখ্যক $) = 0$

$\Rightarrow a . (nb) = 0$

কিন্তু $a \neq 0$ ও $\{R, +, .\}$ একটি পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র

সুতরাং $nb = 0$ বা b-এর মাত্রা $\leq n$

বা b-এর মাত্রা $\leq$ a এর মাত্রা

ধরা যাক b-এর মাত্রা m। তাহলে $m . b = 0$

$mb = 0 \Rightarrow (mb) \quad a = 0 \Rightarrow b\ (ma) = 0 \Rightarrow ma = 0$

কেননা $b \neq 0$

তাহলে a-এর মাত্রা $\leq m$ = b-এর মাত্রা

এখন বলা যায় a-এর মাত্রা = b-এর মাত্রা।

অথবা, $x \in R$ এবং $x \neq 0$ হলে x-এর মাত্রা হবে n অথবা, $\{R, +, .\}$ এর বৈশিষ্টাঙ্ক n যা যে কোন উপাদানেরই মাত্রা (শূন্য নয়)।

উপপাদ্য 3. কোনও পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্রের বৈশিষ্টাঙ্ক হয় শূন্য অথবা একটি মৌলিক সংখ্যা।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $\{D, + .\}$ একটি পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র (integral domain) যার বৈশিষ্টাঙ্ক n যা মৌলিক সংখ্যা নয়।

ধরা যাক $p . q = n$ যখন $1 < p < n$

$1 < q < n.$

এবার সংজ্ঞা অনুসারে $n . 1 = 0$

বা, $pq . 1 = 0$ বা, $(p . 1) . (q . 1) = 0$ বা, $p . 1 = 0$ বা, $q . 1 = 0$ কেননা আলোচনার ক্ষেত্রটি পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র।

ধরা যাক $p . 1 = 0$

তাহলে যেকোনও উপাদান $a \in D$ এবং $a \neq 0$ নেওয়া হলে

$p . a = p\ (1 . a) = (p . 1) . a = 0 . a = 0$

বা, p. a এর মাত্রা। কিন্তু প্রথমেই ধরা হয়েছে n, $\{D, + .\}$ এর বৈশিষ্টাঙ্ক এবং যুক্তি অনুসারে $p\ (< n)$ $\{D, + .\}$-এর বৈশিষ্টাঙ্ক। যা বিরোধী সিদ্ধান্ত। সুতরাং প্রাথমিক অনুমান p সংখ্যাটি মৌলিক নয়, এটি সত্য নয়।

সুতরাং পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্রের বৈশিষ্টাঙ্কটি হয় শূন্য হবে অথবা একটি মৌলিক সংখ্যা।

13.8 অধঅঙ্গন (Subring)

ধরা যাক R একটি অঙ্গন যার মধ্যে S একটি সাবসেট যে দ্বিপদ প্রক্রিয়াগুলির সাপেক্ষে R একটি অঙ্গন। যদি ঐ দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে S ও একটি অঙ্গন হয় তবে S-কে R-এর অধঅঙ্গন (subring) বলা হয়। অধ্যায়ের এই অংশে আমরা অধঅঙ্গন হওয়ার শর্তগুলি ও কয়েকটি উপপাদ্য প্রমাণ করব।

সংজ্ঞা : ধরা যাক $\{R, +, .\}$ একটি অঙ্গন ও $S \subset R$। এবার $\{S, +, .\}$ যদি একটি অঙ্গন হয় তবে S কে R-এর অধঅঙ্গন বলা হয়।

এখানে লক্ষ করুন প্রত্যেক অঙ্গনেরই অন্তত দুটি অধঅঙ্গন আছে। যদি $\{R, +, .\}$ সেটটিকে R-এর সাবসেট হিসাবে গ্রহণ করি প্রত্যেক অঙ্গনই তার নিজের অধঅঙ্গন।

অন্যভাবে শুধু শূন্য উপাদানটি নিয়ে যে সেটটি সেটিও একটি অধঅঙ্গন। এই দুটিকে নগণ্য অধঅঙ্গন (trivial subring) বলা হয়।

$\{Z, +, .\}$ একটি অঙ্গন যেখানে $\{Z, +, .\}$. $\{Q, +, .\}$-এর একটি অধঅঙ্গন

আবার $\{Q, +, .\}$. $\{R, +, .\}$ একটি অধঅঙ্গন।

ধরা যাক $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} ; x, y \in R \right\}$

এখানে ম্যাট্রিক্সের যোগ ও গুণের সাপেক্ষে S একটি অধঅঙ্গন। 2×2 বর্গ ম্যাট্রিক্সগুলি, যার উপাদানগুলি মূলদ সংখ্যা, একটি অঙ্গন গঠন করে এটি হবে তার একটি অধঅঙ্গন।

উপপাদ্য 1. ধরা যাক $S \subset R$ একটি সাবসেট ও $\{R, +, .\}$ একটি অঙ্গন। $\{S, +, .\}$ একটি অধঅঙ্গন। হবে যদি এবং একমাত্র যদি

$a - b \in S, a . b \in S \ \forall\ a, b \in S$

প্রমাণ : ধরা যাক $\{S, +, .\}$ একটি $\{R, +, .\}$ এর অধঅঙ্গন। সুতরাং S যোগ-এর সাপেক্ষে দল (group)। সুতরাং $b \in S \Rightarrow -b \in S$। আবার যেহেতু যোগ দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে S সেটটি বদ্ধ সুতরাং

$a + (-b) \in S$

অথবা $a - b \in S$

আবার গুণের সাপেক্ষেও S সেটটি বদ্ধ। সুতরাং $\forall\ a, b \in S \quad a . b \in S$

সুতরাং উপরিউক্ত শর্তগুলি S অধঅঙ্গন হওয়ার জন্য সিদ্ধ হবে।

বিপরীতক্রমে ধরা যাক $S \subset R$ একটি সেট ও যার মধ্যে প্রদত্ত শর্তগুলি পূর্ণ হয়। এবার $a \in S$ হলে $a - a = 0 \in S$ হবে আবার $a \in S, 0 \in S$। সুতরাং $o - a \in s$ বা $-a \in s$.

সুতরাং যোগ এবং একক শূন্য S এর মধ্যে আছে এবং যোগ এর সাপেক্ষে প্রত্যেক উপাদানের বিপরীত উপাদানও S এর মধ্যে আছে।

আবার $a, b \in S \Rightarrow -b \in S$. বা $a-(-b) = a+b \in S$। সুতরাং যোগ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে S সেটটি বদ্ধ।

আবার যোগ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে R-এর যে কোনও তিনটি উপাদানের মধ্যে সংযোগ ধর্ম সিদ্ধ হয়। S এর তিনটি উপাদান নিলে একই সঙ্গে তারা R-এর ও উপাদান একই যোগ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে S-এও সেইজন্য সংযোজ্যতা ধর্ম সিদ্ধ হবে। যোগ প্রক্রিয়ার বিনিময় ধর্ম সম্পর্কেও একই কথা বলা যায়। সুতরাং $\{S,+,.\}$ একটি আবেলিয় দল।

দ্বিতীয় শর্তটি থেকে আমরা পাই S গুণ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে বদ্ধ। এমন যে কোনও তিনটি উপাদানের গুণ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে সংযাজ্যতা ধর্ম পালন করে কেননা ঐ তিনটি উপাদান একই সঙ্গে R-এরও উপাদান। যোগ প্রক্রিয়ার উপর গুণ প্রক্রিয়ার বণ্টন ধর্ম সম্পর্কেও একই কথা বলা যায়। সুতরাং $\{S, +, .\}$ একটি অঙ্গন অথবা বলা যায় $\{S, +, .\}$ $\{R, +, .\}$-এর একটি অধঅঙ্গন। সুতরাং প্রদত্ত দুটি শর্ত $\{S, +, .\}$-কে অধঅঙ্গন তৈরি করার পক্ষে যথেষ্ট।

অনুসিদ্ধান্ত : $S \subset R$ এবং $\{S, +, .\}$ $\{R, +, .\}$-এর অধঅঙ্গন হবে যদি $S + (-S) = S$ এবং $S . S \subseteq S$ হয়।

উপপাদ্য : $\{R, +, .\}$ অঙ্গনের যে কোনও দুটি অধঅঙ্গনের ছেদ একটি অধঅঙ্গন।

প্রমাণ : ধরা যাক $\{S, +, .\}$ এবং $\{T, +, .\}$ $\{R, +, .\}$ র দুটি অধঅঙ্গন স্পষ্টত: $S \cap T \neq \phi$ যেহেতু $0 \in S$ এবং $0 \in T$ ।

এখন যদি $S \cap T = \{0\}$ হয় তাহলে $S \cap T$ $\{R, +, .\}$ এর একটি অধঅঙ্গন হবে, কেননা $\{0\}$ সেটটি $\{R, +, .\}$ এর একটি নগণ্য অধঅঙ্গন।

ধরা যাক $S \cap T \neq \{0\}$ এবং $a, b \in S \cap T$

যেহেতু $a, b \in S \cap T$ $a \in S$ এবং $b \in S$

আবার $\{S, +, .\}$ একটি অঙ্গন।

$\therefore a - b \in S$

একই যুক্তিতে বলা যায় $a - b \in T$

সুতরাং $a - b \in S \cap T$

আবার $a . b \in S$ ও $a . b \in T$ সুতরাং $a . b \in S \cap T$ বা $S \cap T$ গুণের সাপেক্ষে বদ্ধ।

সুতরাং এটি একটি অধঅঙ্গন।

অনুসিদ্ধান্ত : যদিও আমরা দুটি অধঅঙ্গনের ছেদ নিয়ে আলোচনা করেছি এবং দেখিয়েছি যে তাদের ছেদও একটি অধঅঙ্গন। এখন দুটির বদলে যে কোনও সংখ্যক সাব-রিং নিলেও সিদ্ধান্তটি একই থাকবে। প্রমাণের পদ্ধতিও একই প্রকার।

13.9 অঙ্গনাল (Ideal)

সংজ্ঞা : ধরা যাক অঙ্গনের একটি সাবসেট I-কে $\{R, +, .\}$ এর বাম অঙ্গনাল (left ideal) বলা হবে যদি

(i) $\{I, +\}$ R এর একটি অধদল (Sub group) হয় এবং

(ii) $r.s \in I \quad \forall r \in R$ এবং $\forall s \in I$

অনুরূপভাবে, R অঙ্গনের একটি সাবসেট J-কে $\{R, +, .\}$ এর ডান অঙ্গনাল (right ideal) বলা হবে যদি

(i) $\{J, +\}$ $\{R, +, .\}$ এর একটি অধদল (subgroup)

(ii) $s.r \in J \;\; \forall s \in S$ এবং $\forall r \in R$

S সেটটিকে $\{R, + .\}$ রিং এর একটি অঙ্গনাল (উভয় পক্ষেরই) বলা হবে যদি এটি একটি একইসঙ্গে বাম ও ডান অঙ্গনাল হয়।

অনুসিদ্ধান্ত : $\{R, +, .\}$ এর কোনও অঙ্গনাল S $\{R, +, .\}$ রিং-এর একটি অধঅঙ্গন হবে

প্রমাণ : $\{S, +\}$ একটি অধদল। সুতরাং $a \in S$ ও $b \in S$ হলে $-b \in S$ হবে ও যোগ প্রক্রিয়ার বদ্ধতা ধর্মানুসারে $a + (-b) = a - b \in S$ হবে আবার S একটি অঙ্গনাল।

সুতরাং $r.s \in S$ এর $s.r \in S$ এর $\forall s \in S, \forall r \in R$

সুতরাং $r.s \in S$ এবং $s.r \in S$ হবে

যখন $r \in S$ ও $s \in S$ কেননা $S \subset R$

সুতরাং গুণ প্রক্রিয়ার বদ্ধতা ধর্ম ও S পূরণ করে। সুতরাং S একটি অধঅঙ্গন।

আপনারা লক্ষ করুন কোনও বিনিময়যোগ্য অঙ্গনের ক্ষেত্রে বাম অঙ্গনাল একই সঙ্গে ডান অঙ্গনাল হয়।

অনুসিদ্ধান্ত : কোন অঙ্গনের অধঅঙ্গন (subring) সবসময় অঙ্গনাল হয় না।

প্রমাণ : S, $\{R, +, .\}$ এর অধঅঙ্গন। সুতরাং $r.s \in S \; \forall r.s. \;\; s \in S$ কিন্তু $r \in R$ এবং $s \in S$ হলে $r.s \in S$ হবে এমন কোনও নিশ্চয়তা নেই। সুতরাং অধঅঙ্গন মাত্রেই অঙ্গনাল এটি সত্য নয়।

উদাহরণ 1. $\{Z, +, .\}$ যেখানে Z পূর্ণ সংখ্যার সেট, একটি অঙ্গন এবং $S = \{kx : x \in Z\}$ যখন k একটি নির্দিষ্ট পূর্ণসংখ্যা $\{Z, +, .\}$ এর একটি অঙ্গনাল।

উদাহরণ 2. এখন যোগ ও গুণ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে Q একটি অঙ্গন। Z, Q-এর একটি অধঅঙ্গন। কিন্তু এটি {Q, +, .} এর অঙ্গনাল নয়। কেননা $\sqrt{2}$ এটি মূলদ সংখ্যা $\sqrt{2}.\, k \notin Z$ যেখানে $k \in Z$

উদাহরণ 3. ধরা যাক $R = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ;\ a, b, c, d \in Q\right\}$

সাধারণ ম্যাট্রিক্স যোগ ও গুণ সাপেক্ষে এটি একটি অঙ্গন। এর মধ্যে $S = \left\{\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} ;\ x, y \in Q\right\}$ একটি বাম অঙ্গনাল।

কেননা $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ax + cy \\ 0 & bx + dy \end{pmatrix} \in S$

এটি সহজেই দেখানো সম্ভব যে {S, +, .} একটি দল।

উপপাদ্য 1. {R, +, .} অঙ্গনের S এবং T দুটি অঙ্গনাল হলে, এদের ছেদ $S \cap T$ ও {R, +, .} এর অঙ্গনাল।

প্রমাণ : ধরা যাক {S, +, .} এবং {T, +, .} {R, +, .} এর দুটি অঙ্গনাল। সুতরাং {S, +} ও {T, +,} {R, + , .} এর অধদল সেক্ষেত্রে $S \cap T$ ও {R, +} এর অধদল হবে।

আবার ধরা যাক $s \in S \cap T$ এবং $r \in R$। যেহেতু S এবং T {R, +, .} অঙ্গনের অঙ্গনাল।

$s.r \in S$ এবং $s.r \in T \Rightarrow s.r \in S \cap T$

একইভাবে $r.s \in S$ এবং $r.s \in T \Rightarrow r.s \in S \cap T$

সুতরাং $s \in S \cap T$ এবং $r \in R$ হলে $s.r \in S \cap T$ ও $r.s \in S \cap T$ অর্থাৎ $S \cap T$-ও একটি অঙ্গনাল।

লক্ষ করুন, {R, +, .} অঙ্গনের অন্তত দুটি আইডিয়াল আছে—একটি {R, +, .} নিজে এবং অপরটি নগণ্য অধঅঙ্গন { 0 }। প্রথমটিকে বলা হয় একক অঙ্গনাল (unit ideal) এবং দ্বিতীয়টিকে বলা হয় শূন্য অঙ্গনাল। এই দুটি অঙ্গনাল বাদে অন্যান্য অঙ্গনালকে বলা হয় প্রকৃত অঙ্গনাল (proper ideal)।

13.10 বিভাজক অঙ্গন (Quotient Ring)

ধরা যাক {R, +, .} একটি অঙ্গন এবং D, R-এর একটি অঙ্গনাল। যদি $R/D = \{a + D ;\ a \in R\}$। তবে R/D একটি অঙ্গন হয় যখন যোগ ও গুণ প্রক্রিয়াগুলিকে এইভাবে সংজ্ঞাত করা হয়।

(i) $(a + D) + (b + D) = a + b + D \quad \forall a, b \in R$

(ii) $(a + D) . (b + D) = a.b + D$

এই অঙ্গনটিকে বিভাজক অঙ্গন (Quotient Ring) বলা হয়। একে উৎপাদক অঙ্গন (Factor Ring) অথবা বিয়োজক অঙ্গন (Difference Ring) বলা হয়ে থাকে।

অনুসিদ্ধান্ত 1 : $\{R, +, .\}$ একটি বিনিময়যোগ্য অঙ্গন হলে R/Dও বিনিময়যোগ্য অঙ্গন হবে।

অনুসিদ্ধান্ত 2 : $\{R, +, .\}$ অঙ্গনটিতে গুণের একক থাকলে R/Dতেও গুণের একক থাকবে।

13.11 উদাহরণ

উদাহরণ 1. দেখান যে [0, 1] অন্তরালে সংজ্ঞাত ও সন্তত অপেক্ষকগুলির সেটটি অপেক্ষকগুলির যোগ ও গুণের সাপেক্ষে বিনিময়যোগ্য অঙ্গন গঠন করে।

সমাধান : এখানে $f : [0, 1] \to R$

এবং $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

এবং $(f . g)(x) = f(x) . (g(x))$

প্রথমে যোগ প্রক্রিয়ার সম্পর্কিত স্বতঃসিদ্ধগুলির পূর্ণতা সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক।

(i) আমরা জানি দুটি সন্তত অপেক্ষকের যোগফলও একটি সন্তত অপেক্ষক। সুতরাং যোগ-এর সাপেক্ষে এটি বদ্ধতা ধর্ম পালন করে।

(ii) $\{(-f + g) + h\}(x) = (f + g)(x) + h(x)$

$= f(x) + g(x) + h(x) = f(x) + (g + x)(x)$

$= \{f + (g + h)\}(x) \quad \forall x \in [0, 1]$

সুতরাং যোগ-এর সাপেক্ষে সংযোজ্যতা ধর্ম সিদ্ধ হয়।

(iii) $\theta(x) = 0 \ \forall x \in [0, 1]$

এক্ষেত্রে $(f + \theta)(x) = f(x) + \theta(x) = f(x) + 0 = f(x)$

একইভাবে $(\theta + f)(x) = f(x)$

সুতরাং $\theta(x) = 0$ অপেক্ষকটি + এর সাপেক্ষে একক

(iv) $((-f) + f)(x) = -f(x) + f(x) = \theta(x)$

সুতরাং $-f + f = \theta$

একইভাবে $f + (-f) = \theta$

সুতরাং $-f(x)$, $f(x)$ এর যোগ-এর সাপেক্ষে বিপরীত উপাদান।

(v) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$

$= (g + f)(x)$

অর্থাৎ যোগ প্রক্রিয়াটি বিনিময়যোগ্য।

সুতরাং সেটটি যোগ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে আবেলিয় দল।

আবার (i) $(f.g)(x) = f(g) \,.\, g(x)$ একটি সন্তত অপেক্ষক।

এবং (ii) $\{(f.g).h\}(x) = (f.g)(x) \quad h(x)$

$= f(x) \,.\, g(x) \,.\, h(x) = (f.(gh))(x)$

গুণের সাপেক্ষে সংযোজ্যতা ধর্ম রক্ষিত হয়।

(ii) $(f.g)(x) = f(x).g(x) = g(x).f(x)$

$$= (g\,f)(x)$$

অর্থাৎ দেখা গেল গুণের সাপেক্ষে এটি বিনিময়যোগ্য অর্ধদল।

ডান ও বাম বণ্টন ধর্ম সম্পর্কে বলা যায়—

(i) $(f.(g+h)(x) = f(x) \,.\, (g+h)x = f(x)[g(x) + h(x)]$

$= f(x).g(x) + f(x).h(x) = f.g(x) + f.h(x)$

$= (fg + fh)(x)$

একইভাবে বাম বণ্টন ধর্ম ও প্রমাণ সম্ভব। সুতরাং এটি একটি বিনিময়যোগ্য অঙ্গন। লক্ষণীয় এটি এমন একটি অঙ্গন যার মধ্যে গুণের একক আছে এবং যার মধ্যে শূন্যের ভাজক আছে।

$e(x) = 1 \;\forall\; x \in [0, 1]$ অপেক্ষকটি এই সেটের অন্তর্গত এবং এটি গুণের একক। কেননা

$(e.f)(x) = e(x).\, f(x) = f(x) = f(x) \,.\, e(x)$

$= (f.e)(x)$

$$\text{এবার } f(x) \left.\begin{array}{ll} = a - x & : 0 \le x \le a \\ = 0 & : a \le x \le 1 \end{array}\right\}$$

$$\text{এবং } g(x) \left.\begin{array}{ll} = 0 & : 0 \le x \le a \\ = x - a & : a \le x < 1 \end{array}\right\}$$

নেওয়া হল। $f(x)$ এবং $g(x)$ অপেক্ষক দুটিই সন্তত অপেক্ষক যা এই সেটের মধ্যেই আছে কিন্তু

$f(x) \neq 0 \neq g(x)$

কিন্তু $(f.g)(x) = f(x).g(x) \quad = f(x).0$ যখন $0 \leq x \leq a$

$= 0.g(x)$ যখন $a \leq x < 1$

$= 0 = \theta(x)$

সুতরাং আলোচ্য সেটটি যোগ ও গুণ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে একটি বিনিময়যোগ্য অঙ্গন। যার মধ্যে গুণের একক আছে ও শূন্যের ভাজক আছে।

উদাহরণ 2. $\oplus$ এবং $\odot$ দুইটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া Z-এর উপর এইভাবে সংজ্ঞাত হল যে

(1) $a \oplus b = a + b - 1$

(2) $a \odot b = a + b - ab$

দেখান যে $(Z, \oplus, \odot)$ একটি বিনিময় যোগ্য অঙ্গন গঠন করে এবং এর মধ্যে গুণের একক আছে।

সমাধান ঃ প্রথমে লক্ষ করুন $a \oplus b = a + b - 1$ একটি পূর্ণসংখ্যা। সুতরাং $\oplus$-এর সাপেক্ষে $(Z\oplus)$ সেটটি বদ্ধ।

(2) $(a \oplus b) \oplus c = a + b + c - 2 = (a \oplus (b \oplus c)$

(3) $a \oplus b = a + b - 1 = b \oplus a$

(4) $b = 1 \in Z$ এবং $a \oplus 1 = a + 1 - 1 = a$

আবার $1 \oplus a = 1$ সুতরাং 1 $\oplus$-এর সাপেক্ষে একক।

ধরা যাক a এর $\oplus$ সাপেক্ষে বিপরীতে উপাদান c

তাহলে $a \oplus c = 1$ হবে

তখন $a + c - 1 = 1$ হবে বা $c = 2 - a \in Z$

সুতরাং $\oplus$-এর সাপেক্ষে এটি একটি বিনিময়যোগ্য দল।

এবার $(a \odot b) \odot c = (a + b - ab) \odot c$

$= a + b - ab + c - (a + b - ab) . c$

$= a + b + c - ab - bc - ca + abc$

এবং দেখান যায় যে

$a \odot (b \odot c) = a + b + c - ab - bc - ca + abc$

সুতরাং গুণের সংযোজ্যতা ধর্ম সিদ্ধ হয়।

এবার বণ্টন ধর্মগুলি দেখা যাক

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= a \odot (b + c - 1) \\ &= a + (b + c - 1) - a(b + c - 1) \\ &= 2a + b + c - ab - ac - 1 \end{aligned}$$

এবং $(a \odot b) \oplus (a \oplus c) = (a + b - ab) \oplus (a + c - ac)$

$= a + b - ab + a + c - ac - 1$

$= 2a + b + c - ab - ac - 1$

একইভাবে দেখান যায় যে

$(b \oplus c) \odot a = (b \odot a) \oplus (c \odot a)$

অর্থাৎ, $(Z, \oplus, .)$ একটি রিং।

ধরা যাক $x \in Z$ গুণের একক

তাহলে $x \odot a = a \odot x = a$ হবে $\forall a \in Z$

বা, $x + a - ax = a$ হবে

বা, $a(1 - x) = 0$ হবে এখন $a \neq 1$ হলে $x = 0$ হবে

এবং $x = 0 \in Z$। আবার $a = 1$ হলেও

$a \odot x = x \odot a = a$ হবে সুতরাং $x = 0$ উপাদানটি গুণের একক।

উদাহরণ 3. যদি কোনও অঙ্গনে $x^2 = x \ \forall x \in R$ তাহলে দেখান যে অঙ্গনটি বিনিময়যোগ্য।

সমাধান ঃ লক্ষণীয় $x^2 = x$ হলে $(-x)^2 = -x$

$\therefore -x = (-x)^2 = (-x)(-x) = x^2 = x$

সুতরাং যে কোনও দুটি উপাদান a এবং b এর জন্য

$ab = -ab$ .... (1)

আবার $(a + b)^2 = (a + b)$

বা, $(a + b). (a + b) = a + b$

বা, $a (a + b) + b (a + b) = a + b$

বা, $a^2 + ab + ba + b^2 = a + b$

বা, $a + ab + ba + b = a + b$ $\qquad [\because a^2 = a, b^2 = b]$

অপসারণ সূত্র প্রয়োগ করে পাই

$ab + ba = 0$

বা, $-(ab) = ba$...............(2)

(1) নং ও (2) নং থেকে পাই $ab = ba$

সুতরাং অঙ্গনটি বিনিময়যোগ্য।

উদাহরণ 4. দেখান যে $\{R, +, .\}$ একটি বিনিময়যোগ্য অঙ্গন হবে যদি এবং একমাত্র যদি

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

সমাধান ঃ ধরা যাক অঙ্গনটি বিনিময়যোগ্য

অর্থাৎ $a . b = b . a \quad \forall a, b \in R$

তাহলে $(a + b)^2 = (a + b) . (a + b)$

$= a . (a + b) + b . (a + b) = a . a + a . b + b . a + b . b$

(বণ্টন ধর্মানুসারে)

$= a^2 + 2ab + b^2$

আবার ধরা যাক

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

এখন $(a + b) . (a + b) = a . a + a . b + b . a + b . b$ (বণ্টন ধর্ম)

$= a^2 + 2ab + b^2$ (দেওয়া আছে)

বা, $a . b + b . a = 2ab$ (অপসারণ সূত্র)

বা, $b . a = a . b$ (অপসারণ সূত্র)

সুতরাং অঙ্গনটি বিনিময়যোগ্য।

13.12 সারাংশ

এই অধ্যায়ে আলোচিত বিষয়গুলি হলো কোন দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া কোনও একটি সেট R-এ সংজ্ঞাত থাকলে, কোনও স্বতঃসিদ্ধগুলি পূরণ করলে {R, +, .}-কে অঙ্গন বলা হবে। কয়েকটি বিশেষ উদাহরণ সহযোগে স্বতঃসিদ্ধগুলির আলোচনা করা হয়েছে। § 13.5 -এ অঙ্গন সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলি আলোচনা করা হয়েছে, যেগুলি অঙ্গনের স্বতঃসিদ্ধগুলির পরিণতি হিসাবে আসে।

অঙ্গনের স্বতঃসিদ্ধগুলির আরও কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ ধরে নিয়ে পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র (integral domain) পাওয়া যায়। অর্থাৎ অঙ্গনগুলির মধ্যে কতকগুলি বিশেষ অঙ্গনকে কখনো পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র বলা হবে তা § 13.6-এ আলোচনা করা হয়েছে। অবশিষ্ট শ্রেণীর অঙ্গন কী শর্তে পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র হবে উপপাদ্য দ্বারা তা বিবৃত হয়েছে।

অঙ্গনের বৈশিষ্টাঙ্ক কাকে বলে এবং এ সম্বন্ধের উপপাদ্যগুলি § 13.7-এ আলোচনা করা হয়েছে। উপপাদ্যগুলিতে অঙ্গন এবং প্রাঙ্গনের বৈশিষ্টাঙ্কগুলির চরিত্র বিবৃত করা হয়েছে।

কোনও সেট $S \subseteq R$ এর কখন {R, +, .} অঙ্গনের অধঅঙ্গন হবে তা § 13.8-এ আলোচিত হয়েছে।

উপপাদ্যতে কোনও সাবসেটের অধঅঙ্গন হওয়ার আবশ্যিক শর্তগুলি বিবৃত করা হয়েছে। এও দেখান গেছে যে শর্তগুলি শুধু আবশ্যকই নয় অধঅঙ্গন গঠনের জন্য যথেষ্টও বটে।

§ 13.9-এ অঙ্গনের অঙ্গনালের সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে। এই অংশেই অধঅঙ্গন ও অঙ্গনালের পার্থক্য বিবৃত হয়েছে।

§ 13.10-এ বিভাজক অঙ্গন কাকে বলে বিবৃত করা হয়েছে। এর পরের অধ্যায়ে আপনারা অঙ্গনের কয়েকটি উদাহরণ দেখেছেন, যেখানে দেখানো হয়েছে কোন দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে অঙ্গন কিভাবে গঠিত হয়।

13.13 শেষ প্রশ্নাবলী

1. দেখান যে $\{a+b\sqrt{2} :$ যেখানে $a, b \in Z\}$ সেটটি একটি অঙ্গন।

2. দেখান যে 10 এর অবশিষ্ট শ্রেণীর যোগ ও গুণের সাপেক্ষে $S = \{[0], [2], [4], [6], [8]\}$ একটি অঙ্গন গঠন করে।

[**নির্দেশ :** অঙ্গনের স্বতঃসিদ্ধগুলি ঐ সেটের মধ্যে সিদ্ধ হয় কিনা দেখুন।]

3. দেখান যে 6-এর অবশিষ্ট শ্রেণীর সেটটি $S = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$ একটি বিনিময়যোগ্য অঙ্গন গঠন করে যার মধ্যে গুণের একক ও শূন্যের ভাজক আছে।

[**নির্দেশ :** [1] শ্রেণীটি গুণের একক। এবং $[2] \times [3] = [6] = 0$ কিন্তু $[2] \neq [0] \neq [3]$ সুতরাং শূন্যে ভাজকের অস্তিত্ব আছে। অন্যান্য স্বতঃসিদ্ধগুলি উপরে উদাহরণের মত একইভাবে সিদ্ধ কিনা দেখুন।]

4. $S = \{x, y, z, w\}$ এই সেটে উদের যোগ ও গুণ নিচের চিত্রে দেওয়া হল ঃ

+	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	x	w	z
z	z	w	x	y
w	w	z	y	x

এবং

⊙	x	y	z	w
x	x	x	x	x
y	x	y	z	w
z	x	z	w	y
w	x	w	y	z

দেখান S সেটটি একটি অঙ্গন গঠন করে। এই অঙ্গনের শূন্য ও একক দুটি নির্ণয় করুন।

[**নির্দেশ ঃ** যোগ ও গুণ প্রক্রিয়ার চিত্রে কোনও উপাদানগুলি যোগ ও গুণ করলে একই উপাদান পাওয়া যায় বার করুন।]

5. দেখান যে $M = \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} : x, y, z, w \in Z\right\}$

ম্যাট্রিক্সগুলির সেটটি যোগ ও গুণ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে অঙ্গন গঠন করে যার মধ্যে শূন্যের ভাজক আছে।

[**নির্দেশ ঃ** দেখুন যে $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

এবং অন্যান্য শর্তগুলি সিদ্ধ করে একইভাবে প্রমাণ করুন।

6. দেখান যে $R = \left\{u + v\sqrt[3]{2} + w\sqrt[3]{4}\,; u, v, w \in Q\right\}$ স্বাভাবিক যোগ ও গুণ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে একটি অঙ্গন।

[**নির্দেশ ঃ** স্বতঃসিদ্ধগুলি সিদ্ধ হয় কিনা দেখুন]

7. দেখান যে $R = \left\{a + b\sqrt{5}\ ; a, b \in Z\right\}$ যোগ ও গুণ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে এটি একটি পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র গঠন করে।

[**নির্দেশ ঃ** $\left(a_1 + \sqrt{5}\ b_1\right) \times \left(a_2 + \sqrt{5} . b_2\right)$

$= (a_1a_2 + 5b_1b_2) + \sqrt{5}\,(a_1b_2 + b_1a_2) = 0$ হয়

$$\left.\begin{array}{ll}\text{একমাত্র} & a_1a_2 + 5b_1b_2 = 0 \text{ হলে} \\ \text{এবং} & a_1b_2 + a_2b_1 = 0 \text{ হলে}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll}\text{অথবা} & a_1 = 0 = b_1 \\ \text{বা} & a_2 = 0 = b_2 \text{ হলে}\end{array}$$

8. D একটি পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র যেখানে $x^2 = x, \exists\, x \in D$। দেখান $x = 0$ অথবা 1 হবে।

[**নির্দেশ :** $x^2 = x$ হলে $x^2 - x = 0$ হবে।

বা $x.\ (x-1) = 0$ হবে। বা $x = 0$ অথবা $x - 1 = 0$ হবে।

9. ধরা যাক $M = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in R\right\}$ এবং $M_1 = \left\{\begin{bmatrix} a & o \\ o & b \end{bmatrix} : a, b \in R\right\}$ দেখান যে M_1, M-এর একটি অধঅঙ্গন।

10. $\{M, +, .\}$ যদি 2×2 বাস্তব সংখ্যার ম্যাট্রিক্সগুলির অঙ্গন হয় এবং $M_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & o \\ o & b \end{bmatrix} : a, b \in R\right\}$ দেখান যে M_2 সেটটি $\{M, +, .\}$ এর বাম বা ডান কোন পক্ষেরই অঙ্গনাল নয়।

11. Z_p , p-এর অবশিষ্ট শ্রেণীর সেট হলে দেখান যে $\{Z_p, +, .\}$ একটি পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র হবে যদি এবং একমাত্র যদি p একটি মৌলিক সংখ্যা হয়।

[নির্দেশ এ সম্বন্ধে আলোচিত উপপাদ্যটি লক্ষ্য করুন।]

একক 14 ❑ প্রাঙ্গন

গঠন

14.1. প্রস্তাবনা ঃ

এর আগের অধ্যায়ে আপনারা রিং (Ring) সম্বন্ধে জেনেছেন। একটি সেটের উপর দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

যথাযথভাবে সংজ্ঞাত থাকলে দুইটিকে দুটি ভিন্ন নাম যোগ এবং গুণ প্রক্রিয়া হিসাবে বলা হয়ে থাকে। কোন সেট R-এর উপর যোগ ও গুণ দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত হলে কখন সেটটিকে অঙ্গন (Ring) বলা হবে, এবং কোনও কোনও স্বতঃসিদ্ধগুলি অঙ্গন (Ring) হওয়ার জন্য নেওয়া হয় এগুলি আগেই আলোচনা করা হয়েছে। কোন অঙ্গনের দ্বিপদ প্রক্রিয়াগুলি আরও কয়েকটি বিশেষ স্বতঃসিদ্ধ পূরণ করলে, আমরা অঙ্গনগুলির বিশেষ নামকরণ করেছি যেমন, বিনিময়যোগ্য অঙ্গন, পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র (Integral domain) ইত্যাদি। এখানে লক্ষ করা যেতে পারে অঙ্গনের স্বতঃসিদ্ধগুলির সঙ্গে আরও কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ নেওয়া হলে এই ধরনের অঙ্গন-এর সংখ্যা আরও সীমিত হয়। অর্থাৎ সমস্ত অঙ্গন-এর সেট-এর মধ্যে বিনিময়যোগ্য অঙ্গন অথবা পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্রগুলি এক একটি সাবসেট। একইভাবে অঙ্গনের স্বতঃসিদ্ধগুলির সঙ্গে আরও কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ নেওয়া হলে এটিকে প্রাঙ্গন (Field) বলা হয়। আরও সঠিকভাবে বলা হলে বলা যায় ইনট্রিগ্রাল ক্ষেত্রে আরও কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ দ্বিপদ প্রক্রিয়াগুলি পূরণ করলে তাকে ফিল্ড বলা হয়। অর্থাৎ সমস্ত প্রাঙ্গনের সেট সমস্ত পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র সেটের সাবসেট আবার পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্রের সেট সমস্ত অঙ্গনের সেট-এর সাবসেট। প্রাঙ্গন ও অধপ্রাঙ্গন এই অধ্যায়ের আলোচ্য বিষয়।

14.2. উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়ে আমরা ফিল্ড-এর স্বতঃসিদ্ধগুলি যথাযথভাবে ব্যাখ্যা করব। বিভিন্ন উদাহরণ সহযোগে ফিল্ড ও সাবফিল্ড-এর ধারণাগুলি বিবৃত করা হবে। ফিল্ড-এর স্বতঃসিদ্ধগুলির উপর নির্ভরশীল সাধারণ সিদ্ধান্তগুলি উপপাদ্য হিসাবে বিবৃত ও প্রমাণিত হবে।

14.3. প্রাসঙ্গিক ধারণাসমূহ

এর আগের অধ্যায়গুলিতে আপনারা কোনও সেটের উপর সংজ্ঞাত দ্বিচর প্রক্রিয়া সম্বন্ধে অবহিত হয়েছেন যে একটি দ্বিচর প্রক্রিয়াকে $R\times R$ হতে R একটি অপেক্ষক হিসাবে গণ্য করতে পারি।

কোনও সেট R -এ ধরা যাক, একটি দ্বিচর প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত আছে। এই দ্বিচর প্রক্রিয়াটি কতকগুলি বিশেষ স্বতঃসিদ্ধ পালন করলে ঐ সেটটিকে $\{R\ .\}$-কে একটি দল (group) বলা হয়। স্বতঃসিদ্ধগুলি হল ঃ

1) $a\circ b\in R\ \ \forall a,b\in R$ (বদ্ধতা ধর্ম)।

2) $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c:\forall a,b,c\in R$ (সংযোজ্যতা ধর্ম)

3) $\exists\, e\in R$ যার জন্য $a\circ e=a=e\circ a:\forall a\in R$ (স্থিরক-উপাদানের অস্তিত্বমূলক ধর্ম)

4) $\forall a\in R, \exists a'\in R$ যার জন্য $a\circ a'=a'\circ a=0$ অর্থাৎ প্রত্যেক উপাদান a -এর জন্য আরেকটি উপাদান a' পাওয়া যাবে যখন এই স্বতঃসিদ্ধটি পূরণ হয়। (বিপরীত উপাদানের অস্তিত্বমূলক ধর্ম)।

উপরন্তু যদি

5) $a_\circ b=b_\circ a\ \ \forall a,b\in R$ (বিনিময় ধর্ম)

তাহলে $\{R\ .\ \}$–কে বিনিময়যোগ্য গ্রুপ বলা হয়।

কোনও সেট-এ দুইটি দ্বিচর প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত থাকলে সাধারণত দুটি নাম যোগ এবং গুণ হিসাবে বলা হয়ে থাকে। $\{R, +, .\}$-কে অঙ্গন বলা হয় যদি যোগ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে এটি একটি বিনিময়যোগ্য গ্রুপ ও গুন প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে এটি একটি সেমি গ্রুপ (গুণের সাপেক্ষে বদ্ধতা ধর্ম ও সংযোয্য ধর্ম পালন করে) ও উভয়প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে এটি বণ্টন ধর্ম (ডানপক্ষের বণ্টন ধর্ম ও বামপক্ষের বণ্টন ধর্ম) পালন করে।

কোনও অঙ্গন যদি গুণ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষেও বিনিময় ধর্ম পালন করে, তখন এইটিকে বিনিময়যোগ্য অঙ্গন বলা হয়। কোনও অঙ্গন-এর মধ্যে গুণের একক থাকতে পারে অথবা নাও থাকতে পারে। যদি অঙ্গনে গুণের একক থাকে তাহলে ঐ অঙ্গনকে গুণের এককযুক্ত অঙ্গন বা রিং বলা হয়।

কোনও বিনিময়যোগ্য অঙ্গনে 0 (যোগের একক)-এর ভাজক না থাকলে ঐ অঙ্গনকে একটি বিশেষ নামকরণ করা হয়ে থাকে। একে বলা হয় পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র (Integral Domain)। বিশেষ ধরণের রিং ও পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র সম্বন্ধে এর

আগেই আলোচনা করা হয়েছে। পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্রের স্বতঃসিদ্ধগুলির সঙ্গে আরও কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ যুক্ত হয়ে ফিল্ড তৈরি হয়। এই প্রসঙ্গে অঙ্গনের Characteristic of a Ring-এর সংজ্ঞা স্মরণ করা যেতে পারে। যদি n কোনও ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা থাকে যখন a+a+.... = na = 0 হয় তাহলে n-এর ক্ষুদ্রতম মানকে বলা হয় অঙ্গনটির বিশেষত্বমান। অঙ্গনের এবং পূর্ণাঙ্গক্ষেত্রের বিশেষত্বমান নিয়ে এর আলোচনা ইতিপূর্বে হয়েছে।

ধরা যাক {R, +, .} একটি অঙ্গন এবং S,R-এর একটি সাবসেট। এখন {S, +, .} কে {R, + , .}-এর অধ-অঙ্গন (Subring) বলা হবে যদি {S, +, .} একই দ্বিপদ প্রক্রিয়া + এবং এর সাপেক্ষে একটি রিং হয়।

আমরা এর আগে প্রমাণ করেছি {S, +, .}{R, + , .}-এর অধঅঙ্গন হওয়ার শর্ত হলো ঃ

$$\text{(i) } a-b \in S \ \forall \ a,b \in S$$

$$\text{(ii) } a.b \in S \forall a,b \in S$$

এও প্রমাণিত হয়েছে যে উপরোক্ত শর্তগুলি শুধু প্রয়োজনীয় নয়, যথেষ্টও বটে। এই অধ্যায়ে আমরা একই ভাবে অধপ্রাঙ্গন (subfield)-এর শর্তও নিরূপণ করব।

14.4. প্রাঙ্গনের (Field) সংজ্ঞা এবং উদাহরণ

একটি অঙ্গন যার মধ্যে অন্তত দুটি উপাদান আছে তাকে প্রাঙ্গন বলা হবে যদি (i) অঙ্গনটি বিনিময়যোগ্য হয়, (ii) অঙ্গনটিতে গুণের একক (multiplicative identities) থাকে এবং (iii) শূন্য বাদে অন্য যে কোনও উপাদানের গুণের সাপেক্ষে বিপরীত উপাদান থাকে।

স্বতঃসিদ্ধগুলি হল

(A) {F, + } একটি বিনিময়যোগ্য গ্রুপ হবে অর্থাৎ

(i) $a+b \in F \quad \forall a, b \in F$ (বদ্ধতা ধর্ম)

(ii) $a+(b+c)=(a+b)+c \ \forall a,b,c \in F$ (সংযোজ্যতা ধর্ম)

(iii) $a+0=0+a=a \quad \exists\, 0 \in F$ এবং $\forall a \in F$ (শূন্য উপাদানের অস্তিত্ব)

(iv) $a+(-a)=(-a)+a=0 \ \exists -a \in F \forall a \in F$ (বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব)

(v) $a+b=b+a \ \ \forall a, b \in F$ বিনিময় ধর্ম

(B) {F, .}-এর শূন্য বাদে সমস্ত উপাদানগুলি একটি বিনিময়যোগ্য দল গঠন করে। অর্থাৎ

(i) $a.b \in F \quad \forall a, b \in F$ (বদ্ধতা ধর্ম)

(ii) $(a.b).c=a.(b.c) \ \ \forall a, b, c \in F$ (সংযোজ্যতা ধর্ম)

(iii) $\exists, 1 \in F$ যার জন্যে $a.1 = 1.a = a \quad \forall a \in F$ (স্থিরক উপাদান অস্তিত্ব ধর্ম)

(iv) $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1 \quad a^{-1} \in F \quad \forall a \neq 0 \in F$ (বিপরীত উপাদান অস্তিত্ব ধর্ম)

(v) $a.b = b.a \quad \forall a, b \in F$ (বিমিময় ধর্ম)

উপরন্তু $\{F, +, .\}$ এ গুণ প্রক্রিয়াটি উভয় প্রক্রিয়ার সঙ্গে দক্ষিণ ও বাম পাক্ষের বণ্টনযোগ্য। অর্থাৎ

(i) $a.(b+c) = a.b + a.c \quad \forall a, b, c \in F$

(ii) $(b+c).a = b.a + c.a \quad \forall a, b, c \in F$

প্রাঙ্গনের উদাহরণ

উদাহরণ 1. $R \equiv \{$ বাস্তব সংখ্যার সেট $\}$

$Q \equiv \{$ সমস্ত মূলদ সংখ্যার সেট $\}$

$C \equiv \{$ সমস্ত জটিল রাশির সেট $\}$

R এবং Q সাধারণ যোগ ও গুণ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে ফিল্ড গঠন করে। জটিল রাশির মধ্যেও যে কোনও (শূন্য ছাড়া) রাশির বিপরীত উপাদান আছে। এটা সহজেই দেখান যায় যে, যোগ ও গুণ প্রক্রিয়াগুলি ফিল্ড-এর সমস্ত স্বতঃসিদ্ধগুলি পূরণ করে। সুতরাং এগুলিও বাস্তব রাশির ফিল্ড ও জটিল রাশির ফিল্ড গঠন করে।

উদাহরণ $S \equiv \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} : x, y \in R$

ম্যাট্রিক্সের যোগ ও গুণ-এর সাপেক্ষে ফিল্ড গঠন করে।

(i) $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ -(y_1 + y_2) & x_1 + x_2 \end{bmatrix} \in S$

আবার $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ -y_3 & x_3 \end{bmatrix} \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ -y_3 & x_3 \end{bmatrix}$ সুতরাং সংযোগ্যধর্ম পালন করে।

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ যোগ-এর ক্ষেত্রে স্থিরক উপাদান

এবং (iv) $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x & -y \\ (-y) & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

সুতরাং $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$ এর বিপরীত উপাদান আছে। উপরন্তু ম্যাট্রিক্সের যোগ বিনিময় যোগ্য।

এবার গুণের স্বতঃসিদ্ধগুলির প্রমাণ দেখা যাক।

M (i) $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2 + y_1x_2 \\ -(x_1y_2 + y_1x_2) & x_1x_2 - y_1y_2 \end{bmatrix} \in S$

অর্থাৎ গুণের সাপেক্ষে S সেটটি বদ্ধ।

(ii) যেহেতু 2×2 ম্যাট্রিক্সের গুণে সংযোগ্যতা ধর্ম রক্ষিত হয় এখানেও তিনটি ম্যাট্রিক্সের গুণে সংযোজ্যতা ধর্ম রক্ষিত হবে।

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ এখানে গুণের একক

(iv) যদি কোনও ম্যাট্রিক্সে $A = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$ হয়

তাহলে $A^{-1} = \dfrac{1}{x^2 + y^2}\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$

আবার, AB = AB যখন A, B$\in$ S

এবং এখানে দেখা যায় যে A (B+C) = AB + AC

সুতরাং S সেটটি ম্যাট্রিক্সের যোগ ও গুণের সাপেক্ষে প্রাঙ্গন বা ফিল্ড গঠন করে।

উদাহরণ 3. C : জটিল রাশিগুলির সেট

$\{C, +, .\}$ জটিল রাশির যোগ ও গুণের সাক্ষেকেপ প্রাঙ্গন বা ফিল্ড গঠন করে।

ধরা যাক $a + ib$ একটি জটিল রাশি। $0 + 0i$ ও একটি জটিল রাশি। দুটি জটিল রাশির যোগফল একটি জটিল রাশি এবং দুটি জটিল রাশির যোগ বিনিময় যোগ্য। জটিলরাশির যোগ-এর ক্ষেত্রে সংযোজ্যতা ধর্ম রক্ষিত হয় ও 0 সংখ্যাটি যোগ এর একক হিসাবে নেওয়া যায়।

আবার গুণের ক্ষেত্রেও দুটি জটিল রাশির গুণফল একটি জটিল রাশি। গুণের ক্ষেত্রেও সংযোজ্যতাধর্ম রক্ষিত হয় এবং জটিল রাশির গুণ বিনিময়যোগ্য। আবার $1+i.0 = 1$ সংখ্যাটি গুণের ক্ষেত্রে স্থিরক।

আবার $\alpha + i\beta$ এর বিপরীত উপাদান যোগ এর ক্ষেত্রে $-\alpha+i(-\beta)$ এবং গুণের ক্ষেত্রে

$$\frac{1}{\alpha + i\beta} = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\{\alpha - i\beta\}$$

সুতরাং জটিল রাশির সেটটি, জটিল রাশির সাধারণ যোগ ও গুণের সাপেক্ষে প্রাঙ্গন বা ফিল্ড গঠন করে।

উদাহরণ 4. $T = \{ a + b\sqrt{2}$: যেখানে a ও b দুটি মূলদ সংখ্যা$\}$

T সেটের উপর যোগ ও গুণ প্রক্রিয়া এইভাবে বিবৃত করা যায়—

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 + a_2) + \sqrt{2}(b_1 + b_2)$$ এবং

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}).(a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1a_2 + 2b_1b_2 + \sqrt{2}(a_1b_2 + a_2b_1)$$

এই দুটি প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে এটি একটি প্রাঙ্গন গঠন করে।

14.5. প্রাঙ্গন সংক্রান্ত উপপাদ্য ও আনুষঙ্গিক সিদ্ধান্ত

উপপাদ্য 1. কোনও প্রাঙ্গনে কোনও অশূন্য উপাদানের গুণ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে বিপরীত উপাদানটি অনন্য (unique)।

প্রমাণ : ধরা যাক $a \in F$ এবং a-এর বিপরীত উপাদান b এবং c। তাহলে $a.b = 1$ এবং $a.c = 1$ বা $a.b = a.c \Rightarrow b = c$ (cancellation law) অপসারণ সূত্র

সুতরাং বিপরীত উপাদানটি একক।

উপপাদ্য 2 : কোনও প্রাঙ্গনে শূন্যের কোনো ভাজক (divisor of zero) থাকে না (এখানে শূন্য বলতে আমরা যোগ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে প্রাপ্ত একক উপাদানটিকেই বুঝি)

প্রমাণ : ধরা যাক F একটি প্রাঙ্গন এবং $a.b=0$ যখন $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a, b \in F$ যেহেতু $a \neq 0$ এবং $a \in F$ সুতরাং $a^{-1} \in F$

এখন $a^{-1}(a.b) = = (a^{-1}.a).b = 1.b = b$ আবার $a^{-1}(a.b) = a^{-1}.0 = 0$ সুতরাং $b = 0$.

একইভাবে $b \neq 0$ হলে $a = 0$

অর্থাৎ F-এ শূন্যের কোনও ভাজক নেই।

অনুসিদ্ধান্ত 1. যে কোনও ফিল্ডই পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র (integral domain)

Note : যেমন লক্ষ করুন সব পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্রই ফিল্ড.নয়। যেমন $\{z, +, .\}$

উপপাদ্য 3. কোনও সসীম পূর্ণাঙ্গ (ইনটিগ্রাল) ক্ষেত্রই সবসময়ই প্রাঙ্গন বা ফিল্ড।

প্রমাণ : ধরা যাক একটি সসীম পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র D যার উপাদানের সংখ্যা n। যেহেতু D একটি সসীম পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র এটি একটি বিনিময়যোগ্য (গুণের ক্ষেত্রে) অঙ্গন যার মধ্যে গুণের এককটি আছে এবং যার মধ্যে গুণের কোনও ভাজক নেই।

ধরা যাক $a \in D$, $a \neq 0$ এবং $D' = \{a.x/$ যেখানে $x \in D$ এবং $x \neq 0\}$

এবার D' এর মধ্যে $a.x = a.y$ হলে $x = y$ হবে কেননা D-এর মধ্যে শূন্যের কোনও ভাজক নেই।

সুতরাং $x, y \in D$ এবং $x \neq y$ হলে $a.x \neq a.y$ অথবা বলা যায় D' -এর সক্ষম উপাদানগুলিই স্বতন্ত্র।

সুতরাং D'-এ উপাদানের সংখ্যা n-1 আবার D'-এর মধ্যে D-এর সমস্ত অশূন্য উপাদানগুলি আছে, সুতরাং গুণের একক 1 ও D'-এর মধ্যে আছে।

সুতরাং $a \neq 0$ যে কোনও একটি উপাদানের জন্য আরেকটি উপাদান x পাবে যাতে $a.x = 1$ হবে। তাহলে প্রত্যেকটি অশূন্য উপাদান a-এর গুণের সাপেক্ষে বিপরীত উপাদান আছে। অর্থাৎ D একটি ফিল্ড।

উপপাদ্য 4. ধরা যাক a, এবং b, F ফিল্ডের দুটি উপাদান এবং $a \neq 0$. এখন F ফিল্ডে $a.x = b$ এই সমীকরণের একটিই মাত্র সমাধান আছে।

প্রমাণ ঃ যেহেতু $a \in F$ এবং F একটি ফিল্ড $a^{-1} \in F$ আবার বদ্ধতাধর্ম অনুসারে $a^{-1}.b \in F$.

এখন $a.(a^{-1}.b) = (a.a^{-1}) = b$

সুতরাং $a^{-1}b = x$ একটি সমাধান। ধরা যাক প্রদত্ত সমীকরণটি এই রকম দুটি সমাধান আছে, যেমন $a.x_1 = b$ ও $ax_2=b$.

তাহলে $a.x_1 = ax_2$ যেহেতু $a \neq 0$, $x_1 = x_2$ অপসারণ সূত্রানুযায়ী। সুতরাং উক্ত সমীকরণের সমাধানটি অনন্য (unique)।

14.6. অধপ্রাঙ্গন (Subfield)

সংজ্ঞা : ধরা যাক $\{F, +, .\}$ একটি ফিল্ড ও S, F-এর একটি সাবসেট। যদি $\{S, +, .\}$ (একই দ্বি প্রক্রিয়ার) সাপেক্ষে ও ফিল্ড প্রাঙ্গন হয় তাহলে $\{S, +, .\}$ কে $\{F, +, .\}$-এর অধপ্রাঙ্গন বলা হয়।

উদাহরণ স্বরূপ $\{R, +.\}$ প্রাঙ্গনের একটি অধপ্রাঙ্গন হলো $\{Q, +, .\}$.

উপপাদ্য 5. কোনও প্রাঙ্গন $\{F, +, .\}$-এর S একটি সাবসেট যার মধ্যে অন্তত দুটি উপাদান আছে। এখন $\{S, +, .\}$, $\{F, +, .\}$-এর অধপ্রাঙ্গন হওয়ার আবশ্যিক ও যথেষ্ট শর্তগুলি হল

i) $a, \in S, b \in S\ a-b \in S$

ii) $a \in S,\ b \in S\ \ a.b^{-1} \in S : b \neq 0.$

প্রমাণ : প্রথমে প্রমাণ করা হবে যাতে দুটি S-এর অধপ্রাঙ্গন হওয়ার জন্য আবশ্যক যেহেতু S নিজেই একটি প্রাঙ্গণ এটি যোগ-এর সাপেক্ষে গ্রুপ। এবার $b \in S$ সুতরাং $-b \in S$ আবার S সেটটি যোগ দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে বদ্ধ সুতরাং $a + (-b) \in S$ অথবা বলা যায় $a\text{-}b \in S$ একইভাবে যে কোনও অশূন্য উপাদান b নেওয়া হলে $b^{-1} \in S$। আবার $a \in S$, $b^{-1} \in S$ সুতরাং $a.b^{-1} \in S$

দেখা গেল $\{S, +.\}$ সাবফিল্ড হওয়ার জন্য উপরোক্ত শর্ত দুটি আবশ্যক।

এবার প্রমাণ করা হবে $\{S, +.\}$ অধপ্রাঙ্গন বা সাবফিল্ড, তৈরি করার জন্য শর্ত দুটি যথেষ্ট।

এখন যে কোনও দুটি উপাদান $a, b \in S$ হলে $a-b \in S$। আমরা পূর্বেই প্রমাণ করেছি $\{S, +\}$-কে আবেলিয় গ্রুপ তৈরি করতে শর্তটি যথেষ্ট।

এবার $a \in S$ সুতরাং $a.a^{-1}=1 \in S$ হবে আবার $1 \in S$ এবং $a \neq 0$ হলে $1.a^{-1} \in S$ হবে অর্থাৎ $a^{-1} \in S$ হবে।

এবার ধরা যাক $b \neq 0 \in S$। তখন $b^{-1} \in S$ হবে এখন $a \in S$, $b^{-1} \in S$ সুতরাং দ্বিতীয় শর্তানুসারে $a.(b^{-1})^{-1} \in S$ হবে অর্থাৎ $a.b \in S$ যদি $b=0$ হয় তাহলে $a.b=0$ সুতরাং $0 \in S$ সুতরাং গুণের সাপেক্ষে S সেটটি বদ্ধ। এবার গুণের সংযোজ্যতাধর্ম S রক্ষিত হবে। কেননা S, F সেট-এর সাবসেট। যোগ এর ওপর গুণ প্রক্রিয়ার বণ্টন ধর্মগুলি সম্পর্কেও একই কথা প্রযোজ্য। সুতরাং $\{S, +, .\}$ নিজেই একটি প্রাঙ্গন। অর্থাৎ $\{S, +, .\}$, $\{F, +, .\}$এর অধপ্রাঙ্গন। দেখা গেল উপরোক্ত শর্তগুলি $\{S, +, .\}$-কে $\{F, +, .\}$-এর অধপ্রাঙ্গন প্রতিষ্ঠিত করার পক্ষে যথেষ্ট।

14.7. অঙ্গনাল (Ideal) ও প্রাঙ্গন (Field)

অঙ্গনের আলোচনার সময় অঙ্গনাল বা আইডিয়াল সম্বন্ধে আমরা আলোচনা করেছি। সংক্ষেপে অঙ্গনের মধ্যে অঙ্গনাল বা আইডিয়াল কাকে বলে আলোচনা করে নেওয়া যাক।

ধরা যাক $\{R, +, .\}$একটি রিং বা অঙ্গন। এবং S, R-এর একটি সাবসেট। S-কে R-এর বাম অঙ্গনাল বলা হবে যদি (i) $\{S+\}$ একটি R-এর অধযূথ বা সাবগ্রুপ হয়।

(ii) $r.s \in S \quad \forall r \in R$ এবং $\forall\ s \in S$ একইভাবে s-কে দক্ষিণ অঙ্গনাল বলা হবে যদি

(i) $\{S+\}$: R-এর একটি সাবগ্রুপ

(ii) $s.r. \in S\ \forall\ r \in R$ এবং $\forall s \in S$

S-কে অঙ্গনাল (ideal) বলা হবে যদি এটি একই সাথে বাম অঙ্গনাল ও দক্ষিণ অঙ্গনাল বলা হয়।

এর আগে আমরা প্রমাণ করেছি যে $\{S, +, .\}$ যদি $\{R, +, .\}$অঙ্গনের একটি অঙ্গনাল হয় তবে এটি $\{R, +, .\}$ -এর একটি অধঅঙ্গন হবে। কিন্তু বিপরীত সিদ্ধান্তটি সমভাবে সত্য নয় অর্থাৎ যে কোনও অধঅঙ্গনই (subrings) অঙ্গনাল (ideal) নয়।

এক্ষেত্রে স্মরণযোগ্য যে কোনও বিনিময়যোগ্য অঙ্গনের যে কোনও দক্ষিণ অঙ্গনালই বাম অঙ্গনাল আবার লক্ষণীয় যে যে কোনও অঙ্গনের $\{R, +, .\}$দুটি অঙ্গনাল সবসময়েই পাওয়া যাবে—একটি $\{0\}$ এবং অপরটি R। এই দুটি সাধারণ অঙ্গনাল ছাড়া যে কোনও অঙ্গনালকে বলা হয় প্রকৃত অঙ্গনাল।

উপপাদ্য 6 : প্রাঙ্গনের কোনও প্রকৃত অঙ্গনাল নেই।

প্রমাণ : ধরা যাক S, $\{F, +, .\}$ফিল্ডের একটি প্রকৃত অঙ্গনাল এবং $a \in S$, $a \neq 0$

এবার $a \in S$ এবং $a^{-1} \in F \Rightarrow a.a^{-1} = 1 \in S$

এখন $1. \in s, x \in F$ ও $1.x \in S \Rightarrow x \in S$

তাহলে দেখা গেল যে F-এর যে কোনও উপাদানই S-এর উপাদান। সুতরাং $F \subseteq S$ কিন্তু $S \subsetneq F$ তাহলে $F=S$

সুতরাং F-এর একমাত্র অঙ্গনাল $\{0\}$এবং F নিজেই। তাহলে F-এর কোন প্রকৃত অঙ্গনাল নেই।

উপপাদ্য 7. একটি বিনিময়যোগ্য গুণের একক বিশিষ্ট অঙ্গন $\{R, +, .\}$ এর যদি কোনও প্রকৃত অঙ্গনাল থাকে তবে $\{R, +, .\}$ একটি ফিল্ড হবে।

প্রমাণ : $Ra = \{.x.a\ ; \forall x \in R\}$ সেটটি নেওয়া হল যখন $a \in R$ একটি নির্দিষ্ট উপাদান।

ধরা যাক $p, q \in Ra$ অর্থাৎ $p = r_1 a\ \ q = r_2 a$ যখন $r_1, r_2 \in R$

এখন $p - q = r_1 a - r_2 a = (r_1 - r_2)a = ra \in Ra$

কেননা $r_1 - r_2 \in R$ তাহলে $p, q \in Ra \Rightarrow p - q \in Ra$

দেখা গেল $Ra\{R, +, .\}$-এর একটি সাবগ্রুপ বা অধযূথ।

এবার $x \in R$ এবং $p = r_1 a \in Ra$

$x.p = x(r_1 a) = (xr_1)a \in Ra$ কেননা $xr_1 \in R$ দেখা গেল Ra,$\{R, +, .\}$-এর একটি অঙ্গনাল।

R-একটি বিনিময়যোগ্য অঙ্গন যার মধ্যে গুণের একক আছে। এখন দেখা যাক যে কোনও অশূন্য উপাদান a-এর বিপরীত উপাদান R-এ আছে কিনা?

ধরা যাক $a \neq 0 \in R$ এখন $Ra = \{ra : r \in R\}$ সেটটি একটি অঙ্গনাল।

যেহেতু $1 \in R$: $1.a. = a \in Ra$

অর্থাৎ Ra আইডিয়ালটি শুধু শূন্য উপাদান দিয়ে তৈরি নয়। এখন দেওয়া আছে। {R, +, . }এর কোনও প্রকৃত অঙ্গনাল নেই, সুতরাং $Ra \equiv R$ অর্থাৎ R-এর প্রত্যেকটি উপাদান R-এরই অন্য আরেকটি উপাদান b-কে a দিয়ে গুণ করে পাওয়া যাবে। এখন $1 \in R$ সুতরাং আমরা আরেকটি উপাদান $b \in R$ পাব যখন $b.a = 1$ অর্থাৎ $a^{-1}=b$। সুতরাং দেখা গেল যে কোনও অশূন্য উপাদানের R-এর মধ্যে গুণের সাপেক্ষে বিপরীত উপাদান আছে, অর্থাৎ {R, +, .} একটি ফিল্ড।

14.8. সারাংশ

এই অধ্যায়ে যা আলোচিত হল

1) {F, +, .} সেটটির উপর + এবং . দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত আছে। F সেটটিকে প্রাঙ্গন বা ফিল্ড বলা হবে যদি {F, + } একটি আবেলিয় যূথ ও $\{F-\{0\}, \cdot\}$ অর্থাৎ গুণের সাপেক্ষে $\{F - \{0\}\}$ আবেলিয় যূথ হয়।

2) $S \subset F$ এবং {+, .} দুটি দ্বিপাদ প্রক্রিয়া F সেটের ওপর সংজ্ঞাত আছে। যদি {S, +, .}টি ঐ একই দ্বিপদ প্রক্রিয়াদ্বয়ের সাপেক্ষে নিজেই একটি ফিল্ড হয় তাহলে {S, +, .} কে {F, +, .}এর অধপ্রাঙ্গন বা সাবফিল্ড বলা হবে।

— প্রাঙ্গন সংক্রান্ত যে যে উপপাদ্য প্রমাণিত হয়েছে সেগুলি হল ঃ

1) কোনও প্রাঙ্গনে শূন্য ছাড়া যেকোনও উপাদানের গুণ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে বিপরীত উপাদানটি অনন্য।

2) কোনও প্রাঙ্গনে কখনই শূন্যের ভাজক থাকে না। অর্থাৎ প্রতিটি প্রাঙ্গনই পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র।

3) কোনও সসীম পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্র সব সময়েই প্রাঙ্গন হবে।

4) কোনও ফিল্ডে $a \circ x = b$ যেখানে $a, b \in F$ সমীকরণের সমাধানটি অনন্য।

কোনও সেট $S \subset F$-এর সাবফিল্ড হওয়ার জন্য আবশ্যক ও যথেষ্ট শর্ত দুটি হলো ঃ

i) $a - b \in S \;\; \forall a, b \in S$

ii) $a.b^{-1} \in S, \;\; \forall a, b \in S, b \neq 0$

অঙ্গনাল ও প্রাঙ্গন সম্বন্ধে প্রমাণিত হয়েছে

7) প্রাঙ্গনের কোনও প্রাকৃত অঙ্গনাল নেই।

8) {R, +, .}একটি বিনিময়যোগ্য গুণের একক বিশিষ্ট অঙ্গন হলে এবং {R, +, .} এর কোনও প্রকৃত অঙ্গনাল না থাকলে, {R, +, .} একটি প্রাঙ্গন হবে।

14.9. সর্বশেষ প্রশ্নাবলী ও নির্দেশ

1. ধরা যাক মূলদ সংখ্যাগুলির সেট যেখানে দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া এইভাবে সংজ্ঞাত

i) $a_\circ b = a + b - 1$

ii) $a * b = a + b - ab$

দেখান যে এই দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে $\{Q, \circ, *\}$ একটি প্রাঙ্গন গঠন করে।

নির্দেশ ঃ $a_\circ b = a + b - 1 \in Q$

(ii) $a_\circ (b_\circ c) = (a_\circ b)_\circ c$

(iii) 1 (identity) এই প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে একক বা স্থিরক।

(iv) $a \in Q$ $b \equiv 2 - a \in Q$ এবং $a_\circ b = 1$ অর্থাৎ $2 - a$, a-এর বিপরীত উপাদান।

আবার $a_\circ b = b_\circ a$ $\forall$ $a, b \in Q$ সুতরাং 0 এর সাপেক্ষে এটি একটি আবেলিয় গ্রুপ।

আবার (i) $a * b \in Q$

(ii) $(a * b) * c = a * (b * c)$

(iii) 0 এই **দ্বিপাদ** প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে একক বা স্থিরক।

(iv) $a \in Q$, $b = \frac{a}{a-1}$ $a \neq 1$ b এর বিপরীত উপাদান। এবং $a * b = b * a$

সুতরাং * এই দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে $(Q - \{1\}\ *)$ একটি আবেলিয় দল।

এইভাবে যোগের উপর গুণের বন্টন ধর্ম প্রমাণ করুন।

2. $a, b \in F$ যেখানে $\{F, +, .\}$ একটি প্রাঙ্গন এবং দেওয়া আছে $b \neq 0$, $(ab)^2 = ab^2 + bab - b^2$

প্রমাণ করুন $a = 1$,

নির্দেশ ঃ $(ab)^2 = (ab)(ab)$

$(ab)(ab) = (ab)b + (ba)b - bb$

অপসারণ সূত্র প্রয়োগ করে পাই—

$(aba) = ab + ba - b$

আবার $aab = 2ab - b = (2a - 1)b$

সুতরাং $aa = 2a - 1$ বা $aa - a - a + 1 = 0$

বা, $(a-1)(a-1) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0$ বা, $a = 1$

3. ধরা যাক $F = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$

অর্থাৎ পূর্ণ সংখ্যার উপর 5-এর অবশিষ্ট শ্রেণীগুলির সেট।

এখানে $[a]+[b]=[a+b]$ (মডুলো 5)

ও $[a].[b]=[ab]$(মডুলো 5)

এই দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সংযোজন টেবিল নির্মাণ করুন ও দেখান এই দুটি দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে {F, +, .} একটি প্রাঙ্গন গঠন করে। **নির্দেশ ঃ** যোগ প্রক্রিয়ার টেবিলটি এই রকম হবে

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

একইভাবে অন্য টেবিলটিও নির্মাণ করুন। এরপর প্রমাণের দিকে এগোন।