6.9 অনুশীলনী

(1) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}, \; 0 \le x \le 4$

রোলের উপপাদ্যটি কি উক্ত অপেক্ষকের ক্ষেত্রে ঐ অন্তরালে প্রযোজ্য? যুক্তিসহ উত্তর দাও।

(2) $y = x^2$ অধিবৃত্তের উপর $A(1, 1)$ ও $B(3, 9)$ দুটি বিন্দু। AB-এর সমীকরণ নির্ণয় না করে ঐ অধিবৃত্তের উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করো যে বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি AB-এর সমান্তরাল হবে

(3) $x^2 + 2$ ও $x^2 - 1$ অপেক্ষক দুটির ক্ষেত্রে $[1, 2]$ বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরালে কশি-র মধ্যমান উপপাদ্য প্রযুক্ত হতে পারে কিনা যুক্তিসহ বল।

(4) $y = \ln \sin x$ অপেক্ষকের ক্ষেত্রে বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$-এ রেলের উপপাদ্যটি প্রযুক্ত হবে কিনা যুক্তিসহ বল।

(5) যুক্তি দাও : বাস্তব সহগ বিশিষ্ট সমীকরণ

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots a_{n-1}\, x = 0$-এর একটি ধনাত্মক বীজ x_0 থাকলে

$na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$ সমীকরণের একটি বীজ আছে যা x_0-এর চেয়ে ছোট।

(6) $f(x) = 1 + x^m(x-1)^n$ যেখানে m ও n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। $f'(x) = 0$ সমীকরণটি সমাধান না করেই দেখাও যে $f'(x) = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ মুক্ত অন্তরাল $(0, 1)$-এ থাকবে।

(7) দেখাও যে c বাস্তব ধ্রুবক সংখ্যা হলে $x^3 - 3x + c = 0$ সমীকরণটির $(0, 1)$ মুক্ত অন্তরালে দুটি ভিন্ন বীজ থাকতে পারে না।

(8) ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যের সাহায্যে দেখাও যে $\frac{a-b}{a} \le \ln\frac{a}{b} \le \frac{a-b}{b}$ যেখানে $0 < b \le a$ হবে।

(9) ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য ব্যবহার করে দেখাও যে

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} \le \tan\alpha - \tan\beta \le \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}, 0 < \beta \le \alpha < \frac{\pi}{2}$$

(10) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ অপেক্ষক দুটি কি $[a, b]$ অন্তরালে $\left(0 < a < b < \frac{\pi}{2}\right)$ কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যের শর্ত পূরণ করে? শর্তটি পূরণ হলে যথাযথ বিন্দুটি নির্ণয় কর।

(11) দেওয়া আছে যে $f(a + h) = f(a) + hf(a + \theta h)$, $0 < \theta < 1$, $a = 0$, $h = 3$ এবং $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$, θ-এর মান নির্ণয় করো।

(12) দেওয়া আছে $f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h)$, $0 < \theta < 1$ যেখানে $f(x) = \sin x$। দেখাও যে, $\lim\limits_{h\to 0+} \theta = \frac{1}{2}$