

## 8.14 সমঘাতী অপেক্ষক ও অয়লারের উপপাদ্য

**প্রস্তাবনা :** সেন্ট পিটার্সবুর্গ একাডেমী অব সায়েন্সেস-এর সদস্য, গণিতজ্ঞ ও থিওরিটিক্যাল মেকানিক্স-এর বিশেষজ্ঞ লিওনার্দ অয়লার (১৭০৭-১৭৮৩) গণিতের বিভিন্ন শাখায় গুরুত্বপূর্ণ অবদান রেখেছেন। জন্মসূত্রে সুইজারল্যান্ডের হলেও জীবনের বেশিরভাগ সময় রাশিয়ায় অতিবাহিত করেছেন। গাণিতিক বিশ্লেষণ তত্ত্ব তাঁর প্রচুর অবদান আছে—সমঘাতী অপেক্ষক সম্পর্কিত তাঁর তত্ত্বটি নিম্নে বিবৃত হল।

**সংজ্ঞা :** মনে করি  $f : S \rightarrow R$  যেখানে  $S \subset R^2$

$f$  অপেক্ষককে  $S$ -এ  $n$  মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক বলা হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি প্রতিটি  $(x, y) \in S$ , প্রতিটি ধনাত্মক সংখ্যা  $\lambda$  যাতে  $(\lambda x, \lambda y) \in S$ -এর ক্ষেত্রে  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$  হয়।

**উদাহরণ :** (i)  $f(x, y) = \sin^{-1} \frac{x}{y} + \tan^{-1} \frac{y}{x}$ ,  $xy \neq 0$

$f(tx, ty) = f(x, y)$  এবং ফলে '0' মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক।

(ii)  $f(x, y) = x^{1/3} y^{-5/6} \log \frac{y}{x}$

$f(tx, ty) = t^{-1/2} f(x, y)$  প্রতিটি  $t > 0$ ,  $(tx, ty) \in D_f$ -এর জন্য

অতএব  $f$ ,  $-\frac{1}{2}$  মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক।

**অয়লারের উপপাদ্য :** যদি  $f(x, y)$  সংজ্ঞার অঞ্চল  $S$ -এ  $n$  মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক হয় এবং অপেক্ষকের প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি  $S$ -এ সন্তত হয়, তবে  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$

**প্রমাণ :**  $n$  মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক বলে

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \text{ যেখানে } (tx, ty) \in S$$

$$\frac{\partial f}{\partial (tx)} \cdot \frac{d}{dt}(tx) + \frac{\partial f}{\partial (ty)} \cdot \frac{d}{dt}(ty) = nt^{n-1} f(x, y)$$

$$x \frac{\partial f}{\partial (tx)} + y \frac{\partial f}{\partial (ty)} = nt^{n-1} f(x, y)$$

$$t = 1 \text{ বসিয়ে } xf_x + yf_y = nf(x, y)$$

**মন্তব্য :** (1) উক্ত উপপাদ্যে বর্ণিত শর্ত ছাড়াও যদি  $f$ -এর দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক আন্তরকলজগুলি সন্তত হয়, তবে