ইনটু অপেক্ষক — Into function

বাইজেক্‌টিভ্‌ অপেক্ষক — Bijective function

সংযোজক — Composite

একৈক/ইনজেক্‌টিভ — Injective

সারজেক্‌টিভ — Surjective

বিপরীত অপেক্ষক — Inverse function

ক্রমবর্ধমান — Monotone increasing

ক্রমক্ষীয়মান — Monotone decreasing

ক্রমান্বয়ী — Monotonic/Monotone

যথার্থ ক্রমান্বয়ী — Strictly Monotonic

যুগ্ম অপেক্ষক — Even function

অযুগ্ম অপেক্ষক — Odd function

পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক — Periodic function

বহুপদ রাশি অপেক্ষক — Polynomial function

অপেক্ষক-এর সীমা — Bounds of a function

বৃহত্তম নিম্নসীমা — Greatest lower bound

ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা — Least upper bound

সীমা — Limit

বামপক্ষীয় সীমা — Left hand limit

ডানপক্ষীয় সীমা — Right hand limit

যদৃচ্ছ — Arbitrary

বর্জিত সামীপ্য — Deleted neighbourhood

স্যান্ডুইচ উপপাদ্য — Sandwich Theorem

সন্ততি — Continuity

সন্তত — Continuous

অসন্ততি — Discontinuity

দূরনীয়/অপসারণযোগ্য অসন্ততি — Removable discontinnuity

উল্লম্ফন অসন্ততি — Jumps discontinuity

সসীম অসন্ততি — Finite discontinuity

সীমাবদ্ধ — Bounded

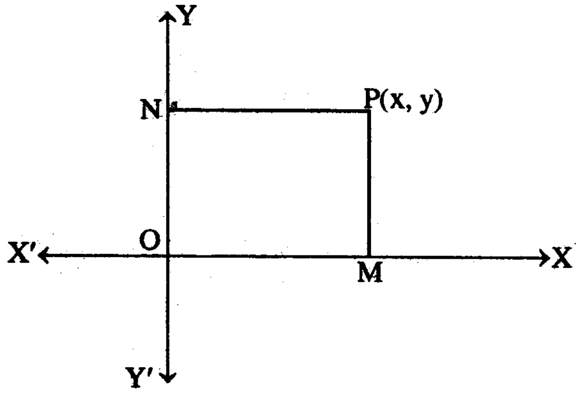
সহায়ক গ্রন্থ

Differential Calculus — Shantinarayan

Calculus of One Variable — Maron (CBS Publishers)

4.20 পরিশিষ্ট ঃ লেখচিত্র

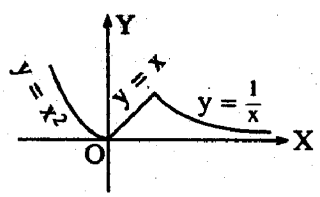
মনে করি, f(x) অপেক্ষকটি [a, b] অন্তরালে সংজ্ঞাত আছে। [a, b] অন্তরালের প্রতিটি x-এর জন্য বাস্তব সংখ্যা f(x) পাওয়া যায়। অপেক্ষকটিকে লেখচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করিবার জন্য দুইটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা X′OX ও Y′OY নেওয়া হ'ল, যাদের স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় দ্বারা অভিহিত করা যায়।



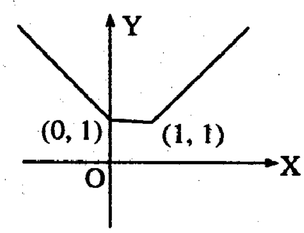
OMPN আয়তক্ষেত্রের P বিন্দুটি (x, f(x)) বা (x, y)-কে নির্দিষ্ট করে। [a, b] অন্তরালে x-এর সম্ভাব্য সকল মানের জন্য (x, y) বিন্দুগুলির সেটকে উক্ত অপেক্ষক f-এর লেখচিত্র বলা হয়।

কয়েকটি অপেক্ষকের লেখচিত্র :

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2, x < 0 \\ x, 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x}, x > 1 \end{cases}$

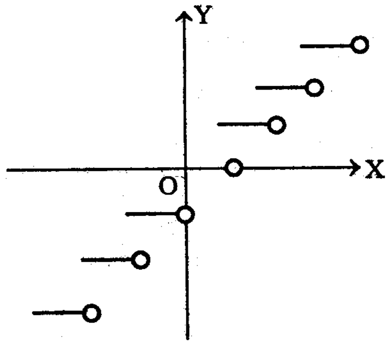


(2) $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, -\infty < x \le 0 \\ 1, 0 < x \le 1 \\ 2x - 1, 1 < x < \infty \end{cases}$



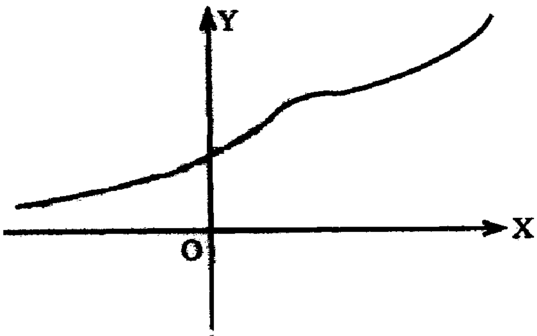
(3) $f(x) = [x],\ x \geq 0$

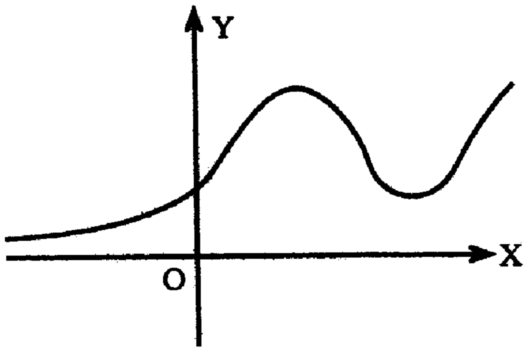
$$f(x) = \begin{cases} 0, 0 \leq x < 1 \\ 1, 1 \leq x < 2 \\ 2, 2 \leq x < 3 \\ 3, 3 \leq x < 4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$



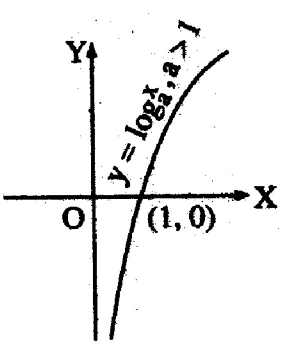
দক্ষিণ প্রান্তস্থ 0 চিহ্নিত বিন্দুগুলি লেখচিত্রের উপরিস্থ নয়।

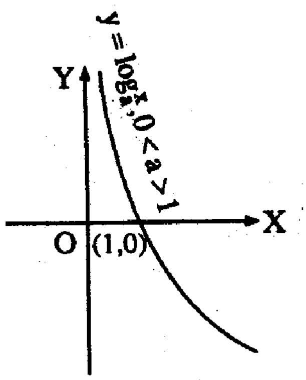
(4) একৈক অপেক্ষকের লেখচিত্র : $y = f(x)$ আকারের অপেক্ষকটি একৈক হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাগুলি অপেক্ষকের লেখচিত্রকে একের বেশি সংখ্যক বিন্দুতে ছেদ না করে।



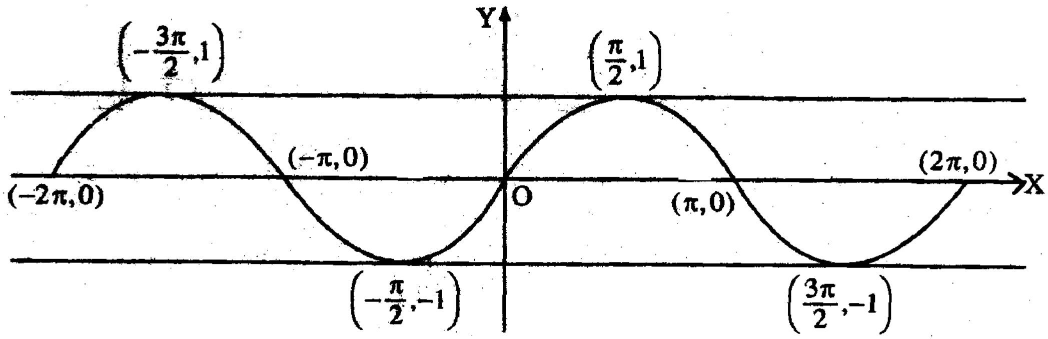


(5) $x \to \log_a x,\ a > 0.$

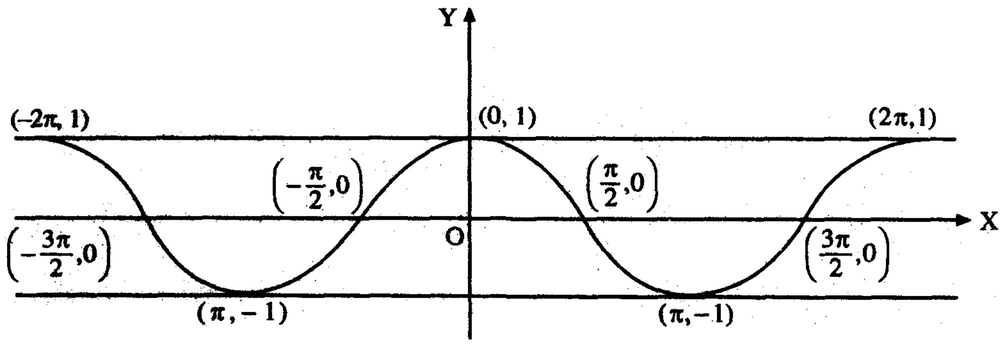




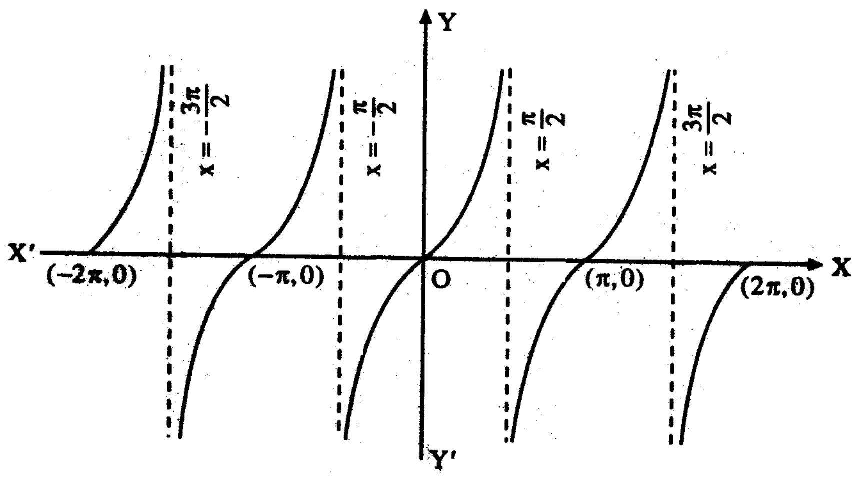
(6) $x \to \sin x$, সংজ্ঞাঞ্চল R, বিস্তার বা বিম্বাঞ্চল $[-1, 1]$.



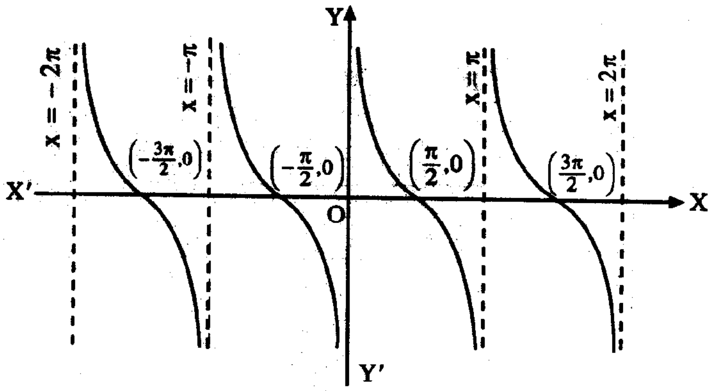
(7) $x \to \cos x$, সংজ্ঞাঞ্চল R, বিস্তার $[-1, 1]$



(8) $x \to \tan x$, সংজ্ঞাঞ্চল $R-\left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, \ldots\ldots\right\}$, বিস্তার $(-\infty, \infty)$.

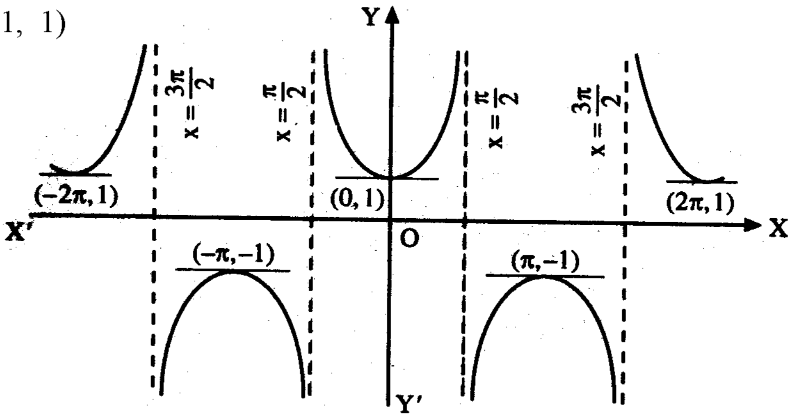


(9) $x \to \cot, x$, সংজ্ঞাঞ্চল $R - \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, ...\}$ বিস্তার $(-\infty, \infty)$.

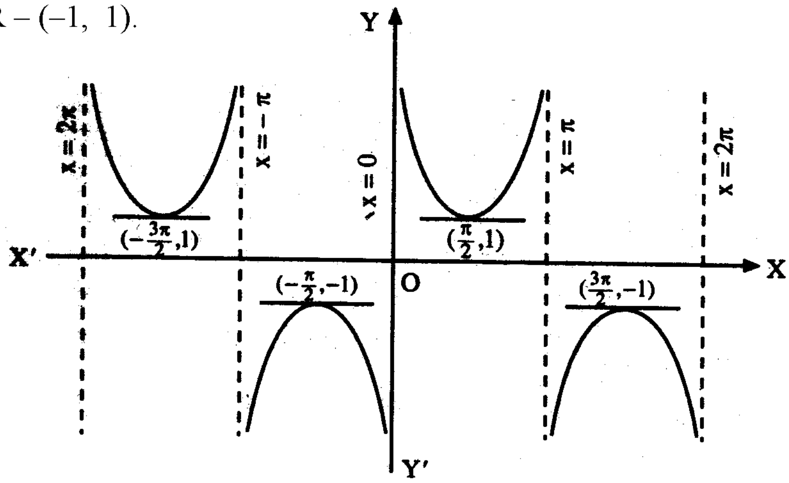


(10) $x \to \sec x$, সংজ্ঞাঞ্চল $R - \left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, ...\right\}$ বিস্তার $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

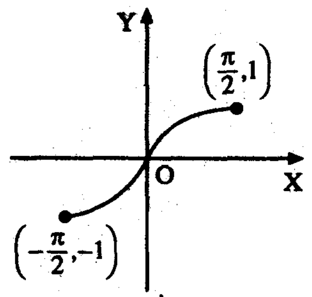
অর্থাৎ $R - (-1, 1)$



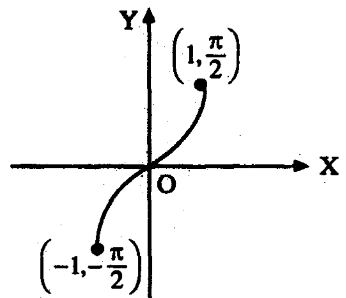
(11) $x \to \text{cosec}, x$, সংজ্ঞাঞ্চল $R - \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, ...\}$ বিস্তার $(-\infty, -1] \cup$ $[1, \infty)$ বা $R - (-1, 1)$.



(12) বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক : $y = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ হইতে পাই $x = \sin^{-1} y$, $y \in [-1, 1]$.

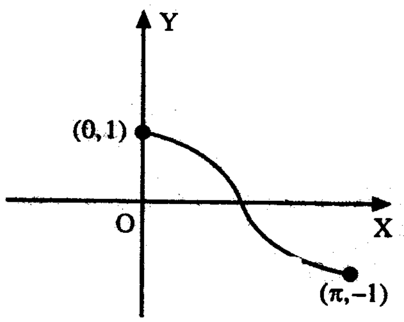


$y = \sin x$

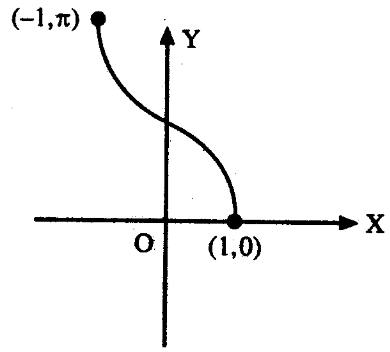


$y = \sin^{-1} x$

(13) বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক : $y = \cos x \Leftrightarrow x = \cos^{-1} y$; $x \in [0, \pi]$, $y \in [-1, 1]$.

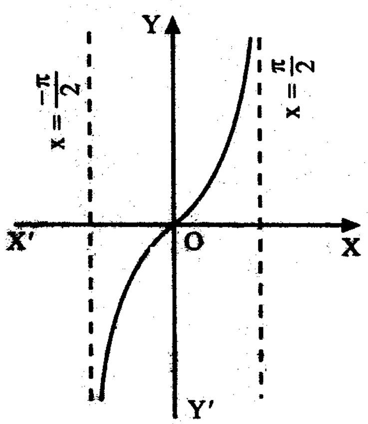


$y = \cos x$

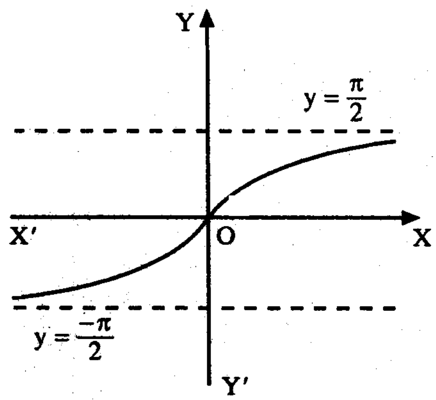


$y = \cos^{-1} x$

(14) বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক : $y = \tan x \Leftrightarrow x = \tan^{-1} y$; $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $y \in (-\infty, \infty)$.

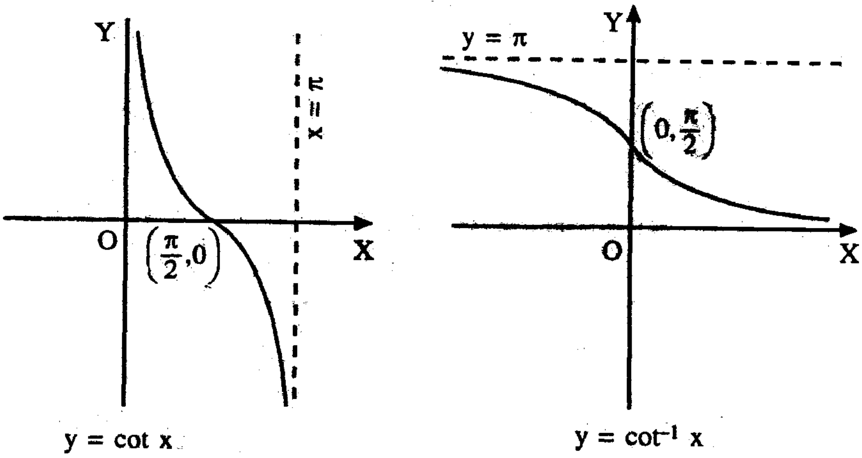


$y = \tan x$

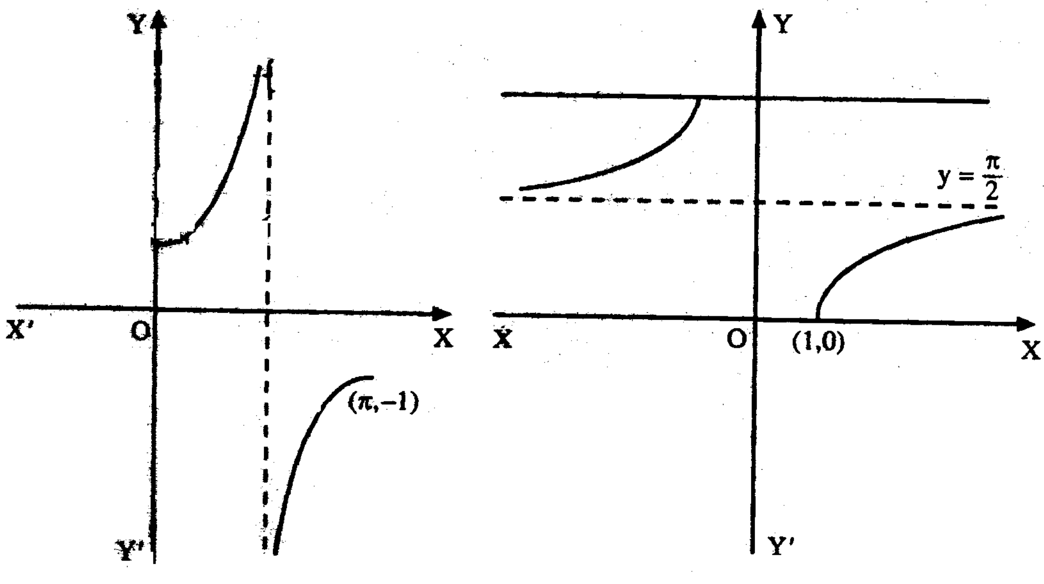


$y = \tan^{-1} x$

(15) বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক : $y = \cot x \Leftrightarrow x = \cot^{-1} y$; $x \in (0, \pi)$, $y \in (-\infty, \infty)$.

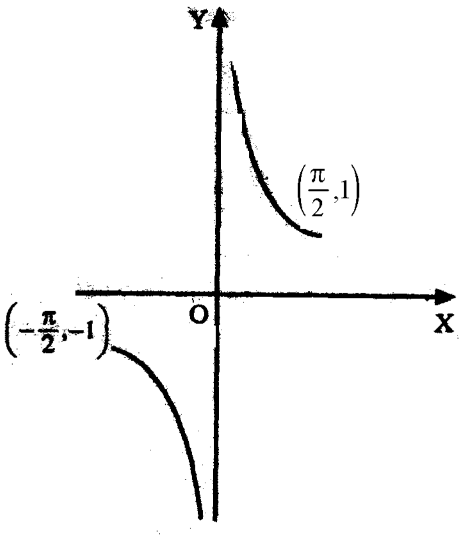


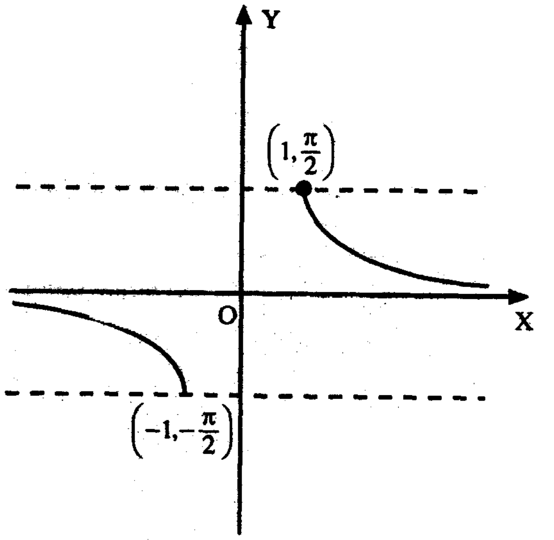
(16) বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক : $y = \sec x \Leftrightarrow x = \sec^{-1} y$; $\in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $y \in R-(-1, 1)$.



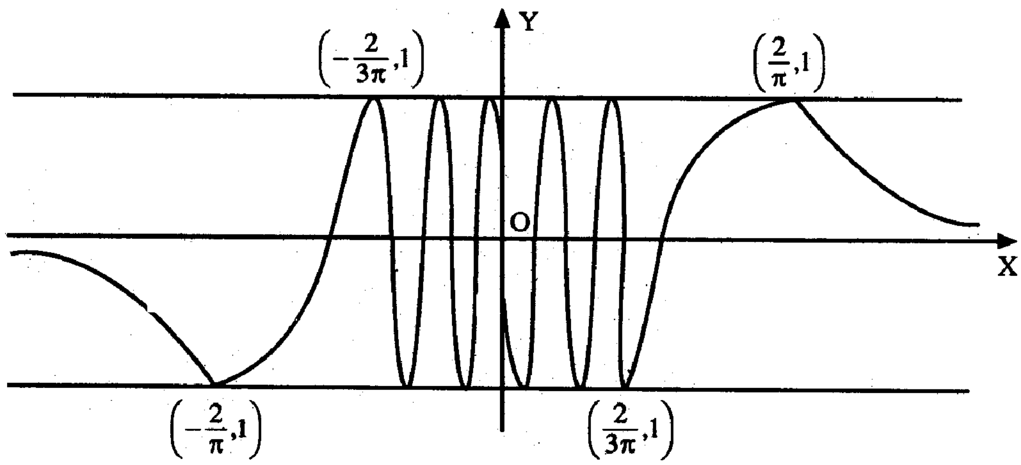
(17) বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক : $y = \text{cosec } x \Leftrightarrow x = \text{cosec}^{-1} y$;

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}, y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

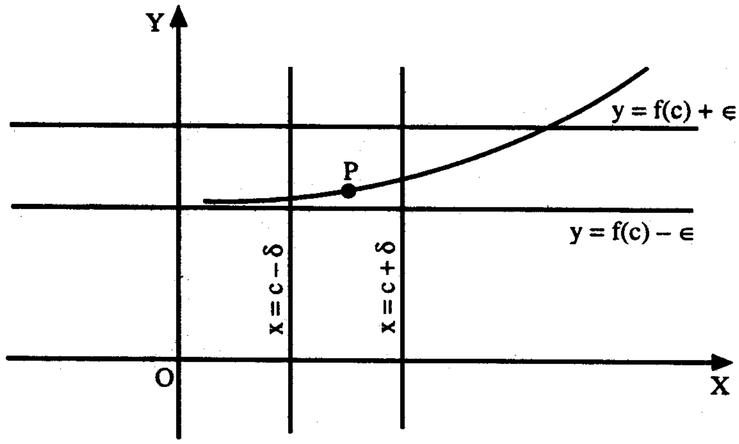




(18) $y = \sin\frac{1}{x}$



(19) সংজ্ঞাঞ্চলের অন্তর্ভুক্ত c বিন্দুতে সন্তত অপেক্ষকের লেখচিত্র :



4.21 সারসংক্ষেপ

কলনবিদ্যার ও গাণিতিক বিশ্লেষণ তত্ত্বের অন্যতম মূল স্তম্ভ হ'ল অপেক্ষকের সীমা ও সন্ততি। এই অধ্যায়ে সেই বিষয়গুলি আলোচনা করা হয়েছে এবং সন্তত অপেক্ষকের যে ধর্মগুলির সাহায্যে অপেক্ষকের প্রকৃতি নির্ধারণ করা যায় সেগুলি ব্যাখ্যার চেষ্টা করা হয়েছে।

একক 5 ❐ অন্তরকলজ ও অন্তরকল (Derivative and differential)

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা

অন্তরকলজের ধারণার মূলে রয়েছে দুটি সুপ্রাচীন গাণিতিক সমস্যা—একটি হল কোন বক্ররেখার

উপরিস্থ কোন বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন এবং অপরটি হল অসম গতিবেগ সম্পন্ন বস্তুকণার গতির হার নির্ণয়। প্রাচীন কাল থেকেই গণিতজ্ঞরা এই দুই সমস্যা ছাড়াও কোন বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের মত মৌলিক সমস্যা নিরসনে ব্রতী হয়েছিলেন। এ ব্যাপারে দুই বিশিষ্ট গণিতজ্ঞ আই নিউটন (১৬৪৩-১৭২৪) এবং ডি ডব্লু লাইবনিৎস (১৬৪৬-১৭১৬) (বা লিবনিজ) অপেক্ষকের অন্তরকলন ও সমাকলনের গুরুত্বপূর্ণ ধারণা এনেছিলেন। তবে এই তত্ত্বের বিকাশে আর এক গণিতজ্ঞ এ কশির নাম-ও বিশেষ উল্লেখের দাবি রাখে।

5.2 অন্তরকলজের সংজ্ঞা

মনে করি $f : s \to R$ প্রদত্ত অপেক্ষক যেখানে $S \subset R$। মনে করি c, S-এর অন্তর্বিন্দু। আমরা $h \neq 0$ এমন মান নিলাম যার জন্য $c + h$ বা $c - h$ ঐ S-এর মধ্যে থাকবে। ফলে স্বাধীন চলরাশির h-মান পরিবর্তনের জন্য অপেক্ষকের মান পরিবর্তিত হয় $[f(c + h) - f(c)]$ বা $[f(c - h) - f(c)]$। আমরা এই পরিবর্তনকে $f(x) - f(c)$ হিসাবে চিহ্নিত করতে পারি।

$\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ কে বলা হবে অপেক্ষকের মানের পরিবর্তনের গড় হার। যদি $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$-এর সসীম, সুনির্দিষ্ট মান থাকে তবে ঐ সীমাকে f-এর c বিন্দুতে অন্তরকলজ বলা হবে।

$Rf'(c) = \lim\limits_{x\to c+}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$, যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে,

$Lf'(c) = \lim\limits_{x\to c+}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$, যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে।

যেহেতু c, সংজ্ঞার অঞ্চল S-এর অন্তর্বিন্দু, ফলে $f'(c)$এর অস্তিত্ব থাকবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $Rf'(c) = Lf'(c)$ হয়।

যদি f-এর সংজ্ঞার অঞ্চল বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ হয়, সেক্ষেত্রে

(i) যদি $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$-এর সসীম, সুনির্দিষ্ট মান থাকে, তবে $f'(a) = \lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

(ii) যদি $\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$-এর সসীম, সুনির্দিষ্ট মান থাকে, তবে $f'(b) = \lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$

(iii) যদি $a < c < b$ হয়, তবে $f'(c)$-এর অস্তিত্ব থাকবে যদি $Rf'(c) = Lf'(c)$ হয়।

উদাহরণ : $f(x) = \begin{cases} x, 0 \le x < 1 \\ 2 - x, 1 \le x \le 2 \\ -2 + 3x - x^2, x > 2 \end{cases}$

$x = 1$ ও $x = f$ বিন্দুদ্বয়ে f'-এর অস্তিত্ব পরীক্ষা কর।

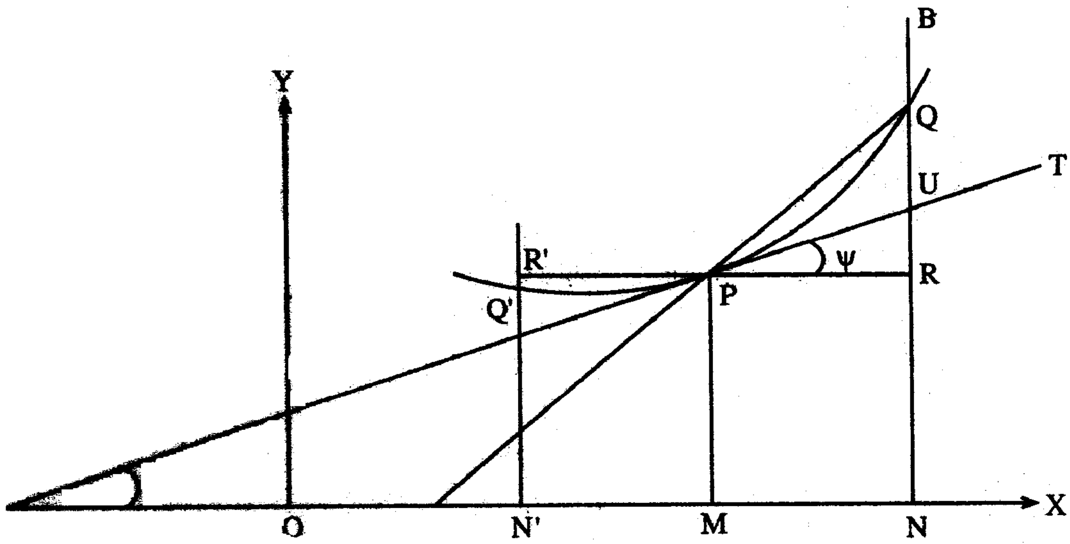
$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{x-1}{x-1}=1\quad\therefore\ Lf'(1)=1\quad Lf'(1)\neq Rf'(1)$ অতএব $x=1$

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{2-x-1}{x-1}=-1\ \therefore\ Rf'(1)=-1$ বিন্দুতে f'-এর অস্তিত্ব নেই

$\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{2-x-0}{x-2}=-1\ \therefore\ Lf'(2)=-1$

$\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{-2+3x-x^2-0}{x-2}=\lim\limits_{x\to2+}(1-x)=-1\ \therefore\ Rf'(2)=1$

সুতরাং $Lf'(2)=Rf'(2)=-1$ অতএব $f'(2)$-এর অস্তিত্ব আছে।



5.3 অন্তরকলজের জ্যামিতিক তাৎপর্য

P বিন্দুটি f(x) সংজ্ঞার অঞ্চলে একটি বিন্দু, P (c, f(c))

$OM = c,\ ON = OM + MN = c + h,\ PM = f(c),\ QN = f(c + h)$

$\therefore\ QR = QN - NR = QN - PM = f(c + h) - f(c)$

এখন, $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}=\dfrac{QR}{MN}=\dfrac{QR}{PR}=\tan\angle QPR=PQ$-এর প্রবণতা।

$h \to 0+$ অর্থাৎ, বক্ররেখা বরাবর $Q \to P$ হলে, জ্যা PQ-এর অন্তিম অবস্থান হল P বিন্দুতে

স্পর্শক PT, এবং $\tan \angle QPR \to \tan \psi$ যেখানে ψ হল স্পর্শক PT, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গো যে কোণে নত।

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{Q\to P} \tan\angle QPR = \tan\angle TPR = \tan\psi$$

যদি, $h < 0$ হয় যেহেতু অন্তরকলজ আছে অতএব (চিত্র থেকে)

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \frac{-Q'R'}{-N'M} = \tan\angle Q'PR'$$

$\therefore \ h \to 0-$, অর্থাৎ $\theta' \to P$

অর্থাৎ θ' যখন রেখা বরাবর P-এর দিকে যায়,

তখন, $\lim_{h\to 0-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \tan\psi$ হবে।

অতএব একটি বিন্দুতে $y = f(x)$-এর অন্তরকলজ থাকলে ঐ বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সঙ্গো যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহার tangent হল $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$.

5.4 সংজ্ঞার সাহায্যে কিছু অপেক্ষক-এর অন্তরকলজ নির্ণয়

1. $f(x) = x^n$

সমাধান : (i) ধরুন, n-একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-x)\left\{(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}.x+\ldots+x^{n-1}\right\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}.x+\ldots+x^{n-1}\right\} \ (\because h \neq 0)$$

$$= nx^{n-1}$$

(ii) ধরুন n-একটি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এখানে, $x \neq 0$ কারণ, $n < 0$ তে, x^n অসংজ্ঞাত।

ধরুন, $n = -m$, যেখানে, $m > 0$

$$\therefore \ \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{-m} - x^{-m}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^m - (x+h)^m}{hx^m(x+h)^m}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^m - x^m}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{x^m(x+h)^m}$$

$$= -m.x^{m-1}.\frac{1}{x^m.x^m} = -m.x^{-m-1} = nx^{n-1}$$

যখন n-ভগ্নাংশ, $n = \frac{p}{q}, q \neq 0$ এবং ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, p পূর্ণসংখ্যা।

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{h}$$

[যেখানে, $(x+h)^{\frac{1}{q}} = z + k \text{ and } z = x^{\frac{1}{q}}$

এখন, $h \to 0$ হলে $k \to 0$]

$$= \lim_{k\to 0}\frac{\left\{(z+k)^{p-zp}\right\}/k}{\left\{(z+k)^{q-zq}\right\}/k}$$

$$= \frac{p.z^{p-1}}{q.z^{q-1}} = n.z^{p-q}$$

$$= n.x^{\frac{p}{q}-1} = n.x^{n-1}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}x^n = n.x^{n-1}$$

অতএব সবক্ষেত্রেই $\frac{d}{dx}x^n = n.x^{n-1}$.

2. f(x) = logc x (x > 0)

সমাধান : $\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(x+h) - \log_e x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)}{x.\frac{h}{x}}$ $\left[\text{যেহেতু} \lim_{\frac{h}{x}\to 0}\frac{\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = 1\right]$

$$= \frac{1}{x}\left(\because h \to 0 \Rightarrow \frac{h}{x} \to 0\right).$$

3. $f(x) = e^x$

সমাধান : $\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x.\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = e^x$ $\left(\text{যেহেতু} \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1\right)$

4. $f(x) = \sin x \ (x \in R)$

সমাধান : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2.\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x\left(\text{যেহেতু }\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1\right)$$

5. $f(x) = \cos x \ (x \in R)$

সমাধান : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$

$$=-\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$= -\sin x.$

6. $f(x) = a^x \ (a > 0)$

সমাধান : $\dfrac{d}{dx}e^x\log_e a=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{(x+h)}\log_e a-e^x\log_e a}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\log_e a\left(e^h\log_e a-1\right)\times\log_e a}{h\log_e a}$$

$$=a^x.\log_e a.\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h\log_e a-1}{h}\right)=a^x.\log_e a.$$

7. $f(x)=\tan x, x\in R-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}:n\in z\right\}$

সমাধান : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\tan(x+h)-\tan x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h.\cos x.\cos(x+h)}$

$$=\frac{1}{\cos x}.\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)}$$

$= \sec^2 x.$

8. $f(x)=\cot x, x\in R-\{n\pi, n\in z\}$

সমাধান : $\dfrac{d}{dx}f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cot(x+h)-\cot x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(-h)}{h.\sin x.\sin(x+h)}$

$$= -\frac{1}{\sin x}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin(x+h)}\right\} = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

9. $f(x) - \sec x, x \in R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in z\right\}$

সমাধান : $\frac{d}{dx}\sec x = \lim_{h\to 0}\frac{\sec(x+h) - \sec x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}.\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h.\cos x.\cos(x+h)}$

$= \sec\ x.\ \tan\ x.$

10. $f(x) = \operatorname{cosec} x, x \in R - \{n\pi, n \in z\}$

সমাধান : $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{cosec}(x+h) - \operatorname{cosec} x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{h.\sin x.\sin(x+h)}$

$= -\ \operatorname{cosec}\ x\ \cot\ x.$

5.5 ব্যাপক ব্যবহৃত কিছু অপেক্ষক-এর অন্তরকলজের মান

$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

$\frac{d}{dx}e^x = e^x$

$\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}(x > 0)$

$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_e a(x > 0)$

$\frac{d}{dx}a^x = a^x \log_e a, x \in (-\infty, \infty), a > 0$

$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, x \in R$

$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, x \in R$

$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x, x \in R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in z\right\}$

$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}(|x| > 1)$

$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}^{-1} x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}(|x| > 1)$

$\frac{d}{dx}\sin hx = \cos hx, x \in R$

$\frac{d}{dx}\cos hx = \sin hx, x \in R$

$\frac{d}{dx}\tan hx = \sec h^2 x, x \in R$

$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} hx = -\operatorname{cosec} hx.\cot hx, x \in R$

$\frac{d}{dx}\sec hx = -\sec hx.\tan hx, x \in R$

$\frac{d}{dx}\cot hx = -\operatorname{cosec} h^2 x, x \in R$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x, x \in R - \{n\pi : n \in z\}$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x, x \in R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in z\right\}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x, x \in R - \{n\pi : n \in z\}$$

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (|x| < 1)$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (|x| < 1)$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1} x = -\frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty$$

5.6 অন্তরকলজের অস্তিত্ব এবং অপেক্ষকের সন্ততি (Continuity-এর মধ্যে সম্পর্ক

উপপাদ্য : যদি, $y = f(x)$ অপেক্ষক এর $x = a$ বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকে তবে $f(x)$, $x = a$ বিন্দুতে সন্তত। কিন্তু বিপরীত বিবৃতিটি সত্য নয়।

অন্তরকলজের অস্তিত্ব $\Rightarrow$ অপেক্ষকের সন্ততি কিন্তু অন্তরকলজের $\Rightarrow$ অস্তিত্ব,

প্রমাণ : ধরা যাক, $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষক-এর অন্তরকলজের অস্তিত্ব আছে অর্থাৎ,

$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$-এর একটি নির্দিষ্ট মান আছে,

এখন, $\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\} = \lim_{h\to 0}\left[\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right\}\times h\right]$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times \lim_{h\to 0} h$$

$$= f'(a) \times 0 = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

$\therefore$ f(x) অপেক্ষকটি x = a তে সন্তত।

এবার ধরা যাক্, $f(x) = |x|$

এখন, $|f(x) - f(0)| = ||x| - 0| = |x|$

পূর্বনির্দিষ্ট যেকোন $\in > 0$, যত ছোট হোক না কেন, একটি $\delta > 0$ (এখানে $\delta < \in$) পাওয়া যাবে যাতে, $|f(x) - f(0)| < \in$ যখন $|x| < \delta$

$\therefore$ f(x) অপেক্ষকটি x = 0 তে সন্তত।

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

$\lim_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} = -1$ (কারণ, $h \to 0-$, $h < 0$, $\therefore |h| = -h$)

এবং $\lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} = 1$

$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ এর অস্তিত্ব নেই।

$\therefore$ f(x) এর x = 0 তে অন্তরকলজ নেই।

[**মন্তব্য :** এখান থেকে পরিষ্কার যদি x = c তে f(x) অসন্তত হয় তাহলে $f'(c)$ এর অস্তিত্ব থাকবে না।]

5.7 অন্তরকলজের বীজগাণিতিক ধর্ম

যদি f(x) এবং g(x)-এর অন্তরকলজ থাকে তবে,

(i) $\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$

(ii) $\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$

(iii) $\frac{d}{dx}\{f(x).g(x)\} = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x).\frac{d}{dx}f(x)$

(iv) $\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{\{g(x)\}^2}$, এখানে $g(x) \neq 0$.

প্রমাণ : (i) $\lim_{h\to 0} \frac{\{f(x+h) + g(x+h)\} - \{f(x) + g(x)\}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$ (যেহেতু অন্তরকলজের অস্তিত্ব আছে)

$$= \frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

সুতরাং $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}$-এর অস্তিত্ব আছে।

(ii) $\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-g(x+h)\}-\{f(x)-g(x)\}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

সুতরাং $\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}$-এর অস্তিত্ব আছে।

(iii) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\{g(x+h)-g(x)\}+g(x)\{f(x+h)-f(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(x+h).\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}+\lim_{h\to 0}g(x).\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}$$

$$= f(x).\frac{d}{dx}g(x)+g(x).\frac{d}{dx}f(x)$$

অতএব $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}$-এর অস্তিত্ব আছে।

(iv) যেহেতু $g'(x)$-এর অস্তিত্ব আছে, অতএব $g(x)$ সন্তত।

আবার, $g(x) \neq 0$. $\therefore$ x-এর একটি সামীপ্য পাওয়া যাবে যেখানে, অপেক্ষকটি অশূন্য হবে।

$$\lim_{h\to0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{g(x)\{f(x+h)-f(x)\}-f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h.\,g(x+h).\,g(x)}$$

$$= \frac{1}{g(x)}\lim_{h\to0}\frac{1}{g(x+h)}\left[\lim_{h\to0}\frac{g(x)\{f(x+h)-f(x)\}}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\right]$$

$$= \frac{1}{\{g(x)^2\}}\left[g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x).\frac{d}{dx}g(x)\right]$$

অতএব $\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$-এর অস্তিত্ব আছে।

5.8 কিছু বিশেষ অপেক্ষক-এর অন্তরকলজ নির্ণয়ের পদ্ধতি

5.8.1 'অপেক্ষকের অপেক্ষক'-এর অন্তরকলজ নির্ণয় (Differentiation of a function of function) :

উপপাদ্য : চেইন রুল (Chain rule) :

ধরুন, $u = \phi(x)$, $y = f(u)$ দুটি অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক।

অপেক্ষক ϕ-এর বিস্তাঞ্চল অপেক্ষক f-এর সংজ্ঞাঞ্চলের সাব্‌সেট্। তাহলে সংযোজক অপেক্ষক $f\{\phi(x)\}$ অন্তরকলনযোগ্য এবং $\frac{d}{dx}f\{\phi(x)\}=\frac{d}{d\phi(x)}f\{\phi(x)\}.\frac{d}{dx}\phi(x)$

প্রমাণ : মনে করি x-এর Δx পরিবর্তন-এর জন্য u-এর পরিবর্তন হল Δu. আবার, এই Δu পরিবর্তনের জন্য y-এর পরিবর্তন হয় ধরি Δy.

$u + \Delta u = \phi(x + \Delta x)$ এবং $y + \Delta y = f(u + \Delta u)$

$\because$ ϕ এবং f অন্তরকলন যোগ্য, ϕ এবং f সন্তত।

$\therefore$ যখন $\Delta x \to 0$ তখন $\Delta u \to 0$ আবার, একই যুক্তিতে $\Delta u \to 0$ হলে $\Delta y \to 0$

[এখানে, $\phi'(x) \neq 0$ ধরে, ফলে $\Delta u \neq 0$ ধরে প্রমাণ করা হচ্ছে।]

এখন, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}$

উভয়পক্ষ $\Delta x \to 0$ নিলে,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad \begin{bmatrix}\because \Delta x\to 0\Rightarrow \Delta u\to 0\\ \Delta u\to 0\Rightarrow \Delta y\to 0\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

মন্তব্য : যদি y, x-এর অপেক্ষক হয় এবং x-কে y-এর অপেক্ষক রূপে দেখা যায় এবং $\frac{dy}{dx}\neq 0$ হয় তবে,

$$\frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dy}=1$$

উদাহরণ : 1. $u = \sin x$, $y = e^u$; $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\frac{du}{dx}=\cos x, \frac{dy}{du}=e^u$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=e^u.\cos x=\cos x.e^{\sin x}$$

উদাহরণ : 2. $y = \sin^{-1} x$ যেখানে, $|x|\leq 1, \frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $y = \sin^{-1} x$ বা, $x = \sin y$

$$\therefore\ \frac{dx}{dy}=\cos y$$

দেখান, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ যখন, $|x| < 1$.

উদাহরণ : 3. $y = \tan^{-1} x$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

সমাধান : $y = \tan^{-1} x \quad \therefore\ x=\tan y, \frac{dx}{dy}=\sec^2 y$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

5.8.2 প্রাচলিক অপেক্ষক-এর অন্তরকলন :

মনে করি $x = \phi(t)$ এবং $y = \psi(t)$, যেখানে t একটি প্রচল (Parameter) যার অঞ্চল $t_1 \leq t \leq t_1$. $\phi(t)$ এবং $\psi(t)$-এর t-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ আছে। এখানে, $y = \psi(t)$ এবং $x = \phi(t)$-এর মধ্যে t অপনয়ন করলে x এবং y এর মধ্যে একটি সম্পর্ক পাওয়া যাবে।

এক্ষেত্রে, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\frac{d\psi}{dt}}{\frac{d\phi}{dt}}$

উদাহরণ : $x = at^2$, $y = 2at$ যেখানে, t একটি প্রচল। $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\frac{d}{dt}(2at)}{\frac{d}{dt}(2at^2)} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}.$

5.8.3 লগারিদিমিক অন্তরকলজ (Logarithmic differentiation) :

যদি কোন অপেক্ষকের ঘাত আর একটি অপেক্ষক হয় অথবা কোন অপেক্ষক অন্য কিছু অপেক্ষক-এর গুণফল আকারে থাকে তাহলে, অন্তরকলজ নির্ণয় করার আগে অপেক্ষকটির লগারিদম্ নেওয়া হয় এবং তারপর সেটির অন্তরকলন করা হয়।

উদাহরণ : $y = e^{e^x}$

সমাধান : $y = e^{e^x} \quad \therefore \ \log_e y = e^x \log_e e = e^x$

$\therefore \ \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = e^x \qquad \therefore \ \dfrac{dy}{dx} = e^{e^x}.e^x.$

5.8.4 অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষক-এর অন্তরকলজ :

$f(x, y) = 0$ সমীকরণকে সমাধান করে যদি $y = \phi(x)$ বা $x = \psi(y)$ আকারে অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অস্তিত্ব পাওয়া যায়, সেক্ষেত্রে এই ধরনের অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ণয়ের পদ্ধতি নিম্নরূপ:

$f(x, y) = 0$ সমীকরণের প্রতিটি পদকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করতে হবে। এক্ষেত্রে y-কে x-এর অপেক্ষক ধরা হবে।

উদাহরণ : $x^3 + y^3 = 3axy$ হলে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^3 + y^3 = 3axy$ উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3a\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$$

$\because \ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ay - x^2}{y^2 - ax}$, যেখানে $y^2 - ax \neq 0.$

5.9 অন্তরকলজের চিহ্ন (Sign) সংক্রান্ত আলোচনা

$f(x)$ অপেক্ষক এর $x = c$ তে অন্তরকলজ থাকলে অবশ্যই $f'(c)$ এর একটি সুনির্দিষ্ট মান পাওয়া যাবে। এই $f'(c)$-এর মান 0 বা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে। যদি $f'(c) = 0$ হয় তবে নিচের এই সম্ভাবনাগুলি থাকে। $f'(c) = 0$ যদি (i) c-এর সামীপ্যে অপেক্ষকটি ধ্রুবক অথবা (ii) $f(x)$ অপেক্ষক এর অনুষঙ্গী লেখচিত্রের c বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সমান্তরাল।

$\therefore$ $f'(c) = 0$ হলে c বিন্দুর সামীপ্যে $f(x)$ এর নির্দিষ্ট কোন গঠন বলা সম্ভব নয়। এক্ষেত্রে c বিন্দুটিকে স্টেশনারী (stationary) বিন্দু বলা হবে। কিন্তু, $f'(c) > 0$ বা < 0 হলে c-এর সামীপ্যে $f(x)$ এর গঠন জানা যায়।

ধর্ম : যদি, $f'(c)$ এর অস্তিত্ব থাকে এবং $f'(c) > 0$ হয় তখন c বিন্দুর একটি সামীপ্য পাওয়া যাবে যেখানে, $f(x)$ ক্রমবর্ধমান হবে। যদি $f'(c) < 0$ হয় তখন c বিন্দুর একটি সামীপ্য পাওয়া যাবে যেখানে $f(x)$ ক্রমক্ষীয়মান হবে।

প্রমাণ : $f'(c)$ বিদ্যামান।

ধরি, $0 < \in < |f'(c)|$, এই $\in$-এর অনুষঙ্গী $\delta > 0$ পাওয়া যাবে যাহার ক্ষেত্রে

$$\left|\frac{f(c+h)-f(c)}{h} - f'(c)\right| < \in \text{ যখন, } 0 < |h| < \delta$$

$$f'(c) - \in < \frac{f(c+h)-f(c)}{h} < f'(c) + \in \text{ ......(1)}$$

যখন $0 < |h| < \delta$ বা, $-\delta < h < \delta$, $h \neq 0$

$f'(c) > 0$ হলে $0 < \in < f'(c)$

$\because$ $f'(c) - \in > 0$ এবং $f'(c) + \in > 0$

$$(1) \Rightarrow \frac{f(c+h)-f(c)}{h} 0 \text{ যখন } -\delta < h < \delta,\ h \neq 0$$

এখন, $-\delta < h < 0$ হলে, $f(c + h) - f(c) < 0$ বা, $f(c + h) < f(c)$

এবং $0 < h < \delta$ হলে, $f(c + h) - f(c) > 0$ বা, $f(c + h) > f(c)$

$\therefore$ $f(x)$ অপেক্ষক $(c - \delta, c + \delta)$, তে c-সামীপ্যে ক্রমবর্ধমান,

আবার, $f'(c) < 0$ হলে $0 < \in < - f'(c)$

$\therefore$ $f'(c) + \in < 0$ এবং $f'(c) - \in < 0$

$$\therefore \text{ (1) হতে, } \frac{f(c+h)-f(c)}{h} < 0 \text{ যখন, } -\delta < h < \delta,\ h \neq 0$$

$\therefore$ $-\delta < h < 0$ হলে, $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} < 0$ বা, $f(c+h) - f(c) > 0$ বা, $f(c + h) > f(c)$

এবং $0 < h < \delta$ হলে, $f(c + h) - f(c) < 0$ বা, $f(c + h) < f(c)$.

$\therefore$ $f(x)$ অপেক্ষক c-সামীপ্যে, $(c - \delta, c + \delta)$-তে ক্রমক্ষীয়মান।

উদাহরণ : $f(x) = x^2$ অপেক্ষকটি অন্তরকলজের দ্বারা কোথায় ক্রমবর্ধমান বা ক্রমক্ষীয়মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $f(x) = x^2$ $\therefore$ $f'(x) = 2x$

$x > 0$ তে অপেক্ষকটি ক্রমবর্ধমান, যেহেতু $f'(x) > 0$ যখন $x > 0$

$x < 0$ তে অপেক্ষকটি ক্রমক্ষীয়মান, যেহেতু $f'(x) < 0$ যখন $x < 0$

5.10 অন্তরকলজ এর উদাহরণ, অনুশীলনী ও উত্তরমালা

5.10.1 উদাহরণ

(1) $y = \frac{(1-x)^4}{(1+x)^5}$ এর 'x' সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

সমাধান : $y = \frac{(1-x)^4}{(1+x)^5}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{(1-x)^4}{(1+x)^5}\right\} = \frac{(1+x)^5 \frac{d}{dx}(1-x)^4 - (1-x)^4 \frac{d}{dx}(1+x)^5}{\left\{(1+x)^5\right\}^2}$$

$$= \frac{(1+x)^5.4(1-x)^3.(-1) - (1-x)^4.5(1+x)^4}{\left\{(1+x)^5\right\}^2}$$

$$= \frac{(1-x)^3(1+x)^4(x-9)}{(1+x)^{10}}$$

(2) $y = \sqrt{[(1+x)/(1-x)]}$ এর x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করি $y = \sqrt{u}$ যেখানে, $u = \frac{1+x}{1-x}$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(1-x).1 - (1+x).(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^2}}$$

(3) $\sin^{-1}x$-এর সাপেক্ষে $e^{\cos^{-1}x}$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

সমাধান : ধরুন, $y = e^{\cos^{-1}x}$ এবং $z = \sin^{-1}x$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dz}{dx}} = \frac{e^{\cos^{-1}x}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{-\frac{e^{\cos^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$= -e^{\cos^{-1}x} = -y$$

$$\therefore \frac{dy}{dz} = -y$$

(4) $f(x) = 1$ যখন, $x < 0$

$= 1 + \sin x$ যখন, $0 \le x < \frac{\pi}{2}$

$= 2 + \left(x - \frac{1}{2}\pi\right)^2$ যখন, $x \ge \frac{\pi}{2}$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ বিদ্যমান কিন্তু $f'(0)$ বিদ্যমান নয়।

সমাধান : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - 2}{h}$

এখন, $\lim\limits_{h\to 0+} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - 2}{h} = \lim\limits_{h\to 0+} \frac{2+h^2-2}{h} = \lim\limits_{h\to 0+} h = 0 \quad (\because h \ne 0)$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - 2}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - 2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-2\sin^2\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \left\{\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 . \frac{-1}{2} . h\right\}$$

$$= 0$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-2}{h}=0$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-1}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{1+\sin h-1}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\sin h}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-1}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{1-1}{h}=0\neq\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-1}{h}$$

$\therefore$ $f'(0)$ বিদ্যমান নয়।

(5) $x^y = y^x$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

সমাধান : $x^y = y^x$ বা, $y \log_e x = x = x \log_e y$

উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাওয়া যায়

$$y\frac{d}{dx}\log_e x+\log_e x\frac{dy}{dx}=x.\frac{d}{dx}\log_e y+\log_e y$$

বা, $\frac{y}{x}=\log_e x.\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+\log_e y$

বা, $\left(\log_e x-\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx}=\log y-\frac{y}{x}$ $\quad\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y(x\log_e y-y)}{x(y\log_e x-x)}$

(6) $f(x) = x\ ;\ 0\le x\le \frac{1}{2}$

$\qquad = 1-x;\ \frac{1}{2}<x\le 1$

দেখাও যে, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$এর অস্তিত্ব নেই, যদিও $f(x), x=\frac{1}{2}$ বিন্দুতে সন্তত।

সমাধান : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}-} x=\frac{1}{2}$

এবং $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}-} (-x) = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\therefore \quad f(x),\ x = \frac{1}{2}$ তে সন্তত।

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right) - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\frac{1}{2}+h-\frac{1}{2}}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right) - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1-\left(\frac{1}{2}+h\right) - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{-h}{h} = -1$$

$\therefore \quad f'\left(\frac{1}{2}\right)$-এর অস্তিত্ব নেই।

5.10.2. অনুশীলনী

(1) সংজ্ঞার সাহায্যে f(x)-এর অন্তরকলজ নির্ণয় কর, যেখানে, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

(2) $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

(a) $y = \tan^{-1}\left(\frac{a}{x}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)$ (b) $y = \log_e\left\{x + \sqrt{x^2+a^2}\right\}$

(c) $y = (xx)^x$, (d) $y = x^{xx}$

(e) $y = x^{xxx}$ (f) $y = (\tan x)\cot_x + (\cot x)\tan_x$

(3) $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

(a) $x = a(2\cos t + \cos 2t),\ y = a(2\sin t - \sin 2t)$

(b) $x = a\left(\cot b + \log_e \tan\frac{1}{2}t\right),\ y = a\sin t$

(4) $\cos^{-1}x^2$ এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$ -এর অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

(5) যদি, $x^y + y^x = a^6$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = \frac{yx^{y-1} + y^x \log y}{x^y \log x + xy^{x-1}}$

(6) যদি, $f(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$ হলে, প্রমাণ করো, $f'(0) = \left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}\left(2\log\frac{a}{b} + \frac{b^2 - a^2}{ab}\right)$

(7) $f(x) = 2 + x, \; x \geq 0$

$\quad\;\; = 2 - x, \; x < 0$

দেখাও যে, f(x), x = 0 তে সন্তত কিন্তু f′(x)-এর অস্তিত্ব নেই।

(8) $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$-এর সাপেক্ষে $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

(9) যদি, $x = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}}$ এবং $y = \cos^{-1}\sqrt{\frac{1}{1+t^2}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx}$ -এর মান t-এর উপর নির্ভরশীল নয়।

5.10.3. উত্তরমালা

1. সংকেত : $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin(x+h)}{x+h} - \dfrac{\sin x}{x}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{-2x\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h(x+h).x} + \frac{\cos x.\sin h}{h(x+h)} - \frac{\sin x}{x(x+h)}\right]$$

$$= \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

2. (a) $\dfrac{a^2}{x^2 + a^2\left(\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)^2}\left\{\dfrac{-1}{A}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{a^2+x^2}\right\}$, (b) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

(c) $x^{(x^2+1)}\log(ex^2)$, (d) $x^{x-1}\{1 + x\log x, \log(ex)\}$, (e) $\dfrac{y^2}{x(1-y\log x)}$

(f) (tan x)cotx {cosec²x (1–log tan x)}+(cot x)tanx {sec²x(log cotx⁻¹)}.

3. (a) $-\tan\frac{1}{2}t$, (b) $\tan t$

4. $-\frac{1}{2}$

8. সংকেত : $x = \tan\theta$ বসান

উত্তর : 1

9. সংকেত : $t = \tan\theta$ ধরুন।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

5.11 একচল অপেক্ষক-এর অন্তরকলন যোগ্যতার ধারণা এবং অন্তরকল সমূহ (Concepts of differentiability of a function of single variable and differentials)

সংজ্ঞা : ধরা যাক অপেক্ষক f(x), [a, b]-তে সংজ্ঞায়িত। $x\in [a, b]$ সামান্য পরিবর্তন Δx-এর জন্য $x + \Delta x \in [a, b]$। অপেক্ষক f(x)-কে x বিন্দুতে অন্তরকলযোগ্য (differentiable) বলা হবে যদি

$$f(x + \Delta x) - f(x) - A.\Delta x + \in\Delta x$$

হয়, যেখানে, A, Δx-এর উপর নির্ভরশীল নয় কিন্তু $\in \to 0$. যখন, $\Delta x \to 0$.

A. Δx-কে বলা হয় f(x) অপেক্ষক-এর x বিন্দুতে অন্তরকল অথবা অবকল (differential) এবং df(x) দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\in.\Delta x$-কে বলা হয় ভ্রম (Error)

f(x) অপেক্ষক x বিন্দুতে অন্তরকলযোগ্য হলে,

$f(x + \Delta x) - f(x) = A.\Delta x + \in.\Delta x$, যেখানে A, Δx-এর উপর নির্ভরশীল নয় কিন্তু $\in\to 0$ যখন $\Delta x \to 0$.

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = A+\in$$

বা, $f'(x) = A, (\because \in\to 0$ যখন, $\Delta x \to 0)$

$\therefore\ f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x).\Delta x + \in\Delta x$

f(x)-এর অন্তরকল, $df(x) = f'(x).\Delta x$

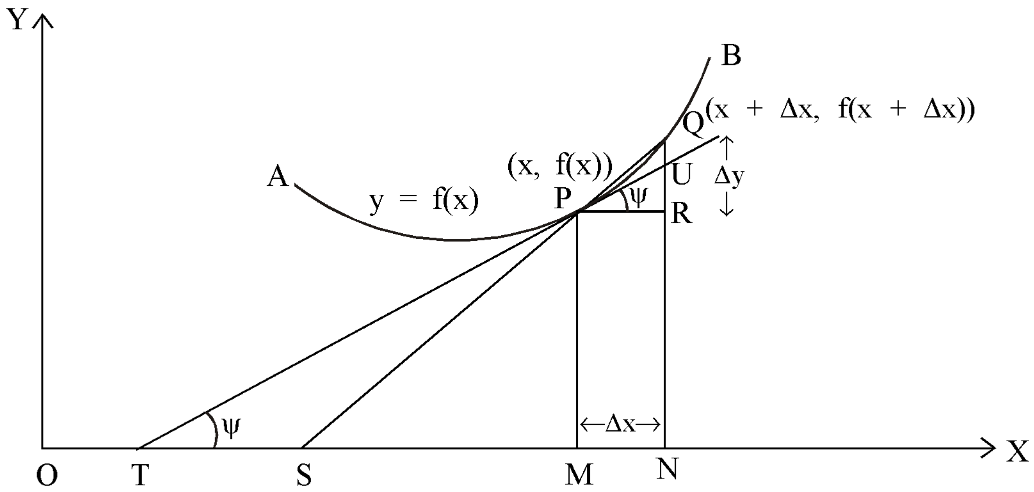
এখন ধরি $f(x) = x$, তাহলে দেখা যাবে, $f'(x) = 1$ এবং $dx = 1.\ \Delta x = \Delta x$

অতএব, স্বাধীন চল x-এর ক্ষেত্রে Δx এবং dx সমান। সাধারণভাবে, $y = f(x)$ হলে

$$dy = df(x) = f'(x).dx = \frac{dy}{dx}.dx$$

$\therefore$ dy এই অন্তরকল হল Δy-এর একটি আসন্ন মান যখন, স্বাধীন চলরাশির পরিবর্তন Δx খুবই সামান্য।

5.12 অপেক্ষক-এর অন্তরকলের জ্যামিতিক তাৎপর্য (Geometrical significance of the differential)



ধরি, OM = x, ON = x + Δx

$\therefore$ PM = f(x), QN = f(x + Δx)

যদি, y = f(x), তবে $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$\therefore$ $f(x + \Delta x) - f(x) = QN - PM = RQ = RU + UQ = PR.\tan\psi + UQ$ $(\because \angle RPU = \psi)$

$$= MN.\tan\psi + \frac{UQ}{PR}.MN \quad (\because PR = MN)$$

$= f'(x).\Delta x + \in\Delta x$ (যেখানে, $\in = \frac{UQ}{PR}$ এবং $f'(x) = \tan\psi$)

যখন, $\Delta x \to 0$ অর্থাৎ, $Q \to P$ তখন $UQ \to 0$ অর্থাৎ $\in \to 0$

$$\therefore\ df(x) = \frac{df(x)}{dx}.dx$$