দেখুন, RQ = $f(x + \Delta x) - f(x)$, $f(x)$-এর পরিবর্তন-এর মান এবং RU, $f(x)$-এর অবকলনে। কখনই, RQ = RU হবে না। কিন্তু খুব ছোট $\Delta x$ পরিবর্তন-এর জন্য $\Delta f$-এর আসন্ন (Approximate) মান হিসাবে df-কে ধরা হয় অর্থাৎ, $RQ \approx RU$.

$\therefore$ x-এর সামান্য মান $\Delta x$ পরিবর্তনের জন্য $f(x)$-এর পরিবর্তিত আসন্ন মান = $\frac{df(x)}{dx}.dx$. (যেখানে, $dx = \Delta x$).

## 5.13 অপেক্ষক-এর আসন্ন মান নির্ণয় ও ত্রুটি (Calculation of approximate value and error)

ধরা যাক, $y = f(x)$ এখানে, x-এর মান যখন $x + \Delta x$, তখন $f(x + \Delta x)$ বা, $y + \Delta y$-এর মান নির্ণয় করতে হবে।

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

সুতরাং, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ এবং $f'(x)$-এর মান সমান নয় এবং এদের অন্তর অত্যন্ত ক্ষুদ্র।

ধরা যাক্, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \in$, যেখানে, $\in \to 0$ যখন $\Delta x \to 0$

$\therefore\ \Delta y = f'(x).\Delta x + \in.\Delta x$

বা, $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x).\Delta x + \in.\Delta x$

বা, $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x).\Delta x + \in.\Delta x$

এখন, $\Delta x$ যদি যথেষ্ট ক্ষুদ্র হয়, তবে $\in$ যথেষ্ট ক্ষুদ্র হবে।

সুতরাং, $\in.\Delta x$ ক্ষুদ্রতর হবে এবং এই ক্ষুদ্র রাশিকে অগ্রাহ্য করলে, $f(x + \Delta x)$ এবং $f(x)+f'(x).\Delta x$-এর মান প্রায় সমান ধরা যেতে পারে।

$\therefore$ x-এর মানের $\Delta x$ বৃদ্ধির জন্য y বা $f(x)$-এর আসন্ন মান $f(x) + f'(x).\Delta x$ বা, $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x).\Delta x$.

আবার $\Delta y$ হল x-এর মান নির্ণয়-এ $\Delta x$ ত্রুটির জন্য y-এর মান নির্ণয়-এ ত্রুটি।

সুতরাং, $\Delta y = f'(x).\Delta x + \in.\Delta x$ সম্পর্কে $\in.\Delta x$ ক্ষুদ্রতর রাশিকে অগ্রাহ্য করলে, y-এর মান নির্ণয়ে ত্রুটি $f'(x).\Delta x + df(x)$.

**অপেক্ষক ত্রুটি ও শতকরা ত্রুটি (Relative error and percentage error) :**

যদি, x-এর মান নির্ণয়ে $\Delta x$ ত্রুটি হয়, তবে $\frac{\Delta x}{x} = \frac{dx}{x}$ কে x-এর মান নির্ণয়-এ আপেক্ষিক ত্রুটি এবং $\frac{\Delta x}{x} \times 100$-কে x-এর মান নির্ণয়-এ শতকরা ত্রুটি বলা হয়।

x-এর $\Delta x$ বা dx ত্রুটির জন্য y-এর মানে ত্রুটি dy।

$\frac{dy}{y}$ এবং $\frac{dy}{y} \times 100$ হইল y-এর মান নির্ণয়-এ যথাক্রমে আপেক্ষিক এবং শতকরা ত্রুটি।

## 5.14 অপেক্ষকের অন্তরকল ও আসন্নমান নির্ণয়-এর উদাহরণ, প্রশ্নাবলী ও উত্তরমালা

### 5.14.1 উদাহরণ

**(1)** $f(x) = x^2 + x + 1$-এর x-এর মান 2 হইতে 1.98-এ পরিবর্তিত হলে f(x)-এর বৃদ্ধি এবং অন্তরকল df(x) নির্ণয় করো।

**সমাধান ঃ** $f(x) = x^2 + x + 1$ ; $f'(x) = 2x + 1$

$f(2) = 7$, এখানে, x-এর বৃদ্ধি $\Delta x = 1.98 - 2 = -0.02$

$f(1.98) = 6.9004$

$\therefore$ f(x)-এর বৃদ্ধি $= f(1.98) - f(2) = 6.9004 - 7 = -0.0996$

$\therefore$ অন্তরকলন, $df(x) = f'(x).\Delta x = 4.96 \times (-0.02) = 0.0992$

**(2)** নিচের অপেক্ষকগুলির অন্তরকল নির্ণয় করো :

(i) $y = \sqrt{2-x}$, (ii) $y = \log(\log x)$

**সমাধান ঃ** (i) $y = \sqrt{2-x}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2-x}} \times (-1) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$

$\therefore dy = \frac{dy}{dx} \times dx = \frac{1}{2\sqrt{2-x}}.dx$

(ii) $y = \log(\log x)$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x}$

$\therefore dy = \frac{dy}{dx} \times dx = \frac{1}{x\log x}.dx$

**(3)** $\sqrt{5.76} = 2.4$ হলে $\sqrt{5.82}$-এর আসন্নমান নির্ণয় করো।

**সমাধান ঃ** ধরা যাক্, $f(x) = \sqrt{x}$, $x + \Delta x = 5.82$ এবং $x = 5.76$

$\therefore$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ এবং $\Delta x = 5.82 - 5.76 = 0.06$

$\therefore$ $f(5.82) = f(5.76) - f'(5.76) \times 0.06 = 2.4 + \left(\frac{1}{4.8} \times 0.06\right)$

$= 2.4125.$

**(4) মান নির্ণয় কর :**

(i) $\log_e 100.2$ (ধরে নাও $\log_e 10 = 2.303$)

(ii) $\log_{10} 100.3$ (ধরে নাও $\log_{10} e = 0.4343$)

**সমাধান** : (i) ধরা যাক্, $f(x) = \log_e x$, $x + \Delta x = 100.2$, $x = 100$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \therefore \Delta x = 0.2$$

$$f(100) = 2 \log_e 10 = 4.606$$

$$\therefore \quad \log_e 100.2 = f(100 + 0.2) = f'(100).\Delta x + f(100)$$

$$= 4.606 + \frac{1}{100} \times 0.2 = 4.608$$

(ii) ধরা যাক, $f(x) = \log_{10} x$, $f'(x) = \frac{1}{x} \times \log_{10} e = \frac{0.4343}{x}$

$x = 100$, $x + \Delta x = 100.3$. $\Delta x = 0.3$

$$f(100) = 2,\ f'(100) = \frac{0.4343}{100} = 0.004343$$

$$\therefore \quad \log_{10} 100.3 = f(100 + 0.3) = f(100) + f'(100).\Delta x$$

$$= \quad 2 + 0.004343 \times 0.3 = 2.0013029.$$

**(5)** $\sin 60^\circ = 0.86603$ হলে $\sin 64^\circ$-এর মান নির্ণয় কর। ($1^\circ = 0.0175$ রেডিয়ান)

**সমাধান** : ধরা যাক্, $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$

$x = 60^\circ$, $x + \Delta x = 64^\circ$, $\Delta x = 4^\circ = 4 \times 0.0175 = 0.07$

$$\sin 64^\circ = f(60^\circ + 4^\circ) = f(60^\circ) + f'(60^\circ) \times \Delta x$$

$$= 0.86603 + \frac{1}{2} \times 0.07$$

$$= 0.90103.$$

**(6)** একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্ধ 7 সেমি। ব্যাসার্ধ পরিমাপে 0.2 মিমি ভ্রান্তি (ত্রুটি) হলে, বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের পরিমাপে কত ভ্রান্তি হবে?

**সমাধান** : ধরা যাক্, বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে A (বর্গ সেমি) ও r সেমি।

$$\therefore A = \pi r^2 \therefore \frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

এক্ষণে যদি r-এর $\Delta R$ বৃদ্ধির জন্য A-র পরিবর্তন $\Delta A$ হয়, তবে $dA = \frac{dA}{dr}.\Delta r$

$r = 7$ সেমি, $\Delta r = 0.2$ মিমি $= .02$ সেমি

$\therefore$ বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল পরিমাপের ভ্রান্তি

$$= dA = \frac{dA}{dr}.\Delta r = 2.\pi.7 \times 0.02$$

= 0.88 বর্গ সেমি।

### 5.14.2 প্রশ্নাবলী ও উত্তরমালা

(1) নিচের অপেক্ষক-এর অন্তরফল নির্ণয় কর :

(i) $y = \log_{10}x$, (ii) $y = e^{2x}$

[ **উত্তর** : (i) $0.4343\dfrac{dx}{x}$, (ii) $2e^{2x}.dx$]

(2) অন্তরকলের মাধ্যমে (i) $\sqrt{83}$ এবং (ii) $\sqrt{6.26}$-এর মান নির্ণয় করো।

[ **উত্তর** : (i) 9.1, (ii) 2.502]

(3) $\log_{10}x = 0.4343\ \log_e x$ এবং $\log_{10}4 = 0.6021$ হলে $\log_{10}404$-এর আসন্নমান নির্ণয় কর।

[ **উত্তর** : 2.606344]

(4) $1^\circ = 0.0175$ রেডিয়ান ও $1' = 0.00029$ রেডিয়ান হলে

(i) $\cos 32^\circ$ এবং (ii) $\tan 45^\circ 58'$–এর আসন্নমান নির্ণয় কর।

[ **উত্তর** : (i) 0.848, (ii) 1.034]

(5) একটি গোলকের ব্যাসার্ধ মাপিয়া দেখা গেল 20 সেমি। ব্যাসার্ধের মাপে ত্রুটি 0.05 সেমি দেখা দিলে গোলকটির তলের ক্ষেত্রফলের ত্রুটি কত হবে নির্ণয় কর।

[ **উত্তর** : 251.3 বর্গ সেমি ]

## 5.15 উচ্চতর ঘাতের উত্তরোত্তর অন্তরকলন

যদি, একটি অপেক্ষক $f(x)$ অন্তরকলনযোগ্য হয়, তবে $f(x)$-এর অন্তরকলজ $f'(x)$ একটি $x$-এর অপেক্ষক। এখন $f'(x) = \phi(x)$ অপেক্ষকটি অন্তরকলনযোগ্য হলে $\phi(x)$-এর অন্তরকলজকে $f(x)$-এর দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ বলা হয় এবং নিচের যেকোন একটি প্রতীক দ্বারা লেখা হয় :

$$f''(x), f^2(x), \frac{d^2}{dx^2}f(x), D^2f(x) \qquad D \equiv \frac{d}{dx}$$

আবার, দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজটি অন্তরকলনযোগ্য হলে তৃতীয় ক্রমের অন্তরকলজ পাওয়া যায়। এইভাবে ধাপে ধাপে এগিয়ে আমরা $n$-তম ক্রমের অন্তরকলজ পাবো যেটি,

$$f''(x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f^{n-1}(x+h) - f^{n-1}(x)}{h}$$

ধর্ম : **1.** $\dfrac{d^n}{dx^n}\{f(x) \pm g(x)\} = \dfrac{d^n}{dx^n}f(x) \pm \dfrac{d^n}{dx^n}g(x)$

**প্রমাণ** : দেখুন, $\dfrac{d}{dx}\{f(x) \pm g(x)\} = \dfrac{d}{dx}f(x) \pm \dfrac{d}{dx}g(x)$

$$\frac{d^2}{dx^2}\{f(x) \pm g(x)\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)\right\} = \frac{d^2}{dx^2}f(x) \pm \frac{d^2}{dx^2}g(x)$$

মনে করি ধর্মটি $n = k$-এর জন্য সত্য।

$$\therefore \quad \frac{d^k}{dx^k}\{f(x) \pm g(x)\} = \frac{d^k}{dx^k} f(x) \pm \frac{d^k}{dx^k} g(x) \ldots (*)$$

* কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\{f(x) \pm g(x)\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d^k}{dx^k} f(x) \pm \frac{d^k}{dx^k} g(x)\right\}$$

$$= \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} f(x) \pm \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} g(x)$$

$\therefore$ উপপাদ্যটি $n = k + 1$-এর জন্য সত্য।

অর্থাৎ, উপপাদ্যটি $n = k$-এর জন্য সত্য হলে $n = k + 1$-এর জন্যও সত্য হবে।

যেহেতু, $n = 1$ সত্য, সুতরাং গাণিতিক আরোহন পদ্ধতিতে উপপাদ্যটি যেকোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার জন্য সত্য।

## 5.16 লাইবনিৎস্-এর উপপাদ্য (Leibnitz's Theorem)

**বিবৃতি** : যদি u এবং v, x-এর অপেক্ষক, উভয়ই n-বার অন্তরকলনযোগ্য হয়, তবে

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = u_n v + n_{c_1} u_{n-1} \cdot v_1 + n_{c_2} u_{n-2} \cdot v_2 + \ldots + n_{c_r} u_{n-r} \cdot v_r + \ldots + uv_n$$

যেখানে, $u_r = \frac{d^r u}{dx^r}$, $v_r = \frac{d^r v}{dx^r}$

**প্রমাণ** : আমরা জানি,

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} = u_1 v + uv_1$$

$\therefore$ উপপাদ্যটি $n = 1$-এর জন্য সত্য।

$n = 2$ ধরলে,

$$\frac{d^2}{dx^2}(uv) = \frac{d}{dx}(vu_1 + uv_1) = \frac{d}{dx}(vu_1) + \frac{d}{dx}(uv_1)$$

$$= vu_2 + v_1 u_1 + uv_2 + u_1 v_1 = vu_2 + 2_{c_1} v_1 u_1 + uv_2$$

$\therefore$ $n = 2$-এর জন্য উপপাদ্য সত্য।

ধরা যাক্, $n = m$-এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য।

$$\therefore \quad \frac{d^m}{dx^m}(uv) = u_m v + m_{c_1} u_{m-1}, v_1 + m_{c_2} u_{m-2} \cdot v_2 + \ldots$$

$$\ldots + m_{c_r} u_{m-r} \cdot v_r + \ldots + uv_m \qquad \ldots (1)$$

x-র সাপেক্ষে (1)-কে অন্তরকলন করে

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(uv) = \frac{d}{dx}(u_m v) + \frac{d}{dx}(m_{c_1} u_{m-1} v_1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{d}{dx}(m_{c_r} u_{m-r} v_r) + \ldots + \frac{d}{dx}(uv_m)$$

$$= (u_{m+1} v + u_m v_1) + m_{c_1}(u_m v_1 + u_{m-1} v_2) + \ldots$$

$$\ldots + m_{c_r}(u_{m-r+1} v_r + u_{m-r} v_{r+1}) + \ldots + (u_1 v_m + u.\, v_{m+1})$$

$$= u_{m+1} v + (1 + m_{c_1}) u_m v_1 + (m_{c_1} + m_{c_2}) u_{m-1} v_2 + \ldots$$

$$\ldots + ({}^m c_{r-1} +{}^m c_r) u_{m-r+1} v_r + \ldots + uv_{m+1}$$

$$= u_{m+1} v +{}^{(m+1)} c_1 u_{(m+1)-1} v_1 +{}^{(m+1)} c_2 u_{(m+1)-2} v_2 + \ldots$$

$$\ldots + {}^{(m+1)} c_r u_{(m+1)-r} . v_r + \ldots + uv_{m+1}$$

(যেহেতু, ${}^m c_r +{}^m c_{r-1} ={}^{(m+1)} c_r, r = 1, 2, \ldots, m$)

$\therefore$ দেখা গেল উপপাদ্যটি $n = m + 1$-এর জন্য সত্য।

যেহেতু, $n = 1$-এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য, সুতরাং গাণিতিক আরোহণ পদ্ধতি প্রয়োগ করে প্রমাণিত হ'ল উপপাদ্যটি যেকোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-এর জন্য সত্য।

### 5.16.1 উদাহরণ

**(1)** $y = x^n$, n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা y-এর m-তম অন্তরকলজ নির্ণয় করো $(m \le n)$।

**সমাধান** : $y = x^n$

$$\therefore \quad y_1 = nx^{n-1} \frac{dy}{dx} = n.\, x^{n-1}$$

$$y_2 = \frac{d}{dx} y_1 = n(n-1)x^{n-2}$$

...........................................

...........................................

ধরা যাক, $y_k = \frac{d^k y}{dx^n} = n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}, k \le x$

$$\therefore \quad y_{k+1} = \frac{d}{dx} y_k = n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)x^{n-k-1}$$

$$\therefore \quad y_m = n(n-1)\ldots(n-m+1)x^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m}$$

**মন্তব্য** : $y_n = n!$, $y_{n+k} = 0$, যেখানে $k \ge 1$.

**(2)** $y = (ax + b)^m$, m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ; $y_m$-নির্ণয় করো।

**সমাধান ঃ** $y_1 = ma(ax + b)^{m-1}$

$y_2 = m(m - 1)a^2 (ax + b)^{m-2}$

.....................................................

.....................................................

$y_k = m(m - 1) \ldots (m - k + 1)a^k (ax + b)^{m-k}, \; k \le m$

$\therefore \; y_m = m_! \, a^m.$

**(3)** $y = e^{ax}$, n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

**সমাধান** : $y_n = a^n e^{ax}$

**(4)** $y = \dfrac{1}{x + a}$, n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

**সমাধান** : প্রমাণ করতে হবে যে, $y_n = (-1)^n . n!/(x + a)^{n+1}$

$$y_1 = -\frac{1}{(x + a)^2} = (-1)^1 . \frac{1}{(x + a)^{1+1}}$$

$$y_2 = (-1)^2 2! . \frac{1}{(x + a)^{2+1}}$$

.....................................................

.....................................................

মনে করি, $y_m = (-1)^m m! . \dfrac{1}{(x + a)^{m+1}}$

$$y_{m+1} = (-1)^m . \frac{m!(-m - 1)}{(x + a)^{m+2}}$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}(m + 1)!}{(x + a)^{m+2}}$$

আরোহ পদ্ধতিতে $y_n$ পাই। $(x > - a)$

**(5)** $y = \log_e (x + a)$ ; n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

**সমাধান** : $y_1 = \dfrac{1}{(x + a)}$ ,

$\therefore$ উদা. (4) থেকে, $y_n = \dfrac{(-1)^{n-1} . (n - 1)!}{(x + a)^n}$ .

**(6)** $y = \sin (ax + b)$, n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

**সমাধান** : $y_1 = a \cos (ax + b) = a \sin \left\{\dfrac{\pi}{2} + ax + b\right\}$

$$y_2 = a^2 \cos\left\{\frac{\pi}{2} + ax + b\right\} = a^2 \sin\left\{\frac{2\pi}{2} + ax + b\right\}$$

..........................................................................

..........................................................................

মনে করি, $y_m = a^m \sin\left(\frac{m\pi}{2} + ax + b\right)$

$$y_{m+1} = a^m . a \cos\left(\frac{m\pi}{2} + ax + b\right)$$

$$= a^{m+1} \sin\left\{\frac{(m+1)\pi}{2} + ax + b\right\}$$

$y_n = a^n \sin\left\{n.\frac{\pi}{2} + ax + b\right\}$ (গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে)

**(7)** $y = \cos(ax + b)$, n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

**সমাধান** : **উদা.** (6)-এর মতো করো,

$$y_n = a^n \cos\left\{\frac{n\pi}{2} + ax + b\right\}$$

**(8)** যদি, $y = \sin(m \sin^{-1} x)$ হয়, তবে প্রমাণ কর,

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0, |x| < 1$$

**সমাধান** : $y = \sin(m \sin^{-1}x)$

$$\therefore\ y_1 = \cos(m \sin^{-1}x).\ \frac{m}{\sqrt{1 - x^2}}$$

বা, $\sqrt{1 - x^2}.\,y_1 = m.\cos(m \sin^{-1} x)$

**আবার**, x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই,

$$\sqrt{1 - x^2}.\,y_2 - \frac{xy_1}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{m^2}{\sqrt{1 - x^2}} \sin(m \sin^{-1} x)$$

বা, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 + m^2 \sin(m \sin^{-1}x) = 0$

বা, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$

এখন, লাইবনিৎসের উপপাদ্য-এর দ্বারা (i)-এর n-তম অন্তরকলজ নিলে

$$\left\{(1 - x^2)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} - n(n - 1)y_n\right\} - \left\{xy_{n+1} + xy_n\right\} + m^2 y_n = 0$$

বা, $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0.$

**(9)** যদি, $y = \tan^{-1} x$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1 + x^2)y_2 + 2xy_1 = 0$

এবং $(1 + x^2)y_{n+2} + (n + 1)xy_{n+1} + n(n + 1)y_n = 0.$

**সমাধান** : $y = \tan^{-1}x$-কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$$y_1 = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{বা, } (1 + x^2)y_1 = 1$$

আবার, x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই,

$$(1 + x^2)y_2 + 2xy_1 = 0 \; ................. \; (i)$$

এখন লাইবনিৎস-এর উৎপাদকের সাহায্যে (i)-এর উভয়পক্ষের n-তম অন্তরকলজ নিলে পাই,

$$\{(1+x^2)y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)y_n\} + 2\{xy_{n+1} + ny_n\} = 0$$

বা, $(1+x^2)y_{n+2} + 2(n+1)xy_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$

**(10)** যদি, $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$, $(x > 0)$, তবে দেখাও যে,

$$x^2y_2 + xy_1 + y = 0 \text{ এবং } x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$$

**সমাধান** : $y = a \cos(\log_e x) + b \sin(\log_e x)$

$\therefore\ y_1 = -\frac{a}{x}\sin(\log_e x) + \frac{b}{x}\cos(\log_e x)$

বা, $xy_1 = -a \sin(\log_e x) + b \cos(\log_e x)$

উভয়পক্ষের x-সাপেক্ষে অন্তরকলন করে,

$$xy_2 + y_1 = -\frac{a}{x}\cos(\log_e x) - \frac{b}{x}\sin(\log_e x)$$

বা, $x^2y_2 + xy_1 = -[a\cos(\log_e x) + b\sin(\log_e x)]$

**বা,** $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

এখন লাইবনিৎসের উপপাদ্যের সাহায্যে n-তম অন্তরকলজ করলে

$$x^2y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)y_n + xy_{n+1} + ny_n + y_n = 0$$

বা, $x^2y_{n+2} + (2n+1)y_{n+1}x + (n^2+1)y_n = 0$

**(11)** $p^2 = a^2 \text{cas}^2\theta + b^2 \sin^2\theta$, হলে দেখাও যে $p + \frac{d^2p}{d\theta^2} = \frac{a^2b^2}{p^3}$

**সমাধান** : $p^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta$

θ–এর সাপেক্ষে উভয়পক্ষ অন্তরকলন করে পাই,

$$p\frac{dp}{d\theta} = (b^2 - a^2)\sin\theta\cos\theta$$

আবার, θ-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই,

$$p\frac{d^2p}{d\theta^2} + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2 = (b^2 - a^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= (b^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta) - p^2$$

$$\therefore \quad p.\frac{d^2p}{d\theta^2} + p^2 = (b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) - \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2$$

$$= (b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) - \frac{(b^2 - a^2)^2\sin^2\theta.\cos^2\theta}{p^2}$$

$$= \frac{a^2b^2}{p^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 = \frac{a^2b^2}{p^2}$$

$$\therefore \frac{d^2p}{d\theta^2} + p = \frac{a^2b^2}{p^3}.$$

**(12)** যদি, $U = \dfrac{Lx + M}{x^2 - 2Bx + C}$ হয়, যেখানে $L, M, B, C \in R$ ;

দেখাও যে,

$$\frac{x^2 - 2Bx - C}{(n+1)(n+2)}U_{n+2} + \frac{2(x - B)}{(n+1)}U_{n+1} + U_n = 0$$

চিহ্নগুলি প্রচলিত অর্থবহ।

**সমাধান** : $(x^2 - 2Bx + c)\ U = Lx + M$

x-এর সাপেক্ষে পরপর দুইবার অন্তরকলন করে পাই,

$$2(x - B)U + (x^2 - 2Bx + C)U_1 = L$$

$$2U + 2(x - B)U_1 + 2(x - B)U_1 + (x^2 - 2Bx + C)U_2 = 0$$

$$(x^2 - 2Bx + C)U_2 + 4(x - B)U_1 + 2U = 0$$

লাইবনিৎস তত্ত্ব প্রয়োগে x-এর সাপেক্ষে অবকলনে পাই,

$$(U_2)_n(x^2 - 2Bx + c) + {}^nc_1.\frac{d}{dx}(x^2 - 2Bx + C)(U_2)_{n-1} + {}^nc_2.\frac{d^2}{dx^2}(x^2 - 2Bx + C)(U_2)_{n-2}$$

$$+4\left[(U_1)_n(x - B) + {}^nc_1.(U_1)_{n-1}.\frac{d}{dx}(x - B)\right] + 2U_n = 0$$

$$(x^2 - 2Bx + C)U_{n+2} + U_{n+1}[2(x - B)n + 4(x - B)] + U_n[n(n-1) + 4n + 2] = 0$$

$$\frac{(x^2 - 2Bx - C)}{(n+1)(n+2)}U_{n+2} + \frac{2(x - B)}{n+1}U_{n+1} + U_n = 0$$

**(13)** যদি $f(x) = \tan x$ হয়, দেখাও যে

$$f^n(0) - {}^nc_2f^{n-2}(0) + {}^nc_4f^{n-4}(0) \ldots. = \sin\frac{n\pi}{2}$$

**সমাধান** ঃ $f(x)\cos x = \sin x$

লাইবনিৎস তত্ত্বের সাহায্যে

$$f^n(x)\cos x + {}^nc_1f^{n-1}(x)(-\sin x) + {}^nc_2f^{n-2}(x)(-\cos x) + {}^nc_3f^{n-3}(x)(\sin x)$$

$$+\ {}^{n}c_4 f^{n-4}(x)(\cos x) + \cdots = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$$

$x = 0$ বসিয়ে $f^n(0) - {}^{n}c_2 f^{n-2}(0) + {}^{n}c_2 f^{n-4}(0) \ldots\ldots = \sin\frac{n\pi}{2}$

**(14)** দেখাও যে $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)$-এর মান $x = 0$ বিন্দুতে 0 হবে যদি n যুগ্ম হয় এবং $-\lfloor n$ হবে যদি n অযুগ্ম হয় এবং 1-এর চেয়ে বড় হয়।

**সমাধান ঃ** $\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right]$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right) = \frac{(-1)^n . n!}{2}\left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right], n \geq 2$$

$x = 0$ বিন্দুতে পাই, $\frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{1^{n+1}} + \frac{1}{(-1)^{n+1}}\right] = \begin{cases} -\lfloor n, & n \text{ অযুগ্ম } (> 1) \\ 0, & n \text{ যুগ্ম} \end{cases}$

**(15)** $y = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, $y_n$ নির্ণয় করো।

**সমাধান ঃ** $y = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$

$x^2 + 1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$

$x = 1 \Rightarrow A = 1,\ x = 2 \Rightarrow B = -5,\ x = 3 \Rightarrow C = 5$

$\therefore \quad y = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}$

অতএব $y_n = \frac{(-1)^n . n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{5}{(x-2)^{n+1}} + \frac{5}{(x-3)^{n+1}}\right]$

**(16)** $y = \frac{1}{x^2+16}$, $y_n$ নির্ণয় কর।

**সমাধান ঃ** $y = \frac{1}{8i}\left[\frac{1}{x-4i} - \frac{1}{x+4i}\right]$

$$y_n = \frac{(-1)^n . n!}{8i}\left[(x-4i)^{-(n+1)} - (x+4i)^{-(n+1)}\right]$$

$x = r\cos\theta,\ 4 = r\sin\theta$

$y_n = \frac{(-1)^n . n!}{8i} . r^{-(n+1)}[\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta - \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta]$

(De Moiver উপপাদ্যের সাহায্যে)

$$= \frac{(-1)^n . n! \sin(n+1)\theta}{4r^{(n+1)}}$$ যেখানে $r = \sqrt{(x^2+16)}, \theta = \tan^{-1}\frac{4}{x}$

## 5.17 প্রশ্নাবলী

(1) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$ হলে দেখাও যে $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

(2) $\sin y = x \sin(a+y)$ হলে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

(3) যদি, $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\text{etc. to } \infty}}}$ হয় তবে, প্রমাণ করো, $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}$

(4) $y = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ হলে $\frac{d^n y}{dx^n}$ নির্ণয় করো।

(5) $\log_{10}e = 0.4343$ হইলে (i) $\log_e 10.1$ ও (ii) $\log_{10}10.1$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

(6) $1° = 0.0175$ রেডিয়ান ও $1' = 0.00029$ রেডিয়ান হলে, (i) $\text{cosec}^2 46°$, (ii) $\cos 32°$. (iii) $\tan 45°58'$-এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

(7) যদি, $y = (\sin^{-1}x)^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2 y_n = 0.$$

(8) যদি, $y = e^{a\sin^{-1}x}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+a^2)y_n = 0$$

(9) $y = x^{n-1}\log_e x$ হলে প্রমাণ কর $y_n = \frac{\underline{|(n-1)}}{x}$

(10) $y = \cos(10\cos^{-1}x)$ হলে দেখাও যে, $(1-x^2)y_{12} = 21xy_{11}$

(11) $y = x\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ হলে প্রমাণ কর, $y_n = (-1)^n(n-2)!\left[\frac{x-n}{(x-1)^n} - \frac{x+n}{(x+1)^n}\right]$

(12) $y = \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}$, $y_n$ নির্ণয় করো।

(13) যদি $\cos^{-1}\frac{y}{b} = \left(\log\frac{x}{n}\right)^n$ হয়, প্রমাণ করো যে,

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + 2n^2 y_n = 0$$

(14) $y = \left[x + \sqrt{1 + x^2}\right]^m$ হলে দেখাও যে $(1 + x^2)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$ এবং এটি থেকে $x = 0$ বিন্দুতে $y_n$ নির্ণয় করো।

## 5.18 সহায়ক গ্রন্থ এবং ব্যবহৃত পারিভাষিক শব্দ

একক 1 থেকে একক 5-এর সহায়ক পুস্তক :

1. Introduction to Real Analysis—Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert (John Wiley & Sons, INC)
2. Real analysis—B. K. Lahiri, K. C. Roy (World Press Pvt. Ltd., Calcutta)
3. Differential Calculus—Shanti Narayana. (Shyamlal Charitable Trust, New-Delhi)
4. Differential Calculus—B. C. Das, B. N. Mukherjee (U. N. Dhur and Sons Pvt. Ltd., Kolkata)
5. A Course of Mathematical Analysis—Shanti Narayan, (S. Chand & Co. Ltd. New Delhi)

ব্যবহৃত শব্দ :

অন্তরকলজ—Derivative

অন্তরকল—Differential

অন্তরকলনযোগ্য—Differentiability

অপেক্ষক—Function

অন্তরাল—Interval

সামীপ্য—Neighbourhood

সন্ততি—Continuity

প্রাচলিক অপেক্ষক—Parametric Function

## 5.19 সারাংশ

অপেক্ষকের অন্তরকলজের ধারণা এই অধ্যায়ের আলোচ্য বিষয়। অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ণয়ের বিবিধ পদ্ধতি এবং উত্তরোত্তর অন্তরকলজের সংজ্ঞা ও তার বীজগণিত এখানে আলোচনা করা হয়েছে।

# একক 6 ❐ রোলের উপপাদ্য, মধ্যমান উপপাদ্যসমূহ ও লপিতার নিয়ম

গঠন ঃ



## 6.1 প্রস্তাবনা

ফরাসী গণিতজ্ঞ মাইকেল রোল (১৬৫২-১৭১৯)-ই প্রথম বহুপদরাশি এবং ঐ বহুপদরাশির অন্তরকলনের মাধ্যমে প্রাপ্ত বহুপদরাশির বীজের মধ্যেকার সম্পর্ক নিয়ে গুরুত্বপূর্ণ তত্ত্ব উপস্থিত করেন। পরে ঐ তত্ত্ব বাস্তবমান বিশিষ্ট একচল বাস্তব চলের অপেক্ষকের ক্ষেত্রেও প্রসারিত হয় এবং অন্তরকলন বিদ্যার ক্ষেত্রে ঐ তত্ত্বের সুদূরপ্রসারী প্রভাব পরিলক্ষিত হয়।

## 6.2 প্রারম্ভিক ধারণাসমূহ

(ক) $f : [a, b] \to R$ অপেক্ষকটি বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$-তে সন্তত হবে যদি

$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a), \lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)$

এবং $a < c < b$ এর ক্ষেত্রে $\lim_{x \to c-0} f(x) = \lim_{x \to c+0} f(x) = f(c)$ হয়

(খ) উক্ত f মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে অন্তরকলনযোগ্য হবে যদি প্রতিটি c, $a < c < b$-এর ক্ষেত্রে $\lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ হয়।

(গ) বন্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরালে সন্তত অপেক্ষক সবসময়েই সীমাবদ্ধ হবে এবং ঐ অন্তরালের দুটি বিন্দুতে অপেক্ষকের মান ঊর্ধ্বসীমা ও অধঃসীমার সমান হবে।

(ঘ) $f : [a, b] \to R$ এবং $a < c < b$।

যদি $f'(c) > 0$ হয়, তবে $\delta > 0$-এর অস্তিত্ব থাকবে

যার জন্য f(x), $(c - \delta, c + \delta)$-এ ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক হবে।

যদি $f'(c) < 0$ হয়, তবে $\eta < 0$-এর অস্তিত্ব থাকবে

যার জন্য f(x), $(c - \eta, c + \eta)$-এ ক্রমহ্রাসমান অপেক্ষক হবে।

## 6.3 রোলের উপপাদ্য

**বিবৃতি :** $f : [a, b] \to R$ এরূপ একটি অপেক্ষক যা

(ক) বন্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল [a, b]-তে সন্তত

(খ) মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে অন্তরকলনযোগ্য

(গ) $f(a) = 0 = f(b)$।

তবে মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে অন্তত একটি বিন্দু c-এর অস্তিত্ব থাকবে যার জন্য $f'(c) = 0$ হবে।

**প্রমাণ :** যেহেতু f, বন্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল [a, b]-তে সন্তত, সুতরাং f, [a, b]-তে সীমাবদ্ধ অপেক্ষক। যদি M, m অন্তরাল [a, b]-তে f-এর ঊর্ধ্বসীমা ও অধঃসীমা হয়, তবে উক্ত অন্তরালে দুটি c, d-এর অস্তিত্ব থাকবে যার জন্য $f(c) = M$, $f(d) = m$ হবে।

মনে করা যাক্ $M = m$

যেহেতু সকল $x \in [a, b]$-এর জন্য $m \le f(x) \le M$, সুতরাং f(x) ধ্রুবক-অপেক্ষক ও $f'(x) = 0$, $a < x < b$.

মনে করা যাক্ $M \ne m$

যেহেতু $f(a) = f(b)$, সুতরাং f(c) ও f(d) উভয়েই f(a) ও f(b)-এর সমান হতে পারে না। মনে করি $f(c) \ne f(a)$, $f(c) \ne f(b)$। অতএব $a < c < b$ এবং ফলে $f'(c)$-এর অস্তিত্ব আছে।

যদি $f'(c) > 0$ হয়, তবে $\delta > 0$-এর অস্তিত্ব থাকবে যার জন্য $f(x) > f(c)$, $c < x < c + \delta$ হবে অর্থাৎ $f(x) > M$ হবে যা অসম্ভব। সুতরাং $f'(c) \not> 0$।

যদি $f'(c) < 0$ হয়, তবে $\eta > 0$-এর অস্তিত্ব থাকবে যার জন্য $f(x) > f(c)$, $c - \eta < x < c$ হবে অর্থাৎ $f(x) > M$ হবে যা অসম্ভব। সুতরাং $f'(c) \not< 0$।

অতএব $f'(c) = 0$ হবে।

**মন্তব্য ঃ** (১) তৃতীয় শর্ত $f(a) = 0 = f(b)$-টি $f(a) = f(b) =$ যেকোন অশূণ্য সংখ্যার ক্ষেত্রেও সত্য। মনে করা যাক্ $f(a) = f(b) = K\ (\in R)$

$\phi : [a, b] \to R$ অপেক্ষকটি গঠন করা হল এইভাবে যে $\phi(x) = f(x) - K$

সুতরাং $\phi$, $[a, b]$ তে সন্তত, $(a, b)$-তে অন্তরকলনযোগ্য এবং $\phi(a) = \phi(b) = 0$। সুতরাং, $c\in(a, b)$-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য $\phi'(c) = 0$ অর্থাৎ $f'(c) = 0$ হবে।

অতএব তৃতীয় শর্তটি $f(a) = f(b)$ গ্রহণযোগ্য।

(২) রোলের উপপাদ্যে বিবৃত শর্তগুলি পর্যাপ্ত কিন্তু আবশ্যিক নয়।

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x},\ 1 < x < 2$$

লক্ষনীয় অপেক্ষকটি $x = 1$ ও $x = 2$ বিন্দুদুটিতে সংজ্ঞাত নয়। তবে $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$। সুতরাং মুক্ত অন্তরাল $(1, 2)$-এর একটি অন্তর্বিন্দুতে $f'(x)$ শূন্য যদিও রোলের শর্তাবলী $f$ পূরণ করছে না।

(৩) রোলের উপপাদ্যের শর্তগুলিকে লঘু করা যায় না।

(ক) $f(x) = |\,x\,|,\ a \le x \le b$

কোন বিন্দুতেই $f'(x)$ শূন্য নয়। এখানে $f(a) = f(b)$ হবে না।

(খ) $f(x) = 1 - |\,x\,|,\ -1 \le x \le +1$

$$= \begin{cases} 1 + x, & -1 \le x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 1 - x, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1,\ \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

সুতরাং $Rf'(0) \ne Lf'(0)$ এবং $x = 0$ বিন্দুতে $f'$-এর অস্তিত্ব নেই। অন্তরালের কোন বিন্দুতেই $f'(x)$ শূন্য নয়।

(৪) রোলের উপপাদ্যের প্রমাণ সূচিত করেছে যে যদি $f$ অপেক্ষককে মুক্ত অন্তরাল $(a, b)$-এর পরিবর্তে বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$-তে অন্তরকলনযোগ্য ধরা হয়, সেক্ষেত্রেও উক্ত $c$-বিন্দুটি অন্তরালের অন্তর্বিন্দুই হবে, প্রান্তবিন্দু হবে না।

(৫) রোলের উপপাদ্যকে নিম্নভাবেও বিবৃত করা যায় :

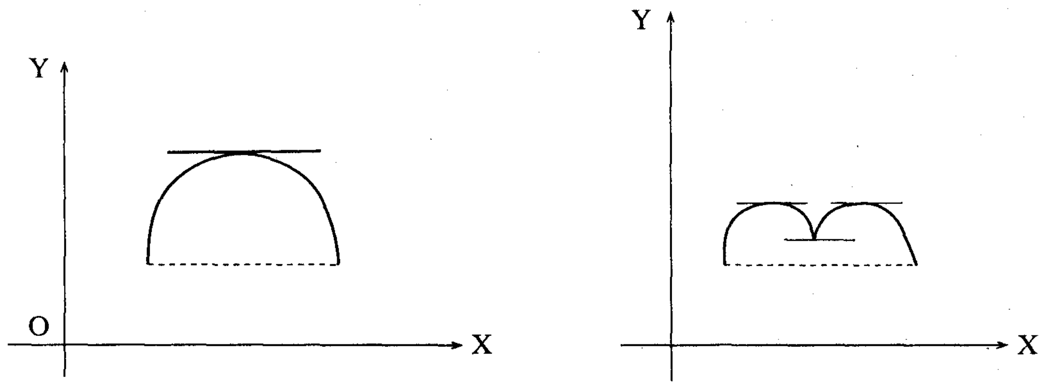
(ক) মুক্ত অন্তরাল $(a, b)$-তে অপেক্ষক $f$ অন্তরকলনযোগ্য

(খ) $a$ ও $b$ বিন্দুতে $f$ সন্তত

(গ) $f(a) = f(b)$ হইলে $(a, b)$-অন্তরালে $f'(x) = 0$-এর একটি বীজ থাকবে।

(৬) মুক্ত অন্তরাল $(a, b)$-তে রোলের উপপাদ্য প্রযুক্ত হবে যদি $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ হয়।

## 6.4 রোলের উপপাদ্যের জ্যামিতিক তাৎপর্য




কোন সন্তত অপেক্ষকের লেখচিত্রের দুটি প্রান্তবিন্দু যদি একই অনুভূমিক রেখায় থাকে এবং ঐ লেখচিত্রের প্রান্তবিন্দুদ্বয় বাদে যদি অপর বিন্দুগুলিতে স্পর্শক অঙ্কন করা যায়, সেক্ষেত্রে লেখচিত্রের উপরে অন্তত একটি বিন্দু থাকবে যে বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সমান্তরাল হবে।

## 6.5 ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য অথবা অন্তরকলনবিদ্যার প্রথম মধ্যমান উপপাদ্য

**প্রস্তাবনা ঃ**

ফরাসী গণিতজ্ঞ যোশেফ লুই ল্যাংরাঞ্জ (১৭৩৬-১৮১৩) এই উপপাদ্যটি উপস্থাপিত করেন। পরবর্তীকালে বাস্তব চলের অপেক্ষক তত্ত্ব ও ফলিত গণিতের বহু শাখায় এর প্রয়োগতত্ত্বের সূচনা হয়।

**বিবৃতি** $f : [a, b] \to R$

(ক) বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল [a, b]-তে সন্তত।

(খ) মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে অন্তরকলনযোগ্য হয়, তবে মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে অন্তত এমন একটি বিন্দু c-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য $f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$ হবে।

**প্রমাণ :** অপেক্ষক $\phi : [a, b] \to R$ গঠন করা হল এরূপভাবে যে

$\phi(x) = f(x) + A.x$ যেখানে $\phi(b) = \phi(a)$ দ্বারা ধ্রুবক A-এর মান নির্ণীত হবে।

অতএব $A = -\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

এখন f(x), A, x প্রত্যেকেই [a, b]-তে সন্তত, সসীম সংখ্যক সন্তত অপেক্ষক সমূহের যোগফল ও গুণফল সন্তত বলে $\phi$ অপেক্ষকটি [a, b]-তে সন্তত।

(a, b) অন্তরালে $f'$-এর অস্তিত্ব আছে বলে ঐ অন্তরালে $\phi'$-এরও অস্তিত্ব আছে। সুতরাং $\phi$ অপেক্ষকটি

[a, b] অন্তরালে রোলের উপপাদ্যর সর্ব শর্ত পূরণ করে। ফলে রোলের উপপাদ্য অনুযায়ী, (a, b)-তে অন্তত এমন একটি বিন্দু c-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য $\phi'(c) = 0$ হবে অর্থাৎ $-A = f'(c)$ হবে।

সুতরাং $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ হবে।

**মন্তব্য :** (১) ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যের শর্তগুলি পর্যাপ্ত, কিন্তু আবশ্যিক নয়।

$f : [0, 3] \to R$ এরূপভাবে সংজ্ঞাত যে

$$f(x) = \begin{cases} 0, \; 0 \le x < \frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2}, \; \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2} \\ \frac{2x}{3} + 1, \; \frac{3}{2} < x \le 3 \end{cases}$$

f অপেক্ষকটি $x = \dfrac{1}{2}$ বিন্দুতে সন্তত নয়, কেননা $f\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 0, \; f\left(\frac{1}{2} + 0\right) = 1$

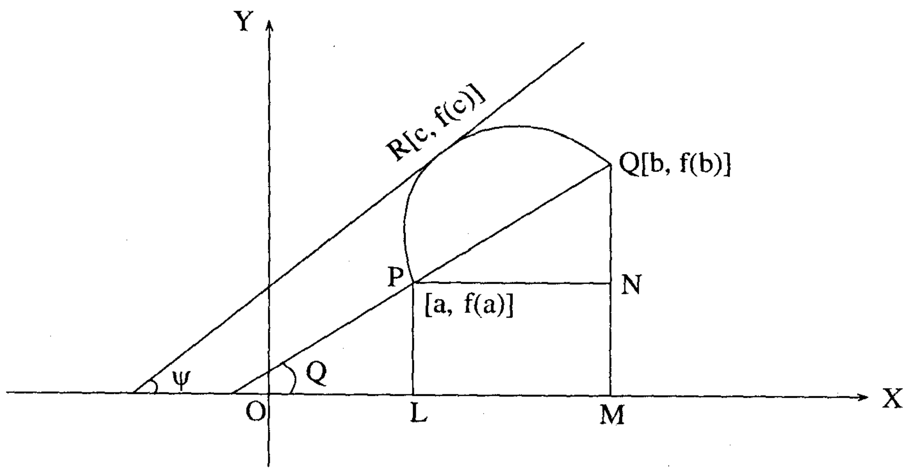
কিন্তু $x = \dfrac{3}{4}$ বিন্দুতে $\dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = f'\left(\dfrac{3}{4}\right)$ হয়।

(২) রোলের উপপাদ্যের ন্যায় এখানেও শর্তগুলিকে লঘু করা যায় না।

(৩) f অপেক্ষকটি বদ্ধ অন্তরাল [a, b]-তে অন্তরকলনযোগ্য হলেও উক্ত c বিন্দুর অবস্থানের কোন বদল হবে না।

(৪) c-এর বিকল্প রূপ : এমন $\theta \in (0, 1)$ থাকবে যার জন্য $c = a + \theta(b - a)$ হবে।

## 6.6 মধ্যমান উপপাদ্যের জ্যামিতিক তাৎপর্য



এখানে $\tan\theta = \dfrac{QN}{PN} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\tan\psi = f'(c) = R$ বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা

সুতরাং $\tan\theta = \tan\psi$

সন্তত অপেক্ষকের লেখচিত্রের প্রান্তবিন্দুদ্বয় ছাড়া অন্য সব বিন্দুতে স্পর্শক আঁকা গেলে ঐ লেখচিত্রের উপর অন্তত একটি বিন্দু থাকবে যে বিন্দুতে স্পর্শকটি প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী জ্যা-এর সমান্তরাল হবে।

## 6.7 কশি-র মধ্যমান উপপাদ্য

**প্রস্তাবনা :** ফরাসী গণিতজ্ঞ অগাস্টিন-লুই কশি (১৭৮৯-১৮৪৭) নিম্ন উপপাদ্যটি উপস্থাপিত করেন। ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যটিকে এটি থেকে নির্ণয় করা যায় এবং সেজন্য কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যকে ল্যাংরাঞ্জের উপপাদ্যের বিস্তৃত আকার হিসাবে গণ্য করা হয়। অপেক্ষকসমূহের বিশেষ আকারের বীজগাণিতিক বিন্যাসের সীমা নির্ধারণের ক্ষেত্রে এই উপপাদ্যের প্রভূত অবদান রয়েছে।

**বিবৃতি** : অপেক্ষকদ্বয় $f, g : [a, b] \to R$

(ক) বন্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$-তে সন্তত

(খ) মুক্ত অন্তরাল $(a, b)$-তে অন্তরকলনযোগ্য

(গ) $g'(x) \neq 0,\ a < x < b$

সেক্ষেত্রে $(a, b)$ অন্তরালে অন্তত একটি বিন্দু $c$ থাকবে

যার জন্য $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ হবে।

**প্রমাণ** : এখানে $g(b) = g(a)$ প্রযোজ্য নয়।

কেননা $g(b) = g(a)$ হলে (ক) ও (খ)-তে অপেক্ষক $g$-এর উপর বিবৃত শর্তাবলীর সাহায্যে দেখানো যায় যে $(a, b)$-তে অন্তত একটি বিন্দু $c$ থাকবে যাতে $g'(c) = 0$ হইবে—ইহা (গ)-এর পরিপন্থী। সুতরাং $g(b) \neq g(a)$.

অপেক্ষক $\phi : [a, b] \to R$ নিম্নভাবে গঠন করা হল :

$$\phi(x) = f(x) + A.g(x)$$

যেখানে $\phi(b) = \phi(a)$ দ্বারা ধ্রুবক $A$-কে নির্ণয় করা যাবে।

শর্ত (ক) অনুযায়ী ও সন্তত অপেক্ষকের বীজগণিত অনুযায়ী $\phi$, $[a, b]$-তে সন্তত হবে। শর্ত (খ) অনুযায়ী, $(a, b)$-তে $\phi'$-এর অস্তিত্ব আছে। ফলে $\phi$, $[a, b]$-তে রোলের সব শর্ত পূরণ করে। সুতরাং রোলের শর্ত অনুযায়ী, $(a, b)$-তে অন্তত একটি বিন্দু $c$ থাকবে যার ক্ষেত্রে $\phi'(c) = 0$ হবে।

$\phi'(c) = 0$ হতে পাই $-A = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

$\phi(b) = \phi(a)$ হতে পাই $-A = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

সুতরাং $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

**মন্তব্য :** (ক) $g(x) = x$, $a \leq x \leq b$, হলে ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য পাওয়া যায়।

(খ) কশির উপপাদ্যটি সরাসরি f ও g-এর উপর ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাওয়া যায় না। $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ অন্তত একটি $c \in (a, b)$-এর জন্য এবং

$g(b) - g(a) = (b - a)\, g'(d)$ অন্তত একটি $d \in (a, b)$-এর জন্য। এখানে $c = d$-এর নিশ্চয়তা নাই।

(গ) কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যের প্রথম দুটি শর্তের ভিত্তিতে নিম্ন ফল পাওয়া যায় :

$$\{f(b) - f(a)\}\, g'(c) = \{g(b) - g(a)\}f'(c)$$

$\phi : [a, b] \to R$ নিম্নভাবে গঠন করা হল :

$$\phi(x) = \{f(b) - f(a)\}\, g(x) - \{f(b) - g(a)\}\, f(x)$$

সেক্ষেত্রে $\phi$, $[a, b]$-তে সন্তত ও $(a, b)$-তে অন্তরকলনযোগ্য হবে। $\phi(b) = \phi(a)$ হবে। ফলে রোলের উপপাদ্য অনুযায়ী $(a, b)$-তে অন্তত একটি বিন্দু c থাকবে যার জন্য $\phi'(c) = 0$ হবে। ফলে

$$\{f(b) - f(a)\}g'(c) - \{g(b) - g(a)\}f'(c) = 0 \text{ হবে।}$$

## 6.8 উদাহরণ

(1) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2$

$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ অন্তরালে রোলের উপপাদ্য প্রযুক্ত হতে পারে কিনা পরীক্ষা কর। যদি ঐ প্রয়োগ সম্ভব হয়, তবে যথাযথ মধ্যবর্তী মান বা মানগুলি নির্ণয় করো।

**উত্তর :** প্রদত্ত অপেক্ষকটি বহুপদরাশি এবং x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য সন্তত। ফলে f, $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$-তে সন্তত হবে $f'(x) = 6x^2 + 2x - 4$-এর অস্তিত্ব $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$-আছে। $f(\sqrt{2}) = 0 = f(-\sqrt{2})$. অতএব ওই অন্তরালে f-এর ক্ষেত্রে রোলের উপপাদ্যটি প্রযুক্ত হবে।

$f'(x) = 0$ থেকে পাই, $x = \dfrac{2}{3}, -1 \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

(2) $f : [0, 2] \to R$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & 0 \leq x < 1 \\ 3 + x, & 1 \leq x < 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$$

রোলের উপপাদ্যের তিনটি শর্ত পূরণ হয় কিনা পৃথক পৃথক ভাবে পরীক্ষা কর।

**উত্তর :** $\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-}(3+x) = 5, f(2) = 5, x = 2$ বিন্দুতে সন্তত।

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-}(x^2+3) = 4,\ \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+}(3+x) = 4$$

$f(1-) = f(1+) = 4 = f(1)$, সন্তত হবে $x = 1$ বিন্দুতে।

f, [0, 1] ও (1, 2)-তে ও সন্তত। সুতরাং f, [0, 2]-তে সন্তত।

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-}\frac{x^2+3-4}{x-1} = \lim_{x\to 1-}(x+1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+}\frac{3+x-4}{x-1} = \lim_{x\to 1+}(x-1)/(x-1) = 1$$

$Lf'(1) \neq Rf'(1)$ অতএব $x = 1$ বিন্দুতে $f'$-এর অস্তিত্ব নেই।

$f(0) = 3, f(2) = 5$, অতএব $f(0) \neq f(2)$

রোলের উপপাদ্যের দ্বিতীয় ও তৃতীয় শর্ত f পূরণ করে না।

(3) দেখাও যে $3x^5 + 15x - 8 = 0$ সমীকরণটির একটি মাত্র বাস্তব বীজ থাকবে।

**উত্তর :** $f(x) = 3x^5 + 15x - 8$ অপেক্ষকটি বহুপদরাশি বলে x-এর সরল বাস্তব মানের জন্য সন্তত। $f(0) = -8, f(1) = 10$ এবং ফলে $f(0)\,f(1) < 0$ হবে। সন্তত অপেক্ষকের ক্ষেত্রে বোলজানো (Bolzano) উপপাদ্য অনুযায়ী (0, 1) মুক্ত অন্তরালে $f(x) = 0$ এর অবশ্যই বাস্তব বীজ থাকবে।

যদি সম্ভব হয়, মনে করি $x_1$ ও $x_2$ উক্ত অন্তরাল (0, 1)-এ $f(x) = 0$-এর দুইটি ভিন্ন বাস্তব বীজ অর্থাৎ $f(x)_1 = 0 = f(x_2)$। রোলের উপপাদ্য অনুযায়ী, $(x_1, x_2)$-এ $f'(x) = 0$ এর অন্তত একটি বাস্তব বীজ থাকবে।

$f'(x) + 15(x^4 + 1)$-কিন্তু x-এর কোন বাস্তব মানের জন্য $f'(x) = 0$ হতে পারে না।
সেকারণে $f(x) = 0$ এর বাস্তব বীজটি অনন্য।

(4) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

রোলের উপপাদ্য প্রয়োগ করে দেখাও, মুক্ত অন্তরাল (0, 1)-এ অসীম সংখ্যক বিন্দুতে $f'(x) = 0$ হবে।

**উত্তর :** প্রদত্ত অপেক্ষকটি সকল $x \geq 0$-এর জন্য সন্তত।

$x > 0$ হলে $f'(x) = \sin\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}$

সুতরাং মুক্ত অন্তরালে (0, 1)-এর প্রতিটি বিন্দুতে $f'$-এর অস্তিত্ব আছে।

$\sin\frac{\pi}{x} = 0$ সম্ভব হবে যদি $x = \frac{1}{k}$ যেখানে k যেকোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

উপরোক্ত আলোচনা অনুসারে k-এর সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যক মানের জন্য $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$-অন্তরালে $f'(x) = 0$ অন্তত একটি মানের জন্যও সন্তত হবে। যেহেতু স্বাভাবিক সংখ্যার সেটটি অসীম সেট, সুতরাং $(0, 1)$-এর অসীম সংখ্যক বিন্দুতে $f'(x) = 0$ হবে।

(5) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2,\ 0 \le x \le 1$

ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যটি প্রযুক্ত হবে কি?

**উত্তর :** f অপেক্ষকটি বহুপদরাশি বলে অন্তরাল $[0, 1]$-এ সন্তত। $f'(x) = 12x^2 - 10x + 1$-এর অস্তিত্ব অন্তরাল $(0, 1)$-এ আছে। অতএব ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যটি ঐ অন্তরালে প্রযোজ্য।

(6) ল্যাংরাঞ্জের উপপাদ্য প্রয়োগ করে $y = x^3$ বক্ররেখার উপর এমন বিন্দু নির্ণয় কর যে বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি ওই বক্ররেখার উপরিস্থ $(-1, -1)$ ও $(2, 8)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী জ্যা-এর সমান্তরাল হবে।

উত্তর : $f(x) = x^3$ অপেক্ষকটি $[-1, 2]$ বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরালে সন্তত এবং $f'(x) = 3x^2$-এর $(-1, 2)$-তে অস্তিত্ব আছে। অতএব ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য অনুযায়ী $(-1, 2)$-তে এমন একটি বিন্দু c-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য $f(2) - f(-1) = 3f'(c)$ হবে।

অর্থাৎ $8 + 1 = 9c^2 \Rightarrow c = \pm 1$

$c = -1$ মুক্ত অন্তরাল $(-1, 2)$-এর অন্তর্বিন্দু নয়, অতএব $c = 1$

ল্যাংরাঞ্জের উপপাদ্যর জ্যামিতিক তাৎপর্য অনুযায়ী $(1, 1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি উক্ত জ্যা-এর সমান্তরাল হবে।

(7) দেখাও যে $x^2 - 2x + 3$ এবং $x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ অপেক্ষক দুটি বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল $[1, 4]$-এ কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যের শর্তগুলি পূরণ করে। অতঃপর যথাযথ বিন্দুটি নির্ণয় কর।

**উত্তর :** $f(x) = x^2 - 2x + 3,\ g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ বহুপদরাশি বলিয়া f ও g উভয়েই, $[1, 4]$-এ সন্তত।

$f'(x) = 2x - 2,\ g'(x) = 3x^2 - 14x + 20$

$(1, 4)$-এ $f'$ ও $g'$ উভয়ের অস্তিত্ব আছে।

$g'(x) = 0$ যখন $x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 240}}{6} \notin (1, 4)$

সুতরাং $(1, 4)$-এ $g'(x) \neq 0$

অতএব কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যটি এক্ষেত্রে প্রযোজ্য। কশি-র মধ্যমান উপপাদ্য অনুযায়ী $(1, 4)$-এ অন্তত একটি বিন্দু c-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য

$\frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ হবে।

$\frac{11-2}{27-9} = \frac{2(c-1)}{3c^2-14c+20}$ অর্থাৎ $3c^2 - 14c + 20 = 4c - 4$

$c = 2, 4$ এদের মধ্যে একমাত্র $c = 2$ বিন্দুটি $(1, 4)$-এর অন্তর্বিন্দু।

(8) $f(x) = e^x$ ও $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ অপেক্ষক দুটি কি $[-3, 3]$ অন্তরালে কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যের শর্ত পূরণ করে?

**উত্তর :** উভয় অপেক্ষকই $[-3, 3]$ অন্তরালে সন্তত হবে।

$f'(x) = e^x, g'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, x = 0$ $(-3, 3)$-তে $g'(x) = 0$

কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যের শর্ত পূরণ করে না।

(9) কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যের সাহায্যে দেখাও যে f অপেক্ষকটি বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$-তে $(b > a > 0)$ সন্তত এবং মুক্ত অন্তরাল $(a, b)$-তে অন্তরকলনযোগ্য হইলে $(a, b)$-তে অন্তত একটি বিন্দু c থাকবে যার ক্ষেত্রে

$f(b) - f(a) = cf'(c) \log \frac{b}{a}$ হবে।

**উত্তর :** ধরা যাক $g(x) = \log x,\ 0 < a \le x \le b$

অপেক্ষক g, $[a, b]$-তে সন্তত, $g'(x) = \frac{1}{x}$-এর অস্তিত্ব $(a, b)$-তে আছে এবং $g'(x) \neq 0$।

সুতরাং কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যটি f ও g-এর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। ফলে অন্তত একটি বিন্দু $c \in (a, b)$ থাকবে যার ক্ষেত্রে

$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ হবে।

অর্থাৎ $f(b) - f(a) = cf'(c) \log \frac{b}{a}$ হবে।

(10) $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ হইলে দেখাও যে $\tan^{-1}x_2 - \tan^{-1}x_1 < x_2 - x_1$ হবে।

**উত্তর :** $f(x) = \tan^{-1}x$ অপেক্ষকটি $[x_1, x_2]$-তে সন্তত ও $(x_1, x_2)$-তে অন্তরকলনযোগ্য। ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যের সাহায্যে $\xi \in (x_1, x_2)$-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য

$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$ হবে

অর্থাৎ $\tan^{-1} x_2 - \tan^{-1} x_1 = \frac{x_2 - x_1}{1+\xi} < x_2 - x_1$

## 6.9 অনুশীলনী

(1) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$, $0 \le x \le 4$

রোলের উপপাদ্যটি কি উক্ত অপেক্ষকের ক্ষেত্রে ঐ অন্তরালে প্রযোজ্য? যুক্তিসহ উত্তর দাও।

(2) $y = x^2$ অধিবৃত্তের উপর A(1, 1) ও B(3, 9) দুটি বিন্দু। AB-এর সমীকরণ নির্ণয় না করে ঐ অধিবৃত্তের উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করো যে বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি AB-এর সমান্তরাল হবে

(3) $x^2 + 2$ ও $x^2 - 1$ অপেক্ষক দুটির ক্ষেত্রে [1, 2] বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরালে কশি-র মধ্যমান উপপাদ্য প্রযুক্ত হতে পারে কিনা যুক্তিসহ বল।

(4) $y = ln \sin x$ অপেক্ষকের ক্ষেত্রে বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$-এ রোলের উপপাদ্যটি প্রযুক্ত হবে কিনা যুক্তিসহ বল।

(5) যুক্তি দাও : বাস্তব সহগ বিশিষ্ট সমীকরণ

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots a_{n-1}\, x = 0$-এর একটি ধনাত্মক বীজ $x_0$ থাকলে

$na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0$ সমীকরণের একটি বীজ আছে যা $x_0$-এর চেয়ে ছোট।

(6) $f(x) = 1 + x^m(x-1)^n$ যেখানে m ও n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। $f'(x) = 0$ সমীকরণটি সমাধান না করেই দেখাও যে $f'(x) = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ মুক্ত অন্তরাল (0, 1)-এ থাকবে।

(7) দেখাও যে c বাস্তব ধ্রুবক সংখ্যা হলে $x^3 - 3x + c = 0$ সমীকরণটির (0, 1) মুক্ত অন্তরালে দুটি ভিন্ন বীজ থাকতে পারে না।

(8) ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যের সাহায্যে দেখাও যে $\frac{a-b}{a} \le ln\frac{a}{b} \le \frac{a-b}{b}$ যেখানে $0 < b \le a$ হবে।

(9) ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য ব্যবহার করে দেখাও যে

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} \le \tan\alpha - \tan\beta \le \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}, 0 < \beta \le \alpha < \frac{\pi}{2}$$

(10) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ অপেক্ষক দুটি কি [a, b] অন্তরালে $\left(0 < a < b < \frac{\pi}{2}\right)$ কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যের শর্ত পূরণ করে? শর্তটি পূরণ হলে যথাযথ বিন্দুটি নির্ণয় কর।

(11) দেওয়া আছে যে $f(a + h) = f(a) + hf(a + \theta h)$, $0 < \theta < 1$, $a = 0$, $h = 3$ এবং $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$, θ-এর মান নির্ণয় করো।

(12) দেওয়া আছে $f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h)$, $0 < \theta < 1$ যেখানে $f(x) = \sin x$। দেখাও যে, $\lim_{h\to 0+} \theta = \frac{1}{2}$

## 6.10 অন্তরালে অপেক্ষকের ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান চরিত্র নির্ধারণে মধ্যমান উপপাদ্যের প্রয়োগ

**প্রারম্ভিক ধারণা**

পাঠকদের জানা আছে যে $f : [a, b] \to R$ অপেক্ষকটিকে ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক বলা হবে যদি যে কোন ভিন্ন বিন্দুযুগল $x_1$ ও $x_2$, $a \le x_1 < x_2 \le b$-এর ক্ষেত্রে $f(x_1) \le f(x_2)$ হয়। f-কে যথার্থ ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক বলা হবে যদি $a \le x_1 < x_2 \le b$-এর ক্ষেত্রে $f(x_1) < f(x_2)$ হয়।

অনুরূপভাবে, $a \le x_1 < x_2 \le b$-এর ক্ষেত্রে যদি $f(x_1) \ge f(x_2)$ হয়, তবে অপেক্ষকটিকে ক্রমহ্রাসমান অপেক্ষক এবং $f(x_1) > f(x_2)$ হলে যথার্থ ক্রমহ্রাসমান অপেক্ষক বলা হবে।

$\sin x$ অপেক্ষকটি $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$-তে ক্রমবর্ধমান ও $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$-তে ক্রমহ্রাসমান অপেক্ষক।

সুতরাং 'অপেক্ষক f ক্রমবর্ধমান' কিংবা 'অপেক্ষক f ক্রমহ্রাসমান' এই বক্তব্যটি নিরর্থক। এক্ষেত্রে অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল উল্লেখ আবশ্যক।

একটি অপেক্ষক একটি অন্তরালে কোন্ শর্তে ক্রমবর্ধমান কিংবা ক্রমহ্রাসমান হবে সেটি ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যর সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

**বিবৃতি :** মনে কর f অপেক্ষকটি বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$-তে সন্তত এবং মুক্ত অন্তরাল $(a, b)$-তে f-এর সসীম অন্তরকলজের অস্তিত্ব রয়েছে।

যদি (ক) $(a, b)$-এর সর্বত্র $f'(x) \ge 0$ হয়, f অপেক্ষকটি ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক হবে ($f'(x) > 0$) হলে f অপেক্ষকটি যথার্থ ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক হবে।

(খ) $(a, b)$-এর সর্বত্র $f'(x) \le 0$ হয়, f অপেক্ষকটি ক্রমহ্রাসমান অপেক্ষক হবে $f'(x) < 0$ হলে f অপেক্ষকটি যথার্থ ক্রমহ্রাসমান অপেক্ষক হবে।

(গ) $(a, b)$-এর সর্বত্র $f'(x) = 0$ হয়, f ধ্রুবক অপেক্ষক হবে।

**প্রমাণ :** f অপেক্ষকটি $[a, b]$ অন্তরালে ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্যর সব শর্ত পূরণ করে বলে $[x_1, x_2]$-তেও সব শর্ত পূরণ করবে। সুতরাং ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য অনুযায়ী $(x_1, x_2)$ অন্তরালে অন্তত একটি বিন্দু c থাকবে যার জন্য

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \text{ হবে}$$

অতএব $f'(c) \ge 0$ হলে $f(x_2) \ge f(x_1)$

$f'(c) > 0$ হলে $f(x_2) > f(x_1)$

$f'(c) \le 0$ হলে $f(x_2) \le f(x_1)$

$f'(c) < 0$ হলে $f(x_2) < f(x_1)$

$f'(c) = 0$ হলে $f(x_2) = f(x_1)$

এই সম্পর্কগুলি প্রতিটি ভিন্ন বিন্দুযুগল $x_1$ ও $x_2$, $x_1 < x_2$-এর জন্য প্রযোজ্য।

## 6.11 উদাহরণ

(1) $f(x) = \sin x + \cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

**উত্তর :** f অপেক্ষকটি $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$-তে সন্তত এবং $f'(x) = \cos x - \sin x$

$0 < x < \frac{\pi}{4}$-এর ক্ষেত্রে $f'(x) > 0$ ও অপেক্ষকটি ক্রমবর্ধমান।

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$-এর ক্ষেত্রে $f'(x) < 0$ ও অপেক্ষকটি ক্রমহ্রাসমান।

(2) $f(x) = 2x^2 - \ln x,\ x > 0$

**উত্তর :** সকল $x > 0$-এর জন্য f সন্তত এবং $f'(x) = 4x - \frac{1}{x}$–এর অস্তিত্ব রয়েছে।

$f'(x) \ge 0$ (বা $> 0$) হবে যদি $x \ge \frac{1}{2}$ হয় $\left(\text{বা } x > \frac{1}{2}\right)$ এবং $f'(x) \le 0$ (বা $< 0$) হবে যদি $x \le \frac{1}{2}$ $\left(\text{বা } x < \frac{1}{2}\right)$ হয়।

(3) সহগ p-এর কোন্ মানগুলির জন্য $x^3 - px$ সর্বত্র যথার্থ ক্রমবর্ধমান হবে?

**উত্তর :** $f(x) = x^3 - px$ অপেক্ষকটি x-এর সকল মানের জন্য সন্তত ও অন্তরকলনযোগ্য। $f'(x) = 3x^2 - p$ একমাত্র $p < 0$ হলে x-এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য $f'(x) > 0$ হবে।

(4) $f(x) = \sin x - bx + c$ ; $b, c \in R$। b-এর কোন্ মানগুলির জন্য f(x) সর্বত্র যথার্থ ক্রমহ্রাসমান হবে?

**উত্তর :** f অপেক্ষকটি সকল x-এর জন্য সন্তত এবং $f'(x) = \cos - b$-এর অস্তিত্ব রয়েছে। যেহেতু $|\cos x| \le 1$ সুতরাং $b > 1$ হলে সর্বত্রই $f'(x) < 0$ হবে ও ফলে f(x) সর্বত্র ক্রমহ্রাসমান হবে।

(5) প্রমাণ কর যে $0 < x < 1$ হলে

$$x - \frac{x^3}{3} < \tan^{-1} x < x - \frac{x^3}{6}$$

উত্তর : মনে করি $f(x)\ \tan^{-1} x - x + \frac{x^3}{6},\ 0 \le x \le 1$ উক্ত f অপেক্ষকটি [0, 1]-এ সন্তত এবং $f'(x) = \frac{x^2(x^2-1)}{2(1+x^2)}$-এর অস্তিত্ব (0, 1)-এ রয়েছে। $f'(x) < 0$ যখন $0 < x < 1$। ফলে অপেক্ষকটি যথার্থ ক্রমহ্রাসমান এবং $x > 0$-এর ক্ষেত্রে $f(x) < f(0)$

$\tan^{-1} x - x + \frac{x^3}{6} < 0$ অর্থাৎ $\tan^{-1} x < x - \frac{x^3}{6}$

মনে করি, $g(x) = \tan^{-1} x - x - \frac{x^3}{3}, \; 0 \le x \le 1$

g অপেক্ষক উক্ত অন্তরালে সন্তত এবং $g'(x) = \frac{x^4}{1+x^2}$-এর অস্তিত্ব আছে ও $g'(x) > 0$। সুতরাং g অপেক্ষকটি যথার্থ ক্রমবর্ধমান। অতএব $x > 0$ হল $g(x) > g(0)$ এবং $\tan^{-1}x > x - \frac{x^3}{3}$

(6) দেখাও যে $\frac{x}{x+1} < \log(1+x) < x, \; x > 0$

উত্তর : মনে করি, $f(x) = x - \log(1+x), \; x \ge 0$

f অপেক্ষকটি সন্তত এবং $f'(x) = \frac{x}{1+x} > 0$ যখন $x > 0$

সুতরাং f অপেক্ষকটি যথার্থ ক্রমবর্ধমান এবং

$x > 0$-এর জন্য $f(x) > f(0)$ অর্থাৎ $x - \log(1+x) > 0$

**মনে করি** $g(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}, \; x \ge 0$

g অপেক্ষকটি সন্তত এবং $g'(x) = \frac{x}{(1+x)^2} > 0$ যখন $x > 0$। সুতরাং $x > 0$-এর জন্য $g(x) > g(0)$ অর্থাৎ $\log(1+x) - \frac{x}{1+x} > 0$

(7) দেখাও যে $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$ যখন $0 < x < \frac{\pi}{2}$

উত্তর : অপেক্ষক $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$ নিম্নভাগে গঠন করা হল :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

f অপেক্ষকটি সন্তত। $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}, \; 0 < x < \frac{\pi}{2}$ -এর অস্তিত্ব আছে।

মনে করি, $g(x) = x\cos x - \sin x, \; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

g সন্তত এবং $g'(x) = -x\sin x < 0$। সুতরাং $x > 0$, $g(x) < g(0) = 0$ ফলে $f'(x) < 0$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$। সুতরাং f যথার্থ ক্রমহ্রাসমান এবং $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(x) < f(0)$.

অর্থাৎ $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1, \; 0 < x < \frac{\pi}{2}$

মন্তব্য : উদাহরণ 5, 6 ও 7-এ সংশ্লিষ্ট অপেক্ষকগুলিকে বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরালে গঠন করতে হবে।

অপেক্ষকের ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ধর্মটি যেহেতু ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য নির্ভর, সুতরাং বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরালে অপেক্ষকের গঠন গাণিতিক নিরিখে অত্যাবশ্যক। উদাহরণ 7-এ অপেক্ষকটিকে $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত করার জন্য $f(0) = 1$ ধরা হয়েছে।

## 6.12 অনুশীলনী

(1) দেখাও যে $x - \frac{x^2}{2} < ln(1+x) < x, x > 0$

(2) দেখাও যে $\tan x > x + \frac{x^2}{3}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(3) দেখাও যে $x < \log\frac{1}{1-x} < \frac{x}{1-x}, 0 < x < 1$

(4) দেখাও যে $\cos x + x \sin x > 1,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(5) দেখাও যে $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1, x > 0$

(6) কোন্ কোন্ অন্তরালে $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$ অপেক্ষকটি ক্রমবর্ধমান বা ক্রমহ্রাসমান হবে নির্ণয় কর।

## 6.13 অনির্ণেয় সীমা ও লপিতার নিয়ম

**প্রস্তাবনা :** দুই বা ততোধিক অপেক্ষকের মধ্যে বীজগণিতিক প্রক্রিয়ার মাধ্যমে প্রাপ্ত অপেক্ষক-রাশির সীমা নির্ধারণের ক্ষেত্রে কিছু ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত আকারগুলি পাওয়া যায় : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0\cdot\infty, 0^\circ, 1^\infty$

উদাহরণস্বরূপ : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}\left(\frac{0}{0}\right), \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\log\sin 2x}{\log\sin x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{a}{x} - \cot\frac{x}{a}\right)(\infty - \infty), \lim\limits_{x\to 0+} x\,lnx(0\times\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0} x^x(0^\circ), \lim\limits_{x\to\infty}(3x^2 + 2x + 1)^{1/x}(\infty^\circ), \lim\limits_{x\to 0+}(\cos x)^{1/x^2}(1^\infty)$

স্ট্যান্ডার্ড সীমা বলে পরিচিত সীমা ভিন্ন অন্যান্য অনির্ণেয় সীমার অস্তিত্ব ও মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ফরাসী গণিতজ্ঞ উইলাউমে ফ্রাঙ্কোয়া অ্যান্টনি মার্কুইস ডি লপিতা (১৬৬১-১৭০৪) কশি-র মধ্যমান উপপাদ্যের সাহায্যে গুরুত্বপূর্ণ সূত্র উদ্ভাবন করেছেন। ঐ সূত্র $\frac{0}{0}$ ও $\frac{\infty}{\infty}$ আকারের সীমা নির্ধারণের ক্ষেত্রে প্রযুক্ত হবে। অপর অনির্ণেয় সীমাগুলি বীজগাণিতিক প্রক্রিয়ার মাধ্যমে ঐ দুই রূপের কোন-না-কোন রূপে পরিবর্তন করা যায়।

$\frac{0}{0}$ আকারে সীমা

স্মরণ করা যেতে পারে, যদি $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ও $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ উভয়ের অস্তিত্ব থাকে এবং $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ হয়, তবে $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$-এর অস্তিত্ব আছে। কিছু ক্ষেত্রে $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ সত্ত্বেও $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$-এর অস্তিত থাকবে।

**লপিতার নিয়ম**

যদি $[a, a+\delta]$-তে $f(x), g'(x)$-এর অস্তিত্ব থাকে, $g'(x) \neq 0$ হয় এবং $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ হয় ও যদি $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ হয়, তবে $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ হবে।

প্রমাণ : প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী কশির উপপাদ্যটি f ও g উভয়ের ক্ষেত্রে $[a, a+\delta]$-এ প্রযোজ্য। ফলে অন্তত একটি বিন্দু $c \in (a, x)$ $(a < x < a+\delta)$ থাকবে যার ক্ষেত্রে

$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ হইবে।

যখন $x \to a+$, $c \to a+$ এবং আমরা পাই $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$। অনুরূপভাবে $x \to a$-এর ক্ষেত্রেও প্রয়োজনীয় শর্তাধীনে দেখানো যায় যে $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ হবে।

মন্তব্য (ক) যতক্ষণ পর্যন্ত সীমার অনির্ণেয় আকার $\left(\frac{0}{0}\right)$ থাকবে ততক্ষণ পর্যন্ত ঐ সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

(খ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} . \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}, \lim\limits_{x\to} \frac{x^n - a^n}{x - a}$

আকারের স্ট্যান্ডার্ড সীমাগুলিতে লপিতার নিয়ম প্রযুক্ত নয়। কেননা লপিতার নিয়ম প্রয়োগ করতে হলে লব ও হরের অন্তরকলজ নির্ধারণ করতে হবে—আর ঐ অন্তরকলজ নির্ধারণের ক্ষেত্রে ঐ স্ট্যান্ডার্ড সীমাগুলিকেই ব্যবহার করতে হবে—এই প্রক্রিয়া যুক্তিগ্রাহ্য নয়।

অনুসিদ্ধান্ত : যদি হয়, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ হয় তবে

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, যদি ডানপক্ষের সীমার অস্তিত্ব থাকে।

ধরি $F(x) - f\left(\frac{1}{x}\right), G(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0+} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 0+} G(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$

$F'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right), G'(x) = -\frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right)$

সুতরাং $\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)}$

অতএব $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\frac{\infty}{\infty}$ আকারের সীমার ক্ষেত্রে লপিতার নিয়মের বিবৃতি

$\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$ হলে এবং

$\lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ হলে $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ হবে।

মন্তব্য : যতক্ষণ না $\frac{\infty}{\infty}$ আকার অপসৃত হবে, ঐ সূত্র বারবার প্রয়োগ করা যাবে।

## 6.14 অনির্ণেয় সীমা ও লপিতার নিয়ম

(1) $\lim\limits_{x\to a+} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right)$ (লপিতার নিয়মে)

$= \lim\limits_{x\to 0+} \frac{2\sec^2 x \tan x}{\sin x}$ (ঐ)

$= \lim\limits_{x\to 0+} \frac{2}{\cos^3 x} = 2$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(1 + e^{2x})}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ (লপিতার নিয়মে)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4e^{2x}}{2e^{2x}} = 2 \quad (\text{ঐ})$$

(3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)(\infty - \infty)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \quad (\text{লপিতার নিয়মে})$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0$$

(4) $\lim_{x\to 0} x\log\sin^2 x(0\times\infty)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\log\sin^2 x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cot x}{\frac{1}{x^2}} \quad (\text{লপিতার নিয়মে})$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{(-2x)\frac{x}{\sin x}.\cos x\right\} = 0$$

(5) $\lim_{x\to 0} x^x(0^\circ)$

$y = x^x \quad \therefore \quad \log y = x\log x$

$$\lim_{x\to 0+} \log y = \lim_{x\to 0+} \log x(0\times\infty)$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}}\left(-\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x}(-x^2) \quad (\text{লপিতার নিয়মে})$$

$$= \lim_{x\to 0+}(-x) = 0$$

$$= \lim_{x\to 0+} \log y = \log \lim_{x\to 0+} y = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0+} y = e^0 = 1$$

(6) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} (\infty^0)$

$$y = x^{\frac{1}{x}} \qquad \therefore \log y = \frac{\log x}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \log y = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \text{ (লপিতার নিয়মে) } = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} y = e^0 = 1$$

(7) $\lim_{x\to 0} (\cos mx)^{\frac{n}{x^2}} (1^\infty)$

$$y = (\cos mx)^{\frac{n}{x^2}} \quad \therefore \lim_{x\to 0} \log y = \lim_{x\to 0} \frac{n \log \cos mx}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-mn}{2} \cdot \frac{\sin mx}{x \cos mx} \text{ (লপিতার নিয়মে)}$$

$$= -\frac{m^2 n}{2}$$

সুতরাং $\lim_{x\to 0} y = e^{-m^2 n/2}$

(8) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}$ (m ও n স্বাভাবিক সংখ্যা, সকল i-এর জন্য $a_i > 0, b_i > 0$)

(ক) **m > n**

লপিতার সূত্র n বার প্রয়োগ করে পাই

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 m(m-1)\ldots(m-n)x^{m-n}}{b_0 . n!}$$

(খ) **m < n**

লপিতার সূত্র m বার প্রয়োগ করে পাই

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{ধ্রুবক}}{(n-m) \text{ মাত্রার বহুপদরাশি}} = 0$$

(গ) **m = n**

লপিকার সূত্র m (অথবা n বার) প্রয়োগ করে সীমা হল $\frac{a_0}{b_0}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ $(1^\infty)$

$$y = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\log y = \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x} \text{ (লপিতার নিয়মে)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{2x^2\cos x+4x\sin x}\left(\frac{0}{0}\right) \text{ (ঐ)}$$

$$= -\frac{1}{6} \text{ (পরপর দু'বার লপিতার নিয়ম প্রয়োগ করে)}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} y = e^{-\frac{1}{6}}$$

## 6.15 অনুশীলনী

(1) সীমা নির্ণয় কর :

(ক) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\log(1+px)}$; $a, b, p > 0$

(খ) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\log x}{x^p}$, $p > 0$

(গ) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}$

(ঘ) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

(ঙ) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{a}{x} - \cot\frac{x}{a}\right), a \in R$

(চ) $\lim_{x \to 1-} x^{1/(1-x)}$

(ছ) $\lim_{x \to \infty} x\left(\sqrt{x^2 + 4} - x\right)$

(2) যদি $\lim_{x \to 0} \frac{x(1 + a\cos x) - b\sin x}{x^3} = 1$ হয়, a ও b-এর মান নির্ণয় কর।

## 6.16 সহায়ক গ্রন্থ


1. Differential Calculus — Shantinarayan
2. Problems of Calculas of One Variable—I.A. Maron (CBS Publishers)

# একক 7 ❐ টেলরের উপপাদ্য, অপেক্ষকের অসীমবিস্তৃতি এবং চরম ও অবম মান

গঠন ঃ



## 7.1 প্রস্তাবনা

বৃটিশ গণিতজ্ঞ ব্রুক টেলর (১৬৮৫-১৭৩১) গাণিতিক বিশ্লেষণ তত্ত্বের একটি বুনিয়াদী সূত্র উদ্ভাবন করেন, যা পরবর্তীকালে শুধু গাণিতিক বিশ্লেষণ তত্ত্বে নয়, গাণিতিক বিজ্ঞানের বহু শাখায় গুরুত্বপূর্ণ অবদান রেখেছে। এই প্রসঙ্গে আর এক বৃটিশ গণিতজ্ঞ কলিন ম্যাকলরিন (১৬৯৮-১৭৪৬)-এর মান ও উল্লেখ্য।

উল্লিখিত উক্ত বুনিয়াদী সূত্রটি রোলের উপপাদ্য নির্ভর। ঐ সূত্রের অনুসারী হিসাবে একচলের বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক সমূহের বিস্তৃতি গাণিতিক বিজ্ঞানের বহু ক্ষেত্রে বহুল পরিমাণে ব্যবহৃত হয়ে থাকে।

## 7.2 টেলরের উপপাদ্য

বিবৃতি : $f : [a, b] \to R$ এরূপ যে

(ক) $(n - 1)$ তম অন্তরকলজ $f^{n-1}$, $[a, b]$-তে সন্তত

(খ) $n$ তম অন্তরকলজ $f^n$-এর অস্তিত্ব $(a, b)$-তে আছে। সেক্ষেত্রে $(a, b)$ মুক্ত অন্তরালে অন্তত একটি বিন্দু $c$-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + R_n$$