যেখানে R_n, n-সংখ্যক পদের পরে অবশেষে নিম্ন আকারগুলি পরিগ্রহ করতে পারে ঃ

(1) $R_n = \frac{(b-a)^p(b-c)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^n(c), p$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, $1 \le p \le n$

(2) $R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^n(c)$, (ল্যাংরাঞ্জের আকার)

(3) $R_n = \frac{(b-a)(b-c)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(c)$, (কশির আকার)

প্রমাণ : F : [a, b] $\to$ R নিম্নভাবে গঠন করা হল :

$$F(x) = f(x) + (b-x)\,f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x) + \lambda(b-x)^p,$$

যেখানে F(b) = F(a) দ্বারা λ নির্ণীত হবে এবং p একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

সুতরাং $F(b) = f(a) + (b-a)\,f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \lambda(b-a)^p$

শর্ত (ক) অনুযায়ী f, f′, ..., f^{n-1} অপেক্ষকসমূহ [a, b]-তে সন্তত, $b-x$, $(b-x)^2$, ..., $(b-x)^p$ সন্তত। অতএব F, [a, b]-তে সন্তত।

$F'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x) - \lambda p(b-x)^{p-1}$ -এর অস্তিত্ব (a, b)-তে বিদ্যমান।

আবার F(b) = F(a)।

সুতরাং রোলের উপপাদ্য অনুযায়ী মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে অন্তত একটি বিন্দু c-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য F′(c) = 0 হবে। অর্থাৎ $\lambda = \frac{(b-c)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^n(c)$

সুতরাং $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + R_n$

যেখানে $R_n = \frac{(b-c)^{n-p}(b-a)^p}{(n-1)!\,p} f^n(c)$ [স্লু-মিল্চ-এর আকার]

p = n বসিয়ে পাই $R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^n(c)$ [ল্যাংরাঞ্জের আকার]

p = 1 বসিয়ে পাই $R_n = \dfrac{(b-c)^{n-1}(b-a)}{(n-1)!} f^n(c)$ [কশির আকার]

মন্তব্য : (1) n = 1-এর জন্য ল্যাংরাঞ্জের মধ্যমান উপপাদ্য পাওয়া যায়।

(2) $c = a + \theta(b - a)$, $\theta \in (0, 1)$-এর জন্য।

(3) b = a + h বসিয়ে

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + R_n$$

যেখানে $R_n = \dfrac{h^n (1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^n(a + \theta h)$ [স্লুমিল্‌চ-এর আকার]

$R_n = \dfrac{h^n}{n!} f^n(a + \theta h)$ [ল্যাংরাঞ্জ-এর আকার]

$R_n = \dfrac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(a + \theta h)$ [কশি-র আকার]

(4) যদি x, (a, a + h)-এর কোন বিন্দু হয়

$$f(x) = f(a) + (x - a)\, f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + R_n,$$

যেখানে R_n, (3) হতে নির্ণয় করা যায়।

(5) a = 0

$$f(x) + f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(0) + R_n,$$

$$R_n = \frac{x^n}{(n-1)!\,p} (1-\theta)^{n-1} f^n(\theta x)$$

এই সসীম শ্রেণীকে ম্যাক্লরিনের সসীম শ্রেণী বলা হয়।

7.3 প্রদত্ত বিন্দুর সামীপ্যে একটি অপেক্ষকের অসীম শ্রেণীতে বিস্তৃতি

বেশ কিছু অপেক্ষক আছে যাদের যে কোন ক্রমের অন্তরকলজের অস্তিত্ব রয়েছে এবং অন্তরকলজগুলি সন্তত। ফলে এ ধরনের অপেক্ষকগুলির ক্ষেত্রে ম্যাক্লরিনের উক্ত শ্রেণীকে আরও বিস্তৃত করা সম্ভব কিনা এ আলোচনা প্রাসঙ্গিক।

জানা আছে যে বাস্তব সংখ্যার একটি অসীম শ্রেণী $\sum_n a_n$ অভিসারী কিংবা অপসারী হতে পারে। যদি $S_n = \sum_{r=1}^{n} a_r$ হয় এবং অণুক্রম $\{S_n\}_n$ অভিসারী হয়, তবে শ্রেণীটিও অভিসারী হবে।

মনে করি অন্তরাল [a, a + h]-এ f-এর যেকোন ক্রমের সন্তত অন্তরকলজ রয়েছে।

$f(a + h) = S_n + R_n$ যেখানে $S_n = f(a) + hf'(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a)$

যদি $\lim_{x\to\infty} R_n = 0$ হয় তবে সেক্ষেত্রে $S_n = f(a + h) - R_n$ থেকে পাই যে $\lim_{x\to\infty} S_n$-এর অস্তিত্ব আছে এবং ঐ সীমা হল $f(a + h)$। সুতরাং

$f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^n(a) + \ldots$ শ্রেণীটির অভিসারিত্ব এবং (f(a + h) অভিমুখে অভিসারী হবার শর্ত হল $\lim_{x\to\infty} R_n = 0$

ঐ অসীম শ্রেণী বিস্তৃতিকে টেলরের অসীম শ্রেণী বিস্তৃতি বলা হয়। যদি [0, h] অন্তরালে f অপেক্ষকের সকল ক্রমের অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকে ও অন্তরকলজগুলি সন্তত হয় এবং যদি $\lim_{x\to\infty} R_n = 0$ হয় তবে সেক্ষেত্রে

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \ldots\ldots$$

এই অসীম শ্রেণী বিস্তৃতিকে f(x)-এর শূন্যের সামীপ্যে ম্যাক্লরিনের অসীম শ্রেণী-বিস্তৃতি বলা হয়। এ ধরনের অসীম শ্রেণীকে ঘাত শ্রেণী $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ বলা হয় যেখানে $a_n = \frac{f^n(0)}{n!}; n = 0,1,2,\ldots$

7.4 কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ অপেক্ষকের ম্যাক্লরিন শ্রেণী বিস্তৃতি

(1) $f(x) = e^x,\ x \in R$

প্রতি $x \in N$-এর জন্য $f^n(x) = e^x$ এবং প্রতি f^n সন্তত।

ল্যাংরাঞ্জের আকারে $R_n = \frac{x^n}{n!} f^n(\theta x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}, 0 < \theta < 1$ $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ এবং $e^{\theta x} < e^x$ বলে $f^n(\theta x)$ সীমাবদ্ধ অপেক্ষক ও $\lim_{x\to\infty} R_n = 0$

অতএব $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^n(0)+\ldots$

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{n^2}{n!}+\ldots, x \in R$$

$x = 1$

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

(2) $f(x) = \sin x,\ x \in R$

$f^n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right), n \in N, x \in R$ এবং প্রতি f^n সন্তত।

$\lim\limits_{x\to\infty} R_n = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{n!}f^n(\theta x) = 0$ যেহেতু $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$ এবং $\left|f^n(\theta x)\right| \le 1 (x \in R)$ও f^n একটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক।

$$f(x) = f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^n(0)+\ldots$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}.\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

যেখানে $x \in R$

(3) একইভাবে দেখানো যায় যে

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

যেখানে $x \in R$

(4) $f(x) = \log_e(1+x),\ -1 < x \le 1$

$f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, -1 < x \le 1$ প্রতি f^n সন্তত।

(ক) $0 < x \le 1$

ল্যাংরাঞ্জের আকারে $R_n = \frac{x^n}{n!}f^n(\theta x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$ যেহেতু $0 < x \le 1$,

$0 < \theta < 1$ সুতরাং $0 < \frac{x}{1+\theta x} < 1$ এবং ফলে $\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n \to 0$ হবে। $\frac{1}{n} \to 0$ যখন $n \to \infty$ হবে। যখন $n \to \infty$ অতএব $\lim_{x\to\infty} R_n = 0$

(খ) $-1 < x < 0$

এক্ষেত্রে $\frac{x}{1+\theta x}$-এর সাংখ্যমান 1-এর চেয়ে ছোট হবে কি হবে না সে বিষয়ে স্থির সিদ্ধান্তে আসা যায় না।

ধরা যাক $x = -\frac{3}{4}, \theta = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{1+\theta x} = \frac{-24}{20}$ এবং $\left|\frac{x}{1+\theta x}\right| > 1$

ধরা যাক $x = -\frac{3}{4}, \theta = \frac{1}{4}$

$\frac{x}{1+\theta x} = -\frac{12}{13}$ এবং $\left|\frac{x}{1+\theta x}\right| < 1$

সুতরাং এই অংশের জন্য আমরা কশি-র আকারে R_n বিবেচনা করব। সেক্ষেত্রে

$$R_n = \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^n(\theta x), 0 < \theta < 1$$

যেহেতু $|x| < 1, 0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ এবং $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} \to 0$ যখন $n \to \infty$

যেহেতু $-1 < x < 0,\ 0 < \theta < 1,$ সুতরাং $\frac{1}{1+x\theta} < \frac{1}{1-|x|}$

যেহেতু $|x| < 1,\ x^n \to 0$

সুতরাং $R_n \to 0$ যখন $n \to \infty$

ফলে $\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n} \ldots (-1 < x \le 1)$

$x = 1$ বসিয়ে $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}.\frac{1}{n} + \ldots..$

শ্রেণীটি পালাক্রমে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পদবিশিষ্ট শ্রেণী এবং লাইবনিৎস পরীক্ষা অনুযায়ী এটি অভিসারী।

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} . \frac{1}{n} + \ldots\ldots$$

(5) $f(x) = (1 + x)^m$, m যেকোন বাস্তব সংখ্যা।

m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে ঐ অপেক্ষকের বিস্তৃতি সসীম হবে। সুতরাং আমরা m-কে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা বাদে আর যেকোন বাস্তব সংখ্যা হিসাবে বিবেচনা করব।

প্রতি $n \in N$-এর জন্য $f^n(x) = m(m-1) \ldots (m-n+1)(1+x)^{m-n}$, $|x| < 1$, সন্তত হবে।

কশি-র আকারে $R_n = \dfrac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^n(\theta x) \qquad (0 < \theta < 1)$

$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!} x^n . \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} (1+\theta x)^{m-1}$$

যেহেতু $|x| < 1$ ও $0 < \theta < 1$, $0 < \dfrac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ এবং $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ (যেহেতু $|x| < 1$)

যদি $m - 1$ ধনাত্মক হয়, $0 < (1+\theta x)^{m-1} < 2^{m-1}$

যদি $m - 1$ ঋণাত্মক হয়, $\theta x > -1$ $|x|$ বলে

$$(1+\theta x)^{m-1} < (1-|x|)^{m-1}$$

অর্থাৎ যেকোন ক্ষেত্রেই $(1+\theta x)^{m-1}$ সীমাবদ্ধ হবে।

ফলে $R_n \to 0$ যখন $n \to \infty$ হইবে।

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \ldots\ldots$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots\ldots$$

যেখানে $|x| < 1$ হইবে।

7.5 অনুশীলনী

(1) দেখাও যে, সকল $x \in R$-এর জন্য

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\ldots$$

(2) ‘0’-এর সামীপ্যে $\sin^2 x$-এর ঘাত শ্রেণী নির্ণয় কর।

(3) বিস্তৃতির সম্ভাব্যতা ধরে নিয়ে x^6 পদ পর্যন্ত $\tan x$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

7.6 একচল রাশির অপেক্ষকের আপেক্ষিক বা স্থানীয় চরম-অবম মান

সংজ্ঞা : এক চলরাশির বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক f এর $x = c$ বিন্দুতে আপেক্ষিক বা স্থানীয় **চরম মান (অবম মান)** থাকবে যদি এমন $\delta > 0$-এর অস্তিত্ব থাকে যার জন্য $x \in (c - \delta, c + \delta) \subset D_f$-এর ক্ষেত্রে $f(c) \geq f(x)$. $(f(c) \leq f(x))$ হবে (D_f বলতে f-এর সংজ্ঞার অঞ্চল বুঝাবে)।

আপেক্ষিক বা স্থানীয় চরম ও অবম মানকে একত্রে আপেক্ষিক বা স্থানীয় **শীর্ষমান (Extremum)** বলা হয়।

উদাহরণ : (1) $f(x) = |x|$-এর $x = 0$ বিন্দুতে অবম মান রয়েছে।

(2) $f(x) = x^3$-এর $x = 0$ বিন্দুতে চরম বা অবম মান নেই। কেননা যখন $o < x < o + \delta$, $f(x) > f(0)$ এবং যখন $0 - \delta < x < 0$, $f(x) < f(0)$।

7.7 ফার্মাটের উপপাদ্য

ফরাসী গণিতজ্ঞ পিয়েরে ডে ফার্মাট (১৬০১-১৬৬৫)-এর একটি উপপাদ্য এ বিষয়ে প্রণিধানযোগ্য।

বিবৃতি : যদি অপেক্ষক f-এর সংজ্ঞার অঞ্চলের অন্তর্বিন্দু c-তে স্থানীয় চরম বা অবম মান থাকে এবং যদি c বিন্দুতে f-এর অন্তরকলজ থাকে তবে $f'(c) = 0$ হবে।

প্রমাণ : মনে করা যাক্ c বিন্দুতে f-এর চরম মান আছে। শর্ত অনুযায়ী

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

যেহেতু c-তে f-এর চরম মান আছে, সুতরাং $\delta > 0$-এর অস্তিত্ব আছে যে $x \in (c - \delta, c + \delta)$ হলে $f(c) \geq f(x)$ হইবে। $\Delta x > 0$ হইলে $\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$ এবং সেক্ষেত্রে $f'(c) \leq 0$। আবার $\Delta x < 0$ হলে $\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$ এবং সেক্ষেত্রে $f'(c) \geq 0$। অতএব $f'(c) = 0$ হবে।

মন্তব্য : (1) পূর্বে উল্লিখিত $|x|$ অপেক্ষকের উদাহরণ দেখিয়ে দিয়েছে যে চরম/অবম মান যে বিন্দুতে আছে সেই বিন্দুতে অপেক্ষকের অন্তরকলজের অস্তিত্ব না-ও থাকিতে পারে।

(2) পূর্বে উল্লেখিত x^3 অপেক্ষকের উদাহরণ দেখিয়ে দিয়েছে যে ফার্মাটের উপপাদ্যর বিপরীতটি সত্য নয়—কেননা ঐ x^3-এর ক্ষেত্রে $x = 0$ বিন্দুতে অন্তরকলজ শূন্য হবে।

7.8 কোন বিন্দুতে অপেক্ষকের চরম বা অবম মানের পর্যাপ্ত শর্তের বিবৃতি

c অপেক্ষক f-এর সংজ্ঞার অঞ্চলের অর্ন্তবিন্দু এবং $f'(c) = f''(c) = ... = f^{n-1}(c) = 0$, $f^n(c) \neq 0$।

যদি উক্ত n অযুগ্ম হয়, c বিন্দুতে f-এর কোন চরম বা অবম মান থাকবে না।

যদি ঐ n যুগ্ম হয়, তবে c বিন্দুতে চরম বা অবম মান থাকবে। $f^n(c) < 0$ থাকলে ঐ c বিন্দুতে f-এর চরম মান থাকবে এবং $f^n(c) > 0$ হলে ঐ c বিন্দুতে f-এর অবম মান থাকবে।

মন্তব্য : এই বিবৃতির প্রমাণ সহজেই টেলরের উপপাদ্য ইয়ং-আকার (Young's form of Taylor's Theorem)-এর সাহায্যে করা যায়।

7.9 উদাহরণ

(1) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$

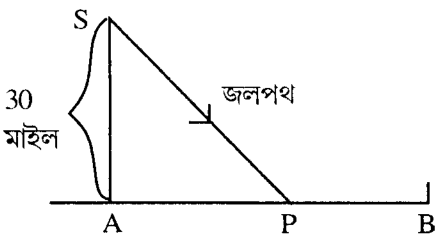
উত্তর : প্রদত্ত অপেক্ষকটি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক এবং পর্যায়কাল 2π। সুতরাং আমরা $[0, 2\pi]$ অন্তরালে অপেক্ষকের প্রকৃতি অনুধাবন করব।

$f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x\,(1 - 2\sin x) = 0$ হতে পাই $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

$f''(x) = -2\sin x - 4\cos 2x$

$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0, f''\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0, f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0, f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) > 0$ সুতরাং $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ বিন্দু দুটিতে চরম মান এবং $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ বিন্দু দুটিতে অবম মান থাকবে।

(2) একটি জাহাজ S সরলরৈখিক উপকূল চর হতে ত্রিশ মাইল দূরে নোঙ্গার করল। উপকূল চরে S-এর নিকটতম বিন্দু হল A। উপকূল চর বরাবর পঞ্চাশ মাইলের একটি সোজা রাস্তা A থেকে B পর্যন্ত গিয়েছে। একজন চোরাচালাকারী ঘণ্টায় পঁচিশ মাইল গতিসম্পন্ন মোটর লঞ্চ নিয়ে উপকূল চরে যায়, সেখান থেকে ঘণ্টায় পঁয়ষট্টি মাইল গতিসম্পন্ন গাড়ি নিয়ে B বিন্দুতে যায়। সবচেয়ে কম সময়ে B বিন্দুতে পৌঁছাতে গেলে ঐ চোরাচালানাকারীকে কোন্ পথে যেতে হবে তাহা নির্ণয় কর।



উত্তর : মনে করি AP = x মাইল

$$PS = \sqrt{[x^2 + 900]} \text{ মাইল}$$

মোটর লঞ্চে S থেকে P পর্যন্ত সময় লাগবে $\frac{\sqrt{x^2+900}}{25}$ ঘণ্টা

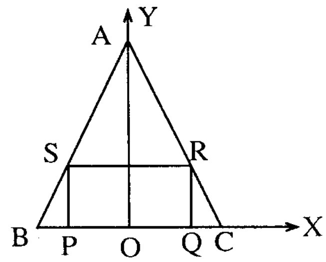
স্থলপথে গাড়িতে P থেকে B পর্যন্ত সময় লাগবে $\frac{50-x}{65}$ ঘণ্টা

$f(x)=\frac{50-x}{65}+\frac{\sqrt{(x^2+900)}}{25}$ অতএব $f'(x)=-\frac{1}{65}+\frac{\sqrt{x}}{25\sqrt{(x^2+900)}}$

$f'(x) = 0$ হতে পাই $x=\frac{25}{2}$। $f''\left(\frac{25}{2}\right)>0$

জলপথে A থেকে দক্ষিণে $12\frac{1}{2}$ মাইল দূরে নামতে হবে।

(3) দশ সে.মি. ভূমি ও দশ সে.মি. উচ্চতাসম্পন্ন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তরে সবচেয়ে বৃহৎ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য-প্রস্থ নির্ণয় কর।



উত্তর : সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC = 10 সে.মি.। ভূমি BC-র মধ্যবিন্দুগামী লম্বরেখা শীর্ষবিন্দু A দিয়া যায়। 0 কে মূলবিন্দু, OC রেখা বরাবর x-অক্ষের ধনাত্মক দিক ও OA রেখা বরাবর y-অক্ষের ধনাত্মক দিক লওয়া হইল। PQRS নির্ণেয় আয়তক্ষেত্র।

AC রেখার সমীকরণ $2x + y = 10$. $R(h, k)$ হইলে $2h + k = 10$. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ধর্ম অনুযায়ী SR, OA দ্বারা দ্বিখণ্ডিত এবং SR || BC. আয়তক্ষেত্র PQRS এর ক্ষেত্রফল $2hk = (10 - k)\,k = f(k)$।

$f''(k) = 0$ হতে পাই $k = 5$. $f''(k) = -2 < 0$

সুতরাং ঐ বৃহৎ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রে $k = 5,\ h = \frac{5}{2}$

সুতরাং দৈর্ঘ্য = 5 সে.মি. = প্রস্থ।

(4) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$

উত্তর : $f'(x)=f(x)\left[\frac{1}{x^2}-\frac{\log x}{x^2}\right]$ সুতরাং $f'(x) = 0$ হতে পাই $x = e$

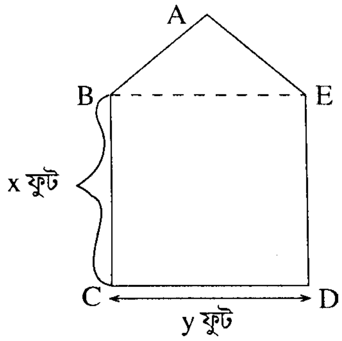
$$f''(x)=f'(x)\left[\frac{1}{x^2}-\frac{\log x}{x^2}\right]+f(x)\left[-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^3}+\frac{2\log x}{x^3}\right]$$

$$f''(e)=f(e)\left[-\frac{1}{e^3}\right]<0$$

$f(x)$ সর্বোচ্চ যখন $x = e$ এবং অপেক্ষকের চরম মান হল $e^{\frac{1}{e}}$

(5) একটি জানালার পরিসীমা p ফুট। এর তলার অংশ আয়তাকার এবং তার উপরের অংশ একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। জানালাটি দিয়ে সর্বাদিক আলো আনার জন্য ঐ জানালার বাহুগুলি ও উক্ত সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে বাহুগুলির মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

উত্তর : আয়তাকার অংশের দৈর্ঘ্য x ফুট, প্রস্থ y ফুট, $\angle BAE = 90°$.



সুতরাং $AB = AE = \frac{y}{\sqrt{2}}$ ফুট

পরিসীমা $p = 2x + y + 2\frac{y}{\sqrt{2}} = 2x + y\left(1+\sqrt{2}\right)$

$$y = \frac{p-2x}{\sqrt{2}+1}$$

সর্বাধিক আলো আনার উক্ত শর্ত পূরণ করার জন্য জানালার ক্ষেত্রফলকে সর্বোচ্চ করতে হবে।

ক্ষেত্রফল $A = xy + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 \sin 90° = xy + \frac{y^2}{4}$

$$= \frac{x(p-2x)}{\sqrt{2}+1} + \frac{(p-2x)^2}{4\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = f(x)$$

$f'(x) = \frac{p-4x}{\sqrt{2}-1} = \frac{2x}{\sqrt{2}+1} - \frac{p-2x}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = 0$ হইতে পাই $x = \frac{p}{4+\sqrt{2}}$

$$f''\left(\frac{p}{4+\sqrt{2}}\right) = \frac{-2-4\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} < 0$$

সুতরাং $x = \frac{p}{4+\sqrt{2}}$ এর জন্য $f(x)$ সর্বোচ্চ।

তখন $y = \frac{p\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটির সমান দুই বাহুর দৈর্ঘ্য $= \frac{p}{4+\sqrt{2}}$ = আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য।

(6) সরলরেখায় গতিশীল একটি বস্তুকণার t সময়ে স্থির বিন্দু হতে দূরত্ব হল

$x = t^4 - 10t^3 + 24t^2 + 36t + 12$

ঐ বস্তুকণা কখন সবচেয়ে আস্তে চলবে?

উত্তর : গতিবেগ $v = \frac{dx}{dt} = 4t^3 - 30t^2 + 48t + 36 = f(t)$

f(t)-এর অবম মানের পরীক্ষা করতে হবে।

$f'(t) = 12t^2 - 60t + 48 = 0$ হতে পাই $t = 1, 4$ সেকেন্ড

$f''(t) = 24t - 60$ এবং $f''(4) > 0$

সুতরাং যাত্রাশুরুর 4 সেকেন্ড পরে সবচেয়ে আস্তে চলবে।

(7) 2p পরিসীমা বিশিষ্ট কোন্ সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সর্বোচ্চ হবে?

উত্তর : ত্রিভুজটি লম্ব ও ভূমির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে x একক ও y একক হলে

$$x + y + \sqrt{(x^2 + y^2)} = 2p \quad ..... \ (1)$$

ক্ষেত্রফল $A = \frac{1}{2}xy \quad ..... \ (2)$

(1) হতে $\sqrt{(x^2 + y^2)} = 2p - x - y$ বর্গ করে পাওয়া যায়

$$y = \frac{2p^2 - 2px}{2p - x}$$

$$A = \frac{x(p^2 - px)}{2p - x} = f(x) \text{ এবং } f'(x) = \frac{2p^3 - 4p^2x + px^2}{(2p - x)^2}$$

$f'(x) = 0$ করে পাই $x = p(2 \pm \sqrt{2})$

$f''(p(2 - \sqrt{2})) < 0$ অতএব $x = p(2 - \sqrt{2})$-এর জন্য f(x) সর্বোচ্চ এবং সেক্ষেত্রে $y = p(2 - \sqrt{2})$। অতএব x = y হবে। সমকোণী ত্রিভুজটিকে সমদ্বিবাহু এবং উক্ত বাহু বিশিষ্ট হতে হবে।

(8) 18 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গাকার কার্ডবোর্ডের চারটি কোন্ থেকে চারটি বর্গাকৃতি অংশ মুড়ে দিয়ে একটি মুখখোলা বাক্সে পরিণত করা হল যাতে ঐ বাক্সের আয়তন সর্বোচ্চ হতে পারে। কেটে নেওয়া বর্গাকৃতি অংশের বাহুগুলি নির্ণয় কর।

উত্তর : মনে করি ঐ বাহুগুলি x সে.মি. বিশিষ্ট।

সুতরাং মুখখোলা বাক্সের আয়তন = (18 − 2x) (18 − 2x) x ঘনসেমি = f(x)

$f'(x) = 0$ হতে পাই $x = 9$ সে.মি. এবং 3 সে.মি.

$f''(x) = 24x - 144$. সুতরাং $f''(3) < 0$

$x = 3$ সে.মি. হলে আয়তন সর্বোচ্চ হবে।

7.10 অনুশীলনী

(1) $f(x) = \dfrac{(x+1)(x+4)}{(x-1)(x-4)}$: চরম ও অবম মানের অস্তিত্ব পরীক্ষা কর।

(2) $x + y = k$ হলে $x^m y^n$-এর চরম মান নির্ণয় কর (m, n, k সকলেই ধনাত্মক সংখ্যা)। এথেকে দেখাও যে

$$a^m b^n < \left(\frac{ma+nb}{m+n}\right)^{m+n}, a > 0, b > 0, a \neq b$$

(3) দেখাও যে $\theta = \pi$ বিন্দুতে $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$-এর চরম মান আছে (y কে x-এর অপেক্ষক ধরে নাও)।

(4) $x^3 - 6x^2 + 14x + 9$-এর চরম কিংবা অবম মান নেই—এই বক্তব্য সঠিক কিনা যাচাই কর।

(5) 'a' একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের মধ্যে সবোচ্চ পরিসীমা বিশিষ্ট আয়তাকারের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

(6) 18-কে এমন দুইটি অংশে ভাগ কর যাহাতে একটি অংশের বর্গ ও অপর অংশের ত্রিঘাতের গুণফল সর্বোচ্চ হয়।

(7) একটি জানালার পরিসীমা p ফুট। জানালার তলার অংশ আয়তাকার এবং এর উপরের অংশ অর্ধবৃত্তাকার। জানালাটি দিয়ে সর্বাধিক আলো আনার জন্য ঐ জানালার তলার অংশের বাহুগুলি ও অর্ধবৃত্তাকারের ব্যাসের মধ্যেকার সম্পর্ক নির্ণয় কর।

7.11 সহায়ক গ্রন্থ

1. Differential Calculus—Shantinarayan
2. Differential Calculus—B.C. Das & B. N. Mukherjee

একক 8 ❐ বহুচল অপেক্ষকের অন্তর কলনবিদ্যা

গঠন

8.1 প্রস্তাবনা
8.2 প্রারম্ভিক ধারণাসমূহ
8.3 দুইটি স্বাধীন চলরাশির অপেক্ষকের ধারণা
8.4 দুই স্বাধীন চলরাশির অপেক্ষকের সীমা ও সান্তত্য সম্পর্কে ধারণা
8.5 প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজ
8.6 উদাহরণ
8.7 দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তরকলজ
8.8 উদাহরণ
8.9 মিশ্র অন্তরকলজদ্বয়ের ক্রম সংক্রান্ত বিষয়
8.10 অনুশীলনী
8.11 প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে আংশিক অন্তরকলজ নির্ণয়
8.12 উদাহরণ
8.13 অনুশীলনী
8.14 সমঘাতী অপেক্ষক ও অয়লারের উপপাদ্য
8.15 উদাহরণ
8.16 অনুশীলনী
8.17 দুই চলরাশির অপেক্ষকের সমগ্র অবকলের ধরণা
8.18 তিন চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে সম্প্রসারিত ধারণাসমূহ
8.19 অপেক্ষক-সমীকরণ দ্বারা সংজ্ঞাত অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের ধারণা
8.20 অনুশীলনী
8.21 বহুচলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে চরম ও অবম মান নির্ণয়
8.22 উদাহরণ
8.23 তিন চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে চরম ও অবম মান নির্ণয়

8.24 শর্তাধীনে চরম-অবম মান নির্ণয়ে ল্যাংরাঞ্জের পদ্ধতি

8.25 অনুশীলনী

8.26 সহায়ক গ্রন্থ

8.1 প্রস্তাবনা

শ্রেণীকক্ষে কতজন ছাত্রছাত্রী বসিতে পারবে, গুদামঘরে কি পরিমাণ মাল মজুত রাখা সম্ভব হবে— এগুলি কোন একটি নির্দিষ্ট চলরাশির উপর নির্ভরশীল নয়, এগুলি সাধারণত একাধিক চলরাশির উপর নির্ভরশীল। প্রথমোক্তটি দুটি চলরাশি ও দ্বিতীয়টি তিনটি চলরাশির উপর নির্ভরশীল। প্রাত্যহিক জীবনের এ ধরনের আরও বহু বিষয় জানা ও সমস্যা সমাধানের জন্য তাই বহুসংখ্যক চলরাশির অপেক্ষক, তাদের ধর্ম ও আনুষঙ্গিক বিষয় সম্পর্কে কিছু ধারণা থাকা দরকার।

8.2 প্রারম্ভিক ধরণাসমূহ

(1) মনে করি, $R^2 = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$ এবং এখানে একটি দূরত্বের ধারণা অন্তর্নিহিত রয়েছে। যদি $X_1 = (x_1, y_1)$ ও $X_2 = (x_2, y_2)$ ঐ সেটের দুইটি বিন্দু হয় তবে উক্ত দূরত্ব অপেক্ষক $d(X_1, X_2) = \sqrt{\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right]}$ এবং

এই $d(X_1, X_2)$ কয়েকটি ধর্ম মেনে চলে :

(ক) $d(X_1, X_2) = 0$ যদি এবং কেবলমাত্র যদি $X_1 = X_2$

(খ) $d(X_1, X_2) = d(X_2, X_1)$

(গ) $d(X_1, X_3) \le d(X_1, X_2) + d(X_2, X_3)$, যেখানে $X_1, X_2, X_3 \in \mathbf{R}^2$.

(2) মনে করি $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

(a, b) বিন্দুর সামীপ্য $N\ (a, b), \partial) = \left\{(x, y) \in R^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < \partial^2\right\}$ এবং (a, b) বিন্দু বর্জিত সামীপ্য $N'((a, b), \partial) = \left\{(x, y) \in R^2 \mid 0 < \sqrt{\left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right]} < \partial^2\right\}$

অর্থাৎ $N'((a, b), \partial) = N((a, b), \partial) - \{(a, b)\}$

(3) মনে করি, A, $\mathbf{R}^2$-এর কোন উপসেট ($A \subset \mathbf{R}^2$)। $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ কে সেট A-র সীমাবিন্দু বলা হবে যদি প্রতিটি $\partial > 0$-এর ক্ষেত্রে $N'((a, b), d) \cap A$ একটি অ-শূন্য সেট হয়। (a, b) বিন্দুটি সেট A-তে না-ও থাকতে পারে।

(4) একটি সেট S ($\subset \mathbf{R}^2$)কে মুক্ত সেট বলা হবে যদি ঐ সেটের প্রতিটি বিন্দুর সামীপ্যর অস্তিত্ব থাকে যা ঐ সেটের মধ্যে অন্তর্ভুক্ত আছে অর্থাৎ প্রতিটি বিন্দু হল সেটের অন্তর্বিন্দু।

8.3 দুইটি স্বাধীন চলরাশির অপেক্ষকের ধারণা

ধরা যাক্ স্পেসে x, y ও z আয়তাকার স্থানাঙ্ক অক্ষত্রয় সূচিত করছে। যদি xy-তলের কিছু অঞ্চলের প্রতিটি বিন্দু (x, y)-এর জন্য নির্দিষ্ট নিয়ম অনুযায়ী z-এর একটিমাত্র সুনির্দিষ্ট মান থাকে, তবে z-কে আমরা স্বাধীন চলরাশি x ও y এর অপেক্ষক বলব। এই অপেক্ষককে $z = f(x, y)$ দ্বারা সূচিত করা হয়। এই অপেক্ষক স্পেসে একটি সঞ্চারপথকে সূচিত করে এবং ঐ অপেক্ষক z-এর জ্যামিতিক তাৎপর্য এটাই।

উদাহরণ : (1) $z = \sqrt{(4 - x^2 - y^2)}$

অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চল হল $x^2 + y^2 \leq 4$ অর্থাৎ xy তলে মূলবিন্দুকে কেন্দ্র ও 2 একক ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের পরিধিস্থ ও অভ্যন্তরীণ অঞ্চলটিই ঐ অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল।

(2) $Z = \dfrac{1}{\sqrt{(4 - x^2 - y^2)}}$

xy-তলে মূলবিন্দুকে কেন্দ্র ও 2 একক ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের অভ্যন্তরীণ অঞ্চলটি এই অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল।

(3) $9z^2 = 144 - 16y^2 - 9x^2$ অপেক্ষকটিকে $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1$ অঞ্চলে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

মন্তব্য : (1) দুই চলরাশির অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল বলিতে একটি মুক্ত সেট বোঝাবে, যাহার অভ্যন্তরে যে কোন দুইটি বিন্দুর যোগযোগকারী রেখাসমূহ ঐ সেটেই থাকে।

(2) অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল যদি S ($\subset \mathbf{R}^2$) হয়, তবে অপেক্ষকগুলি হল $S \to R$

(3) একইভাবে তিনটি স্বাধীন চলরাশির অপেক্ষকের সংজ্ঞা দেওয়া যায়।

8.4 দুইটি স্বাধীন চলরাশির অপেক্ষকের সীমা ও সান্তত্য সম্পর্কে ধারণা

মনে কর $f : S \to R$ যেখানে $S \subset R^2$ এবং (a, b) সেট S-এর সীমাবিন্দু।

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$ (l একটি সুনির্দিষ্ট বাস্তব রাশি) হবে যদি প্রদত্ত যে কোন $\varepsilon > 0$-এর জন্য $\partial > 0$ পাওয়া যায় যাহাতে $0 < \sqrt{\{(x-a)^2 + (y-b)^2\}} < \partial$ ভুক্ত প্রতিটি (x, y)-এর ক্ষেত্রে $|f(x, y) - l| < \varepsilon$ হয়। স্মরণ রাখা দরকার, $(x, y) \to (a, b)$-এর ক্ষেত্রে (x, y) কিন্তু (a, b) অভিমুখে

বহুপথে অগ্রসর হতে পারে—যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে তবে (x, y) যে পথেই ধাবিত হোক না কেন, সীমার মান একই থাকবে।

উদাহরণ : $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2 \neq 0$

মনে করি $(x, y) \to (0, 0)$, $y = mx$ রেখা বরাবর। আমরা $y = mx$ প্রতিস্থাপনে পাই $\dfrac{m}{1+m^2}$ যা ভিন্ন ভিন্ন m-এর জন্য ভিন্ন ভিন্ন মান দেয়। অতএব $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$-এর অস্তিত্ব নেই।

যদি (a, b) সেট S-এর সীমাবিন্দু ও অর্ন্তবিন্দু হয় এবং $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ হয়, তবে f-কে (a, b) বিন্দুতে সন্তত বলা হবে। এক্ষেত্রে প্রতিটি $\varepsilon > 0$-এর জন্য $\partial > 0$ পাওয়া যাবে যাতে $|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$ যখন $\sqrt{\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]} < \partial$

উদাহরণ : (1) $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} + y\sin, & xy \neq 0 \\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, y = 0 \\ y\sin\dfrac{1}{y}, & x = 0, y \neq 0 \\ 0, & x = 0 = y \end{cases}$

মনে করি $\varepsilon > 0$ যে কোন সংখ্যা।

$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|x\sin\dfrac{1}{x} + y\sin\dfrac{1}{y}\right| \leq |x| + |y| < \varepsilon$

যখন $|x - 0| < \partial$, $|y - 0| < \partial = \dfrac{\varepsilon}{2}$

সুতরাং f, (0, 0) বিন্দুতে সন্তত।

(2) $f(x, y) = |x| + |y|$ অপেক্ষকটি (0, 0) বিন্দুতে সন্তত।

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

অপেক্ষকটি (0, 0) বিন্দুতে অসন্তত।

8.5 প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজ

মনে করি $f : S \to R$ এবং $S \subset \mathbf{R}^2$

মনে করি বিন্দু (a, b)-এর একটি সামীপ্য S- অন্তর্ভুক্ত আছে।

যদি $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$-এর একটি সসীম, সুনির্দিষ্ট মান হিসাবে অস্তিত্ব থাকে, তবে (a, b) বিন্দুতে x-এর সাপেক্ষে f-এর প্রথম আংশিক অন্তরকলজের অস্তিত্ব আছে এবং ঐ সীমার মান-ই উক্ত আংশিক অন্তরকলজ হিসাবে গণ্য হবে। ইহাকে $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|(a,b)$ বা $f_x\,(a, b)$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। অনুরূপভাবে

$f_y(a,b)=\lim\limits_{y\to b}\dfrac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$, যদি অস্তিত্ব থাকে। সাধারণভাবে সংজ্ঞার অঞ্চলের যে কোন বিন্দু (x, y) -তে প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি নিম্নভাবে সংজ্ঞাত বলা যায় :

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},\ \text{যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে}$$

$$f_y(x,y)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k},\ \text{যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে}$$

উদাহরণ : (1) $f(x,y)=|x|+|y|$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}\text{-এর অস্তিত্ব নেই।}$$

সুতরাং (0, 0) বিন্দুতে f_x-এর অস্তিত্ব নেই।

একইভাবে f_x-এর অস্তিত্ব (0, 0) বিন্দুতে নেই।

লক্ষণীয়, অপেক্ষকটি (0, 0) বিন্দুতে সন্তত।

(2) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0\ \text{অতএব}\ f_x(0,\ 0)\ =\ 0$$

$\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{0-0}{k}=0$ অতএব $f_y(0,\ 0)=0$ গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হল, অপেক্ষকটি (0, 0) বিন্দুতে সন্তত নয় কিন্তু ঐ বিন্দুতে প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজদ্বয়ের অস্তিত্ব আছে।

মন্তব্য : এক চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে যদি কোন অপেক্ষকের প্রথম ক্রমের অন্তরকলজ কোন

বিন্দুতে বিদ্যমান হয়, তবে অবশ্যই অপেক্ষকটি ঐ বিন্দুতে সন্তত হয়। একাধিক চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে ঐ তত্ত্বটি সত্য নহে।

প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজের জ্যামিতিক তাৎপর্য :

প্রদত্ত অপেক্ষক $z = f(x, y)$, যাহার প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজদ্বয় z_x ও z_y, (a, b) বিন্দুতে বিদ্যমান।

এক্ষেত্রে $y = b$ তলটি $z = f(x, 1y)$ দ্বারা সূচিত বক্রতলকে একটি বক্ররেখায় ছেদ করবে। ঐ বক্ররেখার উপর $x = a$ তে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে যদি θ কোণে নত হয়, তবে $\tan\theta$ হবে ঐ আংশিক অন্তরকলজ f_x বা z_x-এর জ্যামিতিক তাৎপর্য।

অনুরূপভাবে f_y বা z_y-এর জ্যামিতিক তাৎপর্য ব্যাখ্যা করা যায়।

উদাহরণ : মনে করি $z = f(x, y) = \dfrac{4x^2 + 9y^2}{18}$ (1)

ধরি $x = 3$, $y = 2$ এবং ফলে $z = 4$। $(3, 2)$ বিন্দুতে $z_x = \frac{4}{3}, z_y = 2$, $y = 2$ তলটি (1)-কে অধিবৃত্ত $2x^2 = 9(z - 2)$, $y = 2$-তে ছেদ করে। একতলীয় বক্ররেখা হিসাবে p $(3, 2, 4)$-এ স্পর্শকের প্রবণতা $= z_x\big|_{x=3} = \frac{4}{3}$

অনুরূপভাবে $x = 3$ তলটি (1)-কে অধিবৃত্ত $y^2 - 2(z - 2)$, $x = 3$-তে ছেদ করে। এক্ষেত্রে উক্ত প্রবণতা $= \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{y=2} = 2$

8.6 উদাহরণ

(1) যদি $z(x + y) = x^2 + y^2$ হয়, দেখাও যে

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 4\left(-1\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

উত্তর : প্রদত্ত সম্পর্ককে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই

$z_x.\ (x + y) + z.1 = 2x$ অতএব $z_x = \dfrac{2x - z}{x + y}$

অনুরূপভাবে $z_y = \dfrac{2y - z}{x + y}$

এ থেকে $\left(z_x - z_y\right)^2 = \frac{4(x-y)^2}{(x+y)^2}$ = বামপক্ষ

$z_x + z_y = \frac{2(x+y-z)}{x+y}$ এবং $4\left(1 - z_x - z_y\right) = 4\left[\frac{2z-x-y}{x+y}\right]$

$4\left(1 - z_x - z_y\right) = \frac{4(x-y)^2}{(x+y)^2}$ (z-এর মান বসিয়ে)

= ডানপক্ষ

(2) যদি $\theta = t^n e^{-r^2/4t}$ হয়, তবে n-এর মান নির্ণয় কর যার জন্য $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\theta}{\partial r}\right) = \frac{\partial\theta}{\partial t}$ হবে।

উত্তর : $\frac{\partial\theta}{\partial t} = e^{-r^2/4t}.\left[nt^{n-1} + \frac{1}{4}r^2 t^{n-2}\right]$ (1)

$\frac{\partial\theta}{\partial r} = t^n.\left(-e^{-r^2/4t}\right).\frac{2r}{4t}$। অতএব $r^2\frac{\partial\theta}{\partial r} = -\frac{1}{2}r^3 t^{n-1}.e^{-r^2/4t}$

$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\theta}{\partial r}\right) = -\frac{t^{n-1}}{2}\left[3r^2 e^{-r^2/4t} + r^3\left(-e^{-r^2/4t}\right).\frac{2r}{4t}\right]$

$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\theta}{\partial r}\right) = -\frac{3}{2}t^{n-1}e^{-r^2/4t} + \frac{r^2}{4}e^{-r^2/4t}t^{n-2}$ (2)

প্রশ্নানুসারে (1) ও (2) হতে পাই, $n = -\frac{3}{2}$

(3) যদি $u = f(ax^2 + 2hxy + by^2)$, $v = \phi(ax^2 + 2hxy + by^2)$ হয়

দেখাও যে $\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

উত্তর : $\frac{\partial v}{\partial x} = 2(ax+hy)\varphi', \frac{\partial v}{\partial y} = 2(hx+by)\varphi'$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 2(hx+by).f'.v_x + u[2h.\varphi' + 2(ax+hy).2(hx+by)\varphi'']$

$= 4(hx+by)(ax+hy)f'\varphi' + u[2h\varphi' + 4(ax+hy)(hx+by)\varphi'']$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 2(ax+by).f'.v_y + u[2h.\varphi' + 2(hx+by).2(ax+hy)\varphi'']$$

$$= 4(ax+hy)(hx+by)f'\varphi' + u[2h\varphi' + 4(ax+hy)(hx+by)\varphi'']$$

অতএব বামপক্ষ = ডানপক্ষ

8.7 দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তরকলজ

$f_{xx}(x,y) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f_x(x+h,y)-f_x(x,y)}{h}$, যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে

$f_{yy}(x,y) = \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f_y(x,y+k)-f_y(x,y)}{k}$, যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে

$f_{xy}(x,y) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f_y(x+h,y)-f_y(x,y)}{h}$, যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে

$f_{yx}(x,y) = \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f_x(x,y+k)-f_x(x,y)}{k}$, যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে

মন্তব্য : (1) f_{xy} ও f_{yx} দুটিকে মিশ্র অন্তরকলজ বলা হয়।

ঐ দুই অন্তরকলজের সংজ্ঞার ক্ষেত্রে দুটি 'কনভেনশন' অনুসৃত হয়। ফরাসী গণিতজ্ঞরা $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x)$ ও $f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_y)$ এবং বৃটিশ গণিতজ্ঞরা $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(f_y)$ ও $f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x)$ লিখে থাকেন। যেকোন একটি 'কনভেনশন' অনুসরণ করা যেতে পারে, কিন্তু যেটিই অনুসৃত হোক্ বরাবরের জন্য অনুসরণ করতে হবে। উপরে বর্ণিত বৃটিশ 'কনভেনশন' আমরা সর্বত্র অনুসরণ করব।

(2) মিশ্র অন্তরকলজগুলি কোন বিন্দুতে সমান না-ও হতে পারে।

8.8 উদাহরণ

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

দেখাও যে $f_{xy}(0,\ 0) \neq f_{yx}(0,\ 0)$

উত্তর : $\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$ $\quad\therefore f_x(0,0)=0$

$\lim_{k\to0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0-0}{k}=0$ $\quad\therefore f_y(0,0)=0$

$\lim_{k\to0}\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{hk^2}{h^2+k^2}=0$ $\quad\therefore f_y(h,0)=0$

আবার, $\lim_{h\to0}\frac{f(h,k)-f(0,k)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{k^3}{h^2+k^2}=k$ $\quad\therefore f_x(0,k)=k$

$\lim_{h\to0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$ $\quad\therefore f_{xy}(0,0)=0$

$\lim_{k\to0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{k-0}{k}=1$ $\quad\therefore f_{yx}(0,0)=1$

অতএব $f_{xy}(0,0), \neq f_{yx}(0,0)$

(2) $f(x,y)=\begin{cases} xy, & \text{যদি } |x|\geq|y| \text{ হয়} \\ -xy, & \text{যদি } |x|<|y| \text{ হয়}\end{cases}$ দেখাও যে $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$

উত্তর : $\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h.0-0}{h}=0$ [এখানে $x=h\neq0,\ y=0$

অতএব $f_x(0,0)=0$ সুতরাং $|x|>|y|$]

$\lim_{h\to0}\frac{f(h,k)-f(0,k)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-hk-0}{h}=-k$ [এখানে $h\to0,\ k\to0$

অতএব, $f_x(0,k)=-k$ সুতরাং $|h|<|k|$]

$\lim_{k\to0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{-k-0}{k}=-1$ সুতরাং $f_{yx}(0,0)=-1$

$\lim_{k\to0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0-0}{k}=0$ সুতরাং $f_y(0,0)=0$

$\lim_{k\to0}\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{hk-0}{k}=h$ [এখানে $k\to0,\ h\to0$ সুতরাং $|h|>|k|$]

সুতরাং $f_y\ (h,\ 0) = h$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1$$ সুতরাং $f_{xy}\ (0,\ 0) = 1$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ দেখাও যে $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$

উত্তর : $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$ $\therefore\ f_x\ (0,\ 0) = 0$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,k)-f(0,k)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{hk^2}{h^2+k^2} = 0$ $\therefore\ f_x\ (0,\ k) = 0$

$\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0$ $\therefore\ f_{yx}\ (0,\ 0) = 0$

$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = 0$ $\therefore\ f_y\ (0,\ 0) = 0$

$\lim_{k\to 0}\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k} = 0$ $\therefore\ f_y\ (h,\ 0) = 0$

$\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$ $\therefore\ f_{xy}\ (0,\ 0) = 0$ অতএব $f_{xy}\ (0,\ 0)$

$= f_{yx}\ (0,\ 0)$

(4) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\log\ (x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

দেখাও যে $f_{xy}\ (0,\ 0) = f_{yx}\ (0,\ 0)$

উত্তর : $\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}(h\log h^2)\,(ox-\infty)$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log h^2}{\frac{1}{h}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{h}}{-\frac{1}{h^2}}$$ (লপিতার নিয়মে)

$$= \lim_{h\to 0}(-2h) = 0 \qquad \therefore\ f_x\ (0,\ 0) = 0$$

প্রদত্ত অপেক্ষকে x ও y-এর সাদৃশ্য বিচার করে পাই $f_y\ (0,\ 0) = 0$

$$f_y\ (h,\ 0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k}, \text{ যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{(h^2+k^2)\log(h^2+k^2)-h^2\log h^2}{k}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{2k\log(h^2+k^2)+(h^2+k^2).\dfrac{2k}{(h^2+k^2)}}{1} \text{ (লপিতার নিয়মে)}$$

$$= 0$$

$$f_x\ (0,\ k) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,k)-f(0,k)}{h}, \text{ যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(h^2+k^2)\log(h^2+k^2)-k^2\log(k^2)}{h}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h\log(h^2+k^2)+(h^2+k^2).\dfrac{2h}{(h^2+k^2)}}{1} \text{ (লপিতার নিয়মে)}$$

$$= 0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(0-0)}{h} = 0 \qquad \therefore\ f_{xy}\ (0,\ 0) = 0$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{(0-0)}{k} = 0 \qquad \therefore\ f_{yx}\ (0,\ 0) = 0$$

8.9 মিশ্র অন্তরকলজদ্বয়ের ক্রম সংক্রান্ত বিষয়

পূর্বের উদাহরণগুলি ও সংজ্ঞা হইতে স্পষ্ট যে কোন বিন্দুতে মিশ্র অন্তরকলজদ্বয় সমান হতে পারে, সমান না-ও হতে পারে। জার্মান গণিতজ্ঞ এইচ্ কে এ সোয়ার্জ (১৮৪৩-১৯২১) এই দুই মিশ্র অন্তরকলজদ্বয়ের মান কোন বিন্দুতে সমান হবার পর্যাপ্ত শর্ত বিবৃত করেছিলেন। তাঁর প্রণীত উপপাদ্যটি নিম্নরূপ :

(ক) অপেক্ষকটির দুটি প্রথম ক্রমের অন্তরকলজ f_x ও f_y সংশ্লিষ্ট বিন্দু (a, b)-এর সামীপ্যে সংজ্ঞাত আছে (খ) দুইটি দ্বিতীয় ক্রমের মিশ্র অন্তরকলজ f_{xy} ও f_{yx} -এর মধ্যে একটি সংশ্লিষ্ট বিন্দু (a, b) তে সন্তত হলে অপর মিশ্র অন্তরকলজটির অস্তিত্ব ঐ বিন্দুতে থাকবে এবং ঐ বিন্দুতে দুই মিশ্র অন্তরকলজের মান সমান হবে।

মন্তব্য (1) সোয়ার্জের উক্ত শর্ত পর্যাপ্ত, আবশ্যিক নয়। উদাহরণ (3) ও (4)-এ (0, 0) বিন্দুতে মিশ্র অন্তরকলজদ্বয় সমান কিন্তু মিশ্র অন্তরকলজ দুটির কোনটিই (0, 0) বিন্দুতে সন্তত নয়।

(2) সোয়ার্জের শর্তকে লঘু করা যায় না অর্থাৎ দুইটি দ্বিতীয় ক্রমের মিশ্র অন্তরকলজের মধ্যে একটির ঐ বিন্দুতে সন্তত হওয়ার শর্তকে বাদ দেওয়া যায় না—উদাহরণ (1) ও (2) এর পরিচয় বহন করছে।

(3) f_{xy} ও f_{yx} উভয়েই সংশ্লিষ্ট বিন্দুতে সন্তত হলে ঐ বিন্দুতে $f_{xy} = f_{yx}$ হবে।

(4) প্রসঙ্গত উল্লেখ্য, আর এক গণিতজ্ঞ ইয়ং (Young)-ও ঐ মিশ্র অন্তরকলজদ্বয়ের কোন বিন্দুতে সমান হবার আর একটি শর্ত উপস্থাপিত করেছেন, যাহা ইয়ং-এর উপপাদ্য হিসাবে অভিহিত আছে। ইয়ং-এর শর্তগুলিও পর্যাপ্ত কিন্তু আবশ্যিক নয়। অতএব সোয়ার্জের তত্ত্ব কোন অনন্য তত্ত্ব নয়।

8.10 অনুশীলনী

(1) $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

দেখাও যে $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$

(2) $$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

দেখাও যে $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$

(3) যদি $Z = \sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x-y}{x}}$ হয়,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ সঠিক কিনা পরীক্ষা কর।

(4) যদি $u(x, t) = A\sin(a\lambda t + \theta)\sin\lambda x$ হয়

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ সঠিক কিনা পরীক্ষা কর।

(5) যদি $z = xy + xe^{y/x}$ হয়, দেখাও যে

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

8.11 প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে আংশিক অন্তরকলজ নির্ণয়

এক চলরাশির অপেক্ষকসমূহের ক্ষেত্রে কোন অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ধারণে অনেকসময়েই প্রতিস্থাপন পদ্ধতির সাহায্য নিতে হয়। একইভাবে একাধিক চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রেও বিশেষ শর্তাধীনে প্রতিস্থাপন পদ্ধতি অনুসৃত হয়ে থাকে। এখানে সেই সম্পর্কিত তত্ত্ব ও কার্য্যপ্রণালী বিবৃত হল :

মনে করি $f : S \to R\ (S \subset R^2)$, $Z = f(x, y)$ এরূপ যে প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি S-এ সন্তত। মনে করি $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ অপেক্ষকগুলির ক্ষেত্রে $(u, v) \in T\ (\subset R^2)$ এবং সেটদ্বয় T ও S এর মধ্যে সম্পর্ক এরূপ যে সংযোজক-অপেক্ষক।

$z = f'\ [\varphi(u, v), \psi(u, v)] = F(u, v)$ সংজ্ঞাত আছে। u ও v-এর সাপেক্ষে x ও y-এর প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত। সেক্ষেত্রে

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}\right\}$$

যদি x ও y উভয়েই একচলরাশি t-এর অপেক্ষক হয় ও অন্তরকলজগুলি সন্তত হয়, তবে

$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$ হবে।

মন্তব্য : এক চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}$ -এর সূত্র পেয়েছি ও অন্তরকলজ নির্ধারণে আমরা প্রয়োগ করেছি। দুই চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে তার স্বাভাবিক সম্প্রসারণ ঘটেছে। কিন্তু একটি সূত্রের ক্ষেত্রে ব্যতিক্রম লক্ষণীয়। এক চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx} = 1\Big/\left(\frac{dx}{dy}\right), \frac{dx}{dy} \neq 0$ সূত্র আমরা পেয়েছি। দুই চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে এটি সম্ভব নয়।

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \ \therefore r^2 = x^2 + y^2$

$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta = \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta = \frac{\partial y}{\partial r}$

ফলে $\frac{\partial r}{\partial x} \neq 1\Big/\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)$ হচ্ছে।

এই অ-সমতাটি আংশিক অন্তরকলজ নির্ধারণের ক্ষেত্রে হিসাবের মধ্যে রাখতে হবে।

8.12 উদাহরণ

(1) $z = \frac{x}{y}, x = e^t, y = ln\ t$ হইলে $\frac{dz}{dt}$ নির্ণয় কর।

উত্তর : $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{y} . e^t - \frac{x}{y^2} . \frac{1}{t} = \frac{e^t(t ln\, t - 1)}{t(ln\, t)^2}$

(2) $u = x$, $v = \frac{y}{x}$ হলে $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$ সমীকরণটিকে নতুন স্বাধীন চলরাশি u ও v এবং তাহাদের অপেক্ষকের আকারে প্রকাশ কর (z_x, z_y সন্তত ধরে নাও)।

উত্তর : মনে করি ঐ প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে z(x, y) অপেক্ষকটি w (u, v)-তে রূপান্তরিত হল।

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = w_u .1 + w_v \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = w_u .0 + w_v \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = xw_u - w = uw_u - w$$

ফলে প্রদত্ত সমীকরণটি $uw_u - w = 0$ সমীকরণে রূপান্তরিত হল।

(3) $u = x$, $v = x^2 + y^2$ হইলে $y\frac{\partial x}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ সমীকরণটিকে নতুন স্বাধীন চলরাশি u ও v এবং তাহাদের অপেক্ষকের আকারে প্রকাশ কর (z_x, z_y সন্তত ধরে নাও)।

উত্তর : মনে করি ঐ প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে z (x, y) অপেক্ষকটি w (u, v)-তে রূপান্তরিত হল।

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = w_u .1 + w_v .2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = w_u .0 + w_v .2y$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=yw_u$$

সুতরাং $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ সমীকরণটি $yw_u = 0$

অর্থাৎ $w_u = 0$-তে রূপান্তরিত হল।

(4) যদি $u=x^2+y^2, v=2xy$ হয় দেখাও যে, $y\frac{\partial \varphi}{\partial x}-x\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{(y^2-x^2)^3}{xy}$ সমীকরণটি $\frac{\partial \psi}{\partial v}=\frac{u^2-v^2}{v}$ সমীকরণটি -তে রূপান্তরিত হবে। প্রদত্ত আছে φ_x, φ_y সন্তত।

উত্তর : φ (x, y) অপেক্ষকটি চলরাশির পরিবর্তনে $\psi(u, v)$-তে রূপান্তরিত হয়েছে।

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\psi_u.2x+\psi_v.2y$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\psi_u.2y+\psi_v.2x$$

$$y\varphi_x-x\varphi_y=2(y^2-x^2).\,\psi_v$$

$$=\frac{(y^2-x^2)\left[(y^2+x^2)^2-4x^2y^2\right]}{xy}$$ (দেওয়া আছে)

সুতরাং $2\psi_v=\frac{u^2-v^2}{\frac{v}{2}}=\frac{2(u^2-v^2)}{v}$

অতএব $\psi_v=\frac{u^2-v^2}{v}$ নির্ণেয় সমীকরণ।

(5) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a\in R-\{0\})$ সমীকরণটিকে নতুন স্বাধীন চলরাশি α ও β, $\alpha = x - at$, $\beta = x + at$ এবং তাহাদের অপেক্ষকের আকারে প্রকাশ কর (সমস্ত দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তরকলজ সন্তত ধরে নাও)।

মনে করি, $u\ (x,\ t) = v\ (\alpha,\ \beta)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x} = 1.\,v_\alpha + 1.\,v_\beta$$

আমরা বলব $\frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}$

সুতরাং $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\right) = v_{\alpha\alpha} + v_{\alpha\beta} + v_{\beta\alpha} + v_{\beta\beta}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial t} = -a\frac{\partial v}{\partial \alpha} + a\frac{\partial v}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv -a\frac{\partial}{\partial a} + a\frac{\partial}{\partial \beta}$$

সুতরাং $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(-a\frac{\partial}{\partial \alpha} + a\frac{\partial}{\partial \beta}\right)\left(-a\frac{\partial v}{\partial \alpha} + a\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)$

$$= a^2 v_{\alpha\alpha} - a^2 v_{\alpha\beta} - a^2 v_{\beta\alpha} + a^2 v_{\beta\beta}$$

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে পাই $v_{\alpha\beta} = 0$ কেননা এক্ষেত্রে $v_{\alpha\beta} = v_{\beta\alpha}$।

(6) $u = xy,\ v = \frac{x}{y}$ এই দুই নতুন স্বাধীন চলরাশির দ্বারা $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{d^2 z}{dy^2} = 0$ সমীকরণটিকে রূপান্তরিত কর (দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত ধরে নাও)।

উত্তর : মনে করি $z(x, y)$ অপেক্ষকটি $w(u, v)$-তে রূপান্তরিত হল।

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = w_u\cdot y + w_v\cdot\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = w_u\,.\,x + w_v\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(yw_u + \frac{1}{y}w_v\right) = y.\frac{\partial}{\partial x}(w_u) + \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(w_v)$$

$$= y\left[\frac{\partial}{\partial u}(w_u).\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}(w_u).\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \frac{1}{y}\left[\frac{\partial}{\partial u}(w_v).\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}(w_v).\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$= y^2 w_{uu} + w_{vu} + w_{uv} + \frac{1}{y^2} w_{vv}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x w_u = \frac{x}{y^2} w_v \right) = x \frac{\partial}{\partial y}(w_u) + \frac{2x}{y^3} w_v - \frac{x}{y^2} \frac{\partial}{\partial y}(w_v)$$

$$= x\left[\frac{\partial}{\partial u}(w_u).\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}(w_u).\frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{2x}{y^3} w_v - \frac{x}{y^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(w_v).\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}(w_v).\frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

$$= x^2 w_{uu} + \frac{2x}{y^3} w_v + \frac{x^2}{y^4} w_{vv} - \frac{2x^2}{y^2} w_{uv}$$

অতএব $x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} = 0$-তে বসিয়ে পাই,

$$x^2 y^2 w_{uu} + x^2 w_{vu} + x^2 w_{uv} + \frac{x^2}{y^2} w_{vv}$$

$$-x^2 y^2 w_{u\mu} - \frac{2x}{y} w_v - \frac{x^2}{y^2} w_{vv} + 2x^2 u_{uv} = 0$$

$4x^2 w_{uv} = \frac{2x}{y} w_v$ (এখানে $w_{uv} = w_{vu}$)

অতএব $w_{uv} = \frac{1}{2u} w_v$

(7) $x = \frac{1}{2}(u+v)$ ও $y^2 = uv$ এই প্রতিস্থাপনের দ্বারা $f(x, y)$ অপেক্ষকটি $g(u, v)$-তে রূপান্তরিত হল। দেখাও যে

$$g_{uv} = \frac{1}{4}\left\{ f_{xx} + \frac{2x}{y} f_{xy} + f_{yy} + \frac{1}{y} f_y \right\}$$

(দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত ধরে নাও)

উত্তর : $\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = f_x \cdot \frac{1}{2} + f_y \cdot \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{2} f_x + \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} . f_y \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(f_x).\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}(f_x).\frac{\partial y}{\partial u}\right] +$$

$$\frac{1}{4\sqrt{uv}} f_y + \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(f_y).\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}(f_y).\frac{\partial y}{\partial u}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[f_{xx}\cdot\frac{1}{2} + f_{yx}\cdot\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}\right] + \frac{1}{4\sqrt{uv}}.f_y + \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\left[f_{xy}\cdot\frac{1}{2} + f_{yy}\cdot\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[f_{xx} + f_{yx}\left(\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} + \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}\right) + f_{yy} + \frac{1}{\sqrt{uv}}.f_y\right] \quad (\text{এখানে } f_{xy} = f_{yx})$$

$$= \frac{1}{4}\left[f_{xx} + \frac{2x}{y}f_{xy} + f_{yy} + \frac{1}{y}f_y\right]$$

8.13 অনুশীলনী

(1) z(x, y) অপেক্ষকের স্বাধীন চলরাশিদ্বয় x ও y-এর ক্ষেত্রে $x = e^u + e^{-v}$, $y = e^{-u} - e^v$ হলে দেখাও যে

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}$$ (প্রথম ক্রমের আংশিক আন্তরকলজগুলি সন্তত ধরে নাও)

(2) z = f(x, y)-এ $x = (u + v)^2$, $y = (u - v)^2$ এবং সমস্ত প্রথমক্রমের আংশিক অন্তরকলজ সন্তত হলে দেখাও যে, $u\frac{\partial z}{\partial u} + v\frac{\partial z}{\partial v} = 2\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

(3) v = v(x, y)-এ $x = e^u \cos t$, $y = e^u \sin t$ এবং সমস্ত প্রথমক্রমের আংশিক অন্তরকলজ সন্তত হলে দেখাও যে $\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 = (x^2 + y^2)\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\}$

(4) u = f(x, y) এবং $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (সব অন্তরকলজ সন্তত)

(i) $u_x^2 + u_y^2 = u_r^2 + \frac{1}{r^2}u_\theta^2$ (ii) $u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_\theta^2$

(5) w = f(x, y) ; z = u cos h v, y = u sin h v ও অন্তরকলজ সন্তত হলে

$$w_x^2 - w_y^2 = w_u^2 - \frac{1}{u^2}w_v^2$$

8.14 সমঘাতী অপেক্ষক ও অয়লারের উপপাদ্য

প্রস্তাবনা : সেন্ট পিটার্সবুর্গ একাডেমী অব সায়েন্সেস-এর সদস্য, গণিতজ্ঞ ও থিওরিটিক্যাল Î÷ßÁòßÁÄÛÁ¿ÁËú ø; ¿Ýò±ÕÁÕûþ±Á (১৭০৭-১৭৮৩) গণিতের বিভিন্ন শাখায় গুরুত্বপূর্ণ অবদান রেখেছেন। জন্মসূত্রে সুইজারল্যান্ডের হলেও জীবনের বেশিরভাগ সময় রাশিয়ায় অতিবাহিত করেছেন। গাণিতিক বিশ্লেষণ তত্ত্ব তাঁর প্রচুর অবদান আছে—সমঘাতী অপেক্ষক সম্পর্কিত তাঁর তত্ত্বটি নিম্নে বিবৃত হল।

সংজ্ঞা : মনে করি $f : S \to R$ যেখানে $S \subset R^2$

f অপেক্ষককে S-এ n মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক বলা হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি প্রতিটি $(x, y) \in S$, প্রতিটি ধনাত্মক সংখ্যা λ যাতে $(\lambda x, \lambda y) \in S$-এর ক্ষেত্রে $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ হয়।

উদাহরণ : (i) $f(x, y) = \sin^{-1}\frac{x}{y} + \tan^{-1}\frac{y}{x}, xy \neq 0$

$f(tx, ty) = f(x, y)$ এবং ফলে '0' মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক।

(ii) $f(x, y) = x^{1/3}y^{-5/6}\log\frac{y}{x}$

$f(tx, ty) = t^{-1/2}f(x, y)$ প্রতিটি $t > 0$, $(tx, ty) \in D_f$-এর জন্য

অতএব $f, -\frac{1}{2}$ মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক।

অয়লারের উপপাদ্য : যদি $f(x, y)$ সংজ্ঞার অঞ্চল S-এ n মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক হয় এবং অপেক্ষকের প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি S-এ সন্তত হয়, তবে $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$

প্রমাণ : n মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক বলে

$$f(tx, ty) = \pi^n f(x, y) \text{ যেখানে } (tx, ty) \in S$$

$$\frac{\partial f}{\partial(tx)}\cdot\frac{d}{dt}(tx) + \frac{\partial f}{\partial(ty)}\cdot\frac{d}{dt}(ty) = nt^{n-1}f(x, y)$$

$$x\frac{\partial f}{\partial(tx)} + y\frac{\partial f}{\partial(ty)} = nt^{n-1}f(x, y)$$

$t = 1$ বসিয়ে $xf_x + yf_y = nf(x, y)$

মন্তব্য ঃ (1) উক্ত উপপাদ্যে বর্ণিত শর্ত ছাড়াও যদি f-এর দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক আন্তরকলজগুলি সন্তত হয়, তবে

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=n(n-1)f(x,y)$$

প্রমাণ : $\frac{\partial}{\partial x}\left(xf_x+yf_y\right)=\frac{\partial}{\partial x}(nf)$ এবং $\frac{\partial}{\partial y}\left(xf_x+yf_y\right)=\frac{\partial}{\partial y}(nf)$

সুতরাং $xf_{xx}+yf_{xy}=(n-1)f_x$ এবং $xf_{yx}+yf_{yy}=(n-1)f_y$

ফলে $x(xf_{xx}+yf_{xy})+y(xf_{yx}+yf_{yy})=(n-1)(xf_x+yf_y)$

অতএব $x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy}=n(n-1)f(x,y)$

[এখানে সোয়ার্জের উপপাদ্য অনুযায়ী $f_{xy}=f_{yx}$ হবে]

(2) অয়লারের উপপাদ্যের বিপরীতটি সত্য : যদি কোন অপেক্ষক $f:S\to R$ ($S\subset R^2$)-এর প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজদ্বয় সন্তত হয় এবং $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=n.f(x,y)$ হয় তবে f, n মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক হবে।

প্রমাণ : মনে করি (x_0, y_0) S-এর যে কোন বিন্দু।

মনে করি λ-এর সম্ভাব্য সকল ধনাত্মক মানের জন্য

$$f(\lambda x_0, \lambda y_0)=\varphi(\lambda)((\lambda x_0, \lambda y_0)\in S)$$

$$\varphi'(\lambda)=x_0f_1(\lambda x_0, \lambda y_0)+y_0f_2(\lambda x_0, \lambda y_0)$$

(f_1 ও f_2 যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় চলরাশির সাপেক্ষে অন্তরকলজ)

$nf(\lambda x_0, \lambda y_0)=\lambda x_0f_1(\lambda x_0, \lambda y_0)+\lambda y_0f_2(\lambda x_0, \lambda y_0)$

সুতরাং $\lambda\varphi'(\lambda)=n\varphi(\lambda)$

এখন $\frac{d}{d\lambda}[\lambda^{-n}\varphi(\lambda)]=\lambda^{-n-1}[\lambda\varphi'(\lambda)-n\varphi(\lambda)]=0$

অতএব $\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^n}=$ ধ্রুবক C

$\lambda=1$ বসালে $C=\varphi(1)=f(x_0, y_0)$

সুতরাং $f(\lambda x_0, \lambda y_0)=\lambda^n f(x_0, y_0)$

এই সম্পর্ক প্রতিটি $(x_0, y_0)\in$ S-এর জন্য সত্য।

অতএব f হল n-মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক।

8.15 উদাহরণ

(1) $e^u=\frac{x^2+y^2}{x+y}=f(x,y)$

উত্তর : f(tx, ty) = tf(x, y), অতএব f একমাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক এবং প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত। অয়লারের উপপাদ্য অনুযায়ী $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=1, f(x,y)$

অতএব $x\frac{\partial}{\partial x}(e^u)+y\frac{\partial}{\partial y}(e^u)=n.\, e^u=1.\, e^u$

সুতরাং $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=1$

(2) $u=\frac{x^{1/4}+y^{1/4}}{x^{1/5}+y^{1/5}}$

উত্তর : u(tx, ty) = $t^{1/20}$ u(x, y), সুতরাং $u, \frac{1}{20}$ মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক এবং প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত। অয়লারের উপপাদ্য অনুযায়ী $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{20}\cdot u(x,y)$ এবং লক্ষনীয় u-এর দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলিও সন্তত।

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{20}\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{20}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$xu_{xx}+yu_{xy}+u_x=\frac{1}{20}u_x, xu_{yx}+yu_{yy}+u_y=\frac{1}{20}u_y$$

$$x(xu_{xx}+yu_{xy}+u_x)=\frac{1}{20}xu_x, y(xu_{yx}+yu_{yy}+u_y)=\frac{1}{20}yu_y$$

যোগ করিয়া $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=-\frac{19}{20}(xu_x+yu_y)$ (সোয়ার্জ উপপাদ্য অনুযায়ী $u_{xy}=u_{yz}$) $=-\frac{19}{400}u(x,y)$

(3) $f(x,y)=\frac{(x^2+y^2)^n}{2n(2n-1)}+xg\left(\frac{y}{x}\right)+h\left(\frac{x}{y}\right)$। দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলনগুলি সন্তত।

উত্তর : $f_1(x,y)=\frac{(x^2+y^2)^n}{2n(2n-1)}: 2n$ মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক।

অয়লারের উপপাদ্য অনুযায়ী $x\frac{\partial f_1}{\partial x}+y\frac{\partial f_1}{\partial y}=2nf_1(x,y)$

$$x.\frac{\partial}{\partial x}\left\{x\frac{\partial f_1}{\partial x}+y\frac{\partial f_1}{\partial y}\right\}+y\frac{\partial}{\partial y}\left\{x\frac{\partial f_1}{\partial x}+y\frac{\partial f_1}{\partial y}\right\}=2n\left[x\frac{\partial f_1}{\partial x}+y\frac{\partial f_1}{\partial y}\right]$$

$$x^2 f_{1_{xx}}+2xyf_{1_{xy}}+y^2 f_1yy=2n(2n-1)f_1(x,y) \text{ .... } (1)$$

$f_2(x,y)=xg\left(\frac{y}{x}\right)$: 1 মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক।

$$x\frac{\partial f_2}{\partial x}+y\frac{\partial f_2}{\partial y}=1.f_1(x,y)$$

সুতরাং $x\frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial f_2}{\partial x}+y\frac{\partial f_2}{\partial y}\right]+y\frac{\partial}{\partial y}\left[x\frac{\partial f_2}{\partial x}+y\frac{\partial f_2}{\partial y}\right]=x\frac{\partial f_2}{\partial x}+y\frac{\partial f_2}{\partial y}$

অতএব $x^2 f_{2_{xx}}+2xyf_{2_{xy}}+y^2 f_{2_{yy}}=0$ .... (2)

$f_3(x, y) = h\left(\frac{x}{y}\right)$: 0 মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক।

$$x^2 f_{3_{xx}}+2xyf_{3_{xy}}+y^2 f_3yy=0 \text{ .... } (3)$$

(1) + (2) + (3) করিয়া পাই, $x^2 f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2 f_{yy}=2n(2n-1)f=(x^2+y^2)^n$

8.16 অনুশীলনী

(1) যদি $u(x, y) = (x^2+y^2)^{2/3}$ হয়, আংশিক অন্তরকলজ নির্ণয় না করে $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ নির্ণয় করো।

(2) যদি $u(x, y) = \cos^{-1}\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ হয়, আংশিক অন্তরকলজ নির্ণয় না করে $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ নির্ণয় কর।

(3) যদি $u(x, y) = \sin^{-1}\frac{x}{y}+\tan^{-1}\frac{y}{x}$ হয়, তবে অন্তরকলজগুলি নির্ণয় করে $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে অয়লারের উপপাদ্যর যথার্থতা যাচাই কর।

(4) দেখাও যে, $z(x, y) = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{x}{y}\right)$ অপেক্ষকটি $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ $+ y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে (φ ও ψ-এর অন্তরকলজগুলি সন্তত ধরে নাও)।

(5) **যদি** $u(x, y) = \sqrt{xy}\, \psi\left(\frac{y}{x}\right)$ হয়, তবে অন্তরকলজগুলির মান নির্ণয় না-করে $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$-এর মান নির্ণয় করো।

8.17 দুই চলরাশির অপেক্ষকের সমগ্র অবকলের ধারণা

মনে করি $z = f(x, y)$-এর প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত।

মনে করি $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ অর্থাৎ দুই স্বাধীন চলরাশি x ও y-এর ক্ষেত্রে যথাক্রমে Δx ও Δy পরিবর্তনের জন্য অপেক্ষকের পরিবর্তন হল Δz।

$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$-কে f অপেক্ষকের সমগ্র অবকল বলে অভিহিত করা হয় :

$$dz = df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

বা, $dz = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ । এখানে dx ও dy যথাক্রমে x ও y-এর অবকল, এদের ক্ষেত্রে $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ কিন্তু $dz \neq \Delta z$

মন্তব্য ঃ (1) $M(x, y)\, dx + N(x, y)dy$-কে যথার্থ অবকল বলা হবে যদি এমন কোন অপেক্ষক $z(x, y)$-এর অস্তিত্ব থাকে যার জন্য $dz = Mdx + Ndy$ হয়। যেমন, $2xydx + x^2dy$-কে লেখা যায় $d(x^2y)$। উক্ত রাশিটি যথার্থ অবকল কিনা যাচাই করার একটি পদ্ধতি হল $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ সিদ্ধ হয় কিনা—যথার্থ অবকল হবে যদি এবং কেবলমাত্র $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ যদি হয়।

(2) অপেক্ষকের দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত হলে দ্বিতীয় ক্রমের সমগ্র অবকল হবে।

$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$ (এখানে $d^2f = d(df)$, $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$ বোঝাবে)

উদাহরণ : (1) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10 \ln y$, (1, 2) বিন্দুতে df নির্ণয় কর।

উত্তর : $f_x = 2x + y - \frac{4}{x}, f_y = x + 2y - \frac{10}{y}$

(1, 2) বিন্দুতে $f_x = 0$, $f_y = 0$; অতএব $df = 0$

(2) উক্ত অপেক্ষকের ক্ষেত্রে উক্ত বিন্দুতে d^2f নির্ণয় করো।

উত্তর : $f_{xx} = 2 + \frac{4}{x^2}, f_{yy} = 2 + \frac{10}{y^2}, f_{xy} = f_{yx} = 1, f_{xx}(1, 2) = 6, f_{yy}(1, 2) = \frac{9}{2}$ এবং ফলে (1, 2) বিন্দুতে, $d^2f = 6dx^2 + 2dxdy + 9dy^2$

8.18 তিন চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে সম্প্রসারিত ধারণাসমূহ

(1) যদি $w = f(x, y, z)$, $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \xi(u, v, w)$ দ্বারা সংযোজক অপেক্ষক $F(u, v, w)$ সংজ্ঞাত হয় এবং প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত হয়, তবে

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial F}{\partial w} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\end{aligned}\right\}$$

(2) $f(x, y, z)$-এর প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত হলে

$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ হবে।

(3) $f(x, y, z)$ একটি n মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক এবং এর প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত হলে $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf(x, y, z)$ হবে (অয়লারের উপপাদ্য) বিপরীতক্রমে, $f(x, y, z)$-এর প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত হলে এবং $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf(x, y, z)$ হলে f, n মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক হবে।

উদাহরণ : (1) $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$: শূন্যমাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক ও প্রথম ক্রমের আংশিক অন্তরকলজগুলি সন্তত।

অয়লারের উপপাদ্য অনুযায়ী $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=0$

(2) যদি $H = f(y - z, z - x, x - y)$ হয়, দেখাও যে $H_x + H_y + H_z = 0$

উত্তর : ধরি $y - z = p$, $z - x = q$, $x - y = r$ সুতরাং $H = f(p, q, r)$

$$\begin{aligned}
H_x &= H_p \cdot p_x + H_q \cdot q_x + H_r \cdot r_x = H_p.0 + H_q(-1) + H_r(1)\\
H_y &= H_p \cdot p_y + H_q \cdot q_y + H_r \cdot r_y = H_p.1 + H_q.0 + H_r.(-1)\\
H_z &= H_p \cdot p_z + H_q \cdot q_z + H_r \cdot r_z = H_p(-1) + H_q.1 + H_r.0
\end{aligned}$$

যোগ করে পাই, $H_x + H_y + H_z = 0$

অনুশীলনী : যদি $u = f(x^2 + 2yx, y^2 + 2zx)$ হয়, দেখাও যে

$(y^2 - xz)\frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 - yz)\frac{\partial u}{\partial y} + (z^2 - xy)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ হবে।

8.19 অপেক্ষক-সমীকরণ দ্বারা সংজ্ঞাত অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের ধারণা

প্রস্তাবনা : দুই চলরাশির অপেক্ষক সমীকরণ $f(x, y) = 0$ সবসময়ে y-কে একচলরাশি x-এর অপেক্ষক হিসাবে সংজ্ঞাত করে না। যেমন, $x^2 + y^2 + 1 = 0$। কিন্তু ক্ষেত্র বিশেষে $f(x, y) = 0$-ধাঁচের সমীকরণ কোন কোন বিন্দুর সামীপ্যে y-কে x-এর অনন্য অপেক্ষকরূপে সংজ্ঞাত করে। যেমন $2xy - \log(xy) = 2$ সমীকরণটি (1, 1) বিন্দুর সামীপ্যে y-কে x-এর অনন্য অপেক্ষক হিসাবে সংজ্ঞাত করে। $y = \frac{1}{x}$-এর জন্য সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। আর একটি সমীকরণ $x^2 + xy + y^2 = 1$ ধরা যাক্। y-দ্বিঘাত সমীকরণ হিসাবে এর সমাধান হল $y = \frac{-x \pm \sqrt{(4-3x^2)}}{2}$ যা $|x| \le \frac{2}{\sqrt{3}}$-এর জন্য প্রযোজ্য। লক্ষনীয় (1, – 1) বিন্দুর সামীপ্যে $y = \frac{-x - \sqrt{(4-3x^2)}}{2}$ সমাধানটি গ্রাহ্য, কিন্তু অপরটি নয়।

এই অংশে অনন্য অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অস্তিত্ব সম্পর্কে সংশ্লিষ্ট উপপাদ্যটি উপস্থাপিত করা হল :

(a, b), অপেক্ষক f-**এর সংজ্ঞার অঞ্চলে অন্তর্বিন্দু এবং (ক)** $f(a, b) = 0$ (খ) (a, b)-এর একটি সামীপ্যে f_x ও f_y সংজ্ঞাত এবং সন্তত (গ) $f_y(a, b) \neq 0$।

সেক্ষেত্রে (a, b)-কেন্দ্রিক সামীপ্য [a – h, a + h ; b – k, b + k]-এর অস্তিত্ব রয়েছে, যেখানে [a – h, a + h] অন্তরালে x-এর প্রতিটি মানের জন্য [b – k, b + k] অন্তরালে y-এর একটি

ও কেবলমাত্র একটিই মান থাকবে, যাহার সাহায্যে অনন্য অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষক $y = \theta(x)$ সংজ্ঞাত হবে যার জন্য $f(x, \theta(x)) = 0$ প্রতিটি x-এর জন্য হবে, $b = \theta(a)$ হবে। θ অপেক্ষকটি অবকলনযোগ্য হবে। $\theta'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$ হবে। $\frac{d^2y}{dx^2}$-এর অস্তিত্ব থাকলে।

$$y_2 = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_xf_yf_{xy} + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$$

উদাহরণ (1) $f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{ax + hy + g}{hx + by + f}$$

(2) $2xy - \log (xy) = 2$, (1, 1) বিন্দুর সামীপ্যে অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অস্তিত্ব ধরে নিয়ে ঐ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

উত্তর : $f(x, y) = 2xy - \log x - \log y - 2 = 0$

$$f_x = 2y - \frac{1}{x},\ f_y = 2x - \frac{1}{y}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{y}{x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = -1$$

(3) $xy \sin x + \cos y = 0$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ বিন্দুর সামীপ্যে অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অস্তিত্ব ধরে নিয়ে উক্ত বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

উত্তর : $f(x, y) = xy \sin x + \cos y$

$f_x = y \sin x + xy \cos x,\ f_y = x \sin x - \sin y$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = \frac{y \sin x + xy \cos x}{\sin y - x \sin x} \quad \text{এবং} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(0, \frac{\pi}{2}\right)} = 0$$

8.20 অনুশীলনী

(1) $2 \sin xy - y = 0$, $(1, 0)$ বিন্দুর সামীপ্যে অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অস্তিত্ব ধরে নিয়ে ঐ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

(2) $ye^x - x = 0$, $(0, 0)$ বিন্দুর সামীপ্যে অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অস্তিত্ব ধরিয়া লইয়া ঐ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

8.21 বহুচলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে চরম ও অবম মান নির্ণয়

সংজ্ঞা : মনে করি মুক্ত সেট S $(\subset R^2)$-এ f সংজ্ঞাত আছে এবং $(a, b) \in S$.

(a, b) বিন্দুতে f-এর আপেক্ষিক বা স্থানীয় চরম (অবম) মান থাকিবে যদি $\partial > 0$-এর অস্তিত্ব থাকে যার জন্য $f(x, y) \leq f(a, b)$ $(f(x, y) \geq f(a, b))$ হবে যেখানে $(x, y) \in N((a, b), \partial) \subset S$

উদাহরণ : $f(x, y) = x^2 + y^6 - 2xy^3 + y^3 + y^2 = (x - y^3)^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$

f অপেক্ষকের $(0, 0)$ বিন্দুতে অবম মান রয়েছে।

অপেক্ষকের চরম ও অবম মান নির্ধারণের ক্ষেত্রে নিম্ন উপপাদ্য দুটি বিবৃত করা হল :

(1) $f : S \to R$ যেখানে $S(\subset R^2)$ একটি মুক্ত সেট।

মনে কর S-এ f_x ও f_y উভয়েরই অস্তিত্ব রয়েছে।

যদি f-এর $(a, b)(\in S)$ বিন্দুতে স্থানীয় চরম বা অবম মান থাকে, তবে $f_x(a, b) = 0 = f_y(a, b)$ হবে।

মন্তব্য : (ক) $f(x) = |x| + |y|$ অপেক্ষকের $(0, 0)$ বিন্দুতে অবম মান আছে। ঐ বিন্দুতে f_x ও f_y-এর অস্তিত্ব নেই। সুতরাং এক চলরাশির অপেক্ষকের মত দুই চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রেও যে বিন্দুতে চরম বা অবম মান রয়েছে, সেই বিন্দুতে আংশিক আন্তরকলজদ্বয়ের অস্তিত্ব না-ও থাকতে পারে।

(খ) $f(x, y) = x^3 + y^3$-এর $(0, 0)$ বিন্দুতে চরম বা অবম মান নেই। কিন্তু ঐ বিন্দুতে f_x ও f_y উভয়েরই মান শূন্য।

অতএব (1)-এ বিবৃত উপপাদ্যের বিপরীতটি সত্য নয়।

(2) $f : S \to R$ $(S \in R^2)$ যেখানে S একটি মুক্ত সেট।

ধরি f-এর দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক আন্তরকলজগুলি S-এ সন্তত।

মনে করি $(a, b) \in S$ এবং $f_x(a, b) = 0 = f_y(a, b)$

মনে করি $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$, $C = f_{yy}(a, b)$

যদি $AC - B^2 > 0$ হয়, তবে (a, b) বিন্দুতে অপেক্ষকের চরম বা অবম মান থাকবে। $A > 0$ হলে ঐ ন্দিুতে অবম মান থাকবে, $A < 0$ হলে ঐ বিন্দুতে চরম মান থাকবে। $AC - B^2 < 0$ হলে চরম বা অবম মান থাকবে না।

$AC - B^2 = 0$ হলে ঐ বিন্দুতে চরম বা অবম মান থাকতে পারে, না-ও থাকতে পারে।

মন্তব্য : এই উপপাদ্যের প্রমাণটি দুটি চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে টেলরের উপপাদ্য নির্ভর।

8.22 উদাহরণ

(1) $f(x, y) = xy(6 - x - y)$

এখানে $f_x = 6y - 2xy - y^2$, $f_y = 6y - x^2 - 2xy$

$f_x = 0 = f_y$ করিয়া চারটি বিন্দু $(0, 0)$ $(0, 6)$ ও $(6, 0)$ $(2, 2)$ পাওয়া যায়।

$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4xy - (6 - 2x - 2y)^2$

$D(0, 0) = -36 < 0$, $D(0, 6) = -(6 - 12)^2 < 0$, $D(6, 0) < 0$

$D(2, 2) = 12 > 0$ এবং $f_{xx}(2, 2) = -4 < 0$

অতএব $(0, 2)$ বিন্দুতে অপেক্ষকের চরম মান রয়েছে।

(2) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 6y$

$f_x = 2x + y - 6$, $f_y = x + 2y - 6$

$f_x = 0 = f_y$ করে $(2, 2)$ বিন্দু পাওয়া যায়।

$f_{xx} - f_{xy}^2 = 2(2) - 1^2 > 0$ এবং $f_{xx} > 0$

$(2, 2)$ বিন্দুতে অবম মান রয়েছে।

8.23 তিন চলরাশির অপেক্ষকের ক্ষেত্রে চরম বা অবম মান নির্ণয়

$f : D \to R$ যেখানে $D \subset R^3$

পূর্বের ন্যায় f-এর উপর একই ধরণের শর্তাধীনে মনে করি (a, b, c) বিন্দুতে $f_x = f_y = f_z = 0$

ধরি ঐ বিন্দুতে $D_1 = f_{xx}, D_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$

যদি $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0$ হয়, সেক্ষেত্রে (a, b, c) বিন্দুতে f-এর চরম মান থাকবে।

যদি $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0$ হয়, সেক্ষেত্রে (a, b, c) বিন্দুতে f-এর অবম মান থাকবে।

উদাহরণ : $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 3xy + 8z$

$f_x = 4x - 3y,\ f_y = 6y - 3x,\ f_z = 8z + 8$

$f_x = f_y = f_z = 0$ হতে পাই $x = 0 = y$ এবং $z = -1$

$f_{xx} = 4,\ f_{yy} = 6,\ f_{zz} = 8,\ f_{xy} = f_{yx} = -3,\ f_{xz} = f_{zx} = 0$

$f_{yz} = f_{zy} = 0$

$$D_1 = 4 > 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} > 0,\ D_3 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} > 0$$

অতএব (0, 0, –1) বিন্দুতে অপেক্ষকের অবম মান রয়েছে।

8.24 শর্তাধীনে চরম-অবম মান নির্ণয়ে ল্যাংরাঞ্জের পদ্ধতি

ব্যবহারিক ক্ষেত্রে অপেক্ষকের চরম ও অবম মান নির্ধারণের ক্ষেত্রে অনেক সময়েই কিছু শর্ত আরোপিত হয়। উদাহরণস্বরূপ একটি নির্ধারিত গোলকের মধ্যে সর্বোচ্চ আয়তন বিশিষ্ট আয়তাকার বাক্সকে সন্নিবিষ্ট করতে হলে কিভাবে অগ্রসর হতে হবে, দুটি নদী যাদের উপকূল সরলরৈখিক নয়, তাদের মধ্যে যোগাযোগকারী খালের দৈর্ঘ্য সর্বনিম্ন ও সবচেয়ে কম খরচ করতে গেলে কিভাবে করা যাবে ইত্যাদি সমাধানের জন্য ল্যাংরাঞ্জের পদ্ধতি অনুসৃত হয়ে থাকে।

মনে করি, $z = f(x, y)$ প্রদত্ত অপেক্ষক এবং $\varphi(x, y)$ = ধ্রুবক প্রদত্ত শর্ত। ধরি $F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ যেখানে λ হল ল্যাংরাঞ্জের অনির্ণেয় ধ্রুবক গুণিতক।

$dF = (f_x + \lambda\varphi_x)dx + (f_y + \lambda\varphi_y)\ dy$

চরম বা অবম মানের ক্ষেত্রে

$f_x + \lambda\varphi_x = 0 = f_y + \lambda\varphi_y$;

এখানে $\dfrac{f_x}{\varphi_x} \neq \dfrac{f_y}{\varphi_y}$

x ও y-এর মান নির্ণয়ের পর d^2F নির্ণয় করতে হবে। নির্ধারিত বিন্দুতে $d^2F < 0$ হলে চরম এবং $d^2F > 0$ হলে অবম মান থাকবে।

মন্তব্য : অপেক্ষকে চলরাশির সংখ্যা বেশি হলে এবং/অথবা চলরাশিগুলির মধ্যে 'শর্ত' একাধিক থাকলে অনুরূপভাবে ল্যাংরাঞ্জের পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হয়। অধিকসংখ্যক চলরাশি ও কমসংখ্যক শর্তাধীনে এই পদ্ধতি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ।

উদাহরণ :

(1) ধনাত্মক সংখ্যা ‘a’-কে দুটি অংশ x ও y-তে ভাগ কর যাতে $f(x, y) = x^m y^n$ সর্বোচ্চ হতে পারে $(m > 0, n > 0)$.

উত্তর : $\log f = m \log x + n \log y$

$$\frac{df}{f} = \frac{m}{x}dx + \frac{n}{y}dy$$

$df = 0$ হতে পাই, $\frac{m}{x}dx + \frac{n}{y}dy = 0$

$x + y = a$ হতে পাই $dx + dy = 0$

সুতরাং $\left(\lambda\frac{m}{x} + 1\right)dx + \left(\lambda\frac{n}{y} + 1\right)dy = 0$

এর থেকে পাই, $\frac{m}{x} = \frac{n}{y} = -\frac{1}{\lambda}$

অর্থাৎ $-\lambda = \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{x+y}{m+n} = \frac{a}{m+n}$ $\quad\therefore\ \lambda = -\frac{a}{m+n}$

$x = \frac{am}{m+n},\ y = \frac{an}{m+n}$

$$d^2f = df\left(\frac{m}{x}dx + \frac{n}{y}dy\right) + f\left\{-\frac{m}{x^2}(dx)^2 - \frac{n}{y^2}(dy)^2\right\}$$

ঐ বিন্দুতে $d^2f < 0$, সুতরাং ঐ বিন্দুতে f সর্বোচ্চ।

(2) ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে cos A cos B cos C-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করো।

উত্তর : $f(x, y, z) = \cos A \cos B \cos C + \lambda(A + B + C - \pi)$

$df = (\lambda - \sin A \cos B \sin C)\ dA + (\lambda - \cos A \sin B \cos C)\ dB$
$\quad + (\lambda - \cos A \cos B \sin C)\ dC = 0$

হতে পাই, $\lambda = \sin A \cos B \cos C = \cos A \sin B \cos C = \cos A \cos B \sin C$

অর্থাৎ $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ এবং $\lambda = \frac{3}{8}$

$d^2f = -\cos A \cos B \cos C\ [(dA)^2 + (dB)^2 + (dC)^2]$

$$d^2f\Big|_{A=B=C=\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{8}[(dA)^2 + (dB)^2 + (dC)^2] < 0$$

সুতরাং $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ তে $\cos A \cos B \cos C$ সর্বোচ্চ এবং উহার মান $\frac{1}{8}$

8.25 অনুশীলনী

(1) চরম বা অবম মান নির্ণয় কর।

(ক) $y^2 + 4xy + 3x^2 + x^3$

(খ) $x^2 + xy + y^2 + ax + by \quad (a, b \in R)$

(গ) $(x + y + z)^3 - 3(x + y + z) - 24 xyz$

(2) ল্যাংরাঞ্জের পদ্ধতির সাহায্যে $x^2 + y^2 + z^2$-এর অবম মান নির্ণয় কর যেখানে $x + y + z = 3a$।

8.26 সহায়ক গ্রন্থ

1. Differential Calculus—Shantinarayan
2. Problems in Mathematical Analysis—B. Demidovich (Mir Publishers)

একক 9 ❐ বক্ররেখার স্পর্শক, অভিলম্ব এবং রৈখিক অসীমপথ

গঠন

9.1 স্পর্শক ও অভিলম্বের সংজ্ঞা

9.2 বক্ররেখার কার্তিয় সমীকরণের ক্ষেত্রে স্পর্শক-অভিলম্বর সমীকরণ নির্ণয়

9.3 দ্বি-বিন্দু—সংজ্ঞা ও তার প্রকৃতি

9.4 অনুশীলনী

9.5 বক্ররেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে কোণের পরিমাণ নির্ণয়

9.6 উপ-স্পর্শক ও উপ-অভিলম্বের সংজ্ঞা ও দৈর্ঘ্য নির্ণয়

9.7 বক্ররেখার মেরু সমীকরণের ক্ষেত্রে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় পদ্ধতি

9.8 মেরু উপ-স্পর্শক ও মেরু উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয়

9.9 দুইটি বক্ররেখার মেরু সমীকরণের ক্ষেত্রে অন্তর্ভূক্ত কোণ নির্ণয়

9.10 বক্ররেখার পাদ-সমীকরণ **(Pedal Equation of a Curve)** নির্ণয়

9.11 বক্ররেখার পাদরেখা **(Pedal of a Curve)** নির্ণয়

9.12 চাপদৈর্ঘ্যের অবকল সহগ

9.13 বক্ররেখার অসীম পথ

9.14 বক্ররেখার সমীকরণ **F(x, y) = 0** থেকে অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল অসীমপথ নির্ণয়ের বিকল্প পদ্ধতি

9.15 বক্ররেখার তির্যক অসীমপথ নির্ণয়ের দুটি পদ্ধতি

9.16 বিশেষ আকারের বীজগাণিতিক সমীকরণের ক্ষেত্রে পদ্ধতি

9.17 বক্ররেখার সঙ্গে অসীমপথগুলির ছেদবিন্দু ও তাদের সঞ্চার পথ

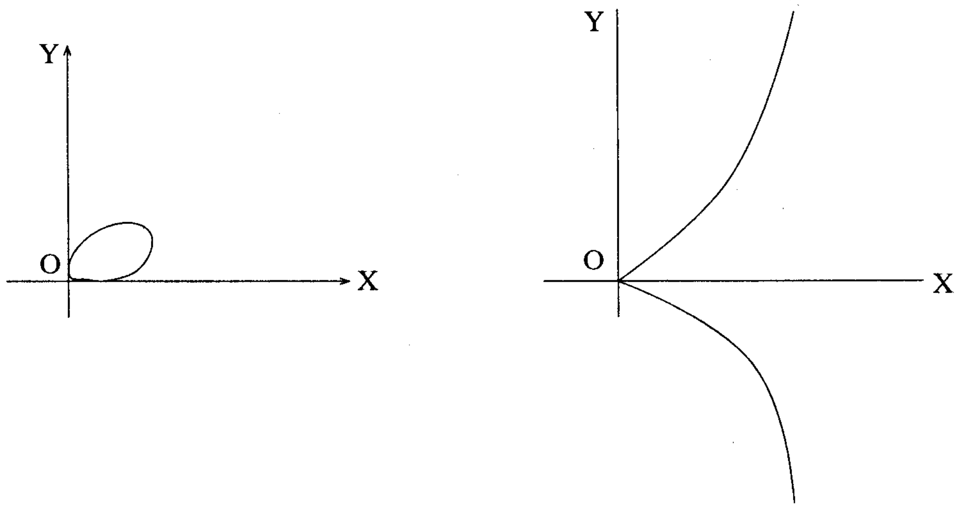
9.18 অনুশীলনী

9.19 সহায়ক গ্রন্থ

9.1 স্পর্শক ও অভিলম্বের সংজ্ঞা

মনে করি P ও Q একটি প্রদত্ত বক্ররেখার উপর ভিন্ন বিন্দু, যেখানে Q বিন্দুকে P-এর যেকোন দিকে নিকটবর্তী বিন্দু হিসাবে লওয়া যায়। যদি Q বিন্দু P বিন্দুর দিকে বক্ররেখা বরাবর অগ্রসর হয়, জ্যা PQ-এর অবস্থান P বিন্দুগামী হয়েও পরিবর্তিত হতে থাকবে। Q বিন্দু যখন P বিন্দুর উপর প্রায় সমাপতিত হবে, তখন জ্যা PQএর সীমাস্থ অবস্থানকে P বিন্দুতে উক্ত বক্ররেখার স্পর্শক বলা হবে। স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব রেখাকে অভিলম্ব বলা হবে।

এই অবকাশে আমরা নীচের চিত্রগুলির প্রতি পাঠকদের দৃষ্টি আকর্ষণ করছি :



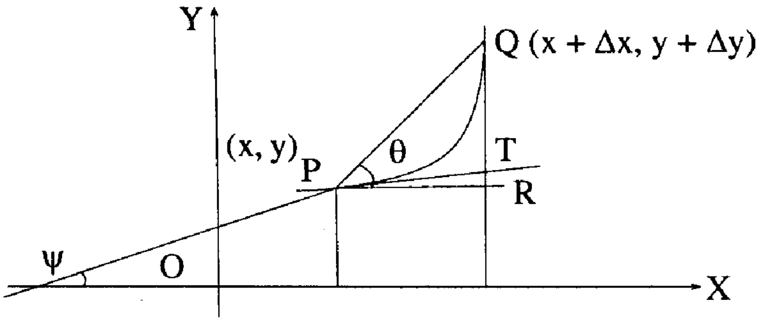
বাম দিকের চিত্রে মূলবিন্দুতে বক্ররেখার দুটি স্পর্শক, ডান দিকের চিত্রে মূলবিন্দুতে বক্ররেখার একটিই স্পর্শক। বক্ররেখার একটি বিন্দুতে একাধিক বাস্তব স্পর্শক থাকার বিষয়টি আমরা পরে আলোচনা করব।

9.2 বক্ররেখার কার্তিয় সমীকরণের ক্ষেত্রে স্পর্শক-অভিলম্বর সমীকরণ নির্ণয়

$P(x, y)$ ও $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ বক্ররেখার উপর দুইটি বিন্দু।

$$\tan\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

যখন Q বিন্দুটি বক্ররেখা বরাবর P বিন্দুর দিকে ধাবিত হবে, $\Delta x \to 0$ হয় এবং জ্যা PQ ও x-অক্ষের মধ্যেকার কোণ θ, ψ-এর দিকে ধাবিত হয়, যেখানে ψ হল P বিন্দুতে স্পর্শক ও x-অক্ষের মধ্যেকার কোণ।



সুতরাং $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\theta \to \psi} \tan\theta$

ফলে $\frac{dy}{dx} = \tan\psi$ অর্থাৎ যে সব বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$-এর সসীম, সুনির্দিষ্ট মান রয়েছে এমন সব বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ যথাক্রমে

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) \quad \ldots\ldots \; (1)$$

$$(Y - y)\frac{dy}{dx} + (X - x) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

বক্ররেখার সমীকরণটি মুলবিন্দুগামী মূলদ বীজগাণিতিক সমীকরণ যথা

$(a_1x + b_1y) + (a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2) + \ldots + (a_nx^n + \ldots\ b_ny^n) = 0$

যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

সমীকরণে x ও y-এর ন্যূনতম ঘাতবিশিষ্ট পদ বা পদগুলির যোগফলকে শূন্যের সঙ্গে সমান করলে উক্ত স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যায়।

উদাহরণস্বরূপ, $y^2 = 4ax$-এর মূলবিন্দুতে স্পর্শক $x = 0$ অর্থাৎ y-অক্ষ। $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a \neq 0)$-এর মূলবিন্দুতে দুইটি স্পর্শক $x = 0$ ও $y = 0$ পাওয়া যায় (9.1-এ বাম দিকের চিত্র)।

$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$ $(a, b \in R;\ ab \neq 0)$-এর মূলবিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ হল $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$ অর্থাৎ $ax \pm by = 0$

শেষোক্ত উদাহরণ দুটির মারফৎ আমরা একটি নতুন পরিস্থিতির সম্মুখীন হয়েছি, যেখানে একটি বিন্দুতে একাধিক স্পর্শকের অস্তিত্ব আছে।

9.3 দ্বি-বিন্দু সংজ্ঞা ও তাহার প্রকৃতি

যদি বক্ররেখার উপরিস্থ কোন বিন্দু দিয়া বক্ররেখার দুটি শাখা যায়, সেই বিন্দুকে দ্বিবিন্দু বলা

হবে। দ্বিবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক বাস্তব ও ভিন্ন হলে সেই বিন্দুকে (Node) নোড বা গাঁট বলা হয় এবং দ্বিবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক বাস্তব ও সমাপতিত হলে সেই বিন্দুকে (Cusp) কাস্প বা স্কন্ধ বলা হয়। দ্বিবিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় কাল্পনিক হলে বিন্দুটিকে বিচ্ছিন্ন (Isolated) বিন্দু বলা হয়।

মনে করি প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণ $f(x, y) = 0$

যদি বক্ররেখার উপরিস্থ কোন বিন্দুতে

(1) $f_x = 0$, $f_y = 0$ হয়

(2) f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}-এর মধ্যে অন্তত একটি ঐ বিন্দুতে অশূন্য হয়, তবে ঐ, বিন্দুটি বক্ররেখার দ্বিবিন্দু হবে।

যদি ঐ বিন্দুতে $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = 0$ হয়, বিন্দুটি নোড বা গাঁট হবে।

সাধারণভাবে $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} > 0$ হলে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখার কাস্প বা স্কন্ধ থাকে—কিন্তু এর ব্যতিক্রম আছে। ফলে দ্বি-বিন্দু নির্ণয়ের পর কাস্প বা স্কন্ধ-এর অস্তিত্ব সম্পর্কে নিশ্চিত হতে গেলে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়ই বাস্তব পন্থা।

উদাহরণ : (1) $y^2 = ax^2 + bx^3$, $a, b \in R$, $b \neq 0$

উত্তর : $f(x, y) \equiv y^2 - ax^2 - bx^3 = 0$

$f_x = -2ax - 3bx^2$, $f_y = 2y$

$(0, 0)$ বিন্দুতে $f_x = 0 = f_y$ এবং $f(0, 0) = 0$

$f_{xx} = -2a - 6bx$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = f_{yx} = 0$

$(0, 0)$ বিন্দুতে $f_{xx} = -2a$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 2 \ (\neq 0)$

সুতরাং $(0, 0)$ বক্ররেখার উপর দ্বি-বিন্দু।

মূলবিন্দুতে স্পর্শক $y^2 - ax^2 = 0$

$a > 0$ হইলে $y^2 - ax^2$ কে দুটি রৈখিক, বাস্তব উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় এবং দুটি বাস্তব, ভিন্ন স্পর্শক পাওয়া যাবে—ফলে $a > 0$ হলে মূলবিন্দুটি নোড হবে।

$a = 0$ হলে স্পর্শক $y = 0$, বাস্তব ও সমাপতিত—ফলে মূলবিন্দুটি কাস্প হবে।

$a < 0$ হলে স্পর্শক কাল্পনিক এবং বিন্দুটি বিচ্ছিন্ন বিন্দু।

(2) $y^2 (a^2 + x^2) = x^2 (a^2 - x^2)$, $a \in R - \{0\}$

উত্তর : $f(x, y) \equiv a^2y^2 + x^2y^2 - a^2x^2 + x^4 = 0$

$f_x = 2xy^2 - 2a^2x + 4x^3$, $f_y = 2a^2y + 2x^2y$

$f_x = 0 = f_y$ হতে পাই $x = 0 = y$ এবং $f(0, 0 = 0$

$f_{xx} = 2y^2 - 2a^2 + 12x^2$, $f_{xy} = f_{yx} = 4xy$, $f_{yy} = 2a^2 + 2x^2$

$(0, 0)$ বিন্দুতে $f_{xx} = -2a^2 \ (\neq 0)$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 2a^2 \ (\neq 0)$

অতএব $(0, 0)$ বিন্দুটি দ্বি-বিন্দু। ঐ বিন্দুতে $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = 4a^4 > 0$ এবং বিন্দুটি নোড।

(3) $f(x, y) \equiv x^3 - y^2 - 7x^2 + 4y + 15x - 13 = 0$
দেখাও যে (3, 2) বিন্দুতে বক্ররেখার নোড আছে।
$f(3, 2) = 27 - 4 - 63 + 8 + 45 - 13 = 0$
$f_x = 3x^2 - 14x + 15,\ f_y = -2y + 4$
$f_x(3, 2) = 27 - 42 + 15 = 0,\ f_y(3, 2) = -4 + 4 = 0$
$f_{xx} = 6x - 14,\ f_{yy} = -2,\ f_{xy} = f_{yx} = 0$
(3, 2) বিন্দুতে $f_{xx} = 4,\ f_{yy} = -2,\ f_{xy} = 0$
অতএব ঐ বিন্দুতে $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = 8 > 0$ এবং বিন্দুটি নোড।

(4) $\theta = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $x = 2a\cos\theta - a\cos2\theta,\ y = 2a\sin\theta - a\sin2\theta$ বক্ররেখার স্পর্শকের ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} = \tan\frac{3\theta}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - (2a - 0) = \tan\frac{3\pi}{4}[x - (0 + a)]$

অর্থাৎ $y + x = 3a$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$y - 2a = -\cot\frac{3\pi}{4}[x - a]$

অর্থাৎ $x - y + a = 0$

(5) $x = \frac{2at^2}{1+t^2}, y = \frac{2at^3}{1+t^2};\ t = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{3t + t^3}{2}$ সুতরাং $\frac{dy}{dx}\Big/_{t=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{13}{16}$

$t = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে $x = \frac{2a}{5}, y = \frac{a}{5}$। উক্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - \frac{a}{5} = \frac{13}{16}\left(x - \frac{2a}{5}\right)$ অর্থাৎ $13x - 16y - 2a = 0$

ঐ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $y - \frac{a}{5} = \frac{-16}{13}\left(x - \frac{2a}{5}\right)$
অর্থাৎ $13y + 16x = 9a$