(6) বক্ররেখা $c^2(x^2 + y^2) = x^2y^2$ $(c \in R - \{0\})$-এর স্পর্শকের সমীকরণটি $x \cos^3\theta + y \sin^3\theta = c$ আকারে প্রকাশ কর।

উত্তর : ঐ বক্ররেখার উপর যে কোন বিন্দুর প্যারামেট্রিক বা প্রচলিক স্থানাঙ্ক হল $(c \sec \theta, c \operatorname{cosec}\theta)$

ঐ বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\theta}\Big/\dfrac{dx}{d\theta} = -\dfrac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$

ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$y - \frac{c}{\sin\theta} = -\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}\left(x - \frac{c}{\cos\theta}\right)$$

অর্থাৎ, $x \cos^3\theta + y \sin^3\theta = c$

(7) $x = a(4 \cos^3\theta - 3 \cos \theta)$, $y = a(4 \sin^3\theta - 9 \sin\theta)$; $a \in R - \{0\}$। দেখাও যে অক্ষদ্বয়ের মধ্যে অভিলম্বের ছেদিতাংশ ধ্রুবক।

উত্তর : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\theta}\Big/\dfrac{dx}{d\theta} = \cot\theta$

অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$y - a(4\sin^3\theta - 9\sin\theta) = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta}\left[x - a(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)\right]$$

সরলীকরণে পাওয়া যায়,

$$\frac{x}{-8a\cos\theta} + \frac{y}{-8a\sin\theta} = 1$$

অতএব অভিলম্বটি x-অক্ষকে $P(-8a \cos \theta, 0)$ ও y-অক্ষকে $Q(0, -8a \sin \theta)$ বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে। $PQ^2 = 64a^2$ অর্থাৎ $PQ = 8 |a| =$ ধ্রুবক।

(8) দেখাও যে $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, (a > 0)$, বক্ররেখায় স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ে স্পর্শকের দ্বারা ছেদিতাংশ ধ্রুবক।

উত্তর : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}\,(a > 0$ থেকে $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

বক্ররেখার উপরিস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - y_1 = -\frac{-\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1)$$

অর্থাৎ, $y.\sqrt{x_1} + x.\sqrt{y_1} = \sqrt{x_1 y_1 a}$

অথবা, $\dfrac{x}{\sqrt{ax_1}} + \dfrac{y}{\sqrt{ay_1}} = 1$

অতএব x-অক্ষ হতে স্পর্শকের ছেদিতাংশ $\sqrt{ax_1}$ এবং y-অক্ষ হতে স্পর্শকের ছেদিতাংশ $\sqrt{ay_1}$ এই দুই ছেদিতাংশের যোগফল $= \sqrt{ax_1} + \sqrt{ay_1} = a =$ ধ্রুবক।

(9) যদি $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ সরলরেখাটি $\dfrac{x^m}{a^m} + \dfrac{y^m}{b^m} = 1$ বক্ররেখার স্পর্শক হয়, দেখাও যে $p^{m/(m-1)} = (a\cos\alpha)^{m/(m-1)} + (b\sin\alpha)^{m/(m-1)}$

উত্তর : $\dfrac{x^m}{a^m} + \dfrac{y^m}{b^m} = 1$ হতে পাই $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^m x^{m-1}}{a^m y^{m-1}}$

(x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - y_1 = \frac{-b^m x_1^{m-1}}{a^m y_1^{m-1}}(x - x_1)$$

অর্থাৎ, $x.b^m x_1^{m-1} + y.a^m y_1^{m-1} = a^m b^m (1)$

এই রেখাটি ও $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p(2)$ রেখাটি একই।

সুতরাং, $\dfrac{b^m x_1^{m-1}}{\cos\alpha} = \dfrac{a^m y_1^{m-1}}{\sin\alpha} = \dfrac{a^m b^m}{p}$

$$x_1^{m-1} = \frac{a^m \cos\alpha}{p}, y_1^{m-1} = \frac{b^m \sin\alpha}{p}$$

$\dfrac{x_1^m}{a^m} + \dfrac{y_1^m}{b^m} = 1$-এ বসিয়ে পাই,

$$\left(\frac{a^m \cos\alpha}{p}\right)^{m/(m-1)} \cdot \frac{1}{a^m} + \left(\frac{b^m \sin\alpha}{p}\right)^{m/(m-1)} \cdot \frac{1}{b^m} = 1$$

অর্থাৎ, $(a\cos\alpha)^{m/(m-1)} + (b\sin\alpha)^{m/(m-1)} = p^{m/(m-1)}$

(10) $y = \sin x$ বক্ররেখায় (0, 0) বিন্দু হতে স্পর্শক অঙ্কিত হল। দেখাও যে স্পর্শবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ হল $x^2y^2 = x^2 - y^2$

উত্তর : বক্ররেখার উপরিস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - y_1 = \cos x_1(x - x_1)$

এটি (0, 0) বিন্দুগামী। অতএব $y_1 = x_1 \cos x_1$

সুতরাং, $x_1^2 - y_1^2 = x_1^2(1 - \cos^2 x_1) = x_1^2 \sin^2 x_1 = x_1^2 y_1^2$

অতএব, (x_1, y_1) বিন্দুর সঞ্চারপথ হল $x^2y^2 = x^2 - y^2$

9.4 অনুশীলনী

(1) $y(x - 2)(x - 3) - x + 7 = 0$ বক্ররেখাকে যে বিন্দুতে x-অক্ষ ছেদ করে, সেই বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(2) দেখাও যে $x = a \cos\theta + a\theta \sin\theta$, $y = a \sin\theta - a\theta \cos\theta$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব মূলবিন্দু থেকে ধ্রুবক দূরত্বে থাকবে।

(3) $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ রেখাটি $x^m y^n = a^{m+n}$ বক্ররেখার স্পর্শক হলে দেখাও যে $p^{m+1} m^m n^n = (m+1)^{m+n} a^{m+n} \sin^n \alpha \cos^m \alpha$ হবে।

(4) বক্ররেখা $x = a \cos^3\theta$, $y = b \sin^3\theta$–এর ক্ষেত্রে x_1, y_1 যথাক্রমে অক্ষদ্বয়ে স্পর্শকের ছেদিতাংশ হলে দেখাও যে, $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ হবে।

(5) দেখাও যে, $y^2 = 4a\left(x + a \sin\frac{x}{a}\right)$-এর উপরিস্থ যে সব বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের সমান্তরাল, সেই বিন্দুগুলি একটি অধিবৃত্তের উপরিস্থ।

9.5 বক্ররেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে কোণের পরিমাণ নির্ণয়

দুটি বক্ররেখার মধ্যেকার কোণ বলতে বোঝায় বক্ররেখা দুইটির ছেদবিন্দু অর্থাৎ সাধারণ বিন্দুতে দুটি বক্ররেখার অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যেকার কোণ। এই কোণ সমকোণ হলে বলা হয় ঐ দুই বক্ররেখা পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করেছে।

উদাহরণ (1) $ax^2 + by^2 = 1$ ও $cx^2 + dy^2 = 1(a, b, c, d \in 10 - \{0\})$ বক্ররেখা দুটি পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করলে a, b, c, d-এর মধ্যেকার সম্পর্ক নির্ণয় করো।

উত্তর : $ax^2 + by^2 = 1$ থেকে পাই $\frac{dy}{dx} = \frac{-ax}{by}$

$cx^2 + dy^2 = 1$ থেকে পাই $-\frac{cx}{dy}$

মনে করি ঐ দুই বক্ররেখার ছেদবিন্দু (p, q)।

ফলে $ap^2 + bq^2 = 1$, $cp^2 + dq^2 = 1$ এবং সমাধান করে পাই,

$$p^2 = \frac{d-b}{ad-bc} \cdot q^2 = \frac{c-a}{bc-ad}$$

যেহেতু স্পর্শক দুটি সমকোণে নত, সুতরাং $\left(\frac{-ap}{bq}\right)\left(-\frac{cp}{dq}\right) = -1$

$$\frac{ac}{bd} \cdot \frac{d-b}{a-c} = -1 \text{ অর্থাৎ } \frac{d-b}{bd} = \frac{c-a}{ac}$$

বা, $\frac{1}{b} - \frac{1}{d} = \frac{1}{a} - \frac{1}{c}$

(2) $x^3 + y^3 = 3axy$ ও $x^2 = ay$ $(a > 0)$-এর মধ্যেকার কোণ নির্ণয় কর।

উত্তর : দুটি সমীকরণ সমাধান করে ছেদবিন্দু পাই $(a.2^{1/3}, a.2^{2/3})$, $(0, 0)$

$$x^3 + y^3 = 3axy \text{ হতে } \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

$$x^2 = ay \text{ হতে } \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{a}$$

$(a.2^{1/3}, a.2^{1/3})$ বিন্দুতে প্রথমোক্ত বক্ররেখার ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx} = m_1 = 0$

এবং দ্বিতীয় বক্ররেখার ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx} = m_2 = 2^{4/3}$

θ নির্ণেয় কোণ হলে $\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = 2^{4/3}$ অর্থাৎ $\theta = \tan^{-1}(2^{4/3})$

(3) $x^2 = 4y$ এবং $y(x^2 + 4) = 8$ বক্ররেখাদ্বয়ের মধ্যেকার কোণ নির্ণয় করো।

উত্তর : দুটি সমীকরণ সমাধান করিয়া ছেদবিন্দু পাই $(\pm 2, 1) | x^2 = 4y$ থেকে $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$ এবং (2, 1) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 1 = m_1, y(x^2 + 4) = 8$ থেকে $\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 + 4}$ এবং (2, 1) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} = m_2, \theta$ নির্ণেয় কোণ হলে $\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = 3$ এবং $\theta = \tan^{-1} 3$

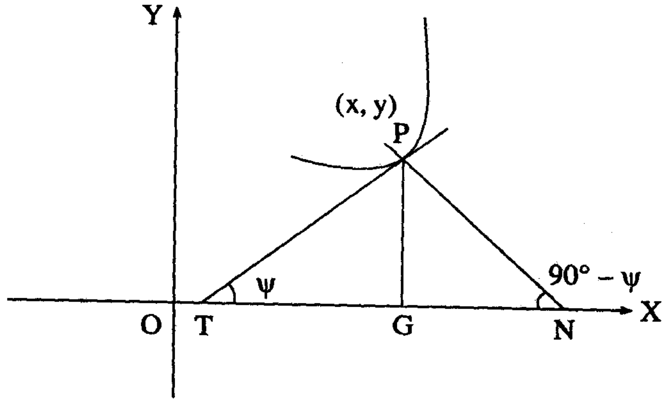
অনুশীলনী

(1) $y^2 = 4ax$ ও $x^2 = 4by$ অধিবৃত্তদ্বয়ের মধ্যে মূলবিন্দু ছাড়া অন্য ছেদবিন্দুতে কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

(2) $x^2 - y^2 = 8$ ও $xy = 3$ বক্ররেখাদ্বয়ের মধ্যেকার কোণ নির্ণয় কর।

সতর্কতা : কোন কোন বক্ররেখাদ্বয়ের ক্ষেত্রে দুটির $\frac{dy}{dx}$ যথাক্রমে $\frac{x}{y}$ ও $\frac{-y}{x}$ আসতে পারে। কিন্তু এক্ষেত্রেও ছেদবিন্দুর উল্লেখ না করে দুটি $\frac{dy}{dx}$ –এর গুণফল বিবেচনা করা যাবে না। একমাত্র ছেদবিন্দুর ক্ষেত্রেই উভয় বক্ররেখার x ও y সমান হবে। ছেদবিন্দু (p, q) ধরে নিয়ে অগ্রসর হওয়া যেতে পারে।

9.6 উপ-স্পর্শক ও উপ-অভিলম্বের সংজ্ঞা ও দৈর্ঘ্য নির্ণয়



P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি x-অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করে এবং P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বটি x-অক্ষকে N বিন্দুতে ছেদ করে। TG হইল উপ-স্পর্শক এবং NG হইল উপ-অভিলম্ব।

$$\tan\psi = \frac{PG}{TG},\ \tan(90^\circ - \psi) = \frac{PG}{NG}$$

ফলে উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \frac{y}{y_1}$, উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= yy_1$

স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= PT = \sqrt{(PG^2 + TG^2)} = \frac{y}{y_1}\ \sqrt{(1 + y_1^2)}$

অভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= PN = \sqrt{(PG^2 + NG^2)} = y.\sqrt{(1 + y_1^2)}$

এর থেকে পাই $\frac{\text{উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্য}}{\text{উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য}} = \left(\frac{\text{স্পর্শকের দৈর্ঘ্য}}{\text{অভিলম্বের দৈর্ঘ্য}}\right)^2$

উদাহরণ : $y = be^{x/a}$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে দেখাও যে উপস্পর্শকের দৈর্ঘ্য ধ্রুবক এবং উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য কোটির বর্গের সঙ্গো সরল ভেদে আছে।

উত্তর : $y_1 = \frac{b}{a}e^{x/a}$

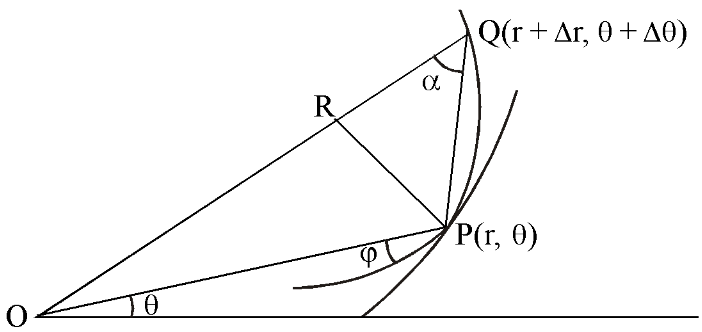
উপস্পর্শকের দৈর্ঘ্য $\frac{y}{y_1} = a =$ ধ্রুবক

উপঅভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= yy_1 = \frac{b^2}{a}e^{2x/a} = \frac{y^2}{a} \alpha y^2$

অনুশীলনী : (1) দেখাও যে, $x^{m+n} = k^{m-n}y^{2n}$ বক্ররেখার যেকোন বিন্দুতে উপ-স্পর্শকের m ঘাত উপ-অভিলম্বের n ঘাতের সঙ্গো সরলভেদে থাকবে।

(2) বক্ররেখা $by^2 = (x + a)^3$-এর ক্ষেত্রে দেখাও যে প্রতি বিন্দুতে উপ-স্পর্শকের বর্গ উপ-অভিলম্বের সঙ্গো সরলভেদে থাকবে।

9.7 বক্ররেখার মেরু সমীকরণের ক্ষেত্রে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় পদ্ধতি



$$\tan\alpha = \frac{PR}{QR} = \frac{r\sin\Delta\theta}{(r+\Delta r) - r\cos\Delta\theta} = \frac{r.\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\frac{\Delta r}{\Delta\theta} + \frac{r(1-\cos\Delta\theta)}{\Delta\theta}}$$

যখন Q বিন্দু বক্ররেখা বরাবর P বিন্দুর দিকে ধাবিত হয়,

$\Delta\theta \to 0$ হয় এবং $\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta} \to 1. \frac{\Delta r}{\Delta\theta} \to \frac{dr}{d\theta}$ হয়,

$$\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta} = 2\left\{\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\right\}^2 . \frac{\Delta\theta}{4} \to 0 \text{ হয়}$$

$\lim\limits_{\alpha \to \varphi} \tan\alpha = \tan\varphi = r \Big/ \frac{dr}{d\theta}$ বা, $\frac{r}{r_1}$ হয়।

স্পর্শক ψ কোণে মেরু অক্ষের সঙ্গে নত হলে $\psi = \varphi + \theta = \tan^{-1}\frac{r}{r_1} + \theta$ হবে।

উদাহরণ : $r = a(1 + \cos\theta)$–এর $\theta = 2\alpha$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $\tan\varphi \; r \Big/ \frac{dr}{d\theta} = \frac{a(1+\cos\theta)}{-a\sin\theta} = -\cot\frac{\theta}{2}$

ফলে $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$ এবং $\psi = \varphi + \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{3\theta}{2}$

সুতরাং $\theta = 2\alpha$ বিন্দুতে $\psi = \frac{\pi}{2} + 3\alpha$ হইবে।

ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - a(1 + \cos 2\alpha) \sin 2\alpha = -\cot 3\alpha \, [x - a(1 + \cos 2\alpha) \cos 2\alpha]$$

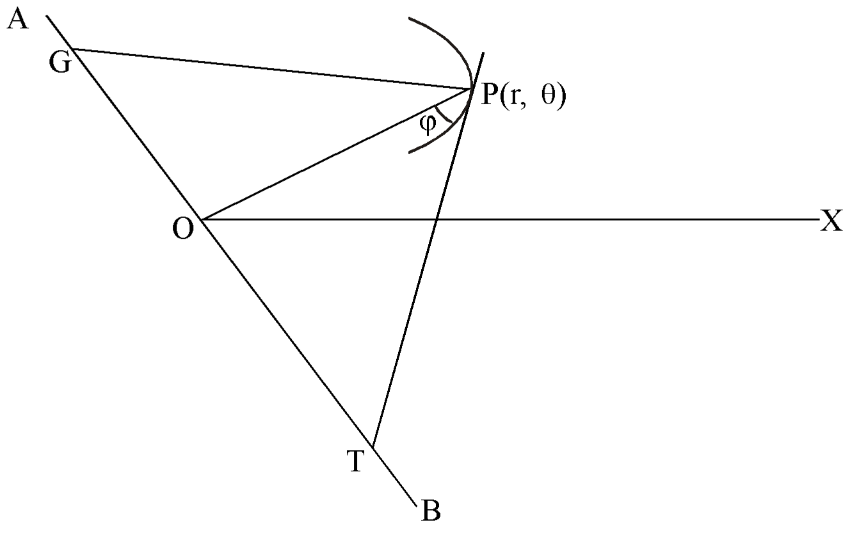
অর্থাৎ, $x \cos 3\alpha + y \sin 3\alpha = a \cos\alpha \, (1 + \cos 2\alpha)$

ঐ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$y - a(1 + \cos 2\alpha) \sin 2\alpha = \tan 3\alpha \, [x - a(1 + \cos 2\alpha) \cos 2\alpha]$$

অর্থাৎ, $x \sin 3\alpha - y \cos 3\alpha = a \sin\alpha \, (1 + \cos 2\alpha)$

9.8 মেরু উপ-স্পর্শক ও মেরু উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয়



AOB সরলরেখাটি O বিন্দুতে OP -এর উপর লম্ব। P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি AOB-কে T বিন্দুতে ছেদ করল এবং P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বটি AOB-কে G বিন্দুতে ছেদ করল। OT = উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্য এবং OG = উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য। $\tan\varphi = \frac{OT}{OP}$ এবং $\tan(90°-\varphi) = \frac{OG}{OP}$.

ফলে, উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= r\tan\varphi = \frac{r^2}{r_1}$

উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= r\cot\varphi = r_1$

মন্তব্য : (1) $OT \times OG = r^2$ অর্থাৎ মেরু উপস্পর্শক ও মেরু উপ-অভিলম্বকে দুটি বাহু ধরিয়া অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল রেডিয়ান-ভেক্টর OP-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান।

(2) মেরু থেকে স্পর্শকের উপর লম্বদৈর্ঘ্য $p = r\sin\varphi$, ফলে $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$

উদাহরণ :

(1) $r = ae^{\theta\cot\alpha}$, α ধ্রুবক

এখানে $\tan\vartheta = r\Big/\frac{dr}{d\theta} = \tan\alpha \quad \therefore \varphi = \alpha$

উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \frac{r^2}{r_1} = r\tan\alpha$, উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= r_1 = r \cot \alpha$

মন্তব্য : উক্ত বক্ররেখার প্রতিটি বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক সংশ্লিষ্ট রেডিয়ান ভেক্টরের সঙ্গে একই কোণে নত থাকে বলে ঐ বক্ররেখাকে Equiangular spiral বলা হয়।

(2) $r^m = a^m (\cos m\theta - \sin m\theta)$-এর উপরিস্থ $\theta = 0$ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর মেরু থেকে অঙ্কিত লম্বরেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

উত্তর : $\frac{dr}{d\theta} = \frac{-a^m(\sin m\theta + \cos m\theta)}{r^{m-1}}$

$\tan\varphi = r\Big/\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sin m\theta - \cos m\theta}{\sin m\theta + \cos m\theta}$, অতএব, $\varphi = m\theta - \frac{\pi}{4}$

$p = r \sin\varphi$, সুতরাং $p^m = r^m \sin^m\varphi = a^m (\cos m\theta - \sin m\theta) \sin^m \left(m\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

$\theta = 0$ বিন্দুতে $p^m = \left|a^m\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m\right| \qquad \therefore p = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$

অনুশীলনী :

$r = a(1 + \cos\theta)$-এর উপরিস্থ $\theta = \frac{\pi}{3}$ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর মেরু থেকে অঙ্কিত লম্ব রেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

9.9 দুইটি বক্ররেখার মেরু সমীকরণের ক্ষেত্রে অন্তর্ভূক্ত কোণ নির্ণয়

মনে করি Γ_1 ও Γ_2 বক্ররেখা দুইটি পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে এবং 0 মেরু। প্রথমোক্ত Γ_1-এর ক্ষেত্রে রেডিয়ান ভেক্টর OP ও P বিন্দুতে স্পর্শকের মধ্যেকার কোণ φ_1 এবং দ্বিতীয়োক্ত Γ_2–এর ক্ষেত্রে রেডিয়ান ভেক্টর OP ও P বিন্দুতে স্পর্শকের মধ্যেকার কোণ φ_2 হলে নির্ণীত কোণ হবে $\varphi_1 \sim \varphi_2$.

উদাহরণ : (1) $r = 6\cos\theta$ ও $r = 2(1 + \cos\theta)$-এর মধ্যেকার কোণ নির্ণয় কর।

উত্তর : দুটি সমীকরণ সমাধান করে পাই ছেদবিন্দুতে $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$r = 6\cos\theta \text{ হতে } \tan\varphi = r \Big/ \frac{dr}{d\theta} \text{ করে } \varphi = \frac{\pi}{2} + \theta$$

$$r = 2(1 + \cos\theta) \text{ হতে } \tan\varphi = r \Big/ \frac{dr}{d\theta} \text{ করে } \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}\text{-তে } \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \text{ এবং } \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

নির্ণীত কোণ $= \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{6}$

(2) $r = a(1 - \cos\theta)$ ও $r = b(1 + \cos\theta)$ [a, b > 0] পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে—প্রমাণ কর।

উত্তর : $r = a(1 - \cos\theta)$ হতে $\tan\varphi = r \Big/ \frac{dr}{d\theta} = \tan\frac{\theta}{2} \quad \therefore \varphi\frac{\theta}{2}$

$$r = b(1 + \cos\theta) \text{ হতে } \tan\varphi = r \Big/ \frac{dr}{d\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) \quad \therefore \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$$

মনে করি (r', θ') দুটি বক্ররেখার ছেদবিন্দু। ফলে সেই বিন্দুতে $\varphi_1 = \frac{\theta'}{2}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta'}{2}$ এবং

নির্ণীত কোণ $= \frac{\pi}{2} + \frac{\theta'}{2} - \frac{\theta'}{2} = \frac{\pi}{2}$; বক্ররেখাদুটি পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে।

অনুশীলনী :

(1) $\frac{2a}{r} = 1 - \cos\theta$-এর ক্ষেত্রে মেরু উপস্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। দেখাও যে, $p^2 = ar$।

(2) $r^2 = 16 \sin 2\theta$ ও $r^2 \sin 2\theta = 4$-এর ক্ষেত্রে অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় করো।

(3) $r^m = a^m \sec(m\theta + \alpha)$ ও $r^m = b^m \sec(m\theta + \beta)$–এর মধ্যেকার কোণ নির্ণয় কর (a, b, α, β ধ্রুবক)।

(4) $\theta = \frac{(r^2 - a^2)}{a} - \cos^{-1}\frac{a}{r}$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে দেখাও যে, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ হয়।

(5) $r = \frac{aer^{\theta}}{(1+\theta)^2}$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে p নির্ণয় কর।

(6) $r = a \sin 2\theta$ ও $r = a \cos 2\theta$ বক্ররেখা দুটির মধ্যেকার কোণ নির্ণয় কর।

(7) $r = a^{e\theta}$ এবং $r^{e\theta} = b(a, b \in R)$ পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে—প্রমাণ কর।

9.10 বক্ররেখার পাদ-সমীকরণ (Pedal Equation of a Curve) নির্ণয়

সংজ্ঞা : বক্ররেখাটি যে তলে আছে সেই তলের কোন বিন্দু 0 (ধরা যাক্) হতে ঐ বক্ররেখার উপরিস্থ যে কোন বিন্দু P -তে স্পর্শকের উপর লম্ব টানা হলে সেই লম্বের দৈর্ঘ্যকে p দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং O থেকে P বিন্দুর দূরত্বকে r দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। কোন বক্ররেখার ক্ষেত্রে এই p ও r-এর মধ্যেকার সম্পর্ককে 0 বিন্দুর সাপেক্ষে বক্ররেখার পাদ সমীকরণ বলা হয়।

মন্তব্য : 'বক্ররেখার পাদ সমীকরণ' বিবৃতিটি সতত O বিন্দু নির্ভর।

(1) বক্ররেখার কার্তিয় সমীকরণ থেকে কোন বিন্দুর সাপেক্ষে পাদ-সমীকরণ নির্ণয় :

উদাহরণ (ক) কেন্দ্রের সাপেক্ষে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-এর পাদ সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$x.b \cos \theta + y.a\sin \theta - ab = 0$ (1)

কেন্দ্র অর্থাৎ মূলবিন্দু থেকে (1)-এর উপর লম্ব দূরত্ব

$$p = \left|\frac{-ab}{\sqrt{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)}}\right| \text{ অর্থাৎ } \frac{a^2b^2}{p^2} = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$$

$r^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$

অতএব, $\frac{a^2b^2}{p^2} + r^2 = a^2 + b^2$ হল নির্ণেয় পাদ সমীকরণ।

[à] ÷Ó¿ªu Âbü±ÊËZÂ$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(a > 0)$-এর পাদসমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : ঐ বক্ররেখার উপর যেকোন বিন্দু $(a \cos^3\theta, a \sin^3\theta)$–তে স্পর্শকের সমীকরণ $x \sin\theta + y \cos\theta - a \sin q \cos\theta = 0$ (1) p = মূলবিন্দু থেকে (1)-এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য হলে

$$p^2 = a^2\sin^2\theta\cos^2\theta, r^2 = x^2 + y^2 = a^2(\cos^6\theta + \sin^6\theta) = a^2[1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta = a^2\left[1 - \frac{3p^2}{a^2}\right]$$

$r^2 + 3p^2 = a^2$ হল নির্ণেয় পাদসমীকরণ।

(গ) যে কোন একটি নাভির সাপেক্ষে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের পাদ-সমীকরণ নির্ণয় করো।

উত্তর : $(ae, 0)$ নাভিটিতে মূলবিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হল, অক্ষদ্বয়ের দিক অ-পরিবর্তিত রইল। উপবৃত্তের নতুন সমীকরণ হল $\frac{(x - ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এবং ইহার উপর যে কোন বিন্দু $P(ae + a\cos\theta, b\sin\theta)$ ঐ P বিন্দুতে স্পর্শক হল $x, b\cos\theta + y, a\sin\theta - ab(1 + e\cos\theta) = 0(1)$

P = নতুন মূলবিন্দু হতে (1)-এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য

$$= \left|\frac{-ab(1 + e\cos\theta)}{\sqrt{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}\right|$$

$$\therefore\ p^2 = \frac{a^2b^2(1 + e\cos\theta)^2}{a^2\sin^2\theta + a^2(1 - e^2)\cos^2\theta} = \frac{b^2(1 + e\cos\theta)^2}{1 - e^2\cos^2\theta}$$

সুতরাং, $\frac{b^2}{p^2} = \frac{1 - e\cos\theta}{1 + e\cos\theta}$

$r^2 = (ae + a\cos\theta)^2 + b^2\sin^2\theta) = a^2(1 + e\cos\theta)^2 \quad \therefore\ r = a(1 + e\cos\theta)$

অতএব, $\frac{b^2}{p^2} + 1 = \frac{2a}{r}$ নির্ণেয় পাদ সমীকরণ।

(ঘ) মূল বিন্দুর সাপেক্ষে $x = 2a\cos\theta - a\cos2\theta$, $y = 2a\sin\theta - a\sin2\theta$ বক্ররেখার পাদ-সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : এক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx} = \tan\frac{3\theta}{2}$ এবং 'θ' বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y\ \cos\frac{3\theta}{2} - x\sin\frac{3\theta}{2} + 3a\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

p = মূলবিন্দু থেকে উক্ত স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$p^2 = 9a^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = 5a^2 - 4a^2\cos\theta = a^2 + 8a^2\ \sin^2\frac{\theta}{2}$$

θ অপনয়ন করে পাই, $9(r^2 - a^2) = 8p^2$

(2) বক্ররেখার মেরু সমীকরণ হতে কোন বিন্দুর সাপেক্ষে পাদ-সমীকরণ নির্ণয়

(ক) মেরু সাপেক্ষে $r = a(1 + \cos\theta)$-এর পাদ সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $\tan\theta = r\Big/\frac{dr}{d\theta} = -\cot\frac{\theta}{2}$, সুতরাং $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$

$$p = r\ \sin\varphi = r\ \cos\ \frac{\theta}{2}\quad \therefore \cos\frac{\theta}{2} = \frac{p}{r}$$

$$r = a\left[1 + 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right] = 2a.\frac{p^2}{r^2}$$

অতএব $r^3 = 2ap^2$ নির্ণেয় পাদ সমীকরণ।

(খ) মেরু সাপেক্ষে $r^2 = a^2\cos2\theta$-এর পাদ-সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : এখানে $\frac{dr}{d\theta} = \frac{-a^2\sin2\theta}{r}$ এবং $\tan\theta = \ ^{r}\Big/\frac{dr}{d\theta}$ থেকে

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\theta$$

$$p = r\ \sin\ \varphi = r\ \cos\ 2\theta \qquad \therefore\ \cos\ 2\theta = \frac{p}{r}$$

নির্ণেয় পাদ সমীকরণ $r^3 = a^2p$

অনুশীলনী :

(1) দেখাও যে মূলবিন্দুর সাপেক্ষে অধিবৃত্ত $y^2 = 4a(x + a)$-র পাদ সমীকরণ হল $p^2 = ar$

(2) দেখাও যে মূলবিন্দুর সাপেক্ষে

$x = ae^{\theta}(\sin\theta - \cos\theta)$, $y = ae^{\theta}(\sin\theta + \cos\theta)$-এর পাদ সমীকরণ হল $r^2 = 2p^2$

(3) দেখাও যে মেরু সাপেক্ষে অধিবৃত্ত $r = \dfrac{2a}{1-\cos\theta}$ -এর পাদ সমীকরণ হল $p^2 = ar$

(4) দেখাও যে মেরু সাপেক্ষে অধিবৃত্ত $r = e^{\theta}$-এর পাদ সমীকরণ হল $r^2 = 2p^2$

9.11 বক্ররেখার পাদ রেখা (Pedal of a Curve) নির্ণয়

সংজ্ঞা : বক্ররেখাটি যে তলে আছে সেই তলের কোন বিন্দুর সাপেক্ষে ঐ বক্ররেখার পাদরেখা হল বক্ররেখার উপরিস্থ যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের উপর ঐ বিন্দু হতে লম্বরেখার পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ।

উদাহরণ : (ক) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের নাভির সাপেক্ষে পাদরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : অধিবৃত্তের উপরিস্থ $P(at^2, 2at)$ বিন্দুতে

স্পর্শকের সমীকরণ $x - ty + at^2 = 0$ (1)

(1)-এর উপর লম্ব ও $(a, 0)$ বিন্দুগামী রেখা হল $tx + y - ta = 0$(2)

মনে করি, (p, q) উক্ত (1) ও (2) -এর ছেদবিন্দু। অতএব

$p - tq = -at^2$, $tp + q = at$

বর্গ ও যোগ করে $(t^2 + 1)p = 0$ অতএব $p = 0$

নির্ণেয় সঞ্চারপথ হল $x = 0$

(খ) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর সাপেক্ষে পাদরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে স্পর্শক $x - ty + at^2 = 0$(1)

এর উপর লম্ব ও মূলবিন্দুগামী রেখা হল $tx + y = 0$ (2)

মনে করি (p, q) উক্ত (1) ও (2) -এর ছেদবিন্দু।

$p - tq + at^2 = 0$, $tp + q = 0$

$t = -\dfrac{q}{p}$ প্রথমটিতে বসিয়ে পাই, $aq^2 + pq^2 + p^3 = 0$

সুতরাং (p, q)-এর সঞ্চারপথ হল $x(x^2 + y^2) + ay^2 = 0$

(গ) কেন্দ্রের সাপেক্ষে পরাবৃত্ত $x^2 - y^2 = a^2$-এর পাদরেখা নির্ণয় করো।

উত্তর : পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক হল $xx_1 - yy_1 = a^2$(1)

এর উপর মূলবিন্দুগামী লম্বরেখা $xy_1 + yx_1 = 0$ (2)

মনে করি (p, q) উক্ত (1) ও (2)-এর ছেদবিন্দু।

$px_1 - qy_1 = a^2$, $py_1 + qx_1 = 0$ থেকে পাই, $x_1 = \dfrac{a^2p}{p^2+q^2}, y_1 = \dfrac{-a^2q}{p^2+q^2}$

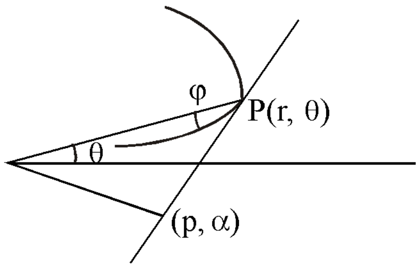
$x_1^2 - y_1^2 = a^2$ থেকে $a^2(p^2 - q^2) = (p^2 + q^2)^2$

অতএব, (p, q)-এর সঞ্চারপথ $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

(ঘ) মেরু সাপেক্ষে $r = a(1 + \cos\theta)$-এর পাদরেখা নির্ণয় কর।

উত্তর : নিম্ন সম্পর্ক দুটি ব্যবহার করা হবে :

$$\varphi + \theta - \alpha = \frac{\pi}{2},\ p = r\sin\varphi$$



এখানে, $\tan\varphi = r\Big/\dfrac{dr}{d\theta}$ থেকে $\varphi = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta}{2}$

সুতরাং, $\alpha = \dfrac{3\theta}{2}$

$$p = r\sin\varphi = r\cos\frac{\theta}{2} = a(1+\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}$$

$\alpha = \dfrac{3\theta}{2}$ বসিয়ে $p = a.2\cos^2\dfrac{\alpha}{3}$

(p, q)-এর সঞ্চারপথ হল $r = 2a\cos^3\dfrac{\theta}{3}$

অনুশীলনী

(1) মূলবিন্দুর সাপেক্ষে $27ay^2 = (x - 4a)^3$-এর পাদরেখা নির্ণয় কর।

(2) মেরুর সাপেক্ষে $r^2 = a^2\cos2\theta$-এর পাদরেখা নির্ণয় করো।

(3) মূলবিন্দুর সাপেক্ষে $Ax^m + By^m = 1$ বক্ররেখার পাদরেখা নির্ণয় কর।

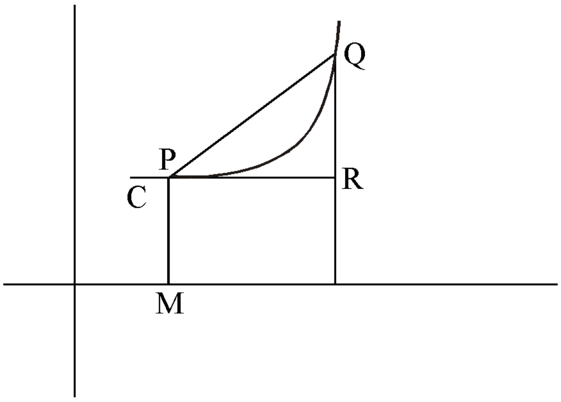
9.12 চাপ দৈর্ঘ্যের অবকল সহগ

P(x, y) এবং $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ বক্ররেখার উপরিস্থ দুটি বিন্দু। মনে করি বক্ররেখার উপরিস্থ C বিন্দু থেকে চাপ-দৈর্ঘ্য পরিমাপ করা হইতেছে, চাপ CP = s, চাপ CQ = $s + \Delta s$

আমরা নিম্ন সূত্রটি ধরে নেব :

যখন Q বিন্দু বক্ররেখা বরাবর P বিন্দু অভিমুখে ধাবিত হয়, সেক্ষেত্রে $\frac{\text{জ্যা } PQ}{\text{চাপ দৈর্ঘ্য } PQ} \to 1$

$PQ^2 = PR^2 + QR^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$



$$\left(\frac{\text{জ্যা } PQ}{\Delta s}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

এবার Q, বক্ররেখা বরাবর P বিন্দুর দিকে ধাবিত হলে

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \qquad \text{অর্থাৎ}$$

$$\frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}$$

এখানে x-এর বৃদ্ধির সঙ্গে s-এর বৃদ্ধি হলে '+' চিহ্ন এবং অন্যথায় '–' চিহ্ন গৃহীত হবে।

আবার, $\sin \angle QPR = \frac{QR}{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta Q}$

Q বিন্দু বক্ররেখা বরাবর P বিন্দুর দিকে ধাবিত হলে

$\frac{\Delta s}{PQ} \to 1$ হয় এবং ফলে $\sin \psi = \frac{dy}{ds}$, অনুরূপভাবে $\cos \psi = \frac{dx}{ds}$.

মেরু স্থানাঙ্কের ক্ষেত্রে মূলবিন্দুকে মেরুতে ও মেরুঅক্ষকে x-অক্ষ ধরলে

$x = r \cos \theta,\ y = r \sin \theta$

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (\cos \theta dr - r \sin \theta \, d\theta)^2 + (\sin\theta \, dr + r \cos \theta \, d\theta)^2$$
$$= (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$$

এক্ষেত্রে $\cos \varphi = \frac{dr}{ds}, \sin \varphi = r\frac{d\theta}{ds}$

এবং $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]}, \frac{ds}{dr} = \sqrt{\left[1 + \left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2\right]}$ হবে।

উদাহরণ :

(ক) $x = a(1 - \cos\theta),\ y = a(\theta + \sin \theta)$

চাপ দৈর্ঘ্যর অবকল সহগ নির্ণয় কর।

উত্তর : $dx = a \sin\theta \, d\theta, \; dy = a(1 + \cos\theta)d\theta$

$$(dx)^2 + (dy)^2 = a^2[2(1 + \cos\theta)](d\theta)^2 = 4a^2 \cos^2\frac{\theta}{2}(d\theta)^2$$

$$ds = 2a \cos\frac{\theta}{2} d\theta$$

(খ) $r^n = a^n \cos n\theta$ হলে দেখাও যে,

$$a^{2n}\frac{d^2r}{ds^2} + nr^{2n-1} = 0$$

উত্তর : $nr^{n-1}\dfrac{dr}{d\theta} = a^n(-n\sin n\theta)$

$$\tan\varphi = r\Big/\frac{dr}{d\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + n\theta\right) \quad \therefore \varphi = \frac{\pi}{2} + n\theta$$

সুতরাং $\dfrac{dr}{ds} = \cos\varphi = -\sin n\theta$

$$r\frac{d\theta}{ds} = \sin\varphi = \cos n\theta$$

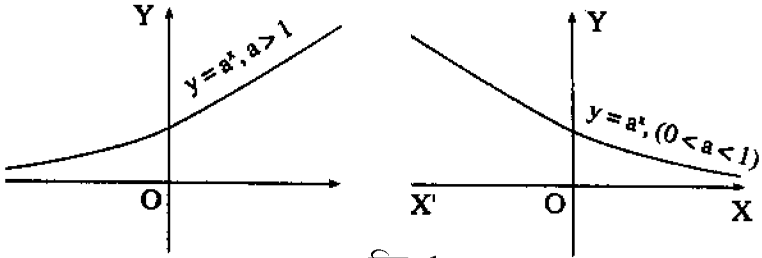
$$\frac{d^2r}{ds^2} = -n\cos n\theta.\frac{d\theta}{ds} = \frac{(-n\cos n\theta)(\cos n\theta)}{r}$$

$$= \frac{-n}{r}\left(\frac{r^n}{a^n}\right)^2 = \frac{-nr^{2n-1}}{a^{2n}}$$

অতএব, $a^{2n}\dfrac{d^2r}{ds^2} + nr^{2n-1} = 0$.

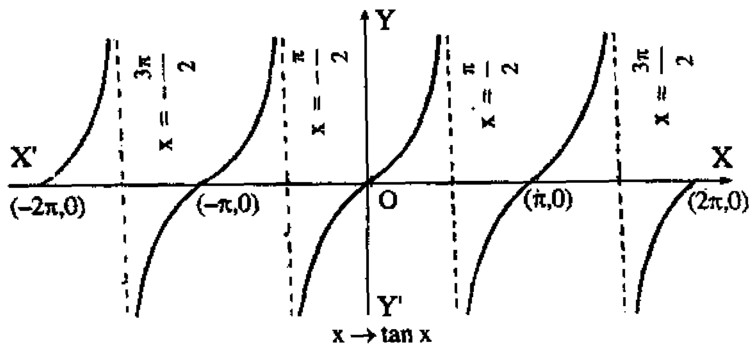
9.13 বক্ররেখার অসীম পথ

প্রস্তাবনা : বক্ররেখাগুলির মধ্যে একশ্রেণীর বক্ররেখা রয়েছে সেগুলি xy-তলে একটি সসীম অংশ জুড়ে থাকে। যেমন—বৃত্ত, উপবৃত্ত, অ্যাস্ট্রয়েড। আবার এক ধরণের বক্ররেখা রয়েছে সেগুলির উপর বিন্দু $P(x, y)$ বিদ্যমান যেখানে $|x| \to \infty$ অথবা $|y| \to \infty$। এই শেষোক্ত গোষ্ঠীর বক্ররেখাগুলির ক্ষেত্রে আর একটি বৈশিষ্ট্য কিছু বক্ররেখার রয়েছে, যার কিছু চিত্র নীচে দেওয়া হল :



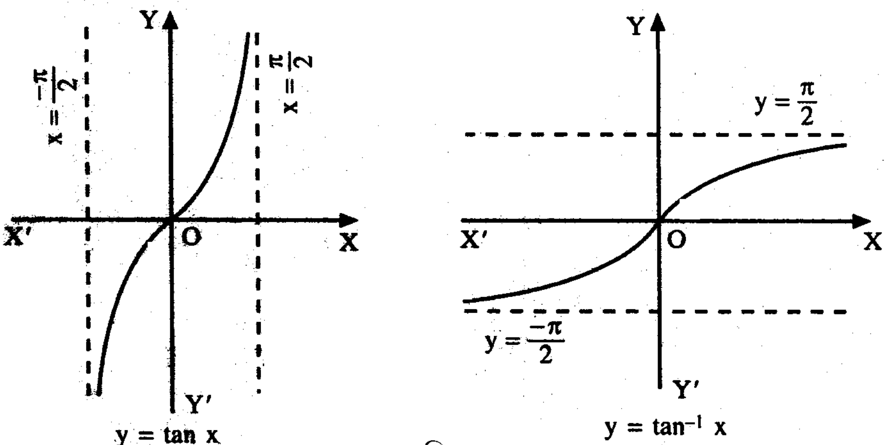
চিত্র 1

বামদিকের লেখচিত্রে যখন $a > 1$, $y = a^x$ বক্ররেখাটি x-এর সাংখ্যমান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে x-অক্ষ অর্থাৎ $y = 0$ রেখার দিকে ধাবিত হচ্ছে অর্থাৎ $| x |$ এর মান বৃদ্ধির সাথে বক্ররেখার উপরিস্থ বিন্দু হতে $y = 0$-এর লম্ব দৈর্ঘ্য শূণ্যর দিকে ধাবিত হয়।

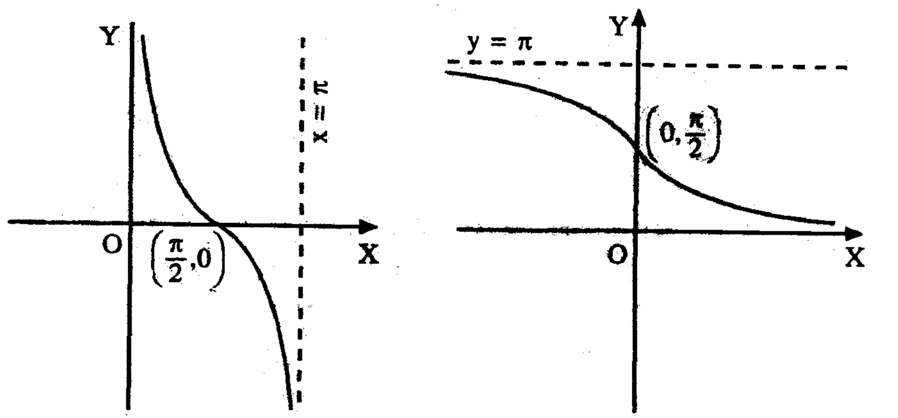


চিত্র 2

লেখচিত্রটি $y = \tan x$ অপেক্ষকের। $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}$ রেখাগুলির থেকে বক্ররেখার উপরিস্থ বিন্দুর লম্ব দূরত্ব $| y |$-এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে শূণ্যর দিকে ধাবিত হয়।



চিত্র 3



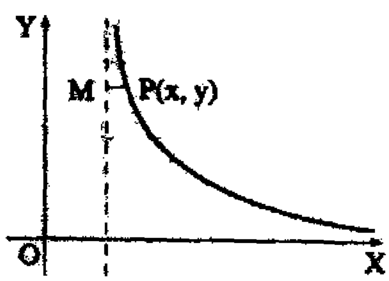
$y = \cot x$ চিত্র 4 $y = \cot^{-1} x$

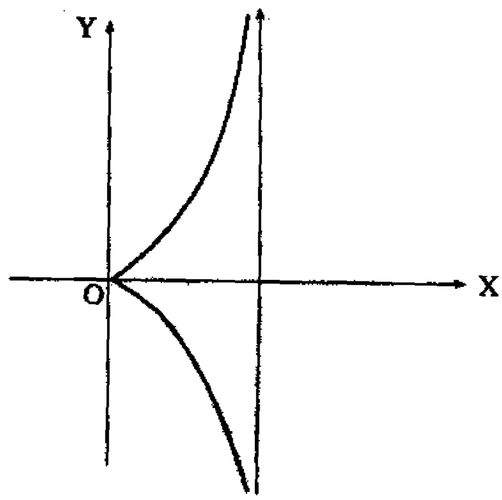
এই শেষোক্ত গোষ্ঠীভুক্ত বক্ররেখাগুলির মধ্যে যদি ঐ বক্ররেখার তলে এমন কোন সরলরেখার অস্তিত্ব থাকে যার দূরত্ব বক্ররেখার উপরিস্থ $P(x, y)$ বিন্দু থেকে শূণ্যের দিকে ধাবিত হয় যখন $|x| \to \infty$ বা $|y| \to \infty$ সেক্ষেত্রে ঐ সরলরেখাটিকে বক্ররেখাটির রৈখিক অসীমপথ বলা হয় (উপরের চিত্রগুলি প্রণিধানযোগ্য)। এই ধরণের রৈখিক অসীমপথের অস্তিত্ব থাকলে তাহা তিন ধরণের হতে পারে :

(1) y-অক্ষের সমান্তরাল (2) x-অক্ষের সমান্তরাল (3) তির্যক অসীমপথ।

y-অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ :

যদি $\lim\limits_{x\to K+0} f(x)$ অথবা $\lim\limits_{x\to K-0} f(x) = +\infty$ বা, $-\infty$ হয়, তবে $x = K$ ঐ বক্ররেখার অসীমপথ হবে।





উদাহরণ :

(ক) $y = \frac{5x}{x-3}$

লক্ষণীয় যে $x \to 3$ হলে $| y | \to \infty$ হবে। সুতরাং $x = 3$ এর একটি অসীমপথ.

(খ) $y = \tan x$

লক্ষ্যণীয় যে $x \to (2n+1)\frac{\pi}{2}$ (n–যেকোন পূর্ণ সংখ্যা) হলে $\cos x \to 0$ ও $| y | \to \infty$ হবে।

সুতরাং ঐ বক্ররেখার অসীম সংখ্যক অসীমপথ

$x = (2n+1), \frac{\pi}{2} (n \in Z)$ আছে (চিত্র 2)

(গ) $y = (a-x)\tan\frac{\pi x}{2a}, a \in R - \{0\}$

লক্ষণীয় যে, $x \to (2n + 1)a$, $(n \in z)$ হলে $\cos\frac{\pi x}{2a} \to 0$ হবে। কিন্তু $n = 0$ এর ক্ষেত্রে $x \to a$ হবে এবং সেক্ষেত্রে $\lim\limits_{x \to a} y$ সীমাটি $O \times \infty$ আকারের হবে। ফলে লপিতার নিয়মে সীমা নির্ধারণ করিতে হবে।

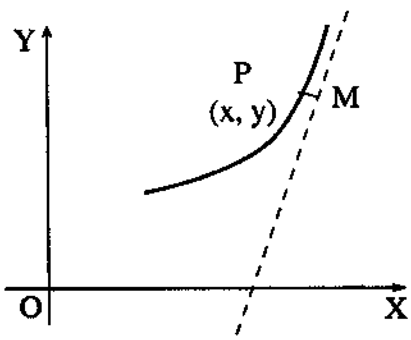
$$\lim_{x \to a}(a-x)\tan\frac{\pi x}{2a} = \lim_{x \to a}\frac{a-x}{\cot\frac{\pi x}{2a}}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to a}\frac{1}{\frac{\pi}{2a}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi x}{2a}} = \frac{2a}{\pi}$$, সসীম হবে।

ফলে $x = a$ অসীমপথ হতে পারে না।

নির্ণেয় অসীমপথগুলি হল $x = -a, \pm 3a, \pm 5a, \ldots$

তির্যক ও x-অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ :



$y = mx + c$ একটি অসীম পথ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি

$m = \lim_{|x|\to\infty} \frac{y}{x}, c = \lim_{|x|\to\infty} (y - mx)$ হয়, যেখানে m ও c উভয়েই সসীম।

যদি P(x, y) বক্ররেখার উপরিস্থ কোন বিন্দু হয়,

তবে y = mx + c সরলরেখা থেকে উক্ত বিন্দুর লম্ব দূরত্ব হবে $\left|\frac{y - mx - c}{\sqrt{(1 + m^2)}}\right|$

সরলরেখাটিকে অসীম পথ হতে হলে $P(x, y) \to \infty$

অর্থাৎ $|x| \to \infty$ হলে $d \to 0$ হতে হবে এবং সেক্ষেত্রে $c = \lim_{|x|\to\infty}(y - mx)$ হবে।

$$\frac{y}{x} - m = (y - mx).\frac{1}{x}$$

সুতরাং $|x| \to \infty$ হলে $\frac{y}{x} \to m$ হবে।

বিপরীতক্রমে $m = \lim_{|x|\to\infty} \frac{y}{x}, c = \lim_{|x|\to\infty}(y - mx)$, m ও c সসীম হলে $d \to 0$ হবে।

উদাহরণ :

(ক) $y = \frac{x^3}{x^2 + 9}$

উত্তর : x-এর যেকোন সসীম সীমার জন্য y-এর সীমাও সসীম হবে। সুতরাং x = a আকারের কোন অসীমপথ নেই।

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{x^2}{x^2 + 9} = \lim_{|x|\to\infty}\left(1 - \frac{9}{x^2 + 9}\right) = 1 = m$$

$$\lim_{|x|\to\infty}(y - mx) = \lim_{|x|\to\infty}(y - x) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{-9x}{x^2 + 9} = 0$$

অতএব, y = x হল অসীম পথ।

(খ) $x = \frac{1}{t^4 - 1}, y = \frac{t^3}{t^4 - 1}$

$t^4 - 1 = (t^2 + 1)(t + 1)(t - 1)$ এবং $t \to \pm 1$ হলে $|x| \to \infty, |y| \to \infty$ হবে।

$\lim_{t\to 1} \frac{y}{x} = \lim_{t\to 1} t^3 = 1$ সুতরাং m = 1

$$\lim_{t\to 1}(y - mx) = \lim_{x\to 1}(y - x) = \lim_{t\to 1}\frac{t^3 - 1}{t^4 - 1} = \lim_{t\to 1}\frac{t^2 + t + 1}{(t^2 + 1)(t + 1)} = \frac{3}{4}$$

সুতরাং, $c = \frac{3}{4}$ এবং $y = x + \frac{3}{4}$ অর্থাৎ $4y = 4x + 3$ একটি অসীমপথ হবে।

$\lim_{t\to -1}\frac{y}{x} = \lim_{t\to -1} t^3 = -1$ সুতরাং $m = -1$

$$\lim_{t\to -1}(y - mx) = \lim_{t\to -1}(y + x) = \lim_{t\to -1}\frac{t^3 + 1}{t^4 - 1} = \lim_{t\to -1}\frac{t^2 - t + 1}{(t^2 + 1)(t - 1)}$$

$$= -\frac{3}{4} = c$$

$y = -x - \frac{3}{4}$ অর্থাৎ $4y + 4x + 3 = 0$ আর একটি অসীমপথ।

অনুশীলনী :

অসীমপথ নির্ণয় কর :

(ক) $y = \frac{5x}{x - 2} + 5x$

(খ) $y = x + \ln x$

9.14 বক্ররেখার সমীকরণ F(x, y) = 0 থেকে অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল অসীমপথ নির্ণয়ের বিকল্প পদ্ধতি

(ক) $F(x, y) = 0$ সমীকরণে y-এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ ধ্রুবক থাকলে y অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ থাকবে না। y-এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ যদি x নির্ভর হয় কিন্তু সেই সহগকে বাস্তব, রৈখিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা না-যায় তবে y-অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ থাকবে না। অন্যথায় y-এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ যদি x-নির্ভর হয় ও ঐ সহগকে বাস্তব রৈখিক উৎপাদক $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... এ বিশ্লেষণ করা যায় তবে $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ ...... তার অসীমপথ হবে।

উদাহরণ :

(1) $x^2y^2 = 4(x^2 + y^2)$

y^2-এর সহগ $= x^2 - 4$ এবং $x = \pm 2$ দুটি অসীমপথ।

(2) $x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$

y^3-এর সহগ ধ্রুবক। y-অক্ষের সমান্তরাল কোন অসীমপথ নেই।

(খ) $F(x, y) = 0$ সমীকরণে x-এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ ধ্রুবক থাকলে x-অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ থাকবে না। x-এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ যদি y-নির্ভর হয় কিন্তু সেই সহগকে বাস্তব রৈখিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা না যায়, তবে x-অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ থাকবে না। অন্যথায় x-এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ যদি y-নির্ভর হয় ও সহগকে বাস্তব, রৈখিক উৎপাদক $g_1(y)$, $g_2(y)$, ...এ বিশ্লেষণ করা যায়, তবে $g_1(y) = 0$, $g_2(y) = 0$, ... তার অসীমপথ হবে। উক্ত উদাহরণ (1)-এর ক্ষেত্রে x^2 -এর সহগ $= y^2-4$ এবং $y = \pm 2$ দুটি অসীম পথ। উদাহরণ (2) -এর ক্ষেত্রে x^3-এর সহগ ধ্রুবক x অক্ষের সমান্তরাল অসীমপথ নেই।

9.15 বক্ররেখার তির্যক অসীমপথ নির্ণয়ের দুটি পদ্ধতি

মনে করি বক্ররেখার সমীকরণটি

$$(a_0y^n + a_1y^{n-1}x + a_2y^{n-2}x^2+\ldots+a_nx^n) + (b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2}x+\ldots+b_nx^{n-1}) + \ldots$$
$$+(l_{n-1}y + l_0x) + k_n = 0$$

যেখানে সহগগুলি বাস্তব রাশি।

এ ধরনের বক্ররেখার সর্বোচ্চ n সংখ্যক অসীমপথ থাকতে পারে।

পদ্ধতি I. অসীমপথের প্রবণতা m নিম্ন সমীকরণের বীজ।

$$\varphi_n(m) = a_0m^n + a_1m^{n-1}+\ldots+ a_n = 0$$

এটি থেকে m নির্ণয় কর। মনে করি বীজগুলি m_1, m_2, ..., m_n।

যদি $m = m_1$ হয়, তবে $c_1 = -\dfrac{\varphi_{n-1}(m_1)}{\varphi_n'(m_1)}$ যদি $\varphi_n'(m_1) \neq 0$ হয় সেক্ষেত্রে $y = m_1x + c_1$ নির্ণেয় অসীমপথ।

একইভাবে m_2, ..., m_n-এর ক্ষেত্রে যথাক্রমে c_2, ..., c_n নির্ণীত হবে যদি $\varphi_n'(m_2) \neq 0$, ..., $\varphi_n'(m_n) \neq 0$ হয়। কিন্তু যদি $\varphi_n'(m_1) = 0$ হয়, তার অর্থ m_1 উক্ত সমীকরণের দ্বিবীজ বা ত্রিবীজ। m_1 যদি দ্বিবীজ হয়, m_1-এর জন্য অনুসঙ্গী হিসাবে c-এর দুটি মান পাওয়া যাবে যারা $\dfrac{c^2}{2}\varphi_n''(m_1) + c\varphi_{n-1}'(m_1) + \varphi_{n-2}(m_1) = 0$ সমীকরণের বীজ হবে। এক্ষেত্রে সমান্তরাল অসীমপথ পাওয়া যাবে।

উদাহরণ : (1) $2x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + 3x^2 - 3y^2 + y - 3 = 0$

উত্তর : $\varphi_3(m) = -2m^3 - 3m^2 + 3m + 2 = 0$ সমাধান করে পাই

$m = 1, -\frac{1}{2}, -2$

$\varphi_2(m) = 3 - 3m^2, \varphi_3'(m) = -6m^2 - 6m + 3$

m = 1, $c = -\frac{\varphi_2(1)}{\varphi_3'(1)} = 0$ সুতরাং $y = x$ একটি অসীমপথ।

m = $-\frac{1}{2}, c = --\frac{\varphi_2\left(-\frac{1}{2}\right)}{\varphi_3'\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2}$

সুতরাং $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ বা $2y + x + 1 = 0$ একটি অসীমপথ।

m = – 2, $c = -\frac{\varphi_2(-2)}{\varphi_3'(-2)} = -1$ সুতরাং $y + 2x + 1 = 0$ একটি অসীমপথ হবে।

(2) $y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + x^2 - y^2 - 1 = 0$

উত্তর : $\varphi_3(m) = m^3 - m^2 - m + 1 = 0$ সমাধান করে $m = 1, 1, -1$

$\varphi_3'(m) = 3m^2 - 2m - 1, \varphi_3''(m) = 6m - 2$

$\varphi_2(m) = 1 - m^2, \varphi_2'(m) = -2m, \varphi_1(m) = 0$

$m = 1$ দ্বিবীজ, c হল $\frac{c^2}{2}\varphi_3''(1) + c\varphi_2'(1) + \varphi_1(1) = 0$ সমীকরণের বীজ। অতএব $2c^2 - 2c = 0$ সুতরাং $c = 0, 1$, $y = x$ ও $y = x + 1$ সমান্তরাল অসীমপথ হবে।

m = – 1, $c = -\frac{\varphi_2(-1)}{\varphi_3'(-1)} = 0$ $\therefore$ $y + x = 0$ একটি অসীমপথ।

মন্তব্য : (1) $\varphi_3(m, \varphi_2(m)$ ইত্যাদি গঠনের ক্ষেত্রে কোন কোন বই-তে '$x = 1, y = m$ বসাও' লেখা হয়—গাণিতিক নিরিখে এটি ভুল, কেননা $m = \lim_{|x|\to\infty} \frac{y}{x}$।

(2) এই পদ্ধতিটি সূত্র নির্ভর অর্থাৎ স্মৃতি নির্ভর এবং তুলনামূলকভাবে জটিল। বিকল্প পদ্ধতি 2 লক্ষণীয়।

পদ্ধতি 2 (1) $2x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + 3x^2 - 3y^2 + y - 3 = 0$

উত্তর : সর্বোচ্চ ঘাত বিশিষ্ট পদগুলি $2x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 2y^3$

$= (x - y)\ (2x + y)\ (x + 2y)$

সম্ভাব্য অসীমপথগুলি $x - y = 0,\ 2x + y = 0,\ x + 2y = 0$-এর সমান্তরাল।

$x - y = 0$-এর সমান্তরাল অসীমপথ

$$x - y + \underset{\substack{\frac{y}{x}\to 1\\ |x|\to\infty}}{\mathrm{lt}} \frac{3(x^2 - y^2)}{(x+2y)(2x+y)} + \underset{\substack{\frac{y}{x}\to 1\\ |x|\to\infty}}{\mathrm{lt}} \frac{y-3}{(x+2y)(2x+y)} = 0$$

$$x - y + \underset{\substack{\frac{y}{x}\to 1\\ |x|\to\infty}}{\mathrm{lt}} \frac{3\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{2y}{x}\right)\left(2+\frac{y}{x}\right)} + \underset{\substack{\frac{y}{x}\to 1\\ |x|\to\infty}}{\mathrm{lt}} \frac{\left(\frac{y}{x} - \frac{3}{x}\right)\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{2y}{x}\right)\left(2+\frac{y}{x}\right)} = 0$$

$x - y = 0$

$x + 2y = 0$-এর সমান্তরাল অসীমপথ

$$x + 2y + \underset{\substack{\frac{y}{x}\to \frac{1}{2}\\ |x|\to\infty}}{\mathrm{lt}} \frac{3(x^2 - y^2)}{(x-y)(2x+y)} + \underset{\substack{\frac{y}{x}\to \frac{1}{2}\\ |x|\to\infty}}{\mathrm{lt}} \frac{y-3}{(x-y)(2x+y)} = 0$$

$$x + 2y + \underset{\substack{\frac{y}{x}\to \frac{1}{2}\\ |x|\to\infty}}{\mathrm{lt}} \frac{3\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{y}{x}\right)\left(2+\frac{y}{x}\right)} + \underset{\substack{\frac{y}{x}\to \frac{1}{2}\\ |x|\to\infty}}{\mathrm{lt}} \frac{\left(\frac{y}{x} - \frac{3}{x}\right)\frac{1}{x}}{\left(1-\frac{y}{x}\right)\left(2+\frac{y}{x}\right)} = 0$$

$x + 2y + 1 = 0$

$2x + y = 0$-এর সমান্তরাল অসীমপথ

$$2x + y + \underset{\substack{\frac{y}{x}\to -2\\ |x|\to\infty}}{\mathrm{lt}} \frac{3(x^2 - y^2)}{(x-y)(x+2y)} + \underset{\substack{\frac{y}{x}\to -2\\ |x|\to\infty}}{\mathrm{lt}} \frac{y-3}{(x-y)(x+2y)} = 0$$

$$2x + y + \lim_{\substack{\frac{y}{x}\to -2 \\ |x|\to\infty}} \frac{3\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{2y}{x}\right)} + \lim_{\substack{\frac{y}{x}\to -2 \\ |x\to\infty|}} \frac{\left(\frac{y}{x}-\frac{3}{x}\right)\frac{1}{x}}{\left(1-\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{2y}{x}\right)} = 0$$

$2x + y + 1 = 0$

(2) $y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + x^2 - y^2 - 1 = 0$

উত্তর : $y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 = (y - x)^2 (y + x)$

সম্ভাব্য অসীমপথগুলি $y - x = 0$ ও $y + x = 0$-এর সমান্তরাল।

$y - x = 0$-এর সমান্তরাল অসীমপথ

$$(x-y)^2 + (x-y) \lim_{\substack{\frac{y}{x}\to 1 \\ |x|\to\infty}} \frac{x+y}{x+y} + \lim_{\substack{\frac{y}{x}\to 1 \\ |x|\to\infty}} \frac{-1}{x+y} = 0$$

$(x - y)^2 + (x - y) = 0$ অথাৎ $x - y = 0$, $x - y + 1 = 0$ দুটি অসীমপথ।

$y + x = 0$-এর সমান্তরাল অসীমপথ

$$y + x + \lim_{\substack{\frac{y}{x}\to 1 \\ |x|\to\infty}} \frac{1-\frac{y^2}{x^2}}{\left(1-\frac{y}{x}\right)^2} + \lim_{\substack{\frac{y}{x}\to -1 \\ |x|\to\infty}} \frac{-1}{x^2\left(1-\frac{y}{x}\right)^2} = 0$$

$x + y = 0$

9.16 বিশেষ আকারের বীজগাণিতিক সমীকরণের ক্ষেত্রে পদ্ধতি

বক্ররেখার সমীকরণটি $F_n + F_{n-2} = 0$ আকারের মূলদ বীজগাণিতিক সমীকরণ, F_n হল n মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক F_n-এর সব উৎপাদক বাস্তব ও রৈখিক, ভিন্ন ভিন্ন। সেক্ষেত্রে অসীমপথগুলি হবে $F_n = 0$। F_{n-1} পদ না থাকায় পূর্বে উল্লেখিত পদ্ধতি থেকে কোন ধ্রুবক পদ আসবে না।

উদাহরণ : $x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 + 2x - y + 1 = 0$

উত্তর : $F_3 = x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 = (x - y)(x - 2y)(x - 3y)$

প্রদত্ত সমীকরণটি $F_3 + F_1 = 0$ আকারের এবং F_3-এর উৎপাদকগুলি রৈখিক, বাস্তব ও ভিন্ন ভিন্ন।

অসীমপথগুলি হবে $x - y = 0,\ x - 2y = 0,\ x - 3y = 0$

সতর্কতা (1) মনে করে বক্ররেখাটি $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ আকারের—এটিকে বজ্রগুণণ পদ্ধতিতে $yQ(x) = P(x)$ লেখা যাবে না।

(2) বর্গ করা যাবে না—অর্থাৎ মনে কর বক্ররেখাটি $y = \dfrac{x}{\sqrt{(x^2+3)}}$। এটিকে $y^2 = \dfrac{x^2}{x^2+3}$ লেখা যাবে না।

9.17 বক্ররেখার সঙ্গে অসীমপথগুলির ছেদবিন্দু ও তাহাদের সঞ্চারপথ

(ক) n ঘাতবিশিষ্ট সমীকরণের ক্ষেত্রে অসীমপথগুলি যদি বক্ররেখাটিকে ছেদ করে তবে $n(n - 2)$ সংখ্যক বিন্দুতে ছেদ করবে।

(খ) যদি বক্ররেখার সমীকরণ $F_n = 0$ আকারের হয় ও অসীমপথগুলির যৌথ সমীকরণ $G_n = 0$ হয়, তবে ছেদবিন্দুগুলি সঞ্চারপথ $F_n - G_n = 0$

9.18 অনুশীলনী

(1) নিম্ন বক্ররেখাগুলির অসীমপথ নির্ণয় কর :

(ক) $y^3 - 6xy^2 + 11x^2y - 6x^3 + y^2 - x^2 + 2x - 3y - 1 = 0$

(খ) $x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$

(গ) $x^4 - x^2y^2 + x^2 + y^2 - a^2 = 0$

(ঘ) $(y - x)(y + x)(y + 2x) + 3x - y + 9 = 0$

(ঙ) $x = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}, y = \dfrac{t^2}{t-1}$

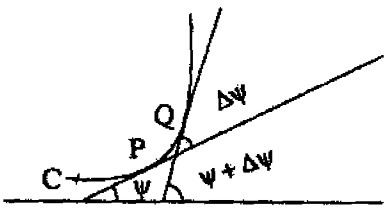
(2) দেখাও যে $2y^3 - 2x^2y - 4xy^2 + 4x^3 - 14xy + 6y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$ বক্ররেখার অসীমপথগুলির সঙ্গে ছেদবিন্দু সমূহের সঞ্চারপথ $8x + 2y + 1 = 0$

একক 10 ❒ রেখার বক্রতা

গঠন

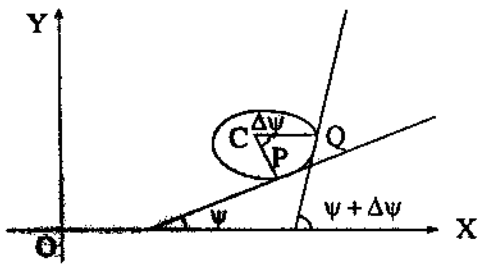
10.1 প্রস্তাবনা

সরলরেখা ও বক্ররেখার মধ্যে পার্থক্যর গাণিতির ব্যাখ্যা কি হবে কিংবা অধিবৃত্ত বা পরাবৃত্তের চাপগুলির দিক্ নির্দেশ কিভাবে স্থির হবে—এ ধরনের বহু মৌল প্রশ্নের সমাধান করিয়া বক্ররেখার বক্রতার সংজ্ঞা আনা হয়।



মনে করি, xy-তলে Γ_1 একটি বক্ররেখা। P(x, y) এর উপর যে কোন বিন্দু এবং Q(x + Δx, y + Δy) হইল P-এর সন্নিহিত বিন্দু। মনে করি বক্ররেখার উপরিস্থ C বিন্দু হইতে বক্ররেখার দৈর্ঘ্য পরিমাপ করা হয়েছে।

বক্ররেখাটি P হইতে Q বিন্দু গেলে স্পর্শকটি $\Delta\psi$ কোণে ঘুরে যায়। এই $\Delta\psi$-কে মোট বক্রতা এবং $\frac{\Delta\psi}{\Delta S}$-কে গড় বক্রতা বলা হয়। চাপ CP = S, চাপ CQ = S + ΔS। Q বিন্দু বক্ররেখা বরাবর P বিন্দুর দিকে ধাবিত হলে $\lim\limits_{Q\to P}\frac{\Delta\psi}{\Delta S} = \frac{d\psi}{dS}$ কে P বিন্দুতে বক্রতা κ বলা হয়।



সরলরেখার ক্ষেত্রে $\kappa = 0$

বৃত্তের উপরিস্থ বিন্দুতে বক্রতা নির্ণয় :

r একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র হল C এবং P যে কোন একটি বিন্দু ঐ বৃত্তের উপর, Q হল P-এর সন্নিহিত বিন্দু। চাপ PQ = $\Delta S = r.\Delta\psi$

অতএব $\frac{\Delta\psi}{\Delta S} = \frac{1}{r}$ এবং $\lim_{Q\to P} \frac{\Delta\psi}{\Delta S} = \frac{d\psi}{dS} = \frac{1}{r}$ সুতরাং বৃত্তের উপরিস্থ যে কোন বিন্দুতে বক্রতা হল বৃত্তের ব্যাসার্ধের অনোন্যক এবং ফলে ধ্রুবক।

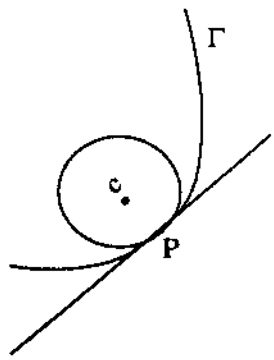
10.2 বক্রতা বৃত্ত

মনে করি xy-তলে Γ যেকোন বক্ররেখা এবং তাহার উপরিস্থ P বিন্দুতে বক্রতা $\kappa \neq 0$। $\frac{1}{\kappa}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্ত অঙ্কন করা হল যাতে ঐ বৃত্ত

(ক) বক্ররেখাকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে

(খ) বক্ররেখা Γ ও বৃত্ত উভয়েই P বিন্দুতে উক্ত স্পর্শকের একই দিকে থাকে।

ফলে P বিন্দুতে বৃত্তের বক্রতা = $1/(1/\kappa) = \kappa$



অর্থাৎ P বিন্দুতে উক্ত বৃত্ত এবং বক্ররেখা Γ-এর বক্রতা সমান।

ঐ বৃত্তকে P বিন্দুতে বক্ররেখা Γ-এর বক্রতা বৃত্ত (Circle of Curvature) বলা হয়। এই বৃত্তের ব্যাসার্ধকে P বিন্দুতে বক্ররেখা Γ-এর বক্রতা-ব্যাসার্ধ বলা হয়—এই কারণেই P বিন্দুতে বক্ররেখা Γ-এর বক্রতা-ব্যাসার্ধ হল $\frac{1}{\kappa}$ অর্থাৎ $\frac{dS}{d\psi}$। উল্লেখ্য, বক্রতার অনোন্যককে বক্রতা-বাসার্ধ বলার কারণ এটাই। P বিন্দুতে অঙ্কিত ঐ বৃত্তের কেন্দ্রকে বক্ররেখা Γ-এর P বিন্দুতে বক্রতা কেন্দ্র বলা হয়। এই বক্রতা কেন্দ্র কোন স্থির বা নির্দিষ্ট বিন্দু নয়—P এর অবস্থানের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে বক্রতা কেন্দ্রও পরিবর্তিত হয়। বক্রতা কেন্দ্রর সঞ্চারপথকে বক্রতা কেন্দ্রজ বা Evolute বলা হয় এবং বৃত্তের জ্যা-কে বক্ররেখার ঐ বিন্দুতে বক্রতা-জ্যা বলা হয়।

10.3 বক্রতা-ব্যাসার্ধের সূত্র নির্ণয়

(ক) y = f(x) আকারের কার্তিয় সমীকরণের ক্ষেত্রে :

আমরা জানি $\tan\psi = \frac{dy}{dx}$

$$\sec^2\psi \frac{d\psi}{dS} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dS} = y_2 . \cos\psi$$

সুতরাং $\rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{\left(1+y_1^2\right)^{3/2}}{|y_2|}, y_2 \neq 0$

মন্তব্য : হরে y_2-এর ক্ষেত্রে অবশ্যই মডিউলাস চিহ্ন দিতে হবে।

(খ) $x = f(y)$ আকারের সমীকরণের ক্ষেত্রে

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x_1} \quad \text{যেখানে} \quad x_1 = \frac{dx}{dy}$$

$$\sec^2\psi = \frac{d\psi}{ds} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{x_1}\right) = -\frac{1}{x_1^2} \cdot \frac{x^2}{x_1} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{-x_2}{x_1^3}\cos\psi$$

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{-\frac{x_2}{x_1^3}}{\sec^3\psi} = \frac{-\frac{x_2}{x_1^3}}{\left(1+\frac{1}{x_1^2}\right)^{3/2}} = \frac{-x_2}{\left(1+x_1^2\right)^{3/2}}$$

সুতরাং $\rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{\left(1+x_1^2\right)^{3/2}}{|x_2|}$

মন্তব্য : হরে x_2-এর ক্ষেত্রে অবশ্যই মডিউলাস চিহ্ন দিতে হবে।

(গ) প্যারামেট্রিক সমীকরণ $x = x(t),\ y = y(t)$

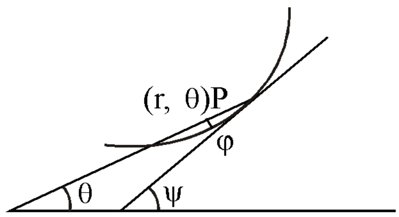
এখানে $y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \left(y' = \frac{dy}{dt}, x' = \frac{dx}{dt}\right)$

$$y_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^2} \cdot \frac{1}{x'}$$

সুতরাং $\rho = \frac{\left(1+\frac{y'^2}{x'^2}\right)^{3/2}}{|x'y'' - x''y'|} \cdot x'^3 = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}{|x'y'' - x''y'|} \qquad (x'y'' - x''y' \neq 0)$

(ঘ) মেরু সমীকরণ $r = f(\theta)$-এর ক্ষেত্রে :

$$\psi = \varphi + \theta = \tan^{-1}\frac{r}{r_1} + \theta$$



$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{1}{1+\frac{r^2}{r_1^2}} \cdot \frac{d}{d\theta}\left(\frac{r}{r_1}\right) + 1$$

$$= \frac{r_1^2}{r_1^2 + r^2} \cdot \frac{r_1^2 - rr_2}{r_1^2} + 1$$

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{r^2 + 2r_1^2 - rr_2}{r^2 + r_1^2}$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{(r^2 + r_1^2)}$$

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{(r^2 + r_1^2)^{3/2}}{|r^2 + 2r_1^2 - rr_2|},\ r^2 + 2r_1^2 - rr_2 \neq 0$$

(ঙ) পাদ-সমীকরণ $p = f\,(r)$-এর ক্ষেত্রে

$p = r\sin\varphi$ সুতরাং $\dfrac{dp}{dr} = \sin\varphi + r\cos\varphi\,\dfrac{d\varphi}{dr}$

$$\frac{dp}{dr} = r\frac{d\theta}{ds} + r\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{dr} = r\frac{d}{ds}(\theta + \varphi) = r\frac{d\psi}{ds}$$

সুতরাং $\rho = \dfrac{ds}{d\psi} = r\dfrac{dr}{dp}$

(চ) বক্ররেখার $f(x, y) = 0$ সমীকরণের ক্ষেত্রে :

আমরা জানি $y_1 = -\dfrac{f_x}{f_y},\ y_2 = -\dfrac{f_{xx}f_y^2 - 2f_xf_yf_{xy} + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$

সুতরাং $\rho = \dfrac{(1+y_1^2)^{3/2}}{|y_2|}$

$$= \frac{\left(f_x^2 + f_y^2\right)^{3/2}}{\left|f_{xx}f_y^2 - 2f_xf_yf_{xy} + f_{yy}f_x^2\right|}$$

$$f_{xx}f_y^2 - 2f_xf_yf_{xy} + f_{yy}f_x^2 \neq 0$$

মন্তব্য : মূলবিন্দুতে বক্ররেখার বক্রতা-ব্যাসার্ধ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে উপরের সূত্রগুলি সাধারণভাবে প্রযোজ্য নয়—বিকল্প পদ্ধতি পরে আলোচিত হবে।

10.4 উদাহরণ

(ক) $x = a \sin 2t\ (1 + \cos 2t),\ y = a \cos 2t\ (1 - \cos 2t)\ ;\ a > 0$

উত্তর : $\left.\begin{array}{l} x' = 2a(\cos 2t + \cos 4t \\ y' = 2a(-\sin 2t + \sin 4t) \end{array}\right\} \begin{array}{l} y'' = 2a(-2\cos 2t + 4\cos 4t) \\ x'' = -2a(2\sin 2t + 4\sin 4t) \end{array}$

$$\rho = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}{|x'y'' - x''y'|} = 4a\cos 3t$$

(খ) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের নাভিগামী জ্যা-এর দুই প্রান্তবিন্দুতে বক্রতা-ব্যাসার্ধ ρ_1 ও ρ_2 হলে দেখাও যে

$$(\rho_1)^{-2/3} + (\rho_2)^{-2/3} = (2a)^{-2/3}, a > 0$$

উত্তর : $(at^2, 2at)$ অধিবৃত্তের উপরিস্থ যে কোন বিন্দু।

$x = at^2,\ y = 2at$ অতএব $x' = 2at,\ x'' = 2a,\ y' = 2a,\ y'' = 0$

$$\rho = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}{|x'y'' - x''y'|} = \frac{\left[4a^2\left(1 + t^2\right)\right]^{3/2}}{\left|-4a^2\right|}$$

সুতরাং $\rho^{-2/3} = \dfrac{(2a)^{-2/3}}{1 + t^2}$

মনে করি $P\left(at_1^2, 2at_1\right)$ ও $P'\left(at_2^2, 2at_2\right)$ নাভিগামী জ্যা-এর দুই প্রান্তবিন্দু। অতএব $t_1t_2 = 1$

$$\rho_1^{-2/3} + \rho_2^{-2/3} = (2a)^{-2/3}\left[\frac{1}{1 + t_1^2} + \frac{1}{1 + t_2^2}\right]$$

$$= (2a)^{-2/3}\left[\frac{2+t_1^2+t_2^2}{2+t_1^2+t_2^2}\right] \qquad (t_1t_2 = -1 \text{ বসিয়ে})$$

$$= (2a)^{-2/3}$$

(গ) ρ, ρ' যদি উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ এর দুই অনুবন্ধী ব্যাস-এর প্রান্তবিন্দু হয়, দেখাও যে $\left(\rho^{2/3}+\rho'^{2/3}\right)(ab)^{2/3} = a^2 + b^2$

উত্তর : ($a\cos\theta$, $b\sin\theta$) ঐ উপবৃত্তের উপরিস্থ যে কোন বিন্দু।

$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ হইলে $x' = -\ a\sin\theta,\ y' = b\cos\theta$

$x'' = -\ a\cos\theta,\ y'' = -\ b\sin\theta$

$$\rho = \frac{\left(x'^2+y'^2\right)}{|x'y''-x''y'|} = \frac{\left(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta\right)^{3/2}}{ab}$$

অতএব $\rho^{2/3} = \dfrac{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}{(ab)^{2/3}}$

অনুবন্ধী ব্যাসের দুই প্রান্তবিন্দু ($a\cos\theta$, $b\sin\theta$) ও $\left(a\cos\overline{\theta+\frac{\pi}{2}}, b\sin\overline{\theta+\frac{\pi}{2}}\right)$

ফলে $\rho^{2/3}+\rho'^{2/3} = \dfrac{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta+a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}{(ab)^{2/3}} = \dfrac{a^2+b^2}{(ab)^{2/3}}$

(ঘ) $\frac{l}{r} = 1+e\cos\theta$ বক্ররেখার $\theta = \pi$ বিন্দুতে ρ নির্ণয় কর, $e < 1$

উত্তর : $r - \dfrac{l}{1+e\cos\theta}, r_1 = \dfrac{r^2 e\sin\theta}{l}$

$$r_2 = \frac{e}{l}\left[2r.r_1\sin\theta+r^2\cos\theta\right]$$

$\theta = \pi$ বিন্দুতে $r = \dfrac{l}{1-e}, r_1 = 0,\ r_2 = \dfrac{-e}{l}\cdot\dfrac{l^2}{(1-e)^2}$

$$\rho \left| = \frac{\left(r^2 + r_1^2\right)^{3/2}}{r^2 + 2r_1^2 - rr_2} \right|_{\theta = \pi} = l$$

$$\theta = \pi$$

(ঙ) $p^2 = \dfrac{r^4}{r^2 + a^2}$, দেখাও যে $\rho = \dfrac{\left(r^2 + a^2\right)^{3/2}}{r^2 + 2a^2}$

উত্তর : $2p\dfrac{dp}{dr} = \dfrac{2r^5 - 4r^3a^2}{\left(r^2 + a^2\right)^2}$, অতএব $\dfrac{dp}{dr} = \dfrac{r^3\left(r^2 + 2a^2\right)}{\left(r^2 + a^2\right)^2} \cdot \dfrac{\sqrt{\left(r^2 + a^2\right)}}{r^2}$

$$= \frac{r\left(r^2 + 2a^2\right)}{\left(r^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

$$\rho = r\frac{dr}{dp} = \frac{r\left(r^2 + a^2\right)^{3/2}}{r\left(r^2 + 2a^2\right)} = \frac{\left(r^2 + a^2\right)^{3/2}}{r^2 + 2a^2}$$

অনুশীলনী :

(1) $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ বক্ররেখার $\theta = 0$ বিন্দুতে ρ নির্ণয় কর।

(2) $x = 5t$, $y = 5\log \sec t$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে ρ-এর অবম মান নির্ণয় কর।

(3) $r^n = a^n \sin n\theta$ বক্ররেখার উপর যেকোন বিন্দুতে ρ নির্ণয় কর।

(4) $x^2 + xy + y^2 = 3$ বক্ররেখার (1, 1) বিন্দুতে ρ নির্ণয় কর।

(5) অধিবৃত্ত $x = at^2$, $y = 2at$-এর উপরিস্থ সেই বিন্দু বা বিন্দুগুলি নির্ণয় কর যেখানে বক্রতা-ব্যাসার্ধ নাভিলম্বের সমান।

10.5 মূলবিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয়

সূত্র : (1) মূলবিন্দুতে $ax + by = 0$ স্পর্শক হলে

$$\rho = \frac{\sqrt{\left(a^2 + b^2\right)}}{2} \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2}{ax + by}$$

(2) মূল বিন্দুতে y-অক্ষ স্পর্শক হলে $\rho = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y^2}{2x}$

(3) মূল বিন্দুতে x-অক্ষ স্পর্শক হলে $\rho = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2}{2y}$

উদাহরণ : $y^2 - 3xy - 4x^2 + 5x^3 + x^4y - y^5 = 0$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে ρ নির্ণয় কর।

উত্তর : মূলবিন্দুতে স্পর্শক $y^2 - 3xy - 4x^2 = 0$ অর্থাৎ $y - 4x = 0$, $y + x = 0$, $y - 4x = 0$. স্পর্শক ধরা হলে $\rho = \dfrac{\sqrt{17}}{2} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{y - 4x}$

$$\rho = \frac{\sqrt{17}}{2} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2 + y^2)(x + y)}{y^5 - x^4y - 5x^3} = \frac{\sqrt{17}}{2} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right)\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^3 . y^2 - \dfrac{y}{x} . x^2 - 5}$$

$= \dfrac{17\sqrt{17}}{2}$ [$\dfrac{y}{x} \to -1$ এবং ρ-এর ঋণাত্মক চিহ্ন বিপরীত দিকে বলে]

$y + x = 0$ স্পর্শক ধরা হলে $\rho = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{y + x}$

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2 + y^2)(y - 4x)}{y^5 - x^4y - 5x^3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right)\left(\dfrac{y}{x} - 4\right)}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^3 . y^2 - \dfrac{y}{z} . x^2 - 5}$$

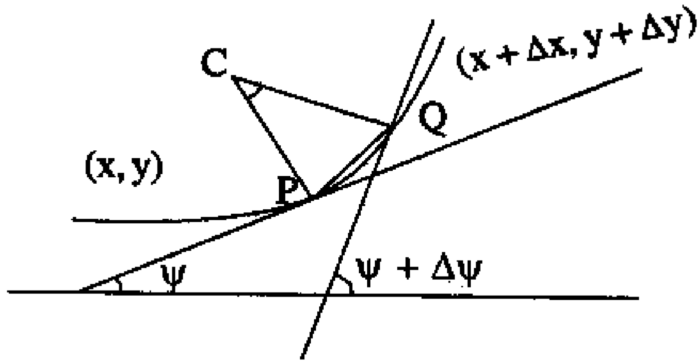
$$= \sqrt{2}$$

অনুশীলনী :

(1) $y = x^3 + 5x^2 + 6x$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

(2) $x^4 - y^4 + x^3 - y^3 + x^2 - y^2 + y = 0$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

10.6 বক্রতা-কেন্দ্র নির্ধারণ



মনে কর বক্ররেখা Γ-এর উপর P(x, y) একটি বিন্দু এবং Q(x + Δx, y + Δy) হল P-এর সন্নিহিত বিন্দু।

চাপ AP = S, চাপ AQ = S + AS

ত্রিভুজ ΔCPQ হইতে পাই $\dfrac{CP}{\sin\angle CQP} = \dfrac{PQ}{\sin\angle PCQ}$

$$CP = \sin\ \angle CQP\ .\ \frac{PQ}{\Delta S}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta\psi}\cdot\frac{\Delta\psi}{\sin\Delta\psi}$$

যখন Q বিন্দু বক্ররেখা বরাবর P বিন্দুর দিকে ধাবিত হয়,

$$\angle CQP \to \frac{\pi}{2}, \frac{\Delta\psi}{\sin\Delta\psi} \to 1, \frac{\Delta s}{\Delta\psi} \to \frac{ds}{d\psi}, \frac{PQ}{\Delta s} \to 1$$

আমরা পাই $CP = \dfrac{ds}{d\psi} = \rho$

ফলে C বিন্দু হইল P ও Q বিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত অভিলম্বদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সীমাস্থ অবস্থান যখন Q বিন্দু বক্ররেখা বরাবর P বিন্দুর দিকে ধাবিত হয়।

P বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ (Y − y) g(x) + (X − x) = 0 (1)

যেখানে $g(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Q বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $(Y - y - \Delta y)g(x + \Delta x) + (X - x - \Delta x) = 0$ (2)

(2) – (1) করে পাই $(Y - y)\left\{\dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right\} - \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) - 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x \to 0 \text{ হলে } Y = y + \dfrac{1+y_1^2}{y^2} \\ \text{(1)-এ বসিয়ে পাই } X - x - \dfrac{y_1(1+y_1^2)}{y_2} \end{array}\right\} \text{বক্রতা কেন্দ্র হল } (X, Y)$$

উদাহরণ :

(1) অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$-এর যেকোন বিন্দুতে বক্রতাকেন্দ্র ও বক্রতা কেন্দ্রজ নির্ণয় কর।

উত্তর : যে কোন বিন্দু $(at^2, 2at)$-এ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{t}, \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-1}{2at^3}$

$$X = at^2 - \frac{\frac{1}{t}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)}{-\frac{1}{2at^3}} = 3at^2 + 2a$$

$$Y = 2at + \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{-\frac{1}{2at^3}} = -2at^3$$

t অপনয়ন করে $\left(\dfrac{X - 2a}{3a}\right)^3 = \left(\dfrac{Y}{-2a}\right)^2$

(X, Y)-এর সঞ্চারপথ হল $4(x - 2a)^3 = 27ay^2$, এটিই হল বক্রতা কেন্দ্রজ।

(2) বক্ররেখা $y = 3x^3 + 2x^2 - 3$-এর $(0, -3)$ বিন্দুতে বক্রতা বৃত্ত নির্ণয় কর।

উত্তর : $y_1 = 9x^2 + 4x$, $y_2 = 18x + 4$

$(0, -3)$ বিন্দুতে $y_1 = 0$, $y_2 = 4$

বক্রতা কেন্দ্র (X, Y) হলে $X = x - \frac{y_1(1+y_1^2)}{y_2} = 0, Y = y + \frac{1+y_1^2}{y_2} = -\frac{11}{4}$

বক্রতা ব্যাসার্ধ $\rho = \frac{(1+y_1^2)^{3/2}}{|y_2|} = \frac{1}{4}$

নির্ণেয় বক্রতা-বৃত্ত হল $(x-0)^2 + \left(y+\frac{11}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

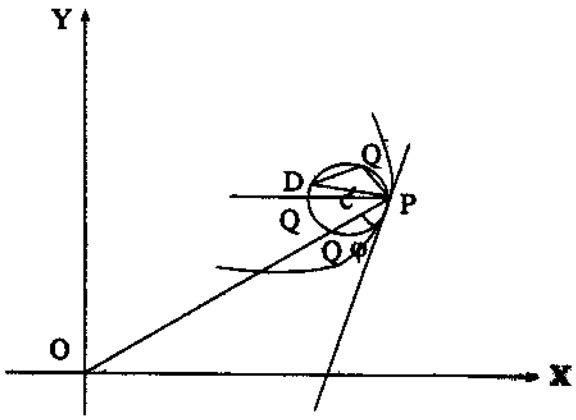
বা, $4(x^2 + y^2) + 22y - 30 = 0$

অনুশীলনী :

(1) $y = x^2$ অধিবৃত্তের (1, 1) বিন্দুতে বক্রতা বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(2) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, a > 0,$ বক্ররেখার বক্রতা-কেন্দ্রজ নির্ণয় কর।

10.7 বক্রতা জ্যা-নির্ধারণ



PD, P বিন্দুগামী বক্রতা ব্যাস ও PQ বক্রতা-জ্যা।

বক্রতা জ্যা PQ-এর দৈর্ঘ্য $= 2\rho \cos\theta$, $\angle QPD = \theta$

PQ, x-অক্ষের সমান্তরাল হলে $\theta = 90° - \psi$ এবং $PQ = 2\rho \sin\psi$

PQ, y-অক্ষের সমান্তরাল হলে জ্যা PQ-এর দৈর্ঘ্য $= 2\rho \cos\psi$

PQ মেরুগামী জ্যা হলে এর দৈর্ঘ্য $= 2\rho \sin\varphi$

অনুশীলনী :

(1) বক্ররেখা $y = c \log \sec\left(\frac{x}{c}\right)$-এর অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(2) কার্ডিঅয়েড $r = a\ (1 + \cos\theta)$, $a > 0$-এর মেরুগামী জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

10.8 সহায়ক গ্রন্থ

1. Differential Calculus — Shantinarayan
1. Differential Calculus — Maity & Ghosh
1. Differential Calculus — H. S. Dhami

একক 11 ❑ সরলরেখা ও বক্ররেখা পরিবারের পরিস্পর্শক

গঠন

11.1 প্রস্তাবনা

আমরা জানি যে x ও y-এর একটি একঘাত সমীকরণ সকল সময়েই তলে একটি সরলরেখায় সূচিত করে এবং এই সরলরেখার সমীকরণকে $y = mx + c$ আকারে প্রকাশ করা যায় যেখানে m ও c-এর বিশেষ জ্যামিতিক তাৎপর্য রয়েছে। এখন মনে কর c-কে আমরা m-এর একটি অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করলাম—ধরা যাক $c = \frac{4}{m}$। সেক্ষেত্রে সরলরেখাটির সমীকরণ হইল $y = mx + \frac{4}{m}$, m-এর বিভিন্ন মানের জন্য বিভিন্ন সরলরেখা পাওয়া যাবে—ঐ সরলরেখাগুলি ভিন্ন ভিন্ন কিন্তু সরলরেখাগুলির মধ্যে সাদৃশ্যও রয়েছে—প্রথমত এদের আকার একই, দ্বিতীয়ত প্রাথমিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতির সাহায্যে আমরা জানি যে এ ধরণের সরলরেখাগুলি সব সময়েই $y^2 = 16x$ অধিবৃত্তের স্পর্শক। কাজেই এই সরলরেখা সমূহের বিশেষ ধর্ম রয়েছে। আমরা এই সরলরেখাগুলিকে সরলরেখা-পরিবার বলব যেখানে m হল প্রচল। অনুরূপভাবে $y = mx + \sqrt{(4m^2 + 1)}$, m-এর বিভিন্ন মানের জন্য বিভিন্ন সরলরেখা পাওয়া যাবে। এ ধরণের সরলরেখাগুলি সব সময়েই $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে। আমরা এ ধরণের সরলরেখা সমূহকেও সরলরেখা-পরিবার বলব। ঐ সমীকরণ এক প্রচল (m) বিশিষ্ট পরিবার। আবার $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ যেখানে $a + b = 5$—একটি দুই প্রচল বিশিষ্ট সরলরেখা-পরিবার।

একইভাবে এক প্রচল ও দুই প্রচল বিশিষ্ট একতলীয় বক্ররেখা পরিবারের কথা বিবেচনা করা যায়। যেমন $(x - \alpha)^2 + y^2 = 4$-এটি α প্রচল বিশিষ্ট বৃত্ত-পরিবার। লক্ষণীয় এই বৃত্তগুলির প্রতিটিই x-অক্ষের সমান্তরাল দুইটি সরলরেখা $y = \pm 2$ -কে স্পর্শ করে। $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ যেখানে $ab = 6$, দুই প্রচল (a ও b) বিশিষ্ট উপবৃত্ত পরিবার।

এই অধ্যায়ে আমরা এক প্রচলবিশিষ্ট ও দুই প্রচল প্রচলবিশিষ্ট সরলরেখা-পরিবার ও বক্ররেখা-পরিবার এবং তাদের স্পর্শ করে এমন বক্ররেখা বা সরলরেখার অস্তিত্ব নিয়ে আলোচনা করব।

এক প্রচল (α) বিশিষ্ট সরলরেখা বা বক্ররেখা পরিবারকে $f(x, y, \alpha) = 0$ দ্বারা এবং দুই প্রচল (α, β) বিশিষ্ট সরলরেখা বা বক্ররেখা পরিবারকে $f(x, y, \alpha, \beta) = 0$ যেখানে $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ দ্বারা চিহ্নিত করা হবে।

11.2 পরিস্পর্শক ও উহার নির্ণয় পদ্ধতি

(1) বক্ররেখার উপর বিন্দু P-কে সাধারণ বিন্দু বলা হবে যদি ঐ বিন্দুতে f_x ও f_y-এর মধ্যে অন্তত একটি অ-শূন্য হয়।

(2) $f(x, y, \alpha) = 0$ পরিবারের যদি কোন সাধারণ বিন্দুর ক্ষেত্রে $f(x, y, \alpha) = 0$ ও $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ সিদ্ধ হয়, তবে সেই বিন্দু বা বিন্দুগুলিকে বৈশিষ্ট্য বিন্দু বলা হয়।

(3) বক্ররেখা-পরিবারের পরিস্পর্শক হচ্ছে ঐ পরিবারের বৈশিষ্ট্য বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ।

পরিস্পর্শকের বিকল্প সংজ্ঞা :

বক্ররেখা বা সরলরেখা-পরিবারের ক্ষেত্রে যদি দেখা যায় যে ঐ তলে এমনকোন সরলরেখা বা বক্ররেখার অস্তিত্ব রয়েছে যাহা উক্ত পরিবারের সকল সদস্যকে স্পর্শ করছে এবং উক্ত সরলরেখা বা বক্ররেখার যেকোন বিন্দুতে প্রদত্ত পরিবারের কোন-না-কোন সদস্য স্পর্শ করে আছে, তবে ঐ সরলরেখা বা বক্ররেখাকে উক্ত পরিবারের পরিস্পর্শক বলা হয়। কাজেই পরিস্পর্শক হইল প্রদত্ত সরলরেখা-পরিবার বা বক্ররেখা-পরিবারের প্রতিটি সদস্যকে স্পর্শ করে এমন সরলরেখা বা বক্ররেখা। এক প্রচলবিশিষ্ট পরিবারের ক্ষেত্রে $f(x, y, \alpha) = 0$ ও $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ সমীকরণ দুইটি থেকে প্রচল α অপনয়ন করিলেই পরিস্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যাবে। দুই প্রচলবিশিষ্ট পরিবারের ক্ষেত্রে $f(x, y, \alpha, \beta) = 0$ এবং $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ উভয় হতে $\frac{d\beta}{d\alpha}$ নির্ণয় করিয়া α, β অপনয়ন করলে পরিস্পর্শক পাওয়া যাবে।

11.3 উদাহরণ

(ক) $y = m^2 x + \frac{1}{m^2}$ (1) : সরললেখা-পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর।

উত্তর : $f(x, y, m) \equiv y - m^2 x - \frac{1}{m^2} = 0$ (2)

$$\frac{\partial f}{\partial m} = -2mx + \frac{2}{m^3} = 0$$ হতে পাই $m^4 = \frac{1}{x}$

(1)-এর থেকে পাই $y^2 = m^4x^2 + \frac{1}{m^4} + 2x$

$m^4 = \frac{1}{x}$ বসিয়ে $y^2 = 4x$ নির্ণেয় পরিস্পর্শক।

(খ) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = l\sin\alpha\cos\alpha$ (1) : সরলরেখা-পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর।

উত্তর : $f(x, y, \alpha) \equiv x\cos\alpha + y\sin\alpha - l\sin\alpha\cos\alpha = 0$ (2)

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -x\sin\alpha \mid y\cos\alpha - l\cos 2\alpha = 0 \quad (3)$$

(2) ও (3) সমাধান করে $x = l\sin^3\alpha,\ y = l\cos^3\alpha$

অতএব α-অপসৃত $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$ নির্ণেয় পরিস্পর্শক।

(গ) অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$-এর উপর যেকোন বিন্দু P থেকে স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের উপর PM ও PN লম্ব টানা হল। MN সরলরেখা-পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর।

উত্তর : $P(at^2, 2at)$ হলে MN-এর সমীকরণ $\frac{x}{at^2} + \frac{y}{2at} = 1$ যেখানে t হল প্রচল।

$f(x, y, t) \equiv 2x + ty - 2at^2 = 0$ (1)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = y - 4at = 0 \quad (2)$$

(2) হতে $t = \frac{y}{4a}$

(1)-এ বসিয়ে t-অপসৃত $y^2 = -16ax$ হল নির্ণেয় পরিস্পর্শক।

(ঘ) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর যেখানে $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = 1$ (l ও m ধ্রুবক)

উত্তর : উপবৃত্তের সমীকরণ হতে পাই $\frac{db}{da} = \frac{b^3x^2}{a^3y^2}$

$$\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}=1 \text{ হতে পাই } \frac{db}{da}=-\frac{am^2}{bl^2}$$

$$\frac{b^3x^2}{a^3y^2}=\frac{am^2}{bl^2} \text{ হতে পাই } \frac{x^2l^2}{a^4}=\frac{y^2m^2}{b^4}$$

অর্থাৎ $$\frac{\frac{x^2}{a^2}}{\frac{a^2}{l^2}}=\frac{\frac{y^2}{b^2}}{\frac{b^2}{m^2}}=\frac{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}{\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}}=\frac{1}{1}=1$$

সুতরাং $a^2=\pm lx, b^2=\pm my$

নির্ণেয় পরিস্পর্শক $\frac{x^2}{\pm lx}+\frac{y^2}{\pm my}=1$ অর্থাৎ $\pm\frac{x}{l}\pm\frac{y}{m}=1$

(ঙ) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখা পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর যেখানে $a^n+b^n=c^n, c$ একটি ধ্রুবক।

উত্তর : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ হতে পাই $\frac{db}{da}=\frac{-b^2x}{a^2y}$

$a^n+b^n=c^n$ হতে পাই $\frac{db}{da}=-\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}$

$-\frac{b^2x}{a^2y}=-\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}$ হতে পাই $\frac{x}{a^{n+1}}=\frac{y}{b^{n+1}}$

অর্থাৎ $$\frac{\frac{x}{a}}{a^n}=\frac{\frac{y}{b}}{b^n}=\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{a^n+b^n}=\frac{1}{c^n}$$

$a=(c^nx)^{1/(n+1)}, b=(c^ny)^{1/(n+1)}$

নির্ণেয় পরিস্পর্শক হল $\frac{x}{(c^nx)^{1/(n+1)}}+\frac{y}{(c^ny)^{1/(n+1)}}=1$

অর্থাৎ $x^{n/(n+1)}+y^{n/(n+1)}=c^{n/(n+1)}$

(চ) দেওয়া আছে যে $x^{2/3} + y^{2/3} = c^{2/3}$ $(c > 0)$ বক্ররেখাটি $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$–এই দুই প্রচলবিশিষ্ট সরলরেখা পরিবারের পরিস্পর্শক। দেখাও যে $a^2 + b^2 = c^2$

উত্তর : মনে করি $a^2 + b^2 = k^2$

উদাহরণ (ঙ) হতে পাই পরিস্পর্শক $x^{2/3} + y^{2/3} = k^{2/3}$। প্রদত্ত পরিস্পর্শকের সঙ্গে তুলনা করে পাই $k = c$ অতএব নির্ণেয় সম্পর্ক হল $a^2 + b^2 = c^2$

(ছ) অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$-এর দ্বি-কোটিকে ব্যাস ধরে বৃত্ত অঙ্কিত হল। বৃত্ত-পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর।

উত্তর : মনে করি $P(at^2, 2at)$ ও $Q(at^2, -2at)$ দ্বি-কোটির দুই প্রান্তবিন্দু। PQ কে ব্যাস ধরে বৃত্তের সমীকরণ

$$(x - at^2)^2 + (y - 2at)(y + 2at) = 0$$

অর্থাৎ $x^2 + a^2t^4 - 2xat^2 + y^2 - 4a^2t^2 = 0$

$$f(x, y, t) \equiv a^2t^4 - 2at^2(x + 2a) + x^2 + y^2 = 0 \quad (1)$$

$\frac{\partial f}{\partial t} = 4a^2t^3 - 4at(x + 2a) = 0$ বা $4a^2t^3 = 4at(x + 2a)$

অর্থাৎ $t^2 = \frac{x + 2a}{a}$

(1) -এ বসিয়ে পাই

$$\frac{a^2(x + 2a)^2}{a^2} - 2(x + 2a)^2 + x^2 + y^2 = 0$$

বা, $x^2 + y^2 = (x + 2a)^2$

অর্থাৎ $y^2 = 4a(x + a)$ নির্ণেয় পরিস্পর্শক।

অনুশীলনী :

(1) $y = mx + \frac{a}{m}$ (a : ধ্রুবক) সরলরেখা-পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর।

(2) $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ (a, b : ধ্রুবক) সরলরেখা-পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর।

(3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখা-পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর যেখানে $ab = 4$

(4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্ত-পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর যেখানে $a + b = 8$

(5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্ত-পরিবারের অর্ধ-অনুবন্ধী ব্যাস-যুগলের প্রান্তবিন্দুগুলির যোগাযোগকারী সরলরেখা-পরিবারের পরিস্পর্শক নির্ণয় কর।

(6) প্রদত্ত আছে $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}(a>0)$ বক্ররেখাটি দুই-প্রচল বিশিষ্ট সরলরেখা-পরিবার $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$-এর পরিস্পর্শক। দেখাও যে $p + q = a$

11.4 সহায়ক গ্রন্থ

1. Differential Calculus — Shantinarayan
1. Differential Calculus — B. C. Das & B. N. Mukherjee