একক 1 ❐ বাস্তব সংখ্যা ও বিভিন্ন ধর্ম (Real number and different properties)

গঠন

1.1 প্রস্তাবনা

বাস্তব রাশি হ'ল সেই বুনিয়াদী উপকরণ যাকে মূলধন করে যুক্তিশাস্ত্রের সাহায্যে গাণিতিক বিশ্লেষণ তত্ত্বের অবতারণা করা হয়। বিশ্লেষণ তত্ত্বের স্বাভাবিক অভিমুখীনতা অনুযায়ী প্রথমে Peano's Axioms বা পীয়ানো স্বতঃসিদ্ধের সাহায্যে স্বাভাবিক সংখ্যাগুলিকে চিত্রিত করা, তার পর বীজগাণিতিক পদ্ধতির মাধ্যমে স্বাভাবিক সংখ্যা থেকে মূলদ সংখ্যা গঠন করা এবং সর্বশেষে Dedekind Cut বা অনুরূপ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে বাস্তব সংখ্যার গঠনই বিধেয়। কিন্তু এই প্রক্রিয়া অনুসরণের ক্ষেত্রে যে সূক্ষ্মাতিসূক্ষ্ম গাণিতিক যুক্তিবিন্যাসের প্রয়োজন পড়ে, সেটি সময়ের বিচারে ও কলনবিদ্যার প্রথম পর্বের পাঠক পাঠিকাদের ক্ষেত্রে পরিহার করাই বাস্তব সম্মত। সেই হিসাবে এই এককে বাস্তব রাশির কিছু গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম ও প্রক্রিয়ার উল্লেখ করা হ'ল, যা পরবর্তী এককগুলির ক্ষেত্রে ব্যবহার করা হ'বে।

1.2 সেটের কিছু আলোচনা

সেট (Set) ঃ সেট হলো কোন নির্দিষ্ট নিয়মের ভিত্তিতে সুসংজ্ঞাত বস্তুর সংগ্রহ। বস্তুগুলিকে সেটের পদ বলা হয়। সেট সাধারণত A, B, ... X, Y, ... প্রভৃতি দিয়ে নির্দেশ করা হয় এবং পদগুলি সাধারণত a, b, ... x, y, ... প্রভৃতি দিয়ে নির্দেশ করা হয়। সেট সাধারণত দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে লেখা হয়।

উদাহরণ ঃ (1) মৌলানা আজাদ কলেজের প্রথম বর্ষের ছাত্ররা একটা সেট তৈরী করে। এখানে বস্তুগুলি হল "ছাত্র" এবং নিয়ম হলো "মৌলানা আজাদ কলেজের প্রথম বর্ষ"।

(2) পৃথিবীর সেই সমস্ত মানুষদের সংগ্রহ যাদের বয়স 200 বছরের বেশী"।

এখানে বস্তু হলো "মানুষ" এবং নিয়ম হলো" বয়স 200 বছরের বেশী"।

সংজ্ঞানুযায়ী, এটা একটা সেট কিন্তু এই সংগ্রহে অর্থাৎ সেটে একটিও মানুষ (বস্তু) পাওয়া যাবে না। এরকম সেটকে শূন্য সেট বা নাল (null) বা ভয়েড্ (void) সেট বলা হবে।

সার্বিক বা ইউনিভার্সাল সেট (Universal set) ঃ কোন সেটের আলোচনায়, যে বস্তুর সংগ্রহ বলা হয়েছে নিয়ম বাদে বিশ্বের সমস্ত ঐ বস্তুর সংগ্রহকে ইউনিভার্সাল সেট বলা হয়। ইউনিভার্সাল সেট সাধারণত U দ্বারা সূচিত করা হয়।

শূন্য সেট (Void or Empty set) ঃ যে সেটে কোন পদের অস্তিত্ব থাকে না তাকে শূন্য সেট বলা হয়। Φ চিহ্ন দ্বারা শূন্য সেট সূচিত করা হয়। উপরে 2 নং উদাহরণ একটি শূন্য সেটের উদাহরণ।

সিঙ্গালটোন সেট (Singletone set) ঃ যে সেটে একটি এবং কেবলমাত্র একটি পদ আছে তাকে সিঙ্গালটোন সেট বলা হয়। যেমন [0] একটি সিঙ্গালটোন সেট।

সাব-সেট (Sub-set) বা উপসেট ঃ A এবং B দুটি সেট। B সেটকে A সেটের সাবসেট বা উপসেট বলা হবে যদি B সেটের প্রতিটি পদ A সেটের পদ হয়। চিহ্নের দ্বারা লেখা হয় $B \subset A$, এক্ষেত্রে A কে বলা হবে B এর সুপার সেট।

উদাহরণ ঃ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = (1, 2, 3, 4, 6, 7)$; $A \subset B$, $B \not\subset A$

সসীম ও অসীম সেট ঃ সেট S কে সসীম সেট বলা হইবে যদি S শূন্য সেট হয় অথবা যদি সেট S-এ সসীম সংখ্যক সদস্য থাকে। অন্যথায় সেটটিকে অসীম সেট বলা হয়।

সেটের সমতা ঃ দুটি সেট A এবং B পরস্পর সমান হবে অর্থাৎ $A = B$ হবে, যদি $A \subset B$ এবং $B \subset A$ হয়।

ইউনিয়ন্ (সংযোগ) (Union) ঃ A এবং B সেট-এর ইউনিয়ন $A \cup B$ একটি সেট যার পদগুলি হয় A-এর পদ বা B-এর পদ অথবা উভয়ের পদ। অর্থাৎ $A \cup B = \{x/x \in A$ অথবা $x \in B\}$, $A \cup \phi = A$, $A \cup A = A$, $A \cup U = U$, $A \cup B = B \cup A$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$।

ইন্টারসেকশন (Intersection) ঃ A এবং B সেটের ইন্টারসেকশন একটি সেট যার পদগুলি A এবং B উভয় সেটে থাকবে।

$A \cup B = \{x/x \in A$ এবং $x \in B\}$

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}\right\}, B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right\}, C = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}$$

$$A \cap B = \left\{\frac{1}{2}\right\}, \ A \cap C = \phi$$

কিছু তথ্য ঃ $A \cap \phi = A \cap A = A$, $A \cap U = A$

$A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$

সেটসমূহের কার্তিয় গুণফল ঃ A ও B অশূন্য সেট হইলে $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

বিচ্ছিন্ন সেট (Disjoint set) ঃ

A এবং B কে বিচ্ছিন্ন সেট বলা হবে যদি $A \cap B = \phi$।

উদাহরণ ঃ $S = \{p, q, r, s\}$, $T = \{a, b, c\}$ যেখানে S-এর কোন সদস্য T-এর সদস্য নয় $\Rightarrow S \cap T = \phi$।

পূরক সেট (Complement of a set) ঃ

U যদি সার্বিক সেট হয় এবং A যদি ঐ সার্বিক সেটের একটি সাবসেট হয় তবে A সেটের পূরক সেট হবে একটি সেট যার পদগুলি U-এর পদ হবে কিন্তু A-এর পদ হবে না। পূরক কেট A' (বা A^C) দ্বারা লেখা হয়।

$A^C = [x/x \in U, x \notin A\} = A'$

কিছু তথ্য ঃ $A \cup A^C = U$; $A \cap A^C = \phi$; $\Phi^C = U$, $U^C = \phi$

De-Morgan-এর নিয়ম ঃ $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

1.3 স্বাভাবিক সংখ্যা

গণন প্রক্রিয়ার স্বাভাবিক নিয়মে আমরা 1, 2, 3, ... ইত্যাদি চিহ্নগুলি পাই, যেগুলিকে স্বাভাবিক

সংখ্যা বলে অভিহিত করা হয়। ঐ স্বাভাবিক সংখ্যাগুলি নিয়ে যে সেট গঠিত হয়, তাহাকে N দ্বারা সূচিত করা হয়। N = (1, 2, 3, ...) সেটটি অসীম সেট। যেখানে $n \in N$ হইলে $n+1 \in N$ হবে।

যদি $M \subset N$ এবং (i) $1 \in M$ (ii) $n \in M$ হলে $n + 1 \in M$ হয়, তবে $M = N$।

যে কোন দুটি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল সব সময় স্বাভাবিক সংখ্যা, কিন্তু যে কোন দুটি স্বাভাবিক সংখ্যার বিয়োগফল সবসময় স্বাভাবিক সংখ্যা হয় না। স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির ঋণাত্মককে ঋণাত্মক সংখ্যা হিসাবে অভিহিত করা হয়।

এই পর্য্যায়ে সেট N-এর মধ্যে স্বাভাবিক সংখ্যার ঋণাত্মক রূপ এবং 0 (শূন্য) অন্তর্ভুক্ত করে আমরা পেলাম পূর্ণ সংখ্যার সেট Z অর্থাৎ, Z গঠিত হলো সমস্ত স্বাভাবিক সংখ্যার (ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা), স্বাভাবিক সংখ্যার ঋণাত্মক রূপ (ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা) এবং শূন্য দ্বারা

$Z = \{\ldots\ldots\ldots\ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ \}$

আবার, পূর্ণসংখ্যাগুলির মধ্যে গুণ প্রক্রিয়ার দ্বারা উৎপন্ন ফল একটি পূর্ণসংখ্যা বা শূন্য হবে কিন্তু Z-এর যে কোন দুটি সংখ্যার মধ্যে ভাগ প্রক্রিয়ার সমস্ত ফল কিন্তু পূর্ণসংখ্যা হয় না। যেমন $3 \div 2$, $7 \div 5$ ইত্যাদি। তখনই সৃষ্টি হলো মূলদ সংখ্যা (p/q আকার, $q \neq 0$), উল্লেখ্য 0 (শূন্য) দ্বারা ভাগ অসংজ্ঞাত। সুতরাং মূলদ সংখ্যা বলিতে বুঝায় $\frac{p}{q}$ আকারের সংখ্যা যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা, $q \neq 0$।

Z-সেটের মধ্যে মূলদ সংখ্যাগুলি অন্তর্গত করে আমরা পেলাম মূলদ সংখ্যার সেট Q।

1.3.1 মূলদ সংখ্যার বীজগাণিতিক ধর্ম (Algebraic properties of Q)

বীজগাণিতিক ধর্মগুলি হল ঃ

A1) যে কোন $a, b \in Q$ এর জন্য $a + b \in Q$

A2) যে কোন $a, b, c \in Q$ এর জন্য

$(a + b) + c = a + (b + c)$

A3) যে কোন $a \in Q$, $a + 0 = a$; $0 \in Q$

A4) যে কোন $a \in Q$ এর ক্ষেত্রে $-a \in Q$ পাওয়া যায়, যার জন্য $a + (-a) = 0$ হবে

A5) যে কোন $a, b \in Q$ এর জন্য $a + b = b + a$

M1) যে কোন $a, b \in Q$ এর জন্য $a \cdot b \in Q$

M2) যে কোন $a, b, c \in Q$ এর জন্য $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

M3) $1 \in Q$ এবং যে কোন $a \in Q$ এর জন্য $a \cdot 1 = a$

M4) যে কোন $a \in Q$, $a \neq 0$ এর জন্য Q-এ $\frac{1}{a}$ আকারের সংখ্যা পাওয়া যাবে, যাতে $a.\frac{1}{a} = 1.$

M5) যে কোন $a, b \in Q$ এর জন্য $a \cdot b = b \cdot a$

D) যে কোন $a, b, c \in Q$ এর জন্য $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

1.3.2 Q-এর ক্রম ধর্ম (Order properties of Q)

ধর্মগুলি হলো ঃ

(1) যে কোন দুটি সংখ্যা a, $b \in Q$-এর জন্য,

হয় $a < b$, বা $a = b$ নতুবা $b < a$ (law of trichotomy)

(2) যে কোন তিনটি সংখ্যা a, b, $c \in Q$-এর জন্য

(i) $a < b$ এবং $b < c \Rightarrow a < c$

(ii) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

(iii) $a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ যখন $c < 0$

1.3.3 Q-এর ঘনত্ব ধর্ম (Density property of Q)

ধর্মটি হলো ঃ

"a, $b \in Q$ এবং $a < b$ হলে অপর একটি সংখ্যা $c \in Q$ পাওয়া যাবে যাতে $a < c < b$ হয়।"

এই ধর্মের সাহায্যে সহজেই জানা যায়, "যে কোন দুটি মূলদ সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য মূলদ সংখ্যা আছে।"

1.3.4 Q-এর আর্কিমিডিয়ান (Archimedean) ধর্ম

যে কোন দুটি ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা a, $b \in Q$, $a < b$-এর জন্য সর্বদা একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n পাওয়া যায়, যাহার ক্ষেত্রে $n.a > b$.

1.4 মূলদ সংখ্যার জ্যামিতিক রূপায়ণ (Geometrical representation of rational numbers)

xx' একটি সরলরেখা। xx' এর উপর 0 একটি বিন্দু। 0 বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিয়া 0-এর ডান এবং বাম দিককে যথাক্রমে ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক দিক হিসাবে গণ্য করা হল। নির্দিষ্ট স্কেলে OU কে এক একক ধরা হল। $OU = 1$ এমন মূলদ সংখ্যা r কে xx' এর উপরে সেই বিন্দু দ্বারা সূচিত করা হল যাহার দূরত্ব 0 বিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে OU-এর r গুণ এবং $-r$ $(r > 0)$ কে 0 বিন্দু থেকে ঋণাত্মক দিকে OU এর r গুণ দূরত্বের বিন্দু দ্বারা সূচিত করা হবে।

$\frac{p}{q}$ $(p < q)$ মূলদ সংখ্যাকে বিন্দু দ্বারা সূচিত করার ক্ষেত্রে প্রথমে OU কে সমান q সংখ্যক অংশে ভাগ করা হল। এই q সংখ্যক অংশগুলির প্রতিটির দৈর্ঘ্য $\frac{1}{q}$। এখন 0 বিন্দু থেকে $\frac{1}{q}$ দৈর্ঘ্যের পরপর p সংখ্যক অংশ যে বিন্দুতে শেষ হবে সেই বিন্দুটিই $\frac{p}{q}$ কে সূচিত করবে।

এভাবে, সমস্ত মূলদ সংখ্যাগুলিকে xx' সরলরেখার উপরস্থ বিন্দু দ্বারা সূচিত করা যাবে।

1.5 অমূলদ সংখ্যা

উদাহরণ ঃ প্রমাণ করুন, $\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা নহে।

ধরা যাক, $\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

$\therefore\ \sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, $(q \neq 0)$; p, q পূর্ণসংখ্যা এবং পরস্পর মৌলিক।

বা, $p^2 = 2q^2$, একটি জোড় সংখ্যা। এখন p^2 একটি জোড় সংখ্যা হলে p অবশ্যই জোড় সংখ্যা।

ধরুন, $p = 2m$, যেখানে m পূর্ণসংখ্যা

$\therefore\ 4m^2 = p^2 = 2q^2$

বা, $q^2 = 2m^2$

$\therefore\ q^2$ একটি জোড় সংখ্যা। সুতরাং q-একটি জোড় সংখ্যা।

$\therefore$ দেখা যাচ্ছে, 2 সংখ্যাটি p এবং q-এর একটি সাধারণ উৎপাদক। কিন্তু, p এবং q পরস্পর মৌলিক।

$\therefore\ \sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা নহে।

অমূলদ সংখ্যা ঃ

যে সংখ্যাকে $\dfrac{p}{q}$, (যেখানে, $q \neq 0$, p এবং q পূর্ণসংখ্যা) আকারে প্রকাশ করা যায় না তাকে অমূলদ সংখ্যা বলা হয়। যেমন $\sqrt{3}+\sqrt{2}, \sqrt[3]{7}$ ইত্যাদি।

1.6 বাস্তব সংখ্যা

মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যাগুলিকে নিয়ে যে সেট তৈরী হয় তাকে বাস্তব সংখ্যার সেট বলে। বাস্তব সংখ্যার সেটকে R দ্বারা সূচিত করা হয়।

বাস্তব সংখ্যা
(Real number)

- মূলদ (Rational)
  - পূর্ণসংখ্যা (Integer)
    - ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (স্বাভাবিক সংখ্যা) (Positive Integer : Natural Number
    - শূন্য (zero)
    - ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা (স্বাভাবিক সংখ্যার ঋণাত্মক রূপ) (Negative Integer : Negative form of Natural Number)
  - ভগ্নাংশ (Fraction)
- অমূলদ (Irrational)

বাস্তব সংখ্যার ধর্ম ঃ

বাস্তব সংখ্যাগুলির কিছু গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম আলোচনা করা হলো।

1.6.1. বাস্তব সংখ্যার বীজগাণিতিক ধর্ম (Algebraic properties of R)

A_1. $a + b \in R$; $\forall a, b \in R$

A_2. $a + b = b + a$; $\forall a, b \in R$

A_3. $(a + b) + c = a + (b + c)$; $\forall a, b, c \in R$

A_4. $0 \in R$ এমন যে কোন $a \in R$-এর জন্য $a + 0 = a$

A_5. প্রতিটি $a \in R$-এর জন্য R-এর মধ্যে অপর একটি সংখ্যা $-a$ পাওয়া যাবে যাতে $a + (-a) = 0$

M_1. $a \cdot b \in R$; $\forall a, b \in R$

M_2. $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b \in Q$

M_3. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$; $\forall a, b, c \in R$

M_4. $1 \in R$ যে কোন $a \in R$ এর জন্য $a \cdot 1 = a$

M_5. প্রতিটি $a \in R$—[0] এর জন্য R-এর মধ্যে অপর একটি সংখ্যা $\frac{1}{a} \in R - [0]$ পাওয়া যাইবে,

$$a.\frac{1}{a} = 1$$

D_1. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; $\forall a, b, c \in R$

D_2. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$; $\forall a, b, c \in R$

1.6.2 বাস্তব সংখ্যার ক্রম ধর্ম (Order properties of R)

0.1. যে কোন দুটি বাস্তব সংখ্যা $a, b \in R$ এর ক্ষেত্রে হয় $a < b$ বা $a = b$ নতুবা $b < a$.

0.2. $a, b, c \in R$, $a < b$ এবং $b < c \Rightarrow a < c$.

0.3. $a, b, c \in R$, $a < b \Rightarrow a + c < b + c$.

0.4. $a, b, c \in R$, $a < b \Rightarrow \begin{cases} ac < bc & \text{যদি } 0 < c \text{ হয়।} \\ bc < ac & \text{যদি } c < 0 \text{ হয়।} \end{cases}$

1.6.3 বাস্তব সংখ্যার ঘনত্ব ধর্ম (Density property of R)

D_1. যদি x, y দুটি বাস্তব সংখ্যা হয় এবং $x < y$ তখন একটি মূলদ সংখ্যা r পাওয়া যাবে যাতে $x < r < y$.

D_2. যদি x, y দুটি বাস্তব সংখ্যা হয় এবং $x < y$ তখন একটি অমূলদ সংখ্যা s পাওয়া যাবে যাতে $x < s < y$.

1.6.4 আর্কিমিডিয়ান ধর্ম (Archimedean property of R)

যদি $x, y \in R$ এবং $x > 0$, তখন একটি স্বাভাবিক সংখ্যা n পাওয়া যাবে যাতে, $nx > y$.

1.7 সীমাবদ্ধ সেট

বাস্তব সংখ্যার সেট S ($\subset$ R)-কে ঊর্ধ্ব সীমাবদ্ধ সেট বলা হইবে যদি $K \in R$-এর অস্তিত্ব থাকে যাহার ক্ষেত্রে $x < K$ (বা $x \leq K$), সকল $x \in S$-এর জন্য। ফলে যে কোন সসীম সেট ঊর্ধ্ব সীমাবদ্ধ সেট। $S = \{x | x \in R,\ 10 \leq x \leq 20\}$ ঊর্ধ্ব সীমাবদ্ধ অসীম সেট।

সেট S-কে অধঃ-সীমাবদ্ধ সেট বলা হইবে যদি $p \in R$-এর অস্তিত্ব থাকে যাহার ক্ষেত্রে $x > p$ (বা $x \geq p$), সকল $x \in S$-এর জন্য।

ফলে যে কোন সসীম সেট অধঃ-সীমাবদ্ধ। $S = \{x | x \in R,\ 10 \leq x \leq 20\}$ অধঃ-সীমাবদ্ধ অসীম সেট। সেট S-কে সীমাবদ্ধ সেট বলা হইবে যদি উহা অধঃ ও ঊর্ধ্ব উভয় ধরণের সীমাবদ্ধ সেট হয়।

উদাহরণ ঃ (1) স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N-এর অধঃসীমা আছে। কিন্তু ঊর্ধ্বসীমা নেই।

(2) সেট Z, Q এবং R প্রত্যেকে সীমাহীন সেট্।

ঊর্ধ্বসীমার সংজ্ঞানুযায়ী, কোন বাস্তব সংখ্যার সেটের একটি ঊর্ধ্বসীমা থাকিলে ঐ ঊর্ধ্বসীমা থেকে বড় সকল বাস্তব সংখ্যা ঐ সেটের ঊর্ধ্বসীমা হইবে।

ঠিক একইভাবে, বাস্তব সংখ্যার সেটের একটি অধঃসীমা থাকিলে ঐ অধঃসীমা থেকে ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা ঐ সেটের অধঃসীমা হইবে।

1.7.1 লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা সম্পর্কিত স্বতঃসিদ্ধ

বাস্তব সংখ্যার সেট R-এর প্রতিটি অশূন্য ঊর্ধ্ব সীমাবদ্ধ উপসেটের লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা আছে। এই স্বতঃসিদ্ধকে (Completeness Axion) বা 'পূর্ণতার স্বতঃসিদ্ধ' বলা হয়। মন্তব্য—উক্ত লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমাটি সংশ্লিষ্ট উপসেটের সদস্য হইতে পারে, না-ও হইতে পারে।

লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমার সংজ্ঞা

অশূন্য ঊর্ধ্ব সীমাবদ্ধ উপসেট S ($\subset$ R)-এর লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা M হইবে যদি (i) $x \leq M$, সকল $x \in S$-এর জন্য এবং (ii) $\in$ যদি যদৃচ্ছ ধনসংখ্যা হয়, তবে ঐ $\in$-এর অনুসঙ্গী অন্তত একটি $y \in S$ পাওয়া যাইবে যাহার ক্ষেত্রে $y > M - \in$ হইবে।

মন্তব্য ঃ (i) ইহার অর্থ M-এর চেয়ে ছোট কোন বাস্তব সংখ্যা ঐ সেট S-এর ঊর্ধ্বসীমা হইতে পারিবে না

উদাহরণের সাহায্যে y-এর $\in$-নির্ভরতা ব্যাখ্যা

মনে করি $S = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in N\right\}$, 2 এই সেটের লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা।

মনে করি $0 < \in < 1$, যদৃচ্ছ ধনসংখ্যা। $1 + \frac{1}{n} > 2 - \in$ হয় অর্থাৎ যদি $n < \frac{1}{1 - \in}$ হয়।

ধরি $\in = \frac{1}{15}, n < \frac{15}{14} \Rightarrow n = 1.$

ধরি $\in = \frac{5}{6}, n < \frac{1}{1-\frac{5}{6}}$ অর্থাৎ $n < 6 \Rightarrow n = 1, 2, 3, 4, 5.$

গরিষ্ঠ অধঃসীমা (বা নিম্নসীমা) Infimum) ঃ

বাস্তব সংখ্যা m একটি সেট S-এর গরিষ্ঠ অধঃসীমা হবে যদি (i) $x \in S$, $x \geq m$ এবং (ii) $\varepsilon > 0$ যদৃচ্ছ ধনসংখ্যার ক্ষেত্রে, $y \in S$ পাওয়া যাবে যার জন্য $y < m + \varepsilon$ হবে।

মন্তব্য ঃ লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমার স্বতঃসিদ্ধ হইতে ঐ গরিষ্ঠ অধঃসীমার অস্তিত্ব প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণ ঃ নীচের সেটগুলির লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা ও গরিষ্ঠ অধঃসীমা নির্ণয় করো ঃ

(i) $S = \left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots\ldots, -\frac{1}{n}, \ldots\right\}$ (উত্তর ঃ 0, –1)

(ii) $S = \left\{\frac{(-1)^n}{n}, n \in N\right\}$ (উত্তর ঃ $\frac{1}{2}, -1$)

প্রশ্নাবলী ঃ কোনটি ঠিক দেখুন ঃ

(1) পূর্ণ-সংখ্যার সেটটি

(a) ঊর্ধ্বসীমা যুক্ত, (b) সীমাহীন, (c) অধঃসীমা যুক্ত।

(2) S = {1, 2, 3, 4, 5,}-এর গরিষ্ঠ অধঃসীমা।

(a) নেই, (b) 1, (c) বোঝা যাচ্ছে না।

(3) $S = \left\{a - \frac{1}{n} : n \in N\right\}$-এর লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা।

(a) S-এর একটি পদ, (b) S-এর পদ নহে, (c) বুঝা যাচ্ছে না।

1.7.2 বাস্তব সংখ্যার সেট R-এর অনন্য ধর্ম

(1) R হইল ক্রমধর্ম (1.6.2) সমন্বিত, পূর্ণতার স্বতঃসিদ্ধ (1.7.1) সম্বলিত সেট। কিন্তু R-এর উপসেট Q (মূলদ সংখ্যার সেট), Z (পূর্ণসংখ্যার সেট) ঐ যুগ্ম ধর্ম সমন্বিত নয়।

(2) ক্রমধর্মটি R-এ প্রযোজ্য, কিন্তু জটিল সংখ্যার সেট C-তে প্রযোজ্য নহে।

1.8 বাস্তব সংখ্যার পরমমান (Absolute value)

কোন বাস্তব সংখ্যা a-এর পরমমানকে সূচিত করা হয় $|a|$ দ্বারা,

$|a| = a$, যদি $a > 0$

$= 0$, যদি $a = 0$

$= -a$, যদি $a < 0$

পরমমানের কিছু ধর্ম নীচে দেওয়া হইল ঃ

(i) $|ab| = |a|\ |b|$

(ii) $|a \pm b| \leq |a| + |b|$

(iii) $|a - b| \geq \big|\,|a| - |b|\,\big|$

(iv) যদি $a \geq 0$ হয়, $|x| \leq a$ হইবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $-a \leq x \leq a$ হয়।

1.9 অন্তরাল ও সামীপ্য

1.9.1 অন্তরালের সংজ্ঞা

মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব রাশি এবং $a \leq b$।

বদ্ধ অন্তরাল $[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$

মুক্ত অন্তরাল $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$

বামমুক্ত, ডানবদ্ধ অন্তরাল $(a, b) = \{x \in R : a < x \leq b\}$

ডানমুক্ত, বামবদ্ধ অন্তরাল $(a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$

1.9.2 বিন্দুর সামীপ্য

যদি $a \in S$ হয়, δ-সামীপ্য $N(a, \delta) = \{x \in R : a - \delta < x < a + \delta\}$। এটিকে $|x - a| < \delta$ হিসাবে চিহ্নিত করা হয়।

a বিন্দুর a-বর্জিত δ-সামীপ্য বলিতে $N(a, \delta) - \{a\}$ বুঝাবে। এটিকে $0 < |x - a| < \delta$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

1.9.3 প্রতীক চিহ্ন ∞, $-\infty$

এই অংশে আমরা দুইটি প্রতীক চিহ্ন ∞ ও $-\infty$ সংযোজিত করব, যা নিম্নে উল্লিখিত কন্‌ভেন্‌শন্‌গুলি মেনে চলবে ঃ

(1) যদি x কোন বাস্তব রাশি হয়, তবে $-\infty < x < \infty$

(2) $R = (-\infty, \infty)$

(3) $a \in R$ হইলে $(a, \infty) = \{x : x > a\}$, $(a, \infty) = \{x : x \geq a\}$, $(-\infty, a) = \{x : x < a\}$, $(-\infty, a) = \{x : x \leq a\}$। এগুলিকে অসীম অন্তরাল বলা হবে।

(4) $a \in R$ হলে, $a + \infty = \infty + a = \infty$, $a - \infty = -\infty + a = -\infty$, $a > 0$ হলে $a.\infty = \infty.a = \infty$, $a.(-\infty) = (-\infty)a = -\infty$, $(-a).\infty = \infty.(-a) = -\infty$, $(-a).(-\infty) = (-\infty).(-a) = \infty$, $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $\infty.\infty\ (-\infty).(-\infty) = \infty$, $(-\infty).\infty = (\infty).(-\infty) = -\infty$.

(5) যদি সেট S ($\subset$R) ঊর্ধ্বসীমাবদ্ধ না হয়, তবে S-এর ঊর্ধ্বসীমাটিকে ∞ দ্বারা চিহ্নিত করা হবে। যদি S ($\subset$R) অধঃসীমাবদ্ধ না হয়, তবে S-এর অধঃসীমাটিকে $-\infty$ দ্বারা চিহ্নিত করা হবে।

1.9.4 ক্যান্টর ডেডেকাইন্ড (Cantor-Dedekind) স্বতঃসিদ্ধ

প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা x-এর জন্য বাস্তব অক্ষে একটি অনন্য বিন্দু P পাওয়া যাবে এবং বিন্দু P ঐ বাস্তব সংখ্যা x-কে সূচিত করবে।

1.10 বাস্তব সংখ্যাকে দশমিকে প্রকাশ ঃ (Decimal Representation of Real Numbers)

ধরা যাক, বাস্তব রেখার উপর P একটি বিন্দু। এখন P বিন্দু, যে বাস্তব সংখ্যা সূচিত করে তার দশমিক রূপ আমরা দেখব। ধরা যাক্, P বিন্দুটি মূলবিন্দু 0 (যেটি বাস্তব সংখ্যা 0 সূচিত করে)-এর ধনাত্মক দিকে অবস্থিত।

যে বিন্দুগুলি পূর্ণসংখ্যার সহিত জড়িত, বাস্তব রেখার উপর তাদের এমনভাবে সূচিত করা হল যাহাতে পাশাপাশি যে কোন দুটি সূচক (marked point)-এর মধ্যে দূরত্ব এক একক হয়। যদি, বাস্তব সংখ্যা নিরূপক বিন্দু P ঐ পূর্ণসংখ্যা নিরূপক বিন্দুর সহিত সমান হয়, তাহলে আর প্রমাণের প্রয়োজন নেই। অন্যথায় P বিন্দুটি, পূর্ণসংখ্যা নিরূপক a, a + 1 বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। এখন, [a, a + 1] অন্তরালকে 10টি সমান ভাগে ভাগ করলে নতুন 10টি উপ-অন্তরালের প্রতিটির দৈর্ঘ্য $\frac{1}{10}$ একক। এই ভাগের বিন্দুগুলি হবে, $a, a+\frac{1}{10}, a+\frac{2}{10}, \ldots, a+\frac{9}{10}, a+1$। যদি P এই বিন্দুগুলির মধ্যে কোন একটি হয়, তখন P একটি মূলদ সংখ্যা সূচিত করে। যদি P ঐ বিন্দুর কোনটি না হয় তাহলে P অবশ্যই ঐ বিন্দুগুলির মধ্যে পাশাপাশি যে কোন দুটি বিন্দুর মধ্যে থাকবে এবং ধরা যাক, $P, a+\frac{a_1}{10}, a+\frac{a_1+1}{10}$ বা, $a.a_1$, $a.(a_1 + 1)$-এর মধ্যে আছে যেখানে, a_1-টির মান 0, 1, 2, ... 9-এর মধ্যে একটি।

আবার, উপ-অন্তরাল $\left[a+\frac{a_1}{10},\ a+\frac{a_1+1}{10}\right]$-কে দশটি সমান ভাগে ভাগ করা হল যাহাতে প্রতিটির দৈর্ঘ্য $\frac{1}{10^2}$ একক। এই দশটি ভাগের বিন্দুগুলি যথাক্রমে,

$$a+\frac{a_1}{10}, a+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10^2}, a+\frac{a_1}{10}+\frac{2}{10^2}, \ldots, a+\frac{a_1}{10}+\frac{9}{10^2}, a+\frac{a_1+1}{10}$$

এখন P বিন্দুটি হয় ঐ বিন্দুগুলির মধ্যে কোন একটি বিন্দু নতুবা P ঐ বিন্দুগুলির মধ্যে পাশাপাশি যে কোন দুটি বিন্দুর মধ্যে থাকবে।

এই পদ্ধতিতে এগিয়ে গেলে n-ধাপের পর আমরা যে ভাগগুলি পাবো তাদের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য $\frac{1}{10^n}$ একক এবং n যত বড় হবে উপ-অন্তরালের দৈর্ঘ্যগুলিও ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর হবে। P বিন্দুটি

$$a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_n}{10^n} < P < a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

বা, $a.a_1a_2 \ldots\ldots a_n < P < a.a_1a_2 \ldots (a_n + 1)$.

যখন $n \to \infty$ তখন, P বিন্দুটি যে সংখ্যাটি প্রকাশ করে তার দশমিক রূপ হবে

$$a.a_1\ a_2 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$$

$\therefore$ যে কোনো বাস্তব সংখ্যার একটি অসীম দশমিক রূপ পাওয়া যায়। বিপরীত দিক থেকে ধরা যাক,

$$a.a_1a_2a_3 \ldots\ldots$$

একটি অসীম দশমিক সংখ্যা।

আমরা $[a, a + 1]$, $[a.a_1, a.(a_1 + 1)]$, $[a.a_1a_2, a.a_1(a_2 + 1)]$, ...

অন্তরালগুলি গঠন করলে দেখা যায় প্রতিটি অন্তরাল তার আগের অন্তরালের মধ্যে সম্পূর্ণ অবস্থিত। এখন, অন্তরাল-এর সংখ্যা ক্রমশ বাড়ালে উহাদের দূরত্ব ক্রমশ কমে যাচ্ছে। বাস্তবরেখার উপর বিন্দুগুলি সন্তত। $\therefore$ $n \to \infty$ করলে ঐ অন্তরালগুলির মধ্যে একটি এবং মাত্র একটি সাধারণ বিন্দু পাওয়া যাবে যার দ্বারা সূচিত বাস্তব সংখ্যাটি হবে—

$$a.a_1a_2a_3 \ldots\ldots$$

মন্তব্য ঃ প্রতিটি দশমিক সংখ্যা (সসীম বা অসীম) মূলদ হবে যদি দশমিক সংখ্যাটি একটি নির্দিষ্ট সংখ্যার পর শেষ হয় অথবা দশমিক সংখ্যার একটি অংশের বারবার পুনরাবৃত্তি না হয়, অন্যথায় সংখ্যাটি অমূলদ হবে।

উদাহরণ ঃ 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত $\sqrt[3]{2}$-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $1^3 = 1 < 2$ এবং $2^3 = 8 > 2$

$$\Rightarrow 1 < \sqrt[3]{2} < 2$$

[1, 2] অন্তরালটিকে সমান দশটি ভাগে ভাগ করলে যে সংখ্যাগুলি পাই তা হলো,

$1,\ 1{\cdot}1,\ 1{\cdot}2,\ 1{\cdot}3,\ \ldots\ldots,\ 1{\cdot}9,\ 2.$

সংখ্যাগুলির মধ্যে,

$(1{\cdot}2)^3 = 1{\cdot}728 < 2$ এবং $(1{\cdot}3)^3 = 2{\cdot}197 > 2$

$\Rightarrow 1{\cdot}2 < \sqrt[3]{2} < 1{\cdot}3$

আবার, [1·2, 1·3]-কে দশটি সমান ভাগে ভাগ করা হলে,

1·2, 1·21, 1·22, ..., 1·29, 1·3 সংখ্যাগুলি পাই, যাদের মধ্যে

$(1·25)^3 = 1·953125 < 2 < 2·000376 = (1·26)^3$

$\therefore \; 1·25 < \sqrt[3]{2} < 1·26.$

আবার, [1·25, 1·26]-কে দশটি সমান ভাগে ভাগ করা হল এবং ঐ দশটি ভাগের সংখ্যাগুলি, 1·25, 1·251, 1·252, 1·253, ..., 1·259, 1·26

এখানে, $(1·259)^3 < 2 < (1·26)^3$

আবার, [1·259, 1·26]-কে দশটি সমান ভাগে ভাগ করা হল।

1·2590, 1·2591, 1·2592, 1·2593, ..., 1·2599, 1·26

যেখানে, $(1·2599)^3 < 2 < (1·26)^3$ বা, $1·2599 < \sqrt[3]{2} < 1·26$

অনুরূপে, $1·25992 < \sqrt[3]{2} < 1·25993$

$\therefore \; \sqrt[3]{2} = 1·2599$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত)

1.11 উদাহরণ

1. কোন মূলদ সংখ্যার অস্তিত্ব পাওয়া যাবে না যার ত্রিঘাত (cube) হবে 2.

সমাধান ঃ যদি সম্ভব হয় ধরি একটি মূলদ সংখ্যা $\frac{p}{q}$ পাওয়া যায় যাতে, $\frac{p^3}{q^3} = 2$ যেখানে, p এবং q পূর্ণসংখ্যা এবং p ও q পরস্পর পরস্পরের মৌলিক। যেহেতু, $1^3 = 1$ and $2^3 = 8$;

$$1 < \frac{p}{q} < 2, q \neq 1$$

$$\therefore \; \frac{p^3}{q} = 2q^2$$

দেখা যাচ্ছে, একটি ভগ্নাংশ $\left(\frac{p^3}{q}\right)$ একটি পূর্ণসংখ্যা $(2q^2)$ সমান। কিন্তু, বাস্তবে ইহা সম্ভব নয়।

$\therefore$ এমন কোন মূলদ সংখ্যা পাওয়া যাবে না যার ত্রিঘাত 2.

2. যদি r এবং s দুটি মূলদ সংখ্যা হয়, $r + s$, $r - s$, rs এবং r/s, $s \neq 0$, মূলদ সংখ্যা হইবে।

সমাধান ঃ r এবং s মূলদ সংখ্যা।

$\therefore \; r = \frac{p}{q}$ and $s = \frac{1}{m}$ যেখানে, $q \neq 0$, $m \neq 0$

$$r + s = \frac{p}{q} + \frac{1}{m} = \frac{pm + ql}{qm}\ ;\ qm \neq 0$$

p, q, m, l প্রত্যেকে পূর্ণসংখ্যা। $\therefore$ pm + ql এবং qm পূর্ণসংখ্যা এবং qm $\neq$ 0. $\therefore$ r + s একটি মূলদ সংখ্যা।

অনুরূপে $r - s, rs, \frac{r}{s}(s \neq 0)$ মূলদ সংখ্যা হইবে।

3. প্রমাণ করা যায়,

$$e = 1 + \frac{1}{\lfloor\underline{1}} + \frac{1}{\lfloor\underline{2}} + \frac{1}{\lfloor\underline{3}} + \cdots\cdots,$$ মূলদ নহে।

সমাধান ঃ

যদি সম্ভব হয় e একটি মূলদ এবং $e = \frac{p}{q}$, p, q ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

এখন, $$\frac{p}{q}\cdot\lfloor\underline{q} = \lfloor\underline{q}\left[1 + \frac{1}{\lfloor\underline{1}} + \frac{1}{\lfloor\underline{2}} + \frac{1}{\lfloor\underline{3}} + \cdots + \frac{1}{\lfloor\underline{q}}\right] + \left[1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots\cdots\right]$$

কিন্তু $$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots\cdots$$
$$< \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \cdots\cdots$$
$$< \frac{1}{q}$$

$\therefore$ $p.\lfloor\underline{(q-1)} = \lfloor\underline{q}\,.\left(1 + \frac{1}{\lfloor\underline{1}} + \frac{1}{\lfloor\underline{2}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\lfloor\underline{q}}\right) +$ একটি বিশুদ্ধ ভগ্নাংশ।

$\therefore$ পূর্ণসংখ্যা = অন্য একটি পূর্ণসংখ্যা + একটি বিশুদ্ধ ভগ্নাংশ, ইহা অসম্ভব।

$\therefore$ e একটি মূলদ সংখ্যা নয়।

4. নীচের উক্তিগুলির সত্যতা যাচাই কর ঃ

(a) একটি মূলদ এবং একটি অমূলদ সংখ্যার যোগফল ও বিয়োগফল মূলদ সংখ্যা হতে পারে না।

(b) α এবং β একটিও শূন্য নয় এমন মূলদ সংখ্যা এবং একটি অমূলদ সংখ্যা হলে, $\alpha\beta$ এবং β/α মূলদ নহে।

সমাধান ঃ (a) ধরা যাক্, r এবং x যথাক্রমে একটি মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যা, যদি সম্ভব হয় ধরা যাক্ r + x = একটি মূলদ সংখ্যা = s (ধরুন)

$\therefore$ $x = s - r$, দুটি মূলদ সংখ্যার বিয়োগফল একটি অমূলদ সংখ্যা, ইহা সম্ভব নহে।
$\therefore$ একটি মূলদ এবং একটি অমূলদ সংখ্যার যোগফল মূলদ হতে পারে না।
একইভাবে মূলদ এবং অমূলদের বিয়োগফল মূলদ নয়।
(b) যদি, সম্ভব হয়,

$\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$ (ধরা যাক্, γ একটি মূলদ সংখ্যা)

$\therefore$ $\beta = \alpha.\gamma$; ($\because$ দুটি মূলদ সংখ্যার গুণফল একটি মূলদ সংখ্যা)
$\therefore$ অমূলদ সংখ্যা = মূলদ সংখ্যা—ইহা অসম্ভব।

$\therefore$ $\frac{\beta}{\alpha}$ কখনই মূলদ সংখ্যা নহে।

অনুরূপে, α, β মূলদ নয়।
5. প্রমাণ করতে হবে, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।
সমাধান ঃ যদি সম্ভব হয় ধরি, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা,

$\therefore$ $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ একটি মূলদ সংখ্যা,

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

এখন, $\sqrt{2} = \frac{1}{2}\{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}$

আমরা আগেই দেখেছি, $\sqrt{2}$ অমূলদ।
$\therefore$ অমূলদ সংখ্যা = একটি মূলদ সংখ্যা—ইহা সম্ভব নহে।
$\therefore$ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।
6. $\log_{10}{}^5$ একটি অমূলদ সংখ্যা।
সমাধান ঃ ধরা যাক্, $\log_{10}{}^5$ একটি মূলদ সংখ্যা।

ধরা যাক্, $\log_{10}{}^5 = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$

অতএব $10^p = 5^q$ বা $2^p = 5^{q-p}$ ইহা সর্বত্র সম্ভব নহে।

1.12 অনুশীলনী

1. মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যার সংজ্ঞা দিন। উদাহরণ দিয়ে দেখান যে দুটি অমূলদ সংখ্যার যোগফল এবং গুণফল একটি মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যা হতে পারে।

2. দেখাও যে, $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

3. a, b মূলদ সংখ্যা। এখন যদি $a\sqrt{2}+b\sqrt{5}=0$ হয় তবে, দেখান $a = b = 0$

4. দেখাও যে, $\log_2{}^{10}$ মূলদ নহে কিন্তু $5\log_2{}^2$ একটি মূলদ সংখ্যা।

5. দেখাও যে, $\sqrt{5}-\sqrt{4}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

6. দেখাও যে, $\log_{100}{}^{10}$ একটি মূলদ সংখ্যা এবং যুক্তি দ্বারা বল $10\log_{100}{}^{10}$ মূলদ না অমূলদ।

7. নীচের বাক্যগুলির (statements) যুক্তির দ্বারা সত্যতা/অসত্যতা পরীক্ষা কর ঃ

   (i) অমূলদ সংখ্যার বর্গ সর্বদা একটি অমূলদ সংখ্যা।

   (ii) মূলদ সংখ্যার বর্গমূল সর্বদা একটি অমূলদ সংখ্যা।

   (iii) 0 একটি অমূলদ সংখ্যা কিন্তু $(\sqrt{2})^0$ একটি মূলদ সংখ্যা।

   (iv) যে কোন দুটি অমূলদ সংখ্যার যোগফল এবং গুণফল সর্বদা অমূলদ সংখ্যা।

   (v) r এবং s দুটি মূলদ সংখ্যা হলে r^s সর্বদা একটি অমূলদ সংখ্যা।

8. দেখান যে একটি এবং কেবলমাত্র একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা x আছে যে, $x^2 = 5$ হয়।

1.13 সারাংশ

এই এককে বাস্তব সংখ্যা সম্বন্ধে প্রাথমিক কিছু আলোচনা করা হয়েছে। বীজগাণিতিক ধর্ম ছাড়াও বাস্তব সংখ্যার ক্রম ধর্ম, ঘনত্ব ধর্ম, আর্কিমিডিয়ান ধর্ম এবং সর্বোপরি লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা সম্পর্কিত স্বতঃসিদ্ধের মত গুরুত্বপূর্ণ যে সব ধর্ম বিশ্লেষণ তত্ত্ব ও কলন বিদ্যার সঙ্গে ওতঃপ্রোতভাবে জড়িত সেগুলি চিহ্নিত করার প্রয়াস রয়েছে এই প্রথম অধ্যায়ে।

1.14 সহায়ক গ্রন্থ এবং ব্যবহৃত পারিভাষিক শব্দ

সহায়ক গ্রন্থ ঃ একক-5 এর শেষে দেখুন।

সেট—Set

শূন্য সেট—Empty set (or, void set)

সিঙ্গলটোন সেট—Singletone set

উপ/সাব সেট—Sub-set

ইউনিয়ন (সংযোগ)—Union

ইন্টারসেকশন—Intersection

বিচ্ছিন্ন সেট—Disjoint set

পূরক সেট—Complement of a set

সীমাবদ্ধ সেট—Bounded set

উর্ধ্বসীমা—Upper bound

নিম্নসীমা—Lower bound

লঘিষ্ঠ উর্ধ্বসীমা—Supremum

গরিষ্ঠ অধঃসীমা—Infimum

স্বাভাবিক সংখ্যা—Natural number

পূর্ণসংখ্যা—Integer

মূলদ সংখ্যা—Rational number

অমূলদ সংখ্যা—Irrational number

ঘনত্ব ধর্ম—Density property

বাস্তব সংখ্যা—Real number

কমপ্লিটনেস (পূর্ণতা) ধর্ম—Completeness property

পরমমান—Absolute value

অন্তরাল—Interval

সামীপ্য—Neighbourhood

একক 2 ❒ বাস্তব রাশির অনুক্রম/সিকুয়েন্স (Sequence)

গঠন

2.1 অপেক্ষক বা চিত্রণ (Function or Mapping)

অপেক্ষক হল, দুটি সেট A এবং B-এর মধ্যে একটি সম্পর্ক যাতে সেট A-এর প্রতিটি পদ x-এর জন্য সেট B-এর একটি একটি এবং কেবলমাত্র একটি পদ পাওয়া যায়। A-কে বলা হয় সংজ্ঞার অঞ্চল (Domain) এবং B-কে বলা হয় সহ-অঞ্চল (Codomain)।

$$f : A \to B$$

যাতে প্রতিটি $x \in A$-এর জন্য একটি এবং কেবলমাত্র একটি $f(x) \in B$ থাকে। f(x)-কে বলা হবে x-এর বিম্ব এবং সেট $\{f(x) \mid x \in A]$-কে বলা হয় বিস্তার (Range)।

2.2 বাস্তব রাশির অনুক্রম

বাস্তব সংখ্যার অনুক্রম বলতে বুঝায় একটি অপেক্ষক বা চিত্রণ f, যাহার সংজ্ঞার অঞ্চল হইল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N এবং সহ-অঞ্চল বলিতে বুঝায় বাস্তব সংখ্যার সেট R বা তাহার কোন উপসেট, $f : N \to R$। প্রতি $n \in N$-এর জন্য অনুষঙ্গী হিসাবে সহ-অঞ্চলে যদি a_n $(\in R)$ পাওয়া যায়, তবে আমরা লিখিব $n \to a_n$ এবং অনুক্রমটিকে $\{a_n\}_n$ দ্বারা চিহ্নিত করা হইবে। এই ধরণের a_n-গুলির সেট হইবে অনুক্রমের বিস্তার S $(\subset R)$।

অনুক্রমের (সিকুয়েন্স-এর) উদাহরণ ঃ

(1) স্বাভাবিক সংখ্যার সেট একটি অনুক্রম (সিকুয়েন্স)। $\{S_n \mid S_n = n, n \in N\}$.

(2) O এবং 1-এর মধ্যবর্তী মূলত সংখ্যাগুলি একটি অনুক্রম (সিকুয়েন্স)।

(3) $\{S_n \mid S_n = (-1)^n, n \in N\}$ একটি সসীম অনুক্রমের (সিকুয়েন্স-এর) উদাহরণ।

(4) $\{S_n\}_n$ যেখানে, $S_n = S_{n-1}, S_{n-2}, n \geq 3, S_1 = 1$ এবং $S_2 = 1$.

অর্থাৎ, $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, ...\}$

একটি অনুক্রম (সিকুয়েন্স)। এই অনুক্রমের (সিকুয়েন্স-এর) কিছু গুরুত্বপূর্ণ ব্যবহার আছে। এই অনুক্রমের (সিকুয়েন্স-এর) পরিচিতি Fibonacci's Sequence নামে।

(5) $\{S_n\}_n$ যেখানে $S_n = K$ (ধ্রুবক), $n \varepsilon N$ একটি অনুক্রম (সিকুয়েন্স)।

2.3 সীমাবদ্ধ অনুক্রম (Bounded Sequence)

বাস্তব সংখ্যার অনুক্রম $\{a_n\}_n$-কে সীমাবদ্ধ বলা হইবে যদি ঐ অনুক্রমের বিস্তার সেট সীমাবদ্ধ হয়।

একটি অনুক্রমকে $\{x_n\}_n$ সীমাবদ্ধ বলা হবে যদি কোন বাস্তব সংখ্যা $K > 0$ পাওয়া যায় যাতে $|x_n| \leq K, \forall n \in N$.

একক-1 থেকে ঊর্ধ্বসীমা, নিম্নসীমা, লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা এবং গরিষ্ঠ অধঃসীমা বা নিম্নসীমা দেখুন।

উদাহরণ :

(1) $\left\{\frac{n-1}{2n}\right\}_n$ অনুক্রমটি (সিকুয়েন্স) সীমাবদ্ধ

$$\left|\frac{n-1}{2n}\right| < \frac{1}{2} \forall n \in N$$

(2) যে কোন সসীম অনুক্রম (সিকুয়েন্স) সীমাবদ্ধ।

(3) $\{x_n\}_n, xn = (-1)^n$ অনুক্রমটি (সিকুয়েন্স) সীমাবদ্ধ।

$|x_n| \leq 1.$

এখানে $\{-1, 1, -1, 1, ...\}$ অনুক্রমটির ভিন্নপদ সংখ্যা দুই। সুতরাং ইহা একটি সসীম অনুক্রম।

(4) $\{x_n\}_n$, যেখানে, $x_n = \forall n \in N$.

এরকম অনুক্রমের ক্ষেত্রে কোন বাস্তব সংখ্যা K পাওয়া যাবে না যাতে,

$|x_n| \leq K, \forall n \in N$ হয়।

অর্থাৎ, $\{x_n\}_n$ সীমাবদ্ধ নহে।

কিন্তু, এখানে, $x_n \geq 1, \forall n \in N$.

অর্থাৎ $\{x_n\}_n$-এর প্রতিটি পদ 1-এর থেকে বড় বা সমান,

এক্ষেত্রে, $\{x_n\}_n$ অনুক্রমটি নিম্নসীমাবদ্ধ।

(5) $\{x_n\}_n$, যেখানে, $x_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in N$ অনুক্রমের ক্ষেত্রে, $0 < x_n \le 1$, $\forall n \in N$.

এখানে, 0 এবং 1 যথাক্রমে নিম্ন এবং ঊর্ধ্বসীমা।

$\therefore$ $\{x_n\}_n$ সীমাবদ্ধ অনুক্রম।

একটি বাস্তব সংখ্যা M-কে অনুক্রম $\{a_n\}_n$-এর লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা বলা হইবে যদি (ক) প্রতিটি $n \in N$-এর জন্য $a_n \le M$ হয় (খ) যেকোন $\varepsilon > 0$-এর জন্য অনুষঙ্গী স্বাভাবিক সংখ্যা K পাওয়া যাইবে। যাহার জন্য $aK > M - \varepsilon$ হইবে। (Sup $\{a_n\}_n = M$) যদি $\{a_n\}_n$ ঊর্ধ্বসীমাবদ্ধ না হয়, তবে Sup $(a_n)_n = \infty$.

একটি বাস্তব সংখ্যা m-কে অনুক্রম $\{a_n\}_n$-এর গরিষ্ঠ অধঃসীমা বলা হইবে যদি (ক) প্রতিটি $n \in N$-এর জন্য $a_n \ge m$-হয় (খ) যে কোন $\varepsilon > 0$-এর জন্য অনুষঙ্গী স্বাভাবিক সংখ্যা K-পাওয়া যাইবে যাহার জন্য $aK < m + \varepsilon$ হইবে। (Inf $\{a_n\}_n = m$) যদি $\{a_n\}_n$ নিম্ন সীমাবদ্ধ না-হয়, তবে Inf $\{a_n\}_n = -\infty$.

2.4 ক্রমান্বয়ী অনুক্রম (Monotone Sequence)

$\{x_n\}_n$ অনুক্রমকে ক্রমবর্ধমান (Monotonically Increasing) বলা হয় যখন

$x_n \le x_{n+1}$, $\forall n \in N$.

$\{x_n\}_n$ অনুক্রমকে যথার্থ ক্রমবর্ধমান (Strictly monotonically increasing) বলা হবে।

যদি, $x_n < x_{n+1}$, $\forall$ $n \in N$.

ক্রমবর্ধমান অনুক্রমের একটি নিম্নসীমা (বা একটি অধঃসীমা) সবসময় x_1.

$\{x_n\}_n$ অনুক্রমকে ক্রমক্ষীয়মান (Monotonically Decreasing) বলা হয় যখন

$x_n \ge x_{n+1}$, $\forall n \in N$.

$\{x_n\}_n$ অনুক্রমকে যথার্থ ক্রমক্ষীয়মান (Strictly monotonically increasing) বলা হবে যদি

$x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in N$.

ক্রমক্ষীয়মান অনুক্রম $\{x_n\}_n$-এর ঊর্ধ্বসীমাটি সবসময় x_1.

উদাহরণ : (1) $\{x_n\}_n$, $x_n = n^2$ একটি, ক্রমবর্ধমান অনুক্রম।

(2) $\{x_n\}_n, x_n = \frac{3n+1}{n+2}$ একটি, ক্রমবর্ধমান অনুক্রম।

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3n+4}{n+3} - \frac{3n+1}{n+2} = \frac{5}{(n+3)(n+2)} > 0$$ সকল $n \in N$-এর জন্য।

অতএব $x_{n+1} > x_n$ সকল n-এর জন্য ও অনুক্রমটি যথার্থ ক্রমবর্ধমান।

(3) অনুক্রম $\{x_n\}$n, যেখানে $x_n = \frac{1}{n}$ একটি ক্রমক্ষীয়মান অনুক্রম (সিকুয়েন্স),

(4) $x_n = \frac{4^{3n}}{3^{4n}}, n \in N$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{4^{3n+3}}{3^{4n+4}} \times \frac{3^{4n}}{4^{3n}} = \frac{4^3}{3^4} = \frac{64}{81} < 1 \text{ সকল } n \in N\text{-এর জন্য}$$

অতএব $x_{n+1} < x_n$ সকল n-এর জন্য ও অনুক্রমটি যথার্থ ক্রমহ্রাসমান।

(5) $x_n = \dfrac{1.3. \cdots. (2n-1)}{2.4. \cdots. 2n}, n \in N$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1.3 \cdots.(2n-1).(2n+1)}{2.4. \cdots. 2n(2n+2)} \times \frac{2.4. \cdots.2n}{1.3. \cdots.(2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1 \text{ সকল n-এর জন্য}$$

অতএব $x_{n+1} < x_n$ সকল n-এর জন্য ও অনুক্রমটি যথার্থ ক্রমহ্রাসমান।

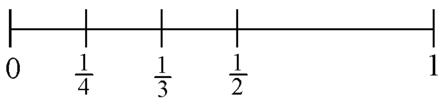
2.5 অনুক্রম-এর সীমা (Limit of a Sequence)

আমরা জানি যে, N সেটটি ঊর্ধ্বসীমা যুক্ত নহে। ফলে স্বাভাবিকভাবেই প্রশ্ন আসে যে n-এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে a_n-এর প্রকৃতি কি ধরণের হইবে?

$\left\{\frac{1}{n}\right\}_n$ অনুক্রমটি বিবেচনা করা যাক্। প্রতিটি পদ ধনাত্মক, $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}$ ইত্যাদি।

n-এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে x_n

অর্থাৎ $\frac{1}{n}$-এর মান হ্রাস পাচ্ছে—



$\frac{1}{n}$-এর অনুসঙ্গী বিন্দুটি ক্রমশই বাম দিকে শূন্য অভিমুখে অগ্রসর হচ্ছে কিন্তু কোন অবস্থাতেই '0' বিন্দুতে সমাপতিত হচ্ছে না, শূণ্যের বাম দিকে যাচ্ছে না—শুধুমাত্র n-এর মান বৃদ্ধিরসঙ্গে $\left|\frac{1}{n} - 0\right|$ হ্রাস পাচ্ছে।

অপরদিকে $\{n^2\}_n$ অনুক্রমটির ক্ষেত্রে n-এর মান বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে n^2-এর অনুষঙ্গী বিন্দুটি ক্রমশই বাস্তব অক্ষ বরাবর ডান দিকে সরিয়া যাইতেছে এবং দুইটি পরপর অনুষঙ্গী বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব বৃদ্ধি পাচ্ছে।

এই দুই উদাহরণ থেকে পরিষ্কার যে কোনক্ষেত্রে অনুক্রমের অনুষঙ্গী বিন্দুগুলি ঐ রেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর দিকে ধাবিত হয় আবার কোন ক্ষেত্রে তার বিপরীতটি ঘটে। অনুক্রমের এ ধরণের প্রকৃতির প্রেক্ষাপটে অনুক্রমের সীমার নিম্ন ধারণাটি প্রণিধানযোগ্য।

একটি নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা l-কে $\{x_n\}_n$ অনুক্রমের সীমা বলা হবে যদি কোন যথেচ্ছ ধনাত্মক সংখ্যা $\varepsilon > 0$ (যত ছোটই হোক না কেন)-এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা K পাওয়া যায় যাতে

$$|x_n - l| < \varepsilon, \ \forall\ n > K, \ n \in N$$

অর্থাৎ, $l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon, \ n > K, \ n \in N$

সংক্ষেপে লেখা হবে, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

উদাহরণ : $\left\{\frac{1}{n}\right\}_n$ অনুক্রমের সীমা 0.

ধরি, $\varepsilon > 0$ একটি যথেচ্ছ ধনাত্মক সংখ্যা।

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$$

এখন, $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ যখন, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ বা, $n > \frac{1}{\varepsilon}$

ধরি, $K = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ (integral part of $\frac{1}{\varepsilon}$)

$\therefore$ $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ যখন, $n > K$.

অথবা $n \geq \lambda$ যেখানে $\lambda = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$a_n = \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}, \ n \in N$$

$$a_n = \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \to 1 \text{ যখন } n \to \infty$$

যেকোনো $\varepsilon > 0$ ধরা যাক্।

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n^2 - n + 1 - 2}{n^2 + 1}\right| = \frac{n}{n^2 + 1} < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ যখন}$$

$$n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \text{ অর্থাৎ } K = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

মনে করি, $\varepsilon = \frac{3}{100}$ সুতরাং $K = \left[\frac{100}{3}\right] + 1 = 34$

মনে করি, $\varepsilon = \frac{5}{1378}$ সুতরাং $K = \left[\frac{1378}{5}\right] + 1 = 276$

অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যা K অবশ্যই ε-এর উপর নির্ভরশীল।

2.6 অনুক্রমের অভিসারিত্ব (Convergence of a Sequence)

$\{x_n\}_n$ অনুক্রমকে একটি নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা l অভিমুখে অভিসারী বলা হবে যদি কোন যথেচ্ছ (arbitrary) $\varepsilon > 0$-এর অনুষঙ্গী একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা K পাওয়া যায় যাতে

$| x_n - 1 | \varepsilon$ যখন, $n > K$ (বা $n \geq K$)

অর্থাৎ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$

উদাহরণ ঃ $\left\{\dfrac{n^2+3n}{2n^2+n-1}\right\}_n$ অভিসারী অনুক্রম এবং ইহার লিমিট $\frac{1}{2}$.

সমাধান ঃ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3n}{2n^2+n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}.$

একটি বিশেষ ধরণের অভিসারী অনুক্রম—নাল অনুক্রম (Null sequence) বাস্তব সংখ্যার অনুক্রম $\{x_n\}_n$-কে নাল অনুক্রম (Null sequence) বলা হবে যদি $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ হয়।

$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_n$ একটি নাল অনুক্রম।

2.6.1 উপপাদ্য

অভিসারী অনুক্রম এর একটি মাত্র সীমা বর্তমান।

প্রমাণ : যদি সম্ভব হয় ধরা যাক, $\{x_n\}_n$ অভিসারী অনুক্রম $\{x_n\}_n$-এর দুটি সীমা l_1 এবং l_2 বর্তমান যেখানে, $l_1 \neq l_2$.

ধরা যাক্, $0 < \varepsilon < \dfrac{|l_1 - l_2|}{2}$

যেহেতু, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1$ এবং $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_2$

উক্ত ε-এর অনুষঙ্গী দুটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা K_1 এবং K_2 পাওয়া যাইবে যাহাতে,

$|x_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > K_1$ এবং $|x_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > K_2$

ধরুন, K = সর্বোচ্চ $| K_1, K_2 |$

$\therefore \ |x_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ এবং $|x_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ যখন, $n > K$.

$|l_1 - l_2| \leq |x_n - l_1| + |x_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n, \ n > K$

$\therefore \ |l_1 - l_2| < \frac{1}{2}|l_1 - l_2|$ বা, $\frac{1}{2}|l_1 - l_2| < 0$

এটি সম্ভব নয় $\therefore\ l_1 = l_2$.

$\therefore$ যে কোন অভিসারী অনুক্রমের একটি মাত্র সীমা বর্তমান।

2.6.2 উপপাদ্য

অভিসারী সিকুয়েন্স $(x_n)_n$ সীমাযুক্ত কিন্তু বিপরীতটি সত্য নয়।

প্রমাণ :

ধরা যাক্, $\{x_n\}_n$ একটি অভিসারী অনুক্রম এবং ইহার সীমা l.

ধরা যাক্, $\varepsilon = 1$ সংজ্ঞানুযায়ী, এই ε এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা K পাওয়া যাবে যাতে,

$$|x_n - l| < 1,\ \forall\ n \in N,\ n > K.$$

বা, $l - 1 < x_n < l + 1,\ \forall n \in N,\ n > K.$

ধরা যাক্, $m =$ সর্বনিম্ন $\{x_1, x_2, \ldots, x_K, l - 1\}$

$M =$ সর্বোচ্চ $\{x_1, x_2, \ldots, x_K, l + 1\}$

এখন, $m \le x_n \le M,\ \forall n \in N$

$\therefore\ \{x_n\}_n$ অভিসারী অনুক্রমটি সীমাবদ্ধ।

উপপাদ্যের বিপরীত দিকটির অসত্যতা প্রমাণের জন্য একটি উদাহরণ দেওয়া হল।

$\{x_n\}_n$ একটি অনুক্রম যেখানে $x_n = 1 + (-1)^n$

$\therefore$ অনুক্রমটি হলো $\{0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots\}$

অনুক্রমটি সীমাবদ্ধ (অধঃসীমা (বা নিম্নসীমা) = 0 এবং ঊর্দ্ধসীমা = 2) কিন্তু অভিসারী নয়।

2.7 অপসারী অনুক্রম (Divergent Sequence)

$\{x_n\}_n$ অনুক্রমটিকে অপসারী (divergent) বলা হবে যদি প্রতিটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা G-এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা K পাওয়া যায় যাতে $|x_n| > G,\ \forall n > K$. এক্ষেত্রে $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\alpha$.

উদাহরণ : (1) দেখুন, $\{x_n\}_n,\ x_n = \log_e\left(\frac{1}{n}\right)$ একটি অপসারী সিকুয়েন্স।

সমাধান : সহজেই দেখা যাচ্ছে, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \log_e\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$

ধরা যাক্, G একটি বড় ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

এখন, $\left|\log_e\left(\frac{1}{n}\right)\right| > G$ বা, $|\log_e n| > G$ বা, $\log_e n > G$ যখন, $n > e^G$.

ধরুন, $K = [e^G] + 1$

$\therefore\ \left|\log_e\left(\frac{1}{n}\right)\right| > G$ যখন $n > K$

$\therefore \ \left\{\log_e\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_n$ একটি অপসারী অনুক্রম।

মন্তব্য : (1) অভিসারী অনুক্রম মাত্রেই সীমাবদ্ধ, অপসারী অনুক্রম মাত্রেই সীমাবদ্ধ নহে। $\{n^2\}_n$ অপসারী অনুক্রম—ঊর্ধ্বসীমা নেই, $\{-n^2\}_n$ অপসারী অনুক্রম—নিম্নসীমা নেই।

(2) সীমাবদ্ধ অনুক্রম কিন্তু অভিসারী নহে, এমন অনুক্রম বিদ্যমান—যেমন $\{1 + (-1)^n\}_n$। ইহাদের অভিসারী নয় এমন সীমাবদ্ধ অনুক্রম বলা হইবে।

2.7.1 উপপাদ্য :

বাস্তব সংখ্যার ক্রমবর্ধমান অনুক্রম যদি উর্ধ্বসীমাবদ্ধ হয় তবে অনুক্রমটি অভিসারী হবে এবং সীমাটি হইবে ইহার লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা (সুপ্রিমাম্)। যদি ঊর্ধ্বসীমাবদ্ধ না-হয়, তবে অনুক্রমটি অপসারী হবে।

প্রমাণ : $(x_n)_n$ একটি ক্রমবর্ধমান ঊর্ধ্বসীমাবদ্ধ অনুক্রম।

ধরা যাক, $(x_n)_n$-এর লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা (সুপ্রিমাম্) = M.

সুতরাং (i) $x_n \leq M, \ \forall \ n \in N$

এবং (ii) যেকোন $\varepsilon > 0$ এর জন্য অনুক্রমের অন্ততঃ একটি পদ x_p পাওয়া যাবে যাতে,

$$x_p > M - \varepsilon$$

এখন $x_p \leq x_{p+1} \leq \ldots\ldots \leq x_{p+k} \leq \ldots\ldots$

$\therefore \ x_n > M - \varepsilon, \ \forall \ n \geq p$

$\therefore \ M - \varepsilon < x_n \leq M < M + \varepsilon, \ \forall n \leq p$

$\therefore \ |x_n - M| < \varepsilon, \ \forall \ n \geq p$

$\therefore \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$ সুপ্রিমাম্ $\{x_n\}_n$

$\therefore \ \{x_n\}_n$ একটি অভিসারী অনুক্রম এবং ইহার সীমা M

মনে করি, $\{x_n\}_n$ ঊর্ধ্বসীমাবদ্ধ নয়। ফলে যত বড়ই বাস্তব সংখ্যা G (> 0) নেওয়া যাক্ না কেন, অনুক্রমের অন্তত একটি পদ x_k থাকবে যাহার জন্য $x_k > G$ হবে।

অনুক্রমটি যথার্থ ক্রমবর্ধমান সুতরাং সকল $n > k$-এর জন্য $x_n > x_k > G$ হবে অর্থাৎ $G > 0$ যত বড় সংখ্যাই হোক্-না-কেন তাহার অনুষঙ্গী স্বাভাবিক সংখ্যা k পাওয়া যাবে যাতে $x_n < G$ $\forall \ n > k$ হয়. সুতরাং $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ হইবে।

2.7.2 উপপাদ্য :

ক্রমক্ষীয়মান অনুক্রম যদি নিম্নসীমাবদ্ধ হয় তবে, অনুক্রমটি অভিসারী হবে এবং সীমাটি হবে ইহার গরিষ্ঠ নিম্নসীমা (ইমাফিমাম)। যদি নিম্নসীমাবদ্ধ না-হয়, তবে ইহা অপসারী হবে।

প্রমাণ : $\{x_n\}_n$ একটি ক্রমক্ষীয়মান অনুক্রম।

ধরা যাক্, $\{x_n\}_n$ এর গরিষ্ঠ নিম্নসীমা (ইনফিমাম) = m

সুতরাং (i) $x_n \geq m, \ \forall \ n \in N$

এবং (ii) যেকোন $\varepsilon > 0$ এর জন্য অনুক্রমের অন্ততঃ একটি পদ x_q পাওয়া যাবে যাতে,

$$x_q < m + \varepsilon.$$

এখন $x_q \geq x_{q+1} \geq x_{q+2} \geq \ldots\ldots$

$\therefore\ x_n < m + \varepsilon,\ \forall\ n \in N,\ n \geq q$

$\therefore\ m - \varepsilon < m \leq x_n < m + \varepsilon,\ \forall\ n \in N,\ n \geq q$

$\therefore\ |x_n - m| < \varepsilon,\ \forall\ n \in N,\ n \geq q$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = m$ ইন্‌ফিমাম $\{x_n\} < n$

$\therefore\ \{x_n\}_n$ একটি অভিসারী এবং ইহার সীমা m.

যদি $\{x_n\}_n$ নিম্ন সীমাবন্ধ না-হয় তবে $\text{Inf}\ \{x_n\}_n = -\infty$, $G < 0$ নিলে তার অনুষঙ্গী স্বাভাবিক সংখ্যা K পাওয়া যাবে যার জন্য $x_k < -G$.

$\{x_n\}_n$ ক্রমহ্রাসমান, অতএব $n \geq K$-এর জন্য

$x_n \leq x_k < -G$ অর্থাৎ $n \geq K$-এর জন্য $x_n < -G$ হবে।

অতএব $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

মন্তব্য : উপরের উপপাদ্যদ্বয় থেকে সহজেই বোঝা যায়, ক্রমান্বয়ী (Monotone) অনুক্রম হয় কোন নির্দিষ্ট মানে অভিসারী হবে নতুবা $+\infty$ বা $-\infty$ এর দিকে ধাবিত হবে বা অপসারী হবে। এই ধরণের অনুক্রম দোদুল্যমান (Oscillatory) হবে না।

উদাহরণ : $\{x_n\}_n, x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ অনুক্রমটি অভিসারী।

সমাধান : $$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)\ldots.1}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots.$$

$$\ldots\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad \ldots\ldots(1)$$

অনুরূপে, $$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \qquad \ldots\ldots(2)$$

যেহেতু, $1 - \frac{k}{n+1} > 1 - \frac{k}{n}, \forall k = 1,2,\ldots,n-1$

$$\therefore\ x_{n+1} > x_n + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$> x_n$$

$\therefore \quad x_{n+1} > x_n, \ \forall\, n \in N.$

$\therefore \quad \{x_n\}_n$ একটি ক্রমবর্ধমান অনুক্রম।

(i) নং থেকে, $xn > 2, \ \forall\, n \in N.$

আবার, $x_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}(n \geq 2)$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$\left[\because \left(1-\frac{1}{n}\right) < 1; i = 1, 2, \ldots, n-1\right.$ এবং

$n! = n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots.\ 3.2.1 > 1.2.2\ \ldots\ 2 = 2^{n-1}$ যখন, $n \geq 2.]$

$$\therefore \quad x_n < 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3$$

$\therefore \quad 2 < x_n < 3; \ \forall\, n \in N.$

$\therefore \quad \{x_n\}_n$ উর্ধ্বসীমাবদ্ধ এবং ক্রমবর্ধমান অনুক্রম।

$\therefore \quad \{x_n\}_n$ একটি অভিসারী অনুক্রম।

2.8 অভিসারী অনুক্রমের বীজগণিত

উপপাদ্য 2.8.1 : $\{x_n\}_n$ এবং $\{y_n\}_n$ দুটি অভিসারী অনুক্রম $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ এবং $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = m.$ সেক্ষেত্রে $\{x_n \pm y_n\}_n, \{x_n \cdot y_n\}_n$ এবং $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}_n$ অনুক্রমগুলিও অভিসারী, যদিও $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}_n$ ক্ষেত্রে $m \neq 0$ এবং $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = l \pm m, \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = l.m, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{m}, (m \neq 0)$

যদি $\{x_n\}_n$ অনুক্রমটির সীমা শূন্য হয় এবং $\{y_n\}_n$ অনুক্রমটি সীমাবদ্ধ হয়, তবে $\{x_n y_n\}_n$ শূন্য অভিমুখে অভিসারী হইবে।

মন্তব্য : এই সূত্রগুলি সসীম সংখ্যক অনুক্রমের জন্য প্রযোজ্য।

প্রমাণ : $\because\ xn \to l$ যখন, $n \to \infty$

$\therefore$ যে কোন $\varepsilon > 0$ এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা N_1 পাওয়া যাবে

যাতে, $|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n, n > N_1 \quad \ldots\ldots\ (1)$

$\because \quad y_n \to m$ যখন, $n \to \infty$

ঐ একই $\varepsilon > 0$-এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা N_2 পাওয়া যায়।

যাতে, $|y_n - m| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n, n > N_2$ .... (2)

ধরা যাক, K = সর্বোচ্চ $\{N_1, N_2\}$

$\therefore$ $|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ এবং $|y_n - m| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n, n > K$

$|(x_n \pm y_n)(l \pm m)| \le |x_n - l| + |y_n - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = 6 \forall n, n > K$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = l.\pm m$

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = l.m$ এর প্রমাণটি নিম্নরূপ :

$x_n y_n = (x_n - l)(y_n - m)| + l(y_n - m) + m(x_n - l) + lm$

মনে করি $\varepsilon > 0$ যেকোন প্রদত্ত সংখ্যা।

ঐ ε-এর অনুষঙ্গী স্বাভাবিক সংখ্যা n_1 ও n_2-এর অস্তিত্ব আছে

যাহার জন্য $|x_n - l| < \sqrt{\varepsilon}$ যখন $n \ge n_1$ এবং $|x_n - m| < \sqrt{\varepsilon}$ যখন $n \ge n_2$

মনে করি, n_0 = সর্বোচ্চ $\{n_1, n_2\}$। সুতরাং $n \ge n_0$-এর জন্য

$|(x_n - l)(y_n - m)| = |x_n - l||y_n - m| < \varepsilon$ হবে। অতএব $(x_n - l)$ $(y_n - m) \to 0$ হবে।

শর্ত অনুযায়ী $x_n - l \to 0$, $y_n - m \to 0$ অতএব $x_n y_n \to l_m$ হবে।

এরপর $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{m} (m \ne 0)$-এর প্রমাণ নিম্নরূপ :

সকল $n \in N$-এর জন্য

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{m(x_n - l) - l(y_n - m)}{my_n}\right| \le \frac{|m||x_n - l| + |l||y_n - m|}{|m||y_n|}$$

যেহেতু $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = (\ne 0)$ স্বাভাবিক সংখ্যা p_1-এর অস্তিত্ব আছে

যার জন্য $|y_n - m| < \frac{|m|}{2}, \forall n \ge p_1$

অতএব $n \ge p1$-এর জন্য $|m| - |y_n| \le |y_n - m| < \frac{|m|}{2}$

ফলে $|y_n| > \frac{|m|}{2}. n \ge p_1$

সুতরাং $n \ge p_1$ হইলে

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{l}{m}\right| < \frac{2}{|m|}|x_n - l| + \frac{2|l|}{|m|^2}|y_n - m|$$

মনে করি $\varepsilon > 0$ যেকোন সংখ্যা। এই ε-এর অনুষঙ্গী স্বাভাবিক সংখ্যা p_2, p_3 বিদ্যমান যার জন্য $|x_n - l| < \frac{\varepsilon|m|}{4}$ যখন $n \geq p_2$ এবং $|y_n - m| < \frac{|m|^2 \varepsilon}{4(|l|+1)}$ যখন $n \geq p_3$

মনে করি, p = সর্বোচ্চ $\{p_1, p_2, p_3\}$

অতএব $n \geq p$-এর জন্য

$$\left|\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{m}\right| < \frac{2}{|m|} \cdot \frac{\varepsilon|m|}{4} + \frac{2|l|}{|m|^2} \cdot \frac{|m|^2 \varepsilon}{4(|l|+1)} \text{ হইবে}$$

ইহা হইতে পাই $\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon$ যখন $n \geq p$

সুতরাং $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{m}$

শেষাংশ $\{y_n\}_n$ সীমাবদ্ধ বলিয়া বাস্তব সংখ্যা $\lambda > 0$ এর অস্তিত্ব যার জন্য $|y_n| < \lambda$ সকল $n \in N$-এর জন্য হবে।

মনে করি $\varepsilon > 0$ যেকোন সংখ্যা। ε-এর অনুষঙ্গী স্বাভাবিক সংখ্যা m পাওয়া যাবে যাতে $|x_n - 0| < \frac{\varepsilon}{\lambda}$ যখন $n \geq m$ হবে। ফলে $n \geq m$-এর জন্য $|x_n y_n - 0| < \varepsilon$ হবে।

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$ হবে।

2.8.2 উপপাদ্য : $\{x_n\}_n$ এবং $\{y_n\}_n$ দুটি অভিসারী অনুক্রম। যদি $x_n < y_n$ হয় $n \geq p$ (p স্বাভাবিক সংখ্যা)-এর জন্য, তবে

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$$

প্রমাণ :

মনে করি, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b.$

যদি সম্ভব হয়, মনে করি $a > b$. মনে করি, $\varepsilon = \frac{a-b}{10}$

ঐ ε-এর অনুষঙ্গী স্বাভাবিক সংখ্যা m_1 ও m_2, উভয়েই উক্ত p অপেক্ষা বৃহত্তর, পাওয়া যাবে যাতে $|x_n - a| < \varepsilon$ যখন $n \geq m_1$ এবং $|y_n - b|$ যখন $n \geq m_2$

মনে করি, m = সর্বোচ্চ $\{m_1, m_2\}$

সুতরাং $n \geq m$-এর জন্য $|x_n - a| < \varepsilon, |y_n - b| < \varepsilon$ হবে।

$n \geq m$ এর জন্য $a - \varepsilon < x_n < y_n < b + \varepsilon$

অর্থাৎ $2\varepsilon > a - b$ ফলে $2\varepsilon > 10\varepsilon$—ইহা অসম্ভব যেহেতু $\varepsilon > 0$। সুতরাং $a > b$ হবে না—$a \leq b$ হবে।

উদাহরণ : মনে করি $x_n = \frac{1}{1+n}$ এবং $y_n = \frac{1}{n}$।

এখানে, n-এর প্রতিটি মানের জন্য $x_n < y_n$.

কিন্তু, $y_n - x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \to 0$ যখন, $n \to \infty$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2.8.3 উপপাদ্য :

$\{x_n\}_n$, $\{y_n\}_n$, $\{z_n\}_n$ তিনটি অভিসারী অনুক্রম এবং $n \geq p$ (p স্বাভাবিক সংখ্যা) প্রতিটি মানের জন্য $x_n < y_n < z_n$.

যদি, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ হয় তবে $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$.

প্রমাণ — পূর্বের ন্যায়

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = l$$

2.9 কশি অণুক্রম (Cauchy Sequence)

একটি অনুক্রম $\{x_n\}$n-কে কশি অনুক্রম বলা হবে যদি কোন যথেচ্ছ (arbitrary) $\varepsilon > 0$ (যত ছোটই হোক না কেন) এর জন্য একটি অনুষঙ্গী ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা k পাওয়া যায় যাতে

$|x_n - x_m| < \varepsilon$, $\forall$ n, m, $n > k$ এবং $m > k$.

উদাহরণ : $\left\{\frac{1}{n}\right\}_n$ একটি কশি অনুক্রম।

সমাধান : ধরা যাক্, $\varepsilon > 0$, যথেচ্ছ

$n, m \in N$ এবং $m > n$

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| < \frac{1}{n}$$

এখন, $|x_m - x_n| < \varepsilon$ যদি, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ i.e., $n > \frac{1}{\varepsilon}$

ধরা যাক্ k একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা যেটি $\frac{1}{\varepsilon}$ থেকে বড়

$\therefore$ $|x_m - x_n| < \varepsilon$ যখন, m, $n > k$

$\therefore$ $\{x_n\}_n$ একটি কশি অনুক্রম।

2.9.1 উপপাদ্যের বিবৃতি :

বাস্তব সংখ্যার প্রতিটি কশি অনুক্রম অভিসারী অনুক্রম এবং প্রতিটি অভিসারী অনুক্রম একটি কশি অনুক্রম অর্থাৎ, কশি অনুক্রম $\Leftrightarrow$ অভিসারী অনুক্রম।

2.9.2 কোন অনুক্রমের অভিসারিতার জন্য কশির সাধারণ সূত্র (Cauchy's General Principle of Convergence)

বাস্তব সংখ্যার একটি অনুক্রম $\{x_n\}$-এর অভিসারিতার জন্য প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ট শর্ত হল যে কোন $\varepsilon > 0$, যত ছোটই হোক না কেন, তার অনুষঙ্গী একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা k পাওয়া যাবে যাতে $|x_m - x_n| < \varepsilon$, m, n ε N এবং n, m > k.

অথবা, $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon, n > k, p \varepsilon n$

উদাহরণ :

$$\{x_n\}_n, x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

একটি কশি অনুক্রম < 1

ধরা যাক, m > n

$$|x_m - x_n| = \left|\underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{1}{m}}_{(m-n)\text{পদ}}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right) - \ldots\ldots\right|$$

$$< \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ যদি, } n > \frac{1}{\varepsilon} \text{ অর্থাৎ } n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

$\therefore$ $|x_m - x_n| < \varepsilon$ যখন, $m, n > k, k = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

$\therefore$ $\{x_n\}_n$ একটি কশি অনুক্রম।

$\therefore$ কশির অভিসারিতার সাধারণ সূত্র থেকে বলা যায় $\{x_n\}_n$ একটি অভিসারী অনুক্রম।

2.10 উদাহরণ ও অনুশীলনী

উদা : 1. নীচের অনুক্রমগুলির বৃহত্তম পদ, ক্ষুদ্রতম পদ, লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা এবং গরিষ্ঠ অধঃসীমা যদি থাকে নির্ণয় কর :

(i) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, -\frac{1}{3^3} \ldots\ldots$

(ii) $2 - 1,\ 2 + \frac{1}{2}, 2 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots$

সমাধানের সংকেত :

(i) $x_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ যখন, n অযুগ্ম,

$= -\frac{1}{3^{n-1}}$ যখন, n যুগ্ম,

(ii) $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ যখন, n অযুগ্ম,

$= 2 + \frac{1}{n}$ যখন, n যুগ্ম,

উদা : 2. একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা k নির্ণয় কর যাতে,

$$\left|\frac{2n+5}{6n-11} - \frac{1}{3}\right| < 0.001, \forall n > k$$

সমাধান : $\left|\frac{2n+5}{6n-11} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{26}{3(6n-11)}\right| < 0.001 = \frac{1}{1000}$

এখন $\frac{3(6n-11)}{26} > 1000$, (যখন, $n \geq 2$)

বা, $n > \frac{26033}{18} = 1446.28$ (প্রায়)

$k = 1447$.

$\therefore \left|\frac{2n+5}{6n-11} - \frac{1}{3}\right| < 0.001$ যখন, $n > 1447$.

উদা : 3. নীচের অনুক্রমগুলির অভিসারিতা আলোচনা কর :

(i) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$

(ii) 5, 5, 5, ..., 5, ...

(iii) $\frac{5}{4}, \left(\frac{5}{4}\right)^2, \left(\frac{5}{4}\right)^3, \ldots \left(\frac{5}{4}\right)^n, \ldots$

(iv) $2^2, 4^2, 6^2, \ldots, (2n)^2, \ldots$

সমাধান : (i) এখানে, $x_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$ যখন, $n \to \infty$

$\therefore \{x_n\}_n$ অভিসারী এবং সীমা 1।

(ii) এখানে, $x_n = 5, \forall n \in N$

$\therefore \; x_n \to 5$ যখন, $n \to \infty$

$\therefore \; \{x_n\}_n$ অভিসারী এবং সীমা 5.

(iii) এখানে, $x_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$ এটি গুণোত্তর প্রগতিতে আছে এবং সাধারণ অনুপাত $= \frac{5}{4} > 1$

$\therefore \; x_n \to \infty$ যখন, $n \to \infty$

$\therefore \; \{x_n\}_n$ অভিসারী নয়।

(iv) এখানে, $x_n = (2n)^2 \to \infty$ যখন, $n \to \infty$

$\therefore \; \{x_n\}_n$ অভিসারী নয়।

উদা. 4. দেখাও যে $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right\}=1$

সমাধান : মনে করি, $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ এবং $v_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$\therefore \; u_n < x_n < v_n, \; \forall n, \; n \geq 2.$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

$$\therefore \; 1 = \lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n = 1$$

$$\therefore \; \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

উদা : 5. কশির শর্ত দ্বারা দেখাও $\{x_n\}_n$ একটি অভিসারী অনুক্রম। যেখানে,

$$x_n = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

সমাধান : $\frac{1}{n!} = \frac{1}{2.3.4.\ldots.n} < \frac{1}{2^{n-1}}$

$\therefore \quad |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{m!}\right|$ যখন $m > n$

$$< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left\{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}\right]$$

$< \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$ যখন, $n \to \infty$

ধরা যাক্, $\varepsilon > 0$ একটি যথেচ্ছ সংখ্যা তখন একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা k পাওয়া যাবে যাতে,

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon, \forall n > k$$

$\therefore \quad |x_m - x_n| < \varepsilon, \forall n > k$ and $m > n$

কশির শর্ত অনুযায়ী অনুক্রমটি অভিসারী।

উদা : 6. দেখাও যে, $\{x_n\}_n, x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ অভিসারী অনুক্রম নয়।

সমাধান : ধরা যাক্, $m = 2n$ এবং $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$|x_m - x_n| = |x_{2n} - x_n|$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$$

$$> n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\because \quad \{x_n\}_n$ কশি অনুক্রম নয়।

$\because$ $\{x_n\}_n$ অভিসারী অনুক্রম নয়।

উদা : 7. $\left\{\dfrac{3+(-1)^n}{2}\right\}_n$ অনুক্রমের অভিসারিতা যাচাই কর।

সমাধান : $x_n = \dfrac{3+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1, \text{ যখন } n\text{-অযুগ্ম} \\ 2, \text{ যখন } n\text{-যুগ্ম} \end{cases}$

অর্থাৎ, অনুক্রমটি $\{1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\}$

এই অনুক্রমের কোন নির্দিষ্ট একটি সীমা নেই।

অভিসারী অনুক্রমের একটি এবং কেবলমাত্র একটি সীমা থাকে।

$\left\{\dfrac{3+(-1)^n}{2}\right\}_n$ অভিসারী নয়।

উদা : 8. দেখাও যে, $\left\{\dfrac{3n+1}{n+1}\right\}_n$ একটি সীমাবন্ধ অনুক্রম।

উদা : 9. দেখাও যে, $\left\{\dfrac{1}{5+6n}\right\}_n$ একটি ক্রমক্ষীয়মান অনুক্রম। এই অনুক্রমের অভিসারিতা সম্বন্ধে যুক্তি দিয়া দেখাও।

উদা : 10. দেখাও যে, $\left\{\dfrac{3n+1}{n+2}\right\}_n$ ক্রমক্ষীয়মান নয়। যুক্তি দিয়া ইহার অভিসারিতা আলোচনা কর।

উদা : 11. একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা k বাহির কর যাতে,

(i) $\left|\dfrac{2n+1}{n+1}-2\right| < 0.001$, যেখানে, $n > k$

(ii) $\left|\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right| \le 0.1$, যেখানে, $n \ge k$

উদা : 12. সীমার সংজ্ঞা ব্যবহার করে দেখাও যে,

$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_n$ এবং $\left\{\dfrac{2n+2}{2n+1}\right\}_n$

অনুক্রমগুলির সীমা 1।

উদা : 13. নীচের অনুক্রমগুলি সীমাবদ্ধ (bounded), ক্রমবর্ধমান, ক্রমক্ষীয়মান কিনা যাচাই কর এবং সীমার অস্তিত্ব থাকলে বাহির কর।

(i) $\{0.2,\ 0.23,\ 0.233,\ 0.2333,\ \ldots\ldots\}$

(ii) $\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right\}$

(iii) $\{-1,\ -1,\ -2,\ -2,\ -3,\ -3,\ \ldots\ldots\}$

উদা : 14. নিম্নলিখিত, অনুক্রমগুলির বৃহত্তম পদ (greatest member), ক্ষুদ্রতম পদ (least member). সুপ্রীমাম্ এবং ইনফিমাম্ বাহির কর। প্রতিটির অভিসারিতাও যাচাই কর :

(i) $\left\{1.-\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},-\frac{1}{3^3},\ldots\ldots\right\}$

(ii) $\left\{2-1,\ 2+\frac{1}{2},\ 2-\frac{1}{3},\ 2+\frac{1}{4},\ldots\ldots\right\}$

উদা : 15. নিম্নলিখিত অনুক্রমের সীমা বাহির কর :

(i) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right\}_n$

(ii) $\left\{\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\frac{3^3}{n^4}+\ldots+\frac{n^3}{n^4}\right\}_n$

উদা : 16. কশির সাধারণ সূত্র-এর সাহায্যে প্রমাণ কর

$$\left\{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\frac{1}{n!}\right\}_n$$

একটি অভিসারী অনুক্রম।

2.11 সারাংশ

কলনবিদ্যা ও গাণিতিক বিশ্লেষণ তত্ত্ব বুঝতে ও প্রয়োগ করতে গেলে বাস্তব সংখ্যার অসীম শ্রেণী Ý ÕòÂÆ÷ÂþáÂÞ ÂëûþãÃ¾ÛýÂÕñÉËûþÂ±ðÂ üÑâÉÂþÕòÂÆ– îÂÆþüÏ÷±ÂXîÂ; ÕöÂ±Âþ/অপসারী অনুক্রমের সংজ্ঞা এবং সে বিষয়ে সিদ্ধান্তে উপনীত হবার প্রাথমিক বিষয় আলোচনা করেছি।

সহায়ক গ্রন্থ :

একক 5-এর শেষে দেখো।

ব্যবহৃত পারিভাষিক শব্দ :

অনুক্রম/সিকুয়েন্স — Sequence
বাস্তব অক্ষ — Real axis
শ্রেণী/সিরিজ — Series
অভিসারী/কনভার্জ — Convergent
অভিসারিতা — Convergence
অপসারী/ডাইভার্জ — Divergent
অপসারিতা — Divergence
অপেক্ষক, চিত্রণ — Function
সংজ্ঞাঞ্চল — Domain
সহ-সংজ্ঞাঞ্চল — Co-domain
বিম্ব — Image
বিস্তার — Range
ক্রমভিত্তিক সেট — Ordered set
সীমা — Bound
ঊর্ধ্বসীমা — Upper bound
লঘিষ্ঠ উর্ধ্বসীমা/সুপ্রিমাম — Supremum
গরিষ্ঠ নিম্নসীমা/ইনফিমাম — Infimum
সামীপ্য — Neighbourhood
সসীম — Finite
অসীম — Infinite
দোদুল্যমান — Oscillatory
ক্রমবর্ধমান — Monotonically increasing
ক্রমক্ষীয়মান — Monotonically decreasing
ক্রমান্বয়ী — Monotonic, Monotone
সীমা — Limit
যথেচ্ছ — Arbitrary
নাল সিকুয়েন্স — Null sequence

একক 3 ❐ অসীম শ্রেণি (Infinite Series)

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা

প্রাথমিক গণিতে বাস্তব সংখ্যার যে যোগফল বা বিয়োগফলের ধারণা আমরা পেয়েছি, সেটি সবসময়েই সসীম সংখ্যক বাস্তব সংখ্যার যোগফল বা বিয়োগফলের জন্য। ধরা যাক্, সমান্তর শ্রেণি বা গুণোত্তর শ্রেণির বিষয়টি—আমরা n সংখ্যক পদের যোগফল সম্পর্কে অবহিত আছি। কিন্তু এই শেষোক্ত দুটি শ্রেণির ক্ষেত্রে এবং এই ধরনের আরো যোগফলের ক্ষেত্রে যদি পদসংখ্যা বেঁধে না দেওয়া হয়, তবে সেইসব শ্রেণির যোগফল বা বিয়োগফল অবশ্যই বিশেষ কৌতুহলের উদ্রেক করে। এই এককে আমরা এই ধরনের অসীম শ্রেণি সম্পর্কে আলোচনা করব।

3.2 বাস্তব সংখ্যার অসীম শ্রেণি এবং ইহার অভিসারিতা ও অপসারিতা

$\{x_n\}_n$ বাস্তব সংখ্যার অনুক্রম। এর বিস্তার হল অসীম সেট।

$x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n + \ldots\ldots$ শ্রেণিটিকে বলা হবে অসীম শ্রেণি। (1)

ধরা যাক, $S_n = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n$

S_n কে বলা হবে অসীম শ্রেণির প্রথম পদ থেকে পরপর n-টি পদের যোগফল।

অর্থাৎ, S_n হলো (1) এর প্রথম n সংখ্যক পদের আংশিক যোগফল (partial sum)।

$S_1 = x_1$ (প্রথম পদ)

$S_2 = x_1 + x_2$ (প্রথম ও দ্বিতীয় পদের যোগফল)

....

....

$S_n = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n$ (প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল)।

....

এভাবে, $\{S_n\}_n$ অনুক্রম গঠন করা হলো। এখন যদি $\{S_n\}_n$ অভিসারী হয় এবং এর সীমা হয় S তাহলে, $\sum_n x_n$ কে অভিসারী শ্রেণি বলা হবে এবং সীমা

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n$$

$$= \lim_{n\to\infty}(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n)$$

$$= x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n + \ldots\ldots \infty$$

এখানে, S-কে বলা হবে অসীম শ্রেণি (1) এর যোগফল। গাণিতিক ভাষায়, যে কোন $\in > 0$ এর জন্য যদি একটি অনুশঙ্গী ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $< k$ পাওয়া যায় যাতে

$$|S_n - S| < \in \text{ যখন } n < k$$

তখন অসীম শ্রেণি (1) একটি অভিসারী শ্রেণি হবে।

এক্ষেত্রে,

$S = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n + \ldots\ldots$

যদি, $S_n \to \infty$ বা, $S_n \to \infty$ বা, $\{S_n\}_n$-এর সীমা না থাকে যখন, $n \to \infty$ হয় তবে, (1) কে বলা হবে অপসারী (divergent) অসীম শ্রেণি।

উদাহরণ ঃ (1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots \infty$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \to 2 \text{ যখন } n \to \infty$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n = 2$

$\therefore$ অসীম শ্রেণিটি অভিসারী এবং তার যোগফল = 2

$\therefore 2 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots\ldots\infty$

গুণোত্তর অসীম শ্রেণি ঃ

$a + ar + ar^2 + \ldots\ldots$ $(a > 0)$ একটি গুণোত্তর অসীম শ্রেণি।

(i) শ্রেণিটি অভিসারী হবে যখন $|r| < 1$ এবং এর যোগফল হবে $a/(1 - r)$;

(ii) শ্রেণিটি অপসারী হবে (অর্থাৎ যোগফল $+\infty$ হবে) যদি $r \geq 1$;

(iii) $r = -1$ হলে শ্রেণিটি অভিসারী হবে না।

প্রমাণ ঃ $a + ar + ar^2 + \ldots\ldots$ (1), $(r \neq 1)$

$S_n = a + ar \ldots\ldots + ar^{n-1} = a\frac{(r^n - 1)}{r-1}$

(i) যদি, $|r| < 1$ হয়, $r^n \to 0$ যখন $n \to \infty$ এক্ষেত্রে (1) এর যোগফল $S = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r}$

(ii) যদি $r > 1$ হয়, $r^n \to \infty$ যখন $n \to \infty$ এক্ষেত্রে $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

গুণোত্তর শ্রেণিটি অপসারী।

(iii) যদি, $r = 1$ হয়,

$$S_n = n.a \to \infty \text{ যখন, } n \to \infty$$

এক্ষেত্রে, গুণোত্তর শ্রেণিটি অপসারী (divergent)।

(iv) যদি $r < -1$ হয়, $\lim_{n\to\infty} S_n$ এর অস্তিত্ব নেই।

(v) যদি $r = 1$ হয়,

$$S_n = \underbrace{a - a + a - \ldots\ldots}_{n\text{-পদ}} = \begin{cases} 0, & n \text{ যখন যুগ্ম,} \\ a, & n \text{ যখন অযুগ্ম,} \end{cases}$$

এক্ষেত্রে শ্রেণিটি নির্দিষ্ট ভাবে দোদুল্যমান, অভিসারী নয়।

$\therefore$ দেখা গেল গুণোত্তর অসীম শ্রেণিটি—

অভিসারী যদি $|r| < 1$ এবং অভিসারী নয় যদি $|r| \geq 1$ হয়।

উদাহরণ ঃ

(1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots$ অভিসারী। (এখানে $1 = \frac{1}{2} < 1$)

(2) $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots\ldots$ অপসারী। (এক্ষেত্রে, $r = 3 > 1$)

3.3 অভিসারী শ্রেণির কয়েকটি ধর্ম

(1) যদি $\sum_n u_n$ অসীম শ্রেণিটি অভিসারী হয় এবং যোগফল S হয় তবে $\sum_n Cu_n$ শ্রেণিটি অভিসারী

হবে এবং এর যোগফল হবে CS যেখানে, C একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা।

(2) $\sum_n u_n$ এবং $\sum_n v_n$ দুটি অসীম অভিসারী শ্রেণি যাদের যোগফল যথাক্রমে S এবং T এখন $\sum_n (u_n + v_n)$ অসীম শ্রেণিটিও একটি অভিসারী শ্রেণি হবে এবং যোগফল হবে S + T।

(3) একটি শ্রেণির প্রথম দিকে সসীম সংখ্যক পদ যোগ দিলে বা সসীম সংখ্যক পদ বাদ দিলে শ্রেণিটির অভিসারিত্ব বা অপসারিত্ব বদল হয় না।

3.4 অসীম শ্রেণির অভিসারিতার জন্য কশির শর্ত (Cauchy's Principle on Convergence of an infinite series)

বাস্তব সংখ্যার অসীম শ্রেণি $\sum_n u_n$-এর অভিসারিতার জন্য প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ট শর্ত হল যে কোন $\in > 0$-এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা K পাওয়া যাবে যাতে,

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots u_m| < \in, \forall m, n \in N, m, n > k$$

বা, $|S_m - S_n| < \in, \forall\, n, m > k.$ ....(1)

অথবা $|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \in$ এখন, $n > K$, $p \in N$......(2)

(2) নং শর্তটিও কশির শর্তের অন্য রূপ।

উদাহরণ-1 ঃ $\sum u_n = \sum_n \frac{1}{n}$ শ্রেণিটি অভিসারী নয়।

সমাধান ঃ

ধরি, $\in = \frac{1}{2}$ এবং $p = n$ তখন,

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$$

$$> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n} = n.\frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\therefore$ কশির শর্ত অনুযায়ীর এটি একটি অপসারী অসীম শ্রেণি।

উদাহরণ-2 ঃ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots$ একটি অভিসারী অসীম শ্রেণি।

সমাধান ঃ অসীম শ্রেণিটি $\sum_1 v_n$ যেখানে $u_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

ধরি, $\in > 0$ একটি সংখ্যা

এখন, $|S_{n+p} - S_n| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right|$

$$= \left|\frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \ldots\ldots\right|$$

$$< \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$ যখন, $\frac{1}{n} < \varepsilon$

অর্থাৎ, $n > \frac{1}{\varepsilon}$ হয়।

ধরা যাক, $K = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1;$

এখন, $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$ যখন, $n \geq K$ এবং $p = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

উদাহরণ-3. কশির শর্ত দ্বারা দেখাও যে $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\lfloor n}$ একটি অভিসারী অসীম শ্রেণি।

সমাধান ঃ $\frac{1}{\lfloor n} = \frac{1}{1,2,3,\ldots\ldots n} \leq \frac{1}{1,2,2,\ldots.2} = \frac{1}{2^{n-1}}$

$$\therefore \quad \left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|\sum_{n+1}^{n+p} \frac{1}{\lfloor n}\right| = \sum_{n+1}^{n+p} \frac{1}{\lfloor n} \leq \sum_{n+1}^{n+p} \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2n}\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots. + \frac{1}{2^{p-1}}\right] = \frac{1}{2^n} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$< 2.\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0 \text{ যখন, } n \rightarrow \infty$$

$\therefore$ যে কোন $0 < \varepsilon < 1$ এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা K পাওয়া যাবে যাতে, সকল $n > K$ এর জন্য $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$ বা, $2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon}$ বা, $n - 1 > \frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log 2}$ অর্থাৎ $n > \left[\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log 2}\right] + 1$

ধরা যাক, $K = \left[\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log 2}\right]$ একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা

$\because \quad \left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$ যখন, $n > K$ এবং $p = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$