m $\therefore \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\lfloor n}$ একটি অভিসারী শ্রেণি

উদাহরণ-4 ঃ কশির শর্ত-এর সাহায্যে দেখাও যে, $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1}$ একটি অসীম অভিসারী শ্রেণি।

সমাধান ঃ $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots..$

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots.. + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+p+1)} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \to 0 \text{ যখন, } n \to \infty$$

যে কোন $\varepsilon > 0$ এর জন্য, একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা K পাওয়া যাবে, যাতে সকল n > K-এর জন্য $\frac{1}{n} < \varepsilon$ যখন, $n < \frac{1}{\varepsilon}$ **বা,** $n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

ধরা যাক, $K = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

$\therefore \left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$ যখন, n > K, p = 1, 2, ...

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\sum_{1}^{\infty} u_n$ অসীম শ্রেণি অভিসারী হলে $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ হবে।

$\left[\text{Necessary condition for the convergence of a series} \sum u_n is \lim_{n\to\infty} u_{n=0}\right]$

প্রমাণ ঃ ধরা যাক, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ একটি অভিসারী অসীম শ্রেণি। কশির শর্ত অনুযায়ী যে কোন $\varepsilon > 0$ **এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা** K পাওয়া যাবে যাতে,

$\left|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}\right| < \varepsilon$ যখন $n \geq K$ এবং p = 1, 2, 3, ...

এখন, p = 1 ধরলে,

$\left|u_{n+1}\right| < \varepsilon,\ n \geq K$-এ সমস্ত মানের জন্য,

$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

বি. দ্র. ঃ বিপরীত দিকটি সর্বদা সত্য নয়।

$u_n + \frac{1}{n}$ এবং $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ কিন্তু $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$ অসীম শ্রেণিটি অভিসারী নহে।

3.5 ধনাত্মক সংখ্যার অসীম শ্রেণি (Series of Positive Terms)

একটি অসীম শ্রেণি $\sum_{1}^{\infty} u_n$ কে ধনাত্মক পদের অসীম শ্রেণি বলা হবে যদি $n \in N$-এর প্রতিটি মানের জন্য u_n একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়।

উপপাদ্য ঃ একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার অসীম শ্রেণি $\sum_{1}^{\infty} u_n$ অভিসারী শ্রেণি হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি অণুক্রম $\{S_n\}_n$ ঊর্ধ্বসীমা যুক্ত হয়, যেখানে, $S_n = \sum_{1}^{\infty} u_n$

প্রমাণ ঃ $S_n = u_1 + u_2 + \ldots.. + u_n$

এখন, $S_{n+1} - S_n = U_{n+1} > 0,\ n \in N,$

$\therefore\ \{S_n\}_n$ একটি ক্রমবর্ধমান অণুক্রম।

$\{S_n\}_n$ অণুক্রমটি অভিসারী হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি অণুক্রমটি ঊর্ধ্বসীমা যুক্ত হয়।

উদাহরণ ঃ $\sum_{n} \frac{1}{n^2}$ অভিসারী শ্রেণি

উত্তর ঃ $a_n = \frac{1}{n^2} > 0$ সকল $n \in N$-এর জন্য।

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2} < 1 + \sum_{r=2}^{n} \frac{1}{r(r-1)}$$

$$S_n < 1 + \sum_{r=2}^{n}\left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}\right)$$

$$S_n < 1 + \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right]$$

$S_n \leq 2$ সকল $n \in N$-এর জন্য।

অতএব $\{S_n\}_n$ ঊর্ধ্বসীমা যুক্ত অণুক্রম এবং ক্রমবর্ধমান।

ফলে $\{S_n\}_n$ অভিসারী এবং শ্রেণি $\sum_{n} a_n$ অভিসারী শ্রেণি।

ধনাত্মক সংখ্যার শ্রেণির গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম ঃ

একটি ধনাত্মক সংখ্যার শ্রেণির ক্ষেত্রে বন্ধনী যুক্ত করলে অথবা বাদ দিলে শ্রেণির অভিসারিত্ব বা অপসারিত্ব পরিবর্তিত হবে না যদি না ক্রমবিন্যাস পরিবর্তিত হয়।

3.6 ধনাত্মক শ্রেণির অভিসারিতার পরীক্ষা

3.6.1 তুলনার মাধ্যমে পরীক্ষা (Comparison Test)

মনে করা যাক্ $\sum_n a_n$ ধনাত্মক পদবিশিষ্ট প্রদত্ত শ্রেণি। যদি $\sum_n c_n$ অভিসারী শ্রেণি হয় এবং সকল $n \geq m$ (নির্দিষ্ট)-এর জন্য $a_n \leq c_n$ হয়, তবে $\sum_n a_n$ শ্রেণিটি অভিসারী হবে। যদি $\sum_n d_n$ অপসারী শ্রেণি হয় এবং সকল $n \geq m$ নির্দিষ্ট-এর জন্য $a_n \geq d_n$ হয়, তবে শ্রেণিটি অপসারী হবে।

উদাহরণ ঃ (1) $\sum_n \frac{2+\cos 3x}{3^n}$, নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা।

$\left|\frac{2+\cos 3x}{3^n}\right| \leq \frac{1}{3^{n-1}}, n \in N \sum_n \frac{1}{3^{n-1}}$ একটি গুণোত্তর শ্রেণি যার সাধারণ অনুপাত $= \frac{1}{3} < 1$।

ফলে $\sum_n \frac{1}{3^{n-1}}$ অভিসারী।

সুতরাং, $\sum_n \frac{2+\cos 3x}{3^n}$ শ্রেণিটি অভিসারী হবে।

উদাহরণ ঃ (2) $\sum_n \frac{1}{n^p}, p > 0$

এটি একটি ধনাত্মক পদ বিশিষ্ট অসীম শ্রেণি।

(ক) $p \geq 1$ হলে $\sum_n \frac{1}{n^p}$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \ldots + \frac{1}{15^p}\right) + \ldots$$

$$< 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \ldots + \frac{1}{8^p}\right) + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \ldots$$

এটি একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণি যাহার সাধারণ অনুপাত $= \frac{1}{2^{p-1}} < 1 \ (\because p > 1)$ অর্থাৎ এটি অভিসারী শ্রেণি।

সুতরাং তুলনার মাধ্যমে বলা যায়, $p \geq 1$ হলে প্রদত্ত শ্রেণিটি অভিসারী হবে।

(খ) $p < 1$ হলে, সকল $n \in N$ এর জন্য $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{p}$ **এবং** $\sum_n \frac{1}{n}$ হল একটি অপসারী শ্রেণি।

ফলে $\sum_n \frac{1}{n^p}$ অপসারী যখন $P < 1$।

3.6.2. তুলনা পদ্ধতির সীমা আকার ঃ

$\sum_1^\infty u_n$ এবং $\sum_1^\infty v_n$ দুটি ধনাত্মক পদের অসীম শ্রেণি। যদি $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} < \infty$, হয় তবে হয় উভয় শ্রেণিই অভিসারী নতুবা উভয় শ্রেণিই অপসারী হবে।

উদাহরণ ঃ $\sum_{n=1}^\infty u_n \cdot u_n = \sqrt{\frac{2^n - 1}{3^n - 1}}$ অসীম শ্রেণির অভিসারিতা যাচাই করো।

সমাধান ঃ $u_n = \sqrt{\frac{2^n - 1}{3^n - 1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{(1 - 2^n)/(1 - 3^{-n})}$

ধরা যাক, $\sum_1^\infty v_n$, যেখানে $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}} > 0, \forall n$

এবং $u_n > 0, \ \forall n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

$$\therefore 0 < \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} < \infty$$

এখন, $\sum_1^\infty v_n$ একটি গুণোত্তর শ্রেণি, যার সাধারণ অনুপাত $= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} < 1$

$\therefore \sum_1^\infty v_n$ একটি অভিসারী শ্রেণি।

$\therefore$ তুলনা পদ্ধতির সীমা আকার অনুযায়ী,

$\sum_{n=1}^\infty u_n$, যেখানে, $u_n = \sqrt{\frac{2^n - 1}{3^n - 1}}$, একটি অভিসারী শ্রেণি।

3.6.3. ডি. এলেমবার্ট-এর অনুপাত পরীক্ষা ঃ (D. Alembert's ratio Test)

$\sum_{n} u_n$ একটি ধনাত্মক পদের অসীম শ্রেণি।

ধরা যাক্ $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p$, তবে

(i) $\sum_{1}^{\infty} u_n$ অভিসারী হবে যদি p < 1 হয়।

(ii) $\sum_{1}^{\infty} u_n$ অপসারী হবে যদি p > 1 হয়।

এবং (iii) p = 1 হলে অভিসারিতা সম্পর্কিত কোন তথ্য দেওয়া সম্ভব নয়।

উদাহরণ ঃ

ডি. এলেমবার্ট-এর অনুপাত-এর মাধ্যমে নিম্নলিখিত শ্রেণিগুলির অভিসারিতা যাচাই করো।

$$\text{(i) } \sum_{1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \ \text{(ii)} \sum \frac{1}{n}, \ \text{(iii) } \sum \frac{1}{n^2}, \ \text{(iv) } \sum_{n} \frac{(n+1)!}{2^n . n!}$$

সমাধান ঃ

(i) $u_n = \frac{n}{2^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}, \text{ যখন } n \to \infty$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \frac{1}{2} = 1\cdot$$

$\therefore$ অনুপাত পদ্ধতির মাধ্যমে, $\sum \frac{n}{2^n}$একটি অভিসারী শ্রেণি।

(ii) $u_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{1} = \frac{n}{1+n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1, \text{ যখন } n \to \infty$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

কিন্তু আমরা আগেই দেখেছি $\sum \frac{1}{n}$ একটি অপসারী শ্রেণি, $\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\right.$, শ্রেণির ক্ষেত্রে p = 1 নিলে শ্রেণিটি হবে $\left.\sum \frac{1}{n}\right)$

(iii) $u_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{u_n + 1}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} \to 1 \text{ যখন } n \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

কিন্তু, আমরা দেখেছি $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ শ্রেণিটি অভিসারী যদি, p > 1 এবং অপসারী যদি $p \leq 1$

$\therefore \sum \frac{1}{n^2}$ অভিসারী শ্রেণি।

(ii) এবং (iii)-এর ক্ষেত্রে, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

কিন্তু (ii) অপসারী এবং (iii) অভিসারী শ্রেণি 1

(iv) $a_n = \frac{(n+1)!}{2^n . n!} = \frac{n+1}{2^n}$

$$\frac{a_n + 1}{a_n} = \frac{n+2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n+1} = \frac{1}{2} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2}(< 1) \text{ যখন } n \to \infty$$

ফলে D.Alembart-এর পরীক্ষা অনুযায়ী $\sum_{n} a_n$ অভিসারী হবে।

3.6.4. কশির রুট পরীক্ষা (Cauchy's root test) ঃ

মনে করি $\sum_{1}^{\infty} u_a$ ধনাত্মক পদের অসীম শ্রেণি। যদি $u_n > 0$ এবং $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = p$ হয় তবে,

(i) $\sum_{1}^{\infty} u_n$ অভিসারী হবে যদি p < 1,

(ii) $\sum_{1}^{\infty} u_n$ অপসারী হবে যদি P > 1 হয়।

এবং (iii) p = 1 হলে ঐ শ্রেণি সম্বন্ধে কোন তথ্য দেওয়া সম্ভব নয়।

উদাহরণ ঃ কশির রূট পরীক্ষার মাধ্যমে

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^n+1}\right)^n$

শ্রেণিদ্বয়ের অভিসারিতা যাচাই করো।

সমাধান ঃ (i) $\sum_{1}^{\infty} u_n, u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

এখন, $\lim_{n\to\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2+1/n}\right) = \frac{1}{2} < 1$

$\therefore$ কশির রুট পরীক্ষার দ্বারা বলা যায় $\sum u_n$ শ্রেণিটি অভিসারী।

(ii) $\sum_{n}\left(\frac{n}{2^n+1}\right)^n$

$$a_n = \left(\frac{n}{2^n+1}\right)^n > 0 \quad \text{সকল } n\text{-এর জন্য}$$

$$a_n^{1/n} = \frac{n}{2^n+1} = b_n$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}+1}\times\frac{2^n+1}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[\frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}}\right] \to \frac{1}{2}(<1)$$

সুতরাং $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ (অনুক্রমের ধর্ম থেকে)

$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} < 1$ এবং শ্রেণিটি অভিসারী হবে।

মন্তব্য ঃ সাধারণত, অনুপাতের মাধ্যমে পরীক্ষা কশির রুটের মাধ্যমে পরীক্ষার চেয়ে সহজ। অনেক ক্ষেত্রে অনুপাতের মাধ্যমে পরীক্ষায় শ্রেণি সম্বন্ধে কোন নির্দিষ্ট ধারণা পাওয়া যায় না কিন্তু কশির রুটের মাধ্যমে পরীক্ষার দ্বারাই শ্রেণির অভিসারিতা সম্বন্ধে ধারণা দেয়।

উদাহরণ ঃ ধরা যাক, অসীম শ্রেণিটি $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ যখন, $u_n = 2^{-n-(-1)^n}$

এখন, $\cup_n^{\frac{1}{n}} = \left\{2^{-n-(-1)^n}\right\}^{\frac{1}{n}} = 2^{-1\frac{(-1)^n}{n}} \to 2^{-1} = \frac{1}{2}$ যখন, $n \to \infty$

$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = \frac{1}{2} < 1$

$\therefore$ কশির রুট পরীক্ষায়, অসীম শ্রেণিটি অভিসারী।

আবার, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{-(n+1)-(-1)^{n+1}}}{2^{-n-(-1)^2}} = 2^{-(n+1)-(-1)^{n+1}} + n + (-1)^n$

$$= 2^{-1+(-1)^n-(-1)^{n+1}} = \begin{cases} 2, & \text{যখন } n \text{ জোড় পূর্ণসংখ্যা} \\ \frac{1}{8} & \text{যখন } n \text{ বিজোড় পূর্ণসংখ্যা} \end{cases}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ এর কোন নির্দিষ্ট নাম নেই।

$\therefore$ অনুপাত পরীক্ষার মাধ্যমে শ্রেণিটি অভিসারিতা কিনা জানা গেল না।

উপপাদ্য ঃ $\sum_{1}^{\infty} u_n$ শ্রেণির যদি $u_n > 0$ হয় এবং $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ এর একটি নির্দিষ্ট লিমিট থাকে যখন $n \to \infty$ তাহলে, $u_n^{1/n}$-এরও একই লিমিট থাকবে যখন $n \to \infty$।

3.6.5. র‍্যাবির পরীক্ষা ঃ (Raabe's Test)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ একটি ধনাত্মক পদের অসীম শ্রেণি এবং

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = p$ হয় তবে,

(i) $\sum_{1}^{\infty} u_n$ শ্রেণিটি অভিসারী হবে যদি $p < 1$ হয়,

(ii) $\sum_{1}^{\infty} u_n$ শ্রেণিটি অপসারী হবে যদি $p < 1$ হয়,

এবং (iii) $p = 1$ হলে শ্রেণিটির অভিসারিতা সম্বন্ধে কোন কিছু জানা সম্ভব নয়।

উদাহরণ ঃ

র‍্যাবির পরীক্ষা দ্বারা $1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\ldots\ldots$ শ্রেণির অভিসারিতা যাচাই কর।

সমাধান ঃ প্রথম পদ বাদ দেওয়া হল। $u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5-(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 5-2n(2n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1\right\} = \frac{3}{2} > 1$$

$\therefore$ র‍্যাবির পরীক্ষা থেকে বলা যায় শ্রেণিটি অভিসারী।

3.7 অল্টারনেটিং শ্রেণি এবং ইহার অভিসারিতা (Alternating Series and its Convergence)

যদি কোন শ্রেণির পরপর দুটি পদের চিহ্ন পর্যায়ক্রমে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হয় তখন ঐ শ্রেণিকে অল্টারনেটিং শ্রেণি বলা হবে। $\sum_n (-1)^{n-1} a_n, a_n > 0$ সকল n-এর জন্য হল এই শ্রেণির সাধারণ আকার।

যেমন— $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots$ শ্রেণিটি একটি অল্টারনেটিং শ্রেণি।

লিব্‌নিজের পরীক্ষা (Leibnitz's Test) ঃ

যদি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার অনুক্রম $\{u_n\}_n$ ক্রমক্ষীয়মান এবং $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ হয় তখন, অল্টারনেটিং শ্রেণি $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ টি অভিসারী হবে।

অল্টারনেটিং শ্রেণি,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots\ldots$$

-এর পদগুলি একটি ক্রমক্ষীয়মান অনুক্রম গঠন করে এবং $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\therefore$ লিব্‌নিজ্-এর পরীক্ষার মাধ্যমে বলা যায় $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ শ্রেণিটি অভিসারী।

এই অল্টারনেটিং শ্রেণির পদগুলির ধনাত্মক মান নিয়ে গঠিত $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ শ্রেণিটি অভিসারী নয় কিন্তু অল্টারনেটিং শ্রেণিটি $\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ অভিসারী।

আবার $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ অল্টারনেটিং শ্রেণির পদগুলির ধনাত্মক মান নিয়ে শ্রেণিটি $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ অভিসারী এবং লিব্‌নিজ্ পরীক্ষার মাধ্যমে $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ শ্রেণিটি অভিসারী।

উপরের উদাহরণ লক্ষ্য করে পরিষ্কার,

(1) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ শ্রেণিটি অভিসারী কিন্তু $\sum_{n}\frac{1}{n}$ শ্রেণিটি অপসারী (অর্থাৎ, অভিসারী নয়)।

(2) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ বা $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ শ্রেণিটিও অভিসারী।

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে অভিসারী শ্রেণির কিছু ক্ষেত্রে শ্রেণির পদগুলির পরম (absolute) মানগুলি নিয়ে যে শ্রেণি হয় সেটাও অভিসারী আবার কিছু ক্ষেত্রে নয়।

3.8 পরম অভিসারী এবং শর্তসাপেক্ষে অভিসারী (Absolute and Conditional Convergence)

$\sum u_n$ শ্রেণিটি পরম (absolutely) অভিসারী যখন $\sum|u_n|$ অভিসারী।

$\sum u_n$ শ্রেণিটি যদি অভিসারী হয় কিন্তু $\sum|u_n|$ অভিসারী নয় তখন $\sum u_n$ শ্রেণিটিকে বলা হয় শর্তসাপেক্ষে (conditionally) অভিসারী।

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots$ শ্রেণিটি শর্তসাপেক্ষে অভিসারী কারণ ঐ শ্রেণিটি লিব্‌নিজ এর নিয়মে অভিসারী কিন্তু $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots$ শ্রেণিটি অভিসারী নয়।

আবার, $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}-\ldots\ldots\ldots$ শ্রেণিটি পরম অভিসারী কারণ, $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots\ldots$ একটি p-শ্রেণি যেখানে, $p = 2 > 1$

ধর্ম ঃ যে কোন পরম অভিসারী শ্রেণি অবশ্যই অভিসারী হইবে।

3.9 ঘাত শ্রেণি (Power Series)

$\sum_{1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ বা $\sum a_n x^n$ আকারের শ্রেণিকে ঘাত শ্রেণি (power series) বলা হবে, যখন

$a_n \in R$ এবং $n \in N$। এখন যে x-এর মানের জন্য ঘাত শ্রেণিটি অভিসারী হবে সেই সমস্ত মানের সেটকে ঐ শ্রেণির অভিসারী অঞ্চল (region of convergence) বলা হবে।

উদাহরণ ঃ (1) $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ -এর অভিসারী অঞ্চল বাহির কর।

সমাধান ঃ অনুপাত পরীক্ষার মাধ্যমে,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| \to 0 > \text{ যখন } n \to \infty$$

$\therefore$ শ্রেণিটি x-এর সকল মানের জন্য পরম অভিসারী এবং অভিসারী হবে।

(2) $1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ শ্রেণির ক্ষেত্রে

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = (n-1)|\,x\,| \to \infty > \text{ যখন } n \to \infty$$

$\therefore$ $x = 0$ ছাড়া অন্য মানের জন্য শ্রেণিটি অপসারী।

3.10 বিভিন্ন উদাহরণ

উদা. 1. $1 + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots\ldots$ শ্রেণিটি অভিসারী।

সমাধান ঃ প্রথম পদ বাদ দেওয়া হল। এখানে $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right\}$

$$\therefore\ S_n = \sum_{n=1}^{n} u_n = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\left\{\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \ldots\ldots\ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \to \frac{1}{2}, \text{ যখন } n \to \infty$$

$\therefore$ শ্রেণিটি অভিসারী এবং শ্রেণিটির যোগফল $= \frac{1}{2}$। সুতরাং প্রদত্ত শ্রেণিটিও অভিসারী এবং এর যোগফল $= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

উদা. 2. $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ শ্রেণির অভিসারিতা যাচাই কর।

সমাধান ঃ $Sn = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n-1)!}$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)} \text{ (যখন } n > 4)$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right)$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}\right)$$

$$= 3 - \frac{1}{n-1} < 3$$

$\therefore$ $\{Sn\}$ একটি ক্রমবর্ধমান অণুক্রম এবং ঊর্ধ্বসীমাবদ্ধ। অতএব শ্রেণিটি অভিসারী।

উদা. 3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ শ্রেণিটি অভিসারী নয়।

সমাধান ঃ ধরা যাক, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} > 0$ এবং $v_n = \frac{1}{n} > 0$

এখন, $\frac{u_n}{v_n} = \frac{n}{\sqrt{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}} \to 1$ যখন, $n \to \infty$

$\therefore$ $\sum u_n$ এবং $\sum v_n$ উভয়েই হয় অভিসারী শ্রেণি অথবা উভয়েই অপসারী শ্রেণি।

$\because$ $\sum v_n$ শ্রেণিটি অভিসারী নয়।

$\therefore$ $\sum u_n$ শ্রেণিটিও অভিসারী নয়।

উদা. 4. $\frac{1 \cdot 2}{3} + \frac{2 \cdot 3}{5} + \frac{3 \cdot 4}{7} + \ldots\ldots$ অভিসারী নয়।

সমাধান ঃ $u_n = \frac{n(n+1)}{2n+1} > 0$ এবং $v_n = n > 0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ $\sum\limits_{1}^{\infty} v_n$ অপসারী শ্রেণি, $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{n.(n+1)}{2n+1}$ শ্রেণিটিও অপসারী।

উদা. 5. $\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ শ্রেণির অভিসারিতা পরীক্ষা কর।

সমাধান ঃ ধরা যাক, $u_n = \frac{1}{\log n}$ এবং $v_n = \frac{1}{n}$

$\because$ $\log n < n$, $n > 1$ এর সমস্ত মানের জন্য,

$\therefore \dfrac{1}{\log n} > \dfrac{1}{n} \forall n > 2 \, (\because \log 1 = 0)$

এখন, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ একটি অপসারী শ্রেণি,

$\therefore \quad \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\log n}$ একটি অপসারী শ্রেণি।

উদা. 6. $\dfrac{1+2}{2^3} + \dfrac{1+2+3}{3^3} + \dfrac{1+2+3+4}{4^3} + \ldots\ldots..$ শ্রেণির অভিসারিতা পরীক্ষা করুন।

সমাধান ঃ ধরা যাক, $\dfrac{1+2+\ldots+(n+1)}{(n+1)^3} = \left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right) \Big/ (n+1)^3$

$$= \frac{n+2}{2(n+1)^2}$$

এবং $v_n = \dfrac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{2(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

u_n এবং v_n তুলনা করলে, যেহেতু $\sum v_n$ অভিসারী নয়, $\sum u_n$ -ও অভিসারী হবে না।

উদা. 7. $\dfrac{1^2}{2} + \dfrac{2^2}{2^2} + \dfrac{3^2}{2^3} + \ldots\ldots + \dfrac{n^2}{2^n} + \ldots\ldots$ একটি অভিসারী শ্রেণি।

সমাধান ঃ এখানে, $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{2} < 1 \text{ **যখন,** } n \to \infty$$

$\therefore$ D. Alembert's-এর অনুপাত পরীক্ষার দ্বারা, $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ একটি অভিসারী শ্রেণি।

উদা. 8. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$ শ্রেণির অভিসারিতা পরীক্ষা কর।

সমাধান ঃ ধরা যাক্, $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$

$$\therefore \ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \text{ যখন, } n \to \infty$$

$e > 1, (\because 2 < e < 3)$

D. Alembert's-এর অনুপাত মাধ্যমে, $\sum_{1}^{\infty} u_n$ অভিসারী নয়।

উদা. 9. $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ শ্রেণিটির অভিসারী কিনা পরীক্ষা কর।

সমাধান ঃ $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{x^n}\right| = |x| \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} \to |x|$ যখন, $n \to \infty$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ অভিসারী যদি, $|x| < 1$ অর্থাৎ, $-1 < x < 1$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ অপসারী যদি $| x | > 1$

$x = 1$ এর জন্য $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ অভিসারী এবং

$x = -1$ এর জন্য শ্রেণিটি অল্টারনেটিং (Alternating) শ্রেণি। এক্ষেত্রে শ্রেণিটির পদগুলি, ক্রমক্ষীয়মান অনুক্রম তৈরী করে এবং $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

লিবনিজ্-এর পরীক্ষার মাধ্যমে বলা যায়, $x = -1$-এর জন্য প্রদত্ত শ্রেণি

$-\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \ldots\ldots$ শ্রেণিটি অভিসারী।

উদা. 10. $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \ldots\ldots.$ শ্রেণিটি অভিসারী।

সমাধান ঃ এখানে, $u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

$$\therefore \ u_n^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2} \text{ যখন } n \to \infty$$

$\therefore$ কশির রুট পরীক্ষার মাধ্যমে বলা যায়

$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots\ldots..$ শ্রেণিটি অভিসারী।

উদা. 11. $\sum_{1}^{\infty} u_n$, যেখানে, $u_n = \dfrac{3 \cdot 6 \cdot 9 \ldots\ldots 3n}{7 \cdot 10 \cdot 13 \ldots\ldots (3n+4)}$ শ্রেণিটির অভিসারিতা যাচাই করুন।

সমাধান ঃ $u_n = \dfrac{3 \cdot 6 \cdot 9 \ldots\ldots 3n}{7 \cdot 10 \cdot 13 \ldots\ldots (3n+4)}$

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right\} = \lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{3n+7}{3n+3} - 1\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{3n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\left(3+\frac{3}{n}\right)} = \frac{4}{3} > 1$$

$\therefore$ র‍্যাবির পরীক্ষার মাধ্যমে প্রমাণ করা গেল $\sum_{1}^{\infty} u_n$ অভিসারী।

উদা. 12. নিম্নলিখিত শ্রেণি দুটির অভিসারিতা পরীক্ষা করো ঃ

(i) $\dfrac{1}{1+a^2} - \dfrac{1}{2+a^2} + \dfrac{1}{3+a^2} - \ldots\ldots, a \in R$

(ii) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots\ldots$

সমাধান ঃ (i) ধরা যাক্, $u_n = \dfrac{1}{n+a^2}$

এখন, $\dfrac{1}{(n+1)+a^2} < \dfrac{1}{n+a^2}$ i. e. $u_{n+1} < u_n \; \forall n, n = 1, 2, \ldots\ldots$

$\therefore$ $\{u_n\}_n$ একটি ক্রমক্ষীয়মান অনুক্রম।

আবার, $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+a^2} = 0$

$\therefore$ লিবনিজের পরীক্ষানুযায়ী, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+a^2}$ একটি অভিসারী শ্রেণি।

(ii) প্রথম পদ বাদ দিলে $u_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n}$

$$u_{n+1} = \frac{1 \cdot 3.5 \ldots\ldots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n \cdot (2n+2)} \; (\because 2n+2 > 2n+1)$$

$$< \frac{1 \cdot 3.5 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n} = u_n, \; \forall n, \; n = 1, 2, \ldots\ldots (\because 2n+2 > 2n+1)$$

$\therefore$ $\{u_n\}$ একটি ক্রমক্ষীয়মান অনুক্রম, যেখানে $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

$\therefore$ লিবনিজে্র পরীক্ষানুযায়ী, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n}$ শ্রেণিটি ওডিসারী

3.11 প্রশ্নাবলী ও উত্তরমালা

1. দেখাও যে p শ্রেণি $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ অভিসারী হবে যখন $p > 1$; অন্যথায় এটি একটি অপসারী শ্রেণি।

2. তুলনার মাধ্যমে (Comparison Test) দেখাও যে, $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ অভিসারী।

3. $\frac{1}{2^2}+\frac{\sqrt{2}}{3^2}+\frac{\sqrt{3}}{4^2}+\ldots\ldots$ শ্রেণিটির অভিসারিতা পরীক্ষা করুন।

4. D. Alembert's-এর অনুপাত পরীক্ষার দ্বারা দেখাও যে,

   $1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\ldots\ldots$ একটি অভিসারী শ্রেণি।

5. D' Alembert's এর অনুপাত পরীক্ষার দ্বারা

   $\frac{4}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\frac{4^3}{3!}+\ldots\ldots+\frac{4^n}{n!}+\ldots\ldots\ldots$

   এর অভিসারিতা যাচাই কর।

6. কশির রুট পরীক্ষার দ্বারা দেখাও যে

   $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots\ldots$

   একটি অভিসারী শ্রেণি।

7. কশির রুট পরীক্ষার মাধ্যমে $\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n}$ শ্রেণির অভিসারিতা যাচাই করো।

8. র‍্যাবি-এর পরীক্ষার মাধ্যমে দেখাও যে,

   $1+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}+\ldots\ldots\ldots$

   শ্রেণিটি অভিসারী।

9. কশির সাধারণ সূত্র প্রয়োগ করে নীচের শ্রেণিগুলির অভিসারিতা যাচাই করো।

   (i) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\ldots$

   (ii) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots\ldots\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots\ldots\ldots$

10. অল্টারনেটিং (alternating) শ্রেণি কখন অভিসারী হবে? নীচের শ্রেণিগুলির অভিসারিতা পরীক্ষা করো ঃ

(i) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots\ldots\ldots$

(ii) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots$

(iii) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots\ldots$

11. নীচের শ্রেণিগুলির অভিসারিতা যাচাই করো ঃ

(i) $2+\frac{3}{8}+\frac{4}{27}+\ldots\ldots+\frac{n+1}{n^3}+\ldots\ldots\ldots$

(ii) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 7}+\ldots\ldots+\frac{n}{(2n-1).(2n+1)}+\ldots\ldots\ldots$

(iii) $\frac{1}{1\cdot 2^2}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{3\cdot 4^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{n}{n(n+1)^2}+\ldots\ldots$

(iv) $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots\ldots\ldots$

12. নীচের শ্রেণিগুলির অভিসারী অঞ্চল (Region of Convergence) বাহির করো ঃ

(i) $1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots\ldots$

(ii) $1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{7}+\ldots\ldots\ldots$

(iii) $1+\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{2^4}+\frac{x^3}{2^6}+\ldots\ldots\ldots$

(iv) $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{3\cdot 4}+\frac{x^3}{5\cdot 6}+\frac{x^4}{7\cdot 8}+\ldots\ldots\ldots$

(v) $x+\frac{2x^2}{2!}+\frac{3x^3}{3!}+\frac{4x^4}{4!}+\ldots\ldots\ldots$

3.12 সারাংশ

বাস্তব সংখ্যার অসীম শ্রেণিসমূহের অভিসারিত্বের ধারণা আনার পাশাপাশি ধনাত্মক পদ বিশিষ্ট কিছু শ্রেণির এবং একটি বিশেষ ধরনের শ্রেণির অভিসারিত্ব পরীক্ষা যাচাইয়ের শর্তাবলী এই অধ্যায়ে বিবৃত হয়েছে। ঘাত শ্রেণি ও তার অভিসারিত্বের অঞ্চলের ধারণা ভবিষ্যতে অপেক্ষকতত্ত্ব বিশ্লেষণের সহায়ক হবে।

3.13 সহায়ক গ্রন্থ এবং এককে ব্যবহৃত পারিভাষিক শব্দ

সহায়ক গ্রন্থ ঃ একক-5 এর শেষে দ্রষ্টব্য।

ব্যবহৃত শব্দ ঃ

শ্রেণি—Series

অসীম—Infinite

সসীম—Finite

আংশিক যোগফল—Partial sum

অভিসারী—Convergent

অপসারী—Divergent

অভিসারিতা—Convergence

দোদুল্যমান বা অক্‌সিলেটরী—Oscillatory

গুণোত্তর অসীম শ্রেণি—Geometric infinite series

কশির শর্ত—Cauchy's condition

হারমোনিক শ্রেণি (p-শ্রেণি)—Harmonic Series (p-series)

ক্রমবর্ধমান—Increasing

ঊর্ধ্বসীমা যুক্ত—Bounded above

নিম্নসীমা (অধঃসীমা) যুক্ত—Bounded below

লঘিষ্ঠ ঊর্ধ্বসীমা—Least upper bound (Supremum)

গরিষ্ঠ নিম্নসীমা—Greatest lower bound (Infimum)

তুলনার মাধ্যমে পরীক্ষা—Comparison Test

অল্টারনেটিং শ্রেণি—Alternating series

পরম অভিসারী—Absolutely convergent

শর্তসাপেক্ষে অভিসারী—Conditional convergent

অভিসারী অঞ্চল—Region of convergence

একক 4 ❐ একচলের বাস্তব অপেক্ষক এবং ইহার সন্ততা (Single Variable Function and its Continuity)

গঠন ঃ

4.1 প্রস্তাবনা

4.2 বাস্তব একচল রাশির বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক

4.3 অনুশীলনী-**I**

4.4 অপেক্ষকের কয়েকটি ভাগ

- **4.4.1** সংযোজক অপেক্ষক
- **4.4.2** বিপরীত অপেক্ষক
- **4.4.3** ক্রমান্বয়ী অপেক্ষক
- **4.4.4** যুগ্ম ও অযুগ্ম অপেক্ষক
- **4.4.5** পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক
- **4.4.6.** বহুপদ রাশি অপেক্ষক

4.5 সীমাবদ্ধ অপেক্ষক

4.6 কোন বিন্দুতে অপেক্ষকের সীমা-প্রারম্ভিক ধারণাসমূহ

- **4.6.1** বিন্দুতে অপেক্ষকের সীমার সংজ্ঞা
- **4.6.2** অন্যান্য ক্ষেত্রে সীমার গাণিতিক সংজ্ঞা

4.7 বিন্দুতে অপেক্ষকের সীমার বিভিন্ন ধর্ম

- **4.7.1** অপেক্ষকের সীমার বিভিন্ন ধর্ম
- **4.7.2** সীমার বীজগণিত

4.8 সীমার অস্তিত্বের কশি-শর্ত

4.9. কয়েকটি স্ট্যান্ডার্ড সীমা

4.10 অনুশীলনী-**II**

4.11 অপেক্ষক-এর সন্ততি

- **4.11.1** একটি বিন্দুতে অপেক্ষকের সন্ততি
- **4.11.2** বদ্ধ অন্তরালে অপেক্ষকের সন্ততি

4.12 সন্তত অপেক্ষকের বীজগাণিতিক ও অন্য কিছু ধর্ম

4.13 বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরালে সন্তত অপেক্ষকের ধর্ম

4.14 বিপরীত অপেক্ষকের অস্তিত্ব এবং সন্ততি

4.15 অপেক্ষকের অসন্ততির প্রকারভেদ

4.16 কয়েকটি বিশেষ ধরনের অপেক্ষকের প্রকৃতি

4.17 সন্তত অপেক্ষকের উদাহরণ
4.18 অনুশীলনী-III
4.19 সহায়ক গ্রন্থ এবং ব্যবহৃত পারিভাষিক শব্দ
4.20 পরিশিষ্ট ঃ লেখচিত্র
4.21 সারসংক্ষেপ

4.1 প্রস্তাবনা

আমরা পাটীগণিত ও বীজগণিতের চারটি মৌলিক প্রক্রিয়া যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ সম্পর্কে অবহিত আছি। কিন্তু গণিতশাস্ত্র ও গাণিতিক বিজ্ঞানের সব প্রশ্নের সমাধান ঐ চারটি প্রক্রিয়ার দ্বারা সম্ভব নয়। এই এককে আমরা বাস্তব এক চলরাশির বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক এবং অপেক্ষকের ধর্ম, বিন্দুতে অপেক্ষকের সীমা ও সান্তত ও সংশ্লিষ্ট বিষয়সমূহ আলোচনা করব। এই সীমা নির্ধারণের প্রক্রিয়াকে সাধারণভাবে পঞ্চম প্রক্রিয়া বলে অভিহিত করা হয়। এই প্রক্রিয়ার মাধ্যমে গণিতশাস্ত্র ও গাণিতিক বিজ্ঞানের বহু প্রশ্নের সমাধান সম্ভব হবে।

4.2 বাস্তব একচল রাশির বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক (Real valued function of a Single real variable)

ধরা যাক্ বাস্তর সংখ্যার সেট R এর A এবং B দুটি অশূন্য উপ সেট। সেট A এবং B এর মধ্যে একটি সুনির্দিষ্ট সম্পর্ক f কে অপেক্ষক বলা হবে যদি সেট A-এর প্রতিটি পদ x-এর জন্য সম্পর্ক f-এর ভিত্তিতে B -এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি পদ y পাওয়া যায়। প্রতীক-এর মাধ্যমে,

$f : A \rightarrow B$

যাতে প্রতিটি $x \in A$ এর জন্য $y \in B$ হয় এবং $y = f(x)$.

y বা f(x) কে বলা হবে f-এর মাধ্যমে x-এর বিম্ব (Image).

সেট A-কে বলা হবে f-এর সংজ্ঞাঞ্চল (Domain) এবং

সেট B-কে বলা হয় f-এর সহ সংজ্ঞাঞ্চল (Co-domain).

সেট $\{f(x) : \forall x \in b\}$ –কে বলা হবে বিম্বাঞ্চল বা বিস্তার (Range),

সংজ্ঞা থেকে পরিষ্কার, $f(A) \subseteq B$.

কার্যত অপেক্ষক একটি ত্রয়ী $f : D_f \rightarrow R_f$ যেখানে D_f হইল অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল এবং R_f হইল অপেক্ষকের বিস্তার। $D_f, R_f \subset R$। অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল একটি অন্তরাল, অন্তরাল সমূহের যোগ, বিচ্ছিন্ন বিন্দু সমূহের সেট (Discrete point set) সেট ইত্যাদি হতে পারে। কয়েকটি বাস্তব চলের অপেক্ষক, সংজ্ঞার অঞ্চল (D_f) ও ক্ষেত্রবিশেষে বিস্তার Rf দেওয়া হল ঃ

1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$f : A \to B$ যেখানে $f(x) = 2x + 1,\ x \in A$

$f(A) = \{3, 5, 7, 9\} \subset B$

2) $A = \{x \mid 1 \le x < 2\}, B = R$

$f: A \to B, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, অপেক্ষক নয় কেননা, $x = 1$ বিন্দুতে f সংজ্ঞাত নয়।

3) $f(x) = |x|$; $D_f = R,\ R_f = [0, \infty)$

4) $f(x) = \frac{|x|}{x}, D_f = R - \{0\}, R_f = \{-1, 1\}$

5) $f(x) = \sin\frac{1}{x}, D_f = R - \{0\}$

6) $f(x) = \sqrt{\sin^{-1}\log_2 x},\ D_f = [1, 2], R_f = [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \ldots\ldots.$

(7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{[(1-x)(x-2)]}}, D_f = (1, 2)$

মন্তব্য ঃ (1) অপেক্ষকদ্বয় $h_1(x): x \to \frac{x^2}{x}$ এবং $h_2(x) : x \to x$ এক নয়, $D_{h_1} = R - \{0\}$.

$D_{h_2} = R$

(2) অপেক্ষকদ্বয় $g_1(x) : x \to \sqrt{(1 - x)}$ এবং $g_2(x) : x \to \sqrt{(1 - x^2)}$ এক নয়।

$D_{g_1} = [-\infty, 1],\ D_{g_2} = [-1, 1]$

অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চলটি বিচার্য বিষয়।

4.3 অনুশীলনী-I

I. অপেক্ষকগুলির সংজ্ঞার অঞ্চল নির্ণয় করো ঃ

(1) $f_1(x) = \sqrt{\log_e \frac{5x - x^2}{4}}$

(2) $f_2(x) = \log_e \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 4x + 6}$

(3) $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{\{|x| - x\}}}$

(4) $f_4(x) = \cos^{-1}\frac{3}{4 + 2\sin x}$

(5) $f_5(x) = \sqrt{\cos(\sin x)} + \sin^{-1}\frac{2x}{1 + x^2}$

(6) $f_6(x) = \frac{2x - 3}{\sqrt{(x^2 + 2x + 3)}}$

II. অপেক্ষকগুলির বিস্তার নির্ণয় করো।

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{2 - \cos 3x}$

(3) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

4.4 অপেক্ষকের কয়েকটি ভাগ

সম্পর্ক f টি কেমন, তার উপর নির্ভর করে অপেক্ষককে বিভিন্ন শ্রেণিতে ভাগ করা হয়।

$f : A \to B(A, B \subset R)$

(i) ধ্রুবক অপেক্ষক ঃ

f-কে ধ্রুবক অপেক্ষক বলা হবে যদি প্রতিটি $x \in A$-এর জন্য $f(x)$ = ধ্রুবক হয়।

$A = \{x \mid x$-বাস্তব সংখ্যা, $-1 < x < 1\}$

$B = R$

$f : A \to B$ যাতে, $f(x) = 0, \ x \in A$।

(ii) অভেদ অপেক্ষক ঃ f অপেক্ষকের অভেদ অপেক্ষক বলা হবে যদি, প্রতিটি $x \in A$ এর জন্য $f(x) = x$ হয়। উপরের A এবং B নিয়ে, $f : A \to R, \ f(x) = x, \ \forall x \in A$।

(iii) একৈক অপেক্ষক ঃ f অপেক্ষককে একৈক সম্বন্ধযুক্ত অপেক্ষক (one-to-one function) বলা হবে যদি যে কোন $x_1, x_2 \in A, \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$। এই অপেক্ষককে **ইনজেক্টিভ্** অপেক্ষকও বলা হয়।

$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{100}\}, \ B = R$

$f : A \to R, \ f(x_i) = i, \ i = 1, 2, \ldots, 100.$

(iv) উপরিচিত্রণ অপেক্ষক ঃ অপেক্ষক $f : A \to B$-কে অনটু অপেক্ষক বলা হবে যদি যে কোন $y \in B$ এর জন্য A- একটি পদ x পাওয়া যায় যাতে, $y = f(x)$। এই অপেক্ষককে সারজেক্টিভ্ অপেক্ষকও বলা হয়।

$A = \{a, b, c, d\}, \ B = \{1, 2, 3, 4\}$

$f : A \to B$ যাতে, $f(a) = 1, \ f(b) = 2, \ f(c) = 3, \ f(d) = 4.$

(v) বাইজেক্টিভ্ অপেক্ষক ঃ f-কে বাইজেক্টিভ অপেক্ষক বলা হবে যদি f অপেক্ষক 1-1 এবং অনটু অপেক্ষক হয়।

বাইজেক্টিভ্ = ইনজেক্টিভ্ + সারজেক্টিভ্।

(iv)-এর উদাহরণটি একটি বাইজেক্টিভ অপেক্ষক।

4.4.1 সংযোজক অপেক্ষক (Composite function)

ধরা যাক্, $f : A \to B$, $g : C \to D$ দুটি অপেক্ষক এবং $f(A) \subset C$। এখন A এবং D এর মধ্যে একটি সম্পর্ক h পাওয়া যায় যেটি একটি অপেক্ষক হবে এবং f ও g-এর দ্বারা প্রকাশ করা যাবে,

$$h : A \to D$$

যাতে, $\forall x \in A$ এর জন্য, $h(x) = g(f(x))$ $(\because f(A) \subset C) = g.f(x)$

এক্ষেত্রে, $h = g.f$ অর্থাৎ, h-কে f ও g এর সংযোজক অপেক্ষক বলা হবে।

মনে করা যাক, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$C = \{2, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $D = R$

$f : A \to B$ যাতে, $f(x) = 2x + 1$, $\forall x \in A$

$g : C \to D$ যাতে, $g(x) = x^2$, $\forall x \in C$

এখন,

$f(A) = \{3, 5, 7, 9\} \subset C$

$g(C) = \{4, 9, 25, 49, 81, 121\}$

$\therefore \quad h : A \to D \ (\equiv R)$

যাতে, $h(x) = (2x + 1)^2$, $\forall x \in A$

$\therefore \quad h(1) = 9 = 3^2 = g(3) = g(f(1))$; $h(2) = 25 = 5^2 = g(5) = g(f(2))$,

$h(3) = 49 = 7^2$

$= \quad g(7) = g(f(3))$, $h(4) = 81 = 9^2 = g(9) = g(f(4))$.

$h(A) = \{9, 25, 49, 81\}$.

4.4.2. বিপরীত অপেক্ষক (Inverse function)

$f : A \to B$ একটি 1-1 এবং অনটু অপেক্ষক হলে, একটি অপেক্ষক $g : B \to A$ পাওয়া যাবে যাতে $g(y) = x \in A$, যেখানে, $y \in B$ এবং $y = f(x)$.

$\therefore \quad g(f(x)) = x$ বা, $g.f(x) = x, \quad \forall x \in A$

এখানে, g.f একটি অভেদ-অপেক্ষক এবং g অপেক্ষককে বলা হবে f অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষক।

4.4.3 ক্রমবর্ধমান, ক্রমক্ষীয়মান, ক্রমান্বয়ী অপেক্ষক (Monotonically increasing, Monotonically decreasing, Monotonic function) :

$f : A \to B$ অপেক্ষকটি

(i) ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক যদি, $x_1, x_2 \in A$,

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

যথার্থ ক্রমবর্ধমান যদি, $x_1, x_2 \in A$,

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

(ii) ক্রমক্ষীয়মান অপেক্ষক যদি, $x_1, x_2 \in A$,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

যথার্থ ক্রমক্ষীয়মান যদি, $x_1, x_2 \in A$,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

(iii) ক্রমান্বয়ী অপেক্ষক যদি অপেক্ষকটি ক্রমবর্ধমান বা ক্রমক্ষীয়মান হয়।

$f(x) = \sin x$ অপেক্ষকটি $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ অন্তরালে যথার্থ ক্রমবর্ধমান এবং $g(x) = \cos x$ অপেক্ষকটি $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ অন্তরালে যথার্থ ক্রমক্ষীয়মান অপেক্ষক।

4.4.4 যুগ্ম ও অযুগ্ম অপেক্ষক (Even and odd functions)

$f(x)$ অপেক্ষককে যুগ্ম অপেক্ষক বলা হবে যখন, $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in$ সংজ্ঞাঞ্চল।

$f(x) = \cos x$ একটি যুগ্ম অপেক্ষক

$f(x)$ অপেক্ষককে অযুগ্ম অপেক্ষক বলা হবে যখন, $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in$ সংজ্ঞাঞ্চল।

$f(x) = \sin x$ একটি অযুগ্ম অপেক্ষক।

4.4.5 পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক (Periodic function)

অপেক্ষক f-কে পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক বলা হইবে যদি এমন কোন $T > 0$-এর অস্তিত্ব থাকে যাহার জন্য $f(x + T) = f(x)$, $x + T \in D_f$, সিদ্ধ হবে। এই ধরনের T-এর অস্তিত্ব থাকিলে তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম T-কে অপেক্ষকের পর্যায়কাল বলা হয়। যেমন—sin x, cos x হলো দুটি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক যাদের পর্যায়কাল 2π, tan x-এর পর্যায়কাল π, $\sin^4 x + \cos^4 x$-এর পর্যায়কাল $\pi/2$।

4.4.6 বহুপদ রাশি অপেক্ষক (Polynomial function)

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$ একটি বহুপদ রাশির অপেক্ষক, যেখানে $a_0, a_1, \ldots, a_n$ সকলেই বাস্তব রাশি এবং n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

4.5 সীমাবদ্ধ অপেক্ষক

$f : A \to R$ একটি অপেক্ষক, সংজ্ঞাঞ্চল $A \subset R$। অপেক্ষক f-কে সংজ্ঞাঞ্চলে সীমাবদ্ধ (bounded) বলা হবে যদি দুটি বাস্তব সংখ্যা m ও M পাওয়া যায় যাতে,

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x, x \in A$$

m এবং M-কে যথাক্রমে f(x)-এর একটি নিম্ন ও ঊর্ধ্ব সীমা বলা হবে।

সংজ্ঞা থেকে পরিষ্কার, m-এর চেয়ে ছোট যে কোন বাস্তব সংখ্যা f(x)-এর নিম্নসীমা এবং M-এর

চেয়ে বড় যে কোন বাস্তব সংখ্যা f(x)-ঊর্ধ্বসীমা। f(x)-এর সমস্ত নিম্নসীমার মধ্যে বৃহত্তম এবং সমস্ত ঊর্ধ্বসীমার মধ্যে ক্ষুদ্রতম সীমার কথা ভাবা যায়।

অপেক্ষকের বৃহত্তম নিম্নসীমা (Greatest lower bound) ঃ বাস্তব সংখ্যা m-কে গরিষ্ঠ নিম্নসীমা বলা হবে যদি m অপেক্ষা বড় কোন নিম্নসীমা না থাকে।

(i) $f(x) \geq m$ সকল $x \in A$-এর জন্য

এবং (ii) যে কোন ধনাত্মক $\in > 0$-এর জন্য অণুষঙ্গী অন্তত একটি $x^1 \in A$ পাওয়া যাবে যাতে, $f(x^1) < m + \in$

অপেক্ষকের ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা (Least upper bound) ঃ

বাস্তব সংখ্যা M কে ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা বলা হবে যদি M অপেক্ষা ছোট কোন ঊর্ধ্বসীমা না থাকে।

(i) $f(x) \leq M$ যখন $x \in A$-এর জন্য

এবং (ii) যে কোন ধনাত্মক $\in > 0$-এর জন্য অন্তত একটি $x^1 \in A$ পাওয়া যাবে যাতে, $f(x^1) > M - \in$.

উদাহরণ ঃ

$$\begin{aligned} f(x) &= x,\ 0 \leq x < 2 \\ &= -1,\ x = 2 \\ &= x + 1,\ 2 < x \leq 3 \end{aligned}$$

এখানে, $f : [0, 3] \rightarrow R$ অপেক্ষকের বৃহত্তম নিম্নসীমা –1 এবং ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা 4।

4.6 কোন বিন্দুতে অপেক্ষকের সীমা-প্রারম্ভিক ধারণাসমূহ

একটি চলরাশি x যখন বাস্তব সংখ্যা a-এর খুব কাছাকাছি যায় কিন্তু কখনই a সমান হয় না তখন আমরা লিখি $x \rightarrow a$ (অর্থাৎ, "x tends to a") যেহেতু বাস্তব সংখ্যাগুলি একটি সরলরেখার বিন্দুর দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তাই চলরাশি x-এর a-এর দিকে চলন দুরকম হবে।

(i) x চলরাশিটি a থেকে ছোট মান নিয়ে a-এর দিকে যেতে পারে, যেটি সংকেতে $x \rightarrow a-$ এবং (ii) x চলরাশিটি a থেকে বড় মান নিয়ে a-এর দিকে যেতে পারে, যেটি সংকেতে $x \rightarrow a+$ লেখা হয়। এই দু ধরনের সীমাকে যথাক্রমে বামপক্ষীয় এবং ডানপক্ষীয় সীমা বলা হয়।

$y = f(x)$ অপেক্ষক-এ x স্বাধীন চলরাশি এবং y অধীন (x-এর উপর নির্ভরশীল) চলরাশি। তাই, x-এর মানের পরিবর্তনের সাথে y-এর মানের পরিবর্তন হবে। x-এর মানের পরিবর্তনের ফলে y-এর পরিবর্তন-এর ধরন বিশ্লেষণ করাটাই অবকলন শাস্ত্রের বিষয়বস্তু।

$\lim\limits_{x\to 2-}(x+2)$: $\left\{ \begin{array}{l} \text{x যখন 2-এর বাম দিক থেকে 2-এর দিকে যাচ্ছে তখন } (x + 2) \text{ এর মান} \\ \text{4-এর দিকে যাচ্ছে অর্থাৎ, } \lim\limits_{x\to 2-}(x+2) = 4, \text{ ধরি } f(x) = x + 2 \end{array} \right.$

x :	1·9	1·99	1·999	1·9999 ⟶ 2
f(x) :	3·9	3·99	3·999	3·9999 ⟶ 4

$\lim\limits_{x \to 2+}(x+2)$: $\left\{\begin{array}{l}\text{x যখন 2-এর ডান দিক থেকে 2-এর দিকে যাচ্ছে তখন (x + 2) এর মান} \\ \text{4-এর দিকে যাচ্ছে অর্থাৎ, } \lim\limits_{x \to 2+}(x+2) = 4\text{, ধরি } f(x) = x + 2\end{array}\right.$

x :	2·001	2·0001	2·00001 $\longrightarrow$ 2
f(x) :	4·001	4·0001	4·00001 $\longrightarrow$ 4

এখানে, $\lim\limits_{x \to 2-}(x+2) = 4 = \lim\limits_{x \to 2+}(x+2)$

এক্ষেত্রে, বলা হবে $\lim\limits_{x \to 2}(x+2)$ এর অস্তিত্ব আছে

এবং $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

4.6.1 কোন বিন্দুতে অপেক্ষকের সীমার সংজ্ঞা

মনে করি p একটি বাস্তব সংখ্যা এবং $1 = (p - \delta, p + \delta)$, p-এর একটি সামীপ্য (অবশ্যই $\delta > 0$ হবে)। মনে করি, $1 - \{p\}$, f-এর সংজ্ঞার অঞ্চলভুক্ত। তবে p বিন্দুতে f-কে সংজ্ঞাত করা যেতেও পারে।

আমরা বলি যে স্বাধীন চলরাশি x উক্ত p-এর দিকে ধাবিত হলে $(x \to p)$ f(x)-এর সসীম সীমা l থাকবে, যদি যদৃচ্ছ ধনাত্মক সংখ্যা $\in$-এর জন্য অনুষঙ্গী $\delta > 0$ পাওয়া যায় যে $l - \in < f(x) < l + \in$ হবে যখন $p - \delta < x < p$ ও $p < x < p + \delta$ হবে। অর্থাৎ $|f(x) - l| < \in$ হবে যখন $0 < | x - p | < \delta$ হবে। একে $\lim\limits_{x \to p} f(x) = l$ দ্বারা ব্যক্ত করা হয়।

এর অর্থ যদি $p - \delta < x < p$-এর ক্ষেত্রে $| f(x) - l_1| < \in$ হয় এবং $p < x < p + \delta$-এর ক্ষেত্রে $| f(x) - l_2 | < \in$ হয়, তবে $\lim\limits_{x \to p}$ f(x)-এর অস্তিত্বের জন্য $l_1 = l_2$ হতে হবে।

এক্ষেত্রে $\lim\limits_{x \to p-0} f(x) = l_1$ কে বামপক্ষীয় সীমা এবং $\lim\limits_{x \to p+0} f(x) = l_2$ কে ডানপক্ষীয় সীমা বলা হয়।

বিশেষ ক্ষেত্র ঃ যদি f-এর সংজ্ঞার অঞ্চল বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরাল [a, b] হয় অর্থাৎ $f : [a, b] \to R$ হয়—

(ক) $\lim\limits_{x \to a}$ f(x)-এর অস্তিত্ব থাকবে যদি $\lim\limits_{x \to a+0}$ f(x)-এর অস্তিত্ব থাকে।

(খ) $\lim\limits_{x \to b}$ f(x)-এর অস্তিত্ব থাকবে যদি $\lim\limits_{x \to b-0}$ f(x)-এর অস্তিত্ব থাকে।

(গ) $a < c < b$ হলে $\lim\limits_{x \to c} f(x)$-এর অস্তিত্ব থাকবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\lim\limits_{x \to c-0} f(x) = \lim\limits_{x \to c+0} f(x)$ হয়।

উদাহরণ 1 ঃ $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$

সমাধান ঃ ধরা যাক্ $\in > 0$ যে কোন একটি সংখ্যা।

$\because\ x \to 3 \Rightarrow x - 3 \neq 0$, বা, $|x - 3| > 0$ .... (i)

$\left|\frac{x^2-9}{x-3} - 6\right| = |x + 3 - 6| = |x - 3| > 0$ ((i) হইতে)

এখন, $\left|\frac{x^2-9}{x-3} - 6\right| < \in$ যদি, $|x - 3| < \in$ হয়।

এখানে, $\delta = \in$ পাওয়া গেল যাতে,

$\left|\frac{x^2-9}{x-3} - 6\right| < \in,\ \forall x,\ 0 < |x - 3| < \delta$

$\therefore\ \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$

উদাহরণ-2 ঃ $\lim_{x\to 0} \times \sin\frac{1}{x} = 0$

সমাধান ঃ ধরা যাক্ $\in > 0$ যে কোন একটি সংখ্যা।

$x \to 0 \Rightarrow x \neq 0$ i.e., $|x| > 0$

এখন, $\left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| < \in$ যদি, $|x| < \in$ হয়।

$\therefore\ \in > 0$ এর জন্য একটি সংখ্যা $\delta > 0$ (এখানে $\delta = \in$) পাওয়া গেল যাতে,

$\left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| < \in,\ \forall x,\ 0 < |x| < \delta$

$\therefore\ \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

উদাহরণ 3 ঃ $f(x) = \begin{cases} 2x+3, 0 \le x < 1 \\ 4x+1, 1 < x < 2 \\ 7x, x > 2 \end{cases}$

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে $\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (2x+3) = 5$ এবং $\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}$ $(4x+1) = 5$। মনে করি $\in$ যদৃচ্ছ ধনসংখ্যা।

$|2x + 3 - 5| = 2|x - 1| = 2(1 - x) < \in$ অর্থাৎ $1 - x < \frac{\in}{2}$ অর্থাৎ

$1 - \frac{\in}{2} < x < 1$ হবে যখন $1 - \delta < x < 1,\ \delta = \frac{\in}{2}$ হয়।

$| 4x + 1 - 5 | = 4 | x - 1 | = 4(x - 1) < \in$ অর্থাৎ $1 < x < 1 + \frac{\in}{4}$ হইবে যখন $1 < x < 1 + \delta$,

$\delta = \frac{\in}{4}$ হয়।

সুতরাং $\lim_{x \to 1-} f(x) = 5 = \lim_{x \to 1+} f(x)$ এবং

এক্ষেত্রে $\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} (4x + 1) = 9$ এবং $\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} 7x = 14$, অসমান। $\lim_{x \to 2} f(x)$-এর অস্তিত্ব নেই।

মনে করি $\in$ যদৃচ্ছ ধনসংখ্যা।

$| 4x + 1 - 9 | = | 4(x - 2)| = 4(2 - x) < \in$ অর্থাৎ $2 - x < \frac{\in}{4}$ অর্থাৎ $2 - \frac{\in}{4} < x < 2$ হইবে যখন $2 - \delta < x < 2$, $\delta = \frac{\in}{4}$ হয়।

$| 7x - 14 | = 7(x - 2) < \in$ অর্থাৎ $2 < x < 2 + \frac{\in}{7}$ হইবে যখন $2 < x < 2 + \delta$, $\delta = \frac{\in}{7}$ হয়।

4.6.2 অন্যান্য ক্ষেত্রে অপেক্ষকের সীমার গাণিতিক সংজ্ঞা

(I) $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \left(\lim_{x \to a} f(x) = \infty \right.$ এবং $\left. \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \right)$ ঃ

যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা G, যত বড় হোক না কেন তার অণুষঙ্গী $\delta > 0$ সংখ্যা পাওয়া যাবে যার জন্য $| f(x) |$ G, $\forall x$, $0 < | x - a | < \delta$.

$\Big[\lim_{x \to a} f(x) = \infty$-এর ক্ষেত্রে, $f(x) > G$, $\forall x$, $0 < | x - a | < \delta$ এবং $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$-এর ক্ষেত্রে, $-f(x) > G$, $\forall x$, $0 < | x - a | < \delta$ অর্থাৎ $f(x) < -G$, $0 < | x - a | < \delta \Big]$

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^2} = \infty$ এবং $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^2} = \infty$

$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

(ii) $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ কিন্তু, $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$

$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$-এর অস্তিত্ব নেই।

(II) $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$

যে কোন $\in > 0$, যত ছোট হোক না কেন, এরজন্য একটি ধনাত্মক সংখ্যা M পাওয়া যাবে যাতে, $|f(x) - l| < \in, \forall x, x > M$

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ (ii) $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

(III) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$

যে কোন $\in > 0$, যত ছোট হোক না কেন, এর জন্য একটি ধনাত্মক সংখ্যা M পাওয়া যাবে যাতে, $|f(x) - l| < \in, \forall x, -x > M$ বা, $x < -M$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

অনুরূপে, (IV) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, (V) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, (VI) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ এবং (VII) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

সীমাগুলিরও গাণিতিক সংজ্ঞা পাওয়া যাবে।

4.7 বিন্দুতে অপেক্ষকের সীমার বিভিন্ন ধর্ম

4.7.1 অপেক্ষকের সীমার বিভিন্ন ধর্ম

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = l$ হলে 'a'-এর a-বর্জিত সামীপ্যের অস্তিত্ব থাকবে যেখানে f সীমাবদ্ধ অপেক্ষক হবে।

প্রমাণ ঃ ঐ সীমার অস্তিত্বের জন্য $\delta > 0$ পাওয়া যাবে যার জন্য $|f(x) - l| < 1$ হবে যখন $0 < |x - a| < \delta$

ফলে $|f(x)| < 1 + |l|, 0 < |x - a| < \delta$

$1 + |l|$ একটি সসীম, সুনির্দিষ্ট সংখ্যা এবং $0 < |x - a| < \delta$ সামীপ্যে f(x) সীমাবদ্ধ।

(2) যদি $\lim_{x\to a} f(x) = l$, $\lim_{x\to a} g(x) = m$ হয় এবং 'a' বিন্দুর a-বর্জিত δ সামীপ্যে $f(x) < g(x)$ হয়, দেখাও যে, $l \leq m$ হবে।

প্রমাণ ঃ যদি সম্ভব হয় মনে করি $l > m$ এবং $0 < \in < \frac{l - m}{2}$ ঐ $\in$-এর জন্য অণুষঙ্গী হিসাবে δ_1 ও δ_2, যেখানে $0 < \delta_1 < \delta$, $0 < \delta_2 < \delta$, পাওয়া যাবে যাতে

$|f(x) - l| < \in, 0 < |x - a| < \delta_1$ এবং $|g(x) - m| < \in, 0 < |x - a| < \delta_2$ হবে।

মনে করি, $\eta =$ অবম $\{\delta_1, \delta_2\}$। ফলে $0 < \eta < \delta$ এবং

$|f(x) - l| < \in, |g(x) - m| < \in$ যখন $0 < |x - a| < \eta$

অতএব $0 < |x - a| < \eta$-তে $l - \in < g(x) < f(x) < m + \varepsilon$ এবং ফলে $l - m < 2\varepsilon$— ইহা সম্ভব নয়। অতএব $l \leq m$

মন্তব্য ঃ $f(x) = 1 - x, x > 0$ এবং $g(x) = 1 + x, x > 0$

এক্ষেত্রে $f(x) < g(x)$ যখন $x > 0$, কিন্তু $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0+} g(x)$

সীমার অস্তিত্ব থাকলে একটি সমতার প্রশ্ন আছে।

(3) স্যাণ্ডুইচ ধর্ম ঃ মনে করি $f(x) < g(x) < h(x)$ যখন $0 < |x - a| < \delta$

$\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$ হলে $\lim_{x\to a} g(x) = l$ হবে।

প্রমাণ ঃ মনে করি, $\varepsilon > 0$ যদৃচ্ছ সংখ্যা। ε-এর অণুষঙ্গী δ_1 ও δ_2, $0 < \delta_1, \delta_2 < \delta$ পাওয়া যাবে যার জন্য $|f(x) - l| < \varepsilon$ যখন $0 < |x - a| < \delta_1$, $|h(x) - l| < \varepsilon$ যখন $0 < |x - a| < \delta_2$

মনে করি η = অবম $[\delta_1, \delta_2]$ অতএব $0 < |x - a| < \eta$-তে

$l - \varepsilon < f(x) < g(x) < h(x) < l + \varepsilon$ হবে।

সুতরাং $0 < |x - a| < \eta$ তে $|g(x) - l| < \varepsilon$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = l$ হইবে।

4.7.2 সীমার বীজগণিত ঃ

যদি, $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$ হয় (l এবং m অবশ্যই সুনির্দিষ্ট সংখ্যা), তাহলে

(i) $\lim_{x\to a}\{f(x) + g(x)\} = l + m$

(ii) $\lim_{x\to a}\{f(x) - g(x)\} = l - m$

(iii) $\lim_{x\to a}\{f(x) \times g(x)\} = l \times m$

এবং (iv) $\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{l}{m}, m \neq 0$

প্রমাণ ঃ

(i) দেওয়া আছে $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$ ধরি $\varepsilon > 0$ পূর্বনির্দিষ্ট যে কোন সংখ্যা। এই $\varepsilon > 0$-এর অণুষঙ্গী দুটি সংখ্যা $\delta_1 > 0$ এবং $\delta_2 > 0$ পাওয়া যাবে যাতে,

$|f(x) - l| < \varepsilon/2$, যখন, $0 < |x - a| < \delta_1$

$|g(x) - m| < \varepsilon/2$, যখন $0 < |x - a| < \delta_2$

ধরা যাক, δ = অবম (Min) $\{\delta_1, \delta_2\}$

$\therefore \; |f(x) - l| < \varepsilon/2$, এবং $|g(x) - m| < \varepsilon/2, \forall x, 0 < |x - a| < \delta$ (*)

এখন, $|\{f(x) + g(x)\} - (l + m)|$

$\leq |f(x) - l\} + |g(x) - m| < \varepsilon, \forall x, 0 < |x - a| < \delta.$

$\therefore \lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = l + m$

(ii) (i)-এর প্রমাণের (*) পর্যন্ত এক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

$|\{f(x) - g(x)\} - (l - m)| \leq |f(x) - l| + g(x) - m| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \in, \forall x,$ $0 < |x - a| < \delta$

$\therefore \lim_{x \to a} \{f(x) - g(x)\} = l - m$

(iii) $|f(x)\, g(x) - l\, m| = |g(x)\, \{f(x) - l\} + l\{g(x) - m\}$

$\leq |g(x)|\, |f(x) - l| + |l|\, |g(x) - m|$ .... (1)

যেহেতু $\lim_{x \to a} g(x)$-এর অস্তিত্ব আছে, সুতরাং $\delta_1 > 0$-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য g অপেক্ষক $0 < |x - a| < \delta_1$-এ সীমাবদ্ধ হবে অর্থাৎ $k > 0$ থাকবে যার জন্য

$|g(x)| < k, 0 < |x - a| < \delta_1$ .... (2) হয়

মনে করি, $\in$ যদৃচ্ছ ধনসংখ্যা। $\in$-এর অণুষঙ্গী হিসাবে $\delta_2 > 0$ পাওয়া যাবে যার ফলে $|f(x) - 1| < \frac{\in}{2k}, 0 < |x - a| < \delta_2$ ..... (3) উক্ত $\in$-এর অণুষঙ্গী হিসাবে $\delta_3 > 0$ পাওয়া যাবে যার ফলে

$|g(x) - m| < \frac{\in}{2(|1| + 1)}, 0 < |x - a| < \delta_3$ .... (4) হয়।

মনে করি, δ = অবম $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ | $0 < |x - a| < \delta$-এর জন্য, (2), (3) ও (4) সিদ্ধ হবে। সেক্ষেত্রে (1) থেকে পাই,

$|f(x)g(x) - lm| < k\frac{\in}{2k} + |l|\frac{\in}{2(|l| + 1)}, \forall x$ যাতে $0 < |x - a| < \delta$ হয়

অর্থাৎ যখন $0 < |x - a| < \delta$, $|f(x)\, g(x) - lm| < \in$ হবে।

অতএব $\lim_{x \to a} \{f(x)g(x)\} = lm$ হবে।

(iv) $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| = \left|\frac{mf(x) - lg(x)}{mg(x)}\right| \leq \frac{|m||f(x) - l| + l||g(x) - m|}{|m||g(x)|}$ ...... (1)

যেহেতু $\lim_{x \to a} g(x) = m$, $\delta_1 > 0$-এর অস্তিত্ব আছে যার জন্য

$|g(x) - m| < \frac{|m|}{2}$ যখন $0 < + |x - a| < \delta_1$

অর্থাৎ $\frac{|m|}{2} < |g(x)| < \frac{3|m|}{2}$ হয় যখন $0 < |x - a| < \delta_1$ .... (2)

মনে করি, $\in$ যদৃচ্ছ ধনসংখ্যা। ঐ $\in$-অণুষঙ্গী হিসাবে $\delta_2 > 0$ ও $\delta_3 > 0$ পাওয়া যাবে যার জন্য $|f(x) - l| < \frac{\in|m|}{4}$, যখন $0 < |x - a| < \delta_2$ .... (3)

$|g(x) - m| < \frac{\in|m|^2}{4(|m|+1)}$, যখন $0 < |x - a| < \delta_3$ .... (4)

মনে করি, δ = অবম $[\delta_1, \delta_2, \delta_3]$।

ফলে $0 < |x - a| < \delta$-এর ক্ষেত্রে (2), (3), (4) সিদ্ধ হবে।

সেক্ষেত্রে $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| < \frac{\varepsilon|m|}{4|m|} + \frac{|l|,2}{|m|^2}\cdot\frac{\varepsilon|m|^2}{4(|m|+1)}$

$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon$, যখন $0 < |x - a| < \delta$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$ হবে।

(v) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ ও g সীমাবদ্ধ অপেক্ষক হলে $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = 0$ হবে।

প্রমাণ ঃ g সীমাবদ্ধ বলিয়া $\lambda\varepsilon R^+$-এর অস্তিত্ব আছে যাহাতে

$|g(x)| < \lambda$, সকল $x\varepsilon D_g$-এর জন্য।

মনে করি, ε যদৃচ্ছ ধনসংখ্যা। ইহার অণুষঙ্গী $\delta > 0$ আছে যাহার জন্য $|f(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{\lambda}$ হয় যখন $0 < |x - c| < \delta$, $x\varepsilon D_f$ সুতরাং $|f(x)\, g(x)| < \lambda. \frac{\varepsilon}{\lambda}$ যখন $0 < |x - c| < \delta$, $x\varepsilon D_f \cap D_g \Rightarrow \lim\limits_{x\to c} f(x) = \varepsilon$.

(vi) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$-এর অস্তিত্ব থাকলে, $\delta > 0$ পাওয়া যাবে যার জন্য সকল $x\in N'(c, \delta) \cap d_f$-এর ক্ষেত্রে f সীমাবদ্ধ হবে ($N'(c, \delta)$ বলতে $0 < |x - c| < \delta$ বোঝায়)।

প্রমাণ ঃ এখন $\delta > 0$ পাওয়া যাবে যার জন্য

$|f(x) - l|\ 1$, $0 < |x - c| < \delta$ ও $x\varepsilon D_f$ $\left(\lim\limits_{x\to c} f(x) = l\right.$ ধরা আছে $\left.\right)$

$|f(x)| \leq |f(x) - l| + |l|, < 1 + |l|$, $0 < |x - c| < \delta$, $x\varepsilon D_t$। সুতরাং f উক্ত সামীপ্যে সীমাবদ্ধ।

উপপাদ্য ঃ $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ ($A, B, C \subset R$) দুটি অপেক্ষক। যদি $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ এবং $\lim\limits_{x\to a} g(y) = \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right) = g(b)$

প্রমাণ ঃ যেহেতু f-এর সহ-সংজ্ঞাঞ্চল এবং g-এর সংজ্ঞাঞ্চল একই সুতরাং g(f(x)) অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত।

$\because \lim\limits_{y\to b} g(y) = g(b)$, পূর্বনির্ধারিত যে কোন $\varepsilon > 0$-এর জন্য একটি $\delta_1 > 0$ পাওয়া যাবে যাতে,

$|g(y) - g(b)| < \varepsilon$ যখন, $0 < |y - b| < \delta_1$ .... (1)

আবার, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$-এর ক্ষেত্রে ঐ $\delta_1 > 0$-এর জন্য একটি $\delta_2 > 0$ পাওয়া যাবে যাতে,

$|f(x) - b| < \delta_1$ যখন, $0 < |x - a| < \delta_2$ .... (2)

এখানে, δ_2 সংখ্যাটি δ_1 তথা ε-এর উপর নির্ভরশীল।

$\therefore$ যে কোন, x, $0 < |x - a| < \delta_2$-এর জন্য

$|f(x) - b| < \delta_1 \Rightarrow |g(f(x)) - g(b)| < \in$

$\therefore \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(b) = g\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$

4.8 সীমার অস্তিত্বের ক্ষেত্রে কশির শর্ত (Cauchy's Criterion for the existence of a limit of a function) :

$x \to a$-এর জন্য একটি অপেক্ষক f(x) এর সীমার অস্তিত্বের যথেষ্ট এবং প্রয়োজনীয় (necessary and sufficient) শর্ত হলো যে কোন পূর্বনির্দিষ্ট $\varepsilon > 0$ (যত ছোট হোক না কেন) এর অনুষঙ্গী একটি $\delta > 0$ পাওয়া যাবে, যার ক্ষেত্রে

$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \forall x_1, x_2 \varepsilon D_f$ যেখানে, $0 < |x_1 - a| < \delta$ এবং $0 < |x_2 - a| < \delta$.

উদাহরণ 1 ঃ (i) কশির শর্ত অনুসারে দেখাও, $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$-এর অস্তিত্ব নেই।

সমাধান ঃ $\varepsilon > 0$ একটি যথেচ্ছ সংখ্যা। উক্ত সীমার অস্তিত্ব থাকলে $\varepsilon > 0$-এর অণুষঙ্গী একটি $\delta > 0$ পাওয়া যাবে

যার ক্ষেত্রে $\left|\sin\frac{1}{x_1} - \sin\frac{1}{x_2}\right| < \varepsilon, \forall x_1, x_2 \varepsilon D_f, 0 < |x_1 - 0| < \delta$ এবং $0 < |x_2 - 0| < \delta$.

ধরুন, $\varepsilon = 1$ এবং খুব বড় n-এর জন্য—

$x_1 = \frac{2}{(4n-1)\pi}$ এবং $x_2 = \frac{2}{(4n+1)\pi}$

$\therefore x_1 \to 0$ এবং $x_2 \to 0$ যখন, $n \to \infty$

$\therefore$ একটি $\delta_1 > 0$ পাওয়া যাবে, যাতে, $0 < |x_1 - 0| < \delta_1$ এবং $0 < |x_2 - 0| < \delta_1$.

এখন, $\left|\sin\frac{1}{x^2} - \sin\frac{1}{x_1}\right| = \left|\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi - \sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right|$

$$= 2 > \varepsilon \ (= 1)$$

$\therefore \quad \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$-এর অস্তিত্ব নেই।

উদাহরণ 2 ঃ সংজ্ঞার দ্বারা দেখাও, $\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$

সমাধান ঃ $\varepsilon > 0$ একটি যে কোন সংখ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে এই ε-এর জন্য একটি $\delta > 0$ আছে যার ক্ষেত্রে

$$| x^2 - 4 | \ \varepsilon, \ \forall x, \ 0 < | x - 2 | < \delta$$

বা, $4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon, \ \forall x, \ 2 - \delta < x < 2 + \delta \ ; \ (x \neq 2)$

বা, $+\sqrt{4-\varepsilon} < x < +\sqrt{4+\varepsilon}, \ \forall x, \ 2 - \delta < x < 2 + \delta \ ; \ (x \neq 2)$

ধরা যাক্, $2 - \delta = +\sqrt{4-\varepsilon}$ যার দ্বারা, $\delta = 2 - \sqrt{4-\varepsilon}$

এবং $2 + \delta = +\sqrt{4+\varepsilon}$ যার দ্বারা, $\delta = -2 + \sqrt{4+\varepsilon}$

$\therefore \quad \delta =$ অবম (Min) $\left\{2 - \sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon} - 2\right\}$ হলে উপরের সত্যতা বিচার করা যায়।

উদাহরণ 3 ঃ দেখাও যে, $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ এর অস্তিত্ব নেই।

সমাধান ঃ $\varepsilon > 0$ একটি যে কোন সংখ্যা। যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে সেক্ষেত্রে এই ε-এর জন্য একটি $\delta > 0$ পাওয়া যাবে, যার ক্ষেত্রে $0 < | x | \leq \delta$-**কে সিদ্ধ করে এমন দুটি** x-এর মান x_1, x_2-এর জন্য $\left|\cos\frac{1}{x_1} - \cos\frac{1}{x_2}\right| < \varepsilon$ হবে।

δ যাই হোক না কেন, খুব বড় ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার জন্য $x_1 = \frac{1}{2n\pi}$ এবং $x_2 = 1\big/(2n+1)\pi \ (n\varepsilon N)$ পাওয়া যাবে যাহারা $0 < | x | \leq \delta_1$-কে সিদ্ধ করে। কিন্তু

$$\left|\cos\frac{1}{x_1} - \cos\frac{1}{x_2}\right| = | \cos 2n\pi - \cos (2n + 1)\pi | = 2$$

$\varepsilon = 1$ ধরিলে, $\left|\cos\frac{1}{x_1} - \cos\frac{1}{x_2}\right| > \varepsilon, \ \forall x, \ 0 < | x | \leq \delta_1$

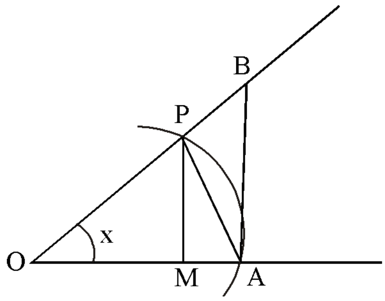
$\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$-এর অস্তিত্ব নেই।

4.9 কয়েকটি স্ট্যান্ডার্ড সীমা

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

O বিন্দুকে কেন্দ্র ও 1 একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল।

$\angle AOP = x,\ O < x < \pi/2$



ΔOAP-এর ক্ষেত্রফল < ক্ষেত্র OAP-এর ক্ষেত্রফল $\angle$ ΔOAB-এর ক্ষেত্রফল

$\frac{1}{2}.1.1\sin x < \frac{1}{2}.1.x < \frac{1}{2}.1.\tan x$ (যেহেতু OA = OP = 1 একক)

অতএব $\sin x < x < \tan x$

অর্থাৎ $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

যখন $x \to 0+,\ 1 \le \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \le 1$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$

মনে করি, $x < 0$, ধরি $x = -y,\ y > 0$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin y}{y} = 1$$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(2) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e(x \in R)$

সমাধান ঃ ধরা যাক, x-একটি ধনাত্মক সংখ্যা। প্রতিটি x-এর ক্ষেত্রে দুটি পরপর (consecutive) ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n, n + 1 পাওয়া যাবে, যার জন্য

$n \le x < n + 1$

$\therefore \quad 1+\frac{1}{n} \ge 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1}$

প্রত্যেকটি পদ > 1 এবং যেহেতু $n + 1 > x \ge n$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \ge \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \geq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Big/ \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

যখন, $x \to \infty$ তখন $n \to \infty$, $n + 1 \to \infty$ এবং n, $n + 1$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$ এবং $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$ (একক 2-এ প্রমাণ)।

$\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1, \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \to 1$যখন $n \to \infty$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \geq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \geq \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}$$

$$\therefore \quad e \leq \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leq e$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

আবার ধরা যাক্, $x = -p$, যেখানে p ধনাত্মক বড় সংখ্যা।

$p \to \infty$ যখন, $x \to -\infty$.

$$\therefore \quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1+\frac{1}{(-p)}\right)^{(-p)} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p} = \left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{p}$$

$$= \left(1+\frac{1}{q}\right)^{q+1} \text{ (যেখানে, } q = p - 1\text{)}$$

$$= \left(1+\frac{1}{q}\right)^{q}.\left(1+\frac{1}{q}\right)$$

এখন, $p \to \infty$ হলে, $q \to \infty$

$$\therefore \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{q\to\infty}\left(1+\frac{1}{q}\right)^{q}.\left(1+\frac{1}{q}\right) = e.1 = e \ \ldots\ldots\ldots \text{(B)}$$

(A) এবং (B) হতে,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(C)}$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ (C)-এ $x = \frac{1}{y}$ বসালে, যখন, $x \to \pm\infty$ তখন $y \to 0$

$\therefore \quad \lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = e$

$\therefore \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$

(3) $\lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a} = n.a^{n-1}$

সমাধান ঃ যখন, n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{x^n - a^n}{x-a}\right) = \lim_{x\to a}\underbrace{(x^{n-1} + x^{n-2}.a + \cdots + x.a^{n-2} + a^{n-1})}_{n\text{পদ}}$$

$$= n.a^{n-1}$$

যখন n ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

ধরা যাক্ n = – m, m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{x^n - a^n}{x-a}\right) = \lim_{x\to a}(-1)\left(\frac{x^m - a^m}{x^m.a^m(x-a)}\right) = \frac{-\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m - a^m}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}x^m.a^m}$$

$$= \frac{-m.a^{m-1}}{a^{2m}} = -ma^{-m-1} = na^{n-1}$$

যখন n মূলদ ভগ্নাংশ।

ধরা যাক, $n = p/q$, $q \neq 0$, ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং p একটি পূর্ণসংখ্যা,

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = \frac{x^{p/q} - a^{p/q}}{x-a} = \frac{y^p - b^p}{y^q - b^q} \text{ (যেখানে, } x^{1/q} = y \text{ এবং } a^{1/q} = b\text{)}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{y\to b}\frac{y^p - b^p}{y^q - b^q} \text{ যখন, } x \to a \text{ তখন, } y \to a^{1/q} = b$$

$$= \frac{\lim\limits_{y\to b}\frac{y^p - b^p}{y-b}}{\lim\limits_{y\to b}\frac{y^q - b^q}{y-b}} = \frac{p.b^{p-1}}{q.b^{q-1}} = \frac{p}{q}.b^{p-q}$$

$$= \frac{p}{q}.\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{q\left(\frac{p}{q}-1\right)} = \frac{p}{q}.a^{\frac{p}{q}-1} = n.a^{n-1}$$

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log(1+x) = 1, (x > -1)$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log(1+x) = \lim_{x\to 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$= \log\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right\} = \log e = 1$$

$$= \log e = 1$$

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

সমাধান ঃ ধরা যাক্ $e^x = 1 + z \quad \therefore \; x = \log(1+z)$, যখন $x \to 0$, তখন $z \to 0$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\frac{\log(1+z)}{z}} = \frac{1}{1} = 1$$

(6) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n, (x > -1)$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{\log(1+x)}, \frac{\log(1+x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{\log(1+x)}, \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$$

(যেহেতু দুটি সীমারই অস্তিত্ব আছে)

ধরা যাক্,

$(1 + x)^n - 1 = y$

$\therefore \; (1 + x)^n = 1 + y$

বা, $n \log(1 + x) = \log(1 + y)$

যখন, $x \to 0$ তখন $y \to 0$

এখন, $= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{\log(1+x)} = \lim_{y\to 0} \frac{n.y}{\log(1+y)}$

$$= n.\frac{1}{\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y}} = n$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n$$

(7) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a (a > 0)$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\log_e(y+1)}\log_e a$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\log_e a}{\left(\frac{\log(1+y)}{y}\right)}=\log_e a$$

$y = a^x - 1$ ধরে

যখন, $x \to 0$ তখন

$y \to 0$

$a^x = 1 + y$

$\therefore\ x=\frac{\log e^{(1+y)}}{\log e^a}=\log e^a$

(8) $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{+x}{x\left\{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right\}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{+1}{1\left\{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right\}}=+\frac{1}{2}\quad\left(\because\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\right)$$

(9) $\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{0}{1}=0$$

(10) $\lim_{x\to\infty}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=\frac{2}{\pi}$

সমাধান ঃ

$$\lim_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{\theta\to0}\theta.\tan\left\{\frac{\pi}{2}(1-\theta)\right\}\left[\begin{array}{l}1-x=\theta\\ x\to1,\theta\to0\end{array}\right]$$

$$=\lim_{\theta\to0}\theta\cot\frac{\theta\pi}{2}=\lim_{\theta\to0}\theta.\frac{\cos\frac{\pi\theta}{2}}{\sin\frac{\pi\theta}{2}}$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \cot\frac{\pi}{2}\theta . \lim_{\theta\to 0} . \frac{\frac{\pi}{2}\theta}{\frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi\theta}{2}\right)}$$ (যেহেতু দুটি সীমারই অস্তিত্ব আছে)

$$= \lim_{\theta\to 0} \cos\frac{\pi\theta}{2} . \lim_{\theta\to 0} \left\{ \frac{2}{\pi} . \frac{1}{\frac{\sin\frac{\pi\theta}{2}}{\frac{\pi\theta}{2}}} \right\}$$

$$= 1 . \frac{2}{\pi} . 1 = \frac{2}{\pi}$$

(11) (i) $\lim_{x\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$, (ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$

সমাধান : $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}}{3^n\left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3\left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}}{\left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}} = 3$$

$$\left[\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\text{যেহেতু } \frac{2}{3} < 1\right) \right]$$

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{x}{x^2} + \sqrt{\frac{x}{x^4}}}}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}} = \frac{1}{1} = 1 \left(\because \frac{1}{x} \to 0\right).$$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

সমাধান : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3-t^2}{1-t^{12}}$ $\left[\begin{array}{l}\cos x = t^6 \text{ ধরা হলো} \\ \text{যখন, } x\to 0, \text{ তখন, } t\to 1\end{array}\right.$

$$= \lim_{t\to 1}\frac{t^2(t-1)}{-\left(t^{12}-1\right)} = -\frac{\lim\limits_{t\to 1} t^2}{\lim\limits_{t\to 1}\frac{t^{12}-1}{t-1}}$$

$$= -\frac{1}{12(1)^{12-1}} = -\frac{1}{12}\left(\because \lim_{t\to 1}\frac{t^{12}-1}{t-1} - 12.1^{12-1} = 12\right)$$

4.10 অনুশীলনী–II

1. $f : A \to B$ যেখানে, $y = \sqrt{x^2-4x+3}$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞাঞ্চল ও বিস্তাঞ্চল নির্ণয় কর ঃ
2. $f(x) = \log \sin x$, $\phi(x) = \log \cos x$ হলে প্রমাণ কর $e^{2f(x)} + e^{2\phi(x)} = 1$
3. $\phi(x) = m\dfrac{x-l}{m-l} + l\dfrac{x-m}{l-m}$ হলে দেখাও যে $\phi(l) + \phi(m) = \phi(l+m)$
4. যদি $f(x) - \dfrac{|x|}{x}$ এবং $c \neq 0$ যে কোন বাস্তব সংখ্যা, দেখাও যে $|f(c) - f(-c)| = 2$
5. নীচের সীমাগুলির অস্তিত্ব আছে কিনা বিচার কর :

   (i) $\lim\limits_{x\to 2}[x]$ যেখানে, $[x]$ বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা যা x থেকে বড় নয়।

   (ii) $\lim\limits_{x\to 1}\left\{x^2+\sqrt{x-1}\right\}$

   (iii) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{\tan x}-1}{e^{\tan x}+1}$

   (iv) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sin\dfrac{1}{x} + x\sin\dfrac{1}{x} + x^2\sin\dfrac{1}{x}\right]$
6. দেখাও যে,

   (i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{2}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1} = \dfrac{2}{3}$

   (iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3} = -\dfrac{1}{3}$, (iv) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-[x]}{x} = 0$

[(iv)-এর সংকেত : $|[x] - x| < 1$, কারণ, $[x] - x$ **সর্বদা** $x > 0$ ক্ষেত্রে 0 এবং -1 এর মধ্যবর্তী হবে।]

7. দেখাও যে, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sin x} = 1$ কিন্তু, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \frac{1}{x}}{\sin \frac{1}{x}}$ এর অস্তিত্ব নেই।

8. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{(3x)} - 3}{\sqrt{(2x-4)} - \sqrt{2}}$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{1}{4-x^2}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{cosec} x - \cot x)$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(1+x) - \sin(1-x)}{x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0} x.\sqrt{\cot x}$

4.11 অপেক্ষক-এর সন্ততি

আমরা এখন এক বিশেষ সীমা $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$-এর আলোচনা করব যেখানে a বিন্দুটি f(x)-এর সংজ্ঞাঞ্চলে থাকবে এবং $l = f(a)$ হবে অর্থাৎ, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ হবে। এক্ষেত্রে, f(x)-কে a বিন্দুতে সন্তত বলা হবে। এখন আমরা অপেক্ষক একটি বিন্দুতে এবং অন্তরালে সন্তত কিনা এবং সন্তত হলে বিশেষ কোন ধর্ম আছে কিনা আলোচনা করব।

4.11.1 একটি বিন্দুতে সন্ততি :

অপেক্ষক f(x) কে উহার সংজ্ঞার অঞ্চলভুক্ত $x = a$ বিন্দুতে সন্তত বলা হবে যদি $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ হয়।

Õï ¢È, f(x) অপেক্ষক $x = a$ তে সন্তত হবে যদি যে কোন সংখ্যা $\in > 0$ এর জন্য এমন একটি সংখ্যা $\delta > 0$ পাওয়া যায় যে, $|f(x) - f(a)| < \in$ হয়, যখন $|x - a| < \delta$, (এখানে δ-এর মান a এবং ∈ এর উপর নির্ভরশীল)।

উদাহরণ 1 : $f(x) = 3x + 1$, অপেক্ষকটি $x = 1$ বিন্দুতে সন্তত। কারণ, $f(1) = 4$ এবং $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3.1 + 1 = 4 = f(1)$

মন্তব্য :

অসন্তত : একটি অপেক্ষক f(x), x = a বিন্দুতে অসন্তত হবে যদি অপেক্ষকটি x = a বিন্দুতে সন্তত না হয়।

(1) $f : [0, 3] \to R$ নিম্নভাবে সংজ্ঞা আছে :

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & 0 \le x < 1 \\ 5, & x = 1 \\ 4x+1, & 1 < x \le 2 \\ 2x+8, & 2 < x < 3 \\ 15, & x = 3 \end{cases}$$

এক্ষেত্রে $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} (3x+2) = 5$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} (4x+1) = 5$$

$$f(1) = 5$$

অতএব $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = f(1)$ এবং x = 1 বিন্দুতে f সন্তত।

$\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-0} (4x+1) - 9, \lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} (2x+8) = 12$

সুতরাং সীমা দুটি অসমান, ফলে $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$-এর অস্তিত্ব নেই এবং f, x = 2 বিন্দুতে অসন্তত।

$\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3-} (2x+8) + 14 \neq f(3,)$ সুতরাং x = 3 বিন্দুতে f সন্তত নয়।

(2) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$

মনে করি ε যদৃচ্ছ ধনসংখ্যা।

$|f(x) - f(0)| = \left|x \sin \frac{1}{x} - 0\right| \le |x| < \in$ যখন $|x| < \delta$, $\delta = \varepsilon$; সুতরাং f(x) অপেক্ষকটি x = 0 বিন্দুতে সন্তত।

(3) $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$ ও $f(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \infty, x = 0$ বিন্দুতে f সন্তত নয়।

4.11.2 অন্তরালে অপেক্ষকের সন্ততি

মনে করি $f : [a, b] \to R$ সংজ্ঞাত আছে।

$f(x)$ অপেক্ষককে $[a, b]$ তে সন্তত বলা হবে, যদি নিচের শর্তগুলি একসাথে পূরণ হয় ঃ

(i) প্রতিটি $a < c < b$-এর ক্ষেত্রে $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = \lim\limits_{x\to c+0} f(x) - f(c)$ হয়

(ii) $f(x)$, $x = a$ তে ডানদিক থেকে সন্তত হয় অর্থাৎ, $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$ এবং

(iii) $f(x)$, $x = b$ তে বামদিক থেকে সন্তত হয় অর্থাৎ, $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = f(b)$

4.12 একটি বিন্দুতে সন্তত অপেক্ষকের বীজগাণিতিক ও অন্য কিছু ধর্ম

ধর্ম-1. $f(x)$ এবং $g(x)$ অপেক্ষকদ্বয় $x = a$ বিন্দুতে সন্তত হলে (i) $f(x) + g(x)$, (ii) $f(x) - g(x)$. (iii) $f(x). g(x)$. এবং (iv) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ অপেক্ষকগুলি $x = a$ বিন্দুতে সন্তত হবে, যদিও একমাত্র (iv)-এর ক্ষেত্রে $g(a) \neq 0$ শর্ত আবশ্যিক।

প্রমাণ : যেহেতু $f(x)$ এবং $g(x)$ অপেক্ষয়দ্বয় $x = a$ বিন্দুতে সন্তত,

$\therefore \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ এবং $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$

এখন সীমার বীজগাণিতিক ধর্ম থেকে,

(i) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x) + g(x)\} = f(a) + g(a)$,

(ii) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x) - g(x)\} = f(a) - g(a)$,

(iii) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x), g(x)\} = f(a), g(a)$

এবং (iv) $g(a) \neq 0$ হলে, $\lim\limits_{x\to a}\{f(x), g(x)\} = f(a), g(a)$

মন্তব্য : উক্ত ধর্মগুলি সসীম সংখ্যক সন্তত অপেক্ষকের ক্ষেত্রে প্রয়োজ্য হবে।

ধর্ম-2. $y = f(x)$ অপেক্ষকটি $x = a$ তে সন্তত এবং $z = g(y)$ অপেক্ষকটি $y = b$ তে সন্তত। যদি $b = f(a)$ হয়, $z = g\{f(x)\}$ অপেক্ষকটি $x = a$ তে সন্তত হবে।

প্রমাণ : $z = g(y)$, $y = b$ তে সন্তত।

যে কোন $\in > 0$ এর জন্য একটি $\delta' > 0$ পাওয়া যায় যাতে,

$|g(y) - g(b)| < \in$ যখন, $|y - b| < \delta'$ ....(1)

আবার, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = b$

উক্ত $\delta' > 0$ এর জন্য একটি $\delta'' > 0$ পাওয়া যাবে, যাতে

$|f(x) - b| < \delta'$ যখন $|x - a| < \delta''$

অর্থাৎ, $|y - b| < \delta'$ যখন $|x - a| < \delta''$ ....(2)

$\therefore$ (1) এবং (2) হতে, $|g(y) - g(b)| < \in$ যখন, $|x - a| < \delta''$

বা, $|g(f(x)) - g(f(a))| < \in$ যখন, $|x - a| < \delta''$

$$\therefore \lim_{x\to a} g(f(x)) = g(f(a))$$

$\therefore$ $z = g(f(x))$, $x = a$ তে সন্তত।

উদাহরণ :

$y = f(x) = \sin x$, $z = g(y) = e^y$

$y = \sin x$, যে কোন বাস্তব x-এ সন্তত।

$$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sin x = \sin a$$

আবার, $z = e^y$, যে কোন বাস্তব y-এ সন্তত।

$$\therefore \lim_{y\to \sin a} g(y) = e^{\sin a}$$

$$\therefore \lim_{x\to a} g\{f(x)\} = \lim_{x\to a} e^{f(x)} = \lim_{x\to a} e^{\sin x} = e^{\sin a}$$

ধর্ম-3. যদি অপেক্ষক f(x), c বিন্দুতে সন্তত হয় এবং $f(c) \neq 0$ তাহলে একটি $\delta > 0$ এবং c-এর একটি সামীপ্য $(c - \delta, c + \delta)$ আছে যার সকল x-এর জন্য f(x) ও f(c)-এর চিহ্ন একই হবে।

প্রমাণ : f(x), $x = c$ তে সন্তত।

$\therefore$ যে কোন বাস্তব $\in$, $0 < \in < \dfrac{|f(c)|}{2}$, $f(c) \neq 0$ এর জন্য একটি $\delta > 0$ পাওয়া যাবে, যাহাতে $f(c) - \in < f(x) < f(c) + \in$ যখন, $c - \delta < x < c + \delta$.

মনে করি $f(c) > 0$

$\therefore$ $\dfrac{1}{2}f(c) < f(x) < \dfrac{3}{2}f(c)$ যখন, $c - \delta < x < c + \delta$.

$\therefore$ $f(c) < 0$, $\therefore f(x) > 0$, $\forall x$, $c - \delta < x < c + \delta$.

আবার যদি, $f(c) < 0$ হয়,

$\dfrac{3}{2}f(c) < f(x) < \dfrac{1}{2}f(c)$ যখন, $c - \delta < x < c + \delta$

কিন্তু, $f(c) < 0$, $\therefore$ $f(x) < 0$ যখন, $x \in (c - \delta, c + \delta)$

$\therefore$ $f(x)$, c বিন্দুতে হওয়ার জন্য c-এর একটি সামীপ্যে $f(x)$, $f(c)$ এর চিহ্ন ধরে রাখে।

ধর্ম-4. $f(x)$, $x = a$ তে সন্তত হলে $|f(x)|$, $x = a$ বিন্দুতে সন্তত হবে।

প্রমাণ : $\in > 0$ এর জন্য একটি $\delta > 0$ পাওয়া যাবে যাতে,

$|f(x) - f(c)| < \in$ যখন, $|x - a| < \delta$

$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| < \in$ যখন, $|x - a| < \delta$

$\therefore$ $\lim_{x \to a} |f(x)| = |f(a)|$

4.13 বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরালে সন্তত অপেক্ষকের ধর্ম

প্রমাণ ছাড়া ধর্মগুলি শুধু উল্লেখ করা হল ঃ

1. বোলজানোর (Bolzano's) উপপাদ্য ঃ

যদি অপেক্ষক $f(x)$, $[a, b]$ তে সন্তত এবং $f(a).f(b) < 0$ হয় তখন অন্তত একটি বিন্দু ξ, $a < \xi < b$ পাওয়া যাবে যেখানে $f(\xi) = 0$.

উদাহরণ : $f(x) = x^2 + x - 6$ অপেক্ষকটি $[0, 3]$ অন্তরালে সন্তত এবং $f(0).\ f(3) < 0$ এখানে, $\xi = 2$ এখন যে $f(\xi) = 0$.

2. অপেক্ষক f, $[a, b]$-তে সন্তত এবং $f(a) \neq f(b)$ হলে, যদি $f(a) < k < f(b)$ হয়, সেক্ষেত্রে অন্তত একটি বিন্দু $c \in (a, b)$ থাকবে যার জন্য $f(c) = k$ হবে।

3. $f(x)$ অপেক্ষক $[a, b]$ তে সন্তত হলে $f(x)$ অপেক্ষকটি সীমাবদ্ধ হবে এবং ঐ অন্তরালে অপেক্ষকটি তার ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা এবং বৃহত্তম নিম্নসীমার মান ধারণ করবে।

উদাহরণ : $f(x) = |x|$, $[-1, 1]$ তে সন্তত।

আবার, $[-1, 1]$ তে সমস্ত x-এর জন্য $0 \leq |x| \leq 1$, এখানে, $f(x)$ এর বৃহত্তম নিম্নসীমা এবং ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা হল যথাক্রমে O এবং 1, এখন, $f(0) = 0$, $f(1) = 1 = (f-1)$

4. যদি অপেক্ষক $f(x)$, $[a, b]$ তে সন্তত হয় এবং $f(a)$ ও (b) এর মধ্যবর্তী মানগুলি অপেক্ষক $f(x)$এর মান আকারে একবার মাত্র পাওয়া যায়, তাহলে অপেক্ষকটি $[a, b]$ অন্তরালে যথার্থ ক্রমান্বয়ী (Strictly Monotonic) অপেক্ষক হবে।

4.14 বিপরীত অপেক্ষকের অস্তিত্ব এবং সন্ততি

যদি সন্তত অপেক্ষক $f(x)$ বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে যথার্থ ক্রমবর্ধমান (বা ক্রমক্ষীয়মান) হয় তখন y

= f(x) সংজ্ঞায়িত করে একটি বিপরীত অপেক্ষক $x = \phi(y)$ যেটি [f(a), f(b)] অন্তরালে সন্তত এবং যথার্থ ক্রমবর্ধমান (বা, ক্রমক্ষীয়মান) হবে।

উদাহরণ : $x = \sin y$ অপেক্ষকটি y-এর সকল বাস্তব মানের জন্য সন্তত এবং ইহার মান [–1, 1] এর মধ্যে থাকে। বিপরীত অপেক্ষকটি $y = \sin^{-1} x$, x-এর প্রতিটি মানের জন্য y-এর অসংখ্য মান পাওয়া যায় যাতে, $x = \sin y$ হয়। $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ সংজ্ঞাঞ্চলটি বিবেচনা করা হলো। এই সংজ্ঞাঞ্চলে x সন্তত এবং y-এর যথার্থ ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক যাতে সন্তত, যথার্থ ক্রমবর্ধমান একটি বিপরীত অপেক্ষক $y = \sin^{-1} x$ পাওয়া যায়।

4.15 অপেক্ষকের অসন্ততির প্রকার ভেদ

কোন বিন্দুতে অপেক্ষকের অসন্ততিতে মূলত দুটি ভাগ ভাগ করা যায় ঃ

1) বামপক্ষীয় সীমা $\lim\limits_{x \to c-0} f(x)$ ও ডানপক্ষীয় সীমা $\lim\limits_{x \to c+0} f(x)$ উভয়েরই অস্তিত্ব আছে, কিন্তু

(ক) সীমা দুটি অসমান ঃ x = c বিন্দুতে অপেক্ষকের উল্লম্ফন অসন্ততি (Jump discontinuity) আছে বলা হয়।

(খ) সীমা দুটি পরস্পর সমান কিন্তু ঐ সীমার মান f(c)-এর সঙ্গে সমান নয় : x = c বিন্দুতে অপেক্ষকের দূরণীয় অসন্ততি (Removable discontinuity) আছে বলা হয়।

এই দুই ধরনের অসন্ততিকে এককথায় প্রথম প্রকারের অসন্ততি বলা হয়।

4.11-এর উদাহরণ 1-এ x = 2 বিন্দুতে অপেক্ষকের উল্লম্ফন অসন্ততি এবং x = 3 বিন্দুতে অপেক্ষকের দূরণীয় অসন্ততি আছে।

(2) বামপক্ষীয় সীমা বা ডানপক্ষীয় সীমা দুটিরই অথবা কোন একটির অস্তিত্ব নেই—এগুলিকে দ্বিতীয় প্রকারের অসন্ততি বলা হয়।

যদি সীমাটি $+\infty$ বা $-\infty$ হয়, তবে সংশ্লিষ্ট বিন্দুতে অসীম অসন্ততি আছে বলা হয়। 4.11-এর উদাহরণ 3-এ x = 0 বিন্দুতে অপেক্ষকের অসীম অসন্ততি আছে।

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

x = 0 বিন্দুতে দ্বিতীয় প্রকারের অসন্ততি আছে কেননা $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ ও $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$ কোনটিরই অস্তিত্ব নাই, কিন্তু অপেক্ষকটি সীমাবদ্ধ।

4.16 কয়েকটি বিশেষ ধরনের অপেক্ষকের প্রকৃতি

1) বহুপদরাশি $x \to a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ সকল $x \in R$-এর জন্য সন্তত $(a_0, a_1 \ldots a_n \in R)$

2) মূলদ অপেক্ষক $x \to \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + bm}$, x-এর সেই সমস্ত বাস্তব মানের জন্য সন্তত যাহাদের ক্ষেত্রে $b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots b_m \neq 0$, সকল সহগ বাস্তব।

3) sinx, cosx অপেক্ষকদ্বয় সকল $x \in R$ -এর জন্য সন্তত। tanx, secx সকল $x \neq (2n-1)\frac{\pi}{2} (n \in z)$ -এর জন্য সন্তত। cotx, cosecx সকল $x \neq n\pi$ $(n \in z)$-এর জন্য সন্তত।

4) $x \to a^x$, $a > 0$ সকল $x \in R$-এর জন্য সন্তত। $x \to e^x$ সকল $x \in R$-এর জন্য সন্তত।

5) $x \to \log_e x$, $\cos^{-1}x$ অপেক্ষকটি $0 < x < 00$ -এর জন্য সম্ভব।

6) $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1} x$ অপেক্ষকদ্বয় $[-1, 1]$-এ সন্তত।

$\tan^{-1}x$, $\sec^{-1} x$ অপেক্ষকদ্বয় $(-\infty, \infty)$-এ সন্তত।

$\cot^{-1}x$, $\text{cosec}^{-1} x$ অপেক্ষকদ্বয় $(-\infty, \infty)$-এ সন্তত।

7) ক্রমান্বয়ী অপেক্ষক সন্তত ও অসন্তত উভয়ই হতে পারে। কিন্তু ক্রমান্বয়ী অপেক্ষকের কোন বিন্দুতে অসন্ততি থাকলে তা কখনোই দ্বিতীয় প্রকারের অসন্ততি হবে না।

4.17 সন্তত অপেক্ষকের উদাহরণ

উদা.-1. অপেক্ষক $f(x) = x$ যখন $0 < x < 1$

$= 2 - x$ যখন $1 \le x \le 2$

$= x - \frac{1}{2}x^2$ যখন $x > 2$

$x = 2$ তে সন্তত।

সমাধান : $f(2) = 2 - 2 = 0$

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (2 - x) = 0$$

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = f(2)$$

$\therefore$ f(x), $x = 2$ তে সন্তত।

মনে করি, $\varepsilon > 0$ যদৃচ্ছ সংখ্যা। $|f(x) - f(2)| = |2 - x - 0| = 2 - x < \varepsilon$ যখন $0 < 2 - x < \delta$, $\delta = \varepsilon$

অতএব, $\lim_{x \to 2-0} f(x) = 0$

$$\left|f(x) - f(2)\right| = \left|x - \frac{x^2}{2} - 0\right| = \frac{x}{2}(x-2) < \frac{3}{2}(x-2) < \in$$

যখন $2 < x <$ অবম $\left\{\frac{3}{2}, \frac{2\in}{3}\right\} + 2$

উদা.-2. $f(x) = \dfrac{x^4 + 4x^2 + 2x}{\sin x}, x \neq 0$

$\qquad = 0 \qquad\qquad x = 0.$

অপেক্ষকটি $x = 0$ তে অসন্তত।

সমাধান : $f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{x^4 + 4x^3 + 2x}{\sin x} = \lim_{x \to 0-} \frac{x^3 + 4x^2 + 2}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{x^4 + 4x^3 + 2x}{\sin x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^3 + 4x^2 + 2}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = 2 \neq f(0)$

$\therefore$ $f(x)$, $x = 0$-তে সন্তত নহে।

উদা.-3. $f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), x \neq 0, f(0)$ এর মান কত হলে অপেক্ষকটি $x = 0$ তে সন্তত হবে।

সমাধান : এখানে $f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right). x \neq 0$

x-এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য, $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1$

যখন $x > 0$, $-x \leq x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq x$

বা, $0 = \lim_{x\to 0+}(-x) \le \lim_{x\to 0+} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \le \lim_{x\to 0+} x = 0$

$\therefore \lim_{x\to 0+} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$

যখন, $x < 0, x \le x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \le -x$

বা, $0 = \lim_{x\to 0-} x \le \lim_{x\to 0-} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \le \lim_{x\to 0-}(-x) = 0$

$\therefore \lim_{x\to 0-} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$

$\therefore \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$

$x = 0$ বিন্দুতে f(x) অপেক্ষকটি সন্তত হবে, যদি, $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0 - f(0)$

$\therefore$ f(0) = 0 হলে, f(x), x = 0 -তে সন্তত হবে।

উদা.-4. যে বিন্দুগুলিতে অপেক্ষক $f(x) = \frac{1}{\log|x|}$ অসন্তত, সেগুলি নির্ণয় কর।

সমাধান : x = 0-তে অপেক্ষক সংজ্ঞায়িত নয়। $\therefore$ x = 0-তে f(x) অসন্তত।

আবার, $\log|x| = 0$ যখন, $x = \pm 1$. $\therefore$ x = – 1 এবং 1-তে f(x) অসন্তত।

$\therefore$ x = – 1, 0 এবং 1 বিন্দুগুলিতে f(x) অসন্তত।

4.18 অনুশীলনী–III

1. $f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 + 5x^2}{\sin x}, x \ne 0$

   $= 0 \qquad , x = 0$

   এবং $g(x) = \frac{x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x}{\sin x}, x \ne 0$

   $= 0 \qquad , x = 0$

   দেখাও যে, f(x), x = 0 তে সন্তত কিন্তু g(x) সন্তত নহে।

2. $f(x) = \dfrac{\sin(a^2x^2)}{x}, x \neq 0, a \neq 0$

$\quad = k \qquad\qquad\qquad , x = 0$

k-এর মান নির্ণয় কর যাতে f(x), x = 0 তে সন্তত হয়।

3. $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}, x \neq 0$

$\quad = e^2 \qquad , x = 0$

দেখাও যে, f(x), x = 0 তে সন্তত।

4. f(x) = [x] + [–x], x = 0-তে সন্তত কিনা পরীক্ষা কর।

5. দেখাও যে, $f(x) = x^3 - 3x + 1$, x-এর যেকোন মানে সন্তত।

সন্ততার ধর্ম থেকে প্রমাণ কর $x^2 - 3x + 1 = 0$-এর একটি বীজ 1 এবং 2-এর মধ্যে অবস্থিত।

6. $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0$

$\quad = 9 \qquad , x = 0$

দেখাও যে, f(x), x = 0 বিন্দুতে অসন্তত। এই অসন্ততটি কোন শ্রেণীভুক্ত।

7. $f(x) = \dfrac{x^3+2x+5}{x^2-8x+12}$ অপেক্ষকের অসন্তত বিন্দুগুলি নির্ণয় কর। [উত্তর : 2 এবং 6]

4.19 সহায়ক গ্রন্থ এবং ব্যবহৃত পারিভাষিক শব্দ

ব্যবহৃত পারিভাষিক শব্দ :

একচল — Single variable

বাস্তব সংখ্যা — Real number

অপেক্ষক — Function

সংজ্ঞাঞ্চল — Domain

সহ-সংজ্ঞাঞ্চল — Co-domain

বিস্তার/বিম্বাঞ্চল — Range

ধ্রুবক — Constant

অভেদ — Identity

উপরিচিত্রণ/অনুট অপেক্ষক — Onto function