

আয়নীয় বন্ধনে পরমাণুগুলি নিষ্ক্রিয় গ্যাসের পরমাণুগুলির ইলেকট্রন বিন্যাস লাভ করে। এই বিন্যাস গোলায় প্রতিসাম্যবিশিষ্ট। অর্থাৎ এই বিন্যাসের কোনো দিক নির্ভরতা নেই। সেজন্য আয়নীয় বন্ধনও গোলায় প্রতিসাম্যবিশিষ্ট। কিন্তু দুটি পরমাণুর সমযোজী বন্ধনে সাধারণত একটি পরমাণুর p-ক্ষেত্র (orbital) ইলেকট্রন সংখ্যার যে ঘাটতি থাকে, তা এই স্তরের সমসংখ্যক অন্য ইলেকট্রনগুলি সহযোগী পরমাণুটির অনুরূপ ক্ষেত্রের সমসংখ্যক ইলেকট্রনের সঙ্গে জোড় বেঁধে পূরণ করে। কিন্তু পরমাণুর p-ক্ষেত্রের গোলায় প্রতিসাম্যতা নেই। অর্থাৎ এই ক্ষেত্রগুলি উপগোলকীয় এবং সেজন্য দিকনির্ভর। এজন্য সমযোজী বন্ধনও দিকনির্ভর হয়। কোনো পরমাণুর যোজক ক্ষেত্রে ইলেকট্রন সংখ্যার ঘাটতি নির্ণয়ের সূত্র হল  $(8-N)$ , সেখানে N হল পর্যায়-সারণিতে মৌলটির শ্রেণিসংখ্যা। উদাহরণস্বরূপ ক্রোরিন পর্যায়-সারণির সপ্তম (VII) শ্রেণিতে অবস্থিত। সেজন্য ক্রোরিন পরমাণুর যোজক ক্ষেত্রে ইলেকট্রনের ঘাটতি  $= 8-7 = 1$ । ক্রোরিনের যোজক ক্ষেত্রে ইলেকট্রনবিন্যাস হল  $3s^2 3p^5$ । সুতরাং ক্রোরিন পরমাণুর 3p-ক্ষেত্রে একটি ইলেকট্রনের ঘাটতি আছে। এই ঘাটতি পূরণের জন্য ক্রোরিন পরমাণুর 3p স্তরে যে 5টি ইলেকট্রন আছে, সেগুলির মধ্যে একটি অপর একটি ক্রোরিন পরমাণুর অনুরূপ একটি ইলেকট্রনের সঙ্গে জোড়বন্ধ হয় এবং উভয় পরমাণুর 3p-ক্ষেত্রে এই জোড়টি একসঙ্গে পর্যায়ক্রমে বারবার স্থানান্তরিত হয়। এর ফলে উভয় পরমাণুরই 3p ক্ষেত্র পর্যায়ক্রমে সম্পৃক্ত ( $3p^6$ ) হয়। অনুরূপে অক্সিজেন পরমাণু পর্যায়-সারণির ষষ্ঠ (VI) শ্রেণিতে থাকায় এর সর্ববহিস্থ L-ক্ষেত্রের ইলেকট্রনবিন্যাস  $2s^2 2p^4$ । সুতরাং 2p যোজক স্তরে এই পরমাণুর  $(8-6) = 2$ টি ইলেকট্রনের ঘাটতি আছে। কিন্তু যেহেতু এই পরমাণুর 2p স্তরে 4টি ইলেকট্রন আছে, সুতরাং এদের মধ্যে দুটি ইলেকট্রন অপর একটি অক্সিজেন পরমাণুর অনুরূপ 2টি ইলেকট্রনের সঙ্গে জোড় বেঁধে উভয় পরমাণুর 2p-ক্ষেত্রের ইলেকট্রন ঘাটতি পর্যায়ক্রমে পূরণ করে। নাইট্রোজেন পরমাণুর ত্রিসমযোজী বন্ধনও আমরা একই পদ্ধতিতে ব্যাখ্যা করতে পারি। কিন্তু কার্বনের সমযোজী বন্ধন এই একই পদ্ধতিতে ব্যাখ্যা করার ক্ষেত্রে একটি অসুবিধা দেখা যায়।

কার্বন পর্যায়-সারণির চতুর্থ (IV) শ্রেণির অন্তর্গত মৌল। এর সর্ববহিস্থ L-ক্ষেত্রে ইলেকট্রন বিন্যাস  $2s^2 2p^2$  এবং এই যোজক-স্তরে ইলেকট্রন ঘাটতি  $(8-4) = 4$ । কিন্তু এর 2p-ক্ষেত্রে মাত্র দুটি ইলেকট্রন থাকায়, সাধারণভাবে এই পরমাণু অপর কার্বন পরমাণুর সঙ্গে মিলিত হয়ে 2টির বেশি ইলেকট্রন জোড় গঠন করতে পারে না। কিন্তু এতৎসত্ত্বেও দেখা যায় যে, কার্বন পরমাণুগুলি নিজেদের মধ্যে সমযোজী বন্ধন দ্বারা কার্বনের একটি বহুরূপ ডায়মন্ড (diamond) বা হীরকের কঠিন কেলাস গঠন করে। এর ব্যাখ্যা হল এই যে কার্বনের 2s ও 2p ক্ষেত্রদুটির ইলেকট্রনগুলির মধ্যে শক্তির প্রভেদ কম (প্রায় 4 eV)। সেজন্য সামান্য উদ্দীপ্ত (excited) হলেই কার্বন পরমাণুর 2s-ক্ষেত্রের একটি ইলেকট্রন-এর 2p-ক্ষেত্রে স্থানান্তরিত হয়। এর ফলে কার্বনের L-ক্ষেত্রের পরিবর্তিত ইলেকট্রন বিন্যাস হয়  $2s^1 2p^3$ । এভাবে কার্বন পরমাণুর 2s-ক্ষেত্রে 1টি এবং 2p ক্ষেত্রে 3টি (মোট 4টি) ইলেকট্রন ঘাটতি হয় এবং 2s ও 2p স্তরে বর্তমান মোট  $(1+3) = 4$ টি ইলেকট্রন অপর 4টি কার্বন পরমাণুর প্রত্যেকটির অনুরূপ ক্ষেত্রের 1টি করে ইলেকট্রনের সঙ্গে জোড়বন্ধ হয়। এভাবে প্রত্যেক কার্বন পরমাণুর সঙ্গে 4টি কার্বন পরমাণু 4টি এক সমযোজী বন্ধনদ্বারা যুক্ত হয়। এই বন্ধনগুলির প্রত্যেকটির একটি নির্দিষ্ট দিক আছে, যার ফলে প্রত্যেক কার্বন পরমাণুকে ঘিরে অপর 4টি

পরমাণু একটি চতুস্তলীয় (tetrahedral) ঘনর 4টি শীর্ষবিন্দুতে অবস্থান করে (চিত্র 10.4)। কার্বনের এই 4টি একসমযোজী বন্ধনের যে-কোনো দুটির মধ্যে কোণ  $109^\circ$ ।

হীরক কেলাসে প্রত্যেক কার্বন পরমাণু অপর চারটি কার্বন পরমাণুর দ্বারা পরিবেষ্টিত থাকে। সেজন্য এই কেলাসে কার্বন পরমাণুগুলি শিথিল সংবন্ধ থাকে। অর্থাৎ এই কেলাস সোডিয়াম ক্লোরাইড কেলাসের মতো ঘন-সংবন্ধ নয় (লক্ষ্য করুন, সোডিয়াম ক্লোরাইড কেলাসের আয়নগুলির সমন্বয় সংখ্যা 6)। ফলে হীরকের সংবন্ধি অনুপাত মাত্র 0.34 (লক্ষ্য করুন, ঘন-সংবন্ধ কেলাসের ক্ষেত্রে এই অনুপাত 0.74)। কিন্তু সমযোজী বন্ধন খুবই শক্তিশালী হয়। অন্য হীরকের দুটি কার্বন পরমাণুর আসঞ্জন শক্তি 7.4 eV, যা সোডিয়াম



চিত্র 10.4: হীরক কেলাসে কার্বন পরমাণুর বন্ধন

ক্লোরাইড কেলাসের অণুগুলির আসঞ্জন শক্তির প্রায় সমান। এজন্য হীরক কেলাস খুবই শক্ত ও ভঙ্গুর। এই কেলাসের গলনাঙ্ক ও স্ফুটনাঙ্ক খুবই উচ্চ। সাধারণ উন্নতায় এই কেলাস তাপ ও তড়িতের কুপরিবাহী। অন্যান্য যেসব মৌল হীরকের মতো কেলাস গঠন করে সেগুলি হল সিলিকন (Si), জারমেনিয়াম (Ge), আলফা-টিন ( $\alpha$ -Sn) প্রভৃতি। এদের মধ্যে সিলিকন ও জারমেনিয়াম কেলাসের আসঞ্জন শক্তি হীরকের তুলনায় কিছুটা কম। এজন্য এই দুটি কেলাস উচ্চতর উন্নতায় এবং বিশেষত কোনো কোনো অপদ্রব্যের উপস্থিতিতে তড়িতের পরিবাহী ধর্ম লাভ করে। সেজন্য সিলিকন ও জারমেনিয়াম কেলাসকে অর্ধপরিবাহী (semiconductor) বলা হয়।

## 10.6 ধাতব বন্ধন (Metallic Bond)

সমযোজী বন্ধনে দুটি পরমাণুর ইলেকট্রন জোড়গুলি কেবল ওই পরমাণুদুটিরই যোজক কক্ষের মধ্যে আবদ্ধ থাকে। কিন্তু ধাতুগুলির ক্ষেত্রে দেখা যায় যে দুটি পরমাণুর যোজক ইলেকট্রনগুলি কেবল সেই পরমাণুদুটির যোজক কক্ষের মধ্যেই সীমাবদ্ধ না থেকে ধাতুমধ্যস্থ অন্য কোনো পরমাণুর যোজক কক্ষে গিয়েও সাময়িক বা আংশিক সমযোজী বন্ধন গঠন করতে পারে। অর্থাৎ এক্ষেত্রে ইলেকট্রনের সমযোজী বন্ধনগুলি স্থানীয় (localized) না থেকে বৃহত্তর অঞ্চলভিত্তিক হয় এবং তার ফলে পরমাণুর যোজক কক্ষের ইলেকট্রনগুলি মুক্ত ইলেকট্রনের মতোই ধাতুর ভিতর একস্থান থেকে অন্যস্থানে ঘুরে বেড়ায়। ধাতুর মধ্যে এরূপ অসংখ্য মুক্ত ইলেকট্রনগুলিকে গতিশীল ইলেকট্রন গ্যাস বা মেঘ বলা হয় এবং এদের ঋণাত্মক কুলম্বীয় আকর্ষণ দ্বারা পরমাণুর অভ্যন্তরস্থ ধনাত্মক আয়নগুলি স্ব স্ব অবস্থানে প্রায় স্থির অবস্থায় থাকে। ধাতুর মধ্যে ইলেকট্রনের এরূপ বন্ধনকেই ধাতব বন্ধন (metallic bond) বলা হয়। ধাতব বন্ধনে কোনো ইলেকট্রন একটি পরমাণুর যোজক কক্ষ থেকে স্থায়ীভাবে অন্য পরমাণুর যোজক কক্ষে স্থানান্তরিত হয় না। এজন্য ধাতব বন্ধনকে আয়নীয় বন্ধন বলা যায় না। বরং ধাতব বন্ধনে মুক্ত ইলেকট্রন মেঘকে এমন একটি

সাধারণ ইলেকট্রন ভাঙার বলা যায়, যা থেকে পরমাণুগুলি এদের যোজক কক্ষ সম্পৃক্ত করার জন্য প্রয়োজনীয় সংখ্যক ইলেকট্রন সংগ্রহ করে সমযোজী বন্ধন গঠন করে। তা ছাড়া ধাতব বন্ধন একই মৌলের পরমাণুগুলির মধ্যে ঘটে। এজন্য ধাতব বন্ধনকে সমযোজী বন্ধনেরই একটি অস্থানিক (delocalized) বা সঞ্চারশীল (mobile) রূপ বলা যায়।

ধাতব বন্ধনে যোজক ইলেকট্রনগুলি এক পরমাণু থেকে অন্য পরমাণুতে সঞ্চারশীল থাকে। এজন্য এই বন্ধনের বিশেষ দিক নির্ভরতা নেই। ফলে অধিকাংশ ধাতুই ঘন-সংবন্ধ fcc বা hcp গঠনের কেলাস উৎপন্ন করে। সোনা, রূপা, তামা, সিসা প্রভৃতি এই শ্রেণির ধাতু। তবে সোডিয়াম, পটাশিয়াম প্রভৃতি হালকা ধাতুগুলি ব্যতিক্রম। এই ধাতুগুলি শিথিল সংবন্ধ এবং bcc গঠনের কেলাস উৎপন্ন করে।

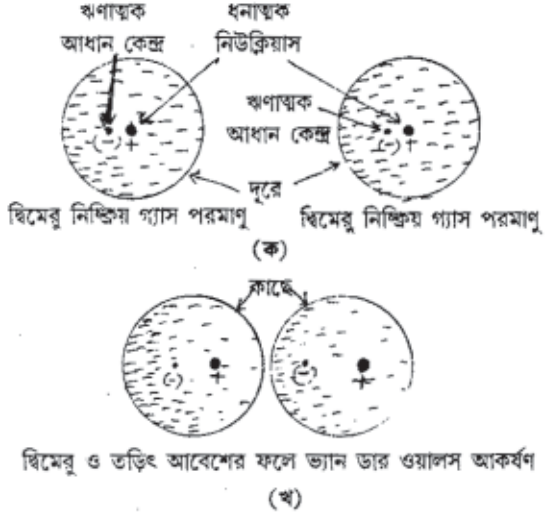
ধাতব বন্ধন আয়নীয় ও সমযোজী বন্ধনের চেয়ে দুর্বল। এই বন্ধনের বন্ধন শক্তি সাধারণত 1 থেকে 5 eV-এর মধ্যে থাকে। এজন্য ধাতুগুলির গলনাঙ্ক ও স্ফুটনাঙ্ক আয়নীয় ও সমযোজী কেলাসগুলির তুলনায় অনেক কম। ধাতুগুলির প্রসার্যতা (ductility) ও ঘাতসহতা (malleability) ধর্ম আছে। এদের যোজক ইলেকট্রনগুলি মুক্ত অবস্থায় থাকায় সহজে তাপ ও বিদ্যুৎ পরিবহন করে। এজন্য এই ইলেকট্রনগুলিকে পরিবহন ইলেকট্রন (conduction electron) বলে। ধাতুগুলি মসৃণ, চকচকে এবং বিশেষ বিশেষ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের আলোকের শোষণ বা প্রতিফলন ঘটায়।

## 10.7 ভ্যান ডার ওয়াল্‌স বন্ধন (Van der Waals' Bond)

হিলিয়াম, নিয়ন, আর্গন প্রভৃতি নিষ্ক্রিয়গুলির পরমাণুর সর্ববহিস্থ কক্ষ ইলেকট্রন দ্বারা সম্পৃক্ত থাকে এবং এই কক্ষগুলির গোলায় প্রতিসাম্য আছে। সেজন্য এরূপ পরমাণুগুলি আয়নীয় বা সমযোজী বন্ধন গঠন করে না। কিন্তু এই পরমাণুগুলির নিউক্লিয়াসবহিস্থ ইলেকট্রন মেঘের কেন্দ্রে এই মেঘের গতিশীলতার জন্য নিউক্লিয়াসের কেন্দ্রের সাপেক্ষে অনবরত তাৎক্ষণিকভাবে এদিক-ওদিক স্থান পরিবর্তন করে, যদিও সময়ের সাপেক্ষে এই দুই কেন্দ্রের মধ্যে গড় সরণ শূন্য হয়। নিউক্লিয়াসের ধনাত্মক আধান কার্যকরীভাবে নিউক্লিয়াসের কেন্দ্রে এবং ইলেকট্রন মেঘের সমপরিমাণ ঋণাত্মক আধান কার্যকরীভাবে ওই মেঘের কেন্দ্রে অবস্থিত থাকে। সুতরাং নিষ্ক্রিয় গ্যাসের পরমাণু তাৎক্ষণিকভাবে একটি তড়িৎ দ্বিমেরুরূপে ক্রিয়া করে। এই তড়িৎ দ্বিমেরুর তড়িৎচুম্বক ধনাত্মক আধানের মান ও কেন্দ্রে দুটির মধ্যবর্তী দূরত্বের গুণফলের সমান। দুটি নিষ্ক্রিয় গ্যাস পরমাণু পরস্পরের নিকটবর্তী হলে পরমাণুদুটির তড়িৎ দ্বিমেরুর বিপরীত মেরুগুলির মধ্যে আকর্ষণ বল ক্রিয়া করে। এছাড়া প্রত্যেকটি দ্বিমেরু অপর পরমাণুকে তড়িৎ আবেশ দ্বারাও আকর্ষণ করে (চিত্র 10.5)। এভাবে পরমাণু দুটির মধ্যে যে মোট আকর্ষণ বল উৎপন্ন হয়, তাকে ভ্যান ডার ওয়াল্‌স আকর্ষণ বল বলে।

ভ্যান ডার ওয়াল্‌স আকর্ষণ বল  $H_2, N_2, O_2, Cl_2, CH_4$  প্রভৃতি সমযোজী বন্ধন দ্বারা যুক্ত অণুগুলির মধ্যেও দেখা যায়। বস্তুত ভ্যান ডার ওয়াল্‌স আকর্ষণ বল প্রত্যেক অণু ও পরমাণুর মধ্যেই উপস্থিত থাকে। কিন্তু এই বল আয়নীয় বল ও সমযোজী বলের তুলনায় অত্যন্ত দুর্বল। সুতরাং যখন দুটি পরমাণুর মধ্যে

আয়নীয় বল বা সমযোজী বল ক্রিয়া করে, তখন ভ্যান ডার ওয়াল্‌স বল সম্পূর্ণ উপেক্ষণীয়। কিন্তু নিষ্ক্রিয় গ্যাসের পরমাণুগুলির মধ্যে বা  $H_2$ ,  $N_2$  প্রভৃতি গ্যাসীয় অণুগুলির মধ্যে আয়নীয় বা সমযোজী বল থাকে না। সুতরাং এই অণু ও পরমাণুগুলি কেবল ভ্যান ডার ওয়াল্‌স বল দ্বারাই পরস্পর আকৃষ্ট হয়। কিন্তু এই বল অত্যন্ত দুর্বল হওয়ায় সাধারণ উষ্ণতা ও চাপে এই বলের আসঞ্জন শক্তির চেয়ে ওই অণু ও পরমাণুগুলির গড় গতিশক্তি অনেক বেশি থাকে এবং সেজন্য সাধারণ উষ্ণতা ও চাপে এই অণু ও পরমাণুগুলি গ্যাসীয় অবস্থাতেই থাকে। গ্যাসের উষ্ণতা অত্যন্ত কম হলে অণু ও পরমাণুগুলির গতিশক্তি প্রায় শূন্য হয়ে যায়। ফলে ভ্যান ডার ওয়াল্‌স বলদ্বারা আকৃষ্ট হয়ে এই অণু ও পরমাণুগুলি প্রথমে তরলে পরিণত হয় এবং আরও নিম্নতর উষ্ণতায় কঠিন কেলাসে পরিণত হয়।



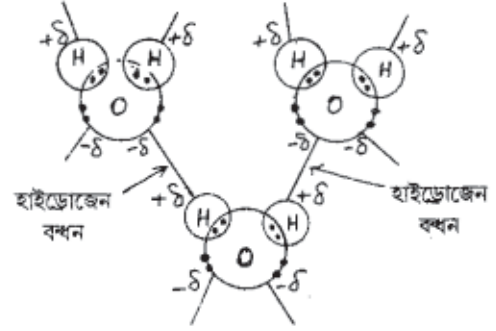
চিত্র 10.5: দুটি নিষ্ক্রিয় গ্যাস পরমাণুর মধ্যে তাৎক্ষণিক তড়িৎ দ্বিমেরু গঠন ও ভ্যান ডার ওয়াল্‌স আকর্ষণ

নিম্নতর উষ্ণতায় নিষ্ক্রিয় গ্যাস পরমাণু ও অন্যান্য গ্যাসীয় অণুগুলি যে কেলাস গঠন করে, তাকে ভ্যান ডার ওয়াল্‌স কেলাস এবং এই কেলাসের বন্ধনকে ভ্যান ডার ওয়াল্‌স বন্ধন বা আণবিক বন্ধন বলে। এই বন্ধনের বন্ধন শক্তি মাত্র  $0.1 \text{ eV}$ । এজন্যই এই কেলাসগুলির গলনাঙ্ক ও স্ফুটনাঙ্ক অত্যন্ত কম ( $<100 \text{ K}$ )। এই কেলাসগুলির দৃঢ়তা খুব কম এবং এগুলির আকার সহজেই পরিবর্তন করা যায়। ভ্যান ডার ওয়াল্‌স কেলাসগুলি তাপ ও বিদ্যুতের পরিবাহী নয়।

## 10.8 হাইড্রোজেন বন্ধন (Hydrogen Bond)

পর্যায়সারণির VI ও VII শ্রেণির অস্তর্গত অক্সিজেন, ফ্লোরিন, ক্লোরিন প্রভৃতি মৌলগুলি তীব্র তড়িৎ ঋণাত্মক (strongly electro-negative)। এরূপ কোনো পরমাণুর সঙ্গে হাইড্রোজেন পরমাণুর সমযোজী বন্ধন গঠিত হলে, উভয় পরমাণুর দ্বারা সমব্যবহৃত ইলেকট্রন জোড়টি হাইড্রোজেনের চেয়ে তড়িৎ-ঋণাত্মক পরমাণুটির দিকেই বেশি পরিমাণে আকৃষ্ট হয়। ফলে তড়িৎ-ঋণাত্মক পরমাণুটি সামান্য ঋণাত্মক আধানে ( $-\delta$ ) আহিত হয় এবং হাইড্রোজেন পরমাণুটি ওই একই পরিমাণ ধনাত্মক আধানে ( $+\delta$ ) আহিত হয়। এরূপভাবে গঠিত অণুটিকে ধ্রুবীয় (polarized) অণু বলে। ধ্রুবীয় অণুর একদিকে একটি স্থায়ী ধনাত্মক মেরু এবং অন্যদিকে একটি সমান ও স্থায়ী ঋণাত্মক মেরু উৎপন্ন হয়। ফলে অণুটি একটি স্থায়ী তড়িৎ দ্বিমেরুতে পরিবর্তিত হয়। এই স্থায়ী দ্বিমেরুবৃক্ক অণুগুলি পরস্পরকে আকর্ষণ করে। ফলে নিম্নতর উষ্ণতায় এই অণুগুলি পরস্পর যুক্ত হয়ে তরল বা কঠিন কেলাসে পরিণত হতে পারে। হাইড্রোজেন যুক্ত স্থায়ী ধ্রুবীয় অণুগুলির যে আকর্ষণ বল দ্বারা অণুগুলি এরূপে তরল বা কেলাসে পরিণত হয়, তাকে হাইড্রোজেন বন্ধন

(hydrogen bond) বলে। যদি হাইড্রোজেনের পরিবর্তে অন্য কোনো পরমাণুর সঙ্গে কোনো তড়িৎ-ঋণাত্মক পরমাণু যুক্ত হয়ে একটি স্থায়ী ধ্রুবীয় অণু গঠন করে, তবে ওই অণুগুলির বন্ধনকে কেবল দ্বিমেরু বন্ধন (dipole bond) বলা হয়। অন্যান্য দ্বিমেরু বন্ধনের চেয়ে হাইড্রোজেন বন্ধনের গুরুত্ব অনেক বেশী। এর কারণ হাইড্রোজেন পরমাণুর একমাত্র ইলেকট্রন এই বন্ধনের ফলে তড়িৎ-ঋণাত্মক পরমাণুর দিকে স্থায়ীভাবে সরে যায়। ফলে হাইড্রোজেনের ধনাত্মক নিউক্লিয়াস অর্থাৎ প্রোটনটি বাইরের দিকে উন্মুক্ত হয়ে পড়ে। এই উন্মুক্ত প্রোটনটি এর নিকটবর্তী অণুতে তীব্র আবেশ উৎপন্ন করে। এজন্য হাইড্রোজেন বন্ধন একটি জোরালো বন্ধন। অপরপক্ষে অন্য কোনো ধ্রুবীয় বন্ধনে পরমাণুর অভ্যন্তরস্থ ইলেকট্রনের সংখ্যা একাধিক হওয়ায় ধনাত্মক নিউক্লিয়াস বাইরে উন্মুক্ত হয় না। ফলে এই ধ্রুবীয় বন্ধনগুলি হাইড্রোজেন বন্ধনের চেয়ে দুর্বলতর। হাইড্রোজেন ও ধ্রুবীয় বন্ধনগুলি স্থায়ী দ্বিমেরু বন্ধন হওয়ায় সম্পূর্ণরূপে দিক নির্ভর।



দুটি হাইড্রোজেন পরমাণু একটি অক্সিজেন পরমাণুর সঙ্গে মিলিত হয়ে একটি জলের অণু গঠন করে। সুতরাং

চিত্র 10.6 : হাইড্রোজেন বন্ধনদ্বারা জলের ও বরফের গঠন

প্রত্যেক জলের অণুতে দুটি হাইড্রোজেন বন্ধন থাকে। এই অণুগুলি হাইড্রোজেন বন্ধন দ্বারা যুক্ত হয়ে কীভাবে জল ও বরফ উৎপন্ন করে, তা (10.6) চিত্রে দেখানো হল। জল বা বরফের বন্ধন শক্তি 0.5 eV। সাধারণ চাপে জলের স্ফুটনাঙ্ক 100°C এবং বরফের গলনাঙ্ক 0°C। হাইড্রোজেন বন্ধনের পরিবর্তে সাধারণ ধ্রুবীয় বন্ধন থাকলে গাণিতিকভাবে হিসাব করে দেখা যায় যে জলের স্ফুটনাঙ্ক হত -80°C।

## 10.9 মিশ্র বন্ধন (Mixed Bond)

কতকগুলি পদার্থের কেলাসে একাধিক প্রকারের বন্ধন একসঙ্গে উপস্থিত থাকে। এরূপ বন্ধনকে মিশ্র বন্ধন (mixed bond) এবং মিশ্র বন্ধনযুক্ত কেলাসকে মিশ্র বন্ধন কেলাস (mixed bond crystal) বলে। উদাহরণ স্বরূপ গ্যালিয়াম আর্সেনাইড (GaAs) কেলাসের উল্লেখ করা যেতে পারে। GaAs কেলাসের গঠন জার্মেনিয়াম (Ge) (বা ডায়মন্ড) কেলাসের অনুরূপ। কিন্তু Ga ত্রিযোজী ও As পঞ্চযোজী মৌল। সুতরাং GaAs অণুর প্রত্যেক পরমাণুতে কার্বন পরমাণুর অনুরূপ গড়ে 4টি যোজক ইলেকট্রন আছে এবং দুটি পরমাণুর এই 4টি করে ইলেকট্রন 4টি সমযোজী বন্ধন গঠন করে। এর অর্থ আর্সেনিক পরমাণুর একটি যোজক ইলেকট্রন আংশিকভাবে গ্যালিয়াম পরমাণুর যোজক কক্ষিকে স্থানান্তরিত হয়। ফলে আর্সেনিক পরমাণুটি স্থায়ীভাবে ধনাত্মক আয়নে এবং গ্যালিয়াম পরমাণুটি স্থায়ীভাবে ঋণাত্মক আয়নে পরিবর্তিত হয় এবং এই দুটি আয়নের মধ্যে সমযোজী বন্ধনের পাশাপাশি একটি আয়নীয় বন্ধনও উৎপন্ন হয়। সুতরাং GaAs কেলাসের মিশ্র বন্ধনটি আংশিক সমযোজী এবং আংশিক আয়নীয়। অনুরূপ মিশ্র বন্ধন BeO ও ZnS কেলাসের মধ্যেও দেখা যায়।

আবার কার্বনের বহুরূপ গ্রাফাইট কেলাসে  $s^2p^2$  যোজক ইলেকট্রনগুলি একই সমতলে সমযোজী বন্ধন গঠন করে। এইরূপ সমতলগুলি একটির উপর একটি স্থাপিত হয়ে সম্পূর্ণ গ্রাফাইট কেলাস গঠন করে। দুটি সমতলের মধ্যে ভ্যান ডার ওয়ালস বন্ধন থাকে, যা সমযোজী বন্ধনের তুলনায় অত্যন্ত দুর্বল। এজন্য গ্রাফাইটের একটি স্তর অন্য একটি স্তরের উপর দিয়ে পিছলে যেতে পারে। গ্রাফাইটের এই ধর্মের জন্য একে শুষ্ক পিচ্ছিলকারী পদার্থ (dry lubricant) বলা হয়। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে গ্রাফাইট কেলাসে একই সঙ্গে সমযোজী ও ভ্যান ডার ওয়ালস এই উভয় প্রকার বন্ধনই উপস্থিত থাকে। এজন্য গ্রাফাইট একটি মিশ্র বন্ধন কেলাস। সেলেনিয়াম (Se) ও টেলুরিয়াম (Te) মৌলগুলিও গ্রাফাইটের অনুরূপ মিশ্র বন্ধন দ্বারা কেলাস গঠন করে।

## 10.10 আয়নীয় কেলাসের বন্ধন শক্তি নির্ণয় (Calculation of binding energy of ionic crystals)

গাণিতিক পদ্ধতিতে কেলাসের বন্ধন শক্তি নির্ণয় করা খুবই জটিল বিষয়। কিন্তু 1910 খ্রিস্টাব্দে বর্ন (Born) ও ম্যাডেলুঙ (Madelung) আয়নীয় কেলাসের বন্ধন শক্তি নির্ণয়ের একটি পদ্ধতি উদ্ভাবন করেন। পরবর্তীকালে বর্ন ও ম্যায়ার (Mayer) এই পদ্ধতির কিছু সংশোধন করেন। এই সংশোধিত পদ্ধতি অবলম্বন করে আয়নীয় কেলাসের (যেমন—NaCl কেলাসের) বন্ধন শক্তি কীরূপে নির্ণয় করা হয়, তা এখানে আলোচনা করা হল।

এই পদ্ধতিতে ধরা হয় যে একটি আয়নীয় কেলাসে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক আয়নগুলির মধ্যে কুলম্বীয় আকর্ষণ ও বিকর্ষণ বল ক্রিয়া করে, যা কেবল দুটি আয়নের আধানের মান ও এদের দূরত্বের উপর নির্ভর করে, কিন্তু কোনো দিকের উপর নির্ভর করে না। কুলম্বীয় আকর্ষণ ও বিকর্ষণের জন্য একটি কেলাসের মোট যে বন্ধন শক্তি হয়, তাকে ম্যাডেলুঙ শক্তি (Madelung শক্তি) বলে। ধরা হয় যে কেলাসের ম্যাডেলুঙ শক্তির তুলনায় অন্যান্য শক্তি, যেমন—ভ্যান ডার ওয়াল শক্তি, কেলাসের পৃষ্ঠতল শক্তি প্রভৃতি উপেক্ষণীয়। সুতরাং ম্যাডেলুঙ শক্তিকেই আয়নীয় কেলাসের মোট বন্ধন শক্তি বলা যায়।

একটি কেলাসের আয়নগুলির মধ্যে দু-প্রকার আকর্ষণ ও বিকর্ষণ বল কল্পনা করা যায়। যখন দুটি আয়ন পরস্পর থেকে দূরে থাকে, তখন এদের আধানগুলির মধ্যে কুলম্বীয় আকর্ষণ ও বিকর্ষণ বল ক্রিয়া করে। এই বলের পাল্লা (range) অনেক দূর পর্যন্ত ক্রিয়া করে। এজন্য এই বলকে দূর পাল্লার (long range) কুলম্বীয় বল বলে। এই বলের দরুন দুটি আয়নের মধ্যে যে স্থিতি শক্তি থাকে, তা হল  $\pm q^2/r$ , যেখানে (+) চিহ্ন দুটি আয়নের মধ্যে বিকর্ষণ শক্তি এবং (-) চিহ্ন দুটি আয়নের মধ্যে আকর্ষণ শক্তি নির্দেশ করে এবং  $r$  হল আয়ন দুটির কেন্দ্রের মধ্যে দূরত্ব। যখন দুটি আয়নের আধান ( $q$ ) সমধর্মীয় হয়, তখন তাদের মধ্যে বিকর্ষণ শক্তি থাকে এবং যখন আয়ন দুটির আধান বিপরীতধর্মীয় হয়, তখন তাদের মধ্যে আকর্ষণ শক্তি থাকে।

অপরপক্ষে দুটি আয়ন পরস্পরের কাছাকাছি হওয়ার ফলে যদি একটির ইলেকট্রন মেঘ অপরটির

ইলেকট্রন মেঘের দ্বারা অভিলম্ব (overlapped) হয়, তবে পাউলির বর্জননীতির ফলে দুটি ইলেকট্রন মেঘের মধ্যে বিকর্ষণ বল উৎপন্ন হয়। তা ছাড়া দুটি আয়নের ধনাত্মক নিউক্লিয়াসের মধ্যেও কুলম্বীয় বিকর্ষণ বল ক্রিয়া করে। এই বিকর্ষণ বলগুলি আয়নের যে ব্যাসার্ধ থাকে, তার চেয়ে বেশি দূরে ক্রিয়া করে না। এজন্য এই বিকর্ষণ বলকে স্বল্প পাল্লার বল (short range force) বলে এবং এই বলের দরুন আয়নদুটির যে বিকর্ষণ শক্তি লাভ হয়, তাকে স্বল্প পাল্লার বিকর্ষণ শক্তি বলে। বর্ন ও ম্যাডেলুঙ তাঁদের গণনায় স্বল্প পাল্লার বিকর্ষণ শক্তিকে  $\beta/r^n$  রাশির দ্বারা প্রকাশ করেছিলেন। এই রাশিতে  $\beta$  ও  $n$  হল দুটি ধ্রুবক, যাদের মান কেলাসের গঠনের উপর নির্ভরশীল। পরবর্তীকালে বর্ন ও ম্যায়ার কোয়ান্টাম গতিবিদ্যা পর্যালোচনা দ্বারা এই রাশিটির স্থানে  $\lambda \exp(-r/\rho)$  রাশিটি প্রয়োগ করেন। এই রাশিতে  $\lambda$  ও  $\rho$  হল দুটি ধ্রুবক, যাদের মান পরীক্ষার দ্বারা নির্ণয় করা যায়।

কেলাসের প্রত্যেক আয়নের উপর দূরপাল্লার ও স্বল্প পাল্লার বলগুলি ক্রিয়া করার ফলে আয়নগুলি স্থিতাবস্থায় থাকে এবং এদের বন্ধন শক্তি সর্বোচ্চ হয়। যেহেতু কেলাসের প্রত্যেক আয়নই বহুসংখ্যক আয়ন দ্বারা পরিবেষ্টিত হয়ে থাকে, সুতরাং একটি কেলাসের মোট বন্ধন শক্তি বা আসঞ্জনক শক্তি হল

$$U_i = \sum_j U_{ij}, (j \neq i) \quad \dots \dots (10.10)$$

যেখানে  $U_{ij}$  হল কেলাসের  $i$ -তম আয়ন ও  $j$ -তম আয়নের মধ্যে মোট বন্ধন শক্তি। এখানে  $U_{ii}$  রাশিটি বাদ দেওয়া হয়েছে। কারণ এটি দুটি ভিন্ন আয়নের মধ্যে বন্ধন শক্তি বোঝায় না। সুতরাং বর্ন ও ম্যায়ারের সংশোধন সহ  $U_{ij}$  রাশিটির রূপ হল

$$U_{ij} = \lambda \exp(-r_{ij}/\rho) \pm q^2/r_{ij} \quad \dots \dots (10.11)$$

যদি কেলাসটিতে  $N$ -সংখ্যক অণু থাকে যা  $N$ -সংখ্যক ধনাত্মক আয়ন ও  $N$  সংখ্যক ঋণাত্মক আয়ন দ্বারা তৈরি, তবে ল্যাটিসের মোট বন্ধন শক্তি হয়

$$U_{tot} = NU_i \quad \dots \dots (10.12)$$

এখানে কেলাসের পরিবর্তে ল্যাটিস শব্দটি ব্যবহার করা হয়েছে। এর কারণ হল, কেলাসের নির্দিষ্ট আকার থাকায়, এর পৃষ্ঠতলে অবস্থিত আয়নগুলির বন্ধন শক্তি কেলাসের ভিতরের আয়নগুলির বন্ধন শক্তির চেয়ে পৃথক হয়। কিন্তু (10.12) সমীকরণে কেলাসের পৃষ্ঠতলের এই প্রভাব উপেক্ষা করা হয়েছে। দ্বিতীয়ত কেলাসের মধ্যে মোট  $2N$ -সংখ্যক আয়ন থাকা সত্ত্বেও (10.12) সমীকরণে  $U_i$ -কে  $2N$ -এর পরিবর্তে  $N$ -দ্বারা গুণ করা হয়েছে। এর কারণ (10.10) সমীকরণে  $i$ -তম আয়ন ও  $j$ -তম আয়নের মধ্যে বন্ধন শক্তি  $U_{ij}$  এবং  $U_{ji}$  এই দুইভাবে গণনা হয়। কিন্তু বাস্তবিক পক্ষে দুটি নির্দিষ্ট আয়নের মধ্যে বন্ধন শক্তি কেবল একবারই গণনা করা ঠিক।

গণনার সুবিধার জন্য  $r_{ij}$  দূরত্বকে আমরা একটি মাত্রাহীন (dimensionless) রাশি  $p_{ij}$ -দ্বারা প্রকাশ করতে পারি

$$r_{ij} = p_{ij} R \quad \dots \dots (10.13)$$

যেখানে  $R$  হল দুটি নিকটতম আয়নের মধ্যে দূরত্ব।  $R$  প্রত্যেক কেলাসের জন্য ধ্রুবক, কিন্তু বিভিন্ন প্রকার কেলাসের জন্য এর মান বিভিন্ন।  $p_{ij}$ -কে আমরা দুটি আয়নের মধ্যে আপেক্ষিক দূরত্বও (specific distance) বলতে পারি। দুটি নিকটতম আয়নের ক্ষেত্রে আমরা পাই

$$r_{ij} = R, \quad \text{বা} \quad p_{ij} = 1$$

(10.13) সমীকরণ থেকে  $r_{ij}$ -র মান (10.11) সমীকরণে বসালে আমরা পাই

$$U_{ij} = \lambda \exp(-p_{ij} R/\rho) \pm q^2/p_{ij} R \quad \dots \dots (10.14)$$

এবং 
$$U_i = \sum [\lambda \exp(-p_{ij} R/\rho) \pm q^2/(p_{ij} R)], j \neq i \quad \dots \dots (10.15)$$

যদি ধরা যায় যে স্বল্প পাল্লার বিকর্ষণ বল কেবল নিকটতম দুটি আয়নের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য হয় এবং যদি ধরা হয় যে  $i$ -তম আয়নের নিকটতম প্রতিবেশী আয়নের সংখ্যা  $z$ , তাহলে (10.15) সমীকরণের স্থানে আমরা লিখতে পারি

$$\begin{aligned} U_i &= z \lambda \exp(-R/\rho) \pm \sum q^2/(p_{ij} R) \\ &= z \lambda \exp(-R/\rho) - \alpha q^2/R \quad \dots \dots (10.16) \end{aligned}$$

যেখানে  $\alpha$  হল একটি ধ্রুবক, যাকে ম্যাডেলুঙ ধ্রুবক (Madelung constant) বলা হয়। এই ধ্রুবকের রাশিমালা হল

$$\alpha = \sum_j \pm 1/p_{ij}, \quad j \neq i \quad \dots \dots (10.17)$$

কাজেই (10.12) সমীকরণ থেকে আয়নীয় ল্যাটিসের মোট বন্ধন শক্তির মান হয়

$$U_{tot} = N U_i = N [z \lambda \exp(-R/\rho) - \alpha q^2/R] \quad \dots \dots (10.18)$$

(10.18) সমীকরণে  $U_{tot}$ -এর মান  $R$ -এর মানের উপর নির্ভরশীল। এখন ল্যাটিসের মধ্যে আয়নগুলির স্থিতাবস্থায়

$$\frac{dU_{tot}}{dR} = 0 \quad \dots \dots (10.19)$$

যদি এই স্থিতাবস্থার জন্য  $R = R_0$  হয়, তবে, (10.19) ও (10.18) সমীকরণ দুটি থেকে আমরা পাই

$$\begin{aligned} \left. \frac{dU_{tot}}{dR} \right|_{R=R_0} &= -\frac{Nz\lambda}{\rho} e^{-R_0/\rho} + \frac{N\alpha q^2}{R_0^2} = 0 \\ e^{-R_0/\rho} &= \frac{\rho \alpha q^2}{z \lambda R_0^2} \quad \dots \dots (10.20) \end{aligned}$$

সুতরাং (10.20) সমীকরণের সাহায্যে (10.18) সমীকরণটির রূপ হয়



$$U_{\text{tot}} = N \left[ z\lambda \frac{\rho\alpha q^2}{x\lambda R_0^2} - \frac{\alpha q^2}{R_0} \right]$$

$$= -(N\alpha q^2 / R_0)(1 - \rho / R_0) \quad \dots \dots (10.21)$$

(10.21) সমীকরণের দুটি রাশির মধ্যে প্রথম রাশিটি (10.18) সমীকরণের দ্বিতীয় রাশির অনুরূপ। সুতরাং এই রাশিটি ল্যাটিসের ম্যাডেলুঙ শক্তির মান প্রকাশ করে। সুতরাং (10.21) সমীকরণের দ্বিতীয় রাশিটি দুটি আয়নের মধ্যে স্বল্পপাল্লার বিকর্ষণের জন্য ল্যাটিসের মোট শক্তির মান নির্দেশ করে। (10.21) সমীকরণ অনুযায়ী ল্যাটিসের প্রত্যেক অণুর গড় বন্ধন শক্তি হল

$$U = \frac{U_{\text{tot}}}{N} = -(\alpha q^2 / R_0)(1 - \rho / R_0) \quad \dots \dots (10.22)$$

(10.21) ও (10.22) সমীকরণ দুটি থেকে দেখা যাচ্ছে যে  $R_0$ ,  $\alpha$  এবং  $\rho$  জানা থাকলে এই সমীকরণ দুটির মান নির্ণয় করা যায়। ল্যাটিসের স্থিতিাবস্থায় দুটি আয়নের মধ্যে নিকটতম দূরত্ব  $R_0$  এক্স-রশ্মি পরীক্ষার দ্বারা নির্ণয় করা যায়। স্বল্প পাল্লার বিকর্ষণ বল ধ্রুবক  $\rho$  কেলাসের স্থিতিস্থাপকতার আয়তন গুণাঙ্ক (bulk modulus of elasticity) নির্ণয়ের মাধ্যমে স্থির করা যায়। সর্বোপরি ম্যাডেলুঙ ধ্রুবক  $\alpha$  ল্যাটিসের জ্যামিতিক গঠন থেকে গাণিতিকভাবে নির্ণয় করা যায়।

### 10.10.1 ম্যাডেলুঙ ধ্রুবকের মান নির্ণয় (Evaluation of the Madelung constant) :

একমাত্রিক কেলাসের ম্যাডেলুঙ ধ্রুবক নির্ণয় করা সহজ। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে কেলাসগুলি ত্রিমাত্রিক হয়। এরূপ কেলাসের ম্যাডেলুঙ ধ্রুবক নির্ণয় করা বেশ জটিল। এখানে প্রথমে আমরা একমাত্রিক আয়নীয় কেলাসের ম্যাডেলুঙ ধ্রুবক কীভাবে নির্ণয় করা যায়, তা আলোচনা করব। এর ফলে ম্যাডেলুঙ ধ্রুবক নির্ণয়ের পদ্ধতি সম্বন্ধে আমাদের কিছুটা ধারণা হবে। এরপর ত্রিমাত্রিক NaCl কেলাসের ম্যাডেলুঙ ধ্রুবক কীভাবে নির্ণয় করা যায়, তা আমরা আলোচনা করব।

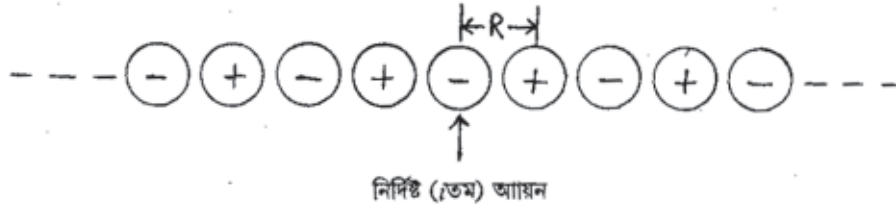
(a) একমাত্রিক আয়নীয় কেলাসের ম্যাডেলুঙ ধ্রুবকের মান নির্ণয় :

ধরা যাক, সরলতম একমাত্রিক আয়নীয় কেলাসের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক আয়নগুলি (10.7) চিত্র অনুযায়ী একটি সরলরেখার উপর একান্তরভাবে সাজানো আছে। যদি পরপর দুটি আয়নের মধ্যে দূরত্ব  $R$  ধরা হয়, তবে (10.17) সমীকরণ অনুযায়ী এক্ষেত্রে ম্যাডেলুঙ ধ্রুবকের মান হবে

$$\alpha = \sum_{j(j \neq i)} \pm \frac{1}{p_{ij}} = \left[ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right] \quad \dots \dots (10.23)$$

(10.23) সমীকরণে একটি ঋণাত্মক আয়নকে নির্দিষ্ট ( $i$ -তম) আয়ন ধরে তার সাপেক্ষে অন্যান্য আয়নের আপেক্ষিক দূরত্ব ( $p_{ij}$ ) গণনা করা হয়েছে। এই দূরত্বের শ্রেণিকে 2 দিয়ে গুণ করা হয়েছে। কারণ, চিত্রে নির্দিষ্ট আয়নের উভয় পাশেই একইভাবে আয়ন সাজানো আছে। এখানে একটি কথা উল্লেখযোগ্য যে যদিও

এখানে একটি ঋণাত্মক আয়নকে নির্দিষ্ট আয়ন ধরা হয়েছে, তবু কোনো ঋণাত্মক আয়নকেই যে সবসময় নির্দিষ্ট আয়ন হিসাবে ধরতে হবে, এমন কোনো নিয়ম নেই। অর্থাৎ যদি এই ঋণাত্মক আয়নের পরিবর্তে অন্য কোনো ধনাত্মক আয়নকে  $i$ -তম নির্দিষ্ট আয়ন হিসাবে ধরা হয় তবে ওই আয়নের সাপেক্ষে অন্যান্য আয়নের আপেক্ষিক দূরত্বের শ্রেণি (10.23) সমীকরণের অনুরূপ একই থাকবে।



চিত্র 10.7: ধনাত্মক ও ঋণাত্মক আয়নদ্বারা একান্তরভাবে সজ্জিত একমাত্রিক আয়নীয় কেলাসের ল্যাটিস

এখন আমরা জানি যে  $\ln(1+x)$  রাশিটি বিস্তার করলে আমরা পাই

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \dots \dots (10.20)$$

সুতরাং এই সমীকরণে  $x=1$  বসালে আমরা পাই

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \dots \dots$$

$$\therefore \alpha = 2 \ln 2 = 1.38 \quad \dots \dots (10.25)$$

(b) NaCl কেলাসের ক্ষেত্রে  $\alpha$ -র মান নির্ণয় :

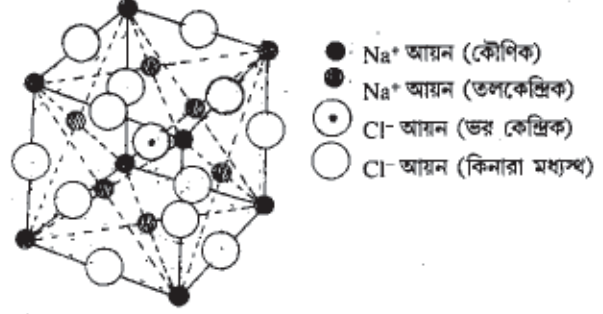
একমাত্রিক কেলাসের ক্ষেত্রে  $\alpha$ -র মান যত সহজে পাওয়া যায়, ত্রিমাত্রিক কেলাসের ক্ষেত্রে তা তত সহজে পাওয়া যায় না। একটি সরল ত্রিমাত্রিক কেলাস হিসাবে আমরা NaCl কেলাসের গঠন বিবেচনা করতে পারি। এই কেলাসের গঠন আপনি পূর্বে পাঠ করেছেন।  $\alpha$ -র মান গণনার সুবিধার জন্য এই কেলাসের গঠন পুনরায় (10.8) চিত্রে দেখানো হল। চিত্রে আপনি লক্ষ্য করুন যে প্রত্যেক  $\text{Cl}^-$  আয়ন 6টি নিকটতম প্রতিবেশী  $\text{Na}^+$  আয়ন দ্বারা পরিবেষ্টিত এবং এই আয়নগুলি আবার বাইরের দিকে নিকটতম দূরত্বে 12টি  $\text{Cl}^-$  আয়ন দ্বারা পরিবেষ্টিত, যা আবার এর পরবর্তী নিকটতম স্তরে 8টি  $\text{Na}^+$  আয়ন দ্বারা পরিবেষ্টিত। এভাবে NaCl কেলাসের গঠন থেকে আমরা পরপর স্তরগুলিতে একান্তরভাবে সজ্জিত  $\text{Cl}^-$  ও  $\text{Na}^+$  আয়নগুলির সংখ্যা নিরূপণ করতে পারি। যেহেতু কেন্দ্রীয়  $\text{Cl}^-$  আয়নকে বাইরের দিকে ক্রমাঙ্কে পরিবেষ্টনকারী আয়ন স্তরগুলির আপেক্ষিক দূরত্ব যথাক্রমে  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$  প্রভৃতি, সুতরাং ম্যাডেলুঙ ধ্রুবকের মান হবে

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{6}{\sqrt{1}} - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{6}{\sqrt{4}} + \frac{24}{\sqrt{5}} - \dots \\ &= 6.0 - 8.485 + 4.62 - 3.0 + 10.733 - \dots \end{aligned}$$

কিন্তু দেখা যাচ্ছে যে এই শ্রেণিটি ঠিক অভিসারী নয় অর্থাৎ শ্রেণিটির রাশিগুলির মান ক্রমাঙ্কে কমে কমে শূন্যের দিকে যাচ্ছে না। সুতরাং এই শ্রেণিটির সঠিক মান নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

এই অসুবিধা দূর করার জন্য ইভজেন (Evjen) নিস্তড়িত আয়নগুচ্ছের ধারণা গঠন করেন। অর্থাৎ তিনি কেলাসের এমন একটি অংশ বেছে নেন যে তার অন্তর্গত আয়নগুলির মোট আধানের মান শূন্য। ইভজেন নিস্তড়িত আয়নগুচ্ছের ধারণা এইজন্যই গ্রহণ করেন যে এরূপ একটি গুচ্ছের মোট স্থিতিশক্তি দূরত্ব বৃদ্ধির সঙ্গে অত্যন্ত দ্রুতহারে কমে। (10.7)

চিত্রে NaCl কেলাসের যে অংশটি দেখানো হয়েছে, তাকে একটি নিস্তড়িত আয়নগুচ্ছ বলা যায়। কারণ চিত্রের ঘনকটির ৪টি কৌণিক বিন্দুর



চিত্র 10.8: ঘনকাকার NaCl কেলাসের ভরকেন্দ্রস্থ Cl<sup>-</sup> আয়নকে বেটন করে Na<sup>+</sup> আয়ন ও Cl<sup>-</sup> আয়নের বিন্যাস

প্রত্যেকটিতে একটি Na<sup>+</sup> আয়ন আছে। তা ছাড়া এই ঘনকের ৬টি পৃষ্ঠতলের প্রত্যেকটির কেন্দ্রে একটি Na<sup>+</sup> আয়ন আছে। এই আয়নগুলি ঘনকের ভরকেন্দ্রে অবস্থিত Cl<sup>-</sup> আয়নটিকে পরিবেষ্টন করে থাকে। এছাড়া ঘনকটির 12টি কিনারার প্রত্যেকটির মধ্য বিন্দুতে একটি Cl<sup>-</sup> আয়ন আছে। ঘনকটির প্রত্যেক কৌণিক বিন্দু ৪টি ঘনকের অংশ। সুতরাং প্রত্যেক ঘনক এর প্রত্যেক কৌণিক বিন্দুতে অবস্থিত Na<sup>+</sup> আয়নের একক ধনাত্মক আধানের  $\frac{1}{8}$  অংশ কার্যকরীভাবে পায়। যেহেতু প্রত্যেক ঘনকে মোট ৪টি কৌণিক বিন্দু আছে, সুতরাং এই কৌণিক বিন্দুগুলিতে অবস্থিত Na<sup>+</sup> আয়নগুলির জন্য প্রত্যেক ঘনকের কার্যকরীভাবে

মোট আধান প্রাপ্তি  $= +\frac{1}{8} \times 8 = +1$ । ঘনকের প্রত্যেক পৃষ্ঠতলের কেন্দ্রে যে Na<sup>+</sup> আয়নটি থাকে, তা

পাশাপাশি দুটি ঘনকের সাধারণ পৃষ্ঠতলের অংশ। সুতরাং ঘনকদুটির প্রত্যেকটি এই আধানের  $\frac{1}{2}$  অংশ পায়। যেহেতু প্রত্যেক ঘনকের ৬টি পৃষ্ঠতল আছে, সুতরাং এই তলগুলিতে অবস্থিত ধনাত্মক Na<sup>+</sup> আয়নের

জন্য প্রত্যেক ঘনকের মোট কার্যকরী আধান প্রাপ্তি  $+\frac{1}{2} \times 6 = +3$ । আবার ঘনকের প্রত্যেক কিনারা 4টি

ঘনকের অংশ। সুতরাং এই কিনারার মধ্যবিন্দুতে যে Cl<sup>-</sup> আয়নটি থাকে, তার একক ঋণাত্মক আধান কার্যকরীভাবে 4টি ঘনকের অংশ। যেহেতু প্রত্যেক ঘনকের 12টি কিনারা থাকে, সুতরাং প্রত্যেক ঘনক এই

কিনারাগুলি থেকে কার্যকরীভাবে মোট  $-\frac{1}{4} \times 12 = -3$ টি আধান পায়। এছাড়া প্রত্যেক ঘনকের ভরকেন্দ্রে

যে একটি Cl<sup>-</sup> আয়ন আছে, তার ঋণাত্মক আধান অন্য কোনো ঘনকের অংশ নয়। সুতরাং প্রত্যেক ঘনকের মোট কার্যকরী আধানের মান হল

$$+1 + 3 - 3 - 1 = 0$$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে এই ঘনকটি মোট 14টি Na<sup>+</sup> আয়ন ও 13টি Cl<sup>-</sup> আয়নের নিস্তড়িত আয়নগুচ্ছ।

অবশ্য চিত্রের ঘনকটির  $\text{Na}^+$  আয়নগুলির স্থানে  $\text{Cl}^-$  আয়ন এবং  $\text{Cl}^-$  আয়নগুলির স্থানে  $\text{Na}^+$  আয়ন বসালে, যে নতুন আয়নবিন্যাস হয়, সেক্ষেত্রেও অনুরূপ ঘনকগুলির মোট কার্যকরী আধানের মান শূন্য হবে। এটি আপনি নিজে পরীক্ষা করে দেখতে পারেন।

প্রদত্ত চিত্রের ঘনকটির ভরকেন্দ্রের  $\text{Cl}^-$  আয়নটিকে নির্দিষ্ট বা মূল আয়ন ধরে এই নিস্তড়িৎ আয়নগুচ্ছটির জন্য  $\alpha$ -র যে মান হয়, তা হল

$$\alpha = \sum \pm 1/p_{ij} = \frac{6/2}{\sqrt{1}} - \frac{12/4}{\sqrt{2}} + \frac{8/8}{\sqrt{3}} = 1.46 \quad \dots (10.26)$$

(10.26) সমীকরণের ডান পার্শ্বে যে তিনটি রাশি আছে, তার প্রথম রাশিটি ভরকেন্দ্রের  $\text{Cl}^-$  আয়নটিকে ঘিরে এর নিকটতম দূরত্বে যে 6টি তলকেন্দ্রিক  $\text{Na}^+$  আয়ন আছে, সেগুলির জন্য দ্বিতীয় রাশিটি পরবর্তী দূরত্বে যে কিনারার 12টি  $\text{Cl}^-$  আয়ন আছে, সেগুলির জন্য, এবং তৃতীয় রাশিটি ভরকেন্দ্রকে ঘিরে যে  $\text{Na}^+$  আয়নের দ্বিতীয় স্তর আছে, সেগুলির জন্য  $\alpha$ -র অংশের মান বোঝায়। চিত্রের নিস্তড়িৎ আয়নগুচ্ছের ঘনকটিকে চারপাশ থেকে অনুরূপ 16টি ঘনক দ্বারা সম্পূর্ণ ঘেরা যায়। এই দ্বিতীয় স্তরের ঘনকগুলির জন্য (10.26) সমীকরণের  $\alpha$ -র মানের কিছুটা পরিবর্তন হয়। এই দুটি স্তরের জন্য গণনা করলে দেখা যায় যে এই মান হল

$$\alpha = 1.75$$

স্তরের সংখ্যা এভাবে ধাপে ধাপে বাড়ালে দেখা যায় যে তৃতীয় বা চতুর্থ স্তরের পর  $\alpha$ -র মানের আর বিশেষ কোনো পরিবর্তন হয় না। এভাবে  $\text{NaCl}$ ,  $\text{CsCl}$ ,  $\text{ZnS}$  (জিঙ্ক ব্রেন্ড) প্রভৃতি আয়নীয় কেলাসগুলির জন্য ম্যাডেলুঙ ধ্রুবকের চূড়ান্ত মান নির্ণয় করা যায়। এই মানগুলি হল

কেলাস	$\alpha$
$\text{NaCl}$	1.747565
$\text{CsCl}$	1.762675
$\text{ZnS}$	1.6381

### 10.10.2 বিকর্ষণ বলের পাল্লা নির্ণয় (Determination of the range of the short range repulsive force)

আমরা জানি যে পদার্থের আয়তন গুণাঙ্কের (B) সংজ্ঞা হল

$$B = -\frac{dp}{dV/V} \quad \dots \dots (10.27)$$

এখানে  $dp$  হল চাপের পরিবর্তন যার দ্বারা  $V$  আয়তনযুক্ত পদার্থের আয়তন  $-dV/V$  পরিবর্তিত হয়। আয়তন পরিবর্তনটি ঋণাত্মক ধরার কারণ হল যে কোনো পদার্থের উপর চাপ বৃদ্ধি করা হলে এর আয়তন হ্রাস পায়।

যদি আমরা পদার্থটির ব্লুখতাপ পরিবর্তন (adiabatic change), অর্থাৎ যে পরিবর্তনে বাইরের সঙ্গে পদার্থটির তাপের আদানপ্রদান হয় না, সেবুপ পরিবর্তন বিবেচনা করি, তবে তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র অনুযায়ী পদার্থটির অভ্যন্তরীণ শক্তির ( $U$ ) যে পরিবর্তন হবে, তা হল

$$dU = -pdV$$

$$\text{বা, } \frac{dU}{dV} = -p$$

$$\text{বা, } -\frac{dp}{dV} = \frac{d^2U}{dV^2}$$

সুতরাং (10.27) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$B = -\frac{dp}{dV/V} = V \frac{d^2U}{dV^2} \quad \dots \dots (10.28)$$

এখন আমরা লিখতে পারি

$$\frac{dU}{dV} = \frac{dU}{dR} \cdot \frac{dR}{dV}$$

$$\text{বা, } \frac{d^2U}{dV^2} = \frac{d^2U}{dR^2} \left( \frac{dR}{dV} \right)^2 + \frac{dU}{dR} \times \frac{d^2R}{dV^2} \quad \dots \dots (10.29)$$

এখন কেলাসের দুটি আয়ন যখন স্থিতাবস্থায় থাকে, তখন  $R = R_0$  এবং

$$\frac{dU}{dR} = 0$$

সুতরাং (10.29) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\frac{d^2U}{dV^2} = \frac{d^2U}{dR^2} \left( \frac{dR}{dV} \right)^2_{R=R_0}$$

$$\text{বা, } B = V \frac{d^2U}{dR^2} \left( \frac{dR}{dV} \right)^2_{R=R_0} \quad \dots \dots (10.30)$$

এখন যদি আমরা NaCl কেলাসের গঠন বিবেচনা করি, তাহলে আমরা জানি যে এই কেলাসের ল্যাটিস ধুবক  $a = 2R$  এবং 4টি অণুর দ্বারা কেলাসের ক্ষুদ্রতম একক ঘনক গঠিত হয়। সুতরাং এই একক ঘনকের আয়তন  $= a^3 = 8R^3$  এবং কেলাসের যে আয়তন  $N$ -সংখ্যক অণু বর্তমান, তা হল

$$V = Na^3/4 = 2NR^3 \quad \dots \dots (10.31)$$

$$\therefore \frac{dV}{dR} = 6NR^2 \quad \dots \dots (10.32)$$

(10.31) ও (10.32) সমীকরণের মান (10.30) সমীকরণে স্থাপন করা হলে আমরা পাই

$$B = 2NR_0^3 \cdot \frac{1}{(6NR_0^2)^2} \cdot \frac{d^2U}{dR^2} \Bigg|_{R=R_0}$$

$$\text{বা, } B = \frac{1}{18NR_0} \cdot \frac{d^2U}{dR^2} \Bigg|_{R=R_0} \quad \dots \dots (10.33)$$

কিন্তু (10.18) সমীকরণে  $U_{\text{tot}}$ -কে  $R$ -এর সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই

$$\frac{dU_{\text{tot}}}{dR} = -\frac{Nz\lambda}{\rho} e^{-R/\rho} + \frac{N\alpha q^2}{R^2}$$

$$\text{বা, } \frac{d^2U_{\text{tot}}}{dR^2} = \frac{Nz\lambda}{\rho^2} e^{-R/\rho} - \frac{2N\alpha q^2}{R^3} \quad \dots \dots (10.34)$$

সুতরাং (10.33) সমীকরণ অনুযায়ী আমরা পাই

$$B = \frac{1}{18NR_0} \left[ \frac{Nz\lambda}{\rho^2} e^{-R_0/\rho} - \frac{2N\alpha q^2}{R_0^3} \right] \quad \dots \dots (10.35)$$

কিন্তু (10.20) সমীকরণ অনুযায়ী

$$e^{-R_0/\rho} = \frac{\rho\alpha q^2}{z\lambda R_0^2}$$

কাজেই, (10.35) সমীকরণটিকে লেখা যায়

$$B = \frac{1}{18NR_0} \left[ \frac{Nz\lambda}{\rho^2} \cdot \frac{\rho\alpha q^2}{z\lambda R_0^2} - \frac{2N\alpha q^2}{R_0^3} \right]$$

$$\text{বা, } B = \frac{\alpha q^2}{18R_0^3} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{2}{R_0} \right) \quad \dots \dots (10.36)$$

সুতরাং পরীক্ষার দ্বারা প্রাপ্ত  $B$  ও  $R_0$ -র মান থেকে (10.36) সমীকরণ দ্বারা  $\rho$  নির্ণয় করা যায়।

## 10.11 সমযোজী কেলাসের বন্ধন শক্তি নির্ণয় (Calculation of binding energy of covalent crystals)

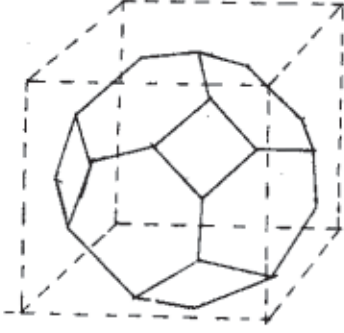
সমযোজী কেলাসের বন্ধন শক্তি সহজ গণনার দ্বারা নির্ণয় করা যায় না। এর কারণ এই বন্ধন শক্তি কেবল সমযোজী বন্ধনগুলির বন্ধন শক্তির যোগফল নয়, এর সঙ্গে বিভিন্ন বন্ধনের মধ্যে ক্রিয়ার ফলে যে শক্তি অর্জিত হয়, তাও বিবেচনাযোগ্য। এই গণনাপদ্ধতির জটিলতার জন্য এখানে তা আলোচনা করা হল না। তবে কিছু কিছু ক্ষেত্রে দেখা যায় যে এই মোট বন্ধন শক্তি প্রত্যেক অণুর সমযোজী বন্ধন শক্তির যোগফলের প্রায় সমান। অর্থাৎ এসব ক্ষেত্রে বিভিন্ন বন্ধনের মধ্যে ক্রিয়া অত্যন্ত কম। বিশেষত ডায়মন্ড ও বিভিন্ন জৈব যৌগে C-C বন্ধনের ক্ষেত্রে এটি প্রযোজ্য এবং এই শক্তি প্রায় 3.6 eV।

## 10.12 ধাতব কেলাসের বন্ধন শক্তি নির্ণয় (Calculation of binding energy of metallic crystals)

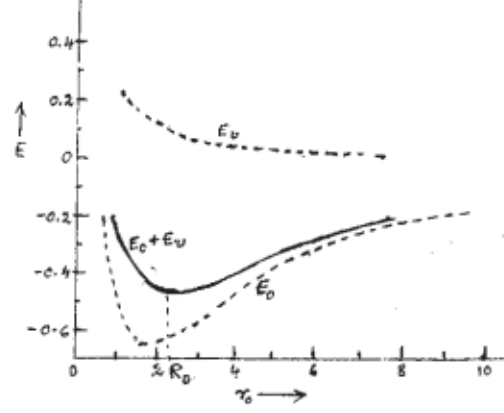
ধাতব কেলাসের বন্ধন শক্তি নির্ণয়ের জন্য কেলাসটিকে ভিগনার-সাইৎজ (Wigner-Seitz) পদ্ধতিতে অঙ্কিত অসংখ্য বহুতলকের (অর্থাৎ বহুতলযুক্ত ঘনর) সমষ্টিরূপে কল্পনা করতে পারি। এই পদ্ধতিতে ধাতুর অভ্যন্তরস্থ একটি পরমাণুর কেন্দ্র নিকটতম প্রতিবেশী অন্যান্য পরমাণুর কেন্দ্রের সঙ্গে বিভিন্ন সরলরেখার দ্বারা যুক্ত করা হয় এবং প্রত্যেক সরলরেখার মধ্যবিন্দুর উপর একটি লম্বসমতল অঙ্কন করা হয়। এই লম্বসমতলগুলি দ্বারা যে আয়তন আবদ্ধ হয়, তাকেই ভিগনার-সাইৎজ বহুতলক (polyhedron) বলে। একটি bcc কেলাসের ক্ষেত্রে ৪টি তলদ্বারা এরূপ একটি বহুতলক গঠিত হয়। সেজন্য একে অষ্টতলক (octahedron) বলে। (10.9) চিত্রে একটি bcc অষ্টতলকের গঠন দেখানো হল। প্রত্যেক ভিগনার-সাইৎজ ধাতব বহুতলকে একটি ধাতব ধনাত্মক আয়ন ও একটি ষোড়ক ইলেকট্রন থাকে। এই ইলেকট্রনটি ধাতব আয়নের সঙ্গে স্থায়ীভাবে যুক্ত নয়। অর্থাৎ এটি আংশিক সময়ের জন্য ধাতব আয়নের সঙ্গে যুক্ত হয়ে একটি পরমাণু গঠন করে এবং আংশিক সময়ের জন্য ওই পরমাণু থেকে মুক্ত হয়ে আন্তঃআয়নীয় শূন্যস্থানে গ্যাসীয় অণুর অনুরূপে বিচরণ করে। সুতরাং যতক্ষণ পর্যন্ত না অপর কোনো মুক্ত ইলেকট্রন ওই বহুতলকে প্রবেশ করে, ততক্ষণ পর্যন্ত বহুতলকের আয়নটি ষোড়ক ইলেকট্রন বর্জিত অবস্থায় থাকে। সুতরাং প্রত্যেক বহুতলকের বন্ধন শক্তি ( $U$ ) তিন প্রকার শক্তির সমষ্টি। এই শক্তিগুলি হল—(1) ধনাত্মক আয়নের তড়িৎক্ষেত্রের মধ্যে থাকায় ইলেকট্রনের স্থিতিশক্তি ( $E_0$ ), (2) মুক্ত অবস্থায় ইলেকট্রনের গড় গতিশক্তি ( $E_V$ ) এবং (3) একটি মুক্ত পরমাণুকে আয়নিতকরণ শক্তি ( $E_1$ )। কাজেই

$$U = -(E_0 + E_V + E_1) \quad \dots \dots (10.37)$$

এদের মধ্যে  $E_0$  ঋণাত্মক এবং  $E_V$  ও  $E_1$  ধনাত্মক। সুতরাং  $E_V$  ও  $E_1$  যত বৃদ্ধি পায় প্রত্যেক বহুতলকের বন্ধন তত কম শক্তিশালী হয়। একটি কেলাসে যদি  $N$ -সংখ্যক পরমাণু থাকে, তবে কেলাসটির মোট বন্ধন শক্তি হবে  $NU$ । কুলম্বীয় তড়িৎক্ষেত্রে ইলেকট্রনের স্থিতিশক্তি  $E_0$  ও ধনাত্মক আয়নের স্থিতিশক্তি  $E_1$  সহজেই গণনা করা যায়। তা ছাড়া ষোড়ক ইলেকট্রনগুলিকে মুক্ত ইলেকট্রন হিসাবে ধরে নিলে প্রত্যেক ইলেকট্রনের গড় গতিশক্তি হয়



চিত্র 10.9: ভিগনার-সাইন্স পদ্ধতিতে bcc ল্যাটিসে গঠিত পারমাণবিক অষ্টতলক



চিত্র 10.10: সোডিয়াম কেলাসের  $E_v$ ,  $E_0$ ,  $E_0 + E_v$  বক্র (রাউডবার্গ এককে)  $r_0$  (পারমাণবিক এককে) সাপেক্ষে।

$$E_v = \frac{3}{5} E_F,$$

যেখানে  $E_F$  হল প্রত্যেক ইলেকট্রনের ফার্মি শক্তি (Fermi energy)। এই শক্তির রাশিমালা হল

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

যদি প্রত্যেক বহুতলকে  $r_0$  ব্যাসার্ধযুক্ত একটি গোলক হিসাবে ধরা যায়, তবে এর আয়তন  $= \frac{4\pi}{3} r_0^3 = 1/n$ ।

$$\therefore E_v = \frac{3}{10} \left( \frac{\hbar^2}{m r_0^2} \right) \left( \frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \quad \dots (10.38)$$

(10.10) চিত্রে একটি ইলেকট্রনের স্থিতিশক্তি ও গড় গতিশক্তি এবং এদের যোগফল বহুতলকের ব্যাসার্ধ  $r_0$ -র বৃদ্ধির সঙ্গে কীভাবে পরিবর্তিত হয়, তা দেখানো হল।

$r_0 = R_0$  দূরত্বে  $E_0 + E_v$  বক্রটির মান সর্বনিম্ন হয়। এই দূরত্বই কেলাসটির স্থিতাবস্থা নির্দেশ করে। Li, Na ও K কেলাসের স্থিতাবস্থায় এদের মোট পারমাণবিক বন্ধন শক্তি kg-cal/mole এককে নীচে দেওয়া হল। দেখা যাচ্ছে যে গাণিতিক গণনাদ্বারা প্রাপ্ত বন্ধন শক্তির মান পরীক্ষা লব্ধ বন্ধন শক্তির মানের প্রায় সমান। অর্থাৎ এই কেলাসগুলির ক্ষেত্রে গাণিতিক গণনা পদ্ধতিকে নির্ভুল ধরা যায়। তবে আরও নির্ভুল গণনা করতে হলে ইলেকট্রনের ঘূর্ণনজাত শক্তি ও ভ্যান ডার ওয়াল্‌স শক্তিও বিবেচনা করা প্রয়োজন। জটিলতা এড়ানোর জন্য এই আলোচনা এখানে করা হল না।

বন্ধনশক্তি (V) (kg-cal/mole)	Li	Na	K
গণনালব্ধ	36.2	24.5	16.5
পরীক্ষালব্ধ	39.0	26.0	23.0



## 10.13 ভ্যান ডার ওয়াল্‌স কেলাসের বন্ধন শক্তি নির্ণয় (Calculation of binding energy of Van der Walls' crystal)

(10.7) পরিচ্ছেদে আপনি ভ্যান ডার ওয়াল্‌স বন্ধন সম্পর্কিত আলোচনা পাঠ করেছেন। এখন আমরা এই বন্ধন দ্বারা উৎপন্ন কেলাসের মোট বন্ধন শক্তি গণনা করা পদ্ধতি আলোচনা করব। He, Ne, Ar, প্রভৃতি নিষ্ক্রিয় গ্যাস পরমাণুগুলিকে একপরমাণুক অণু বলা হয়। H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, CO প্রভৃতি অণুগুলি দ্বিপরমাণুক অণু। অনুরূপে O<sub>3</sub>, CO<sub>2</sub>, SO<sub>2</sub> প্রভৃতি অণুগুলি ত্রিপরমাণুক, NH<sub>3</sub>, N<sub>2</sub>O<sub>2</sub> প্রভৃতি চতুর্পরমাণুক। এরূপ অণুগুলির সাধারণ বৈশিষ্ট্য এই যে এগুলি সাধারণ উষ্ণতায় গ্যাসীয়, কিন্তু কমবেশি 100 K উষ্ণতায় কঠিন কেলাস গঠন করে। এদের মধ্যে একপরমাণুক অণুগুলি ছাড়া অন্যান্য অণুগুলি সবই সমযোজী বন্ধন গঠন করে। এই একপরমাণুক ও সমযোজী অণুগুলির সর্ববহিস্থ কক্ষিকগুলি (orbitals) গোলায় প্রতিসাম্যবিশিষ্ট এবং ইলেকট্রন দ্বারা সম্পৃক্ত থাকে। ফলে অণুগুলির মধ্যে ভ্যান ডার ওয়াল্‌স আকর্ষণ বল ও স্বল্পপাল্লার বিকর্ষণ বল ছাড়া অন্য কোনো বল ক্রিয়া করে না। এই অণুগুলি এজন্য সাধারণত ঘন-সংবন্ধ fcc কেলাস গঠন করে। কেবল He<sup>3</sup> ও He<sup>4</sup> কেলাসগুলি এর ব্যতিক্রম।

এখন ধরা যাক, একটি কেলাসে  $N$ -সংখ্যক অণু আছে। এখন যদি এর  $i$ -তম ও  $j$ -তম অণুর মধ্যে আকর্ষণ-বিকর্ষণ ক্রিয়ার ফলে  $i$ -তম অণুর বন্ধন শক্তি  $U_i$  ধরা হয়, তবে আমরা লিখতে পারি

$$U_i = \sum_{j(j \neq i)} U_{ij} \quad \dots \dots (10.39)$$

এবং কেলাসের মোট বন্ধন শক্তি

$$U_{\text{tot}} = \frac{1}{2} N U_i = \frac{1}{2} N \sum_{j(j \neq i)} U_{ij} \quad \dots \dots (10.40)$$

যেহেতু একই অণুর এর নিজের সঙ্গে আকর্ষণ-বিকর্ষণ ক্রিয়ার অর্থ হয় না, সেজন্য (10.39) সমীকরণে  $j \neq i$  শর্তটি আরোপ করা হয়েছে। তা ছাড়া একজোড়া অণুর আকর্ষণ-বিকর্ষণ ক্রিয়া হয়। সেজন্য

(10.40) সমীকরণে  $N$ -এর পূর্বে  $\frac{1}{2}$  উৎপাদকটি ব্যবহার করা হয়েছে।

(a) ভ্যান ডার ওয়াল্‌স আকর্ষণ :

প্রথমে অণুগুলির মধ্যে ভ্যান ডার ওয়াল্‌স আকর্ষণজনিত বন্ধন শক্তি গণনা করা যাক। ধরা যাক,  $i$ -তম অণুর তড়িৎ-দ্বিমেরু ভ্রামক  $p_i$ । ধরা যাক, এই ভ্রামক  $j$ -তম অণুর কেন্দ্রে  $E$  তড়িৎক্ষেত্র উৎপন্ন করে। যদি  $j$ -তম অণুটি  $i$ -তম অণু থেকে  $r_{ij}$  দূরত্বে থাকে, তবে এই তড়িৎক্ষেত্রের মান হল

$$E = \frac{2p_i}{r_{ij}^3} \quad \dots \dots (10.41)$$

এই তড়িৎক্ষেত্র  $j$ -তম অণুতে একটি তাৎক্ষণিক তড়িৎ আবেশ উৎপন্ন করবে, যার তড়িৎ-দ্বিমেরু আমক হল

$$p_j = \alpha E = \frac{2\alpha p_i}{r_{ij}^3} \quad \dots \dots (10.42)$$

এখানে  $\alpha$ -কে বলা হয়  $j$ -তম অণুর ইলেকট্রনীয় মেরুভবন ক্ষমতা (electronic polarizability)।

মেরুভবনের দরুন দুটি অণুর মধ্যে আকর্ষণ বল ক্রিয়া করে। এই আকর্ষণের দরুন দুটি অণুর প্রত্যেকটি যে বন্ধন শক্তি লাভ করে, তার মান  $-Ep_j$  ধরা যায়। অর্থাৎ

$$U_{\text{আকর্ষণ}} = -Ep_j = -\frac{4\alpha p_i^2}{r_{ij}^6} = -\frac{C}{r_{ij}^6} \quad \dots \dots (10.43)$$

প্রত্যেক অণুর ক্ষেত্রে  $\alpha$  ও  $p_i$  ধ্রুবক। সুতরাং  $4\alpha p_i^2 = C$  (= একটি ধ্রুবক)। নিষ্ক্রিয় গ্যাসের ক্ষেত্রে দেখা যায় যে  $C \approx 10^{-58} \text{ erg.cm}^6$ । (10.43) সমীকরণ দ্বারা দুটি অণুর মধ্যে তড়িৎ-দ্বিমেরুর দরুন যে আকর্ষণ শক্তি পাওয়া যায়, তাকেই ভ্যান ডার ওয়াল্‌স আকর্ষণ শক্তি বলে। এই শক্তিকে পরিবর্তনশীল দ্বিমেরুর আকর্ষণ শক্তি (fluctuating dipole attraction energy), বিচ্ছুরণ শক্তি (dispersion energy) বা লন্ডন আকর্ষণ শক্তিও (London attraction energy) বলে।

(b) স্বল্পপাল্লার বিকর্ষণ :

আমরা পূর্বেই আলোচনা করেছি যে দুটি পরমাণুর কক্ষ যদি একটি আর-একটিকে অভিলিপ্ত করে, তবে এদের মধ্যে একটি স্বল্প পাল্লার বিকর্ষণ বল ক্রিয়া করে। এই স্বল্প পাল্লার বলের দরুন প্রত্যেক পরমাণু যে স্থিতিশক্তি লাভ করে, তা সাধারণভাবে  $B/r_{ij}^{12}$  বা  $\lambda_{\text{exp}}(-r_{ij}/\rho)$  রাশির দ্বারা প্রকাশ করা যায়। পরীক্ষামূলকভাবে দেখা যায় যে দুটি ভ্যান ডার ওয়াল্‌স অণুর মধ্যে যে স্বল্প পাল্লার বিকর্ষণ বল ক্রিয়া করে, তার জন্য  $i$ -তম অণুর স্বল্প পাল্লার বিকর্ষণ শক্তি  $U_{\text{বিকর্ষণ}}$  রাশির দ্বারা প্রকাশ করা যায়, যেখানে

$$U_{\text{বিকর্ষণ}} = \frac{B}{r_{ij}^{12}} \quad \dots \dots (10.44)$$

এবং  $B$  একটি ধ্রুবক।

(10.43) ও (10.44) সমীকরণ দুটি থেকে  $i$ -তম অণুর কার্যকরী বন্ধন শক্তি হল

$$\begin{aligned} U_{ij} &= \frac{B}{r_{ij}^{12}} - \frac{C}{r_{ij}^6} \\ &= 4 \epsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^6 \right] \quad \dots (10.45) \end{aligned}$$

যেখানে  $4 \in \sigma^{12} = B$ , এবং  $4 \in \sigma^6 = C$ । (10.45) সমীকরণের  $\epsilon$  এবং  $\sigma$  পরীক্ষামূলকভাবে নির্ণয় করা হয়। (10.45) সমীকরণের বন্ধন শক্তিকে লেনার্ড-জোন্স স্থিতিশক্তি (Lennard-Jones potential energy) বলে। (10.11) চিত্রে দূরত্বের উপর এই স্থিতিশক্তির নির্ভরশীলতা দেখানো হয়েছে।

(10.45) সমীকরণ অনুযায়ী N-সংখ্যক অণুযুক্ত ল্যাটিসের মোট বন্ধন শক্তি হল

$$U_{\text{tot}} = \frac{1}{2} N (4 \epsilon) \sum_{j(j \neq i)} \left[ \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^6 \right] \dots (10.46)$$

এখন (10.13) সমীকরণ অনুযায়ী  $r_{ij} = p_{ij} R$  বসালে আমরা পাই

$$U_{\text{tot}} = 2N \epsilon \sum_{j(j \neq i)} \left[ \left( \frac{\sigma}{p_{ij} R} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{p_{ij} R} \right)^6 \right] \dots (10.47)$$

fcc ল্যাটিসের ক্ষেত্রে দেখানো যায় যে

$$\sum_{j(j \neq i)} p_{ij}^{-12} = 12.131 \text{ এবং } \sum_{j(j \neq i)} p_{ij}^{-6} = 14.454$$

সুতরাং fcc ল্যাটিসের ক্ষেত্রে আমরা পাই

$$U_{\text{tot}} = 2N \epsilon \left[ 12.131 \left( \frac{\sigma}{R} \right)^{12} - 14.454 \left( \frac{\sigma}{R} \right)^6 \right] \dots (10.48)$$

ল্যাটিসের সাম্যাবস্থায়  $\frac{dU_{\text{tot}}}{dR} = 0$  এবং  $R = R_0$ ।

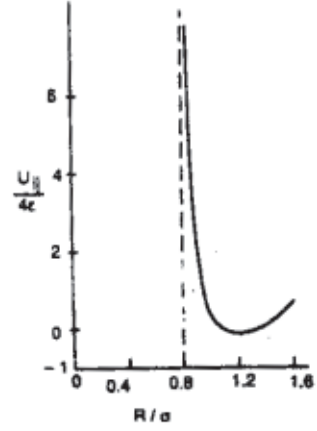
$\therefore$  (10.48) সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{dU_{\text{tot}}}{dR} = 2N \epsilon \left[ -12 \times 12.131 \frac{\sigma^{12}}{R^{13}} + 6 \times 14.454 \frac{\sigma^6}{R^7} \right] = 0$$

$$\text{বা, } R_0/\sigma = 1.09 \dots \dots (10.49)$$

কিন্তু Ne, Ar, Kr, ও Xe-এর ক্ষেত্রে  $R_0/\sigma$ -র মান স্বাধীনভাবে নির্ণয় করলে দেখা যায় যে এই মানগুলি হল

	Ne	Ar	Kr	Xe
$R_0/\sigma$	1.14	1.11	1.10	1.09



চিত্র 11.11 : লেনার্ড জোন্সের স্থিতিশক্তির লেখচিত্র।  $R/\sigma$ -র মান 1.2 হলে ঐ স্থিতিশক্তির মান সর্বনিম্ন হয়।

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে স্বাধীনভাবে নির্ণীত এই মানগুলি (10.49) সমীকরণ দ্বারা প্রাপ্ত মানের খুবই কাছাকাছি বা সমান। এ থেকে (10.45) সমীকরণ দ্বারা প্রদত্ত লেনার্ড-জোন্স স্থিতিশক্তির যথার্থ্য প্রমাণিত হয়। (10.49) সমীকরণে  $R_0/\sigma$ -র গাণিতিক মানের সঙ্গে Ne, Ar, Kr-এর জন্য  $R_0/\sigma$ -র প্রকৃত মানের পার্থক্য কোয়ান্টাম তত্ত্ব প্রয়োগে সম্পূর্ণ দূর হয়।

সাম্যাবস্থার শর্ত প্রয়োগ করে এখন আমরা  $U_{tot}$ -এর চূড়ান্ত রাশিমালা লিখতে পারি।

$$U_{tot}(R_0) = 2N \epsilon \left[ 12.131(\sigma/R_0)^{12} - 14.454(\sigma/R_0)^6 \right] = -8.60N \epsilon \quad \dots (10.50)$$

সুতরাং ভ্যান ডার ওয়ালস কেলাসের প্রত্যেক অণুর গড় বন্ধন শক্তি হল

$$U = \frac{U_{tot}(R_0)}{N} = -8.6 \epsilon \quad \dots (10.51)$$

(10.50) ও (10.51) সমীকরণ দুটি সকল নিষ্ক্রিয় ও সমযোজী গ্যাসীয় অণুর কেলাসের জন্যই প্রযোজ্য। এই সমীকরণ দুটি নির্ণয়কালে অণু ও পরমাণুগুলির গতিশক্তি সম্পূর্ণ উপেক্ষা করা হয়েছে। কিন্তু উষ্ণতা 0 K না হলে কোনো অণু বা পরমাণুর গতিশক্তি সম্পূর্ণ শূন্য হয় না। বার্নার্ডেস (Bernardes) কোয়ান্টাম তত্ত্ব প্রয়োগের দ্বারা (10.50) ও (10.51) সমীকরণের এই ত্রুটি দূর করেন।

## 10.14 সমাধানকৃত উদাহরণ

উদাহরণ-1. KCl ল্যাটিসের N-সংখ্যক অণুর বন্ধন শক্তির সমীকরণ হল

$$U = -N(\alpha q^2/R - B/R^n)$$

নিম্নে প্রদত্ত তথ্যগুলি ব্যবহার করে N ঘাতের মান নির্ণয় করুন।

নিকটতম প্রতিবেশীর সাম্যাবস্থার দূরত্ব  $R_0 = 3.147 \text{ \AA}$

KCl কেলাসের সংনম্যতা  $K = 5.747 \times 10^{-11} \text{ m}^2/N$

ম্যাডেলুঙ ধ্রুবক  $\alpha = 1.748$

সমাধান :

K-র প্রদত্ত মান SI এককে আছে। সুতরাং U-র রাশিমালা SI এককে লিখলে পাওয়া যায়

$$U = -N \left( \frac{\alpha q^2}{4\pi \epsilon_0 R} - \frac{B}{R^n} \right)$$

R-এর সাপেক্ষে উভয় পক্ষের অবকলন করে আমরা পাই

$$\frac{dU}{dR} = \frac{N\alpha q^2}{4\pi \epsilon_0 R^2} - \frac{nNB}{R^{n+1}} \quad \dots (10.52)$$

ল্যাটিসের সাম্যাবস্থায়  $\frac{dU}{dR} = 0$  এবং  $R = R_0$ । সুতরাং (10.52) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\frac{N\alpha q^2}{4\pi\epsilon_0 R_0^2} - \frac{nNB}{R_0^{n+1}} = 0$$

$$\text{বা, } B = \frac{\alpha q^2}{4\pi\epsilon_0} R_0^{n-1} \quad \dots (10.53)$$

KCl কেলাসের গঠন NaCl গঠনের অনুরূপ। সুতরাং (10.33) সমীকরণ এক্ষেত্রে প্রযোজ্য। যেহেতু পদার্থের সংনম্যতা আয়তন-গুণাঙ্কের অন্যান্যক (reciprocal), সুতরাং (10.33) সমীকরণটি হবে

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{18NR_0} \left. \frac{d^2U}{dR^2} \right|_{R=R_0} \quad \dots (10.54)$$

(10.52) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2U}{dR^2} \right|_{R=R_0} &= -\frac{2N\alpha q^2}{4\pi\epsilon_0 R_0^3} + \frac{n(n+1)NB}{R_0^{n+2}} \\ &= \frac{N\alpha q^2}{4\pi\epsilon_0 R_0^3} (n-1) \quad [(10.53) \text{ সমীকরণ থেকে } B\text{-র মান বসিয়ে}] \end{aligned}$$

সুতরাং (10.54) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{18NR_0} \cdot \frac{N\alpha q^2}{4\pi\epsilon_0 R_0^3} (n-1)$$

$$\text{বা, } n = 1 + \frac{18R_0^4 (4\pi\epsilon_0)}{K\alpha q^2}$$

$$= 1 + \frac{18 \times (3.147 \times 10^{-10})^4}{5.747 \times 10^{-11} \times 1.748 \times (1.6 \times 10^{-19})^2 \times 9 \times 10^9}$$

$$= 1 + 7.63$$

$$= 8.63 \text{ (উত্তর)।}$$

উদাহরণ-2. নিষ্ক্রিয় গ্যাস কেলাসের আয়তন-গুণাঙ্ক নির্ণয় করুন। এর দ্বারা লেনার্ড-জোস স্থিতিশক্তি সম্বন্ধে কী ধারণা লাভ করা যায় ?

সমাধান :

(10.28) সমীকরণ অনুযায়ী পদার্থের আয়তন-গুণাঙ্কের সংজ্ঞা হল

$$B = V \frac{d^2 U}{dV^2}$$

এখানে  $V$  হল কেলাসের আয়তন। যদি কেলাসটির গঠন fcc ল্যাটিস হয় এবং ল্যাটিস ধ্রুবক  $a$  হয়, তবে ল্যাটিসের প্রত্যেক পরমাণুর আয়তন হবে  $\frac{1}{4} a^3$  এবং কেলাসের  $N$ -সংখ্যক পরমাণুর আয়তন  $V = \frac{1}{4} N a^3$ । ল্যাটিসের নিকটতম দুটি প্রতিবেশী পরমাণুর দূরত্ব  $R = a/\sqrt{2}$  ধরলে

$$V = NR^3/\sqrt{2} \quad \dots (10.55)$$

হয়। (10.48) সমীকরণে  $V$ -র এই মান বসালে আমরা পাই

$$\begin{aligned} U_{tot} &= 2N \epsilon \left[ 12.131 \frac{\sigma^{12}}{(\sqrt{2}V/N)^4} - 14.454 \frac{\sigma^6}{(\sqrt{2}V/N)^2} \right] \\ &= \frac{C_1}{V^4} - \frac{C_2}{V^2} \quad \dots (10.56) \end{aligned}$$

যেখানে  $C_1 = \frac{\epsilon}{2} (12.131 N^5 \sigma^{12})$  এবং  $C_2 = 14.454 \epsilon N^3 \sigma^6$

কিছু সাম্যাবস্থার শর্ত হল

$$\frac{dU_{tot}}{dV} = 0, \quad V = V_0$$

সুতরাং (10.56) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\frac{dU_{tot}}{dV} = -\frac{4C_1}{V^5} + \frac{2C_2}{V^3} = 0$$

$$\text{বা, } V_0 = \left( \frac{2C_1}{C_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{বা, } B = \left( V \frac{d^2 U}{dV^2} \right)_{V_0} = V_0 \left( \frac{20C_1}{V_0^6} - \frac{6C_2}{V_0^4} \right)$$

$$= \sqrt{2} \frac{C_2^{5/2}}{C_1^{3/2}} = \epsilon / \sigma^3 \quad \dots (10.57)$$

(10.57) সমীকরণটিই হল আয়তন-গুণাঙ্কের নির্ণয় সঙ্ঘ। এই সঙ্ঘ থেকে প্রাপ্ত আয়তন-গুণাঙ্কের মান পরীক্ষালব্ধ মানের সঙ্গে চমৎকারভাবে মিলে যায়। যেহেতু লেনার্ড-জোন্স স্থিতিশক্তির সঙ্ঘ দ্বারা আয়তন গুণাঙ্কের এই সঙ্ঘ নির্ণয় করা হয়, সুতরাং বলা যায় যে লেনার্ড-জোন্সের স্থিতিশক্তির সঙ্ঘ নিষ্ক্রিয় গ্যাস কেলাসের ধর্মগুলি সঠিকভাবে প্রকাশ করতে পারে।

## 10.15 সারাংশ

(1) কেলাসের পরমাণুগুলির মধ্যে দু'প্রকার বল ক্রিয়া করে। একপ্রকার বল হল দীর্ঘপাল্লার আকর্ষণধর্মী কুলম্বীয় তড়িৎ বল এবং অন্য প্রকার বলটি হল স্বল্প পাল্লার বিকর্ষণ বল, যা পাউলির বর্জন নীতি ও দুটি নিউক্লিয়াসের ধনাত্মক আধানের মধ্যে কুলম্বীয় বলের উপর নির্ভরশীল।

(2) একটি কেলাসের পরমাণুগুলির মোট স্থিতিশক্তি

$$U = -A/r^m + B/r^n$$

সঙ্ঘ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এই সঙ্ঘে  $r$  হল দুটি পরমাণুর মধ্যে দূরত্ব এবং  $A, B, m, n$  হল ধ্রুবক। এই সঙ্ঘের ডান পার্শ্বের প্রথম রাশিটি আকর্ষণজনিত স্থিতিশক্তি এবং দ্বিতীয় রাশিটি বিকর্ষণজনিত স্থিতিশক্তি প্রকাশ করে। বিকর্ষণজনিত বল আকর্ষণজনিত বলের চেয়ে স্বল্পপাল্লার। সেজন্য  $n > m$ ।

(3) যখন দুটি পরমাণুর মধ্যে আকর্ষণ ও বিকর্ষণ বল পরস্পরকে সম্পূর্ণ প্রশমিত করে, কেবল তখনই পরমাণুদুটির রাসায়নিক বন্ধন স্থায়ী বা সুস্থিত হয়। একে পরমাণুদুটির সাম্যাবস্থা (equilibrium) বলে। এই অবস্থায় দুটি পরমাণুর মধ্যে স্থিতিশক্তি সর্বনিম্ন হয় এবং এই সর্বনিম্ন শক্তিকে পরমাণু জোড় বা অণুটির বন্ধন শক্তি বা সংসক্তিকারী শক্তি (energy of cohesion) বলে। একটি অণুর পরমাণুগুলিকে পরস্পরের বন্ধন মুক্ত করে অসীম দূরত্বে নিয়ে যেতে হলে অণুটির উপর অন্ততপক্ষে এর বন্ধন শক্তির সমান শক্তি প্রয়োগ করতে হয়। এজন্য অণুর বন্ধন শক্তিকে বিষঞ্জীকরণ শক্তিও (energy of dissociation) বলে। অণুর সাম্যাবস্থায় এর দুটি পরমাণুর মধ্যে দূরত্ব  $r_0$  ধরলে অণুটির বন্ধন শক্তির মান হয়

$$U_0 = -(A/r_0^m)(1 - m/n)$$

(4) একটি কেলাসের পরমাণুগুলির মধ্যে যেসব বন্ধন দেখা যায়, সেগুলি হল—(i) আয়নীয়, (ii) সমযোজী, (iii) ধাতব, (iv) হাইড্রোজেনীয়, (v) ভ্যান ডার ওয়ালসীয় ও (vi) মিশ্র বন্ধন। (i) আয়নীয় বন্ধনে অণুর একটি পরমাণুর যোজক খোলক (shell) বা কক্ষিক (orbital) থেকে এক বা একাধিক ইলেকট্রন অণুটির অন্য পরমাণুর যোজক কক্ষিকে স্থায়ীভাবে স্থানান্তরিত হয়। তার ফলে যে পরমাণুটি ইলেকট্রন বর্জন করে, তা স্থায়ীভাবে ধনাত্মক আয়নে এবং যে পরমাণুটি ইলেকট্রন গ্রহণ করে, তা স্থায়ীভাবে ঋণাত্মক আয়নে পরিবর্তিত হয়। এই ধনাত্মক ও ঋণাত্মক আয়নের মধ্যে স্থিরতড়িৎ কুলম্বীয়

আকর্ষণের দ্বারাই পরমাণুদুটির মধ্যে আয়নীয় বন্ধন গঠিত হয়। (ii) সমযোজী বন্ধনে অণুর প্রত্যেক পরমাণুর যোজক কক্ষিক থেকে সমসংখ্যক ইলেকট্রন দ্বারা সমসংখ্যক ইলেকট্রন জোড় গঠিত হয় এবং এই ইলেকট্রন জোড়গুলি উভয় পরমাণুই এদের কক্ষিক সম্পৃক্ত করার জন্য সমভাবে ব্যবহার করে। (iii) ধাতব বন্ধনে সমযোজী ইলেকট্রনগুলি দুটি নির্দিষ্ট পরমাণুর মধ্যে আবদ্ধ না থেকে ধাতব বস্তুটির বিভিন্ন পরমাণুর মধ্যে অনির্দিষ্টভাবে ঘুরে বেড়ায়। ফলে যোজক ইলেকট্রনগুলি আংশিক মুক্ত ও আংশিক সমযোজী ইলেকট্রনরূপে ব্যবহার করে। এভাবে ধাতব বস্তুটির মধ্যে সর্বদাই বিভিন্ন দিকে ও বিভিন্ন বেগে গতিশীল কতকগুলি মুক্ত ইলেকট্রন এবং সমসংখ্যক স্থির ধনাত্মক আয়ন বর্তমান থাকে। (iv) হাইড্রোজেনীয় বন্ধনে হাইড্রোজেন পরমাণু (বা অনুরূপ কোনো পরমাণু) অপর কোনো তড়িৎ-ঋণাত্মক পরমাণুর সঙ্গে মিলিত হয়ে সমযোজী বন্ধন গঠন করে। কিন্তু এই বন্ধনে দুটি পরমাণু দ্বারা ইলেকট্রন জোড়ের অসম ব্যবহারের দরুন পরমাণুদুটির মধ্যে একটি তড়িৎ দ্বিমেরুর উৎপত্তি হয় এবং তারফলে একটি অণু অপর অণুকে আকর্ষণ করতে পারে। (v) ভ্যান ডার ওয়ালসীয় বন্ধন দ্বারা নিষ্ক্রিয় গ্যাসীয় পরমাণুগুলি ও সমযোজী বন্ধনযুক্ত গ্যাসীয় অণুগুলি অত্যন্ত কম উন্নতায় কেলাস গঠন করে। এই নিষ্ক্রিয় পরমাণু ও অণুগুলির যোজক কক্ষিকের ইলেকট্রন মেঘ সম্পূর্ণ সম্পৃক্ত ও গোলায় প্রতিসাম্যবিশিষ্ট হয়। কিন্তু তাৎক্ষণিকভাবে এই মেঘের ঘনত্ব পরিবর্তন ঘটান দরুন এই অণু বা পরমাণুর মধ্যে তাৎক্ষণিকভাবে তড়িৎ-দ্বিমেরু উৎপন্ন হয় এবং এর দ্বারা নিকটবর্তী অনুরূপ অণু বা পরমাণুতে আবিষ্ট তড়িৎ-দ্বিমেরুর উৎপত্তি ঘটে। এই দ্বিমেরুগুলির বিপরীত ধর্মীয় মেরুগুলির আকর্ষণ দ্বারাই ভ্যান ডার ওয়ালসীয় বন্ধনের উৎপত্তি হয়। (vi) কতকগুলি কেলাসের বন্ধনে একাধিক প্রকারের বন্ধন থাকে। এই কেলাসগুলিকে মিশ্র বন্ধনের কেলাস বলা হয়।

(5) আয়নীয়, ধাতব ও ভ্যান ডার ওয়ালসীয় বন্ধনগুলি গোলায়ভাবে প্রতিসম। অর্থাৎ এই বন্ধনগুলি দিকনির্ভর নয়। কিন্তু সমযোজী ও হাইড্রোজেন বন্ধন দিকনির্ভর।

(6) আয়নীয়, সমযোজী ও ধাতব বন্ধনগুলি শক্তিশালী বন্ধন। এই বন্ধনের শক্তি অণু প্রতি 1 থেকে 10eV পর্যন্ত হয়। এজন্য এই বন্ধনগুলিকে প্রাথমিক বন্ধন (primary bonds) বলা হয়। অপরপক্ষে ভ্যান ডার ওয়ালসীয় ও হাইড্রোজেনীয় বন্ধন দুর্বল। অর্থাৎ এই বন্ধনগুলির শক্তি অণু প্রতি 0.01 থেকে 0.5 eV-র বেশি হয় না। এই বন্ধনগুলিকে সৌণ (secondary) বন্ধন বলে।

(7) আয়নীয় কেলাসের মোট ল্যাটিস শক্তি বা বন্ধন শক্তি

$$U_{tot} = NU_i = -(Naq^2/R_0)[1 - \rho/R_0]$$

সম্বন্ধের দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এই সম্বন্ধে  $U_i$  হল  $i$ -তম আয়নের বন্ধন শক্তি এবং  $N$  হল কেলাসে অবস্থিত মোট আয়ন সংখ্যা।  $R_0$  সাম্যাবস্থায় দুটি নিকটতম আয়নের দূরত্ব,  $q$  ইলেকট্রন আধান,  $\alpha$  ম্যাডেলুঙ ধ্রুবক এবং  $\rho$  হল স্বল্প পাল্লার বিকর্ষণ বলের পাল্লা সূচক ঘাত।

আয়নীয় কেলাসের ঘাত  $\rho$  কেলাসের আয়তন-গুণাঙ্ক দ্বারা নির্ণয় করা যায়। NaCl কেলাসের ক্ষেত্রে এই ঘাতের সম্বন্ধ হল

$$B = \frac{\alpha q^2}{18R_0^4}(R_0/\rho - 2)$$

আয়নীয় কেলাসের একটি আয়নের গড় বন্ধন শক্তি



$$U = \frac{U_{tot}}{N} = -(\alpha q^2/R_0) \left(1 - \frac{\rho}{R_0}\right)$$

(8) ধাতব কেলাসের প্রতিটি আয়নের বন্ধন শক্তি

$$U = -[E_0 + E_V + E_1]$$

সেখানে  $E_0$  হল ধনাত্মক আয়নের তড়িৎক্ষেত্রে যোজক ইলেকট্রনের স্থিতিশক্তি,  $E_V$  হল ইলেকট্রনের আংশিক মুক্ত অবস্থায় এর গতিশক্তি এবং  $E_1$  হল একটি মুক্ত পরমাণুকে আয়নিতকরণ শক্তি।

$E_0$  ও  $E_1$  সহজে গণনা করা যায়। তা ছাড়া ফার্মি শক্তির সম্বন্ধের সাহায্যে  $E_V$ -র মান হয়

$$E_V = \frac{3}{10} \left( \frac{\hbar^2}{mr_0^2} \right) \left( \frac{9\pi}{4} \right)^{2/3}$$

সেখানে  $r_0$  হল পারমাণবিক বহুতলককে গোলক হিসাবে ধরে নিলে তার ব্যাসার্ধ।

(9) ভ্যান ডার ওয়ালসীয় কেলাসের ক্ষেত্রে এর  $i$ -তম ও  $j$ -তম পরমাণুর বন্ধন শক্তি হল

$$U_{ij} = 4 \epsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^6 \right]$$

এই শক্তির সম্বন্ধকে লেনার্ড-জোন্স স্থিতিশক্তি বলে। এখানে  $\epsilon$  ও  $\sigma$  হল লেনার্ড-জোন্স স্থিতিশক্তির ধ্রুবক। যদি কেলাসে  $N$ -সংখ্যক পরমাণু থাকে, তবে ওই কেলাসের মোট ভ্যান ডার ওয়ালসীয় বন্ধন শক্তি হল

$$U_{tot} = -8.6 N \epsilon$$

এবং প্রত্যেক অণুর বন্ধন শক্তি হল

$$U = \frac{U_{tot}}{N} = -8.6 \epsilon$$

## 10.16 প্রশ্নাবলি

1. কেলাসের অভ্যন্তরস্থ পরমাণুগুলি যখন পরস্পরের নিকটবর্তী হয়, তখন তাদের মধ্যে একটি আকর্ষণ বল ক্রিয়া করে। কিন্তু এতৎসত্ত্বেও পরমাণুগুলি পরস্পরের সঙ্গে মিশে যায় না কেন, তা ব্যাখ্যা করুন।
2. বিভিন্ন প্রকার কেলাসীয় বন্ধন বলগুলি উল্লেখ করুন। প্রত্যেক প্রকার বলের জন্য যে পদার্থে যে বল ক্রিয়া করে, সেই পদার্থের একটি করে উদাহরণ দিন। কেলাসীয় বন্ধন অনুযায়ী নিম্নলিখিত পদার্থগুলির শ্রেণিবিভাগ করুন।  
(i) আর্গন, (ii) সোডিয়াম, (iii) শূঙ্ক বরফ, (iv) পটাশিয়াম ব্রোমাইড, (v) ক্যালশিয়াম কার্বনেট, (vi) বরফ, (vii) সিলভার আয়োডাইড, (viii) ক্লোরিন।

3. একটি কেলাসের পরমাণুগুলির মধ্যে কী কী প্রকারের বল ক্রিয়া করে এবং এই বলগুলি কীভাবে উৎপন্ন হয়, তা আলোচনা করুন। পরমাণুগুলির মধ্যে দূরত্বের সঙ্গে এদের বিভব শক্তি যেভাবে পরিবর্তিত হয়, তার লেখচিত্রের সাহায্যে সুস্থিত বন্ধন কীভাবে পাওয়া যায়, তা ব্যাখ্যা করুন।
4. নীচের বন্ধনগুলির প্রত্যেকটির একটি করে উদাহরণ দিন এবং এই বন্ধনগুলির মধ্যে কী পার্থক্য আছে, তা ব্যাখ্যা করুন।  
(a) আয়নীয় ও সমযোজী বন্ধন, (b) আয়নীয় ও ভ্যান ডার ওয়ালসের বন্ধন।
5. সাধারণত কেবল ধাতুগুলির মধ্যেই কেন ঘনসংবন্ধ গঠন দেখা যায়, কিন্তু আয়নীয় ও সমযোজী কঠিনের মধ্যে দেখা যায় না, তা ব্যাখ্যা করুন।
6. ক্ষার ধাতুগুলিতে কেন bcc গঠন দেখা যায়, তা ব্যাখ্যা করুন।
7. হাইড্রোজেন বন্ধন কাকে বলে? দ্বিমেরু বন্ধনের সঙ্গে এর পার্থক্য কী? বরফ গঠনে হাইড্রোজেন বন্ধনের ভূমিকা ব্যাখ্যা করুন।
8. নিষ্ক্রিয় গ্যাসগুলি কেন অত্যন্ত কম উল্লতায় তরলীভূত ও কঠিনীভূত হয়?
9. মিশ্রবন্ধন কাকে বলে? কয়েকটি মিশ্রবন্ধন পদার্থের উদাহরণ দিন।
10. একটি আয়নীয় কেলাসের বন্ধন শক্তির রাশিমালা নির্ণয় করুন। ম্যাডেলুঙ ধ্রুবক কাকে বলে? এই ধ্রুবকের রাশিমালা নির্ণয় করুন। একটি রৈখিক আয়নীয় কেলাসের ক্ষেত্রে ম্যাডেলুঙ ধ্রুবক কীভাবে নির্ণয় করা যায়?
11. আসঞ্জন বা সংসক্তিজনিত শক্তি কাকে বলে? নিষ্ক্রিয় গ্যাসের কেলাসের ক্ষেত্রে এই শক্তির মান নির্ণয় করুন।
12. ধরা যাক,  $q$  আধানযুক্ত ধনাত্মক ও ঋণাত্মক আয়নগুলি একান্তরভাবে একই রেখায় সারিবদ্ধভাবে আছে। এদের দুটি নিকটতম প্রতিবেশীর মধ্যে বিকর্ষণজনিত স্থিতিশক্তি  $A/r^n$  রাশির দ্বারা প্রকাশ করা যায়। যদি এই সারিতে মোট  $2N$ -সংখ্যক আয়ন থাকে, তবে প্রমাণ করুন যে সাম্যাবস্থায় সারিটির মোট স্থিতিশক্তি হল

$$U_0 = -(2Nq^2 \ln 2/r_0) (1-1/n)$$

যেখানে  $r_0$  = সাম্যাবস্থায় আন্তর্পারমাণবিক দূরত্ব।

13. দুটি পরমাণু যুগলের স্থিতিশক্তি হল

$$U = -\alpha/r^4 + \beta/r^{12}$$

যদি এই পরমাণুদুটি একটি সুস্থিত অণু গঠন করে, তাহলে এই অণু থেকে কী পরিমাণ শক্তি নিঃসৃত হবে? এই বন্ধনের দৈর্ঘ্য কত?

14. দুটি পরমাণুযুগলের স্থিতিশক্তির সমীকরণ হল

$$U = -A/r^6 + B/r^{12}$$

পরমাণু দুটির সুস্থিত বন্ধন দূরত্ব হল  $3\text{\AA}$  এবং বন্ধন শক্তি হল  $1.8\text{ eV}$ । A ও B-র মান নির্ণয় করুন। এই অণুটি ভেঙে ফেলতে যে বল প্রয়োজন, তা বার করুন এবং এর জন্য পরমাণুদুটির মধ্যে যে সংকট দূরত্ব (critical distance) থাকে, তা নির্ণয় করুন। সাম্যাবস্থায় পরমাণুদুটির মধ্যে যে দূরত্ব থাকে, সেই দূরত্ব 5% হ্রাস করতে যে বল প্রয়োজন হয়, তাও নির্ণয় করুন।

15. একটি LiF অণুর সংসক্তিজনিত শক্তি ও নিকটতম দুটি প্রতিবেশীর মধ্যে দূরত্ব যথাক্রমে  $1.68 \times 10^{-18}\text{ J}$  এবং  $2.014\text{ \AA}$ । LiF অণুর গঠন NaCl অণুর গঠনের অনুরূপ। যদি অণুটির স্থিতিশক্তির সমীকরণ

$$U = -\alpha q^2 / R + \beta / R^n$$

হয়, তবে LiF অণুটির আয়তন-গুণাঙ্ক নির্ণয় করুন। এখানে  $\alpha$ -র মান হল

$$\alpha = 1.75$$

## 10.17 প্রশ্নাবলির উত্তরের ইঙ্গিত

1. (10.2) ভূমিকা দেখুন।
2. প্রশ্নের প্রথম অংশের উত্তরের জন্য (10.3) পরিচ্ছেদের শেষাংশ দেখুন। দ্বিতীয় ও তৃতীয় অংশের উত্তর (10.4) থেকে (10.9) পর্যন্ত পরিচ্ছেদগুলির মধ্যে পাবেন।
3. (10.3) পরিচ্ছেদ দেখুন।
4. (10.4), (10.5) ও (10.7) পরিচ্ছেদগুলি দেখুন।
5. (10.4), (10.5) ও (10.6) পরিচ্ছেদগুলি দেখুন।
6. (10.6) পরিচ্ছেদ দেখুন।
7. (10.8) পরিচ্ছেদ দেখুন।
8. (10.7) পরিচ্ছেদ দেখুন।
9. (10.9) পরিচ্ছেদ দেখুন।
10. (10.10) পরিচ্ছেদ দেখুন।
11. (10.3) ও (10.13) পরিচ্ছেদ দেখুন।
12. (10.10.1) পরিচ্ছেদের (10.6) চিত্র অনুসরণে  $U_{ij}$  ও  $U_{\text{tot}} = U_0 = NU_1$  নির্ণয় করুন।
13. (10.3) পরিচ্ছেদের (10.6) ও (10.7) সমীকরণগুলির অনুরূপে গাণিতিক সমীকরণ গঠন করুন।
14. (10.3) পরিচ্ছেদের গাণিতিক সমীকরণগুলি অনুসরণ করুন।
15. (10.10.2) পরিচ্ছেদের পদ্ধতি অনুসরণ করুন।

---

## একক 11 □ জাফরির কম্পন (Lattice vibration)

---

- 11.1 প্রস্তাবনা
- 11.2 উদ্দেশ্য
- 11.3 একটি অবিকল এক রকমের পরমাণু দিয়ে তৈরি একমাত্রিক সজ্জায় স্থিতিস্থাপক তরঙ্গের বিস্তার
- 11.4 একটি একমাত্রিক অভিন্ন পরমাণু জাফরির কম্পনের ধরণ
- 11.5 সরল সমঞ্জস কম্পক ও কম্পনের ধরনের সাদৃশ্য
- 11.6 অভিন্ন পরমাণু বিশিষ্ট একমাত্রিক জাফরির আপেক্ষিক তাপ
- 11.7 দ্বিপারমাণবিক রৈখিক জাফরির কম্পনের ধরণ
- 11.8 সারাংশ
- 11.9 সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলী
- 11.10 গাণিতিক সমস্যার সমাধান
- 11.11 কিছু গাণিতিক সমস্যা
- 11.12 পরিশিষ্ট

---

### 11.1 প্রস্তাবনা

---

কঠিন পদার্থের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ডিবাইয়ের তত্ত্বের সবচেয়ে দুর্বলতম অংশ হল স্থিতিস্থাপক তরঙ্গ যখন কোন কঠিন পদার্থে বিস্তার লাভ করে তখন ঐ পদার্থের কেলাসকে একটা অবিচ্ছিন্ন মাধ্যম হিসাবে বিবেচনা করা। এটা আগেই জানা গেছে যে ঐ তরঙ্গগুলোর ক্ষুদ্রতম তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের যে মান সেটা আন্তঃপারমাণবিক দূরত্বের সমান। এক্ষেত্রে তাই এটা আশা করা যেতে পারে যে তত্ত্ব আরও সঠিক হলে উচ্চ কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট তরঙ্গের ক্ষেত্রে অন্য ফল দেখা যাবে। সেই জন্য কেলাসদের একমাত্রিক, দ্বিমাত্রিক বা ত্রিমাত্রিক জাফরি হিসাবে ধরে নিয়ে তাদের কম্পনের বৈশিষ্ট্য আলোচনা কঠিন পদার্থের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয়ে সাহায্য করবে। এক্ষেত্রে যে কোন কেলাসের মধ্যে পরমাণু সংখ্যা যেহেতু অত্যন্ত বেশি তাই ঐ জাফরিগুলো যাদের কম্পন মুখ্য আলোচ্য বিষয় তাদের বিস্তৃতি অসীম পর্যন্ত ধরা হয়, না হলে সীমানা জনিত ক্রিয়া গণনায় চলে আসে।

---

### 11.2 উদ্দেশ্য

---

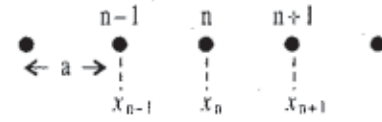
এই অধ্যায়ে আপনারা কঠিন পদার্থের কেলাসকে জাফরির (Lattice) সমাহার ধরে নিয়ে তাদের সরল সমঞ্জস কম্পনের মাধ্যমে কঠিন পদার্থের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় সম্পর্কে জানতে পারবেন। জাফরির

কম্পনের সাথে রৈখিক সমঞ্জস কম্পকের সাদৃশ্য কল্পনা করে কোয়ান্টাম বল বিদ্যা অনুযায়ী শক্তি নির্ধারণ কীভাবে করা যাবে সেই তত্ত্ব আলোচিত হবে। আপেক্ষিক তাপ নির্ণয়ে জাফরির কম্পনের ধরণের ভূমিকা সম্পর্কে জানতে পারবেন। পরিশেষে কঠিন পদার্থের আপেক্ষিক তাপ তাত্ত্বিক বিচারে নির্ধারণ করার পদ্ধতিতে জাফরির কম্পনের গুরুত্ব বোঝা যাবে।

### 11.3 একটি অবিকল এক রকমের পরমাণু দিয়ে তৈরি একমাত্রিক সজ্জায় স্থিতিস্থাপক তরঙ্গের বিস্তার

বর্তমান আলোচনার মূল সূত্র পাওয়া যাবে বর্ন ও ফন কারম্যান (Born and Von Karman) এবং ব্ল্যাকম্যান (Blackman) এর গবেষণাপত্রে। প্রথমে আমরা চিত্রে দেখানো একটি সমদূরবর্তী ভরবিন্দুর সমাহার বিবেচনা করবো।

এই সমাহারটির বিস্তৃতি অসীম পর্যন্ত আর প্রত্যেকটি কণার ভর সমান। এটা ধরে নেওয়া হবে যে মিথস্ক্রিয়া শুধু নিকটতম প্রতিবেশীর সাথে হবে আর হুকের সূত্র মেনেই হবে। স্থিতাবস্থায় পাশাপাশি কণাদের মধ্যে দূরত্ব  $a$ । স্থিতাবস্থা থেকে সরণ গুলোকে  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, \dots$  দিয়ে সূচিত করা হবে।  $n$  তম কণার গতি সমীকরণ হল



চিত্র 11.1. অভিন্ন ভরবিন্দু দিয়ে রৈখিক সজ্জা

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_n &= -f(x_n - x_{n-1}) - f(x_n - x_{n+1}) \\ &= f(x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n) \end{aligned} \quad (11.1)$$

নিকটতম প্রতিবেশীদের মধ্যকার বল ধ্রুবক হল  $f$ ।

আমরা উপরের সমীকরণের সমাধানের জন্য চল তরঙ্গের সহায়তা নিলে লিখতে পারি

$$x_n(t) = e^{-i\omega(t-na/c_s)} = e^{-i(\omega t - qna)} \quad (11.2)$$

যেখানে  $C_s$  = চলতরঙ্গের বেগ,  $q = \omega/c_s = 2\pi/\lambda$  (তরঙ্গ ভেক্টর)

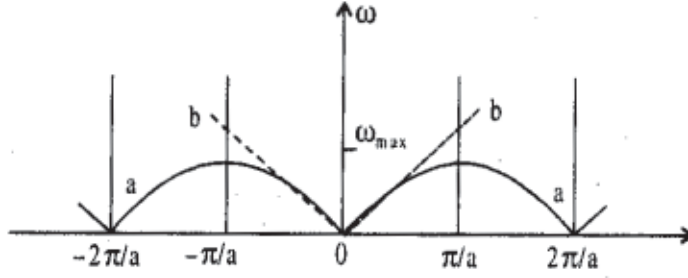
আর  $na = n$  তম কণার মূল বিন্দু থেকে দূরত্ব।

$x_n$  এর মান (11.1) সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$m\omega^2 = -f(e^{-iqa} + e^{iqa} - 2) = 4f \sin^2(qa/2) \quad (11.3)$$

বা  $\omega = \omega_{\max} \sin(qa/2)$ ,  $\omega_{\max}^2 = 4f/m$

এইভাবে আমরা তরঙ্গের কম্পাঙ্ককে তরঙ্গের তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারি। এই সম্পর্কটি চিত্র 11.2 তে দেখানো হয়েছে।



চিত্র 11.2. একক পরমাণু বিশিষ্ট রৈখিক জাফরিতে তরঙ্গ ভেক্টর  $q$ -এর সাথে স্থিতিস্থাপক তরঙ্গ কম্পাঙ্কের সম্পর্ক

একটি উল্লেখযোগ্য বিষয় হল যে একটি অবিচ্ছিন্ন সজ্জার জন্য কম্পাঙ্ক  $v = qc/2\pi$ , অর্থাৎ কম্পাঙ্ক তরঙ্গ ভেক্টর  $q$ -এর সমানুপাতী (চিত্র 11.2 এ রেখা  $b$  দ্রষ্টব্য)। সুতরাং আমরা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে কেবলমাত্র  $qa \ll 1$  এর বেলায় একটি অবিচ্ছিন্ন সজ্জা আর ভরবিন্দুর রৈখিক সমাহার একই ফল দেবে। এই ফলের প্রতিক্রিয়া আপেক্ষিক তাপ তত্ত্বে এসে পড়বে কারণ আপেক্ষিক তাপ তত্ত্বে কঠিনের অবিচ্ছিন্নতা ধরে নেওয়া হয়েছিল।

সমাধান (11.2) থেকে আমরা আর একটা গুরুত্বপূর্ণ ফল পেতে পারি যদি  $q$  কে আমরা  $q_m$  দিয়ে প্রতিস্থাপিত করি যেখানে

$$q_m = q + \frac{2\pi m}{a}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.4)$$

সমীকরণ (11.3) থেকে আমরা দেখি যে তরঙ্গের ধরণ  $q$  আর  $q_m$  একই রকম। যেহেতু  $\exp(i2\pi m) = 1$ , সুতরাং (11.3) থেকে বলা যাবে  $q$  আর  $q_m$  এর সমাধান গুলো এক। সেইজন্য জাফরির কম্পনের ধরণ আর তরঙ্গ ভেক্টর  $q$ -এর ভিতর একটি অনন্য সম্পর্ক পেতে গেলে  $q$ -এর মান নির্দিষ্ট মাত্রার ভিতর থাকা দরকার। সাধারণতঃ  $q$ -এর মান নেওয়া হয় এমন ভাবে যে

$$-\pi/a \leq q \leq \pi/a \quad (11.5)$$

ধনাত্মক  $q$ -মান সম্পন্ন তরঙ্গ গুলো কোন একদিকে গেলে ঋণাত্মক  $q$ -মান সম্পন্ন তরঙ্গেরা বিপরীত দিকে যায়। উপরের আলোচনা থেকে আমরা দেখতে পাই কম্পাঙ্ক গুলো  $q$ -এর সাথে পর্যাবৃত্ত (periodic) সম্পর্ক রাখে। (11.5) বর্ণিত  $q$ -এর মান দিয়ে প্রথম ত্রিলুয়া অঞ্চল সূচিত হয়। এছাড়াও দ্বিতীয় বা তৃতীয় ত্রিলুয়া অঞ্চল সম্পর্কে আমরা ধারণা করতে পারি  $q$ -এর বিভিন্ন মানের মাত্রার মাধ্যমে।

## 11.4 একটি একমাত্রিক অভিন্ন পরমাণু জাফরির কম্পনের ধরণ

এর আগের অংশে আমরা একটি অসীম পরমাণু জাফরির আলোচনা করেছি। কিন্তু বাস্তবে কোন জাফরিই অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত নয়, তাদের একটা সীমা আছে। এই সীমানা নির্দিষ্ট করার শর্তের জন্য কম্পনের ধরণের সংখ্যার পরিবর্তন দেখা যায়। এই পরিচ্ছেদে আমরা সেটাই আলোচনা করবো।

সীমানা শর্তগুলো দুরকম ভাবে আরোপিত করা যায় :

1. স্থান তরঙ্গ (standing waves) উৎপন্নকারী সীমানা শর্ত : 0 থেকে শুরু করে N পর্যন্ত আছে এমন (N + 1) সংখ্যক অভিন্ন পরমাণু সজ্জা ধরা হল। ঐ সজ্জার অন্তিম পরমাণু দুটো স্থির, বাকি (N - 1) সংখ্যক পরমাণু গতিশীল। গতি সমীকরণ (11.1) এর সাধারণ সমাধানকে দুটো চল তরঙ্গের যোগফল ধরা যেতে পারে, যার মধ্যে একটা ডান দিকে আর একটা বাঁ দিকে চলছে।

$$x_n(t) = \left( A_1 e^{iqna+i\beta_1 t} + A_2 e^{-iqna+i\beta_2 t} \right) e^{-i\omega t} \quad (11.6)$$

এখানে  $A_1$  ও  $A_2$  হল বিস্তার আর  $\beta_1, \beta_2$  দশা কোণ।

সীমানা শর্তগুলো হল

$x_0(t) = 0$  আর  $x_N(t) = 0$ , সব  $t$  এর জন্য

এর প্রথমটা থেকে আমরা পাই  $A_1 = -A_2$  আর  $\beta_1 = \beta_2$  যেহেতু দশা কোণগুলো এক, আমরা তাই ধরে নিতে পারি  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ । বাকি অংশের বাস্তবরাশি থেকে পাই

$$x_n(t) = 2A_1 \sin qna \sin \omega t \quad (11.7)$$

এটা একটা স্থান তরঙ্গের সমীকরণ।

এখান থেকে আমরা দেখতে পাই  $\omega$  আর  $q$  এর সম্পর্ক চল তরঙ্গের বেলায় যা পাওয়া গেছিল ঠিক সেরকমই। শুধু  $q$  এর মান এখন ধনাত্মক হবে আর সেটা 0 থেকে  $\pi/a$  এর মধ্যে সীমাবদ্ধ। সমীকরণ (11.7) এ দ্বিতীয় সীমা শর্ত আরোপ করলে আমরা  $q$  এর কতগুলো বিচ্ছিন্ন মান পাই যেখানে

$$\sin qNa = 0, \text{ বা } q = (\pi/Na)j \quad (11.8)$$

$j$  অখণ্ড রাশি।  $j=0$  কিন্তু নেওয়া যাবে না কারণ তাহলে  $q=0$  হয়ে যাবে। যেহেতু  $q$  এর চরম মান  $qa$ , সুতরাং  $j_{\max} = N$ ; কিন্তু এই মানও নেওয়া যাবে না কারণ  $q=0$ । অতএব আমরা দেখতে পাচ্ছি যে

$$j = 1, 2, 3, \dots (N-1) \quad (11.9)$$

তাহলে যতগুলো গতিশীল পরমাণু আছে কম্পনের ধরণও ঠিক ততগুলো।  $q$  এর প্রতিটি মানের জন্য এক একটা কম্পাঙ্ক  $\omega_q$  আছে। তাই কম্পাঙ্ক বর্ণালীতে (N-1) সংখ্যক বিচ্ছিন্ন রেখা দেখা যাবে।

2. দ্বিতীয় সীমাশর্তের প্রবন্ধা হলেন বর্ণ আর ফন্ কারম্যান। এই সীমা শর্তকে বলা হয় শৃঙ্খলিত বা পর্যাবৃত্ত সীমাশর্ত। যদি পারমাণবিক সজ্জাটি বৃত্তাকার হয় যেখানে আন্ত-পরিমাণবিক দূরত্ব  $a$ , তাহলে সজ্জাটির দৈর্ঘ্য  $L$  হলে  $L = Na$ , যেখানে  $N =$  পরমাণু সংখ্যা  $\gg 1$ , পরমাণুগুলোকে 1, 2, 3, ..., N দিয়ে সূচিত করা হলে সমাধান শর্ত থেকে পাই

$$x_n(t) = x_{n+N}(t) \quad (11.10)$$

এই ফল (11.2)তে প্রয়োগ করলে পাওয়া যাবে

$$e^{iqna} = e^{iq(n+N)a}$$

$$\text{বা } q = \left( \frac{2\pi}{Na} \right) g = \left( \frac{2\pi}{L} \right) g \quad (11.11)$$

যেখানে  $g$  অখণ্ড রাশি। এখন (11.5) অনুযায়ী  $q$  এর মান  $-\pi/a$  থেকে  $\pi/a$  পর্যন্ত সীমাবদ্ধ। তাহলে  $g$  এর সম্ভাব্য মান হবে  $g = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm N/2$  (11.12)

$g$  এর মোট সংখ্যা  $N$ । তাহলে আমরা আবার আগের সেই সিদ্ধান্তে আসি যেখানে বলা হয়েছিল গতিশীল পরমাণু সংখ্যা আর কম্পনের ধরনের সংখ্যা অভিন্ন। শুধু চলতরঙ্গের বেলা  $q$  এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে আর স্থানু তরঙ্গের বেলা  $q$  এর মান ধনাত্মক হয় চলতরঙ্গের ক্ষেত্রে তরঙ্গ ভেক্টর ব্যবধান  $dq$  এর ভিতর কম্পনের ধরনের সম্ভাব্য সংখ্যা

$$dg = \left( \frac{L}{2\pi} \right) dq \quad (11.13)$$

আর স্থানু তরঙ্গে বেলা

$$dj = \left( \frac{L}{\pi} \right) dq \quad (11.14)$$

(11.13) তে  $q$  এর মান  $-\pi/a$  থেকে  $\pi/a$  পর্যন্ত হতে পারে যেখানে (11.14) তে  $q$  এর মান 0 থেকে  $\pi/a$  পর্যন্ত হবে। যে সমস্ত জাফরির বেলা  $N \gg 1$ , তাদের ক্ষেত্রে সীমার্শর্ত (11.10) প্রয়োগ করা যেতেই পারে। বাস্তবিক কারণে  $L = Na$  এই মাপের টুকরো টুকরো জাফরির প্রত্যেকটি পরমাণু তার চারদিকে একই পরিবেশ দেখতে পাবে।

## 11.5 সরল সমঞ্জস কম্পক ও কম্পনের ধরনের সাদৃশ্য

কঠিন পদার্থের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে কেন্দ্রীয় সমস্যা জাফরির কম্পনের ধরণ নির্ধারণ। কঠিন পদার্থের কম্পন শক্তি হিসাবের জন্য প্রতিটি ধরণের সঙ্গে এক একটা সরল সমঞ্জস কম্পকের সাদৃশ্য ধরে নিয়ে ঐ কম্পকের শক্তির অবদান নির্ধারিত হয়। বর্তমান পরিচ্ছেদে আমরা একটি একমাত্রিক জাফরির ক্ষেত্রে এই পদ্ধতির যথার্থ্য দেখাবো।

$M$  ভর বিশিষ্ট আর  $\omega$  কৌণিক কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট একটি সরল সমঞ্জস কম্পকের শক্তিকে লেখা যায়

$$E = \frac{p^2}{2M} + \frac{M\omega^2 y^2}{2}$$

যেখানে  $y$  হচ্ছে বিক্ষেপ আর  $P = M \frac{dy}{dt}$  হচ্ছে ভরবেগ। এটাকে সাজিয়ে লেখা যায়

$$E = \frac{1}{2} M \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + M \frac{\omega^2 y^2}{2} \quad (11.15)$$



এবার আমরা এমন একটা একমাত্রিক জাফরি ধরবো যেখানে স্থানান্তরজ্ঞা স্থাপিত হয়েছে। ঐ জাফরির কণাগুলোর গতিশক্তি উপরিউক্ত কম্পনের ধরনের বেলায় লেখা যাবে

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \sum_n \left( \frac{dx_n}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \sin^2 \omega t \sum_n \sin^2 qna \quad (11.16)$$

$m$  প্রতিটি পরমাণুর ভর আর যতগুলো পরমাণু আছে তাদের সবার গতিশক্তির যোগফলই  $E_{kin}$  দেবে।

ঐ পরমাণু সজ্জার স্থিতিস্থাপক প্রতিটি পরমাণুর স্থানাঙ্কের উপর নির্ভরশীল।  $V = V(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ ।  $n$  তম কণার উপর প্রযুক্ত বল  $F$  হলে

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x_n} = m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = f(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n) \quad (11.17)$$

এখান থেকে আমরা স্থিতিশক্তি  $V$  কে পাই

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) = \frac{1}{2} f \sum_n (2x_n^2 - x_n x_{n+1} - x_n x_{n-1}) \quad (11.18)$$

স্থানান্তরজ্ঞোর সমাধানকে (11.18) এ ব্যবহার করে আমরা পাই

$$V = 2f \sin^2 \left( \frac{qa}{2} \right) \cos^2 \omega t \sum_n \sin^2 qna \quad (11.19)$$

$\omega$  এবং  $q$ -এর মধ্যে সম্পর্ক (11.3) প্রয়োগ করলে পাই,

$$V = \frac{1}{2} m \omega^2 \cos^2 \omega t \sum_n \sin^2 qna \quad (11.20)$$

তাহলে  $q$  ধরনের কম্পনের মোট কম্পন শক্তি

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 S \quad \text{যেখানে } S = \sum_n \sin^2 qna \quad (11.21)$$

দেখা যাচ্ছে যে মোট কম্পন শক্তি সময় নিরপেক্ষ। এখন আমরা যদি (11.20) কে সরল সমঞ্জস কম্পকের গতিশক্তির সাথে তুলনা করি তাহলে এটা দেখানো যাবে যে,

$$y = \left( \frac{mS}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \omega t \quad (11.22)$$

এই সাদৃশ্য থেকে বলা যায় যে

$$E_{kin} = \frac{1}{2} M \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 S \sin^2 \omega t$$

এই সমীকরণ আর (11.16) অভিন্ন যা থেকে আমরা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে একটি একমাত্রিক অভিন্ন পরমাণু দিয়ে তৈরি জাফরির কম্পন শক্তি কতকগুলো সরল সমঞ্জস কম্পকের কম্পন শক্তির সাথে

সদৃশ। সুতরাং কোন এক বিশেষ কম্পনের ধরন  $q$ , যার সঙ্গে  $\omega_q$  কম্পাঙ্ক জড়িত, সেক্ষেত্রে গড় শক্তি আমরা প্ল্যাঙ্কের সূত্র থেকে পাই

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\hbar \omega_q}{e^{\hbar \omega_q / kT}} = 1$$

$q$  তরঙ্গ ভেক্টর যুক্ত কম্পনের ধরণের সাথে  $T$  তাপমাত্রায় যে সংখ্যক কোয়ান্টা থাকে তার সংখ্যা  $n_q$  হলে

$$n_q = \frac{\langle \epsilon \rangle}{\hbar \omega_q} = \left( e^{\hbar \omega_q / kT} - 1 \right)^{-1} \quad (11.24)$$

তড়িচ্চুম্বকীয় বিকিরণের সাথে যুক্ত ফোটনের সাথে মিল রেখে এই কম্পনের কোয়ান্টাদের 'ফোনন' নাম দেওয়া হয়েছে। এই ফোননদের ফোটনের মতই কণা ধর্ম রয়েছে তার কারণ এদের শক্তি  $h\nu_q = \hbar \omega_q$

আর ভরবেগ  $p = \frac{\hbar \nu_q}{C_s}$  যেখানে  $C_s$  কম্পনের ধরণের প্রচলন বেগ।

## 11.6 অভিন্ন পরমাণু বিশিষ্ট একমাত্রিক জাফরির আপেক্ষিক তাপ

আপেক্ষিক তাপ নির্ণয়ের জন্য জাফরির কম্পন শক্তির মান জানা আবশ্যিক। স্থান তরঙ্গ পদ্ধতিতে তরঙ্গ ভেক্টর ব্যবধান  $dq$  এর মধ্যে কম্পনের ধরণের (mode) সংখ্যা  $L \frac{da}{\pi}$ , যেখানে  $L$  শৃঙ্খল সজ্জার দৈর্ঘ্য।  $0$  আর  $\frac{\pi}{a}$ -এর মধ্যে তরঙ্গ ভেক্টর সীমাবদ্ধ।  $T$  তাপমাত্রায় জাফরির কম্পন শক্তি,

$$E = \frac{L}{\pi} \int_0^{\pi/a} \frac{\hbar \omega_q}{\exp(\hbar \omega_q / kT) - 1} dq \quad (11.25)$$

এক্ষেত্রে সম্ভাব্য তরঙ্গ ভেক্টরের যোগফলের পরিবর্তে সমাকলন (integral) ব্যবহার করা হয়েছে।  $W_q$  আর  $q$ -এর মধ্যে সম্পর্ক (11.3) ব্যবহার করলে আমরা  $d_2$  কে প্রতিস্থাপিত করতে পারি

$$\frac{dq}{d\omega} d\omega = \frac{2d\omega}{a\omega_{\max} \cos(qa/2)} = \frac{2d\omega}{a(\omega_{\max}^2 - \omega^2)^{1/2}} \quad (11.26)$$

সুতরাং

$$E = \frac{2L}{\pi a} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{\omega \omega d\omega}{[\exp(\hbar \omega / kT) - 1][\omega_{\max}^2 - \omega^2]^{1/2}} \quad (11.27)$$

আপেক্ষিক তাপকে তাপমাত্রার অপেক্ষক (function) হিসাবে পেতে গেলে উপরোক্ত শক্তিকে  $T$  এর সাপেক্ষে অবকল (differentiate) করতে হবে। চিত্র 11.3 এ সংকট (critical) তাপমাত্রা  $\theta = \hbar \omega_{\max} / k = 200^\circ K$  এর জন্য আপেক্ষিক তাপের উন্নতির সাথে পরিবর্তন দেখানো হয়েছে (a

লেখ)। পারস্পরিক তুলনার জন্য আমরা ডিভাই প্রতিরূপ (model) আলোচনা করবো। একটি একমাত্রিক পরমাণু সজ্জার এই প্রতিরূপ ব্যবহার করার সময় আমাদের কম্পাঙ্ক বর্ণালীতে (spectrum) একটি উপযুক্ত অন্ত সীমা (cut-off) নির্ধারণ করতে হবে। সেক্ষেত্রে কম্পন শক্তি

$$E = \frac{L}{\pi C_s} \int_0^{\omega'_{\max}} \frac{\hbar \omega d\omega}{\exp(\hbar \omega / kT) - 1} \quad (11.28)$$

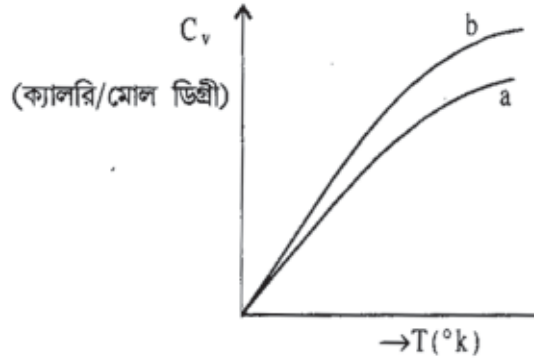
কম্পনের ধরণের মোট সংখ্যা কণা সংখ্যা  $N$  এর সমান ধরলে চরম সীমা  $\omega'_{\max}$  জানা যায়

$$\left( \frac{L}{\pi C_s} \right) \int_0^{\omega'_{\max}} d\omega = N$$

বা

$$\omega'_{\max} = \frac{N\pi C_s}{L} \quad (11.29)$$

মোট শক্তি  $E$  এর (11.28) সম্পর্ক ধরে আমরা যদি আপেক্ষিক তাপ হিসাব করি তাহলে চিত্র (11.3) এর উপরের লেখচিত্রটি (b) পাওয়া যায়। এখানেও সংকট তাপমাত্রা  $\theta = \hbar \omega'_{\max} / k = 200^\circ \text{K}$

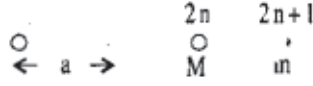


চিত্র 11.3. লেখ a একটি এক পরমাণু বিশিষ্ট রৈখিক জাফরির জন্য (11.27) অনুযায়ী আপেক্ষিক তাপের সাথে তাপমাত্রার পরিবর্তন। লেখ b-ডিভাই তত্ত্ব অনুযায়ী (11.28) থেকে  $C_v - T$  সম্পর্ক। দুটি ক্ষেত্রেই  $\theta = 200^\circ \text{K}$

## 11.7 দ্বিপারমাণুক রৈখিক জাফরির কম্পনের ধরণ

চিত্র 11.4 অনুযায়ী আমরা একটি দ্বি পরমাণুক রৈখিক জাফরির সম্ভাব্য কম্পন নিয়ে আলোচনা করব। নিকটতম প্রতিবেশীদের মধ্যে দূরত্ব  $a$ । কণাগুলো এমন ভাবে সাজানো আছে যে সব যুগ্ম সংখ্যাসূক্ত কণার ভর  $M$  আর অযুগ্ম গুলোর ভর  $m$ । আমরা যদি শুধু নিকটতম প্রতিবেশীর ভিতর মিথস্ক্রিয়া (interaction) ধরি তাহলে

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_{2n} &= f(x_{2n-1} + x_{2n+1} - 2x_{2n}) \\ m\ddot{x}_{2n+1} &= f(x_{2n} + x_{2n+2} - 2x_{2n+1}) \end{aligned} \quad (11.30)$$



চিত্র 11.4. M আর m ভর বিশিষ্ট সমদূরবর্তী রৈখিক পরমাণু সজ্জা

সমীকরণ (11.30) এর সমাধান চল তরঙ্গের প্রকৃতি অনুযায়ী ধরলে

$$x_{2n} = Ae^{-i(\omega t - 2nqa)} \text{ এবং } x_{2n+1} = Be^{-i(\omega t - (2n+1)qa)} \quad (11.31)$$

q এখানে কোন একটি বিশেষ ধরনের কম্পনের ধরনের তরঙ্গ ভেক্টর। A এবং B যথাক্রমে M ও m ভরবিশিষ্ট বস্তু কণার কম্পনের বিস্তার। (11.31) আর (11.30) থেকে পাই

$$\begin{aligned} (M\omega^2 - 2f)A + 2Bf \cos qa &= 0 \\ (m\omega^2 - 2f)B + 2Af \cos qa &= 0 \end{aligned} \quad (11.32)$$

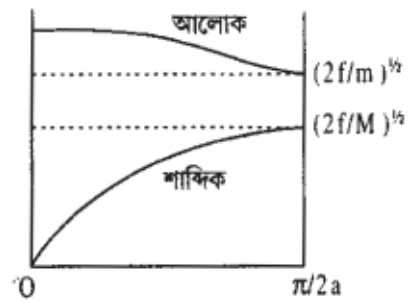
এই সমীকরণ দুটির শূন্য বর্জিত (non-vanishing) সমাধান থাকতে হলে A ও B এর সহগ (coefficient) গুলির ডিটারমিন্যান্টকে (determinant) শূন্য হতে হবে

$$\begin{vmatrix} (M\omega^2 - 2f) & 2f \cos qa \\ 2f \cos qa & (m\omega^2 - 2f) \end{vmatrix} = 0 \quad (11.33)$$

এখান থেকে আমরা কম্পাঙ্কের বর্গের দুটি সম্ভাব্য মান পাই

$$\omega^2 = f \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \pm f \left[ \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)^2 - \frac{4 \sin^2 qa}{Mm} \right]^{1/2} \quad (11.34)$$

যেহেতু  $\omega$  সবসময়ই ধনাত্মক,  $\omega^2$  এর প্রতিটি মান  $\omega$ -র একটি মান দেবে। অতএব আমরা দেখি যে প্রতিটি তরঙ্গ ভেক্টর q এর জন্য এক পরমাণু বিশিষ্ট জাফরির কম্পাঙ্কের তুলনায় দ্বিপরমাণুক জাফরির দুটি কৌণিক কম্পাঙ্ক  $\omega_+$  ও  $\omega_-$  পাওয়া যাচ্ছে।  $\omega$  বনাম q লেখচিত্রে (চিত্র 11.5) আমরা দুটি শাখা দেখতে পাই একটি  $\omega$ -এর জন্য শাব্দিক (acoustical) শাখা, অন্যটি  $\omega_+$ -এর জন্য আলোক (optical) শাখা। এই আলোক শাখার উত্তর বিভিন্ন পরমাণু গোষ্ঠীর বিপরীত দিকে গতির জন্য আর শাব্দিক শাখার উৎপত্তি বিভিন্ন পরমাণু গোষ্ঠীর একদিকে



চিত্র 11.5. দ্বি পরমাণুক রৈখিক জাফরির আলোক ও শাব্দিক শাখা।

গতির ফলে। আলোক শাখা নামটির উৎপত্তির কারণ CsCl (সিজিয়াম ক্লোরাইড) জাতীয় আয়নীয় কেলাসে পরমাণুগুলো কম্পিত হবার ফলে তড়িৎ সমবর্তন (polarisation) হয়, যার কারণে আলো আপতিত হলে তার শোষণ দেখতে পাওয়া যায়।

## 11.8 সারাংশ

এই অধ্যায়ে আমরা কঠিন পদার্থের কেলাসের মূল কাঠামো যে জাফরির তার কম্পনের বিষয় নিয়ে আলোচনা কর হয়েছে। প্রথমে অভিন্ন পরমাণু দিয়ে তৈরি এক পরমাণু সজ্জা বিশিষ্ট জাফরির কম্পন আলোচনায় তরঙ্গ ভেক্টর ও কম্পাঙ্কের সম্পর্ক পাওয়া গেছে যেখানে আমরা দেখেছি যে কম্পাঙ্কগুলো  $q$  এর সাথে পর্যাবৃত্ত সম্পর্ক রাখে। তারপর কঠিন পদার্থের কম্পনের ধরণ আর সরল সমঞ্জস কম্পকের সাদৃশ্য থেকে কম্পন শক্তি নির্ধারণ করা যায় যেখান থেকে আপেক্ষিক তাপের মান নির্ণয় করা যায়। দ্বিপারমাণুক জাফরির কম্পনের ধরণ থেকে তরঙ্গ ভেক্টর এবং কম্পাঙ্কের অন্তর্গত সম্পর্কে দুটি শাখা দেখতে পাওয়া যায় যেগুলো কঠিন পদার্থের ভৌত ধর্মকে প্রভাবিত করে।

## 11.9 সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলী

- ১। সমীকরণ (11.1) এর যথাযথ ব্যাখ্যা দিন।
- ২। একমাত্রিক সজ্জার যে কোন একটি পরমাণুর কম্পনের ধরণের সাথে অন্য আর একটি পরমাণুর কম্পনের ধরণের সম্পর্ক কী রকম?
- ৩। একমাত্রিক অভিন্ন পরমাণু জাফরির কম্পনের ধরণের উপর কী জাতীয় শর্ত আরোপিত হয়?
- ৪। কী কারণে একমাত্রিক জাফরির কম্পনের ধরণের সাথে সরল সমঞ্জস কম্পকের সাদৃশ্য কল্পনা করা হয়?
- ৫। একটি দ্বিপারমাণুক রৈখিক জাফরির কম্পনের ধরণ কয় প্রকার ও কী কী?

## 11.10 গাণিতিক সমস্যার সমাধান

উদাহরণ 1. অভিন্ন ভর বিন্দু দিয়ে রৈখিক সজ্জার ক্ষেত্রে প্রমাণ করুন যে

$$\omega = \sqrt{\frac{4f}{m}} \sin\left(\frac{qa}{2}\right)$$

সমাধান : রৈখিক সজ্জার ক্ষেত্রে  $n$  তম কণার গতি সমীকরণ

$$m\ddot{x}_n = f(x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n)$$

ধরা যাক  $x_n(t) = e^{-i(ax - qna)}$ ,  $q = 2\pi/\lambda$

$$\therefore \ddot{x}_n(t) = -\omega^2 e^{-i(\omega t - qna)}, \quad q = 2\pi/\lambda$$

$$x_{n-1}(t) = e^{-i(\omega t - qna + qa)} = e^{-iqa} \cdot e^{-i(\omega t - qna)}$$

$$x_{n+1}(t) = e^{-i(\omega t - qna - qa)} = e^{iqa} \cdot e^{-i(\omega t - qna)}$$

এগুলো গতিয় সমীকরণে বসিয়ে পাওয়া যায়

$$m\omega^2 = f(e^{-iqa} + e^{iqa} - 2)$$

$$\text{বা} \quad \omega^2 = \frac{4f}{m} \left( \sin^2 \frac{qa}{2} \right) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4f}{m}} \sin \frac{qa}{2}$$

উদাহরণ 2. একটি একমাত্রিক অভিন্ন পরমাণু দিয়ে তৈরি জাফরির ক্ষেত্রে দেখাও যে

$$x_n(t) = 2A_1 \sin qna \sin \omega t$$

সমাধান : গতিয়সমীকরণ

$$m\ddot{x}_n = f(x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n)$$

এই সমীকরণের দুটি চলতরঙ্গের সমাহার সমাধান হলো

$$x_n(t) = \left( A_1 e^{iqna + i\beta_1} + A_2 e^{-iqna + i\beta_2} \right) e^{-i\omega t}$$

সীমানা শর্ত আরোপ করলে  $x_0(t) = 0 = x_N(t)$ , সমস্ত  $t$  এর ক্ষেত্রে

$$\text{প্রথম শর্ত থেকে পাই} \quad \left( A_1 e^{i\beta_1} + A_2 e^{i\beta_2} \right) e^{-i\omega t} = 0$$

এক্ষেত্রে  $\beta_1 = \beta_2$  ধরলে  $A_1 = -A_2$

সুতরাং  $t$  এর বাস্তব মানের জন্য

$$x_n(t) = 2A_1 \sin qna \sin \omega t$$

উদাহরণ 3. দেখাও যে একমাত্রিক জাফরির ক্ষেত্রে  $q$  ধরনের কম্পনের মোট কম্পন শক্তি

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 S, \quad S = \sum_n \sin^2 qna$$

সমাধান : সরল সমঞ্জস কম্পক সমূহের মোট কম্পন শক্তি

$$E = E_{kin} + E_{pot}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \sum_n \left( \frac{dx_n}{dt} \right)^2, \quad E_{pot} = \int \sum_n \bar{F} \cdot \bar{dx}_n$$

গতিয় সমীকরণের একটি স্থানু তরঙ্গ সমাধান

ধরা যাক  $x_n(t) = \sin qna \cos \omega t$

$$\text{সেক্ষেত্রে } E_{kin} = \frac{1}{2} m \sum_n (dx_n / dt)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \sin^2 \omega t \sum_n \sin^2 qna$$

$$\begin{aligned} E_{pot} &= - \int \sum_n \bar{F} \cdot \bar{dx}_n = - \int \sum_n f(x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n) \cdot dx_n \\ &= \frac{1}{2} f \sum_n (2x_n^2 - x_n x_{n+1} - x_n x_{n-1}) \end{aligned}$$

যেহেতু  $x_n = \sin qna \cos \omega t$

$$\text{সুতরাং } E_{pot} = 2f \sin^2(qa/2) \cos^2 \omega t \sum_n \sin^2 qna$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 \cos^2 \omega t \sum_n \sin^2 qna, \quad m \omega^2 = 4f \sin^2(qa/2)$$

$$\text{অতএব } E = \frac{1}{2} m \omega^2 \sin^2 \omega t \sum_n \sin^2 qna + \frac{1}{2} m \omega^2 \cos^2 \omega t \sum_n \sin^2 qna$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 S, \quad S = \sum_n \sin^2 qna$$

### 13.11 কিছু গাণিতিক সমস্যা

1. শৃঙ্খল সজ্জার দৈর্ঘ্য  $L$  হলে দেখাও যে  $E = \frac{L}{\pi} \int_0^{\pi/a} \frac{\hbar \omega_q}{e^{\hbar \omega_q / kT} - 1} dq$ ।

2. সমীকরণ (11.26) প্রমাণ করুন।

3. দ্বিপরিমাণুক রৈখিক জাফরির ক্ষেত্রে সমীকরণ (11.34) যে সঠিক তা প্রমাণ করুন।

### 13.12 পরিশিষ্ট

এই অধ্যায়ে আমরা কঠিন পদার্থের কেলাস জাফরির বিভিন্ন মাত্রায় কম্পনের ধরণের ফলে উদ্ভূত শক্তির প্রকাশ আলোচনা করেছি এবং তার সাথে সরল সমঞ্জস কম্পকের সাদৃশ্য থাকার ফলে আপেক্ষিক তাপের মান নির্ধারণ করা গেছে।

---

## একক 12 □ কঠিন কেলাসিত পদার্থের আপেক্ষিক তাপ

---

গঠন

- 12.1 প্রস্তাবনা
- 12.2 উদ্দেশ্য
- 12.3 আপেক্ষিক তাপ সংক্রান্ত পরীক্ষার ফলাফল
- 12.4 আপেক্ষিক তাপের সনাতন তত্ত্ব
- 12.5 আপেক্ষিক তাপ সংক্রান্ত আইনস্টাইনের তত্ত্ব
- 12.6 ডিবাই এর তত্ত্ব
- 12.7 ডিবাই তত্ত্বের সীমাবদ্ধতা
- 12.8 সারাংশ
- 12.9 প্রান্তলিপি
- 12.10 গাণিতিক উদাহরণ
- 12.11 প্রশ্নাবলি ও উত্তর
- 12.12 পরিশিষ্ট

---

### 12.1 প্রস্তাবনা

---

কঠিন পদার্থ বলতে বর্তমান আলোচনায় আমরা কেলাসিত পদার্থ ধরে নেব। ঐরূপ পদার্থের আপেক্ষিক তাপ উষ্ণতার সঙ্গে পরিবর্তিত হতে দেখা যায়। বিশেষ করে নিম্ন উষ্ণতায় এই পরিবর্তন বেশ উল্লেখযোগ্য। যার তাত্ত্বিক ব্যাখ্যা বহুদিন বিজ্ঞানীদের মনোযোগ আকর্ষণ করেছে।

আপেক্ষিক তাপ সংক্রান্ত পরীক্ষার ফলাফল বিশ্লেষণ করলে দেখা যায় অপেক্ষাকৃত উচ্চ উষ্ণতায় সমস্ত কঠিন পদার্থের আণবিক তাপ নির্দিষ্ট (3R) হয়ে যায়, যাকে আপেক্ষিক তাপ সংক্রান্ত ডুলং-পেটিট সূত্র বলা হয়। কিন্তু উষ্ণতা যত নামতে থাকে দেখা যায় আপেক্ষিক তাপের মানও তত কমতে থাকে। যা সনাতন তত্ত্ব থেকে ব্যাখ্যা করা যায় না।

বিশ্ববিখ্যাত বিজ্ঞানী আইনস্টাইন উষ্ণতা হ্রাসে আপেক্ষিক তাপের হ্রাস-এর ব্যাখ্যা দেওয়ার জন্য কোয়ান্টাম তত্ত্বের প্রয়োগ করেন এবং আপেক্ষিক তাপের পরীক্ষালব্ধ ফলকে অনেকাংশে ব্যাখ্যা করতে সমর্থ হন। কিন্তু খুব কম উষ্ণতায় ( $T \rightarrow 0$ ) আপেক্ষিক তাপের পরিবর্তনের প্রকৃতি আইনস্টাইনের তত্ত্বের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়নি।

আইনস্টাইনের তত্ত্বের সীমাবদ্ধতাকে অতিক্রম করার জন্য বিজ্ঞানী ডিবাই ল্যাটিস কম্পন (lattice



vibration) এর ধারণা প্রয়োগ করেন এবং খুব কম উষ্ণতায় ( $T \rightarrow 0$ ) আপেক্ষিক তাপের পরিবর্তন ব্যাখ্যা করতে সমর্থ হন যা ডিবিই এর  $T^3$  সূত্র হিসেবে পরিচিত।

## 12.2 উদ্দেশ্য

কঠিন পদার্থের আপেক্ষিক তাপ সংক্রান্ত বিভিন্ন তত্ত্বই এই এককের আলোচ্য বিষয়।

কোন বস্তুর তাপবৃদ্ধি করলে বস্তুটির শক্তি দু'ভাবে বৃদ্ধি পায়।

(ক) পদার্থের অণুপরমাণুগুলি তাদের স্থির অবস্থানের সাপেক্ষে সরল দোলগতিতে স্পন্দিত হচ্ছে ধরা হয়। এই কম্পনকে সমগ্র কঠিন বস্তুর কেলাসের স্পন্দন মনে করা যেতে পারে এবং উষ্ণতা বৃদ্ধির সঙ্গে এই কম্পনশক্তির বৃদ্ধি ঘটে।

(খ) পদার্থের মুক্ত ইলেকট্রনগুলির শক্তি উষ্ণতার সঙ্গে বৃদ্ধি পেতে পারে।

অর্থাৎ কঠিন পদার্থের আপেক্ষিক তাপ কেলাসের ল্যাটিস কম্পন এবং ইলেকট্রনের শক্তি বৃদ্ধি—এই দুটির উপর নির্ভর করে। কিন্তু পদার্থের আপেক্ষিক তাপে ইলেকট্রন শক্তির প্রভাব খুব কম। তাই কঠিন পদার্থের আপেক্ষিক তাপে কেলাসের ল্যাটিস কম্পন নিয়েই এই অংশে আলোচনা হবে।

## 12.3 আপেক্ষিক তাপ সংক্রান্ত পরীক্ষার ফলাফল

একক ভরের বস্তুর একক উষ্ণতা বৃদ্ধি করতে প্রয়োজনীয় তাপকে আপেক্ষিক তাপ বলা হয়। আবার যদি এক মোল (mole) পদার্থের আপেক্ষিক তাপ ধরা হয় তাকে বলে মোলার আপেক্ষিক তাপ। একটি কঠিন পদার্থের উষ্ণতার পরিবর্তনে তার আণবিক আপেক্ষিক তাপের যে পরিবর্তন হয় তা তালিকা (T-12.1) এবং লেখচিত্রের (12.1) মাধ্যমে দেখানো হল।

T-12.1 : কতকগুলি কঠিন পদার্থের পারমাণবিক তাপ \*

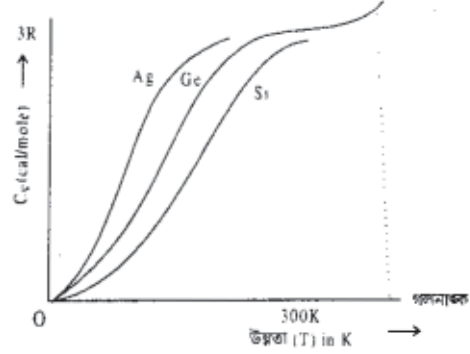
মৌল	পারমাণবিক ওজন	পারমাণবিক তাপ (Cal/deg)	
		273 K	50 K
Ag	107.88	6.02	2.70
Al	27.1	5.70	0.90
C	12.00	1.20	.00
Ca	40.09	6.18	2.74
Cu	63.57	5.78	1.44
Pb	207.10	6.30	5.17
Si	28.3	4.52	0.46
Zn	65.37	6.01	2.45

(\*International critical constants Vol 5)

তালিকা T-12.1 থেকে পরিষ্কার বোঝা যাচ্ছে যে আণবিক আপেক্ষিক তাপ তাপমাত্রার সঙ্গে হ্রাস পায় এবং পরমশূন্যে আপেক্ষিক তাপ প্রায় শূন্য হওয়ার প্রবণতা দেখা যায়। নস্টি, ক্যালেন্ডার, দিওয়ার প্রভৃতির পরীক্ষা উন্নতর সঙ্গে আপেক্ষিক তাপের এই পরিবর্তনকে সন্দেহাতীতভাবে প্রমাণ করে।

পরীক্ষা দ্বারা '0' K-তে যাওয়া যায় না তবে তাত্ত্বিক বিচারে  $T \rightarrow 0$  হলে  $C_V \rightarrow 0$  এই সিদ্ধান্তে পৌঁছানো যায়।

লেখচিত্রটিকে বিশ্লেষণ করলে দেখা যায় —



চিত্র 12.1

(ক) প্রায় সমস্ত পদার্থেরই আণবিক আপেক্ষিক তাপ সাধারণ উষ্ণতায় (300 K) বা তার চেয়ে বেশি উষ্ণতায় ধ্রুবক এবং তার মান  $3Nk$  যেখানে  $N$  হলো অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা এবং  $k$  বোল্টজম্যান (Boltzmann) ধ্রুবক। এক মোল পদার্থের ক্ষেত্রে ঐ ধ্রুবক আপেক্ষিক তাপের মান 6 ক্যালরি/মোল কেলভিন। একে ডুলং পেটিট সূত্র বলে। এই সূত্র গলনাঙ্কের একটু কম উষ্ণতা পর্যন্ত প্রযোজ্য।

(খ) কম তাপমাত্রায় আপেক্ষিক তাপের মান উল্লেখযোগ্য ভাবে হ্রাস পায় এবং পরমশূন্য উষ্ণতায় আপেক্ষিক তাপ শূন্যের কাছাকাছি হয়।

(গ) পরমশূন্যের কাছাকাছি আপেক্ষিক তাপ  $T^3$  নীতি দ্বারা নির্দেশিত হয়। অর্থাৎ

$$C_V \propto T^3$$

$$\text{or } C_V = CT^3$$

$C_V \rightarrow$  আপেক্ষিক তাপ,  $C \rightarrow$  ধ্রুবক।

উষ্ণতার সাথে আপেক্ষিক তাপের যে পরিবর্তন 12.1 চিত্রে সূচিত হয়েছে এবার তার তাত্ত্বিক ব্যাখ্যা আলোচনা করা যাক।

## 12.4 আপেক্ষিক তাপের সনাতন তত্ত্ব

আপেক্ষিক তাপের সনাতন তত্ত্বের অঙ্গীকারগুলি হ'ল —

(ক) প্রত্যেকটি কঠিন পদার্থ অসংখ্য পরমাণু দ্বারা গঠিত, যারা তাদের সাম্যাবস্থার সাপেক্ষে সরল দোলগতিতে দুলছে। এদের বলা হয় পারমাণবিক কম্পক (বা স্পন্দক) (atomic oscillator)।

(খ) পরমাণু কম্পকগুলি একই কম্পাঙ্কে কাঁপতে থাকে কিন্তু তাদের শক্তি বিভিন্ন যেহেতু তাদের কম্পনের বিস্তার বিভিন্ন।

(গ) পদার্থের অভ্যন্তরীণ শক্তি পারমাণবিক কম্পকের কম্পন জনিত।

(ঘ) পরমাণুর কম্পন শক্তি নিরবিচ্ছিন্ন ভাবে শূন্য থেকে বেশি যে কোন মানের হতে পারে।

(ঙ) একটি নির্দিষ্ট উন্নতায় একটি কেলাসের মোট শক্তি একটি পরমাণু কম্পকের গড় শক্তির ( $\bar{E}$ )  $N$  গুণ। যেখানে  $N$  হ'ল একটি কেলাসের মোট পরমাণু সংখ্যা।

সনাতন তত্ত্ব অনুযায়ী প্রত্যেকটি পরমাণু হ'ল এক একটি ত্রিমাত্রিক কম্পক যারা তাদের সাম্যাবস্থার সাপেক্ষে সরল দোলগতিতে দুলতে পারে।

কোনো পরমাণুর খুব সামান্য সরণ ( $x$ ) হলে পরমাণুটি সরলদোলগতিতে দুলতে থাকবে। একটি সরলদোলগতিতে কম্পনশীল কণার মোট শক্তি (একমাত্রিক)

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + V(x) \quad \dots \dots (12.1)$$

যেখানে  $P_x$  হ'ল ভরবেগ। 12.1 সমীকরণের প্রথম পদ গতিশক্তি এবং দ্বিতীয় পদ স্থিতিশক্তি। পরিসংখ্যানবিদ্যা অনুযায়ী  $E$  এবং  $E + dE$  এর মধ্যে অবস্থিত পরমাণুর সংখ্যা  $dN$  হলে।

$$dN \propto e^{-\frac{E}{k_B T}} dE$$

$$\text{অর্থাৎ} \quad dN = N_0 e^{-\frac{E}{k_B T}} .dE \quad \dots \dots (12.2)$$

এখানে  $T$  হ'ল উন্নতায় এবং  $k_B$  বোল্টজম্যান ধ্রুবক।  $dN$  পরমাণুর শক্তি  $E dN$  এর সমানুপাতিক, সুতরাং একটি পরমাণু কম্পকের গতিশক্তি

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} N_0 E e^{-\frac{E}{k_B T}} .dE}{\int_0^{\infty} N_0 e^{-\frac{E}{k_B T}} .dE} \quad \dots \dots (12.3)$$

$$\bar{E} = k_B T \quad \dots \dots (12.4)$$

[শক্তি বন্টনের নীতি অনুযায়ী তাপীয় সাম্যাবস্থায় প্রতি স্বাধীনতার মাত্রায় শক্তির পরিমাণ  $\frac{1}{2} k_B T$  সুতরাং প্রতি কম্পনের জন্য শক্তি হবে  $k_B T$ ]।

এখন কঠিন পদার্থটিতে যদি  $N$  সংখ্যক পরমাণু থাকে তাহলে পরমাণুর মোট শক্তি হবে

$$U = 3N\bar{E} = 3Nk_B T \quad \dots \dots (12.5)$$

3 সংখ্যাটি ত্রিমাত্রিক কম্পনের জন্য।

এক মোলের ক্ষেত্রে মোট শক্তি হবে

$$U = 3N_0 k_B T$$

যেখানে  $N_0$  হলো অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা

∴ পারমাণবিক আপেক্ষিক তাপ

$$C_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = 3N_0 k_B = 3R \quad \dots \dots (12.6)$$

যেখানে R হ'ল গ্যাস ধ্রুবক।

সুতরাং সনাতনী তত্ত্ব থেকে দেখা যাচ্ছে যে কঠিন পদার্থের আপেক্ষিক তাপ পরমাণুগুলির কম্পনের ফলশ্রুতি এবং তা উন্নততার উপর নির্ভর করে না। এই ফল পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে মিলে যায় যদি পদার্থটি বেশি উন্নতায় থাকে। কিন্তু যদি পদার্থটির উন্নতা হ্রাস পায়, বিশেষ করে যদি পরম শূন্যের কাছাকাছি অগ্রসর হয় তাহলে দেখা যায় আপেক্ষিক তাপ উন্নতা হ্রাসের সঙ্গে হ্রাস পাচ্ছে। এবং সেই হ্রাস অপরিবাহী পদার্থের ক্ষেত্রে  $T^3$ -এর সমানুপাতী, সুতরাং সনাতন তত্ত্বের সাহায্যে নিম্ন উন্নতায় আপেক্ষিক তাপ হ্রাসের সঠিক ব্যাখ্যা পাওয়া যায় না।

## 12.5 আপেক্ষিক তাপ সংক্রান্ত আইনস্টাইনের তত্ত্ব

সনাতন তত্ত্বের অসম্পূর্ণতা কিছুটা পূরণ করেছেন আইনস্টাইন। উন্নতা হ্রাসে আপেক্ষিক তাপ হ্রাসের গুণগত ব্যাখ্যা তিনি দিয়েছেন।

আইনস্টাইনের তত্ত্ব অনুযায়ী N সংখ্যক পরমাণু নিয়ে গঠিত একটি পদার্থকে  $3N$  একমাত্রিক সুসমঞ্জস স্পন্দক হিসেবে ভাবা যেতে পারে, যারা স্বাধীনভাবে কাঁপতে পারে কিন্তু তাদের শক্তির মানগুলি নিরবিচ্ছিন্ন হবে না, তা কতকগুলি বিচ্ছিন্ন মানের হবে। অর্থাৎ কৃষ্ণ বস্তু বিকিরণের ক্ষেত্রে প্রযোজিত প্ল্যাঙ্কের তত্ত্বকে কঠিন সজ্জা স্পন্দনের (lattice vibration) ক্ষেত্রে আইনস্টাইন প্রসারিত করেন।

তার মতে একটি সুসমঞ্জস পারমাণবিক স্পন্দকের সম্ভাব্য শক্তিস্তরগুলি হবে (কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণের ফোটন কণার মতো)

$$E_n = nh\nu = n\hbar\omega \quad \dots \dots (12.7)$$

এখানে  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ;  $h \rightarrow$  প্ল্যাঙ্ক ধ্রুবক এবং  $\omega$  হ'ল কৌণিক কম্পাঙ্ক।

শক্তিস্তর  $E$  এবং  $E + dE$ -এর মধ্যে  $dN$  সংখ্যক স্পন্দক থাকলে তাদের গতিশক্তি

$$\bar{E} = \frac{\sum E dN}{\sum dN} \quad \dots \dots (12.8)$$

পরিসাংখ্যিক তত্ত্ব অনুসারে

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega e^{\frac{-E_n}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/k_B T}}$$

$$\text{বা, } \bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega e^{\frac{-n\hbar\omega}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/k_B T}}$$

যদি  $-\frac{\hbar\omega}{k_B T} = x$  ধরা হয় তবে

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\hbar\omega \sum_{n=0}^{\infty} n e^{nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}} \\ &= \frac{\hbar\omega [e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x} + \dots + \dots\infty]}{[1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} \dots + \dots\infty]} \\ &= \hbar\omega \cdot \frac{d}{dx} [\ln(1 + e^x + e^{2x} + \dots + \dots)] \\ &= \hbar\omega \cdot \left[ \frac{d}{dx} \left\{ \ln \frac{1}{1 - e^x} \right\} \right] \\ &= \hbar\omega \cdot \left[ \frac{d}{dx} \{ \ln 1 - \ln(1 - e^x) \} \right] \\ &= \hbar\omega \cdot \left[ \frac{-1(-e^x)}{1 - e^x} \right] \\ &= \hbar\omega \frac{e^x}{1 - e^x} \\ &= \frac{\hbar\omega}{e^{-x} - 1} \end{aligned}$$

$$\bar{E} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad \left[ \because x = -\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right] \quad \dots \dots (12.9)$$

সুতরাং  $N$  ত্রিমাত্রিক স্পন্দকের মোট শক্তি

$$E = 3N\bar{E} = \frac{3N\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad \dots \dots (12.10)$$

অতএব পারমাণবিক আপেক্ষিক তাপ

$$\begin{aligned} C_V &= \frac{dE}{dT} = \frac{3N\hbar\omega e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \left( \frac{\hbar\omega}{k_B T^2} \right)}{\left( e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1 \right)^2} \\ &= 3Nk_B \left( \frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 \cdot \frac{e^{\hbar\omega/k_B T}}{\left( e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1 \right)^2} \end{aligned}$$

যদি লেখা যায়  $R = Nk_B$  এবং  $\frac{\hbar\omega}{k} = \theta_E$  (আইনস্টাইনের উষ্ণতা) তাহলে

$$C_V = 3R \left( \frac{\theta_E}{T} \right)^2 \frac{e^{\theta_E/T}}{\left( e^{\theta_E/T} - 1 \right)^2} \quad \dots \dots (12.11)$$

এটিই হল আইনস্টাইনের আপেক্ষিক তাপের সমীকরণ।

প্রথমে আইনস্টাইন কেবলমাত্র প্ল্যাঙ্ক এর ফরমুলা ব্যবহার করলেও পরে তিনি কোয়ান্টাম বলবিদ্যা প্রয়োগ করেন। কোয়ান্টাম বলবিদ্যা অনুযায়ী একটি স্পন্দকের সম্ভাব্য শক্তি হ'ল

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad \dots \dots (12.12)$$

যেখানে  $n = 0, 1, 2, \dots$  (অর্থাৎ শূন্য থেকে যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

12.7 নং সমীকরণের জায়গায় 12.12 নং সমীকরণ ব্যবহার করলে দেখা যাবে 12.9 নং সমীকরণ এর পরিবর্তিত রূপ হবে

$$\bar{E} = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad \dots \dots (12.13)$$

এর প্রথম পদটিকে বলা হয় শূন্য মাত্রার শক্তি (Zero point energy) কারণ

$$\bar{E} = \frac{\hbar\omega}{2} \text{ যখন } T=0$$

সুতরাং কোয়ান্টাম তত্ত্ব অনুযায়ী পরমশূন্য উষ্ণতায়ও পদার্থের কম্পন জনিত শক্তি আছে, অবশ্য এই প্রথম পদটি আপেক্ষিক তাপের রাশিমালার (সমীকরণ 12.11) কোন পরিবর্তন ঘটায় না।

এবার দেখা যাক উচ্চ উষ্ণতায় এবং নিম্ন উষ্ণতায় আইনস্টাইনের সমীকরণ কতটা আপেক্ষিক তাপের পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ,

(ক) উচ্চ উষ্ণতায় ( $T \gg \theta_E$ )

$$\text{যখন } T \gg \theta_E; \frac{\theta_E}{T} \ll 1$$

$$\therefore e^{\theta_E/T} = 1 + \frac{\theta_E}{T}$$

$$\therefore C_V = 3R \left( \frac{\theta_E}{T} \right)^2 \frac{1 + \frac{\theta_E}{T}}{\left( \frac{\theta_E}{T} \right)^2}$$

$$= 3R = 6 \text{ cal/mole}$$

সুতরাং উচ্চ উষ্ণতায় আইনস্টাইনের তত্ত্ব ডুলং-পেটিটের তত্ত্বের স্বীকৃতি দেয়।

(খ) নিম্নউষ্ণতায় : ( $T \ll \theta_E$ )

$$\text{এক্ষেত্রে } \frac{\theta_E}{T} \gg 1 \text{। সুতরাং } e^{\frac{\theta_E}{T}} \gg 1 \text{।}$$

$$\therefore C_V = 3R \left( \frac{\theta_E}{T} \right)^2 e^{-\frac{\theta_E}{T}} \dots \dots (12.14)$$

এই সমীকরণ থেকে বোঝা যায় যখন  $T \rightarrow 0$  আপেক্ষিক তাপ  $C_V \rightarrow 0$  যা পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে সামঞ্জস্যপূর্ণ। পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে আইনস্টাইনের সূত্রের তুলনা মূলক লেখচিত্র 12.2 চিত্রে দেখানো হয়েছে।

চিত্র থেকে বোঝা যায় আইনস্টাইনের লেখ পরীক্ষা লব্ধ ফলের সঙ্গে অনেকটাই সামঞ্জস্য পূর্ণ কিন্তু খুব কম উষ্ণতায় (তরল হিলিয়াম)  $C_V$  এর হ্রাসের হার পরীক্ষালব্ধ ফলের তুলনায় বেশি।

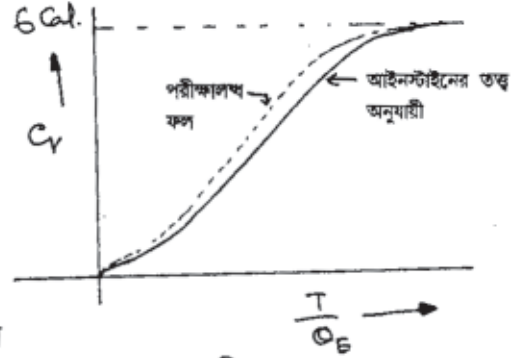
সীমাবদ্ধতা :

আইনস্টাইনের তত্ত্ব অনুযায়ী যখন  $\theta_E \ll T$

$$C_V \propto e^{-\frac{\theta_E}{T}}$$

কিন্তু পরীক্ষালব্ধ ফল অনুযায়ী খুব কম উষ্ণতায়

$$C_V \propto T^3$$



এই অসংগতির কারণ আইনস্টাইনের অতি সরল অঙ্গিকার যে সমস্ত পরমাণু স্পন্দকের কম্পাঙ্ক একই।

প্রকৃতপক্ষে কেলাসের মধ্যে পরমাণুগুলি মোটেই স্বাধীনভাবে স্পন্দিত হয় না। কারণ তারা কেলাসের সঙ্গে দৃঢ় ভাবে আবদ্ধ। এরূপ কেলাসের কম্পনের আলোচনা করেন ডিভাই (Debye)।

## 12.6 ডিভাই (Debye)-এর তত্ত্ব

ডিভাই এর তত্ত্বের মূল অঙ্গিকার গুলি হ'ল :

(ক) পদার্থের মধ্যে পরমাণুগুলি বিচ্ছিন্ন স্পন্দক নয়। বিভিন্ন পরমাণু স্পন্দক পরস্পরের সঙ্গে দৃঢ়ভাবে সংযুক্ত (coupled) সুতরাং পদার্থটিকে একটি নিরবিচ্ছিন্ন বস্তু ধরা যায় এবং পদার্থটির কম্পন হল স্থিতিস্থাপক কম্পন।

(খ) পদার্থটি একটি মাত্র নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কে কাঁপে না। পদার্থটির কম্পাঙ্কের একটি নির্দিষ্ট বিস্তৃতি আছে।

যখন একটি নিরবিচ্ছিন্ন কঠিন পদার্থের কম্পন হয় তখন দু ধরনের স্থিতিস্থাপক তরঙ্গের সৃষ্টি হয়।

(i) অনুপ্রস্থ তরঙ্গ, যার বেগ

$$C_t = \sqrt{\frac{\eta}{\rho}}$$

(ii) অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ, যার বেগ,

$$C_l = \sqrt{(K + \frac{4}{3}\eta) / \rho}$$

যেখানে  $\eta \rightarrow$  দৃঢ়তাগুণাঙ্ক,  $K \rightarrow$  আয়তন বিস্তৃতি গুণাঙ্ক,  $\rho \rightarrow$  পদার্থের উপাদানের ঘনত্ব।

কম্পাঙ্ক  $v$  এবং  $v+dv$  এর মধ্যে  $V$  আয়তনের কোন কঠিন পদার্থের স্বাধীন অনুদৈর্ঘ্য কম্পনের সংখ্যা

$$X_L = \frac{4\pi v^2 dv W}{c_l^3} \quad \dots \dots (12.15)$$



এবং স্বাধীন তীর্থক কম্পনের সংখ্যা

$$X_T = \frac{2.4\pi v^2 dV}{c_l^3} \quad \dots \dots (12.16)$$

12.16 সমীকরণে 2 সংখ্যাটি এসেছে সমাবর্তনের (polarisation) এর জন্য।

[12.15 এবং 12.16 সমীকরণের নির্ণয় পরিশিষ্টে দেওয়া হলো]।

ঘন মাধ্যমে স্থিতিস্থাপক তরঙ্গের তিনটি অবস্থা থাকে দুটি আলোর মতো লম্ব সমবর্তিত অবস্থা যার প্রতিটির ক্ষেত্রে গতিবেগ  $c_t$  এবং তৃতীয়টি অনুদৈর্ঘ্য অবস্থা যা আলোর ক্ষেত্রে অনুপস্থিত। সুতরাং  $v$  এবং  $v+dv$  এর মধ্যে  $V$  আয়তনের পদার্থের স্বাধীনভাবে কম্পনের সংখ্যা (modes of vibration)

$$\begin{aligned} Z(v) &= X_L + X_T \\ &= 4\pi V \left( \frac{1}{C_l^3} + \frac{2}{C_t^3} \right) v^2 dv \quad \dots \dots (12.17) \end{aligned}$$

সুতরাং স্বাধীনভাবে কম্পনের মোট সংখ্যা

$$\int Z(v)dv = \int 4\pi V \left( \frac{1}{C_l^3} + \frac{2}{C_t^3} \right) v^2 dv \quad \dots \dots (12.17)$$

একটি আদর্শ নিরবিচ্ছিন্ন বস্তুর ক্ষেত্রে কম্পাঙ্ক শূন্য থেকে অসীম পর্যন্ত পরিবর্তিত হতে পারে। কম্পাঙ্ক অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হলে শক্তি এবং আপেক্ষিক তাপের মান অসীম হয়, দৃশ্যতই সেরূপ সম্ভব নয়। ডিভাই পদার্থটিকে নিরবিচ্ছিন্ন ধরলেও পদার্থটির একটি নির্দিষ্ট সংখ্যক পরমাণু আছে। তা ধরে নিয়ে কম্পাঙ্কের একটি উচ্চসীমামান নির্দেশ করেন যাকে ডিভাই এর উচ্চসীমা মান কম্পাঙ্ক ( $v_D$ ) বলা হয়। এবং মোট কম্পনের সংখ্যা  $3N$ -এ সীমায়িত করেন। যেখানে  $N$  হলে পরমাণুসংখ্যা, কঠিন পদার্থের এই উচ্চসীমামান কম্পাঙ্ক (cut off frequency)  $v_D$  তীর্থক এবং অনুদৈর্ঘ্য কম্পনের ক্ষেত্রে একই, কম্পাঙ্কের নিম্নসীমামান অবশ্য শূন্য।

সুতরাং সমীকরণ 12.17 থেকে পাই,

$$\begin{aligned} \int Z(v)dv &= 4\pi V \left( \frac{1}{C_l^3} + \frac{2}{C_t^3} \right) \int_0^{v_D} v^2 dv = 3N \\ \text{বা, } 4\pi V \left( \frac{1}{C_l^3} + \frac{2}{C_t^3} \right) \frac{v_D^3}{3} &= 3N \quad \dots \dots (12.19) \end{aligned}$$

$$\text{বা, } v_D^3 = \frac{9N}{4\pi V} \left( \frac{1}{C_l^3} + \frac{2}{C_t^3} \right)^{-1}$$

$$\therefore v_D = \left[ \frac{9N}{4\pi V \left( \frac{1}{C_l^3} + \frac{2}{C_t^3} \right)} \right]^{1/3} \dots \dots (12.20)$$

$v_D$  নির্ভর করে  $C_l$  এবং  $C_t$  এর উপরে। সুতরাং একটি নির্দিষ্ট কঠিন পদার্থের ক্ষেত্রে  $v_D$  ধ্রুবক কিন্তু বিভিন্ন পদার্থের ক্ষেত্রে  $v_D$  বিভিন্ন।

আগেই দেখেছি, একটি স্পন্দকের গড়শক্তি (12.13 সমীকরণ),  $\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} + \frac{\hbar\omega}{2}$

সুতরাং পদার্থটির মোট শক্তি

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{v_D} Z(v) dv \left( \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} + \frac{\hbar\omega}{2} \right) \\ &= 4\pi V \left( \frac{1}{C_l^3} + \frac{2}{C_t^3} \right) \int_0^{v_D} \left( \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \right) v^2 dv \\ &= \frac{V\hbar}{2\pi^2} \left( \frac{1}{C_l^3} + \frac{2}{C_t^3} \right) \int_0^{v_D} \left[ \frac{\omega^3}{2} + \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \right] d\omega \quad [\because \omega = 2\pi\nu] \dots \dots (12.21) \end{aligned}$$

এখন  $\frac{\hbar\omega}{k_B T} = x$ ,  $\frac{\hbar v_D}{k_B T} = x_m$ ;  $\frac{\hbar v_D}{k_B} = \theta_D$  (ডিবাই উন্নত)

হলে 12.21 সমীকরণের পরিবর্তিত রূপ হবে

$$E = \frac{9}{8} N k_B \theta_D + 9 N k_B T \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{x_m} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \dots \dots (12.22)$$

যখন উন্নত বেশি অর্থাৎ যখন

$$T \gg \theta_D \text{ এবং } x \ll 1$$

$$e^x = 1 + x + x^2 + \dots$$

অতএব সমীকরণ 12.22 থেকে পাওয়া যায়

$$E = \frac{9}{8} Nk_B \theta_D + 9Nk_B T \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{x_m} \left( 1 - \frac{x}{2} \right) x^2 dx$$

$$= 3Nk_B T$$

∴ আপেক্ষিক তাপ

$$C_V = \frac{\partial E}{\partial T} = 3Nk_B = 3R$$

যা ডুলাং-পেটিটের সূত্র। সুতরাং উচ্চ উষ্ণতায় ডিবাই তত্ত্বের আপেক্ষিক তাপের মান পরীক্ষালব্ধ মানের সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ। অর্থাৎ উচ্চ উষ্ণতায় ডিবাই এর তত্ত্ব সনাতন তত্ত্বের স্বীকৃতি দেয়।

নিম্নউষ্ণতায়  $T \ll \theta_D$

$x_m$  এর মান  $\gg 1$ , সমাকল্যের হরের পদ  $(e^x - 1)^2$  এর মান এত বড়ো যে, সমাকলে  $x$ -এর উচ্চমানের অবদান খুবই কম, সেজন্য বেশি ভুল না করে আমরা উচ্চসীমাকে অসীম বলে ধরে নিতে পারি।

$$\therefore C_V = 9Nk_B \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^x \cdot x^4 dx}{(e^x - 1)^2} \quad \dots \dots (12.23)$$

$$= 9Nk_B \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \cdot \frac{4}{15} \pi^4 \quad [\text{From standard definite intergral}]$$

$$= \frac{12}{5} \pi^4 Nk_B \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \quad \dots \dots (12.24)$$

এটিই 'ডিবাই  $T^3$ ' সূত্র হিসেবে পরিচিত। এটি আপেক্ষিক তাপের পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে সবচেয়ে বেশি সঙ্গতিপূর্ণ এবং এই সংগতি লেখচিত্রের (চিত্র 12.2) সাহায্যে প্রকাশ করা হল।

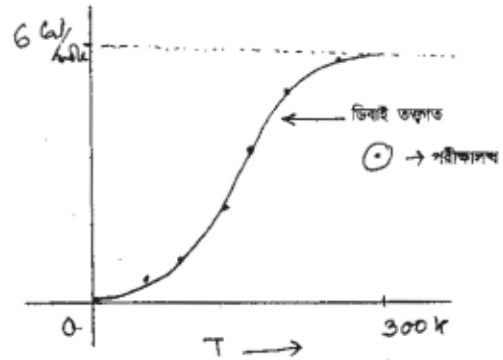
সমীকরণ 12.23 কে লেখা যায়,

$$C_V = 3RF_D \left( \frac{\theta_D}{T} \right)$$

যেখানে  $Nk_B = R$  এবং

$$F_D = 3 \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^x \cdot x^4 \cdot dx}{(e^x - 1)^2} \quad \dots (12.25)$$

এই  $F_D$ -কে বলা হয় ডিবাই অপেক্ষক।



চিত্র 12.3

## 12.7 ডিবাই তত্ত্বের সীমাবদ্ধতা

যদিও ডিবাই-এর তত্ত্বের সাহায্যে পরীক্ষালব্ধ আপেক্ষিক তাপের প্রকৃতি প্রায় সম্পূর্ণরূপেই ব্যাখ্যা করা যায় তবুও খুব সূক্ষ্মভাবে পরিমাপ করলে দেখা যায় খুব কম উষ্ণতা অঞ্চলে পরীক্ষার ফলাফলের সঙ্গে ডিবাই তত্ত্বের খুব সামান্য গরমিল আছে। ডিবাই-এর তত্ত্ব অনুযায়ী 'T<sup>3</sup>' সূত্র ভালভাবে প্রযোজ্য হয় যদি  $T \leq 0.1\theta_D$  হয়

কিন্তু Blackman-এর বিশ্লেষণ দেখিয়েছে যে ডিবাই অঞ্চল শুরু হয়েছে যখন  $T \leq \frac{\theta_D}{50}$ । যা ডিবাই

এর মতের অনেক কম উষ্ণতায়। এই সীমাবদ্ধতার মোটামুটি কারণগুলি হল :

(১) ডিবাই এর তত্ত্বে পদার্থটিকে সমদৈশিক ধরা হয়েছে। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে তা নয়। তাছাড়া ডিবাই এর তত্ত্বে কেলাসের গঠনের বিভিন্নতার কথা ভাবা হয়নি।

(২) ডিবাই এর তত্ত্বে কঠিন পদার্থের সব কণাগুলিকে একই রকমের ধরা হয়েছে কিন্তু কেলাসাকার কঠিন পদার্থ যেমন NaCl এর ক্ষেত্রে দু'রকম কণা সোডিয়াম আয়ন ও ক্লোরিন আয়ন বর্তমান, এরকম ক্ষেত্রে ডিবাই এর তত্ত্ব সরাসরি প্রযোজ্য নয়, পরিবর্তনের প্রয়োজন।

(৩) ডিবাই এর তত্ত্বে তীর্যক ও অনুদৈর্ঘ্য দু'ধরনের তরঙ্গের ক্ষেত্রেই উচ্চ সীমামান কম্পাঙ্ক  $\nu_D$  একই ধরা হয়েছে, কিন্তু  $C_L$  এবং  $C_T$  আলাদা হওয়ার জন্য  $\nu_D$  ও ভিন্ন হবে। এটি ধরলে ডিবাই তত্ত্ব আরও ভালভাবে পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে সামঞ্জস্য পূর্ণ হবে।

## 12.8 সারাংশ

(ক) কোন পদার্থের আপেক্ষিক তাপে পদার্থের পরমাণুর কম্পন এবং পরমাণুর ইলেকট্রনের প্রভাব আছে। কঠিন পদার্থের ক্ষেত্রে অবশ্য আপেক্ষিক তাপে ইলেকট্রনীয় প্রভাব খুব কম।

(খ) আপেক্ষিক তাপের পরীক্ষালব্ধ ফল : আপেক্ষিক তাপের পরীক্ষালব্ধ ফল বিশ্লেষণ করলে দেখা যায় যে ঘরের উষ্ণতা বা তার বেশি উষ্ণতায় কোন পদার্থের পারমাণবিক তাপ ধ্রুবক (6 cal/mole K) কিন্তু নিম্ন উষ্ণতায় বিশেষ করে পরম উষ্ণতার কাছাকাছি আপেক্ষিক তাপ উষ্ণতা হ্রাসের সঙ্গে উল্লেখযোগ্য ভাবে হ্রাস পায়।

(গ) তত্ত্বগত ব্যাখ্যা : আপেক্ষিক তাপের তত্ত্বগত ফল ব্যাখ্যা করার জন্য বিভিন্ন তত্ত্বগুলি হল :

(i) সনাতন তত্ত্ব : এটি সনাতন শক্তির সমবিভাজন সূত্রের উপর নির্ভরশীল।

পদার্থের পরমাণুগুলিকে এক একটি স্বাধীন সমঞ্জস স্পন্দক ধরা হয়েছে যারা একটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কে কাঁপছে এবং এই কম্পাঙ্কগুলির নিরবিচ্ছিন্ন শক্তিস্তর থাকতে পারে। এই তত্ত্ব ঘরের উষ্ণতায় আপেক্ষিক তাপের মান ধ্রুবক এই ঘটনা ব্যাখ্যা করতে সক্ষম। একে ডুলাং-পেটিট সূত্র বলে। কিন্তু নিম্ন উষ্ণতায় আপেক্ষিক তাপ হ্রাসের ব্যাখ্যা দিতে পারে না।

(ii) আইনস্টাইনের তত্ত্ব : প্ল্যাঙ্কের কৃষ্ণবস্তু বিকিরণের তত্ত্ব প্রয়োগ করে আইনস্টাইন বলেন পরমাণু স্পন্দকের শক্তি নিরবিচ্ছিন্ন নয়। 'এ' শক্তি নির্দিষ্ট হয় প্ল্যাঙ্কের সূত্র  $E = nh\nu$  দ্বারা। আইনস্টাইন প্ল্যাঙ্কের সূত্র এবং Boltzman distribution ধরে কণার গড়শক্তি নির্ণয় করেন।

আইনস্টাইনের তত্ত্বের প্রয়োগে উচ্চউষ্ণতায়তো বটেই নিম্নউষ্ণতায় ও আপেক্ষিক তাপের হ্রাস ব্যাখ্যা করেন। যদিও পরমশূন্যের উষ্ণতার কাছাকাছি আপেক্ষিক তাপের হ্রাস পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে সম্পূর্ণ মেলে না, এক্ষেত্রে আইনস্টাইনের নির্দেশিত আপেক্ষিক তাপের হ্রাস পরীক্ষালব্ধ ফলের তুলনায় বেশি।

(iii) ডিবাই এর তত্ত্ব : আইনস্টাইনের তত্ত্বে অসংগতি দূর করেন ডিবাই। তাঁর মতে পরমাণু স্পন্দক গুলি মোটেই স্বাধীন স্পন্দক নয় বরং তারা কেলাসের সঙ্গে খুবই দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ। সুতরাং উষ্ণতা বৃদ্ধির জন্য পদার্থের কম্পনকে পরমাণু স্পন্দক না ধরে সজ্জাস্পন্দক (Lattice vibration) হিসেবেই ধরা উচিত। ডিবাইও স্পন্দনের শক্তি কোয়ান্টাম বলবিদ্যা অনুযায়ী কতকগুলি বিচ্ছিন্ন মানের হতে পারে ধরে নেন। কেলাসের কম্পন অনূর্ধ্ব্য ও অনুপ্রস্থ ধরে নিয়ে কম্পনাঙ্কের একটি উচ্চসীমা নির্দেশ করেন যাতে মোট স্বাধীনতার মাত্রা (degree of freedom) অসীম না হয়ে  $3N$  হয়।

ডিবাই এর তত্ত্ব পরীক্ষালব্ধ ফলকে সম্পূর্ণভাবে ব্যাখ্যা করতে সক্ষম।

## 12.9 প্রান্তুলিপি

পরমাণু স্পন্দক = atomic oscillator

সজ্জাস্পন্দন = lattice vibrations

সমদৈশিক = isotropic

## 12.10 গাণিতিক উদারণ

(a) আইনস্টাইনের তত্ত্ব প্রয়োগ করে কোন একটি পদার্থের  $100\text{ K}$ -এ আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় করুন। পদার্থটির আইনস্টাইন তাপমাত্রা  $157\text{ K}$ । পদার্থটির আইনস্টাইন কম্পাঙ্ক নির্ণয় করুন।

$$R = 1.99 \text{ cal/mole-K} ; h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ unit}$$

$$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ unit}$$

উত্তর : আপনারা জানেন আইনস্টাইনের তত্ত্ব অনুযায়ী আপেক্ষিক তাপ

$$C_V = 3R \left( \frac{\theta_E}{T} \right)^2 \frac{e^{-\frac{\theta_E}{T}}}{\left( e^{-\frac{\theta_E}{T}} - 1 \right)^2}$$

এক্ষেত্রে  $\theta_E = 157\text{ K}$ ,  $T = 100\text{ K}$ ,

$$\text{সুতরাং } \frac{\theta_E}{T} = \frac{157}{100} = 1.57$$

যেহেতু  $R = 1.99 \text{ cal/mole-K}$

$$\therefore C_V = \frac{3 \times 1.99 \times (1.57)^2 \times e^{1.57}}{(e^{1.57} - 1)^2}$$

$$= 4.88 \text{ cal/mole-K}$$

আইনস্টাইন কম্পাঙ্ক

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{k_B \theta_E}{h} \\ &= \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 157}{6.6 \times 10^{-34}} \\ &= 3.28 \times 10^{12} \text{ হার্টজ (Hertz)} \end{aligned}$$

(b) কোন পদার্থের 36.8 K উন্নতায়  $C_V = 2.77 \text{ JK}^{-1} \text{ mole}^{-1}$ , ডিবাই উন্নতা নির্ণয় করুন।

উত্তর। যেহেতু 36.8K বেশ কম উন্নতা, এক্ষেত্রে ডিবাই এর সূত্র হল

$$C_V = \frac{12\pi^4}{5} R \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3$$

যেখানে  $\theta_D$  হল ডিবাই উন্নতা

$$\text{সুতরাং } 2.77 = \frac{12 \times (3.14)^4}{5} \times 8.31 \times \left( \frac{36.8}{\theta_D} \right)^3$$

$$\therefore \theta_D = 327 \text{ K}$$

---

## 12.11 প্রশ্নাবলি ও উত্তর :

---

প্রশ্ন-1 : ডুলং পেটিটের সূত্র কী ? আইনস্টাইন কিভাবে ডুলং পেটিটের অসংগতি ব্যাখ্যা করেছেন।

উত্তর : ডুলং পেটিটের সূত্র : কঠিন পদার্থের পারমাণবিক আপেক্ষিক তাপের মান নির্দিষ্ট। এর মান  $6 \text{ cal/mole-K}$ ।

অসংগতি : ঘরের উষ্ণতায় বা তার চেয়ে বেশি উষ্ণতায় ডুলং পেটিটের সূত্র মোটামুটি ঠিক। কিন্তু নিম্ন উষ্ণতায় বিশেষ করে পরম উষ্ণতার কাছাকাছি পদার্থের আপেক্ষিক তাপ উষ্ণতা হ্রাসের সঙ্গে হ্রাস পেতে থাকে, যা ডুলং পেটিটের সূত্র ব্যাখ্যা করতে পারে না।

আইনস্টাইনের ব্যাখ্যা : সনাতন তত্ত্বে পদার্থের পরমাণুগুলিকে কতকগুলি স্বাধীন পরমাণু স্পন্দক হিসেবে ধরা হয়েছিল, যার কম্পনজনিত শক্তিস্তরগুলি নিরবিচ্ছিন্ন হতে পারে। আইনস্টাইনের মত অনুযায়ী পরমাণু স্পন্দকের শক্তির মান নিরবিচ্ছিন্ন হতে পারে না। তিনি কৃষ্ণবস্তুর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য প্ল্যাঙ্ক এর তত্ত্ব প্রয়োগ করেন এবং ধরে নেন যে একটি পরমাণু স্পন্দকের শক্তির মান নিরবিচ্ছিন্ন নয় এর মান  $E = nh\nu$  সূত্রানুযায়ী হয়। আইনস্টাইনের এই তত্ত্ব নিম্নউষ্ণতায় আপেক্ষিক তাপের ব্যবহারকে অনেকাংশে ব্যাখ্যা করে।

প্রশ্ন-2 : কঠিন পদার্থের আপেক্ষিক তাপের আইনস্টাইনের তত্ত্ব ব্যাখ্যা করুন।

উত্তর : পাঠ্যাংশে 12.5 অনুচ্ছেদ দেখুন।

প্রশ্ন-3 : (ক) ডিভাই এর তত্ত্ব কী ?

(খ) খুব কম উষ্ণতায় ডিভাই তত্ত্ব কতটা পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে সামঞ্জস্যপূর্ণ।

(গ) ডিভাই এর কম্পাঙ্ক কী ?

উত্তর : (ক) পাঠ্যাংশে 12.8 এর গ(iii) অনুচ্ছেদ দেখুন।

(খ) পাঠ্যাংশে 12.7 এর অনুচ্ছেদ দেখুন।

(গ) কোন পদার্থের সজ্জাকম্পন এর কম্পাঙ্কের মান শূন্য থেকে অসীম পর্যন্ত যে কোন মানের হতে পারে। কিন্তু ডিভাই কম্পাঙ্কের একটি সর্বোচ্চ সীমামান নির্ধারণ করেন যা ডিভাই কম্পাঙ্ক নামে পরিচিত। এই কম্পাঙ্কের কঠিনের অনুদৈর্ঘ্য এবং তীর্যক কম্পনের কম্পাঙ্ক একই।

প্রশ্ন-4 : কঠিন পদার্থের কম্পনের ক্ষেত্রে ফোননের ধারণা দিন। ফোননের সঙ্গে ফোটনের তুলনা করুন।

উত্তর : কৃষ্ণ বস্তুর বিকিরণের ব্যাখ্যা দেওয়ার সময় প্ল্যাঙ্ক সরল সমঞ্জস স্পন্দকের কল্পনা করেছিলেন এবং তার সম্ভাব্য শক্তিস্তরকে  $E = nh\nu$  সূত্রের সাহায্যে নির্দিষ্ট করেছিলেন যেখানে  $h\nu$  একটি ফোটন কনার শক্তি।

একটি কঠিন পদার্থের কণাগুলির স্পন্দনের ক্ষেত্রেও পরমাণু স্পন্দকগুলির শক্তিস্তরকে নির্দিষ্ট করে কম্পনের শক্তির বিন্যাসকে ফোনন কণার শক্তির বিন্যাস রূপে ব্যাখ্যা দেওয়া যায়।

ডিভাই এর তত্ত্ব থেকে পাওয়া যায় খুব কম উষ্ণতায়

$$E = 9Nk_B T \left( \frac{k_B T}{h\nu_0} \right)^3 \int_0^{\infty} \frac{e^x dx}{e^x - 1}$$

$$\therefore E \propto T^4$$

এই ফলাফলটি কৃষ্ণ বস্তুর বিকিরণের ঘনত্ব সম্পর্কিত স্টিফেনের সূত্রের অনুরূপ। সুতরাং ডিভাই তত্ত্বের ফোনন এবং কৃষ্ণ বস্তুর বিকিরণে ফোটন একই পরিসংখ্যান তত্ত্ব অনুসরণ করে। কেবলমাত্র একটিই পার্থক্য আছে। ফোনন  $T^4$  নীতি অনুসরণ করে খুব কম উষ্ণতায় কিন্তু ফোটন  $T^4$  নীতি অনুসরণ করে যে কোন উষ্ণতায়।

## 12.12 পরিশিষ্ট

আপনারা জানেন  $l$  দৈর্ঘ্যের একটি একমাত্রিক তার যার দু'প্রান্তই বাঁধা, সেখানে সম্ভাব্য স্থান তরঙ্গগুলির তরঙ্গ দৈর্ঘ্য  $\lambda$  এবং নিম্নলিখিত সম্পর্ক যুক্ত।

$$\frac{n\lambda}{2} = l \quad \dots \dots (12.26)$$

যেখানে  $n$  হল একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। যদি  $Y(x,t)$  তারটির উপর যে কোন মুহূর্তে সরণের পরিমাণ নির্দেশ করে তবে

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad \dots \dots (12.27)$$

যেখানে  $V$  হল তারের মধ্যে তরঙ্গের বেগ। 12.27 সমীকরণ সমাধান করে পাওয়া যায়

$$Y = A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \frac{2\pi t}{T} \quad \dots \dots (12.28)$$

12.26 সমীকরণে প্রয়োগে পাওয়া যায়

$$Y = A \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \cos 2\pi \nu_n t \quad \dots \dots (12.29)$$

এখানে  $n$  একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং  $n \gg 1$ । সমীকরণ 12.29 দ্বারা নির্দেশিত তরঙ্গের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য এবং কম্পাঙ্ক যথাক্রমে হবে

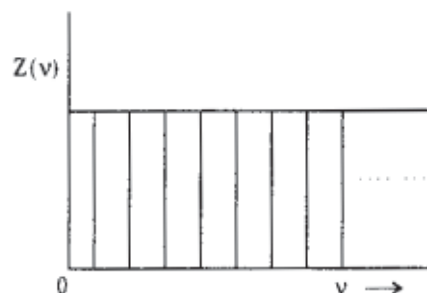
$$\lambda_n = \frac{2l}{n}$$

বা  $\nu_n = \frac{V}{\lambda_n} = \nu \left[ \frac{V}{2l} \right] \quad \dots \dots (12.30)$

এখানে কম্পাঙ্কে বিস্তৃতি হবে স্বতন্ত্র এবং চিত্রের ন্যায়

$\nu$  এবং  $\nu + d\nu$  এই বিস্তৃতির মধ্যে স্বাধীন কম্পনের সংখ্যা হবে

$$dn = \left( \frac{2l}{V} \right) d\nu \quad \dots \dots (12.31)$$





এখন ত্রিমাত্রিক ক্ষেত্রে তরঙ্গের সমীকরণ হবে

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad \dots \dots (12.32)$$

এখন  $l$  দৈর্ঘ্যের একটি ঘনককে নিরবিচ্ছিন্ন মাধ্যম ধরা হল যার তলগুলির অবস্থান স্থির তবে সমীকরণ 12.32 সমীকরণটির সমাধান গুলি হবে [12.29 সমীকরণ অনুসারে]

$$Y(x, y, z, t) = A \sin \frac{n_x \pi x}{l} \sin \frac{n_y \pi y}{l} \sin \frac{n_z \pi z}{l} \cos 2\pi \nu_n t \quad \dots \dots (12.33)$$

যেখানে  $n_x, n_y$  এবং  $n_z$  হল... (12.33) ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যা এবং এদের মান  $\geq 1$

$$\text{এখন } \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -Y \frac{n_x^2 \pi^2}{l^2}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -Y \frac{n_y^2 \pi^2}{l^2}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} = -Y \frac{n_z^2 \pi^2}{l^2}$$

$$\text{এবং } \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = -Y 4\pi^2 \nu^2$$

এই মানগুলি (12.32) সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\frac{\pi^2}{l^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{4\pi^2 \nu^2}{V^2}$$

$$\text{সুতরাং } n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = n^2 = \frac{4l^2 \nu^2}{V^2} = \frac{4l^2}{\lambda^2} \quad \dots \dots (12.34)$$

অর্থাৎ ত্রিমাত্রিক ক্ষেত্রে তরঙ্গ দৈর্ঘ্য এবং কম্পাঙ্ক  $n_x, n_y$  এবং  $n_z$  এই তিনটি ধনাত্মক সংখ্যা দ্বারা নির্ধারিত হবে।

ধরা যাক  $v$  এবং  $v + dv$  বিস্তার এর মধ্যে স্বাধীন কম্পনের সংখ্যা  $Z(v)dv$ ।

কতকগুলি বিন্দু সজ্জার মধ্যে প্রত্যেকটি বিন্দু ধনাত্মক  $n_x, n_y, n_z$  সাহায্যে নির্দেশ করা যায়।

একটি ঘনকের  $n$  এবং  $n + dn$  মধ্যে বিন্দুর সংখ্যাগুলি হবে।

$$\frac{1}{8} \left[ \frac{4}{3} \pi (n + dn)^3 - \frac{4\pi n^3}{3} \right]$$

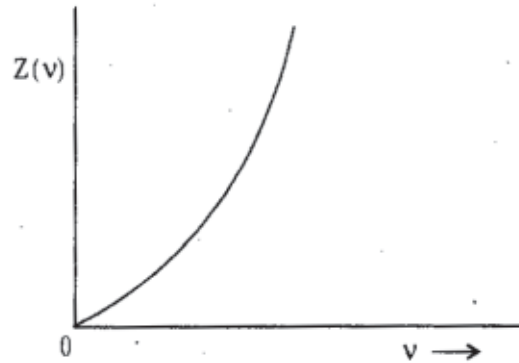
$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{6} [n^3 + (dn)^3 + 3n^2 dn + 3n(dn)^2 - n^3] \\
&= \left(\frac{\pi}{6}\right) [3n^2 dn] \quad [\because (dn)^2, (dn)^3 \text{ নগণ্য}] \\
&= \frac{\pi}{2} n^2 dn \quad \dots \dots (12.35)
\end{aligned}$$

বিন্দু সজ্জাগুলির মধ্যে প্রতিটি বিন্দু  $n_x, n_y$  এবং  $n_z$  দ্বারা নির্দেশিত হবে। সমীকরণ 12.33 অনুযায়ী  $n_x, n_y, n_z$  এর বিভিন্ন মানগুলির এক একটি সমবায় এক একটি নির্দিষ্ট কম্পন নির্দেশ করবে, এবং সমীকরণ 7.35 সম্ভাব্য নির্দিষ্ট কম্পনের সংখ্যা নির্দেশ করবে। সমীকরণ 7.34 থেকে  $n$  এবং  $dn$  এর মান সমীকরণ 7.35 এ বসিয়ে পাওয়া যাবে

$$\begin{aligned}
Z(v)dv &= \left(\frac{\pi}{2}\right) \left[\frac{4l^2 v^2}{V^2}\right] \left(\frac{2l}{V}\right) dv \\
Z(v)dv &= \frac{4\pi l^2 v^2 dv}{V^3} \quad \dots \dots (12.36)
\end{aligned}$$

সুতরাং প্রতি একক আয়তনে স্বাধীন কম্পনের সংখ্যা হবে

$$Z(v)dv = \frac{4\pi n v^2 dv}{V^3} \quad \dots \dots (12.37)$$



ত্রিমাত্রিক কম্পাঙ্কের বিস্তার লেখ (সমীকরণ 12.37)

---

## একক 13 □ মুক্ত ইলেকট্রন তত্ত্ব (Free electron theory)

---

- 13.1 প্রস্তাবনা
- 13.2 উদ্দেশ্য
- 13.3 পুরাণে তত্ত্বের অসুবিধা
- 13.4 মুক্ত ইলেক্ট্রন প্রতিলিপ (model)
- 13.5 ফের্মি ডিরাক বন্টন (distribution)
- 13.6 ইলেক্ট্রনীয় আপেক্ষিক তাপ
- 13.7 মুক্ত ইলেক্ট্রনের উপ চুম্বকত্ব (paramagnetism)
- 13.8 ধাতু থেকে তাপীয় ইলেক্ট্রনের নিঃসারণ
- 13.9 ধাতুর তড়িৎপরিবহনের কিছু বৈশিষ্ট্য
- 13.10 বোলজম্যানের পরিবহন (transport) সমীকরণ
- 13.11 সমারফেল্ডের তড়িৎ পরিবহন তত্ত্ব
- 13.12 সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলী
- 13.13 গাণিতিক সমস্যা
- 13.14 পরিশিষ্ট

---

### 13.1 প্রস্তাবনা

---

উচ্চ তড়িৎ আর তাপীয় পরিবাহিতা (conductivity) যে কোনো ধাতুর উল্লেখযোগ্য ধর্ম। পরমাণুর একটি অংশ হিসেবে ইলেক্ট্রনের আবিষ্কারের পর ধাতুর উপরোক্ত ধর্মগুলোর ব্যাখ্যা করতে গিয়ে ডুড্ ও লোরেনৎজ্ ধাতুর ভিতর কিছু সংখ্যক মুক্ত ইলেক্ট্রনের উপস্থিতির কথা বলেন। ধরে নেওয়া হয়েছিল ঐ ইলেক্ট্রনগুলো ধাতব জাফরির ভিতর চলাচল করতে পারে। আর তার ফলে পরমাণুর সাথে তাদের সংঘর্ষ লাগে এবং তাদের শক্তির পরিবর্তন ঘটে। এই শক্তির প্রকাশ দেখতে পাওয়া যায় ধাতুর আপেক্ষিক তাপে। ধাতুতে তাপ প্রয়োগের ফলে এই আপাত মুক্ত ইলেক্ট্রনের প্রকৃত পক্ষে মুক্ত হয়ে ধাতু থেকে নিঃসৃত হয়। তড়িৎ পরিবহনের ক্ষেত্রে ও এই মুক্ত ইলেক্ট্রনের গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা দেখতে পাওয়া যায়।

---

### 13.2 উদ্দেশ্য

---

এই অধ্যায়ে আমরা ধাতব পদার্থের তাপ ও তড়িৎ পরিবহনের ক্ষেত্রে মুক্ত ইলেক্ট্রনের ভূমিকা আলোচনা করবো। মুক্ত ইলেক্ট্রনের তত্ত্বের সাহায্যে ধাতু থেকে ইলেক্ট্রনের তাপীয় নিঃসরণের ব্যাখ্যা কীভাবে দেওয়া যেতে পারে, তা জানা যাবে। আপেক্ষিক তাপের মান নির্ধারণ মুক্ত ইলেক্ট্রনগুলো কীভাবে সাহায্য করে তাও জানা যাবে।

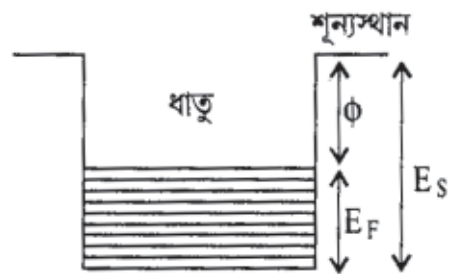
### 13.3 পুরাণো তত্ত্বের অসুবিধা

ডুড এবং লোরেন্জ্ ধাতুর ভিতর কিছু সংখ্যক মুক্ত ইলেক্ট্রনের উপস্থিতি আছে ধরে নিয়ে আর ঐ ইলেক্ট্রনেরা বোল্জ্‌ম্যান সংখ্যায়ন মেনে চলে তার ভিত্তিতে ধাতব পদার্থের তাপ ও তড়িৎ পরিবহনের ব্যাখ্যার চেষ্টা করেছিলেন। কিন্তু এই সনাতন (classical) ইলেক্ট্রন তত্ত্বের কতগুলো অসুবিধা ছিল যেমন : সনাতন সংখ্যায়ন তত্ত্বের অনুসারে একটা মুক্ত ইলেক্ট্রনের গড় গতি শক্তি  $3kT/2$ ,  $k =$  বোল্জ্‌ম্যান ধ্রুবক,  $T =$  পরম তাপমাত্রা। তাহলে যদি কোন ধাতব পদার্থের প্রতি গ্রাম পরমাণুতে  $N$  সংখ্যক মুক্ত ইলেক্ট্রন থেকে থাকে, তবে মোট গতিশক্তির পরিমাণ  $3NkT/2$ । অতএব প্রতি গ্রাম পরমাণুতে আপেক্ষিক তাপের মান  $3Nk/2$ । এখন ধাতব পদার্থের আলোক প্রতিফলন গুণাঙ্কের পরীক্ষালব্ধ মান থেকে ধরে নিতে হয় যে প্রতিটা পরমাণুতে একটি করে মুক্ত ইলেক্ট্রনের উপস্থিতি আছে। সেক্ষেত্রে ইলেক্ট্রনীয় আপেক্ষিক তাপের মান  $3R/2 \approx 3$  ক্যালরি প্রতি গ্রাম পরমাণু প্রতি ডিগ্রী। অন্য দিকে উচ্চ তাপমাত্রায় জাফরি কম্পনের জন্য আপেক্ষিক তাপের পরিমাণ  $3R$  প্রতি গ্রাম পরমাণুতে। তাহলে আমাদের এই সিদ্ধান্তে আসতে হয় যে অন্তরক (insulator) পদার্থের তুলনায় ধাতব পদার্থের আপেক্ষিক তাপ 50% বেশি। কিন্তু পরীক্ষা করে দেখা গেছে যে ইলেক্ট্রনের আপেক্ষিক তাপের ক্ষেত্রে অবদান যথেষ্টই কম। দ্বিতীয় অসুবিধা আসে মুক্ত ইলেক্ট্রনের চৌম্বক ধর্মের ব্যাপারে। প্রতিটি ইলেক্ট্রনের নিজস্ব ঘূর্ণনের (spin) জন্য চৌম্বক ডামক থাকবে আর সনাতন তত্ত্বানুযায়ী ধাতব পদার্থের উপচৌম্বক প্রবণতা (susceptibility) তাপমাত্রার সঙ্গে ব্যস্ত ভেদে থাকবে। কিন্তু পরীক্ষালব্ধ ফল অনুযায়ী ধাতব পদার্থের উপচৌম্বকত্ব তাপমাত্রার ওপর নির্ভর করে না বললেই হয়।

### 14.4 মুক্ত ইলেক্ট্রন প্রতিরূপ

যে কোন কঠিন পদার্থে কোন একটি ইলেক্ট্রন সমস্ত কেন্দ্রক আর অন্যান্য ইলেক্ট্রনের প্রভাব ক্ষেত্রে বিচরণ করে। তাহলে এইরকম একটি ইলেক্ট্রনের স্থিতিশক্তি জাফরির পর্যায়ের অনুরূপ পর্যায় নিয়ে থাকবে এটাই আশা করা যেতে পারে। সমারফেল্ডের প্রতিরূপে অবশ্য ধরে নেওয়া হয় যে পরিবাহিতার জন্য দায়ী

'মুক্ত' ইলেক্ট্রনগুলো ধাতুর ভিতরে একটা নির্দিষ্ট মানের স্থিতিশক্তি নিয়ে থাকে। যেহেতু ঘরের তাপমাত্রায় ধাতু থেকে ইলেক্ট্রনের নিঃসরণ দেখা যায় না। তাই এটাই ধরা যেতে পারে যে ধাতুর ভিতরে স্থির ইলেক্ট্রনের স্থিতিশক্তি ধাতুর বাইরে স্থির ইলেক্ট্রনের তুলনায় কম। আমরা তাহলে ধাতুর ভিতরে ইলেক্ট্রনগুলোকে  $E_s$  গভীরতার একটা স্থিতিশক্তির বাস্তব ভিতর আটকানো বলে ধরে নিতে পারি (চিত্র 13.1 দ্রষ্টব্য)।



চিত্র 13.1. স্থিতিশক্তির বাস্তব

এই  $E_s$  কে ইলেক্ট্রন ব্যবর্তন পরীক্ষার মাধ্যমে মাপা যেতে পারে। অবশ্যই ইলেক্ট্রনগুলোকে ধীর গতির হতে হবে যাতে তাদের গতিশক্তি কয়েকশো ই. ভো. (ev) হয়। বাইরে থেকে প্রারম্ভিক শক্তি  $E_0$  নিয়ে কোন ইলেক্ট্রন ধাতুর ভিতরে ঢুকলে  $E_s$  পরিমাণ শক্তি লাভ করে। ইলেক্ট্রন ব্যবর্তনের চরম মানগুলোর অবস্থান নির্ধারিত হয়  $[(E_0 + E_s)/E_0]^{1/2}$  দিয়ে। অতএব জাফরির গঠন আর  $E_0$  জানা থাকলে  $E_s$  এর মান নির্ধারণ সম্ভব।

### 13.5 ফের্মি-ডিরাক বণ্টন

মুক্ত ইলেক্ট্রনের শক্তি পরিমাপের জন্য আমরা হিসাবের সুবিধার জন্য ধরে নিই যে ধাতুর ভিতর মুক্ত ইলেক্ট্রনের মোট শক্তি শূন্য (0)। কোয়ান্টাম বলবিদ্যা থেকে এটা দেখানো যায় যে ধাতুর মধ্যে স্থিতিশক্তির বাস্তব আটকানো মুক্ত ইলেক্ট্রনের শক্তিস্তরগুলো হয়,

$$E = \frac{p^2}{2m} = \left( \frac{h^2 \pi^2}{2mV^{2/3}} \right) (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad \dots (13.3)$$

যেখানে  $V$  ধাতুর আয়তন আর  $n_x, n_y, n_z$  পূর্ণসংখ্যা  $\geq 1$ ।  $n_x, n_y, n_z$  নিয়ে প্রত্যেকটা দল (set)  $x, y, z$  স্থানাঙ্ক ভিত্তিক তরঙ্গ অপেক্ষককে বোঝায়।  $p$  থেকে  $p + dp$  পর্যন্ত ভরবেগের পরিবর্তনের মধ্যে

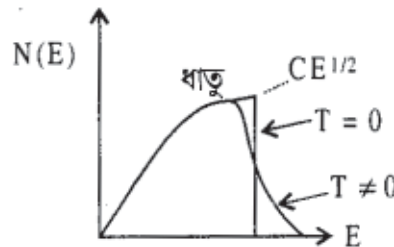
$\frac{4\pi p^2 dp V}{h^3}$  সংখ্যক সম্ভাব্য তরঙ্গ অপেক্ষক আছে। ইলেক্ট্রনের নিজস্ব ঘূর্ণনের দুটি মান ধরে নিয়ে  $p$

থেকে  $p + dp$  পর্যন্ত ভরবেগ সীমার মধ্যে সম্ভাব্য তরঙ্গ অপেক্ষকের সংখ্যা

$$Z(p)dp = \frac{8\pi p^2 dp V}{h^3} \quad \dots (13.2)$$

যদি ভরবেগ সীমা থেকে আমরা শক্তি সীমায় চলে যাই তাহলে সম্ভাব্য অপেক্ষক সংখ্যা

$$Z(E)dE = cE^{1/2}dE, \quad c = \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{h^3} \quad \dots (13.3)$$



চিত্র-13.2.  $CE^{1/2}$  বক্ররেখা সমীকরণ 13.3 অনুযায়ী  $Z(E)$  কে দেখায় আর শক্তি স্তরের বণ্টন ব্যবস্থা  $N(E)$ -কে দেখায় আর শক্তি স্তরের বণ্টন ব্যবস্থা  $N(E)$  কে পাওয়া গেছে  $Z(E)$  ও  $F(E)$  গুণ করে।

চিত্র (13.2) তে  $Z(E)$  এবং  $N(E)$  এই অপেক্ষকগুলির  $E$ -এর সাথে পরিবর্তিত হওয়াকে দেখানো হয়েছে।

যে কোন তাপমাত্রায় মুক্ত ইলেকট্রন দিয়ে ভর্তি অবস্থার সংখ্যা পেতে গেলে ফের্মি-ডিরাক বন্টন জানতে হবে তার কারণ ইলেক্ট্রনের পাউলির অপবর্জন নীতি (Pauli Exclusion Principle) মেনে চলে। যে সমস্ত কণা পাউলির অপবর্জন নীতি মেনে চলে তাদের বন্টন ব্যবস্থা ফের্মি ডিরাক পদ্ধতি অনুযায়ী হয়। যদি আমরা  $E$  থেকে  $E + dE$  শক্তি স্তরের ভিতর ইলেকট্রন সংখ্যাকে  $N(E) dE$  বলি, তাহলে

$$N(E) dE = Z(E) F(E) dE,$$

$$F(E) = \frac{1}{(e^{\alpha+E/kT} + 1)} \quad (13.4)$$

এখানে  $\alpha$  একটি মাপ সংখ্যা (parameter) আর  $F(E)$  ফের্মি অপেক্ষক

$$e^{\alpha} = e^{-E_F/kT} \quad (13.5)$$

$E_F$  কে ফের্মি শক্তি বলা হয় যার বস্তুগত অর্থ এরকম :

$$F(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (13.6)$$

শক্তির বন্টন ব্যবস্থা তাপমাত্রার ভিত্তিতে বিভিন্ন মাত্রায় ভাগ করে নিলে সুবিধা হয়,

1.  $T=0$ , চরম শূন্য তাপমাত্রায় ফের্মি অপেক্ষকের ধর্ম হল

$$\begin{aligned} F(E) &= 1, \text{ যদি } E < E_{F_0} \\ F(E) &= 0, \text{ যদি } E > E_{F_0} \end{aligned} \quad (13.7)$$

অর্থাৎ চরম শূন্য,  $E_{F_0}$  এর কম শক্তি স্তর গুলো সব ভর্তি আর  $E_{F_0}$  -এর উপরকার সমস্ত শক্তিস্তরই ফাঁকা।  $E_{F_0}$  -এর বস্তুগত অর্থ হল যে এটি  $T=0$  তে সর্বোচ্চ শক্তিস্তর যা ইলেকট্রন দিয়ে ভর্তি। সাধারণভাবে যে শর্ত মানতে হবে তা হল,

$$\int_0^{\infty} N(E) dE = \int_0^{\infty} Z(E) F(E) dE = N \quad (13.8)$$

সমীকরণ (13.7) আর (13.3) থেকে আমরা পাই

$$N = C \int_0^{E_{F_0}} E^{1/2} dE, \text{ অথবা } E_{F_0} = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3} \quad (13.9)$$

অর্থাৎ  $E_{F_0}$ , একক আয়তনে ইলেকট্রন সংখ্যা  $n$  দিয়ে নির্ধারিত হয়। চরম শূন্য তাপমাত্রায় ইলেকট্রনের গড় গতিশক্তি

$$\langle E_0 \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{E_{F_0}} EZ(E)dE = \frac{2}{5} \frac{CE_{F_0}^{5/3}}{N} \quad (13.10)$$

সমীকরণ (13.9) ব্যবহার করে আমরা পাই

$$\langle E_0 \rangle = \frac{3}{5} E_{F_0} \quad (13.11)$$

2.  $kT \ll E_F$ , যে কোন ধাতুর গলনাঙ্কের তলায়  $kT \ll E_F$  হয়ে থাকে। ফের্মি অপেক্ষকের সংজ্ঞা (13.6) থেকে আমরা দেখি  $E = E_F$  হলে  $F(E) = \frac{1}{2}$ । অতএব আমরা বলতে পারি ফের্মি স্তরে অধিকরণের (occupation) সম্ভাব্যতা  $\frac{1}{2}$ । যদি শক্তি এমন হয় যে  $(E - E_F) \gg kT$ , সেক্ষেত্রে আমরা (13.6) এ বর্ণিত ফের্মি অপেক্ষকের মান পাই

$$F(E) \approx e^{-(E-E_F)/kT} \quad (13.12)$$

এই শক্তি অঞ্চলে ফের্মি বন্টন ব্যবস্থা আর বোলজ্‌ম্যান বন্টন ব্যবস্থা এক রকম।

ইলেকট্রনের ফের্মিস্তর আর গড় গতিশক্তি পেতে গেলে আমাদের নীচের সমাকল গুলো ব্যবহার করতে হবে

$$N = \int_0^{\infty} Z(E) \frac{dE}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (13.13)$$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} Z(E) \frac{EdE}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (13.14)$$

সেখান থেকে আমরা পাই

$$E_F \approx E_{F_0} \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_{F_0}} \right)^2 \right] \quad (13.15)$$

$$\langle E \rangle \approx \langle E_0 \rangle \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_{F_0}} \right)^2 \right] \quad (13.16)$$

0 যুক্ত রাশিগুলো  $T=0$  তে ঐ রাশিগুলোর মানকে সূচিত করে।

## 13.6 ইলেকট্রনীয় আপেক্ষিক তাপ

সমীকরণ (13.16) এ পাওয়া গড় গতিশক্তির মান থেকে স্থির আয়তনে আপেক্ষিক তাপ প্রতিটা ইলেকট্রনের জন্য পেতে পারি

$$C_V = \frac{d \langle E \rangle}{dT} = \frac{5\pi^2 k^2 T \langle E_0 \rangle}{6E_{F_0}^2}$$

সমীকরণ (13.11) ব্যবহার করে আমরা পাই

$$C_V = \pi^2 \left( \frac{kT}{2E_{F_0}} \right) k = \pi^2 \left( \frac{T}{2T_F} \right) k \quad (13.17)$$

যেখানে  $T_F$  হোল ফের্মি তাপমাত্রা  $KT_F = E_F$ । এটি একটা উল্লেখযোগ্য বিষয় যে আপেক্ষিক তাপ  $C_V$  তাপমাত্রা  $T$ -এর সমানুপাতিক। এটা জানা আছে যে নিম্ন তাপমাত্রায় জাফরির কম্পনের দরুন যে আপেক্ষিক তাপ পাওয়া যায় তা  $T^3$  এর সমানুপাতিক। সেক্ষেত্রে ধাতুর সামগ্রিক আপেক্ষিক তাপকে লেখা যাবে

$$C_V = AT + BT^3 \quad (13.18)$$

তাহলে মোটামুটি ভাবে বলা যাবে যে পাউলি নীতি অনুযায়ী নিম্ন তাপমাত্রাতেও বেশির ভাগ ইলেকট্রনের যথেষ্ট গতি শক্তি থাকে। তাপীয় উত্তেজনায় ইলেকট্রন গুলো অনধিকৃত শক্তি স্তরে যেতে পারে আর সেই সমস্ত ইলেকট্রন যাবে যারা ফের্মি স্তরের কাছাকাছি থাকে। অতএব খুব অল্প সংখ্যক ইলেকট্রনই আপেক্ষিক তাপে তাদের অবদান রাখে।

## 13.7 মুক্ত ইলেকট্রনের উপচুম্বকত্ব

আমরা জানি যে কোন আধান বস্তুকে কোন অক্ষ বরাবর ঘোরানো হলে একটা চৌম্বক দ্বিমেরু ভ্রামকের উৎপত্তি হয়। তাই ইলেকট্রনের স্বকীয় ঘূর্ণনের (spin) ফলে প্রত্যেক ইলেকট্রনের চৌম্বক দ্বিমেরু ভ্রামক থাকে। ইলেকট্রনের এই চৌম্বক ভ্রামকের একটা বিশেষ ধর্ম হল কোন বাহ্যিক চৌম্বক ক্ষেত্র বরাবর ঐ ভ্রামকের উপাংশ হয়  $e\hbar/2mc$  নতুবা  $-e\hbar/2mc$ । এর কারণ উপাংশটি হয় ক্ষেত্রের সমান্তরাল বা বিপরীত সমান্তরাল হতে পারে। এই উপাংশের মান

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc} = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T} \quad (13.19)$$

একে বোর ম্যাগনেটন বলা হয়। যে কোন বাহ্যিক ক্ষেত্র  $\vec{B}$  এ কোন দ্বিমেরুর শক্তি  $\vec{B}$  এ কোন দ্বিমেরুর শক্তি  $= -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ । সুতরাং সমান্তরাল অবস্থায় এই শক্তির মান  $-\mu_B B$  আর বিপরীত সমান্তরাল অবস্থায় শক্তির মান  $+\mu_B B$ ।



ধরা যাক কোন ধাতুতে একক আয়তনে  $n$  সংখ্যক মুক্ত ইলেকট্রন আছে। কোন বাহ্যিক চৌম্বক ক্ষেত্র  $\vec{B}$  এর উপস্থিতিতে ধরা যাক  $n_p$  সংখ্যক ইলেকট্রন ক্ষেত্রের সমান্তরালে আছে আর  $n_a$  সংখ্যক ইলেকট্রন আছে বিপরীত সমান্তরাল অবস্থায়। সেক্ষেত্রে একক আয়তনে চৌম্বক ভ্রামক হবে

$$\bar{M} = (n_p - n_a)\mu_B \quad (13.20)$$

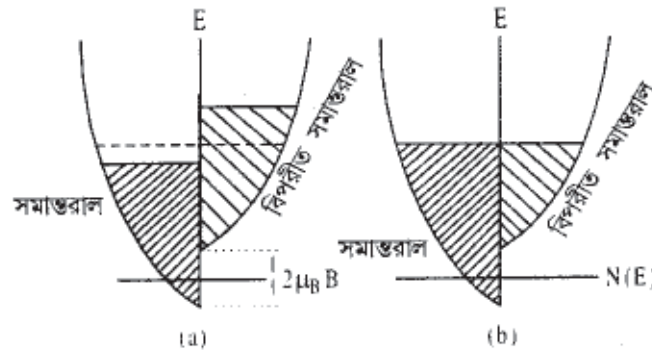
এই রকম অবস্থায় ডিবাই-লঁজর্ভাঁ তত্ত্ব থেকে দেখানো যায়

$$\bar{M} = \chi_p B = (n\mu_B^2 / kT)B \quad (13.21)$$

যতক্ষণ পর্যন্ত  $\mu_B \ll kT$ ।  $\chi_p$  কে উপচৌম্বক প্রবণতা বলা হয়। যদি সমীকরণ (13.21) সত্য মেনে নেওয়া হয় তাহলে  $n \approx 10^{22}$  প্রতি ঘন সে.মি. ধরে আমরা ঘরের তাপমাত্রায় ধাতুর উপচৌম্বক প্রবণতা

$\chi_p = 10^{-4} / c.c$  পাই আর  $\chi_p \propto \frac{1}{T}$ । কিন্তু  $\chi_p$  এর পরীক্ষালব্ধ মান  $\chi_p = 10^{-6} / c.c$  আর তাপমাত্রা কোন প্রভাব ফেলতে পারে না।

যদি আমরা ফের্মি-ডিরাক বণ্টন ব্যবস্থা ধরে নিই তাহলে পরীক্ষালব্ধ ফলে সাথে বৈষম্য দূর হয় যেটা পাউলি দেখিয়েছিলেন। সহজভাবে বোঝার জন্য আমরা  $T=0$  অবস্থার কথা ধরবো। বাহ্যিক চৌম্বক ক্ষেত্রের অনুপস্থিতিতে  $E_{F0}$  এর নীচের সমস্ত শক্তি স্তর পরিপূর্ণ আর  $E_{F0}$  এর উপরের শক্তিস্তরগুলো ফাঁকা। এইবার বাহ্যিক চৌম্বক ক্ষেত্র  $\vec{B}$  প্রয়োগ করলে যে সমস্ত ইলেকট্রনের চৌম্বক ভ্রামক  $\vec{B}$  এর সমান্তরাল তাদের শক্তির পরিবর্তন  $-\mu_B B$  আর বিপরীত সমান্তরালদের ক্ষেত্রে সেটা  $+\mu_B B$ । চিত্র 13.4 এ আমরা এই ব্যবস্থাকে দেখি।



চিত্র-13.4. পূর্ণ শক্তিস্তরের সংখ্যা  $N(E)$  কে শক্তি  $E$ -এর আপেক্ষক হিসাবে দেখানো হয়েছে যখন  $T=0$ । (a) বাহ্যিক চৌম্বক ক্ষেত্র  $\vec{B}$  প্রয়োগ করা হয়েছে। শক্তির পরিবর্তনের ফলে অসাম্য অবস্থা উৎপন্ন হয়। (b) সাম্যাবস্থায় সমান্তরাল ঘূর্ণনের পরিমাণ বেশি।

### 13.8 ধাতু থেকে তাপীয় ইলেকট্রনের নিঃসরণ

যদি ধাতুর ভিতরের মুক্ত ইলেকট্রনের শক্তিকে শূন্য ধরে নেওয়া হয়, তাহলে ধাতুর উপরিতল থেকে ইলেকট্রনের লম্ব নিঃসরণের জন্য সর্বনিম্ন যে শক্তি দরকার তা হল  $E_S$ । যদি  $x$  উপরিতলের লম্ব দিকে স্থানাঙ্ক হয়ে থাকে, তবে ইলেকট্রনের ভরবেগ  $p_x > p_{x_0}$  হওয়া দরকার নিঃসরণের জন্য। এক্ষেত্রে

$$\frac{p_{x_0}^2}{2m} = E_S \quad (13.22)$$

এখন  $p_x \geq p_{x_0}$  হলেই যে ইলেকট্রন ধাতু থেকে বেরিয়ে আসতে পারবে তা নয়, বিভব প্রাচীরে (potential barrier) বাধা পেয়ে প্রতিফলিত হতে পারে। কাজেই যে সমস্ত ইলেকট্রনের ক্ষেত্রে  $p_x \geq p_{x_0}$  তাদের নিঃসরণের সম্ভাব্যতা  $1-r(p_x)$ , যেখানে  $r(p_x)$  প্রতিফলন গুণাঙ্ক 1 ধরা যাক যে সমস্ত ইলেকট্রনের ভরবেগ  $p_x$  থেকে  $p_x + dp_x$ -এর ভিতরে, ধাতুর মধ্যে একক আয়তনে সেই সমস্ত ইলেকট্রনের সংখ্যা  $n(p_x) dp_x$ । ধাতুর উপরিতলে একক ক্ষেত্রফলে একক সময়ে আগত এই ধরনের ইলেকট্রনের সংখ্যা  $rn(p_x) dp_x$ । এখন থেকে আমরা নিঃসৃত ইলেকট্রন প্রবাহ ঘনত্ব পাই

$$I = \left( \frac{e}{m} \right) \int_{p_{x_0}}^{\infty} p_x n(p_x) [1-r(p_x)] dp_x \quad (13.23)$$

ব্র্যাকেটের ভিতরের রাশিকে আমরা  $(1-r)$  দিয়ে সমাকলের বাইরে নিয়ে আসতে পারি যেখানে  $r$  প্রতিফলন গুণাঙ্কের গড় মান। এক্ষেত্রে আমাদের শুধু  $n(p_x)$  হিসাব করতে হবে। আমরা ধরে নেবো ইলেকট্রনের সবদিকে সমান ভরবেগ বন্টন বিদ্যমান। ভরবেগ স্থানে  $dp_x dp_y dp_z$  এই প্রাথমিক আয়তনের ভিতর যতগুলো অবস্থা সম্ভব সেগুলোর সংখ্যা প্রতি একক আয়তনে

$$2 \frac{dp_x dp_y dp_z}{h^3}$$

অতএব  $p_x$  থেকে  $p_x + dp_x$ ,  $p_y$  থেকে  $p_y + dp_y$  আর  $p_z$  থেকে  $p_z + dp_z$ -এর মধ্যে ভরবেগ বিশিষ্ট ইলেকট্রনের সংখ্যা

$$n(p_x, p_y, p_z) dp_x dp_y dp_z = \frac{2}{h^3} \frac{dp_x dp_y dp_z}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (13.24)$$

$$\text{যেখানে } E = \frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2m}$$

$$\text{সুতরাং } n(p_x) dp_x = \frac{2}{h^3} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_y dp_z}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (13.25)$$

আমরা সেই সমস্ত ইলেকট্রন নিয়ে আলোচনা করবো যাদের  $p_x > p_{x_0}$ । অন্যদিকে  $E - E_F = \phi \gg kT$  সমস্ত ধাতুর গলনাঙ্কের তলায়। সুতরাং বন্টন অপেক্ষকের 1 কে আমরা বিবেচনায় আনবোনা।  $\phi$  পদটিকে ধাতুর কার্য অপেক্ষক (work function) বলা হয়। এটি ইলেকট্রনের ফের্মি তল থেকে শূন্য তলের শক্তি বিভেদকে সূচিত করে। অতএব আমরা (13.25) থেকে পাই

$$n(p_x)dp_x = \left( \frac{4\pi mkT}{h^3} \right) e^{E_F/kT} e^{-p_x^2/2mkT} dp_x \quad (13.26)$$

সমীকরণ (13.23) তে উপরোক্ত মান বসিয়ে পাই

$$I = A(1-r)T^2 e^{-\phi/kT} \quad (13.27)$$

যেখানে  $A = 4\pi emk^2/h^3 = 120 \text{ amp/cm}^2/\text{deg}^2$ । এটিকে রিচার্ডসন-ডুশম্যান সমীকরণ বলা হয়।

### 13.9 ধাতুর তড়িৎ পরিবহনের কিছু বৈশিষ্ট্য

ধাতুর তড়িৎ পরিবহনের যে কোন তত্ত্বই কতগুলো পরীক্ষালব্ধ তথ্যকে ব্যাখ্যা করতে সমর্থ হবে। বিশেষ অবস্থা ছাড়া ধাতুর তড়িৎ পরিবহনের সাধারণ বৈশিষ্ট্য গুলো হল

1. ওহমের সূত্রানুযায়ী স্থিতাবস্থায় প্রবাহমাত্রার ঘনত্ব তড়িৎ ক্ষেত্রের প্রাবল্যের সাথে সমানুপাতী।
2. ঘরের তাপমাত্রায় ধাতুর আপেক্ষিক রোধের মান  $10^{-5} \text{ ohm cm}$  এর মত।
3. ডিভাই তাপমাত্রার উপর ধাতুর রোধ তাপমাত্রার সাথে রৈখিক ভাবে বাড়ে।
4. নিম্ন তাপমাত্রায় ( $20^\circ\text{K}$ -এর উপরে) ধাতুর রোধ  $T^2$ -এর সাথে সমানুপাতী। তরল হিলিয়াম তাপমাত্রায় কিছু কিছু ধাতুর ক্ষেত্রে রোধ বনাম তাপমাত্রা বক্রপথে অবম (minimum) মান দেখা যায়।
5. বেশির ভাগ ধাতুর বেলায় চাপ বৃদ্ধিতে রোধ হ্রাস পায়।
6. ম্যাথিসেনের নিয়মানুযায়ী সামান্য অন্য পদার্থ মিশ্রিত ধাতুর আপেক্ষিক রোধকে এইভাবে প্রকাশ করা যায়

$$\rho = \rho_0 + \rho(T) \quad (13.28)$$

যেখানে  $\rho_0$  এমন একটি ধ্রুবক যেটি অন্য পদার্থের মিশ্রণের পরিমাণের সাথে বৃদ্ধি পায় আর  $\rho(T)$  হল তাপমাত্রা নির্ভর অংশ।

7. ক্রম-ব্যতিক্রমের পরিবর্তনদর্শী সংকর ধাতুর রোধ ক্রমান্বিত দশায় লঘিষ্ঠ মান দেখায়।
8. ডিভাই তাপমাত্রার উর্ধ্বে তাপ পরিবাহিতা আর তড়িৎ পরিবাহিতার অনুপাত তাপমাত্রার (T) সঙ্গে সমানুপাতী। সমানুপাতী ধ্রুবক সমস্ত ধাতুর ক্ষেত্রে সমান (উইডেম্যান ফ্র্যাঞ্জ সূত্র)।
9. কতকগুলো ধাতুর অতি পরিবাহিতা (super conductivity) ধর্ম দেখতে পাওয়া যায়—চরম শূন্য তাপমাত্রায় এদের রোধ লুপ্ত হয়।

## 13.10 বোল্‌জ্‌ম্যানের পরিবহণ সমীকরণ

সাম্যাবস্থায় ইলেকট্রনের (স্পন্দনশীল) গতি ও স্থানাংকের বা বন্টন ব্যবস্থা তার থেকে সুস্বম তড়িৎ বা তাপ প্রবাহের ইলেকট্রনের গতি বা স্থানাংকের বন্টন ব্যবস্থা অবশ্যই আলাদা। ইলেকট্রনের পরিবহণ তত্ত্ব বহিঃস্থ (external) বল ক্ষেত্রে ইলেকট্রনের বন্টন ব্যবস্থা নির্ণয়ের সঙ্গে সম্পর্কিত। ধরা যাক  $p_x, p_y, p_z$  কোন একটি ইলেকট্রনের ভরবেগের উপাংশ আর

$$f(p_x, p_y, p_z; x, y, z; t) dp_x dp_y dp_z dx dy dz \quad (13.28)$$

$dx dy dz$  ঘনকে  $t$  সময়ে  $dp_x dp_y dp_z$  ভরবেগ সমন্বিত ইলেকট্রনের সংখ্যা। সাম্যাবস্থায়

$$df/dt = 0 \quad (13.29)$$

অপেক্ষক  $f$  সম্পর্কে জানতে গেলে সেই সমস্ত কারণ গুলো জানা দরকার যারা  $f$  এ সময়ের সাথে পরিবর্তন ঘটায়। প্রথমে আমরা ইলেকট্রনের গতি পরিবর্তন আর গতি পরিবর্তন কারী বলের উপাংশ  $X, Y, Z$  এর ক্রিয়া  $f$  এর উপর কি পরিবর্তন আনে সেটা দেখবো। (13.28) এ বর্ণিত ইলেকট্রন দলের কথা  $t + \delta t$  সময়ে বিবেচনা করা হবে যেখানে  $\delta t$  খুব ছোটো সময়ের ভাগ। ঐ সময়ে ইলেকট্রন দলের ভরবেগ আর স্থানাংক হবে

$$\begin{aligned} p_x + X\delta t; p_y + Y\delta t; p_z + Z\delta t \\ x + p_x \delta t/m; y + p_y \delta t/m; z + p_z \delta t/m \end{aligned} \quad (13.30)$$

এখন বন্টন অপেক্ষকের (13.28) সংজ্ঞানুযায়ী  $t + \delta t$  সময়ে  $dp_x dp_y dp_z dx dy dz$  মৌলিক আয়তনে (13.30) তে বর্ণিত অবস্থানে ইলেকট্রনের সংখ্যা

$$f(p_x + X\delta t, ; x + p_x \delta t/m, \dots; t + \delta t) dp_x dp_y dp_z dx dy dz \quad (13.31)$$

যেহেতু ইলেকট্রন সংখ্যার কোন পরিবর্তন হওয়া উচিত নয় অতএব (13.28) আর (13.31) এক হবে। (13.31) কে বিস্তৃত আকারে লেখার পর আমরা পাই

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{fields} = -\frac{\partial f}{\partial p_x} X - \frac{\partial f}{\partial p_y} Y - \frac{\partial f}{\partial p_z} Z - \frac{\partial f}{\partial x} v_x - \frac{\partial f}{\partial y} v_y - \frac{\partial f}{\partial z} v_z \quad (13.32)$$

এখানে  $v_x, v_y, v_z$  গতিবেগের উপাংশকে সূচিত করে। স্থিতাবস্থায় ক্ষেত্রদ্বারা বন্টন অপেক্ষকের পরিবর্তনের হারকে অন্যান্য ঘটনা প্রতিহত করে। ইলেকট্রন জাফরির আন্তঃক্রিয়া এরকম একটি পদ্ধতি। অতএব (13.29) শর্তটাকে আমরা লিখতে পারি

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{fields} + \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = 0 \quad (13.33)$$

যুগ্ম তড়িৎ আর চৌম্বক ক্ষেত্রে ইলেকট্রন যে বল অনুভব করে তা লোরেন্‌স সূত্র দিয়ে প্রকাশিত হয়

$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

যেখানে  $\vec{v}$  ইলেকট্রনের গতিবেগ।

(13.32) আর (13.33) কে মিলিয়ে আমরা লিখতে পারি

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \text{grad}_p f + \vec{v} \cdot \text{grad}_r f \quad (13.34)$$

এটাই বোলজম্যানের পরিবহণ সমীকরণ।

### 13.11 সমারফেন্ডের তড়িৎ পরিবহণ তত্ত্ব

1900 সালে গড় গতিবেগের ভিত্তিতে ধাতুর তড়িৎ পরিবহণ তত্ত্বের সূচনা করেন ডুড্‌। লোরেনৎস 1905 সালে ইলেকট্রন আর পরমাণুর জাফরির সাথে সংঘর্ষ আর বোলজম্যানের পরিবহণ তত্ত্ব এই দুইকে মিশিয়ে তড়িৎ পরিবহণ সমস্যার সমাধানের সূত্র দেন। কিন্তু সনাতন সংখ্যায়নের ব্যবহার গুরুতর সমস্যা তৈরি করে। 1928 সালে সমারফেন্ড সনাতন বন্টন ব্যবস্থার বদলে ফের্মি-ডিরাক বন্টন ব্যবস্থার প্রয়োগ করেন তড়িৎ পরিবহণের ক্ষেত্রে। সমারফেন্ড ইলেকট্রন আর জাফরির প্রকৃত মিথস্ক্রিয়ার আকৃতি সম্পর্কে বিস্তৃত আলোচনায় না গিয়ে ঋতন সময় (relaxation time) ব্যবহার করেন যেটা ইলেকট্রনের শক্তির সঙ্গে সম্পর্কিত। আমরা এখানে সমারফেন্ডের তড়িৎ পরিবহণ তত্ত্ব যেটা মুক্ত ইলেকট্রনের ধারণা নিয়ে তৈরি সেটা আলোচনা করবো।

ভরবেগ স্থানে (momentum space)  $dp_x dp_y dp_z$  মানযুক্ত মৌলিক ঘনকে একক আয়তনে ইলেকট্রনীয় অবস্থার সংখ্যা (ঘূর্ণনকে ধরে)  $(2/h^3) dp_x dp_y dp_z$ । বহির্ক্ষেত্রের অনুপস্থিতিতে তাপীয় সাম্যাবস্থায় ধরা যাক গড় অধিকৃত অবস্থার সংখ্যা

$$(2/h^3) F_0(p) dp_x dp_y dp_z$$

যেখানে  $F_0$  মোট ভরবেগ  $p$  এর সাপেক্ষে ফের্মি বন্টন অপেক্ষক। এখন যদি  $x$  দিকে  $E_x$  তড়িৎ ক্ষেত্র প্রয়োগ করা হয় তাহলে তড়িৎ প্রবাহের সঞ্চার হবে। নিয়মিত প্রবাহের বেলায়  $dp_x dp_y dp_z$  মৌলিক ঘনকে একক আয়তনে গড় ইলেকট্রন সংখ্যা

$$(2/h^3) F(p) dp_x dp_y dp_z \quad (13.35)$$

সেক্ষেত্রে তড়িৎপ্রবাহ  $I_x$  হলে

$$I_x = -\frac{2e}{h^3} \iiint v_x (F - F_0) dp_x dp_y dp_z \quad (13.36)$$

$(F - F_0)$  কে নির্ধারিত করা গেলে  $I_x$  জানা যাবে।

বর্তমান প্রসঙ্গে বোলজম্যান পরিবহণ তত্ত্ব প্রয়োগ করলে (13.34) থেকে আমরা পাই

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{coll} = -eE_x \left(\frac{\partial F}{\partial p_x}\right) \quad (13.37)$$

এখন আমরা ধরে নেব যে এখানে ঋতন সময়  $\tau$  কে বিবেচনা করা যাবে যেখানে

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{coll} = -\frac{(F - F_0)}{\tau} \quad (13.38)$$

অতএব শেষ দুটি সমীকরণ থেকে আমরা বলতে পারি

$$\frac{F - F_0}{\tau} = eE_x \left(\frac{\partial F}{\partial p_x}\right) = eE_x \left(\frac{\partial F_0}{\partial p_x}\right) \quad (13.39)$$

শেষ অংশটা ক্ষুদ্র ক্ষেত্রের বেলায় প্রযোজ্য। ইলেকট্রনের শক্তি  $E = \frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2m}$  হওয়ার ফলে আমরা লিখতে পারি

$$\frac{(F - F_0)}{\tau} = ev_x E_x \left(\frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon}\right) \quad (13.40)$$

সমীকরণ (13.40) কে (13.36) এ স্থাপন করলে আমরা প্রবাহ ঘনত্বের মান পাই

$$I_x = -\left(\frac{2e^2}{h^3}\right) E_x \iiint v_x^2 \tau \left(\frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon}\right) dp_x dp_y dp_z \quad (13.41)$$

আমরা ধরে নেবো  $\tau$  শুধু শক্তির উপর নির্ভরশীল, গতির দিকের উপর নির্ভর করে না। যেহেতু  $\delta F/\delta E$  শুধু  $E$  এর অপেক্ষক (13.41) কে একক সমাকলে পরিণত করা যায় যদি আমরা  $v_x^2$  কে  $v^2/3$  আর  $dp_x dp_y dp_z$  কে  $4\pi p^2 dp$  দিয়ে প্রতিস্থাপিত করি। সেক্ষেত্রে

$$I_x = -\left(\frac{16\pi e^2 (2m)^{3/2}}{3h^3}\right) E_x \int_0^\infty \varepsilon^{3/2} \tau(\varepsilon) \left(\frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon}\right) d\varepsilon \quad (13.42)$$

কতকগুলো সন্নিকর্ষের (approximation) এর মাধ্যমে দেখানো যায়

$$\frac{I_x}{E_x} = \sigma = \frac{ne^2 \tau_F}{m} \quad (13.43)$$

এটাই সমারফেল্ডের তড়িৎ পরিবহণ তত্ত্ব।

## 13.12 সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলী

- ১। ধাতব পদার্থের তাপ ও তড়িৎ পরিবহনের পুরোণ তত্ত্বের অসুবিধা গুলো কী কী?
- ২। ধাতুর ভিতরকার স্থির ইলেকট্রনের স্থিতিশক্তি আর ধাতুর বাইরে স্থির ইলেকট্রনের স্থিতিশক্তির তুলনা করুন।

- ৩। চরম শূন্য তাপমাত্রায় ফের্মি অপেক্ষকের ধর্ম কী ?
- ৪। আপেক্ষিক তাপের সাথে তাপমাত্রার সম্পর্ক কী ?
- ৫। ঘূর্ণনের দ্রুণ ইলেকট্রনের চৌম্বক ভ্রামকের বিশেষত্ব কী ?
- ৬।  $E_S$  এর সংজ্ঞা কী ?
- ৭। ডিবাই তাপমাত্রার সাথে ধাতুর রোধের সম্পর্ক কী ?
- ৮। অতি পরিবাহিতা কাকে বলে ?
- ৯। তাপীয় সাম্যাবস্থায় গড় অধিকৃত অবস্থার সংখ্যা কত হয় ?
- ১০। সমারফেণ্ড তত্ত্ব অনুযায়ী তড়িৎ প্রবাহ ঘনত্ব আর তড়িৎক্ষেত্রের সম্পর্ক কী ?

### 13.13 গাণিতিক সমস্যা

- ১। সমীকরণ (13.2) কে প্রমাণ করুন।
- ২।  $E = p^2/2m$  ধরে (13.3) কে প্রমাণ করুন।
- ৩। ফের্মি অপেক্ষকের ধর্ম প্রমাণ করুন।
- ৪। দেখান যে  $\langle E_0 \rangle = \frac{3}{5} E_{F_0}$ ।

### 13.14 পরিশিষ্ট

এই অধ্যায়ে আমরা ধাতুর ভৌত ধর্মের ক্ষেত্রে মুক্ত ইলেকট্রনের ভূমিকা দেখেছি। ইলেকট্রনের স্বকীয় ঘূর্ণন থাকার দ্রুণ সনাতন সংখ্যানের পরিবর্তে ফের্মি-ডিরাক সংখ্যানের প্রয়োগ জরুরী। উন্নতা বৃদ্ধির ফলে ধাতব তলের উপরিভাগ থেকে ইলেকট্রনের নিঃসরণের পদ্ধতি আলোচিত হয়েছে। ধাতুর আপেক্ষিক তাপে ইলেকট্রনীয় আপেক্ষিক তাপের ভূমিকা আলোচনা করা হয়েছে। মুক্ত ইলেকট্রনের উপচৌম্বকত্ব নির্ধারণের তত্ত্ব জানা গেছে। ধাতুর তড়িৎ পরিবহণের বৈশিষ্ট্য বিশ্লেষিত হয়েছে। পরিশেষে ধাতব পদার্থের তড়িৎ পরিবহণের ক্ষেত্রে বোল্জম্যানের পরিবহণ তত্ত্ব প্রয়োগ করা হয়েছে।

---

## একক 14 □ কঠিন পদার্থের ব্যাণ্ড তত্ত্ব

---

গঠন

- 14.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য
- 14.2 ভূমিকা
- 14.3 ব্লচের উপপাদ্য
- 14.4 ক্রোনিগ পেনির মডেল
- 14.5 শক্তি ও তরঙ্গ ভেক্টর সম্বন্ধ ও এদের বিভিন্ন প্রকার উপস্থাপনা
- 14.6 একটি শক্তি ব্যাণ্ডে তরঙ্গ অপেক্ষকের সংখ্যা
- 14.7 ইলেকট্রনের বেগ
- 14.8 ইলেকট্রনের কার্যকরী ভর
- 14.9 ধাতু, অন্তরক ও অর্ধপরিবাহীর মধ্যে পার্থক্য
- 14.10 সমাধানকৃত উদাহরণ
- 14.11 সারাংশ
- 14.12 প্রণাবলি
- 14.13 প্রণাবলির উত্তরের ইচ্ছিত

---

### 14.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য

---

কঠিন পদার্থগুলিকে পরিবাহী, অন্তরক ও অর্ধপরিবাহী এই তিন শ্রেণিতে ভাগ করা যায়। যে পদার্থগুলির মধ্য দিয়ে তাপ ও বিদ্যুৎ পরিবাহিত হয়, সেগুলিকে পরিবাহী বলে। ধাতুগুলি ও গ্র্যাফাইট এই শ্রেণির অন্তর্গত। অন্যদিকে ডায়মন্ড, কাচ, প্লাস্টিক, রবার প্রভৃতি অধিকাংশ অধাতু মৌল ও যৌগের ভিতর দিয়ে তাপ ও বিদ্যুৎ যেতে পারে না। এই পদার্থগুলিকেই অন্তরক বলা হয়। আবার জারমেনিয়াম, সিলিকন প্রভৃতি কয়েকটি পদার্থ খুব কম উষ্ণতায় অন্তরক, কিন্তু অধিকতর উষ্ণতায় তাপ ও তড়িৎ পরিবহন করতে পারে। এই পদার্থগুলিকে অর্ধপরিবাহী বলে। পদার্থের এই মৌলিক ধর্মগুলি শক্তির ব্যাণ্ড তত্ত্বের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়। এই এককটির উদ্দেশ্য হল শক্তির এই ব্যাণ্ডতত্ত্ব আলোচনা করা এবং এর দ্বারা পরিবাহী, অন্তরক ও অর্ধপরিবাহীগুলির মধ্যে পার্থক্য ব্যাখ্যা করা।

এই এককটি পাঠ করলে আপনি নিম্নলিখিত বিষয়গুলি আলোচনা করতে পারবেন বা সমস্যা সমাধানে প্রয়োগ করতে পারবেন :

- কেলাসের স্থির বিভব ও পর্যাবৃত্ত বিভবের পার্থক্য এবং এ বিষয়ে ব্লচের উপপাদ্য।
- ক্রোনিগ-পেনির মডেল কী এবং এই মডেল দ্বারা কীভাবে শক্তির ব্যাণ্ড তত্ত্ব গঠিত হয় ?

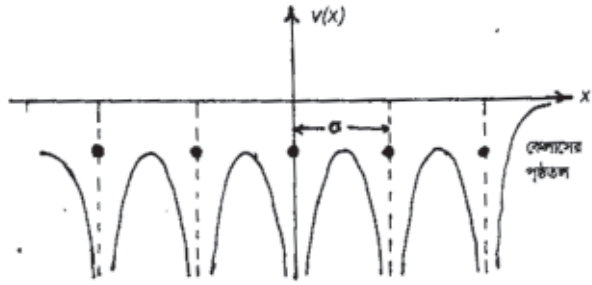


- শক্তির ব্যান্ড তত্ত্বে ইলেকট্রনের শক্তি, বেগ ও কার্যকরী ভর কীরূপভাবে পরিবর্তিত হয় ?
- ইলেকট্রনের ঋণাত্মক কার্যকরী ভর ও হোল তত্ত্ব।
- ব্যান্ড তত্ত্বের দ্বারা পরিবাহী, অর্ধপরিবাহী ও অন্তরক পদার্থের পরিবহন ধর্মের পার্থক্য ও তুলনা।

## 14.2 ভূমিকা

আপনি পূর্ববর্তী এককে ধাতব পদার্থের মুক্ত ইলেকট্রন তত্ত্ব পাঠ করেছেন। এই তত্ত্বে ধরা হয় যে ধাতুর পরিবহন ইলেকট্রনগুলি ধাতুর ভিতর সর্বত্র একটি স্থির (বা শূন্য) তড়িদ্বিভবের মধ্যে মুক্তভাবে বিচরণ করে এবং এই মুক্ত বিচরণ কেবল ধাতুর পৃষ্ঠে বাধাপ্রাপ্ত হয়। এই তত্ত্বটি কিছুটা সরলীকৃত হলেও আপনি লক্ষ্য করেছেন যে এই তত্ত্ব দ্বারা ধাতুর অনেকগুলি ধর্ম, যেমন—ধাতুর তাপ ও বিদ্যুৎ পরিবাহিতা, আপেক্ষিক তাপ, পরাচৌম্বকত্ব প্রভৃতি সঠিকভাবে ব্যাখ্যা করা যায়। কিন্তু এতৎসত্ত্বেও দেখা যায় যে ধাতুর এমন কতকগুলি ধর্ম আছে, যেগুলি উপরের ওই স্থির বিভব তত্ত্ব দ্বারা ব্যাখ্যা করা যায় না। যেমন—এই তত্ত্ব দ্বারা ধাতু ও অধাতু, বিশেষত পরিবাহী ও অপরিবাহীর মধ্যে পার্থক্য ব্যাখ্যা করা যায় না। ধাতু ও অধাতুর রোধাঙ্ক উন্নততার পরিবর্তনে কীরূপ পরিবর্তিত হয়, তা বলা যায় না। সর্বোপরি অর্ধপরিবাহীর ধর্মগুলিও এই তত্ত্ব দ্বারা ব্যাখ্যা করা যায় না।

স্থির তড়িদ্বিভব তত্ত্বের এই ত্রুটি দূর করার জন্য এফ ব্লচ (F. Bloch) কেলাসের পর্যাবৃত্ত বিভব তত্ত্ব প্রস্তাব করেন। যেহেতু ধাতুর কেলাসের মধ্যে ভারী ধনাত্মক আয়নগুলি বিভিন্ন স্থির বিন্দুতে পর্যাবৃত্তভাবে সজ্জিত থাকে, সুতরাং ব্লচের তত্ত্বে ধরা হয় যে কেলাসের মধ্যে যেকোনো একটি দিকে অবস্থিত ধনাত্মক আয়নগুলির দ্বারা মুক্ত ইলেকট্রনগুলির উপর প্রযুক্ত তড়িদ্বিভবও ওইদিকে একই পর্যায়ক্রমে পরিবর্তিত হয়। অবশ্য কেলাসের মধ্যে যে মুক্ত ইলেকট্রনগুলি থাকে, সেগুলির জন্য উৎপন্ন একটি স্থির ও বিপরীতধর্মী তড়িদ্বিভবও ঐ পর্যাবৃত্ত তড়িদ্বিভবের সঙ্গে যুক্ত হয়। এই দুটি বিভব যুক্ত হয়ে একই পর্যায়ের যেরূপ একমাত্রিক বিভব উৎপন্ন হয়, তা (14.1) চিত্রে দেখানো হল। চিত্রে ডট চিহ্নের দ্বারা ধনাত্মক আয়নের অবস্থান এবং এই অবস্থানে তড়িদ্বিভবের অতি দ্রুত পতন লক্ষণীয়। চিত্রের ডান প্রান্তে কেলাসের পৃষ্ঠতলে পর্যাবৃত্ত বিভবের বৃদ্ধি দেখানো হয়েছে। চিত্রে 'a' হল দুটি ধনাত্মক স্থির আয়নের দূরত্ব বা ল্যাটিস ধ্রুবক।



চিত্র 14.1: একটি মুক্ত ইলেকট্রনের উপর প্রযুক্ত একটি ধাতব ল্যাটিসের এক মাত্রিক পরাবৃত্ত বিভব,  $V(x)$ । চিত্রে কালো ডটগুলি  $x$ -অক্ষ অন্তর্গত স্থির ধনাত্মক আয়নের অবস্থান এবং  $a$  ল্যাটিস ধ্রুবক।

### 14.3 ব্লচের উপপাদ্য (The Bloch Theorem)

আপনি জানেন যে  $V_0$  স্থির বিভবক্ষেত্রে একটি মুক্ত ইলেকট্রনের গতির একমাত্রিক শ্রোডিংগার সমীকরণ হল

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi = 0 \quad \dots \dots (14.1)$$

এই সমীকরণের সমাধান হল কতকগুলি সমতল তরঙ্গের সমীকরণ, যা আমরা লিখতে পারি—

$$\psi(x) = e^{\pm ikx} \quad \dots \dots (14.2)$$

$$\text{যেখানে } (E - V_0) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} = E_{kin}$$

কিন্তু এখন যদি আমরা ধরি যে ইলেকট্রনটি একটি একমাত্রিক পর্যাবৃত্ত বিভব ক্ষেত্র  $[V(x)]$ -এর মধ্যে গতিশীল, তাহলে একমাত্রিক শ্রোডিংগার সমীকরণের রূপ হবে

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)] = 0 \quad \dots \dots (14.3)$$

যেহেতু  $V(x)$  বিভবটি পর্যাবৃত্ত এবং এর পর্যায় ল্যাটিস ধ্রুবক ' $a$ '-র সমান, সুতরাং আমরা পাই

$$V(x) = V(x + a) \quad \dots \dots (14.4)$$

এখন (14.3) সমীকরণটি ব্লচের একটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্যের দ্বারা সহজেই সমাধান করা যায়। ফ্লোকেট (Floquet) এই উপপাদ্যটি স্বাধীনভাবে প্রমাণ করেছিলেন। এজন্য এ উপপাদ্যকে ফ্লোকেটের উপপাদ্য (Floquet's theorem) বলা হয়। এই উপপাদ্যে বলা হয় যে (14.3) সমীকরণের সমাধান হল (14.2) সমীকরণের সমতল তরঙ্গের সমাধান, যা ' $a$ ' পর্যায়ভুক্ত  $u(x)$  অপেক্ষক দ্বারা নিয়ন্ত্রিত (modulated)। সুতরাং (14.3) সমীকরণের সমাধান হিসাবে আমরা পাই

$$\psi(x) = e^{\pm ikx} u_k(x) \quad \dots \dots (14.5)$$

$$\text{যেখানে } u_k(x) = u_k(x + a) \quad \dots \dots (14.6)$$

(14.5) সমীকরণ দ্বারা যে তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি পাওয়া যায়, সেগুলিকে ব্লচ অপেক্ষক (Bloch functions) বলে। এই অপেক্ষকগুলি নিয়ে বিস্তৃত আলোচনার পূর্বে দেখা যাক ব্লচের উপপাদ্য কীভাবে প্রমাণ করা যায়।

**ব্লচ উপপাদ্যের প্রমাণ**

ধরা যাক,  $f(x)$  ও  $g(x)$  হল (14.3) দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বাস্তব ও পরস্পর নিরপেক্ষ সমাধান। তা

হলে এই সমীকরণের সাধারণ সমাধান হিসাবে লেখা যায়

$$\psi(x) = Af(x) + Bg(x) \quad \dots \dots (14.7)$$

যেখানে A ও B হল দুটি সমাকলন ধ্রুবক।

যেহেতু  $V(x) = V(x+a)$ , সুতরাং  $f(x+a)$  ও  $g(x+a)$  অপেক্ষকগুলিও  $f(x)$  ও  $g(x)$  অপেক্ষকগুলির অনুরূপ (14.3) সমীকরণের সমাধান হবে। কিন্তু (14.3) সমীকরণটি দ্বিঘাতবিশিষ্ট হওয়ার এর দুটির বেশি নিরপেক্ষ সমাধান থাকতে পারে না। সুতরাং  $f(x+a)$  ও  $g(x+a)$  অপেক্ষক দুটি  $f(x)$  ও  $g(x)$  অপেক্ষক দুটির দ্বারা অবশ্যই রৈখিকভাবে প্রকাশযোগ্য। অর্থাৎ

$$\begin{aligned} f(x+a) &= \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) \\ g(x+a) &= \beta_1 f(x) + \beta_2 g(x) \end{aligned} \quad \dots \dots (14.8)$$

যেখানে  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  হল E শক্তির বাস্তব অপেক্ষক।

এখন যেহেতু  $f(x+a)$  ও  $g(x+a)$  অপেক্ষকগুলিকে (14.3) সমীকরণের সমাধান ধার হয়েছে, সুতরাং আমরা (14.8) সম্বন্ধ দ্বারা পাই

$$\psi(x+a) = Af(x+a) + Bg(x+a) = (A\alpha_1 + B\beta_1)f(x) + (A\alpha_2 + B\beta_2)g(x) \dots (14.9)$$

এখন আমরা A ও B অনির্দিষ্ট ধ্রুবক দুটিকে এমনভাবে নিতে পারি, যাতে আমরা লিখতে পারি—

$$A\alpha_1 + B\beta_1 = \lambda A \quad \dots \dots (14.10)$$

$$\text{এবং} \quad A\alpha_2 + B\beta_2 = \lambda B$$

যেখানে  $\lambda$  হল একটি ধ্রুবক। সুতরাং

(14.7) ও (14.9) সমীকরণ দুটি থেকে আমরা পাই

$$\psi(x+a) = \lambda \psi(x) \quad \dots \dots (14.11)$$

(14.10) সমীকরণদুটির A ও B ধ্রুবকের মান শূন্য না হওয়ার শর্ত হল যে এদের সহগগুলি দ্বারা যে ডিটারমিনেন্ট গঠিত হয়, তার মান শূন্য হবে। অর্থাৎ

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1 - \lambda) & \beta_1 \\ \alpha_2 & (\beta_2 - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \dots (14.12)$$

$$\text{বা} \quad \lambda^2 - (\alpha_1 + \beta_2)\lambda + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0 \quad \dots \dots (14.13)$$

এখন আমরা প্রমাণ করব যে  $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 1$ । যেহেতু  $f(x)$  ও  $g(x)$  অপেক্ষক দুটি (14.3) সমীকরণের দুটি বাস্তব ও নিরপেক্ষ সমাধান, সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] f(x) = 0$$

$$\text{এবং } \frac{d^2 g(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] g(x) = 0$$

এই দুটি সমীকরণের প্রথমটিকে  $g(x)$  ও দ্বিতীয়টিকে  $f(x)$  দ্বারা গুণ করে প্রাপ্ত সমীকরণগুলির বিয়োগফল নিলে আমরা পাই

$$g(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - f(x) \frac{d^2 g(x)}{dx^2} = 0 \quad \dots \dots (14.14)$$

$$\text{বা } \frac{d}{dx} \left[ g(x) \frac{df(x)}{dx} - f(x) \frac{dg(x)}{dx} \right] = 0 \quad \dots \dots (14.15)$$

$\therefore$  (14.15) সমীকরণের উভয়দিক সমাকলন করে আমরা পাই

$$\text{বা, } g(x) \frac{df(x)}{dx} - f(x) \frac{dg(x)}{dx} = \text{ধ্রুবক} \quad \dots \dots (14.16)$$

(14.16) সমীকরণের বাম পার্শ্বকে  $f(x)$  ও  $g(x)$  সমীকরণগুলির রংক্ষিয়ান (Wronskian),  $W(x)$  বলা হয়। দেখা যাচ্ছে যে বর্তমান ক্ষেত্রে এর মান একটি ধ্রুবক।

এখন (14.8) সমীকরণ দুটির অবকলনের মাধ্যমে রংক্ষিয়ান গঠন করে আমরা পাই

$$g(x+a) \frac{df(x+a)}{dx} - f(x+a) \frac{dg(x+a)}{dx} = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \left[ g(x) \frac{df(x)}{dx} - f(x) \frac{dg(x)}{dx} \right]$$

$$\text{বা } W(x+a) = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) W(x)$$

$$\text{কিন্তু } W(x+a) = W(x) = \text{ধ্রুবক}$$

$$\therefore \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 1 \quad \dots \dots (14.17)$$

কাজেই (14.13) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\lambda^2 - (\alpha_1 + \beta_2) \lambda + 1 = 0 \quad \dots \dots (14.18)$$

(14.18) দ্বিঘাত সমীকরণ থেকে আমরা  $\lambda$ -র দুটি সম্ভাব্য মান পাই এবং এই দুটি মান দ্বারা (14.11) সমীকরণ থেকে  $\psi_1(x)$  ও  $\psi_2(x)$  দুটি অপেক্ষকের সমীকরণ তৈরি করা যায়। এখন  $\alpha_1$  ও  $\beta_2$ -র মান  $E$  শক্তির উপর নির্ভরশীল হওয়ায়, এই শক্তির মান অনুযায়ী  $\alpha_1$  ও  $\beta_2$ -র মানের জন্য আমরা দুটি শর্ত বিবেচনা করতে পারি।

$$\text{প্রথম শর্ত : } (\alpha_1 + \beta_2)^2 < 4$$

এক্ষেত্রে (13.18) দ্বিঘাত সমীকরণটির  $\lambda_1$  ও  $\lambda_2$  দুটি জটিল মূল থাকবে। কিন্তু এক্ষেত্রে যেহেতু  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ , সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$$\lambda_1 = e^{ika} \quad \dots \dots (14.19)$$

এবং  $\lambda_2 = e^{-ika}$

যেখানে  $k$  হল একটি বাস্তব মানযুক্ত রাশি।  $\lambda$ -র এই দুটি মানদ্বারা (14.11) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\psi_1(x+a) = e^{ika} \psi_1(x)$$

এবং  $\psi_2(x+a) = e^{-ika} \psi_2(x) \quad \dots \dots (14.20)$

এই দুটি সমীকরণকে সাধারণভাবে লেখা যায়

$$\psi(x+a) = e^{\pm ika} \psi(x) \quad \dots \dots (14.21)$$

এখন আমরা দেখাতে পারি যে (14.21) সমীকরণটি বাস্তবিকপক্ষে (14.5) ব্লচ সমীকরণেরই সমার্থক। কারণ (14.5) ও (14.6) সমীকরণ অনুযায়ী

$$\begin{aligned} \psi(x+a) &= e^{\pm ik(x+a)} u_k(x+a) = e^{\pm ikx} e^{\pm ika} u_k(x) \\ &= e^{\pm ika} \psi(x) [ \cdot \cdot e^{\pm ikx} u_k(x) = \psi(x) ] \quad \dots \dots (14.22) \end{aligned}$$

কাজেই, ব্লচ সমীকরণ দ্বারা প্রাপ্ত (14.22) সমীকরণটি (14.21) সমীকরণের সঙ্গে অভিন্ন হয়। এটিই ব্লচ উপপাদ্যের প্রমাণ।

দ্বিতীয় শর্ত :  $(\alpha_1 + \beta_2)^2 \geq 4$

এক্ষেত্রে  $\lambda_1$  ও  $\lambda_2$  মূলদুটি বাস্তব রাশি এবং আমরা ধরতে পারি যে

$$\lambda_1 = e^{\mu a} \text{ ও } \lambda_2 = e^{-\mu a}$$

যেখানে  $\mu$  একটি বাস্তব সংখ্যা। সুতরাং (14.11) সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\psi(x+a) = e^{\pm \mu a} \psi(x) \quad \dots \dots (14.23)$$

(14.23) সমীকরণে  $a$ -র স্থানে  $na$  বসালে আমরা পাই

$$\frac{\psi(x+na)}{\psi(x)} = e^{\pm \mu na} \quad \dots \dots (14.24)$$

কিন্তু (14.24) সমীকরণে  $n$ -এর মান যতই  $\pm \infty$ -এর দিকে এগিয়ে যায়,  $\frac{\psi(x+na)}{\psi(x)}$  অনুপাতটির

মানও ততই অসীমের দিকে এগিয়ে যায়। কাজেই ইলেকট্রনের এই তরঙ্গ অপেক্ষকগুলি সীমাবদ্ধ নয়। এজন্য দ্বিতীয় শর্ত অনুযায়ী প্রাপ্ত তরঙ্গ সমীকরণের সমাধান বাস্তব ক্ষেত্রে গ্রহণযোগ্য নয়।

ত্রিমাত্রিক দেশে ব্লচ উপপাদ্যের রূপ হল

$$\psi_k(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} u_k(\vec{r}) \quad \dots \dots (14.25)$$

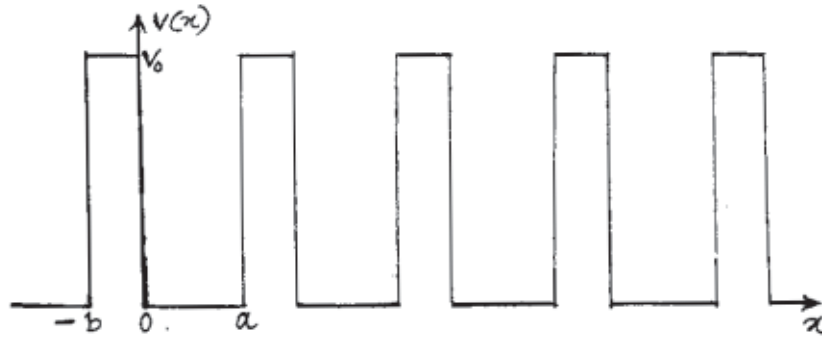
যেখানে  $\vec{k}$  ও দুটি  $\vec{r}$  ভেক্টর রাশি। যদি ল্যাটিসের বিভব ধ্রুবক বা শূন্য হয়, তবে  $u_k(\vec{r})$  ধ্রুবকে পরিণত হয়। সুতরাং আমরা পাই

$$\psi_k(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

কাজেই দেখা যাচ্ছে যে এক্ষেত্রে তরঙ্গ অপেক্ষকটি একটি মুক্ত ইলেকট্রনের তরঙ্গ অপেক্ষকে পরিণত হয়!

## 14.4 ক্রোনিগ-পেনির মডেল (The Kronig-Penney model)

ক্রোনিগ-পেনির মডেলে ধরা হয় যে ধাতুর মুক্ত ইলেকট্রনগুলি যে পর্যাবৃত্ত বিভব ক্ষেত্রের প্রভাবাধীন থাকে, ওই ক্ষেত্রটি একমাত্রিক আয়তক্ষেত্রাকার অসংখ্য বিভব কূপ (potential well)-এর সারি দ্বারা গঠিত। (14.2) চিত্রে ক্রোনিগ-পেনির এই বিভব কূপগুলি দেখানো হল। ধরা হয় যে প্রত্যেক কূপের তলদেশে  $0 < x < a$  অবস্থানে মুক্ত ইলেকট্রনটি একটি স্থির ধনাত্মক আয়নের খুব কাছে আছে এবং এই



চিত্র 14.2: একমাত্রিক ক্রোনিগ-পেনির বিভব

অবস্থায় ইলেকট্রনটির স্থিতিশক্তি শূন্য। অপরপক্ষে ধরা হয় যে কূপের বাইরে  $-b < x < 0$  অবস্থানে ইলেকট্রনের স্থিতিশক্তি  $V_0$ । সুতরাং এই বিভব কূপগুলির পর্যায়  $(a+b)$ । যদিও ক্রোনিগ-পেনির মডেল ধাতুর অভ্যন্তরস্থ প্রকৃত পর্যাবৃত্ত বিভবের একটি স্থূল অনুমান মাত্র, তবু এই মডেলটি কোয়ান্টাম তত্ত্বের প্রয়োগে মুক্ত ইলেকট্রনগুলির বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য অনুধাবন করার পক্ষে বিশেষ সহায়ক।

ক্রোনিগ-পেনির মডেল অনুযায়ী শ্রোডিংগার সমীকরণকে সমাধানের জন্য এখন আমরা দুটি অংশে ভাগ করতে পারি। অর্থাৎ

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0, \text{ যখন } 0 < x < a \quad \dots \dots (14.26)$$

$$\text{এবং } \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)\psi = 0 \text{ যখন } -b < x < 0 \quad \dots \dots (14.27)$$

দ্বিতীয় সমীকরণ  $E$ -এর মান  $V_0$  অপেক্ষা কম ধরে ( $E < V_0$ ) আমরা দুটি বাস্তব রাশি  $\alpha$  ও  $\beta$ -র সংজ্ঞা এভাবে দিতে পারি যে

$$\alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \text{ এবং } \beta^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \quad \dots \dots (14.28)$$

সুতরাং এখন শ্রোডিংগারের সমীকরণদুটি হল

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha^2\psi = 0, \quad 0 < x < a \quad \dots \dots (14.29)$$

$$\text{এবং } \frac{d^2\psi}{dx^2} - \beta^2\psi = 0, \quad -b < x < 0 \quad \dots \dots (14.30)$$

যেহেতু ধাতুর বিভবক্ষেত্রটি পর্যাবৃত্ত ধরা হয়েছে, সুতরাং ব্লচের উপপাদ্য এখানে প্রযোজ্য। অর্থাৎ এক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি —

$$\psi(x) = e^{ikx} u_k(x) \quad \dots \dots (14.31)$$

যেখানে  $u_k(x)$  হল  $x$ -এর একটি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক এবং এর পর্যায় হল  $(a + b)$ । অর্থাৎ

$$u_k(x) = u_k(x + a + b) \quad \dots \dots (14.32)$$

এখন (14.31) সমীকরণটির  $x$ -এর সাপেক্ষে দুবার অবকলন করে আমরা পাই —

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = ik e^{ikx} u_k(x) + e^{ikx} \frac{du_k(x)}{dx}$$

$$\text{এবং } \frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2 e^{ikx} u_k(x) + 2ik e^{ikx} \frac{du_k(x)}{dx} + e^{ikx} \frac{d^2u_k(x)}{dx^2} \quad \dots \dots (14.33)$$

(14.31) ও (14.33) সমীকরণ দুটি থেকে এখন  $\psi$  ও  $\frac{d^2\psi}{dx^2}$  এর মান (14.29) ও (14.30) সমীকরণ দুটিতে বসিয়ে আমরা পাই —

$$\frac{d^2u_1}{dx^2} + 2ik \frac{du_1}{dx} + (\alpha^2 - k^2)u_1 = 0, \quad 0 < x < a \quad \dots \dots (14.34)$$

$$\text{এবং } \frac{d^2u_2}{dx^2} + 2ik \frac{du_2}{dx} - (\beta^2 + k^2)u_2 = 0, \quad -b < x < 0 \quad \dots \dots (14.35)$$

যেখানে  $u_1$  ও  $u_2$  হল যথাক্রমে  $0 < x < a$  ও  $-b < x < 0$  ব্যবধান দুটিতে  $u_k(x)$ -এর মান 1 এই সমীকরণগুলির সাধারণ সমাধান হল

$$u_1 = Ae^{i(\alpha-k)x} + Be^{-i(\alpha+k)x}, \quad 0 < x < a \quad \dots \dots (14.36)$$

$$\text{এবং } u_2 = Ce^{(\beta-ik)x} + De^{-(\beta+ik)x}, \quad -b < x < 0 \quad \dots \dots (14.37)$$

যেখানে A, B, C, D হল চারটি সমাকলন ধ্রুবক, যাদের মান নীচের সীমাবদ্ধতার শর্ত দ্বারা নির্ণয় করা যায়।

$$u_1(0) = u_2(0), \quad \left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{du_2}{dx}\right)_{x=0} \quad \dots \dots (14.38)$$

$$u_1(a) = u_2(-b), \quad \left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=a} = \left(\frac{du_2}{dx}\right)_{x=-b} \quad \dots \dots (14.39)$$

(14.38) সমীকরণের শর্তগুলি প্রকৃতপক্ষে তরঙ্গ অপেক্ষকগুলির এবং এদের অবকলনগুলির নিরবচ্ছিন্নতার আবশ্যিকতা প্রকাশ করে। অপরপক্ষে (14.39) সমীকরণের শর্তগুলি  $u_k(x)$  আপেক্ষিকটির পর্যাবৃত্ত ধর্মের শর্ত প্রকাশ করে। (14.48) ও (14.39) শর্তগুলি প্রয়োগ করে (14.36) ও (14.37) সমীকরণগুলি থেকে আমরা নীচের চারটি সমীকরণ পাই

$$A + B = C + D$$

$$Ai(\alpha - k) - \beta i(\alpha + k) = C(\beta - ik) - D(\beta + ik)$$

$$Ae^{i(\alpha-k)a} + Be^{-i(\alpha+k)a} = Ce^{-(\beta-ik)b} + De^{(\beta+ik)b}$$

$$Ai(\alpha - k)e^{i(\alpha-k)a} - Bi(\alpha + k)e^{-i(\alpha+k)a}$$

$$= C(\beta - ik)e^{-(\beta-ik)b} - D(\beta + ik)e^{(\beta+ik)b} \quad \dots \dots (14.40)$$

এই চারটি সমীকরণের সাহায্যে A, B, C ও D নির্ণয় করা যায়। এই ধ্রুবকগুলির মান শূন্য না হওয়ার শর্ত হল যে সমীকরণগুলিতে এদের সহগগুলি দ্বারা যে ডিটারমিনেন্ট গঠন করা যায়, তার মান শূন্য হবে। অর্থাৎ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ i(\alpha - k) & -i(\alpha + k) & \beta - ik & -(\beta + ik) \\ e^{i(\alpha-k)a} & e^{-i(\alpha+k)a} & e^{-(\beta-ik)b} & e^{(\beta+ik)b} \\ i(\alpha - k)e^{i(\alpha-k)a} & -i(\alpha + k)e^{-i(\alpha+k)a} & (\beta - ik)e^{-(\beta-ik)b} & -(\beta + ik)e^{(\beta+ik)b} \end{vmatrix} = 0$$

এই ডিটারমিনেন্টের সমাধান করে আমরা পাই—

$$\frac{\beta^2 + \alpha^2}{2\beta\alpha} \sinh \beta b \sin \alpha a + \cosh \beta b \cos \alpha a = \cos k(a + b) \quad \dots \dots (14.41)$$