প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমত কোনো বিষয়ে সাম্মানিক (honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণ ক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে—যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয়সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন ; যখনই কোনো শিক্ষার্থীও এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনো শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণ-ক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশ কিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার

উপাচার্য

দ্বিতীয় পুনর্মুদ্রণ : ফেব্রুয়ারি, 2013

ভারত সরকারের দূরশিক্ষা পর্ষদের বিধি অনুযায়ী এবং অর্থানুকূল্যে মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations and financial assistance of the Distance Education Council, Government of India.

পরিচিতি

বিষয় : সহায়ক পদার্থবিদ্যা **স্নাতক পাঠক্রম**

পাঠক্রম ঃ SPH : 1(2)

	রচনা	**সম্পাদনা**
একক 1-10	ড. রামকুমার গুছাইত	শ্রী দুলালকৃষ্ণ বিশ্বাস

ঘোষণা

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

SPH 1(2)

(স্নাতক পাঠক্রম)

একক 6 তাপগতিবিদ্যা (Thermodynamics)

গঠন

6.27 গাণিতিক প্রশ্নের উত্তর

6.28 সহায়ক গ্রন্থাবলি

6.1 প্রস্তাবনা (Introduction) ঃ

তাপগতিবিদ্যায় প্রধানত তাপশক্তির অন্যশক্তিতে রূপান্তর বা বিপরীতক্রমে বিভিন্ন শক্তির তাপশক্তিতে রূপান্তর নিয়ে আলোচনা করা হয়। ইউরোপে শিল্প বিকাশের সময়ে এই বিষয়টি বিশেষ প্রাধান্য লাভ করে। বর্তমানে ভৌতবিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় এটির বহুল প্রয়োগ সফলভাবে করা হয়। তাপইঞ্জিন, তাপবিদ্যুৎ উৎপাদনের যন্ত্রাদি থেকে শুরু করে বন্ধ গহ্বরের মধ্যে বিকিরণ, হিমায়ন যন্ত্রাদি, রকেট বিজ্ঞান, রাসায়নিক বিক্রিয়া, নিউক্লিয় বিক্রিয়া প্রভৃতি সেখানেই শক্তির আদানপ্রদান বা রূপান্তর হয় সে সব জায়গায় এর প্রয়োগ সাফল্যের সঙ্গে করা হয়। বলবিজ্ঞানে যেমন যান্ত্রিক শক্তি নিয়ে আলোচনা করা হয়, এর নিয়মাবলি নিউটনের সূত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হয়, তেমনি তাপগতিবিদ্যায় পদার্থের অভ্যন্তরীন শক্তি আদানপ্রদানের বিষয়টি কয়েকটি মৌলিক সূত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হয়। পরীক্ষালব্ধ কয়েকটি মৌলিক সূত্রের উপর তাপগতিবিদ্যা প্রতিষ্ঠিত। আমরা এখানে এই সূত্রগুলি নিয়ে আলোচনা করব। তাপগতিবিদ্যায় এই সূত্রগুলির ব্যাখ্যা করা হয় না–এগুলির প্রয়োগ নিয়ে আলোচনা করা হয়। সনাতন বলবিদ্যার মতো তাপগতিবিদ্যার সূত্রগুলি পরীক্ষালব্ধ হওয়ায় এদের যথার্থতা নিয়ে সংশয় নেই। এই সূত্রগুলির সাহায্যে যে সব সিদ্ধান্তে পৌঁছানো গেছে সেগুলি পরীক্ষায় প্রমাণিত হওয়ায় এই সূত্রগুলির নির্ভুলতা প্রমাণিত হয়েছে। এর ফলে আধুনিক বিজ্ঞানে তাপগতিবিদ্যা এক বিশেষ স্থান অধিকার করে আছে। পদার্থের অভ্যন্তরের অণুপরমাণু সমূহের পারস্পরিক সম্পর্ক (microscopic relation) থেকে এই সূত্রগুলির ব্যাখ্যা দেওয়া তাপগতিবিদ্যায় বিবেচনা করা হয় না। পদার্থের স্থূল বাহ্যিক ধর্ম (macroscopic properties) নিয়েই এর আলোচনা। বহুসংখ্যক অণুপরমাণু মিলে পদার্থের বাইরে পরিমাপযোগ্য যে সব সাধারণ ধর্ম প্রকাশ করে সেগুলিই তাপগতিবিদ্যার ভিত্তি। এক্ষেত্রে অণুপরমাণুর পারস্পরিক ক্রিয়া ইত্যাদির ব্যাখ্যার জন্য বিশেষ অঙ্গীকারের প্রয়োজন হয় না। সাধারণ পরীক্ষালব্ধ সূত্রগুলিই প্রয়োগ করা হয়। ফলে সিদ্ধান্তগুলিও খুবই নির্ভরযোগ্য হয়। এর সত্যতা সন্দেহাতীত বলে একে সনাতন তাপগতিবিদ্যা (classical thermodynamics) বলা হয়।

উদ্দেশ্য (Objective) ঃ

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন—

- তাপগতীয় তন্ত্র ও তাপগতীয় সাম্য বলতে কী বোঝায়।
- তাপগতীয় তন্ত্রের অবস্থার চলরাশি কাদের বলা হয়।
- তাপগতিবিদ্যার আদিসূত্র ও উষ্ণতার ধারণা।
- তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র।
- সমোষ্ণ ও রূদ্ধতাপ প্রক্রিয়া।
- তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র।
- কার্ণো ইঞ্জিন ও এর কর্মদক্ষতা।
- প্রত্যাবর্তক ও অপ্রত্যাবর্তক প্রক্রিয়া।
- উষ্ণতার তাপগতি সংক্রান্ত স্কেল বা কেলভিনের পরমস্কেল।
- কার্ণো উপপাদ্য।
- ক্লসিয়াস উপপাদ্য।
- এনট্রপি ও এর ভৌত ব্যাখ্যা।
- জুল-টমসন ক্রিয়া।

6.2 তাপগতিবিদ্যায় কয়েকটি প্রাথমিক ধারণা : (Some Basic Concepts in Thermodynamics) :

তাপগতিবিদ্যা আলোচনার শুরুতে আমরা কয়েকটি প্রাসঙ্গিক বিষয় সম্বন্ধে আগে পরিচিত হবো।

(i) **তাপগতীয় তন্ত্র (Thermodynamic system)** :–

বলবিদ্যায় কোনো বস্তুকণা বা কোনো দৃঢ়বস্তুর গতিপ্রকৃতি আলোচনার সময় ঐ বস্তুকণা বা দৃঢ়বস্তুকে পৃথকভাবে চিহ্নিত করতে হয়। তেমনি তাপগতিবিদ্যায় কোনো পদার্থের নির্দিষ্ট অংশ বা পদার্থ যে স্থান নিয়ে আছে তার কোনো নির্দিষ্ট অংশ নিয়ে আলোচনা সীমাবদ্ধ রাখা হয় বা পর্যবেক্ষণের জন্য পৃথকভাবে বিবেচনা করা হয়। এই নির্দিষ্ট অংশকে তাপগতীয় তন্ত্র বা শুধু তন্ত্র বলা হয়। এই অংশটির মধ্যে বহুসংখ্যক অণুপরমাণু থাকতে হবে

এবং এটি কিছু স্থূল বাহ্যিক ধর্ম প্রকাশ করবে। নির্দিষ্ট ভরের কোনো তন্ত্রকে এর আয়তন, চাপ, উষ্ণতা ইত্যাদি পরিমাপযোগ্য রাশি দিয়ে বর্ণনা করা যায়। এগুলিই স্থূল বাহ্যিক ধর্ম প্রকাশ করে। বিশেষ অণুপরমাণু নিয়ে এক্ষেত্রে বিবেচনা করা হয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় নির্দিষ্ট পরিমাণ জল, স্টীম, কোনো গ্যাস, বায়ু ও জলীয় বাষ্পের মিশ্রণ বা গ্যাস ও বায়ুর মিশ্রণ তাপযুগ্ম, পৃষ্ঠপর্দা বা ফিল্ম, চুম্বকীয় পদার্থ, ধারক ইত্যাদি প্রত্যেকটি পৃথক এক একটি তন্ত্র। কোনো তন্ত্র সমসত্ত্ব বা অসমসত্ত্ব হতে পারে: একটি ফেজের (phase) বা বিভিন্ন ফেজের সমষ্টিও হতে পারে। ফেজ হলো অসমসত্ত্ব বস্তুর ভিন্ন ভিন্ন অংশ যেমন, জল বরফের মিশ্রণে দুটি ফেজ জল, বরফ, কিন্তু লবণের জলীয় দ্রবণ হল একটি ফেজ।

(ii) **পরিপার্শ্ব (surroundings)** : কোনো তন্ত্রকে নির্দিষ্ট করলে ঐ তন্ত্রের বাইরে যে সব পদার্থ থেকে যায় এবং যা তন্ত্রকে প্রভাবিত করতে পারে তাকে বলা হয় পরিপার্শ্ব।

(iii) **সীমা (boundry)** : তন্ত্র ও পরিপার্শ্বকে যে তল দিয়ে পৃথক করা হয় তাকে সীমা বলে। সীমা বিভিন্ন ধরনের হতে পারে। যেমন, তাপভেদ্য (diathermanous) সীমা, রুদ্ধতাপ বা তাপ অভেদ্য (athermanous) সীমা, ইত্যাদি।

(iv) **উদস্থিতিক (hydrostatic) তন্ত্র** : নির্দিষ্ট ভর যুক্ত কোনো তন্ত্র পরিপার্শ্বের উপর সমান উদ্‌স্থিতিক চাপ প্রয়োগ করলে এবং যার উপর পৃষ্ঠতলের প্রভাব, তড়িৎ বা চুম্বকীয় প্রভাব, মহাকর্ষীয় প্রভাব ইত্যাদি উপেক্ষা করা যায় তেমন তন্ত্রকে উদ্‌স্থিতিক তন্ত্র বলা হয়। একে রাসায়নিক তন্ত্র ও বলে।

(v) **বিচ্ছিন্ন (isolated) তন্ত্র** : যদি এমন কোনো তন্ত্র কল্পনা করা যায় যা পরিপার্শ্বের সঙ্গে কোনো শক্তি বা পদার্থ আদানপ্রদান করতে পারেনা তবে ঐ ধরনের তন্ত্রকে বিচ্ছিন্ন তন্ত্র বলা হয়।

(vi) **মুক্তা বা খোলা (open) তন্ত্র** : কোনো তন্ত্র যদি পরিপার্শ্বের সঙ্গে শক্তি ও পদার্থ আদানপ্রদান করতে পারে তখন সেই তন্ত্রকে মুক্ত বা খোলা তন্ত্র বলা হয়।

(vii) **বন্ধ (closed) তন্ত্র** : কোনো তন্ত্র যদি তার পরিপার্শ্বের সঙ্গে শক্তি আদানপ্রদান করতে পারে কিন্তু পদার্থ আদানপ্রদান করতে পারেনা, তাকে বন্ধ তন্ত্র বলা হয়।

6.3 তাপগতীয় সাম্য (Thermodynamic Equilibrium) :

যান্ত্রিক সাম্য (mechanical equilibrium) : ধরা যাক কোনো তন্ত্রের সঙ্গে তার পরিপার্শ্বের মধ্যে কোনো বল ক্রিয়া করছে। তখন তন্ত্রও পরিপার্শ্বের মধ্যে পদার্থের কোনো অংশের চলাচল হতে পারে। তেমনি তন্ত্রের বিভিন্ন অংশের মধ্যেও বলের তারতম্য থাকলে তন্ত্রের একটি অংশ থেকে অন্য অংশে পদার্থের অংশ বিশেষ চলাচল করতে পারে। এতে তন্ত্রের নির্দিষ্ট ভর বা আয়তন, চাপ ইত্যাদি আর স্থির থাকবে না। তবে একটি সময় আসবে যখন এই পরিবর্তন আর হবে না। তখন তন্ত্রের সঙ্গে পরিপার্শ্বের মধ্যে বা তন্ত্রের বিভিন্ন অংশের মধ্যে কোনো অসম বল আর ক্রিয়া করবে না। এই অবস্থা যখন তন্ত্র ও পরিপার্শ্বের

বা তন্ত্রের বিভিন্ন অংশের মধ্যে কোনো লব্ধি বল ক্রিয়া করে না–সেই অবস্থার সাম্যকে যান্ত্রিক সাম্য বলা হয়। একটা উদাহরণ নিন। ধরুন পিস্টনযুক্ত একটি চোঙের মধ্যে কিছু পরিমাণ গ্যাস বা বায়ু আছে। এখন যদি পিস্টনের উপর বল প্রয়োগ করে চোঙের মধ্যে প্রবেশ করানো হয়, গ্যাসের উপর চাপ বাড়বে। এবার পিস্টনটিকে ছেড়ে দিলে ভিতরের চাপ বাইরের চাপের থেকে বেশী হওয়ায় পিস্টনটি বাইরের দিকে আসতে থাকবে। একসময় পিস্টনটি আর সরবে না, স্থির হয়ে একটি জায়গায় দাঁড়াবে। তখন চোঙের গ্যাস বাইরের বায়ুমন্ডলের সঙ্গে যান্ত্রিক সাম্যে আছে বলা যায়।

(ii) **তাপীয় সাম্য (thermal equilibrium)** : ধরা যাক, একটি লোহার দন্ডের একটি প্রান্ত উনুনে গরম করে (ঘরের উষ্ণতা থেকে বেশী উষ্ণতায়) ঘরের মধ্যে রাখা হল, এখন লোহার উষ্ণ প্রান্ত থেকে ঠান্ডা প্রান্তে (তাপীয়) শক্তি গমন করবে এবং ঘরের বায়ুর মধ্যেও প্রবাহিত হবে, যে পর্যন্ত না লোহার দন্ডের বিভিন্ন অংশ ও ঘরের উষ্ণতা এক হয় ততক্ষণ এই প্রক্রিয়া চলতে থাকবে। এক সময় দন্ডটির ও ঘরের উষ্ণতা সমান হবে। তেমনি ধরা যাক একটি চোঙের মধ্যে একটি তলভেদ্য বিভেদতল বা সীমা আছে যার দুপাশে ভিন্ন তাপমাত্রায় গ্যাস আছে। দেখা যাবে তাপ পরিবহন হবে এবং দুটি তন্ত্রের মধ্যে চাপ ও আয়তনের পরিবর্তন হতে থাকবে। একসময় আসবে যখন চাপ ও আয়তনের আর পরিবর্তন হচ্ছে না। তখন দুটি অংশের উষ্ণতা সমান হয়েছে। এই অবস্থা যখন তন্ত্রের সঙ্গে পরিপার্শ্বের বা তন্ত্রের বিভিন্ন অংশের মধ্যে কোনো উষ্ণতার পার্থক্য থাকে না —সর্বত্র উষ্ণতা সমান থাকে–সেই অবস্থার সাম্যকে তাপীয় সাম্য বলা হয়।

রাসায়নিক সাম্য (chemical equilibrium) : একইভাবে যখন কোনো তন্ত্রের সঙ্গে তার পরিপার্শ্বের মধ্যে বা তন্ত্রের বিভিন্ন অংশের মধ্যে রাসায়নিক পরিবর্তন হয় না, সর্বত্র রাসায়নিক গঠন একই থাকে তখন সেই অবস্থাকে বলা হয় রাসায়নিক সাম্য।

কোনো তন্ত্র যখন একই সময়ে যান্ত্রিক, তাপীয় ও রাসায়নিক সাম্যে থাকে তখন সেই সাম্যকে বলা হয় তাপগতীয় সাম্য।

এরপর আমরা দেখবো-সাম্যাবস্থাতেই কেবল কোনো তন্ত্রের অবস্থার চলরাশিগুলি চিহ্নিত করা হয়।

6.4 অবস্থার চলরাশি বা তাপগতীয় চলরাশি বা তাপগতীয় স্থানাঙ্ক (State Variables (or Variables of State), or Thermodynamic Variables or, Thermodynamic Co-ordinates) :

আমরা জানি সনাতন বলবিদ্যায় (classical mechanics) কোনো বস্তুর অবস্থাকে বর্ণনা করার জন্য পরিমাপ করা যায় এমন কয়েকটি চলরাশি যেমন - দূরত্ব, সময়, গতিবেগ, ত্বরণ, ভারকেন্দ্রের অবস্থান ইত্যাদির সাহায্য

নেওয়া হয়। এই চলরাশিগুলি বস্তুর বাইরের ধর্মাবলিকে (external properties) বর্ণনা করে। তেমনি তাপগতিবিদ্যায়ও পরীক্ষালব্ধ, প্রত্যক্ষভাবে উপলব্ধি করা যায় এমন কয়েকটি চলরাশি বিবেচনা করা হয় যাদের সাহায্যে পদার্থের অভ্যন্তরের ধর্মাবলি (interior properties) প্রকাশ করা যায় এবং এগুলি পরিমাপযোগ্য। কোনো তন্ত্র তাপগতীয় সাম্যাবস্থায় থাকলে তার আয়তন (V) ও চাপ (P) এই দুই পরিমাপযোগ্য রাশি দিয়ে এর অভ্যন্তরীণ অবস্থাকে সম্পূর্ণভাবে প্রকাশ করা যায়। অতএব V ও P হল তন্ত্রটির অবস্থার চলরাশি। তেমনি উষ্ণতা বা তাপমাত্রা (T) ও একটি অবস্থার চলরাশি। তাপগতিবিদ্যার আদিসূত্রে উষ্ণতার সম্যক ধারণা ব্যাখ্যা করা হবে। এই উষ্ণতা বা তাপমাত্রা T, অন্যদুটি চলরাশি V ও P এর উপর নির্ভর করে। V, P ও T এর মধ্যে যেকোনো দুটি রাশি জানা থাকলে তৃতীয় রাশিটি জানা যায়। এদের অবস্থার চলরাশি বা তাপগতীয় চলরাশি বা তাপগতীয় স্থানাঙ্কও বলা হয়। পরে আমরা দেখবো আরো কয়েকটি রাশি বা অপেক্ষক যেমন অভ্যন্তরীন শক্তি (U), এনট্রপি (S), প্রভৃতি চলরাশির মতো আচরণ করে। এই সমস্ত চলরাশিগুলি পদার্থের স্থুল ধর্ম (gross property) কে প্রকাশ করে।

চলরাশিগুলিকে আবার দু'ভাগে শ্রেণী বিভক্ত করা হয়।

(i) **ব্যাপ্তি নিরপেক্ষ চলরাশি (intensive variables) :** চাপ (P), উষ্ণতা (T) ইত্যাদি চলরাশিগুলি তন্ত্রের ভরের উপর নির্ভর করে না। এক বা একাধিক দেয়াল দিয়ে তন্ত্রকে বিভক্ত করলে এই রাশিগুলির কোনো পরিবর্তন হয় না। এদের ব্যাপ্তি নিরপেক্ষ চলরাশি বলা হয়।

(ii) **ব্যাপ্তি নির্ভর চলরাশি (extensive variables) :** আয়তন (V), অভ্যন্তরীন শক্তি (U), এনট্রপি (S) ইত্যাদি চলরাশিগুলি তন্ত্রের ভরের উপর নির্ভর করে। এদের ব্যাপ্তি নির্ভর চলরাশি বলা হয়।

তাপগতিবিদ্যায় আয়তন (V), চাপ (P) বা অন্যান্য চলরাশিসমূহের ব্যাখ্যা বিবেচনা করা হয় না। চলরাশিগুলির সাহায্যে কোনো তন্ত্রকে চিহ্নিত করে এদের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক নিয়ে আলোচনা করাই তাপগতিবিদ্যার মুখ্য উদ্দেশ্য।

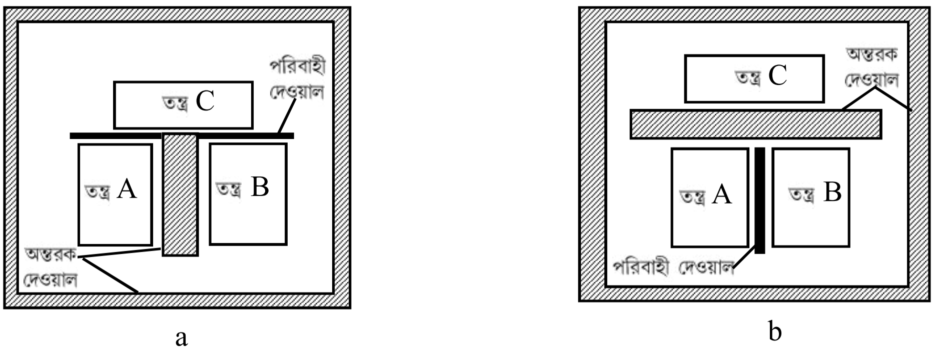
6.5 তাপগতিবিদ্যার আদিসূত্র ও উষ্ণতার ধারণা (Zeroth Law of Thermodynamics and Concept of Temperature) :

উষ্ণতার প্রাথমিক ধারণা আমাদের আছে। সাধারণভাবে কোনো বস্তু কতটা গরম বা ঠান্ডা যা দিয়ে আমরা বুঝে থাকি তা হল উষ্ণতা। আবার ভিন্ন উষ্ণতার দুটি বস্তুকে সংস্পর্শে আনলে বেশী উষ্ণতার বস্তুটি থেকে কম উষ্ণতার বস্তুতে তাপশক্তি প্রবাহিত হতে থাকবে – একসময় উষ্ণতা সমান হয়ে যাবে। উষ্ণতা সমান হলে আর তাপশক্তি প্রবাহিত হবে না। তখন বলি তাপীয় সাম্য প্রতিষ্ঠিত হয়েছে। অর্থাৎ তাপীয় সাম্য প্রতিষ্ঠিত হলে বুঝতে হবে উষ্ণতা সমান হয়েছে। বিপরীতক্রমে বলা যায় কোনো তন্ত্র তাপীয় সাম্যে আছে কিনা তা যে ধর্মের সাহায্যে জানা যায় তাই হল উষ্ণতা । বস্তুত আর. এইচ. ফাউলার (R. H. Fowler) উষ্ণতার সংজ্ঞা এভাবেই দিয়েছেন।তিনি যে সূত্রের সাহায্যে উষ্ণতার সংজ্ঞা নিরূপণ করেছেন সেটি তাপগতিবিদ্যার আদিসূত্র নামে পরিচিত। তাপগতিবিদ্যার প্রথম ও দ্বিতীয় সূত্রের পরে এই সূত্রটি দেওয়া হয়েছে বলে একে তাপগতিবিদ্যার আদিসূত্র বলা

হয়।

তাপগতিবিদ্যার আদি সূত্রটি হল – দুটি তন্ত্র পৃথকভাবে তৃতীয় কোনো তন্ত্রের সঙ্গে তাপীয় সাম্যে থাকলে, অবশ্যই তন্ত্রদ্বয় পরস্পরের সঙ্গে তাপীয় সাম্যে থাকবে। এই সূত্র থেকে বলা যায়, উষ্ণতা হল কোনো তন্ত্রের এমন একটি ধর্ম যা স্থির করে দেয় এই তন্ত্র অন্য কোনো তন্ত্রের সঙ্গে তাপীয় সাম্যে আছে কি না।

ধরা যাক A ও B দুটি তন্ত্র রূদ্ধতাপ দেয়াল দিয়ে পৃথক করা আছে (চিত্র 6.1a)। C তন্ত্রটি A ও B তন্ত্রের সঙ্গে তাপভেদ্য দেয়াল দিয়ে যুক্ত। সমস্ত যন্ত্রাংশটি একটি রূদ্ধতাপ দেওয়াল দিয়ে ঘেরা। কিছুক্ষণের মধ্যে দেখা যাবে A ও C এবং B ও C এর মধ্যে তাপীয় সাম্য প্রতিষ্ঠিত হয়েছে। এবার C কে রূদ্ধতাপ দেয়াল দিয়ে বিচ্ছিন্ন করে A ও B -র মধ্যে তাপভেদ্য দেয়াল দিলে দেখা যাবে A ও B -র মধ্যে কোনো তাপ পরিবহন হচ্ছে না। (চিত্র 6.1b)। অর্থাৎ A ও B এখন তাপীয় সাম্যে আছে। এর থেকে তাপগতিবিদ্যার আদিসূত্রের পরীক্ষাগত প্রমাণ পাওয়া যায়।



চিত্র 6.1 তাপগতিবিদ্যার আদিসূত্র

6.6 অবস্থার সমীকরণ (Equation of State) :

ধরা যাক, A, B, C – কয়েকটি তন্ত্র তাপীয় সাম্যে আছে। আমরা আগে দেখেছি কোনো তন্ত্রের দুটি চলরাশি আয়তন (V) ও চাপ (P) জানা থাকলে তন্ত্রটির অবস্থাকে জানা যায়। যদি তন্ত্রগুলি তাপীয় সাম্যে থাকে তবে প্রত্যেকটি তন্ত্রের একটি সাধারণ রাশি থাকবে যা উষ্ণতাকে প্রকাশ করে। যেহেতু তন্ত্রের অবস্থা তার P ও V এর অপেক্ষক দিয়ে প্রকাশ করা যায় তাই প্রত্যেকটি তন্ত্রে চাপ P ও আয়তন V এর একটি করে অপেক্ষক থাকবে যেগুলির মান পরস্পর সমান হবে আর এই অপেক্ষকই হবে উষ্ণতা। অর্থাৎ

$$f_1(P, V) = f_2(P, V) = T - - - - \quad (6.1)$$

1, 2 ইত্যাদি দিয়ে বিভিন্ন তন্ত্রকে চিহ্নিত করা হয়েছে। যে কোনোও তন্ত্র বিবেচনা করে উপরের অপেক্ষকের পরিবর্তনের সাহায্যে উষ্ণতার পরিবর্তন ও উষ্ণতার স্কেল নির্ধারণ করা যায়।

সমীকরণ (6.1) কে আরো সাধারণ আকারে প্রকাশ করা যায়।

f (P,V,T) = 0

এই সমীকরণকে অবস্থার সমীকরণ বলা হয়। উদাহরণ হিসাবে আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে অবস্থার সমীকরণ

$$PV = RT \quad - - \quad - - - \quad (6.2)$$

এবং বাস্তব গ্যাসের ক্ষেত্রে অবস্থার সমীকরণ (ভ্যানডারওয়াল্স)

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad - - - - \quad (6.3)$$

সমীকরণ (6.1) (6.2) ও (6.3) থেকে বোঝা যায় P, V ও T চলরাশিগুলির যে কোনো দুটির অপেক্ষকের সাহায্যে তৃতীয়টি প্রকাশ করা যায়।

6.7 তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র (1st Law of Thermodynamics) :

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র মূলত শক্তি সংরক্ষণের সূত্র। এখান থেকে জানা যায় (i) তাপ একপ্রকার শক্তি, (ii) পদার্থের অভ্যন্তরীন শক্তি অপেক্ষক অবশ্যই আছে, (iii) মোট শক্তি সংরক্ষিত হয়।

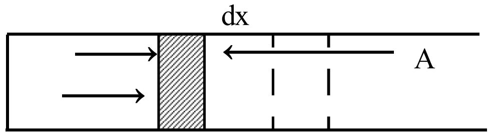
তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র আলোচনা করার আগে আসুন, তাপ, কার্য, অভ্যন্তরীন শক্তি সম্পর্কে সম্যক ধারণা করে নিই।

তাপ : আমরা আগেই অনুধাবন করেছি যে দুটি তন্ত্র বিভিন্ন উষ্ণতায় থাকলে এবং এদের সংযোগ ঘটলে উষ্ণতর অংশ থেকে শক্তি নিম্নতর উষ্ণতার অংশে চলে গিয়ে সাম্য আনতে চেষ্টা করে। এই শক্তিকেই আমরা তাপ বলি। অর্থাৎ কোনো তন্ত্রের এক অংশ থেকে অন্য অংশে অথবা এক তন্ত্র থেকে অন্য তন্ত্রে উষ্ণতার পার্থক্য থাকলে যে শক্তি প্রবাহিত হয় তাকে তাপ বা তাপীয়শক্তি বলে। পরে আলোচনায়, দেখবো কোনো বস্তুতে তাপ আছে বলার কোনো অর্থ নেই। ক্যালোরিমিতিতেও গৃহীত বা বর্জিত তাপ পরিমাপ করা হয় উষ্ণতার পরিবর্তনের সাহায্যে। কোনো বস্তু তাপ গ্রহণ বা বর্জন করলে কীভাবে তাপ গৃহীত বা বর্জিত হল তার উপর নির্ভর করে এর পরিমাণ। বলা যায় তাপের আদানপ্রদানের পরিমাণ নির্ভর করে এর আদানপ্রদান প্রক্রিয়ার উপর।

কার্য : আমরা জানি বল প্রয়োগ করলে বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ হলে বলা হয় কার্য করা হয়েছে। বল ও বলের অভিমুখে সরণের উপাংশের গুণফল হল কার্যের পরিমাণ। যদি কোনো তন্ত্র সামগ্রিকভাবে পরিপার্শ্বে কোনো বল প্রয়োগ করে ও বলের অভিমুখে সরণ হয় তখন বলা হয় তন্ত্রের দ্বারা কার্য বা তন্ত্রের উপর কার্য করা হয়েছে। এই কার্যকে বাহ্যিক কার্য (external work) বলা হয়। বাহ্যিক কার্য তন্ত্র নিজে করলে কার্যকে ধনাত্মক ও বস্তুর উপর কার্য করা হলে কার্যকে ঋণাত্মক বলে আমরা বিবেচনা করব। যেমন কোনো চোঙে নির্দিষ্ট চাপে গ্যাস আবদ্ধ আছে। গ্যাসটি প্রসারিত হল। পরিপার্শ্বের উপর গ্যাসটি কার্য করল।

আবার তন্ত্রের কোনো অংশ অপর একটি অংশের উপর কার্য করলে কৃত কার্যকে বলা হয় অভ্যন্তরীন কার্য (internal work)। তাপগতিবিদ্যায় কার্য বলতে বাহ্যিক কার্যই বোঝায়। এখানে অভ্যন্তরীন কার্যের কোনো ভূমিকা নেই।

ধরি কোনো চোঙের মধ্যে কিছু পরিমাণ গ্যাস আছে। চোঙের খোলামুখ একটি পিস্টন দিয়ে আটকানো। পিস্টনটি চোঙের মধ্যে ঘর্ষণহীন ভাবে চলাচল করতে পারে। ধরি গ্যাসের চাপ P ; অতএব পিস্টনের উপর চাপও P এবং পিস্টনের ক্ষেত্রফল A হলে পিস্টনের উপর প্রযুক্ত বল F = PA। পিস্টনের উপর, বাইরের বলও PA। গ্যাসের আয়তন বৃদ্ধি অতি ক্ষুদ্র dv বিবেচনা করলে, পিস্টনের বাইরের দিকে সরণ অতি ক্ষুদ্র dx হবে। এই অতি ক্ষুদ্র পরিবর্ত্তনের জন্য চাপ P প্রায় স্থির বলে গণ্য করা যায়, অতএব গ্যাসের দ্বারা কৃতকার্য



চিত্র 6.2 কার্য

$$dW = Fdx = PAdx = PdV \quad ------ \quad 6.4$$

প্রাথমিক ও অন্তিম আয়তন যথাক্রমে V_1 ও V_2 হলে, কৃতকার্য হবে –

$$W = \int_{v_1}^{v_2} PdV \quad ------ \quad 6.5$$

আমরা এই কার্যকে ধনাত্মক বলে ধরেছি।

সূচক চিত্র (indicator diagram) : x অক্ষ বরাবর গ্যাসের (যে কোন তন্ত্রের) আয়তন এবং y -অক্ষ বরাবর গ্যাসের চাপ নিয়ে যে লেখচিত্র পাওয়া যায় তাকে P–V লেখচিত্র বা সূচক চিত্র বলে। 6.2 নং চিত্রে পিস্টনের সঙ্গে x -অক্ষ বরাবর সূচক (যেমন পেনসিল) লাগানো থাকলে সূচকের অবস্থান পরিবর্তনের সাহায্যে আয়তনের পরিবর্তন কোনো লেখ-কাগজে সারাসরি আঁকা যায়। একই সময়ে y -অক্ষ বরাবর চাপের পরিবর্তনকে ঐ সূচকে গতি সঞ্চার দ্বারা করা হয়। অর্থাৎ চাপ ও আয়তন পরিবর্তন সূচকের সাহায্যে লেখচিত্রে পেন্সিলের গতিপথ দ্বারা অঙ্কিত হয়। চাপ থাকে y অক্ষে ও আয়তন থাকে x অক্ষে। এই চিত্রই হল সূচক চিত্র (চিত্র 6.3)। অংকিত রেখাটিকে বলে প্রক্রিয়ার পথ।

6.3 নং চিত্রে কোনো তন্ত্রের প্রার্থমিক অবস্থা A বিন্দু দিয়ে নির্দিষ্ট করা হয়েছে। ধরি কোনো পরিবর্তনের সূচক বিন্দু ACB পথে B বিন্দুতে অন্তিম অবস্থায় এসেছে। এই পথে কার্যের পরিমাণ

$W_1 = \int_A^B PdV$ (ACB পথ)

= ACB লেখ ও x অক্ষের মধ্যে আবদ্ধ ক্ষেত্রফল (দাগ কাটা অংশ)

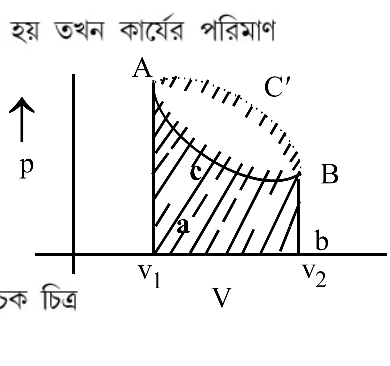
= aACBb ক্ষেত্রফল।

আবার A থেকে B পর্যন্ত পরিবর্তন অন্য কোনো AC′B পথে হয় তখন কার্যের পরিমাণ

$W_2 = \int_A^B PdV$ (AC′B পথ)

= AC′B লেখ ও x -অক্ষের মধ্যে আবদ্ধ ক্ষেত্রফল (বিচ্ছিন্ন দাগ কাটা অংশ)

= aAC′Bb ক্ষেত্রফল।



চিত্র 6.3 সূচক চিত্র

দেখা যাচ্ছে W_1 ও W_2 কার্যদুটির মান পৃথক। কার্যের পরিমাণ কোন্ পথে কার্য করা হয়েছে তার উপর নির্ভর করছে। কার্য একটি পথ নির্ভর অপেক্ষক। তাই এটি একটি অযথার্থ অপেক্ষক (inexact function); এবং কার্যের অবকল dw একটি অপূর্ণ অবকল (imperfect differential)।

অভ্যন্তরীন শক্তি (internal energy) : যে কোনো তন্ত্রের মধ্যে কিছু শক্তি থাকে যার সাহায্যে তন্ত্রটি বাহ্যিক কার্য করতে পারে। একটি উদাহরণ নেওয়া যায়। একমুখে পিস্টন যুক্ত কোনো একটি চোঙের মধ্যে হাইড্রোজেন ও অক্সিজেন গ্যাসের মিশ্রণ নেওয়া হল। চোঙ্টি তাপরুধ্ব অবস্থায় আছে। অর্থাৎ বাইরের সঙ্গে তাপ আদানপ্রদানের কোনো সুযোগ নেই। পিস্টনের সঙ্গে কোনো ভার এমনভাবে যুক্ত করা হল, যাতে কার্য হলে অভিকর্ষের বিরুধে ভারটিকে পিস্টনটি উপরে তুলে দিতে পারে। এখন এই মিশ্রণে বাইরে থেকে তারের সাহায্যে বিদ্যুৎ স্ফুলিঙ্গ সৃষ্টি করলে – দেখা যায় পিস্টনটি ভারটিকে অভিকর্ষের বিরুধে উপরে তুলে দেয়। অর্থাৎ বাহ্যিক কার্য হয়েছে। পদার্থের অভ্যন্তরীন শক্তি ব্যয় করে এই বাহ্যিক কার্য পাওয়া গেল।

ধরি একটি তন্ত্র তাপরুধ্ব অবস্থায় আছে। আরো ধরি বাইরে থেকে বল এর উপর ক্রিয়া করছে। এই বলের ক্রিয়া তন্ত্রের উপর কার্য হল –W এবং তন্ত্রটি A অবস্থা থেকে B অবস্থায় পৌঁছালো। এদুটি অবস্থায় তন্ত্রটির শক্তি U_A ও U_B হলে, শক্তির সংবহন সূত্রানুসারে ঃ

$$U_B - U_A = -W \quad - - - - \quad (6.6)$$

সমীকরণ 6.6 থেকে বলতে পারি U_A ও U_B হল যথাক্রমে A ও B অবস্থায় তন্ত্রটির অভ্যন্তরীন শক্তি। এখানে তন্ত্রটির উপর কার্য করায় ওর অভ্যন্তরীন শক্তি বৃধ্বি পেয়েছে।

এভাবে দেখানো যায় - যে কোনো তন্ত্রের অভ্যন্তরীণ শক্তি বাহ্যিক কার্য করতে পারে। পরীক্ষায় দেখা যায় অভ্যন্তরীন শক্তির পরিবর্তন কোন্ পথে হল তার উপর বাহ্যিক কার্যের মান নির্ভর করে না। বলা যায় যে কোনো তন্ত্রে অভ্যন্তরীণ শক্তি আছে – যার পরিবর্তনের ফলে বাহ্যিক কার্য পাওয়া যায় এবং এই পরিবর্তন পথ নির্ভর নয়। মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে ঘর্ষন ইত্যাদি বল না থাকলে যেমন কার্যের পরিমাণ শুধুমাত্র অবস্থানের উপর নির্ভর করে – পথের উপর নির্ভর করে না তেমনি অভ্যন্তরীন শক্তির পরিবর্তনও পথের উপর নির্ভর করে না – শুধুমাত্র প্রাথমিক ও অন্তিম অবস্থার উপর নির্ভর করে। অভ্যন্তরীন শক্তি বা অভ্যন্তরীন শক্তি অপেক্ষককে U দিয়ে চিহ্নিত করা হয়। অবশ্য কোনো তন্ত্রে U এর প্রকৃত মান পাওয়া যায় না। তাপগতিবিদ্যায় এর পরিবর্তন নিয়েই আলোচনা করা হয়। তাপগতীয় চলরাশি P, V ও T এর মতো অভ্যন্তরীন শক্তি অপেক্ষক Uও তাপগতীয় চলরাশি। U কে P, V, T এর যে কোনো দুটির অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

$$U = f_1(P, V), U = f_2(V, T), U = f_3(P, T) \qquad (6.7)$$

পদার্থের আণবিক গঠন বিবেচনা করলে বলা যায় এর অণু-পরমাণু সমূহের গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির মোট পরিমাণই অভ্যন্তরীন শক্তিকে প্রকাশ করে। আর্দশ গ্যাসের বেলায় অণু-পরমাণুগুলির মধ্যে কোনো আকর্ষণ বা বিকর্ষণ বল না থাকায় এদের মোট গতিশক্তিই অভ্যন্তরীন শক্তির পরিমাপ।

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র : তাপগতীয় তন্ত্রে শক্তির আদানপ্রদানে শক্তির সংরক্ষণ হওয়াই তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র হিসাবে চিহ্নিত হয়। তাপ ও যান্ত্রিক শক্তির সমতার সম্পর্ককে সধারণভাবে তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র বলা হয়। সূত্রটি নিম্নরূপ —

যান্ত্রিক শক্তিকে তাপে বা তাপকে যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তর করলে কার্য ও তাপের অনুপাত সবসময়ে ধ্রুবক হয়। যদি W পরিমাণ যান্ত্রিক শক্তির সম্পূর্ণ রূপান্তরের ফলে H পরিমাণ তাপশক্তি উৎপন্ন হয় তবে

$W \propto H$ বা $W = JH$ – – – – – – – 6.8

সমানুপাতিক ধ্রুবক J -কে যান্ত্রিক তুল্যাংক বলা হয়। অনুপাতটি ধ্রুবক না হলে শক্তির ক্ষয় বা বৃদ্ধি সূচিত হত।

এটি শক্তির সংরক্ষণ বিষয়ে সাধারণ নীতির একটি বিশেষ প্রয়োগ মাত্র। সব শক্তিই শেষ পর্যন্ত তাপশক্তিতে রূপান্তরিত হয়। এই সূত্রে অন্য সব শক্তিকে অন্তর্ভুক্ত করে প্রথম সূত্রকে নিম্নলিখিত ভাবে বলা যায় - **যখন কোনো প্রকার শক্তি তাপে বা তাপ কোনো প্রকার শক্তিতে রূপান্তরিত হয় – তখন সেই শক্তি ও তাপের অনুপাত ধ্রুবক হয়।**

প্রথম সূত্রের সাধারণ রূপ ঃ

6.6 সমীকরণ থেকে আমরা দেখেছি রুদ্ধতাপ অবস্থায় তন্ত্রের উপর কার্য করলে অভ্যন্তরীন শক্তি U_A থেকে বেড়ে U_B হয় অর্থাৎ এক্ষেত্রে,

$U_B - U_A = -W$

এবার যদি ঐ তন্ত্রে Q পরিমাণ তাপ সরবরাহ করা হয়, তবে অভ্যন্তরীন শক্তির পরিবর্তন হবে।

$Q - W = U_B - U_A$

বা $Q = U_B - U_A + W$ – – – – (6.9)

এটিই [সমীকরণ (6.9)] তাপগতিবিদ্যার সাধারণ রূপ।

তন্ত্রে প্রদত্ত তাপ অতি ক্ষুদ্র অর্থাৎ dQ হলে, তন্ত্রের অভ্যন্তরীন শক্তি বৃদ্ধি এবং তন্ত্রদ্বারা সম্পাদিত বাহ্যিক কার্যও অত্যন্ত ক্ষুদ্র হবে। তন্ত্রের অভ্যন্তরীন শক্তিবৃদ্ধি dU এবং তন্ত্র দ্বারা কৃতকার্য (বাহ্যিক) dW হলে, তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রকে লেখা যায় —

$dQ = dU + dW$ – – – (6.10)

বা $dQ = dU + PdV$ – – – (6.11)

এটি হল প্রথম সূত্রের অবকল রূপ (differential form) অতএব তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রটি হল **কার্য করতে সক্ষম কোনো তন্ত্রে তাপ প্রদান করলে গৃহীত তাপশক্তি, তন্ত্রের অভ্যন্তরীন শক্তির বৃদ্ধি এবং তন্ত্র দ্বারা কৃতকার্যের যোগফলের সমান হয়।**

অর্থাৎ এর মান নির্দিষ্ট অবস্থায় নির্দিষ্ট থাকে।

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রের তাৎপর্য (Significance of 1st law of thermodynamics) ঃ

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র মূলতঃ শক্তির সংরক্ষণ সূত্র। যখন কোনো যান্ত্রিক শক্তি তাপশক্তিতে বা বিপরীতক্রমে তাপশক্তি যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তরিত হয় তখন মোট শক্তি স্থির থাকে। যেহেতু সমস্তরকম শক্তিই তাপশক্তিতে রূপান্তরিত হয় তখন মোট শক্তি স্থির থাকে। যেহেতু সমস্তরকম শক্তিই তাপশক্তিতে রূপান্তরিত হতে পারে তাই বলা যায় যে কোনো প্রকার শক্তি, শুধু যান্ত্রিক শক্তি নয়। বৈদ্যুতিক শক্তি, চৌম্বক শক্তি ইত্যাদি যখন তাপশক্তিতে বা বিপরীতক্রমে তাপশক্তি অন্য যে কোনো প্রকার শক্তিতে রূপান্তরিত হয় তখন মোট শক্তি স্থির থাকে। শুধু তাই নয় – যে কোনো প্রকার শক্তি অন্য প্রকার শক্তিতে রূপান্তরিত হলে মোট শক্তি স্থির থাকে। শক্তি সৃষ্টি করাও যায় না বা ধ্বংস করাও যায় না। শক্তি একরূপ থেকে অন্যরূপে রূপান্তরিত হতে পারে।

প্রথম সূত্র থেকে জানা যায় – (i) তাপ একপ্রকার শক্তি, (ii) তন্ত্রের অভ্যন্তরীন শক্তি অপেক্ষক আছে যার পরিবর্তন পথ নির্ভর নয় অর্থাৎ এর মান নির্দিষ্ট অবস্থায় নির্দিষ্ট থাকে, (iii) মোট শক্তি সংরক্ষিত হয়।

ক্লসিয়াস প্রথম সূত্রকে বর্ণনা করেন নিম্নলিখিতরূপে – 'বিশ্বের মোট শক্তি অপরিবর্তিত থাকবে (total energy of the universe must remain constant')।

প্রথম শ্রেণীর শাশ্বত গতির অসম্ভাব্যতা (Impossibilites of perpetual motion of first kind) ঃ মধ্যযুগের দার্শনিকরা ভাবতেন—কোনো যন্ত্র তৈরী করা সম্ভব যা কোনো কিছু শক্তি ছাড়াই কাজ করতে পারবে। কিন্তু অভিজ্ঞতা থেকে তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র জানার পর এই ধারণা পরিত্যক্ত হয়। কোনো শক্তি ছাড়াই কোনো যন্ত্র অবিরাম কাজ করে যাবে—একে বলা হয় '**প্রথম শ্রেণীর শাশ্বত গতি**। তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র থেকে বলা যায় প্রথম শ্রেণীর অবিরাম গতি অসম্ভব। একমাত্র একপ্রকার শক্তি অন্য প্রকার শক্তিতে রূপান্তরিত হতে পারে।

তেজস্ক্রিয়তা আবিষ্কারের পর দেখা যায় প্রচুর পরিমাণ শক্তি পাওয়া যাচ্ছে। আপাত ধারণা হয় যে শক্তির সংরক্ষণ সূত্র পালিত হচ্ছে না। কিন্তু আইনস্টাইনের বিশেষ আপেক্ষিকতাবাদ থেকে জানা যায় এখানে কিছু পরিমাণ ভর ধ্বংস হয়ে শক্তিতে রূপান্তরিত হচ্ছে। [$\Delta E=\Delta\ mc^2$, Δm পরিমান ভরের বিনাশ হলে Δmc^2 পরিমাণ শক্তি পাওয়া যায়। c হল শূন্যস্থানে আলোকের বেগ।] বলা যায় ভর হল শক্তির জড় রূপ। ভর ও শক্তির তুল্যতা বিচারে তেজস্ক্রিয়তার মোট ভর ও শক্তি স্থির থাকে। ভর ও শক্তি গণনায় আনলে বলা যায় বিশ্বের মোট ভর ও শক্তির পরিমাণ অপরিবর্তনীয়। আণবিক চুল্লির প্রাপ্ত শক্তি বা আণবিক বোমার শক্তি, বা সূর্য ও অন্যান্য নক্ষত্রের শক্তি পাওয়া যায় ভরের রূপান্তরের জন্য।

6.8 পদার্থের আপেক্ষিক তাপদ্বয় ও তাদের পার্থক্য :

আপনারা আগেই দেখেছেন কোনো তন্ত্রের বেলায় অভ্যন্তরীন শক্তি U কে অবস্থার চলরাশি P, V ও T এর যে কোনো দুটির অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করা যায়, কোনো সমসত্ত্ব পদার্থের বেলায়, V ও T কে নিরপেক্ষ (independent) চলরাশি ধরলে, লেখা যায় –

$$U = f\ (V,T) \quad ----\ (6.12)$$

U V যথাক্রমে এক গ্রাম অণু পদার্থের অভ্যন্তরীন শক্তি ও আয়তন। অবকল নিলে—

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \quad ---\ (6.13)$$

আবার তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র অনুসারে –

$$dQ = dU + PdV \quad ---\ (6.14)$$

অতএব $$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + PdV \quad ---\ (6.15)$$

আপেক্ষিক তাপ : কোনো পদার্থের একক ভরের একক উষ্ণতা বৃদ্ধির জন্য প্রয়োজনীয় তাপকে আপেক্ষিক তাপ বলে। এক গ্রাম অণুকে ভরের একক ধরা হলে, একে মোলার আপেক্ষিক তাপ বলে।

অতএব মোলার আপেক্ষিক তাপ $$C = \sin_{\Delta T\to 0}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right) = \frac{dQ}{dT} \quad ----\ (6.16)$$

স্থির আয়তনে মোলার আপেক্ষিক তাপ

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V \text{ এবং}$$

স্থির চাপে মোলার আপেক্ষিক তাপ

$$C_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P$$

(6.15) সমীকরণ থেকে পাই,

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \quad [\because dV = 0]$$

এ থেকে বোঝা যায় স্থির আয়তনে আপেক্ষিক তাপের ক্ষেত্রে প্রযুক্ত তাপ বস্তুর অভ্যন্তরীন শক্তি বৃদ্ধির জন্য ব্যয়িত হয়।

আবার, $$C_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

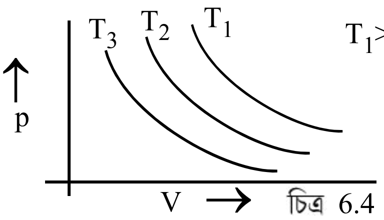
$$= C_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

$$\therefore\ C_P - C_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \qquad --- (6.17)$$

চলাচল খুব দ্রুত হওয়া প্রয়োজন। এজন্য গ্যাসটিকে খুব পাতলা দেওয়ালের সুপরিবাহী পাত্রের মধ্যে রাখতে হয়। কিন্তু বাস্তবে এমন কোনো সুপরিবাহী পাওয়া যায় না যার মধ্য দিয়ে তাপ প্রয়োজনীয় দ্রুত বেগে পরিবাহিত হয়ে গ্যাসটির উষ্ণতা স্থির রাখতে পারে। তাই এক্ষেত্রে গ্যাস ও পরিপার্শ্বের মধ্যে তাপ চলাচল সম্পূর্ণ করে উষ্ণতা স্থির রাখার জন্য প্রক্রিয়াটি ধীরে ধীরে সম্পন্ন করতে হয়। তাই বাস্তব সমোষ্ণ পরিবর্তন একটি মন্থর প্রক্রিয়া।

চাপ (P) আয়তন (V) এর সম্পর্ক : সমোষ্ণ লেখ :

স্থির উষ্ণতায় নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাস বয়েলের সূত্র [PV = RT = ধ্রুবক] মেনে চলে। x অক্ষে V ও y অক্ষে P নিয়ে লেখ চিত্র আঁকলে সমপরাবৃত্ত (rectangular hyperbola) পাওয়া যাবে (চিত্র 6.4), পৃথক উষ্ণতায় একই আকৃতির পৃথক লেখ পাওয়া যায়। অপেক্ষাকৃত বেশী উষ্ণতায় লেখ উপরের দিকে থাকে। এই লেখ দুটিকে সমোষ্ণ লেখ বলে।



চিত্র 6.4 গ্যাসের সমোষ্ণলেখ

সমোষ্ণ পরিবর্তনে কৃতকার্য :

n মৌল আর্দশ গ্যাসের সমীকরণ PV = nRT।

প্রক্রিয়াটি সমোষ্ণ হওয়ায় T ধ্রবক। গ্যাসের আয়তন পরিবর্তন V_1 থেকে V_2 তে হলে কৃতকার্য

$$W=\int_{v_1}^{v_2} p d\mathrm{V}=n\mathrm{RT}\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v}=n\mathrm{RT}\ \mathrm{I}n\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \quad ----\ 6.19$$

আবার গ্যাসের প্রাথমিক ও অন্তিম চাপ যথাক্রমে P_1 ও P_2 হলে, $P_1V_1 = P_2V_2$

অতএব কৃতকার্য $W = n\mathrm{RT}\ \mathrm{I}n\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \quad -----\ 6.20$

6.10 গ্যাসের রূদ্ধতাপ পরিবর্তন (Adiabatic Change of Gases)

কোনো গ্যাসের চাপ এবং আয়তনের পরিবর্তনের সময় যদি কোনো তাপ বাইরে থেকে গ্যাসে না আসে অথবা গ্যাস থেকে বাইরে না যায় তবে ঐ পরিবর্তনকে রূদ্ধতাপ পরিবর্তন বলে। এই পরিবর্তনের ক্ষেত্রে

$dQ = 0$

রূদ্ধতাপ পরিবর্তন সম্পন্ন করতে হলে গ্যাসকে কুপরিবাহী পদার্থের শুবু দেওয়ালবিশিষ্ট আধারে রাখতে হয়। রূদ্ধতাপ পরিবর্তন খুব দ্রুত ঘটাতে হয়। পরিবর্তনটি দ্রুত ঘটালে পরিপার্শ্বের সঙ্গে তাপ বিনিময় সম্ভব হয় না। তাই এই পরিবর্তন একটি দ্রুত প্রক্রিয়া।

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রের প্রয়োগে আর্দশ গ্যাসের রূদ্ধতাপ পরিবর্তনের সমীকরণ নির্ণয় :

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র থেকে পাই

$$dQ = dU + PdV$$
$$= C_V dT + PdV$$

C_V হল গ্যাসের স্থির আয়তনে মোলার আপেক্ষিক তাপ এবং V হল এক মোল গ্যাসের আয়তন।

রূদ্ধতাপ পরিবর্তনের বেলায়, $dQ = 0$

অতএব $C_V dT + PdV = 0 \quad ----\ (6.21)$

আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে PV=RT এবং $C_P - C_V = R$

PV=RT থেকে পাই

$$Pdv + vdp = RdT$$

বা $dT = \frac{Pdv + vdp}{R} = \frac{Pdv + vdp}{C_p - C_v}$ ----- (6.22)

(6.21) সমীকরণে dT এর মান বসিয়ে পাই

$$C_v\left(\frac{Pdv + vdp}{C_p - C_v}\right) + Pdv = 0$$

বা, $CvPdv + Cv\,vdp + Cp\,pdv - Cv\,Pdv = 0$

বা, $Cv\,vdp + Cp\,pdv = 0$

বা, $\frac{dp}{p} + \frac{Cp}{Cv}\frac{dv}{v} = 0$

বা, $\frac{dp}{p} + \gamma\frac{dv}{v} = 0$ $\qquad \left[\frac{Cp}{cv} = \gamma\right]$

বা, $\int\frac{dp}{p} + \int\gamma\frac{dv}{v} = 0$

বা, $\ln P + \gamma \ln V =$ ধ্রুবক

বা, $\ln\left(PV^{\gamma}\right) =$ ধ্রুবক

বা, $PV^{\gamma} =$ ধ্রুবক ---- (6.23)

আবার $PV = RT$ বা, $V = \frac{RT}{P}$

অতএব $P\left(\frac{RT}{P}\right)^{\gamma} =$ ধ্রুবক

বা, $P^{1-\gamma}T^{\gamma} =$ ধ্রুবক

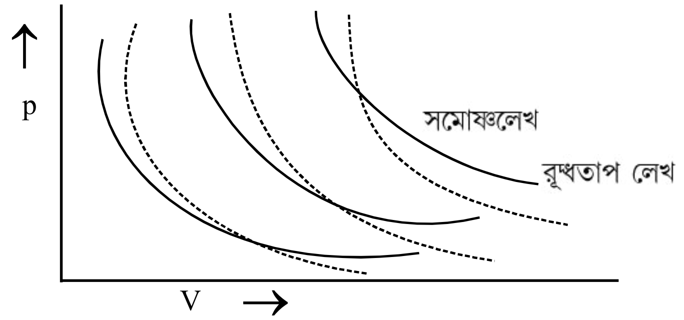
বা, $T\,P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} =$ ধ্রুবক ------- (6.24)

আবার, $P = \frac{RT}{V}$

$\therefore\ \dfrac{RT}{V}V^{\gamma} =$ ধ্রুবক বা $TV^{\gamma-1} =$ ধ্রুবক $- - - - -$ (6.25)

অতএব (6.23), (6.24) ও (6.25) সমীকরণগুলি হল আর্দশ গ্যাসের ক্ষেত্রে রুদ্ধতাপ পরিবর্তনের সমীকরণ।

রুদ্ধতাপ লেখ : রুদ্ধতাপ পরিবর্তনের বেলায় চাপ (P) ও আয়তন (V) এর লেখকে রুদ্ধতাপ লেখ (adiabatic curve) বলা হয়। চিত্র 6.5 এ নির্দিষ্ট ভরের আর্দশ গ্যাসের ক্ষেত্রে রুদ্ধতাপ লেখগুলি দেখানো হয়েছে। পাশাপাশি সমোষ্ণ লেখগুলিও দেখানো হয়েছে। দেখা যাচ্ছে রুদ্ধতাপ লেখগুলি সমোষ্ণ লেখর থেকে তুলনায় বেশী খাড়া।



চিত্র 6.5 গ্যাসের রুদ্ধতাপ ও সমোষ্ণলেখ

[আর্দশ গ্যাসের ক্ষেত্রে সমোষ্ণ পরিবর্তন ও রুদ্ধতাপ পরিবর্ত্তনের সমীকরণ থেকে প্রমাণ করতে পারবেন যে কোনো বিন্দুতে রুদ্ধতাপ পরিবর্তনের লেখ-র নতি, সমোষ্ণ লেখর নতির γ গুন হবে।]

রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে কৃতকার্য :

তাপবিদ্যার প্রথম সূত্র থেকে জেনেছি

$dQ = dv + dw$

রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে dQ=0, অতএব n গ্রাম মোল গ্যাসের ক্ষেত্রে

$dW = -dU = -nC_V dT$

তাপমাত্রা পরিবর্তন T_1 থেকে T_2 হলে কার্য হবে

$$W = -n\int_{T_1}^{T_2} C_V dT = -n\,C_V\left(T_1 - T_2\right) \quad - - - - \ 6.26$$

দেখা যাচ্ছে যে যদি $T_1 > T_2$ তবে কৃতকার্য ঋণাত্মক। অর্থাৎ গ্যাস কার্য করেছে। এরূপ ক্ষেত্রে গ্যাসের প্রসারণ ঘটে। অতএব রুদ্ধতাপ প্রসারণে গ্যাসের উষ্ণতা হ্রাস পায়, বিপরীতক্রমে গ্যাসের সংকোচন হলে উষ্ণতা বৃদ্ধি পায়।

6.11 তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র (2nd Law of Thermodynamics)

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রের সঙ্গে আপনারা পরিচিত হয়েছেন। দেখেছেন যে প্রথম সূত্র শক্তির সংরক্ষণ সূত্রকে প্রকাশ করে। মূলত তাপশক্তি ও যান্ত্রিক শক্তির রূপান্তর নিয়ে আলোচনা করা হয় প্রথম সূত্রে। এই সূত্র থেকে

আপনারা জেনেছেন পদার্থের অভ্যন্তরীন শক্তি অপেক্ষক আছে। কোনো তন্ত্রে তাপশক্তি প্রযুক্ত হলে তন্ত্র কার্য করবে ও তার অভন্তরীন শক্তির বৃধি ঘটবে। অর্থাৎ এক প্রকার শক্তি অন্য প্রকার শক্তিতে রূপান্তরিত হলে মোট শক্তি স্থির থাকবে। কিন্তু রূপান্তরের অভিমুখিতা নিয়ে এই সূত্রে কোনো আলোচনা করা হয় না। বাস্তবে আমরা দেখি যান্ত্রিক শক্তি বা অন্য কোনো প্রকার শক্তি সহজে তাপশক্তিতে রূপান্তরিত হয় কিন্তু তাপশক্তিকে পুরোপুরি যান্ত্রিক শক্তি বা অন্য কোনো শক্তিতে সহজে রূপান্তরিত করা যায় না। আমরা পরে দেখবো, তাপ ইঞ্জিনে একটি উৎস থেকে তাপ নিয়ে তার সবটাকে যান্ত্রিক শক্তিতে পরিণত করা যাচ্ছে না, কিছু তাপ পরিপার্শ্বে বর্জন করতে হচ্ছে। আবার দুটি ভিন্ন উষ্ণতার তাপ উৎসের মধ্যে সংযোগ ঘটালে বেশী উষ্ণতার উৎস থেকে কম উষ্ণতার উৎসের দিকে তাপ প্রবাহিত হয়, বিপরীত দিকে হয় না। কম উষ্ণতার উৎস থেকে বেশী উষ্ণতার উৎসের দিকে, তাপ নিয়ে যেতে গেলে বাইরে থেকে কাজ করতে হবে। শক্তির পরিবর্তনের এই অভিমুখিতা নিয়ে আলোচনা করা হয় তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রে।

তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের বিবৃতি :

ÎßÂ öÂ-› É ÂõõĝÂ(Kelvin–planck statement) : এমন কোনো প্রক্রিয়া সম্ভব নয় যার একমাত্র ফল হবে একটি তাপউৎস থেকে তাপ নিয়ে তার সমস্তটাকেই কার্যে রূপান্তরিত করা যায়। (No process is possible whose sole result is the absorption of heat from a reservoir and conversion of whole of this heat into work.)

(কেলভিন ও প্ল্যাঙ্কের বিবৃতিকে একীভূত করে এই বিবৃতিটি দেওয়া হয়।)

ক্লসিয়াসের বিবৃতি (Claucius' statement) : শীতলতর বস্তু থেকে উষ্ণতর বস্তুতে তাপ যাওয়ার কোনো প্রক্রিয়া সম্ভব নয়। (No forces is possible whose sole result is the transfer of heat from a colder to a hotter body.]

দুটি বিবৃতি আপাতভাবে ভিন্ন মনে হলেও প্রমাণ করা যায় দুটি বিবৃতির মর্মার্থ একই।

দ্বিতীয় শ্রেণীর শাশ্বত গতির অসম্ভাব্যতা (Impossibity of perpetual motion of second kind) : প্রথম সূত্রের আলোচনায় দেখেছেন – প্রথম শ্রেণীর শাশ্বত গতি পাওয়া যায় না। অর্থাৎ কোন শক্তির ব্যয় ছাড়া অন্য কোন শক্তি পাওয়া যায় না। তেমনি দ্বিতীয় সূত্র থেকে আপনারা জানতে পারলেন, এমন কোন যন্ত্র সম্ভব নয় যা উচ্চতর উষ্ণতার বস্তু থেকে তাপ নিয়ে নিম্নতর উষ্ণতার বস্তুতে তাপ প্রেরণ না করে কার্য করতে পারে। দ্বিতীয় সূত্র মান্য না হলে দ্বিতীয় কোনো বস্তুকে নিম্ন তাপমাত্রায় না রেখেই কোনো বস্তুর সমস্ত তাপ নিয়ে কার্যে পরিণত করা যেত। এই ধরনের কল্পিত যন্ত্রকে দ্বিতীয় শ্রেণীর শাশ্বত গতির যন্ত্র বলা হয়। দ্বিতীয় সূত্র থেকে বলা যায় যত দক্ষ ইঞ্জিন হোক না কেন – দ্বিতীয় শ্রেণীর অবিরাম গতি সম্ভব নয়। তা যদি সম্ভব হত তবে সমুদ্রের বা বায়ুর সমস্ত তাপ নিয়ে কার্যে রূপান্তর করা যেত। তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রানুযায়ী এটি অসম্ভব।

প্রথম ও দ্বিতীয় সূত্রের পার্থক্য : তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র শক্তির নিত্যতাকে ব্যক্ত করে। তাপশক্তি যান্ত্রিক শক্তিতে বা যান্ত্রিক শক্তি তাপশক্তিতে রূপান্তরিত হলে – মোট শক্তি স্থির থাকবে। এই রূপান্তরের দিক কী হবে প্রথম সূত্রে এটি বিবেচ্য নয়। দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে উচ্চ উষ্ণতা থেকে নিম্ন উষ্ণতার দিকে তাপ যায়। কিন্তু নিম্ন উষ্ণতা থেকে উচ্চ উষ্ণতায় তাপ নিজে থেকে যেতে পারে না।

কোন বস্তুকে তার পরিপার্শ্ব থেকে কম উষ্ণতায় নিয়ে তার থেকে তাপ নিয়ে প্রয়োজনীয় কার্য কখনোই পাওয়া যাবে না। শক্তির রূপান্তরের দিক নির্দেশ করে দ্বিতীয় সূত্র। আপনারা পরে দেখবেন কোনো পূর্ণ প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিন দিয়েও কোনো বস্তুর সমস্ত তাপকে কার্যে রূপান্তর করা যায় না।

6.12 তাপীয় ইঞ্জিন (Heat Engine) :

যে যন্ত্রের সাহায্যে তাপশক্তিকে কার্যে রূপান্তরিত করা যায় তাকে তাপীয় ইঞ্জিন বলে। আপনারা আগেই জেনেছেন যে, যান্ত্রিক শক্তি বা কার্য সহজে বা স্বতঃস্ফূর্তভাবে তাপশক্তিতে রূপান্তরিত হয়। কিন্তু তাপশক্তিকে কার্যে রূপান্তরিত করা সহজ নয়। তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রে আপনারা দেখেছেন দ্বিতীয় কোনো বস্তুকে কম উষ্ণতায় না রেখে কোনো বস্তুর থেকে পাওয়া সমস্ত তাপ কার্যে রূপান্তরিত করা যায় না। তাপ ইঞ্জিনে অবিরাম কার্য পাওয়ার জন্য একটি আর্বত প্রক্রিয়ার প্রয়োজন হয়। আর্বত প্রক্রিয়ার ক্রমাগত পুনরাবৃত্তির ফলে অবিরাম যান্ত্রিক শক্তি পাওয়া যায়। সেই প্রসঙ্গে কত পরিমাণ তাপশক্তি কার্যে রূপান্তরিত হয় তা পরিমাপ করা হয় তাপীয় কর্মদক্ষতা (efficiency) দিয়ে। যদি কোনো তাপের উৎস থেকে Q পরিমাণ তাপ নিয়ে W পরিমাণ কার্য পাওয়া যায় তবে তাপীয় কর্মদক্ষতা (বা দক্ষতা) η হলে $\eta = \frac{W}{Q}$

আপনারা দেখবেন কোনো উৎস থেকে তাপশক্তি নিয়ে কয়েকটি প্রক্রিয়ার সাহায্যে কার্যে পরিণত করতে গেলে গৃহীত তাপের একটি অংশকে কম উষ্ণতায় বর্জন করতে হয়। তাপশক্তির সবটাই কার্যে রূপান্তরিত করা যায় না। তাই কর্মদক্ষতা কখনোই 100% হয় না। এর পরে আপনারা দেখবেন কার্নো ইঞ্জিন একটি আদর্শ ইঞ্জিন। সেখানে তাপশক্তিকে কার্যে রূপান্তর ছাড়া অন্য কোনোভাবে ব্যয় হয় না ধরে নিয়ে দেখানো যায় কর্মদক্ষতা η কখনোই 100% হবে না। কার্নো ইঞ্জিনের প্রক্রিয়াগুলি আলোচনা করার আগে আমরা তাপ উৎস ও তাপ গ্রাহক সম্বন্ধে আলোচনা করব।

● **তাপ উৎস (Heat Source or Heat Reservoir at higher temperature) :** উচ্চতর উষ্ণতায় রাখা অতি উচ্চ তাপগ্রাহিতা যুক্ত আধারকে তাপ উৎস বলা হয়। যতখুশী তাপ এর থেকে নেওয়া যায়–তা সত্ত্বেও এর উষ্ণতার কোনো পরিবর্তন হয় না।

তাপ গ্রাহক (Heat Sink or Heat Reservior at lower temperature) : নিম্ন উষ্ণতায় রাখা অতিউচ্চ তাপগ্রাহিতা যুক্ত আধারকে তাপ গ্রাহক বলা হয়। যত খুশী তাপ এর মধ্যে দেওয়া যায়–তা সত্ত্বেও এর উষ্ণতার কোনো পরিবর্তন হয় না।

এদুটি ধারনাই কাল্পনিক। বাস্তবে এমন কোনো আধার পাওয়া যায় না যেখান থেকে তাপ নিলে বা যেখানে তাপ দিলে উষ্ণতার পরিবর্তন হবে না।

6.13 কার্নো ইঞ্জিন (Carnot's Engine) :

আদ্রি কার্নো (Sadi Carnot 1796 – 1832) একজন ফরাসী ইঞ্জিনিয়ার। তিনি এই আর্দশ ইঞ্জিনের কল্পনা করেন। যে পূর্ণ আর্বত প্রক্রিয়ায় এই ইঞ্জিন কাজ করে তাকে কার্নো চক্র (Carnot Cycle) বলে। তাপ উৎস ও তাপ গ্রাহকের মধ্যে যে কোনো তাপীয় ইঞ্জিন কার্য করে। কার্নো ইঞ্জিনও তাই। কিন্তু এখানে ধরা হয় কার্য ব্যতীত অন্য কোনভাবে তাপ ব্যয় হয় না। মূলত উচ্চ উষ্ণতার তাপ উৎস থেকে তাপ নিয়ে কার্য করার পর বাকি তাপ তাপ গ্রাহকে ছেড়ে দেওয়া হয়।

যে কোন তাপীয় ইঞ্জিনের জন্য প্রয়োজনীয় অংশগুলি হল—

(i) উচ্চতর উষ্ণতায় তাপ উৎস ধরি এর উষ্ণতা T_1K

(ii) নিম্নতর উষ্ণতায় তাপ গ্রাহক ধরি এর উষ্ণতা T_2K ($T_1 > T_2$)

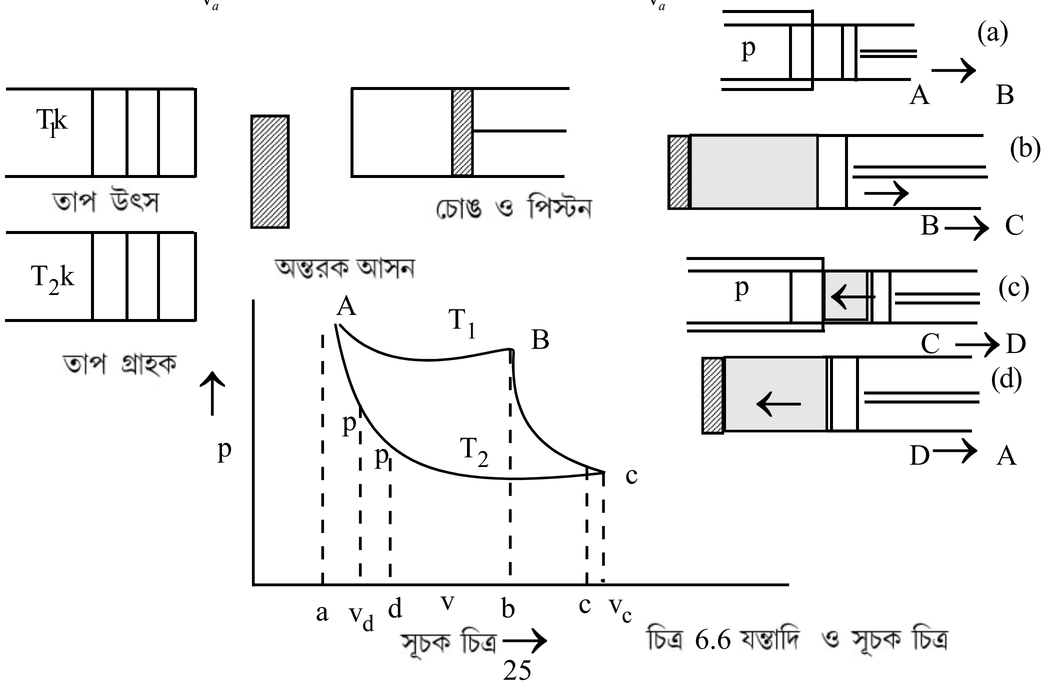
(iii) কার্যকরী বস্তু বা তন্ত্র (working substance)

(iv) উপযুক্ত যন্ত্রাদি।

প্রথম দুটি অংশ তাপ উৎস ও তাপ গ্রাহক প্রয়োজন উষ্ণতার পার্থক্যের জন্য। উচ্চতর উষ্ণতা থেকে নিম্নতর উষ্ণতায় তাপ নিয়ে কার্য করার জন্য উষ্ণতার পার্থক্য প্রয়োজন। কার্যকরী বস্তু হিসাবে নেওয়া হয় এক মোল আর্দশ গ্যাস, কারণ এর অবস্থার সমীকরণ আমাদের জানা। যন্ত্রাদির মধ্যে আছে একটি একমুখে মসৃন পিস্টন যুক্ত অন্যমুখ বন্ধ মসৃন চোঙ্। এর মধ্যে এক মোল আর্দশ গ্যাস নেওয়া হয়। এতে চোঙের মধ্যে পিস্টন চলাচলের সময় ঘর্ষনজাত কোনো শক্তি ক্ষয় হয় না। চোঙের দেওয়াল ও পিস্টন সম্পূর্ণ তাপ অন্তরক পদার্থ দিয়ে তৈরী। চোঙের অপর প্রান্ত (বন্ধপ্রান্ত) সম্পূর্ণ তাপ পরিবাহী পদার্থ দিয়ে তৈরী। একটি অন্তরক আসন থাকে যা দিয়ে ঐ তলটি ঢেকে দিলে চোঙের মধ্যে তাপ যাওয়া আসা করতে পারে না।

কার্নো চক্রের বিভিন্ন পর্যায় : (i) **প্রথম পর্যায় : প্রত্যাবর্তক সমোষ্ণ প্রসারণ [চিত্র 6.6 (a)]** প্রথমে চোঙের তলদেশকে T_1K উষ্ণতার তাপ উৎসের সংস্পর্শে আনা হয়। চোঙের মধ্যে আবদ্ধ গ্যাসের প্রাথমিক উষ্ণতা যাই থাক না কেন কিছুক্ষণের মধ্যেই তাপ আসা যাওয়ার মাধ্যমে এর উষ্ণতা T_1K তে সাম্যাবস্থায় আসবে। সূচক চিত্রে ধরি (P–V) লেখ (চিত্র 6.6) এই প্রাথমিক অবস্থাকে A বিন্দু দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে। এখন চাপ ও আয়তন যথাক্রমে P_a ও V_a। এবার গ্যাসকে সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় প্রসারিত করা হল। এই প্রক্রিয়াটি খুব মন্থর গতিতে (quasi–stataic) করা হয় যাতে প্রতি মুহূর্তে পরিবর্তন সাম্যবস্থার মধ্য দিয়ে যায়। ধরি এই পরিবর্তনের ফলে সূচক বিন্দু A থেকে B তে চলে এল। প্রক্রিয়াটি AB রেখা দিয়ে চিহ্নিত হয়েছে। B বিন্দুর চাপ ও আয়তন ধরি যথাক্রমে P_b ও V_b। এই প্রক্রিয়ায় ধরি Q_1 পরিমাণ তাপ উৎস থেকে শোষিত হয়েছে। কৃতকার্যের পরিমাণ W_1 হলে

$$Q_1 = W_1 = \int_{V_a}^{V_b} p\,dv = \text{AB}ba \text{ অংশের ক্ষেত্রফল } = RT_1 \int_{V_a}^{V_b} \frac{dv}{v} = RT_1 \ln \frac{V_b}{V_a}$$



চিত্র 6.6 যন্ত্রাদি ও সূচক চিত্র

(ii) **দ্বিতীয় পর্যায় : প্রত্যাবর্তক রূদ্ধতাপ প্রসারণ [চিত্র 6.6 (b)] :** সমোষ্ণ প্রক্রিয়ার শেষে চোঙের তলদেশ তাপঅন্তরক আসন দিয়ে ঢেকে চোঙ্‌টিকে সম্পূর্ণ তাপ অন্তরিত করা হল। এবার গ্যাসকে খুব মন্থর গতিতে রূদ্ধতাপ প্রসারণ করতে দেওয়া হল – যাতে প্রসারণ প্রক্রিয়াটি সম্পূর্ণ প্রত্যাবর্তক হয়। প্রসারণের ফলে উষ্ণতা কমে যাবে। ধরি প্রসারণের শেষে গ্যাসের উষ্ণতা তাপগ্রাহকের উষ্ণতা T_2 এর সঙ্গে সমান হল। সূচক বিন্দু BC পথে C বিন্দুতে পৌঁছালো। C বিন্দুর চাপ ও আয়তন যথাক্রমে P_C ও V_C ।

এই প্রক্রিয়ায় কোনো তাপ আদানপ্রদান হয়নি।

$$\therefore\ PdV = -dU = -C_V dT$$

অতএব কৃতকার্য্য $W_2 = \int_{V_b}^{V_c} pdv = -C_v \int_{T_1}^{T_2} dT = C_v(T_1 - T_2)$

(iii) **তৃতীয় পর্যায়: সমোষ্ণ প্রত্যাবর্ত্তক সংনমন্ : [চিত্র 6.6 (c)] :** দ্বিতীয় পর্যায়ে রূদ্ধতাপ প্রসারণের শেষে চোঙের তলদেশ থেকে অন্তরক আসন সরিয়ে ঐ তলদেশকে T_2 তাপমাত্রার তাপ গ্রাহকের সংস্পর্শে রাখা হল। এই অবস্থায় গ্যাসটিকে মন্থর গতিতে প্রত্যাবর্তক প্রক্রিয়ায় সংনমিত করা হল। এর ফলে কিছু পরিমাণ তাপ গ্যাস থেকে তাপ গ্রাহকে চলে যাবে। প্রক্রিয়ার শেষে মনে করি সূচক বিন্দু CD পথে D বিন্দুতে চলে এল। D বিন্দুতে চাপ ও আয়তন ধরি যথাক্রমে P_d ও V_d।

এই পর্যায়ে মনে করি Q_2 পরিমাণ তাপ বর্জিত হয়েছে। গ্যাস দ্বারা কৃতকার্য W_3 হলে

$$-Q_2 = W_3 = \int_{V_c}^{V_d} pdv = -\text{ ক্ষেত্রফল } CcdD$$

$$= RT_2 \int_{V_c}^{V_d} \frac{dv}{v} = RT_2 \ln\frac{V_d}{V_c} = -RT_2 \ln\frac{V_c}{V_d}$$

(iv) **চতুর্থ পর্যায় : রূদ্ধতাপ প্রত্যাবর্তক সংনমন : [চিত্র–6.6(d)] :** সমোষ্ণ সংনমন প্রক্রিয়ার শেষে সূচক বিন্দু যখন D বিন্দুতে আছে সেই সময়ে চোঙের তলদেশ আবার অন্তরক আসন দিয়ে সম্পূর্ণ ঢেকে চোঙটিকে তাপ অন্তরিত করা হল। আবার মন্থরগতিতে রূদ্ধতাপ প্রত্যাবর্তক সংনমনের সাহায্যে উষ্ণতা T_2 থেকে T_1 এ বাড়ানো হল। গ্যাসটি পুনরায় প্রাথমিক অবস্থায়, সূচক চিত্রে A বিন্দুতে ফিরে এল। এভাবে একটি পূর্ণ চক্র সম্পূর্ণ হল।

এখানেও তাপের আদানপ্রদান হয় না, গ্যাস দ্বারা কৃতকার্য হবে

$$W_4 = -C_v(T_1 - T_2)$$

অতএব $|W_2| = |W_4|$

একটি কার্নো চক্রে গ্যাস দ্বারা কৃতকার্য

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = \text{ ক্ষেত্রফল } ABCDA$$

$$= W_1 + W_3 = RT_1 \ln\frac{V_b}{V_a} - RT_2 \ln\frac{V_c}{V_d}$$

$$= Q_1 - Q_2$$

তাপীয় কর্মদক্ষতা $\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$

এখন B ও C একই রূদ্ধতাপ লেখ-এর ওপর থাকায়

$$T_1 V_b^{\gamma-1} = T_2 V_c^{\gamma-1} \text{ বা } \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_c}{V_b}\right)^{\gamma-1}$$

আবার D ও A একই রূদ্ধতাপ লেখ-এর ওপর থাকায়

$$T_1 V_a^{\gamma-1} = T_2 V_d^{\gamma-1} \text{ বা } \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_d}{V_a}\right)^{\gamma-1}$$

$\therefore \frac{V_c}{V_b} = \frac{V_d}{V_a} = \rho$ (রূদ্ধতাপ প্রসারণ অনুপাত)

অথবা $\frac{V_c}{V_d} = \frac{V_b}{V_a} = r$ (সমোষ্ণ প্রসারণ অনুপাত)

অতএব $Q_1 = RT_1 \ln \frac{V_b}{V_a} = RT_1 \ln r$

এবং $Q_2 = RT_2 \ln \frac{V_c}{V_d} = RT_2 \ln r$

$$\therefore \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1 - Q_2}{T_1 - T_2} = \frac{W}{T_1 - T_2}$$

তাপীয় কর্মদক্ষতা $\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ – – – – – (6.27)

$$= 1 - \frac{1}{\rho^{\gamma-1}} \quad ----- (6.28)$$

(i) কার্নো ইঞ্জিন একটি আর্দশ ইঞ্জিন যেখানে কার্য করা ছাড়া অন্য কোনোভাবে তাপশক্তি ব্যয় হয়নি। কর্মদক্ষতা ηর মান 1 এর থেকে কম। কারণ উচ্চ উষ্ণতায় তাপ উৎস থেকে যে তাপশক্তি নেওয়া হয়েছে তার কিছু অংশ নিম্ন উষ্ণতায় তাপ গ্রাহকে দিতে হয়েছে। সম্পূর্ণ তাপশক্তিকে কার্যে রূপান্তরিত করা যায়নি। তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের সঙ্গে এটি সঙ্গতি পূর্ণ। বাস্তবে ঘর্ষন, সান্দ্রতা ইত্যাদির জন্য কর্মদক্ষতার মান আরও কম হয়। কার্নো ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা $\eta = 1$ হবে যদি T_2= OK হয়। একে বলে উষ্ণতার চরম শূন্য যা অর্জন করা যায় না। তাই কোন তাপ ইঞ্জিনেরই দক্ষতা 100% হবে না।

6.14 প্রত্যাবর্তক ও অপ্রত্যাবর্তক প্রক্রিয়া (Reversible and Irreversible Processes) :

তাপগতিবিদ্যায় কোনো তন্ত্রে কোনো একটি প্রক্রিয়া সম্পন্ন হলে তন্ত্র ও পরিপার্শ্বের মধ্যে শক্তির আদানপ্রদান অথবা কিছু পরিমাণ কার্য সম্পাদিত হয় বা দুটিই হতে পারে।

যদি কোনো প্রক্রিয়া এমনভাবে সম্পন্ন হল - যাতে তন্ত্র ও পরিপার্শ্বকে প্রাথমিক অবস্থায় ফিরিয়ে আনতে গিয়ে বিশ্বে মোট পরিবর্তন কিছু হল না - তখন এ প্রক্রিয়াকে প্রত্যাবর্তক প্রক্রিয়া বলা হয়। আবার যদি কোনো প্রক্রিয়া এমনভাবে সম্পন্ন হল যাতে তন্ত্র ও পরিপার্শ্বকে এদের কোনো পরিবর্তন ছাড়া আগের অবস্থায় কোন ভাবেই ফিরিয়ে আনা গেল না তখন সেই প্রক্রিয়াকে বলা হয় অপ্রত্যাবর্তক প্রক্রিয়া।

মনে করুন কোনো প্রক্রিয়া সম্পন্ন হওয়ার পর কোনো তন্ত্র কিছু কার্য করল। আগের পরিবর্তনের অবস্থাসমূহ একই রেখে বিপরীত পথে (reverse path) প্রক্রিয়া সম্পন্ন করে আগের অবস্থায় ফিরে আনা গেল। এখন তন্ত্রের ওপর যে পরিমাণ কার্য করতে হল তা আগের পাওয়া কার্যের সঙ্গে সমান। এতে তন্ত্রে ও পরিপার্শ্বে মোট পরিবর্তন কিছু হল না। এখন বলা যায় আগের প্রক্রিয়াটি প্রত্যাবর্তক। তবে কোনো প্রক্রিয়া প্রত্যাবর্তক হতে গেলে ঠিক বিপরীত পথে পুনরায় আগের অবস্থায় ফিরতে হবে এমন কোনো বাধ্যবাধকতা নেই। যে কোনোভাবে বিশ্বে (অর্থাৎ তন্ত্র ও পরিপার্শ্বে) কোনো পরিবর্তন ছাড়াই আগের অবস্থায় ফিরতে পারলে তবেই আগের প্রক্রিয়াটি হবে প্রত্যাবর্তক। তা না হলে অর্থাৎ আগের অবস্থায় আসতে হলে বিশ্বে মোট পরিবর্তন কিছু ঘটে থাকলে সেই প্রক্রিয়া হবে অপ্রত্যাবর্তক।

প্রত্যাবর্তক প্রক্রিয়া পাওয়ার শর্ত দুটি (i) প্রক্রিয়াটি সাম্যাবস্থার মধ্য দিয়ে অনুষ্ঠিত হতে হবে (quasi-static process) (ii) ঘর্ষন, সান্দ্রতা ইত্যাদি কোনোরকম অবক্ষয়ী ক্রিয়া থাকবে না (non-dissipative process)

কার্নো চক্রে আমরা যে প্রক্রিয়াগুলি বিভিন্ন পর্যায়ে কল্পনা করেছি – সেগুলি প্রত্যাবর্তক প্রক্রিয়াই। বাস্তবে প্রত্যাবর্তক প্রক্রিয়া পাওয়া যায় না। ঘর্ষণ, পরিচলন, বিকিরণ, সান্দ্রতা ইত্যাদিতে তাপক্ষয় রোধ করা যায় না। আবার সম্পূর্ণ সাম্যাবস্থায় কোনো ক্রিয়াই সম্পন্ন করা যায় না।

কার্নো ইঞ্জিনে যে কোনো প্রক্রিয়া সাম্যাবস্থার মধ্য দিয়ে সম্পন্ন করা হয়েছে। সমস্তরকম অবক্ষয়ী বল অনুপস্থিত ধরা হয়েছে। প্রথম পর্যায়ে সমোষ্ণ পরিবর্তনে যেখানে Q_1 পরিমাণ তাপ শোষণ করে W_1 পরিমাণ কার্য পাওয়া গেছে, সেখানে সমস্ত অবস্থা এক রেখে বিপরীত দিকে ক্রিয়াটি সম্পন্ন করলে W_1 কার্য করলে Q_1 পরিমাণ তাপ পাওয়া যাবে। অর্থাৎ বিশ্বে মোট পরিবর্তন শূন্য অতএব এই প্রক্রিয়াটি প্রত্যাবর্তক। তেমনি অন্য যে কোন প্রক্রিয়াই এখানে প্রত্যাবর্তক। আবার যদি কার্নো চক্র বিপরীত দিকে A থেকে D রুদ্ধতাপ প্রসারণ, D থেকে C সমোষ্ণ প্রসারণ, C থেকে B রুদ্ধতাপ সংনমন এবং B থেকে সমোষ্ণ সংনমন করা হয় তবে তাপ গ্রাহক থেকে Q_2 পরিমাণ তাপ নিয়ে W কার্য করে $Q_2+W=Q_1$ তাপ, তাপ উৎসে দিয়ে দেওয়া যাবে। এর থেকে বুঝতে পারবেন কার্নো চক্র পুরোপুরি প্রত্যাবর্তক। এই ধরনের নিম্ন উষ্ণতায় তাপ শোষণ করে উচ্চ উষ্ণতায় তাপ দিয়ে দেওয়ার যন্ত্রকে হিমায়ন যন্ত্র বলে। কার্নো যন্ত্রও প্রত্যাবর্তক।

6.15 উষ্ণতার তাপগতিসংক্রান্ত স্কেল বা কেলভিন পরম স্কেল (Thermodynamic Scale of Temperature or Kelvin's Absolute Scale of Temperature) :

লর্ড কেলভিন আর্দশ কার্নো ইঞ্জিনের ধারণা থেকে একটি উষ্ণতার স্কেল উদ্ভাবন করেন যে স্কেলে উষ্ণতাকে শক্তির সাপেক্ষে নিরুপন করা যায়, এবং স্কেলটি কোনো বিশেষ পদার্থের প্রকৃতির ওপর নির্ভর করে না। এই স্কেলকে উষ্ণতার তাপগতিসংক্রান্ত স্কেল বা কেলভিনের পরম স্কেল বলা হয়।

ধরি কোন কার্নো প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিন θ_1 উচ্চ উষ্ণতায় Q_1 তাপ শোষণ করে θ_2 নিম্ন উষ্ণতায় Q_2 তাপ õæÇ ßÆõþ Ûý× θ_1 ও θ_2 উষ্ণতা যে কোনো (arbitrary) উষ্ণতার স্কেলে প্রাপ্ত উষ্ণতা। আপনারা আগেই দেখেছেন কার্নো ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা শুধুমাত্র এই দুটি উষ্ণতার উপর নির্ভর করে। অতএব

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = f(\theta_1, \theta_2) \quad - - - - -(6.29)$$

এখানে $f(\theta_1, \theta_2)$ হলে দুটি উষ্ণতা θ_1 ও θ_2 এর অপেক্ষক। অথবা লেখা যায়

$$\frac{Q_2}{Q_1} = 1 - f(\theta_1, \theta_2)$$

বা $$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{1}{1 - f(\theta_1, \theta_2)} = F(\theta_1, \theta_2) \quad - - - - \; (6.30)$$

এখানে $F(\theta_1, \theta_2)$ হল দুটি উষ্ণতা θ_1 ও θ_2 অন্য একটি অপেক্ষক।

সমানভাবে অন্য একটি প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিন θ_1 ও θ_2 উষ্ণতার মধ্যে $(Q_2 > Q_3)$ ক্রিয়াশীল হলে এবং শোষিত ও বর্জিত তাপ যথাক্রমে θ_2 ও θ_3 হলে,

$$\frac{Q_2}{Q_3} = F(\theta_2, \theta_3) \quad - - - - -(6.31)$$

একইভাবে অন্য আর একটি প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিন θ_1 ও θ_3 উষ্ণতার মধ্যে ক্রিয়াশীল হলে এবং শোষিত ও বর্জিত তাপ যথাক্রমে θ_1 ও θ_3 হলে,

$$\frac{Q_1}{Q_3} = F(\theta_1, \theta_3) \quad - - - - \; (6.32)$$

(6.30), (6.31) ও (6.32) সমীকরণ থেকে পাই

$$\frac{Q_1}{Q_2} \times \frac{Q_2}{Q_3} = \frac{Q_1}{Q_3}$$

বা, $F(\theta_1, \theta_2) \times F(\theta_2, \theta_3) = F(\theta_1, \theta_3)$ – – – – (6.33)

(6.33) সমীকরণ থেকে দেখা যায় বামদিকে দুটি অপেক্ষকে θ_2 আছে কিন্তু ডানদিকের অপেক্ষকে θ_2 নেই। সুতরাং $F(\theta_1, \theta_2)$ ও $F(\theta_2, \theta_3)$ অপেক্ষক দুটিকে এমনভাবে নির্ধারণ করতে হবে যাতে এদের গুণফলে θ_2 অনুপস্থিত থাকে। এটি সম্ভব যদি আপেক্ষকগুলিকে নিচের মতো প্রকাশ করা যায়—

$$F(\theta_1, \theta_2) = \frac{\psi(\theta_1)}{\psi(\theta_2)}, F(\theta_2, \theta_3) = \frac{\psi(\theta_2)}{\psi(\theta_3)}, F(\theta_1, \theta_3) = \frac{\psi(\theta_1)}{\psi(\theta_3)} \quad ---- \ (6.34)$$

অতএব আমরা লিখতে পারি –

$$\frac{Q_1}{Q_2} = F(\theta_1, \theta_2) = \frac{\psi(\theta_1)}{\psi(\theta_2)} \quad ----- \ (6.35)$$

$\theta_1 > \theta_2$ হলে $Q_1 > Q_2$ হবে, ফলে $\psi(\theta_1) > \psi(\theta_2)$ হবে, অতএব $\psi(\theta)$ অপেক্ষকটি θ এর একটি রেখিক অপেক্ষক (linear function) । সেইজন্যই $\psi(\theta)$ অপেক্ষককে উষ্ণতার পরিমাণ হিসাবে ব্যবহার করা যায়। সেই উষ্ণতাতে লিখতে পারি $\psi(\theta) = \tau_1$। অতএব

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \quad ----- \ (6.36)$$

(6.36) সমীকরণ থেকে উষ্ণতার একটি স্কেল পাওয়া যায় যা পদার্থের প্রকৃতির ওপর নির্ভরশীল নয়, শুধুমাত্র শক্তি আদানপ্রদানের পরিমাপের ওপর নির্ভরশীল। এই স্কেলে দুটি উষ্ণতার অনুপাত প্রত্যাবর্তক চক্রে উচ্চ উষ্ণতায় তাপ গ্রহণ ও নিম্ন উষ্ণতায় তাপ বর্জনের অনুপাতের সঙ্গে সমান। এই স্কেলকে তাপগতি সংক্রান্ত স্কেল বা কেলভিনের পরম উষ্ণতার স্কেল বলা হয়।

(6.36) সমীকরণ থেকে এই স্কেলের শূন্য নিরূপণ করা যায়। যখন $\tau_2 = 0$ হয় তখন $\theta_2 = 0$। অর্থাৎ যখন $T_2 = 0$ তখন $W = Q_1$ অর্থাৎ নিম্ন উষ্ণতা T_2 যখন শূন্য তখন T_1 এ গৃহীত সমগ্র তাপকে কার্যে রূপান্তরিত করা যায়। অতএব বলা যায় কার্নো ইঞ্জিনের তাপ গ্রাহকের উষ্ণতাকে বলা হবে শূন্য উষ্ণতা যখন উচ্চতর উষ্ণতায় গৃহীত তাপ সম্পূর্ণ কার্যে পরিণত হয়। লক্ষ্য করুন $T_2 \nless 0$, সেক্ষেত্রে θ_2 বর্জিত তাপ হতো ঋণাত্মক। তা যদি সম্ভব হত তবে উচ্চ উষ্ণতা ও নিম্ন উষ্ণতা দুটি থেকেই তাপ নিয়ে অন্য কোনো বস্তুকে নিম্নতর উষ্ণতায় না রেখে কার্যে রূপান্তরিত করা যেত। তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রানুসারে এটি অসম্ভব। অতএব, $\tau = 0$ এটাই নিম্নতম উষ্ণতা—একে চরম বা পরম শূন্য উষ্ণতা বলে।

এই স্কেলের প্রতি ডিগ্রিকে নিম্নলিখিত উপায়ে স্থির করা যায়। যদি জলের হিমাঙ্ক ও স্ফুটনাঙ্কের মধ্যে পার্থক্যকে (প্রাথমিক অন্তরকে) সমান 100 ভাগ ভাগ করা যায় তবে

$$\frac{Q_{steam}}{Q_{ice}} = \frac{\tau_{ice} + 100}{\tau_{ice}} \quad ------ \ (6.37)$$

এইভাবে এই স্কেলের শূন্য ডিগ্রি ও প্রতি ডিগ্রি চিহ্নিত করে সম্পূর্ণভাবে স্কেলটির সংজ্ঞা নিরুপন করা হয়।

এখন দেখা যাক বাস্তবে এমন কোনো স্কেল পাওয়া যায় কিনা। আপনারা দেখেছেন কর্নো চক্রে।

কার্যকরী পদার্থ হিসাবে আদর্শ গ্যাস নেওয়া হয়েছিল। সেক্ষেত্রে আপনারা দেখেছেন

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \ldots \ldots \ (6.38)$$

যেখানে T_1, T_2 হল আদর্শ গ্যাস স্কেলের উষ্মতা।

(6.36) ও (6.38) সমীকরণ থেকে পাই,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}$$

অতএব আদর্শ গ্যাস স্কেলের দুটি উষ্মতার অনুপাত কেলভিন পরম স্কেলের দুটি উষ্মতার অনুপাতের সঙ্গে সমান। আবার $T_2 = 0$ হলে, $\tau_2 = 0$। আদর্শ গ্যাস স্কেলের শূন্য ডিগ্রি কেলভিন পরম স্কেলের শূন্য ডিগ্রির সঙ্গে সমান। আবার প্রাথমিক অন্তরকে সমান 100 ভাগে ভাগ করা হয়েছে এবং $\tau_{ice} = T_{ice}$। আপনারা দেখছেন যে আদর্শ গ্যাস স্কেল কেলভিন পরম স্কেলের সঙ্গে মিলে যাচ্ছে। বলা যায় আদর্শ গ্যাস থার্মোমিটারের সাহায্যে যে উষ্মতা পরিমাপ করা হয় সেই উষ্ণতাই কেলভিন পরম স্কেলের উষ্মতার সমান।

6.16 কার্নোর উপপাদ্য (Carnot's Theorem) ঃ

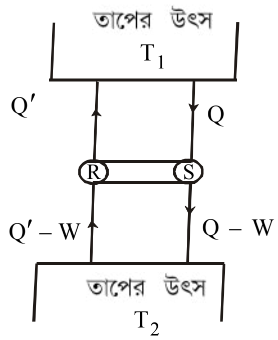
কার্নো ইঞ্জিন একটি প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিন, কার্নোর উপপাদ্য হল নিম্নরূপ—

(i) দুটি উষ্মতার মধ্যে ক্রিয়াশীল কোনো ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা একটি প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা থেকে বেশী হয় না। অথবা কোনো অপ্রত্যাবর্তক ইঞ্জিন কোনো প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিনের থেকে বেশী দক্ষ হয় না।

(ii) সকল প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা সমান।

প্রমাণ :

(i) প্রথম উপপাদ্য প্রমাণের জন্য মনে করুন T_1 উষ্মতার তাপ উৎস ও T_2উষ্মতার তাপ গ্রাহকের ($T_1 > T_2$) মধ্যে R একটি প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিন ও S একটি অপ্রত্যাবর্তক ইঞ্জিন পরস্পর সংযুক্ত (Coupled) অবস্থায় ক্রিয়াশীল (চিত্র 6.7)। অপ্রত্যাবর্তক S ইঞ্জিনটি তাপ ইঞ্জিনের মতো উচ্চ উষ্মতার উৎস থেকে তাপ নিয়ে কার্য করে অবশিষ্ট তাপকে নিম্ন উষ্মতার তাপ গ্রাহকে দিয়ে দেয় এবং প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিনটি (R) বিপরীত দিকে অর্থাৎ হিমায়ন যন্ত্রের (refrigerator) মতো নিম্ন উষ্মতার গ্রাহক থেকে তাপ নিয়ে কার্য করে বাকি তাপকে উচ্চ উষ্মতার উৎস দিয়ে দেয়। মনে করুন প্রতি চক্রে ইঞ্জিন দুটির কার্য W সমান। S ইঞ্জিনটি তাপ উৎসে থেকে Q পরিমাণ তাপ নেয় W পরিমাণ কার্য করে এবং $Q - W$ পরিমাণ তাপ তাপ-গ্রহকে দেয়। বিপরীতক্রমে R ইঞ্জিনটি তাপ-গ্রাহক থেকে $Q' + W$ পরিমাণ তাপ নেয়, W কার্য করে এবং Q' পরিমাণ তাপ তাপ-উৎসে দেয়।



চিত্র 6.7. কার্নো উপপাদ্যের প্রমাণ

ধরুন প্রত্যাবর্তক (R) ও অপ্রত্যাবর্তক ইঞ্জিন (S) দুটির কর্ম দক্ষতা যথাক্রমে η_Rও η_S এবং $\eta_S > \eta_R$,

যেহেতু $\eta_S = \frac{W}{Q}$ ও $\eta_R = \frac{W}{Q'}$

$\therefore\ Q' > Q$

এর থেকে দেখা যাচ্ছে $Q' - Q$ পরিমাণ তাপ প্রতিটি চক্রে তাপ-গ্রাহক থেকে তাপ-উৎস চলে যায়। কোনো দ্বিতীয় বস্তুকে নিম্ন উষ্ণতায় না রেখে ক্রমাগত এই সংযুক্ত ব্যবস্থার সাহায্যে নিম্ন উষ্ণতার তাপ-গ্রাহক থেকে তাপ নিয়ে উচ্চ উষ্ণতার তাপ-উৎসে দেওয়া যাবে। তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রানুসারে এটি অসম্ভব। অতএব আমরা ধরেছিলাম $\eta_S > \eta_R$, এটি ঠিক নয়। অর্থাৎ অপ্রত্যাবর্তক ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিনের কর্ম দক্ষতার চেয়ে বেশী হতে পারে না। এটাই প্রথম উপপাদ্য।

(ii) দ্বিতীয় উপপাদ্য প্রমাণের জন্য আমরা দুটি প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিন R_1ও R_2আগের মতো সংযুক্ত করে ব্যবহার করার কল্পনা করি। মনে করুন R_1তাপ ইঞ্জিনের মতো ও R_2হিমায়ন যন্ত্রের মতো ক্রিয়া করে। R_1এর কর্মদক্ষতা R_2 এর কর্মদক্ষতা থেকে বেশী হলে আগের মতো প্রমাণ করা যায় তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রানুসারে এটি অসম্ভব। অতএব R_1 এর কর্মদক্ষতা R_2 এর কর্মদক্ষতা থেকে বেশী নয়। আবার R_2 কে ইঞ্জিনের মতো ও R_1 কে হিমায়ন যন্ত্রের মতো ব্যবহার করে দেখানো যায় R_2 এর কর্মদক্ষতা R_1এর কর্মদক্ষতা থেকে বেশী হবে না। দুটির কর্মদক্ষতা নিশ্চয়ই সমান। তাই সকল প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা সমান।

6.17 ক্লসিয়াস উপপাদ্য (Clausius Theorem) ঃ

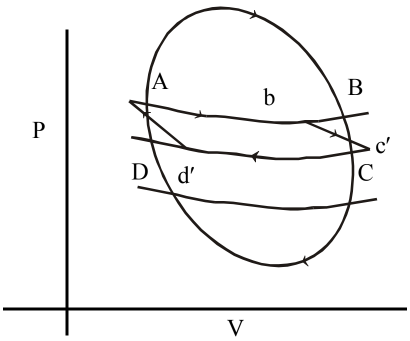
ক্লসিয়াস প্রথমে এনট্রপির ধারণা দেন। কার্নো ইঞ্জিনের আলোচনার সময় এর কর্মদক্ষতা নিয়েই আলোচনা সীমাবধ্ধ ছিল। ক্লসিয়াস ইঞ্জিনে কার্যকরী বস্তুর কী ধরনের তাপীয় পরিবর্তন হচ্ছে সেদিকে দৃষ্টি আকর্ষণ করেন। তিনি লক্ষ্য করেন প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিনে T_1 উচ্চতর উষ্ণতায় সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় কার্যকরী বস্তু Q_1পরিমাণ তাপ শোষণ করে এবং T_2 নিম্নতর উষ্ণতায় সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় Q_2পরিমাণ তাপ বর্জন করে। সেক্ষেত্রে

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

গৃহীত তাপকে ধনাত্মক ও বর্জিত তাপকে ঋণাত্মক ধরলে উপরের সমীকরণকে লেখা যায়–

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

বা $\sum \frac{Q}{T} = 0$ অর্থাৎ $\frac{Q}{T}$ এর মোট পরিবর্তন হয়নি।



চিত্র 6.7.

এবার ABCDA যে কোনো একটি প্রত্যাবর্তক চক্র কল্পনা করুন (চিত্র 6.7)। এখানে বিভিন্ন উষ্ণতায় তাপ গৃহীত ও বর্জিত হয়েছে। চক্রটিকে অসংখ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র কার্নো চক্রে বিভক্ত করা হল। মনে করি AB ও DC

দুটি সমোষ্ম লেখ। এদের উষ্মতা যথাক্রমে T_1 ও T_2। AD ও BC-এর মধ্যে *ad′* ও *bc′* দুটি রুদ্ধতাপ লেখ। *abc′d′* একটি কার্নোচক্র। *ab* ও *c′d′* সমোষ্ণ রেখায় গৃহীত ও বর্জিত তাপ যথাক্রমে ΔQ_1 ও ΔQ_2 হলে,

$$\frac{\Delta Q_1}{T_1}+\frac{\Delta Q_2}{T_2}=0$$

বা $\sum\frac{\Delta Q}{T}=0$

প্রত্যাবর্তক চক্রটিকে অসংখ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র কার্নো চক্রে বিভক্ত করলে এবং সবকটি কার্নো চক্রে $\sum\frac{\Delta Q}{T}$ যোগ করলে, পুরো চক্রের ক্ষেত্রে

$\oint\frac{dQ}{T}=0$ হবে। তখন পুরো পূর্ণচক্রটির পথ ABCDA এর সঙ্গে মিলে যাবে। একে ক্লসিয়াস উপপাদ্য বলে।

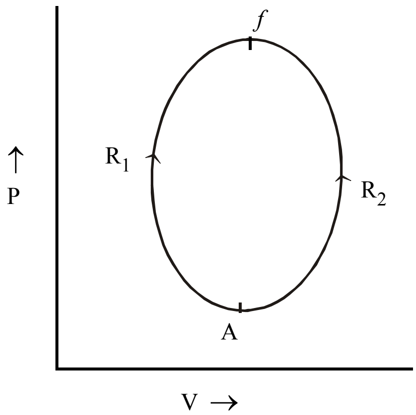
ক্লসিয়াস উপপাদ্য : যে কোনো প্রত্যাবর্তক চক্রের ক্ষেত্রে

$$\oint_R\frac{dQ}{T}=0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (6.39)$$

[R অক্ষর প্রত্যাবর্তক (Reversible) বোঝাচ্ছে।]

6.18 এন্ট্রপি (Entropy) ঃ

ধরুন যে কোনো তাপগতীয় তন্ত্রে প্রাথমিক ও অন্তিম অবস্থাকে *i* ও *f* দিয়ে চিহ্নিত করা হয়েছে (চিত্র 6.8)। R_1ও R_2 দুটি পৃথক প্রত্যাবর্তক পথ দিয়ে *i* ও *f* অবস্থা যুক্ত করা হয়েছে। এখন R_1 পথে প্রাথমিক *i* অবস্থা থেকে অন্তিম *f* অবস্থা পর্যন্ত গিয়ে আবার R_2 পথে *f* অবস্থা থেকে *i* অবস্থায় ফিরে এলে একটি পূর্ণ প্রত্যাবর্তক চক্রে প্রাথমিক অবস্থায় ফিরে আসা যায়। ক্লসিয়াস উপপাদ্য অনুসারে



চিত্র 6.8.

$$\oint_R\frac{dQ}{T}=0$$

বা, $$\underset{R_1}{\int_i^f\frac{dQ}{T}}+\underset{R_2}{\int_f^i\frac{dQ}{T}}=0$$

বা, $\underset{R_1}{\int_i^f \frac{dQ}{T}} - \underset{R_2}{\int_i^f \frac{dQ}{T}} = 0$

বা, $\underset{R_1}{\int_i^f \frac{dQ}{T}} = \underset{R_2}{\int_i^f \frac{dQ}{T}}$

$\frac{dQ}{T}$ এর এই পরিবর্তন R_1 বা R_2 পথে একই রকম। অর্থাৎ এই পরিবর্তন পথের উপর নির্ভর করে না। তাই বলা যায় এমন একটি অপেক্ষক (ধরি S) আছে যার পরিবর্তন কেবল i ও f অবস্থার উপর নির্ভর করে এবং $S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T}$ [S এর i ও f অবস্থানে মান S_i ও S_f]

বা $\int_i^f dS = \int_i^f \frac{dQ}{T}$

বা $dS = \frac{dQ}{T}$ ... ... (6.40)

এই S অপেক্ষককে বলা হয় এনট্রপি।

এনট্রপিকে আমরা নিম্নলিখিত উপায়ে বর্ণনা করতে পারি,

কোনো তন্ত্রের এনট্রপি হল তাপগতীয় চলরাশির এমন একটি অপেক্ষক দুটি অবস্থানের মধ্যে যার পরিবর্তন যে কোন প্রত্যাবর্তক পথে $\int_i^f \frac{dQ}{T}$ এর সঙ্গে সমান অথবা এর অবকল $dS = \frac{dQ}{T}$।

যদি কোনো তন্ত্রের Aও B অবস্থার এনট্রপি হয় যথাক্রমে S_A ও S_B তবে,

$\int_A^B dS = \int_A^B \frac{dQ}{T}$

বা, $S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T}$

বা, $S_B = S_A + \int_A^B \frac{dQ}{T}$ ... ... (6.41)

(6.41) সমীকরণ থেকে দেখতে পাচ্ছেন A অবস্থার এনট্রপি S_A জানা না থাকলে B অবস্থার এনট্রপি S_B এর মান জানা যায় না। তাপগতিবিদ্যার প্রথম ও দ্বিতীয় সূত্র থেকে S_A এর মান জানা যায় না। এখানে এনট্রপির পরিবর্তন নিয়েই আলোচনা বা গণনা করা হয়।

আমরা আগে দেখেছি dQ পরিবর্তন পথ নির্ভর। কিন্তু $\frac{dQ}{T}$ পথ নির্ভর নয়। তাই dS একটি পূর্ণ অবকল। S তাপগতীয় চলরাশির মতো আচরণ করে। dQ এর সঙ্গে $\frac{1}{T}$ গুণ করার ফলে $\frac{dQ}{T}$ বা dS পূর্ণ অবকল হয়েছে বলে $\frac{1}{T}$ কে সমাকলন গুণক (integrating factor) বলা হয়।

এনট্রপি ভরের উপর নির্ভর করে। একক ভরের এনট্রপি s হলে m ভরের এনট্রপি হবে $s = ms_1$। তাই s একটি ব্যাপ্তি নির্ভর (extensive) রাশি। $\frac{dQ}{T}$ কে বলে সমক্রিয় তাপ (reduced heat) dQ'। যা একটি যথার্থ অবকল।

6.19 অপ্রত্যাবর্তী চক্রে এনট্রপি বৃদ্ধি (Increase of Entropy in Irreversible Processes) ঃ

এবার আমরা দেখবো অপ্রত্যাবর্তক চক্রে তন্ত্রের এনট্রপি বৃদ্ধি পাচ্ছে। ধরি কোনো অপ্রত্যাবর্তক চক্রে উচ্চতর উষ্ণতা T_1-এ Q_1পরিমাণ তাপ শোষিত হয় ও নিম্নতর উষ্ণতা T_2-এ Q_2 পরিমাণ তাপ বর্জিত হয়। এক্ষেত্রে চক্রের কর্মদক্ষতা

$$\eta' = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

আমরা আগেই দেখেছি এই দুই উষ্ণতার মধ্যে ক্রিয়ারত কোনো প্রত্যাবর্তক চক্রের কর্মদক্ষতা

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

আবার কার্নো উপপাদ্য থেকে জেনেছি প্রত্যাবর্তক চক্রের কর্মদক্ষতা অপ্রত্যাবর্তক চক্রের থেকে বেশী হয়।

অতএব $\eta' < \eta$

বা, $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}$

বা, $1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1}$

বা, $\dfrac{Q_2}{Q_1} > \dfrac{T_2}{T_1}$

বা, $\dfrac{Q_2}{T_2} > \dfrac{Q_1}{T_1}$

বা, $\dfrac{Q_2}{T_2} - \dfrac{Q_1}{T_1} > 0$

অর্থাৎ অপ্রত্যাবর্তক চক্রে এনট্রপি বেড়েছে। প্রকৃতপক্ষে সমস্ত বাস্তব পরিবর্তনই অপ্রত্যাবর্তক। প্রতিটি বাস্তব পরিবর্তনেই এনট্রপি বেড়ে যায়। এইজন্য বলা হয় মহা বিশ্বের মোট এনট্রপি ক্রমবর্ধমান।

6.20 এনট্রপি ও অপ্রাপ্তব্য শক্তি (Entropy and Unavailable Energy) ঃ

মনে করুন একটি প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিন T_1 উচ্চতর উষ্ণতায় তাপ-উৎস থেকে Q পরিমাণ তাপ শোষণ করে W পরিমাণ কার্য করার পর বাকি তাপ প্রাপ্তব্য T_0 সর্ব নিম্ন উষ্ণতার তাপ-গ্রাহকে বর্জন করল। অতএব

কর্মদক্ষতা $= \dfrac{W}{Q} = 1 - \dfrac{T_0}{T_1}$

এক্ষেত্রে কার্যরূপে যে শক্তি পাওয়া যায় তা হ'ল

$$W = Q\left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right)$$

ধরা যাক, T_1 উচ্চতর উষ্ণতার গ্রাহক থেকে Q পরিমাণ তাপ T_2 নিম্ন উষ্ণতায় কোনো কার্য ব্যতিরেকে পরিবাহিত হল। যেখানে $T_1 > T_2 > T_0$।

এবার একটি প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিনের সাহায্যে T_2 উষ্ণতার তাপ-উৎস থেকে Q পরিমাণ তাপ নিয়ে W' পরিমাণ কার্য করার পর বাকি তাপ প্রাপ্তব্য T_0 সর্বনিম্ন উষ্ণতার তাপ-গ্রাহকে বর্জন করল। অতএব

$\dfrac{W'}{Q} = 1 - \dfrac{T_0}{T_2}$

কার্যরূপে প্রাপ্ত শক্তি $W' = Q\left(1 - \dfrac{T_0}{T_2}\right)$। বলা যায় উল্লিখিত ক্ষেত্রে পরিবহনের ফলে $(W - W')$ পরিমাণ শক্তি কার্য করতে পারল না। একে বলে অপ্রাপ্তব্য শক্তি।

অতএব, অপ্রাপ্তব্য শক্তি = $W - W' = Q\left(1-\frac{T_0}{T_1}\right) - Q\left(1-\frac{T_0}{T_2}\right)$

$$= QT_0 \left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)$$

$$= T_0\left(\frac{Q}{T_2}-\frac{Q}{T_1}\right) = T_0\ (S_2 - S_1) = T_0\ \Delta\ S$$

$= T_0 \times$ এন্ট্রপি বৃদ্ধি।

অর্থাৎ এন্ট্রপি বৃদ্ধির অর্থ অপ্রাপ্তব্য শক্তির বৃদ্ধি। প্রতিনিয়ত এন্ট্রপি বৃদ্ধি হচ্ছে আর আমরা প্রাপ্তব্য শক্তি হারিয়ে ফেলছি।

6.21 এন্ট্রপির ভৌত ব্যাখ্যা (Physical Interpretation of Entropy) ঃ

তাপগতিবিদ্যায় চাপ, আয়তন, উষ্ণতা ইত্যাদির মতো এন্ট্রপিও একটি ভৌত রাশি। এন্ট্রপি পরিবর্তন পথের উপর নির্ভর করে না। শুধুমাত্র প্রাথমিক ও অন্তিম অবস্থার উপর নির্ভর করে। চাপ, আয়তন, উষ্ণতার মতো এর অবকল একটি যথার্থ অবকল। সাধারণত এন্ট্রপির পরিবর্তনই মাপা হয়। উষ্ণতা, আয়তন, শক্তি ইত্যাদির মতো এটি পরিমাপ করা যায় না, কিন্তু এর পরিবর্তন পরিমাপ করা যায়। কোনো গ্যাসে তাপ প্রযুক্ত হলে গ্যাসের এন্ট্রপি বেড়ে যায়। বলা যায় বিশৃঙ্খলা (randomness or disorder) বেড়ে যায়। এন্ট্রপির বৃদ্ধিকে বিশৃঙ্খলার বৃদ্ধি বলা যায় অথবা, এন্ট্রপি বিশৃঙ্খলার পরিমাপ বলা যায়। আবার এন্ট্রপির বৃদ্ধি হলে অপ্রাপ্তব্য শক্তি বৃদ্ধি পায়। শক্তি থাকলেও কার্য রূপে পাওয়া যাবে না।

প্রকৃতিতে সমস্ত পরিবর্তনই অপ্রত্যাবর্তক-এতে প্রতিনিয়ত এন্ট্রপি বৃদ্ধি পাচ্ছে আর অমরা প্রাপ্তব্য শক্তি হারিয়ে ফেলছি। একে বলা হয় 'শক্তির অবক্ষয় সূত্র' (principle of degradation of energy)। সম্ভাব্যতা সূত্র (law of probability) থেকে জানা যায় সম্ভাব্যতা বৃদ্ধি ও এন্ট্রপি বৃদ্ধি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত। এন্ট্রপি বৃদ্ধি হলে বুঝতে হবে–কম সম্ভাব্য অবস্থা থেকে তন্ত্রটি বেশী সম্ভাব্য অবস্থার দিকে যাচ্ছে। বেশী সম্ভাব্য ঘটনা ঘটাই স্বাভাবিক, তাই স্বাভাবিক ঘটনায় এন্ট্রপি বৃদ্ধি পায়। সম্ভাব্যতা W হলে এন্ট্রপি $S = k ln W$, k একটি ধ্রুবক।

6.22 এন্ট্রপি ও তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র ঃ

ক্লসিয়াস এন্ট্রপির বৃদ্ধিকেই তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র রূপে ব্যাখ্যা করেন। (i) প্রথম সূত্রকে বলা যায় – 'বিশ্বের মোট শক্তি স্থির থাকে। (ii) তেমনি দ্বিতীয় সূত্রকে বলা যায় বিশ্বের এন্ট্রপি ক্রমবর্ধমান এবং এটি সব সময়ে চরম মানে পৌঁছাতে চায়।'

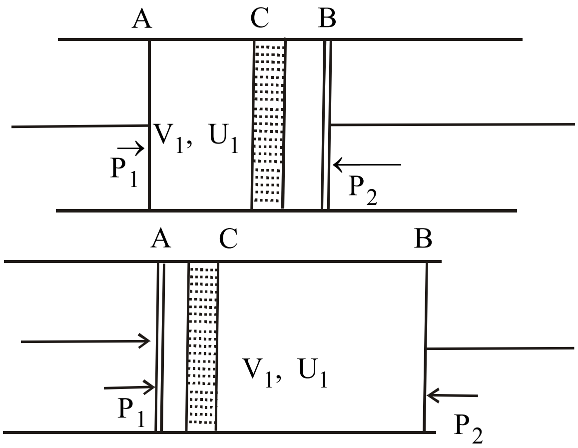
6.23 জুল-টমসন ক্রিয়া : রূদ্ধতাপ প্রবাহরোধী প্রক্রিয়া (Joule Thomson Effect : Adiabatic Throttling Process) ঃ

গে-লুসাক ও জুলের (Gay-lussac and Joule) পরীক্ষা থেকে দেখা যায় গ্যাসের আয়তনের উপর তার অভ্যন্তরীন শক্তি নির্ভর করে না—$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$। প্রকৃতপক্ষে এটি আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে সত্য।

কেলভিন 1852 খৃষ্টাব্দে জুলের সঙ্গে গ্যাস প্রসারণের সছিদ্র ছিপি (porous plug) পরীক্ষা করেন এবং বাস্তব গ্যাসের ক্ষেত্রে উষ্ণতা হ্রাস প্রদর্শন করেন। এই ক্রিয়াকে জুল-টমসন ক্রিয়া বা জুল কেলভিন ক্রিয়া বলা হয়। এই ক্রিয়ায় উষ্ণতার পরিবর্তন খুব কম বলে সম্ভবত গে-লুসাক-জুলের পরীক্ষায় এই পরিবর্তন লক্ষিত হয়নি।

জুল-টমসন ক্রিয়া প্রদর্শনের জন্য একটি উচ্চচাপ সহনশীল সূক্ষ্ম ছিদ্রযুক্ত ছিপি নেওয়া হয়। সে সময়ে তুলো, সিল্ক, ইত্যাদি দিয়ে এই ছিপি তৈরী করা হত। এর একদিকে উচ্চচাপে গ্যাস রাখা হয় ও অন্যদিকে নির্দিষ্ট নিম্নচাপ রাখা হয়। সছিদ্র ছিপির মধ্য দিয়ে উচ্চচাপ থেকে নিম্নচাপে যাওয়ার সময় গ্যাসের প্রবাহ আংশিক বাধা পায় এবং গ্যাসের অণুগুলি পরস্পর দূরে দূরে সরে যেতে থাকে। ফলে আন্তরাণবিক আকর্ষণ বলের বিরুদ্ধে কার্য হতে থাকে। একে প্রবাহীরোধী (throttling) প্রক্রিয়া বলা হয়। এতে গ্যাসের আয়তন বেড়ে যায়। নির্দিষ্ট চাপের বিরুদ্ধে গ্যাস প্রসারিত হওয়ায় বাহ্যিক কার্য হয়েছে। এই রকম প্রসারণে আমরা দেখবো এনথ্যালপি $H = U + PV$ স্থির থাকে।

ধরি একটি সছিদ্র ছিপি C-এর (চিত্র 6.9) বামদিকে P_1 উচ্চচাপে গ্যাস আছে। A পিষ্টনের সাহায্যে এই চাপ বজায় রাখা হয়। C-এর ডান দিকে P_2 নিম্নচাপে একটি পিষ্টন B আছে। সমগ্র ব্যবস্থাটি তাপ নিরুদ্ধ অবস্থায় রাখা আছে। গ্যাসটিকে বাম দিক থেকে ডানদিকে প্রবাহরোধী প্রক্রিয়ায় প্রসারিত হতে দেওয়া হল। ধরি এক মোল গ্যাস নেওয়া হয়েছে। প্রসারণের আগে বাম দিকে গ্যাসের চাপ, আয়তন ও অভ্যন্তরীন শক্তি যথাক্রমে P_1, V_1 ও U_1 এবং প্রসারণের পরে ডানদিকে এগুলি যথাক্রমে P_2, V_2 ও U_2। ছিপির মধ্যে আবদ্ধ গ্যাসের আগের ও পরের অবস্থা একই থাকায় গণনায় একে বাদ দেওয়া যায়। প্রসারণের ফলে বামদিকের A পিষ্টন গ্যাসের উপর P_1V_1 কার্য করে এবং ডানদিকে গ্যাসটি P_2V_2 কার্য করে। গ্যাসটি মোট কার্য করে $P_2V_2 - P_1V_1$। রূদ্ধতাপ প্রক্রিয়া হওয়ায় $\Delta Q = 0$। তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রানুসারে অভ্যন্তরীণ শক্তি $U_1 - U_2$ ব্যয় করে এই কার্য পাওয়া গেছে। অতএব



চিত্র 6.9

$$P_2V_2 - P_1V_1 = U_1 - U_2$$

বা $U_1 + P_1V_1 = U_2 + P_2V_2$

অর্থাৎ $U + PV = H$ স্থির থাকে। H কে বলা হয় এনথ্যালপি (enthalpy)।

ভ্যানডারওয়াল্‌স গ্যাসে জুল টমসন প্রসারণে উষ্ণতা হ্রাসের পরিমাণ :

গ্যাস কর্তৃক কৃতকার্য $W_1 = P_2V_2 - P_1V_1$

গ্যাস যখন প্রসারিত হয় তখন আন্তরাণবিক আকর্ষণ বলের বিরুধে গ্যাসকে কিছু অভ্যন্তরীণ কার্য করতে হয়। ভ্যানডারওয়াল্‌স সমীকরণে অভ্যন্তরীণ আকর্ষণের জন্য চাপ হ্রাস = $\frac{a}{V_2}$। V_1থেকে V_2 আয়তনে প্রসারিত হওয়ায় এই বলের বিরুধে কৃতকার্য

$$W_2 = \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V_2} dV = \frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2}$$

অতএব মোট কৃতকার্য $W = W_1 + W_2 = P_2V_2 - P_1V_1 + \frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2}$ ... ... (6.42)

ভ্যানডারওয়াল্‌স সমীকরণ থেকে পাই, $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$

বা, $PV + \frac{a}{V} - Pb - \frac{ab}{V^2} = RT$

বা, $PV + \frac{a}{V} - Pb = RT$ [$\frac{ab}{V^2}$ এর মান খুব কম বলে উপেক্ষা করা যায়]

(6.42) সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$W = RT_2 - \frac{a}{V_2} + P_2b - RT_1 + \frac{a}{V_1} - P_1b + \frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2}$$

$$= R(T_2 - T_1) - \frac{2a}{V_2} + \frac{2a}{V_1} - (P_1 - P_2)b \text{ ... ... (6.43)}$$

a ও *b* এর মান খুব কম বলে, ভ্যানডারওয়ালস্‌-এর সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$PV = RT$ বা $\frac{1}{V} = \frac{P}{RT}$

(6.43) সমীকরণে এই মান বসিয়ে পাই,

$$W = R(T_2 - T_1) - \frac{2aP_2}{RT_2} + \frac{2aP_1}{RT_1} - (P_1 - P_2)b$$

T_1 ও T_2এর পার্থক্য খুব কম বলে, ধরা যায় $T_2 \approx T_1 = T$ ও $T_2 - T_1 = dT$

$$\therefore \ W = RdT - \frac{2a}{RT}dP + bdP$$

জুল টমসন ক্রিয়ার সময় সমস্ত ব্যাবস্থাটি তাপরুদ্ধ অবস্থায় থাকে। উপরোক্ত কার্য করার শক্তি থেকেই অণুগুলির গতিশক্তি থেকে গৃহীত হয়েছে। ফলে অণুগুলির গতিশক্তি হ্রাস পাবে এবং তাপমাত্রাও হ্রাস পাবে। তাপমাত্রা হ্রাস dT ও স্থির আয়তনে মোলার আপেক্ষিক তাপ C_v হলে, শোষিত তাপ $= -C_v dT$

$$-C_v dT = RdT - \left(\frac{2a}{RT} - b\right)dP$$

বা, $$-C_v dT = (C_p - C_v)dT - \left(\frac{2a}{RT} - b\right)dP$$

বা, $$C_p dT = \left(\frac{2a}{RT} - b\right)dP$$

বা, $$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{1}{C_p}\left(\frac{2a}{RT} - b\right) = \mu \quad \dots \dots (6.44)$$

μ কে বলা হয় অবকল জুল-টমসন গুণাঙ্ক (differential Joule-Thomson coefficient)

(6.44) সমীকরণ থেকে দেখা যায়, $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$ ধনাত্মক হবে অর্থাৎ প্রসারণে উষ্ণতা কমে যাবে যদি $\frac{2a}{RT} > b$ হয়

বা $T < \frac{2a}{bR}$ হয়।

$T_i = \frac{2a}{bR}$ উষ্ণতাকে বলা হয় উৎক্রম উষ্ণতা বা জুল টমসন উৎক্রম উষ্ণতা (Joule-Thomson inversion temperature)।

এখান থেকে জানা যায়–

(i) উষ্ণতা T_i এর নিচে রেখে প্রসারণ ঘটালে উষ্ণতা কমে যাবে।

(ii) উষ্ণতা T_i এর ওপরে রেখে প্রসারণ ঘটালে উষ্ণতা বেড়ে যাবে।

(iii) উষ্ণতা T_i এ রেখে প্রসারণ ঘটালে উষ্ণতার কোনো পরিবর্তন হবে না।

পরীক্ষায় দেখা যায় $T_i = \frac{2a}{bR}$ এই মান পুরোপুরি সঠিক নয়। কারণ হিসাবে বলা যায় গণনার সময় কিছু

পদকে উপেক্ষা করা হয়েছে এবং ভ্যানডারওয়াল্‌স সমীকরণও সম্পূর্ণভাবে প্রযোজ্য নয়। প্রকৃতপক্ষে μ চাপও উষ্মতার উপর নির্ভর করে।

দেখা যায়–

(i) একই উষ্মতায় কম চাপে μ–এর মান বেশী হয়।

(ii) একই চাপে উষ্মতার পরিবর্তনে μ-এর একটি চরম মান আছে এবং চরম মান কম উষ্মতার দিকে পাওয়া যায়।

জুল-টমসন প্রক্রিয়ায় উষ্মতা হ্রাস বেশ কম। কম উষ্মতার দিকে চরম-মান পাওয়া যায়। উষ্মতা কমিয়ে জুল-টমসন ক্রিয়া সম্পন্ন করে উষ্মতা হ্রাস বেশী করা যায়। পুনরুৎপাদক (regenerative) প্রক্রিয়ায় আগত গ্যাসের উষ্মতা পরপর কমিয়ে জুল-থমসন প্রসারণ ঘটিয়ে উষ্মতা অনেক বেশী কমানো সম্ভব হয়েছে। এই প্রক্রিয়ার সাহায্যে বিভিন্ন গ্যাসকে ঠাণ্ডা করে তরলে পরিণত করাও সম্ভব হয়েছে। গ্যাসকে সংকট উষ্মতার (critical temperature) নিচে নামিয়ে চাপ বৃদ্ধি করে তরলে পরিণত করা হয়।

● **জুল-টমসন উৎক্রম উষ্মতা, বয়েল উষ্মতা ও সংকট উষ্মতার পারস্পরিক সম্পর্ক (Inter relations between J.T inversion temperature, Boyle temperature and critical temperature)**

সংকট উষ্মতা, $T_C = \dfrac{8a}{27bR}$ এবং বয়েল উষ্মতা, $T_B = \dfrac{a}{bR}$ এবং জুল থমসন উৎক্রম উষ্মতা, $T_i = \dfrac{2a}{bR}$

$$\therefore\ T_i = \frac{2a}{bR} = \frac{27}{4}\cdot\frac{8a}{27bR} = \frac{27}{4}T_C = 6.75\ T_C$$

$$T_i = \frac{2a}{bR} = 2.\frac{a}{bR} = 2T_B$$

আবার $T_B = \dfrac{27}{8}T_C = 3.375\ T_C$

অতএব $T_i > T_B > T_C$

● **সাধারণ উষ্মতায় জুল-টমসন প্রসারণে হাইড্রোজেন ও হিলিয়ামের উষ্মতা বৃদ্ধির ব্যাখ্যা :**

হাইড্রোজেন ও হিলিয়ামের ক্ষেত্রে জুল-থমসন উৎক্রম উষ্মতা সাধারণ ঘরের উষ্মতার থেকে অনেক কম। তাই এই গ্যাস দুটি সাধারণ ঘরের উষ্মতায় জুল-টমসন প্রসারণে উষ্মতর হয়। হাইড্রোজেনের বেলায় প্রায় 100 বায়ুমণ্ডলের চাপে $T_i = -\ 80°C$। $-\ 80°C$ এর নিচে জুল-টমসন প্রসারণে হাইড্রোজেন ঠাণ্ডা হবে। তেমনি হিলিয়ামের $T_i = -\ 240°C$। এই উষ্মতার নীচে জুল-টমসন প্রসারণে হিলিয়াম ঠাণ্ডা হবে।

6.24 সারাংশ ঃ

1. তাপগতিবিদ্যায় কয়েকটি প্রাথমিক ধারণা :

(a) তাপগতীয় তন্ত্র : কোনো পদার্থের নির্দিষ্ট অংশ বা পদার্থ যে স্থান নিয়ে আছে তার কোনো নির্দিষ্ট অংশ

যা পর্যবেক্ষণের জন্য পৃথকভাবে বিবেচনা করা হয়—তাকে তাপগতীয় তন্ত্র বা শুধু তন্ত্র বলা হয়। এই তন্ত্র বহুসংখ্যক অণু পরমাণু নিয়ে গঠিত। একে আয়তন, চাপ উষ্মতা ইত্যাদি পরিমাপযোগ্য স্থূল বাহ্যিক রাশি দিয়ে প্রকাশ করা যায়।

(b) **পরিপার্শ্ব** : নির্দিষ্ট তন্ত্রের বাইরে যে সব পদার্থ থাকে তাকেই পরিপার্শ্ব বলা হয়।

(c) **সীমা** : তন্ত্র ও পরিপার্শ্বকে যে তল দিয়ে পৃথক করা হয় তাকে সীমা বলে।

(d) **উদস্থৈতিক বা রাসায়নিক তন্ত্র** : নির্দিষ্ট ভর যুক্ত কোনো তন্ত্র পরিপার্শ্বের উপর সমান উদ্‌স্থিতিক চাপ প্রয়োগ করলে এবং যার উপর পৃষ্ঠতলের প্রভাব, মহাকর্ষীয় বা তড়িৎ বা চুম্বকীয় প্রভাব থাকে না তাকে উদস্থিতিক বা রাসায়নিক তন্ত্র বলা হয়।

(e) **বিচ্ছিন্ন তন্ত্র** : যে তন্ত্রের সঙ্গে তার পরিপার্শ্বের মধ্যে কোনো শক্তি বা পদার্থ আদানপ্রদান হয় না তাকে বিচ্ছিন্ন তন্ত্র বলে।

(f) **মুক্ত বা খোলা তন্ত্র** : যে তন্ত্রের সঙ্গে তার পরিপার্শ্বের মধ্যে শক্তি বা পদার্থ আদানপ্রদান হয় তাকে মুক্ত বা খোলা তন্ত্র বলে।

(g) **বন্ধ তন্ত্র** : যে তন্ত্র তার পরিপার্শ্বের সঙ্গে শক্তি আদানপ্রদান করতে পারে কিন্তু পদার্থ আদানপ্রদান করতে পারে না তাকে বন্ধ তন্ত্র বলে।

2. তাপগতীয় সাম্য :

যান্ত্রিক সাম্য : যখন কোনো তন্ত্র ও পরিপার্শ্বের মধ্যে বা তন্ত্রের বিভিন্ন অংশের মধ্যে কোনো লব্ধি বল ক্রিয়া করে না তখন সেই সাম্যকে যান্ত্রিক সাম্য বলে।

তাপীয় সাম্য : যখন তন্ত্রের সঙ্গে পরিপার্শ্বের বা তন্ত্রের বিভিন্ন অংশের মধ্যে উষ্মতার পার্থক্য থাকে না – সেই অবস্থার সাম্যকে তাপীয় সাম্য বলে।

রাসায়নিক সাম্য : যখন কোনো তন্ত্রের সঙ্গে তার পরিপার্শ্বের মধ্যে বা তন্ত্রের বিভিন্ন অংশের মধ্যে রাসায়নিক পরিবর্তন হয় না – তখন সেই অবস্থার সাম্যকে বলা হয় রাসায়নিক সাম্য।

তাপগতীয় সাম্য : কোনো তন্ত্র যখন একই সময়ে যান্ত্রিক, তাপীয় ও রাসায়নিক সাম্যে থাকে – তখন সেই সাম্যকে তাপগতীয় সাম্য বলা হয়।

3. অবস্থার চলরাশি বা তাপগতীয় চলরাশি বা তাপগতীয় স্থানাঙ্ক :

কোনো তন্ত্র তাপগতীয় সাম্যাবস্থায় থাকলে, তার আয়তন (V), চাপ (P) উষ্মতা (T) ইত্যাদি পরিমাপযোগ্য রাশি দিয়ে এর অভ্যন্তরীন অবস্থাকে সম্পূর্ণভাবে প্রকাশ করা যায়-এদের অবস্থার চলরাশি বলা হয়। এই রাশিগুলি পদার্থের স্থূল ধর্মকে প্রকাশ করে।

(a) **ব্যাপ্তি নিরপেক্ষ চলরাশি** : চাপ (P), উষ্মতা (T) ইত্যাদি চলরাশি যেগুলি তন্ত্রের ভরের উপর নির্ভর করে না – তাদের ব্যাপ্তি নিরপেক্ষ চলরাশি বলে।

(b) **ব্যাপ্তি নির্ভর চলরাশি** : আয়তন (V), অভ্যন্তরীণ শক্তি (U) ইত্যাদি চলরাশি যেগুলি তন্ত্রের ভরের উপর নির্ভর করে তাদের ব্যাপ্তি নির্ভর চলরাশি বলে।

4. তাপগতিবিদ্যার আদি সূত্র : দুটি তন্ত্র পৃথকভাবে তৃতীয় কোনো তন্ত্রের সঙ্গে তাপীয় সাম্যে থাকলে, এরা অবশ্যই নিজেদের মধ্যে তাপীয় সাম্যে থাকবে। উষ্ণতা হল কোনো তন্ত্রের এমন একটি ধর্ম যা স্থির করে দেয় এই তন্ত্র অন্য কোনো তন্ত্রের সঙ্গে তাপীয় সাম্যে আছে কিনা।

5. অবস্থার সমীকরণ ঃ

$$f(\mathrm{P,\ V,\ T}) = 0$$

6. তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র :

কার্য করতে সক্ষম কোনো তন্ত্রে তাপ প্রয়োগ করলে গৃহীত তাপশক্তি, তন্ত্রের অভ্যন্তরীণ শক্তির বৃদ্ধি এবং তন্ত্র দ্বারা কৃতকার্যের যোগফলের সমান হয়। মোটশক্তি ধ্রুবক।

$$d\mathrm{Q} = d\mathrm{U} + d\mathrm{W} \text{ বা } d\mathrm{Q} = d\mathrm{U} + \mathrm{P}d\mathrm{V}$$

7. আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে $C_P - C_V = R$

8. (a) গ্যাসের সমোষ্ণ পরিবর্তন $dT = 0$

(b) গ্যাসের রুদ্ধতাপ পরিবর্তন $dQ = 0$

(c) গ্যাসের রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে $PV^\gamma = k$ (ধ্রুবক)

$$\mathrm{TP}^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{ধ্রুবক},\ \mathrm{TV}^{\gamma-1} = \text{ধ্রুবক}$$

9. তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র :

কেলভিন-প্ল্যাঙ্ক বিবৃতি : এমন কোনো প্রক্রিয়া সম্ভব নয় যার একমাত্র ফল হবে একটি তাপ উৎস থেকে তাপ নিয়ে তার সমস্তটাকেই কার্যে রূপান্তরিত করা যায়।

ক্লসিয়াসের বিবৃতি : শীতলতর বস্তু থেকে উষ্ণতর বস্তুতে তাপ যাওয়ার কোনো প্রক্রিয়া সম্ভব নয়।

10. কার্নো ইঞ্জিন একটি আদর্শ প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিন। এর কর্মদক্ষতা

$$\eta = \frac{W}{Q} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{1}{\rho^{\gamma-1}}$$

ρ = রুদ্ধতাপ প্রসারণ অনুপাত।

11. প্রত্যাবর্তক ও অপ্রত্যাবর্তক প্রক্রিয়া : কোনো প্রক্রিয়া যদি এমনভাবে সম্পন্ন হয় যাতে তন্ত্র ও পরিপার্শ্বকে প্রাথমিক অবস্থায় ফিরিয়ে আনা হলে বিশ্বে মোট পরিবর্তন কিছু হয় না—এরূপ প্রক্রিয়াকে প্রত্যাবর্তক প্রক্রিয়া বলা হয়। যদি তা হয়– অর্থাৎ প্রাথমিক অবস্থায় ফিরিয়ে আনতে হলে আবার কার্য করতে হয় তখন সেই প্রক্রিয়াকে অপ্রত্যাবর্তক প্রক্রিয়া বলা হয়।

12. উষ্ণতার কেলভিন বা পরম স্কেল : এই স্কেলে উষ্ণতাকে শক্তির সাপেক্ষে নিরূপণ করা যায়, কোনো বিশেষ পদার্থের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে না। আদর্শ গ্যাস থার্মোমিটারের উষ্ণতা-স্কেল এর সঙ্গে মিলে যায়।

13. কার্নো উপপাদ্য :

(i) দুটি উষ্ণতার মধ্যে ক্রিয়াশীল কোনো ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা একটি প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা থেকে বেশী হয় না।

(ii) সকল প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা সমান।

14. ক্লসিয়াস উপপাদ্য : যে কোনো প্রত্যাবর্তক চক্রের ক্ষেত্রে

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

15. এন্ট্রপি : এন্ট্রপি অপেক্ষক S হলে

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

অপ্রত্যাবর্তী চক্রে এন্ট্রপির বৃদ্ধি হয়। এন্ট্রপি বাড়লে অপ্রাপ্তব্য শক্তি বাড়ে। সমস্ত প্রাকৃতিক পরিবর্তনই অপ্রত্যাবর্তক, ফলে এন্ট্রপি বাড়ছে—আমাদের প্রাপ্তব্য শক্তি হ্রাস পাচ্ছে।

16. জুল-টমসন ক্রিয়া :

প্রবাহরোধী প্রক্রিয়ায় এনথ্যালপি $H = U + PV$ স্থির থাকে, ভ্যানডারওয়ালস্ গ্যাসের ক্ষেত্রে -অবকল জুল-টমসন গুণাঙ্ক $\mu = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{1}{C_P}\left(\frac{2a}{RT} - b\right)$

$T_i = \frac{2a}{bR}$ = জুল-টমসন উৎক্রম গুণাঙ্ক।

$T > T_i$ হলে জুল-টমসন প্রক্রিয়ায় প্রসারণ হলে উষ্ণতা বেড়ে যায়।

$T < T_i$ হলে জুল-টমসন প্রক্রিয়ায় প্রসারণ হলে উষ্ণতা কমে যায়।

6.25 গাণিতিক উদাহরণ ঃ

উদাহরণ 1. স্থির চাপে হাইড্রোজেন গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ 28.674 J/mol.। স্থির আয়তনে আপেক্ষিক তাপ কত হবে ? দেওয়া আছে প্রমাণ উষ্ণতা ও চাপে হাইড্রেজেন গ্যাসের ঘনত্ব $= 0.0899$ kg/m^3, হাইড্রোজেনের আণবিক ওজন = 2·016।

সমাধান : প্রমাণ উষ্ণতায়

ঘনত্ব $\rho_0 = \frac{M}{V_0}$

$$\therefore\ V_0 = \frac{M}{P_0} = \frac{2.016 \times 10^{-3}}{0.0899} = 22{\cdot}42 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{mol.}$$

$$R = \frac{\rho_0 V_0}{T_0} = \frac{1{\cdot}01 \times 10^5 \times 22{\cdot}42 \times 10^{-3}}{273} = 8{\cdot}319\ \text{J/K mol.}$$

$C_P - C_V = R$

$\therefore\ C_V = C_P - R = (28{\cdot}674 - 8{\cdot}319)$ J/K mol $= 20{\cdot}355$ J/K mol.

উদাহরণ 2. স্থির চাপে 2 mol পরিমাণ আদর্শ গ্যাসের উষ্ণতা 30°C থেকে 35°C পর্যন্ত বৃদ্ধি করতে 293 J তাপ লাগে। স্থির আয়তনে একই পরিমাণ গ্যাসের একই পাল্লার উষ্ণতা বৃদ্ধি করতে কী পরিমাণ তাপের প্রয়োজন হবে। গ্যাস ধ্রুবক = 8·37 J/mol K।

সমাধান : স্থির চাপে ΔT পরিমাণ উষ্ণতা বৃদ্ধির জন্য প্রয়োজনীয় তাপ $\Delta Q = nC_P\Delta T$

শর্তানুসারে,

$$293 = 2 \times C_P \times 5$$

$$\therefore\ C_P = \frac{293}{10} = 29{\cdot}3 \text{ J/mol K}$$

$$C_P - C_V = R$$

$$\therefore\ C_V = C_P - R = 29{\cdot}3 - 8{\cdot}37 = 20{\cdot}93 \text{ J/mol K}$$

স্থির আয়তনে প্রয়োজনীয় তাপ

$$\Delta Q = nC_V\,\Delta T = 2 \times 20{\cdot}93 \times 5$$
$$= 209{\cdot}3 \text{ J}$$

উদাহরণ 2. স্বাভাবিক উষ্ণতা ও চাপে নির্দিষ্ট পরিমাণ বায়ুকে হঠাৎ সংনমন করে পূর্বের আয়তনের $\frac{1}{4}$ করা হল। ঐ বায়ুর উষ্ণতা কত হবে ? (বায়ুর $\gamma = 1.41$)।

সমাধান : হঠাৎ সংনমন হওয়ায় এটি একটি রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়া। এক্ষেত্রে আয়তন ও উষ্ণতার সমীকরণ

$$TV^{\gamma-1} = \text{ধ্রুবক। অথবা}$$

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$$

$$\text{ধরি } V_1 = V \qquad V_2 = \frac{V}{4}$$

$$T_1 = 273 \text{ K } T_2 = ?$$

$$\therefore\ 273\ V^{\gamma-1} = T_2\left(\frac{V}{4}\right)^{\gamma-1}$$

$$\text{বা } T_2 = 273 \times 4^{\gamma-1} = 273 \times 4^{1{\cdot}41-1} = 273 \times 4^{0{\cdot}41}$$
$$= 482 \text{ K}$$

$$\text{বা } t_2 = 209°\text{C (অন্তিম উষ্ণতা)।}$$

উদাহরণ 4. প্রমাণ উষ্ণতা ও চাপে 1 গ্রাম বায়ুকে রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় সংনমিত করে আয়তন অর্ধেক করা হল। কার্যের পরিমাণ কত ? প্রমাণ উষ্ণতা ও চাপে বায়ুর ঘনত্ব $= 1{\cdot}29 \times 10^{-4}$ gm/cc, $\gamma = 1{\cdot}41$।

সমাধান : 1 gm $= 10^{-3}$ kg

$\rho = 1{\cdot}29 \times 10^{-4} \times 10^{-3} \times 10^{6}$ kg /m^3 $= 0{\cdot}129$ kg/m^3

$$V_0 = \frac{10^{-3}}{0.129} m^3 = 7.752 \times 10^{-3} m^3$$ (1 গ্রামের আয়তন)

$$R = \frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{1.013 \times 10^5 \times 7.752 \times 10^{-3}}{273} = 2{\cdot}876 \text{ J/K gm.}$$

ধরি রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় অন্তিম উষ্ণতা T_2K_1

$T_1 = 273$ K $\qquad T_2 = ?$

$V_1 = V$(ধরি) $V_2 = \frac{V}{2}$

$\therefore \; T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$

বা $273 V^{\gamma-1} = T_2 \left(\frac{V}{2}\right)^{\gamma-1}$

$\therefore \; T_2 = 273 \times 2^{\gamma-1} = 273 \times 2^{1{\cdot}41-1} = 273 \times 2^{0{\cdot}41} = 362{\cdot}73$ K

রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় কার্য

$$W = C_V(T_1 - T_2)$$
$$R = C_P - C_V$$
$$\frac{R}{C_V} = \frac{C_P}{C_V} - \frac{C_V}{C_V} \text{ বা } \frac{R}{C_V} = \gamma - 1$$
$$\therefore \; C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$$

$$\therefore \; W = \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2) = \frac{2{\cdot}876}{1{\cdot}41 - 1}(273 - 362{\cdot}73)$$
$$= -6{\cdot}294 \times 10^2 \text{ J}$$

কার্য ঋণাত্মক অর্থাৎ গ্যাসের উপর কার্য করা হয়েছে।

উদাহরণ 5. 100°C উষ্ণতায় এক গ্রাম অণু আদর্শ গ্যাস সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় প্রসারিত হয়ে আয়তনের দ্বিগুণ হল। কৃতকার্যের পরিমাণ কত ? R = 8˙3 J/K

সমাধান : কৃতকার্য $W = \int_{v_1}^{v_2} P dV = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{v_2}{v_1}$

$$= 8{\cdot}3 \times 373 \times \ln 2 \text{ J}$$
$$= 2{\cdot}146 \times 10^3 \text{ J}$$

উদাহরণ 6. একটি মোটর গাড়ির টায়ারের মধ্যে 3 বায়ুমণ্ডলীয় চাপে এবং 27°C উষ্ণতায় বায়ু আছে। টায়ারটি হঠাৎ ফেটে গেলে উষ্ণতা কত হবে ? (γ = 1·4)

সমাধান : প্রাথমিক উষ্ণতা T_1 = 300 K

” চাপ = 3P

অন্তিম উষ্ণতা T_2 = ?

” চাপ = P

$$T_1 P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 300 \times (3)^{\frac{1-1\cdot4}{1\cdot4}}$$

$$= 219\cdot2 \text{ K}$$

$$= -53\cdot8°\text{C}$$

উদাহরণ 7. 127°C এবং 27°C উষ্ণতার মধ্যে ক্রিয়াশীল একটি কার্নো ইঞ্জিনের দক্ষতা কত ?

সমাধান : T_1 = 127 + 273 = 400 K

T_2 = 27 + 273 = 300 K

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{400} = 0.25 \text{ বা } 25\%$$

∴ দক্ষতা = 25%.

উদাহরণ 8. একটি কার্নো ইঞ্জিনে গ্রাহকের উষ্ণতার 12°C এ রক্ষিত। এর কর্ম দক্ষতা 40%। উৎসের উষ্ণতা কী পরিমাণ বৃদ্ধি করলে কর্মদক্ষতা বেড়ে 60% হবে ?

সমাধান : T_1 = উৎসের উষ্ণতা

T_2 = 12 + 273 = 285 K গ্রাহকের উষ্ণতা,

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \text{ বা } \frac{40}{100} = 1 - \frac{285}{T_1}$$

$$\text{বা } \frac{285}{T_1} = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$\therefore T_1 = \frac{285}{0\cdot6} = 475 \text{ K.}$$

ধরি উৎসের উষ্ণতা ΔT পরিমাণ বাড়ালে, দক্ষতা 60% হবে।

$$\therefore \frac{60}{100} = 1 - \frac{285}{T_1 + \Delta T} \text{ বা, } \frac{285}{T_1 + \Delta T} = 1 - 0\cdot6 = 0.4$$

$$\therefore \; T_1 + \Delta T = \frac{285}{0{\cdot}4} = 712{\cdot}5K$$

$\therefore \; \Delta T = 712{\cdot}5 - 475 = 237{\cdot}5°K$ বা $237{\cdot}5°C$

উদাহরণ 9. 27°C এ রক্ষিত একটি তাপ উৎস এবং – 73°C এ রক্ষিত একটি তাপ গ্রাহকের মধ্যে ক্রিয়াশীল একটি কার্নো ইঞ্জিন যদি একটি পূর্ণচক্রে গ্রাহকে 1260 জুল শক্তি প্রদান করে তবে সেটি প্রতি চক্রে কী পরিমাণ কার্য করে ?

সমাধান : কার্নো চক্রে $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$

$$\therefore \; \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{-73+273}{27+273} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \; Q_1 = \frac{3}{2} Q_2$$

প্রতি চক্রে কার্য $= Q_1 - Q_2 = \frac{3}{2} Q_2 - Q_2 = Q_2\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{Q_2}{2}$

$$= 300 \times \frac{1}{2} = 150 \text{ Cal} = 150 \times 4{\cdot}2 \text{ J} = 630 \text{ J.}$$

উদাহরণ 10. 10°C ও 200°C উষ্ণতার মধ্যে একটি কার্নো ইঞ্জিন ক্রিয়াশীল। তাপ-উৎসের উষ্ণতার কী পরিবর্তন করলে দক্ষতা 10% বৃদ্ধি পাবে ?

সমাধান : 10° ও 200°C উষ্ণতার মধ্যে ক্রিয়াশীল কার্নো ইঞ্জিনের দক্ষতা

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{10+273}{200+273} = 1 - \frac{283}{473} = 0{\cdot}5893$$

$$\therefore \; \eta = 58{\cdot}93\%$$

পরিবর্তিত দক্ষতা হবে $\eta' = \eta + 0{\cdot}1\eta = 58{\cdot}93 + 10 = 68{\cdot}93\% = 0{\cdot}6581$

ধরি উচ্চ উষ্ণতার আধারের পরিবর্তিত উষ্ণতা হবে T_1'

$$\therefore \; 0{\cdot}6893 = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{283}{T_1'}$$

$$\frac{283}{T_1'} = 1 - 0{\cdot}6893 = 0{\cdot}3107$$

$$\therefore \; T_1' = \frac{283}{0{\cdot}3107} = 910{\cdot}85 \text{ K}$$

$$\therefore \; \Delta T = 910.85 - 473 = 437{\cdot}85 \text{ K}$$

অতএব উষ্ণতা 437·85K বাড়াতে হবে।

উদাহরণ 11. একটি কার্নো ইঞ্জিন 100°C ও 0°C উষ্ণতার মধ্যে কার্য করে উচ্চতর উষ্ণতায় 10^4 ক্যালরি তাপ গ্রহণ করে। ইঞ্জিনটির ক্রিয়াচক্র সম্পূর্ণ হলে এর কৃতকার্যের পরিমাণ কী হবে ?

সমাধান : কার্যদক্ষতা $\eta = \dfrac{W}{Q} = 1 - \dfrac{T_2}{T_1} = 1 - \dfrac{273+0}{273+100} = 1 - \dfrac{273}{373}$

$= 0{\cdot}2681$

$\therefore\ W = 0{\cdot}2681 \times Q = 0{\cdot}2681 \times 10^4$ cal

$= 1{\cdot}13 \times 10^4$.

উদাহরণ 12. একটি কার্নো ইঞ্জিন গৃহীত তাপের $\dfrac{1}{6}$ অংশকে কার্যে রূপান্তরিত করে। গ্রাহকের উষ্ণতা 62°C কমালে যান্ত্রিক ক্ষমতা দ্বিগুণ হয়। গ্রাহক ও উৎসের উষ্ণতা নির্ণয় করুন।

সমাধান : ধরি উৎস ও গ্রাহকের উষ্ণতা যথাক্রমে T_1 ও T_2 ।

প্রথম ক্ষেত্রে, $\dfrac{W}{Q} = \dfrac{1}{6} = 1 - \dfrac{T_2}{T_1}$ বা, $\dfrac{T_2}{T_1} = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$ .... (i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $\dfrac{1}{3} = 1 - \dfrac{T_2 - 62}{T_1}$ বা, $\dfrac{T_2 - 62}{T_1} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ ... (ii)

(i) ও (ii) থেকে

$$\frac{T_2}{T_2 - 62} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$$

বা, $\dfrac{T_2}{T_2 - (T_2 - 62)} = \dfrac{5}{5-4}$

বা, $\dfrac{T_2}{62} = 5\ \therefore\ T_2 = 62 \times 5 = 310$K

এবং $T_1 = \dfrac{6}{5} \times 310 = 372$ K.

উদাহরণ 13. 100°C-এ 1 kg জলকে স্টীমে পরিণত করা হল। এন্ট্রপির পরিবর্তন কত হবে ?

সমাধান : এন্ট্রপির পরিবর্তন $dS = \dfrac{dQ}{T}$

বা $\Delta S = \dfrac{m^2}{T} = \dfrac{1000 \times 540 \times 4{\cdot}2}{373}$

$= 6080$ J/K

উদাহরণ 14. 20°C-এর 10 gm জলকে স্থির চাপে – 10°C এ বরফে পরিণত করা হল। জলের আ. তাপ 4·2 J/g.k ও বরফের আ. তাপ এর অর্ধেক এবং 0°C এ বরফের গলনের লীনতাপ 335 J/g হলে, তন্ত্রটির এন্ট্রপি পরিবর্তন কত ?

সমাধান :

(i) 20°C থেকে 0°C এ আসার জন্য এন্ট্রপি পরিবর্তন

$$\Delta S_1 = \int_{20+273}^{273} ms\frac{dT}{T} = ms \ \ln \frac{273}{293} = 10 \times 4{\cdot}2 \ \ln \frac{273}{293} = -\ 2{\cdot}969 \ \text{J/K}$$

(ii) 0°C এ জলের বরফে পরিণত হওয়ার জন্য এন্ট্রপি পরিবর্তন

$$\Delta S_2 = -\frac{mL}{T} = \frac{-10 \times 335}{273} = -\ 12{\cdot}271 \ \text{J/K}$$

(iii) বরফ 0° থেকে – 10°C এ উষ্ণতায় যাওয়ার জন্য এন্ট্রপি পরিবর্তন

$$\Delta S_3 = ms' \int_{273}^{263} \frac{dT}{T}$$

$$= ms' \ ln \ \frac{263}{273} = 10 \times 2{\cdot}1 \times ln \ \frac{263}{273} = -\ 0{\cdot}7837 \ \text{J/K}$$

মোট এন্ট্রপি পরিবর্তন

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3$$
$$= -\ (2{\cdot}969 + 12{\cdot}271 + 0{\cdot}784) = -\ 16{\cdot}024 \ \text{J/K.}$$

উদাহরণ 15. এক মোল আদর্শ গ্যাসের এন্ট্রপি T ও V এর সাপেক্ষে নির্ণয় করুন। ওর এন্ট্রপি পরিবর্তন কত হবে ?

সমাধান : এক মোল আদর্শ গ্যাসের জন্য

$$dQ = dU + dW = dU + PdV$$

আবার PV = RT

$$\therefore \ P = \frac{RT}{V}$$

$$\therefore \ dQ = C_v dT + RT\frac{dV}{V}$$

$\therefore$ এন্ট্রপি পরিবর্তন $dS = \dfrac{dQ}{T} = C_V\dfrac{dT}{T} + R\dfrac{dV}{V}$

উষ্ণতা ও আয়তন যথাক্রমে T_i, V_i থেকে T_f, V_f পর্যন্ত বৃদ্ধি হলে,

এন্ট্রপি পরিবর্তন

$$\Delta S = S_f - S_i = C_V \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} + R \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V}$$

$$= C_V \ln \frac{T_f}{T_i} + R \ln \frac{V_f}{V_i}.$$

উদাহরণ 16. বাতাসের সংকট উষ্ণতা – 140°C হলে উৎক্রম উষ্ণতা কত হবে ?

সমাধান : উৎক্রম উষ্ণতা ও সংকট উষ্ণতা যথাক্রমে T_i ও T_c হলে,

$$T_i = \frac{27}{4} T_c$$

$$\therefore\ T_i = \frac{27}{4} . (-140 + 273) = 897{\cdot}75 \text{ K}$$

$$\therefore\ t_i = 624{\cdot}75°C.$$

6.26 প্রশ্নাবলি ঃ

- **(i) বিষয়মুখী প্রশ্ন :**

1. অবস্থার কয়েকটি চলরাশি লিখুন।

2. দুটি ব্যাপ্তি নিরপেক্ষ চলরাশি লিখুন।

3. দুটি ব্যাপ্তি নির্ভর চলরাশি লিখুন।

4. তাপগতিবিদ্যার কোন্ সূত্র থেকে উষ্ণতার ধারণা পাওয়া যায় ?

5. আদর্শ গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ লিখুন।

6. একটি বাস্তব গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ লিখুন।

7. সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় কী স্থির থাকে ?

8. রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় কী স্থির থাকে ?

9. গ্যাসের অভ্যন্তরীণ শক্তি কোন কোন রাশির উপর নির্ভর করে ?

10. কার্যের রাশিমালা লিখুন।

11. সূচক চিত্রে কার্যের পরিমাণ কী ?

12. তাপগতিবিদ্যার কোন্ সূত্র থেকে মোট শক্তি সংরক্ষিত হয় বলে জানা যায় ?

13. গ্যাসের সমোষ্ণ লেখ ও রুদ্ধতাপ লেখ-এর কোন্‌টি বেশী খাড়া ?

14. রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে বাহ্যিক কার্য হয় কি ? এই কার্যের উৎস কী ?

15. কার্নো ইঞ্জিন প্রত্যাবর্তক না অপ্রত্যাবর্তক ?

16. আদর্শ গ্যাসে সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় কার্যের রাশিমালা লিখুন।
17. কার্নো ইঞ্জিনে সূচক চিত্রে মোট কার্যের পরিমাণ কী হবে ?
18. কার্নো ইঞ্জিনে দক্ষতা কখন 1 এর সমান হবে ?
19. এন্ট্রপি বাড়লে বিশৃঙ্খলা বাড়ে না কমে ?
20. সমস্ত স্বাভাবিক পরিবর্তনে এন্ট্রপি বাড়ে না কমে ?
21. কার্নো চক্রে এন্ট্রপি পরিবর্তন কত হয় ?
22. জুল-টমসন ক্রিয়ায় কী স্থির থাকে ?
23. ঘরের উষ্মতায় জুল-টমসন প্রসারনে হাইড্রোজেন গ্যাস ঠাণ্ডা হবে না উষ্ম হবে ?
24. জুল-টমসন প্রসারণে গ্যাসকে ঠাণ্ডা হতে হলে উষ্মতা উৎক্রম উষ্মতার থেকে বেশী না কম হতে হবে ?
25. বিশ্বের এন্ট্রপি প্রতিনিয়ত বাড়ছে না কমছে ?

● **(ii) সংক্ষিপ্ত উত্তরের প্রশ্ন :**

1. তাপগতিবিদ্যায় তন্ত্র ও পরিপার্শ্ব কাকে বলে ?
2. তাপগতিবিদ্যায় অবস্থার চলরাশি বলতে কী বোঝায় ?
3. তাপগতিবিদ্যার আদিসূত্রটি বিবৃত করুন।
4. তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রের তাৎপর্য কী ?
5. গ্যাসের রূদ্ধতাপ লেখচিত্রের নতি, সমোষ্ণ লেখ চিত্রের নতির থেকে বেশী হয়—প্রমাণ করুন।
6. তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র বিবৃত করুন।
7. কোনো তন্ত্রের অভ্যন্তরীণ শক্তি বলতে কী বোঝায় ? এটি কি অবস্থার অপেক্ষক ?
8. সূচক চিত্র কাকে বলে ? সূচক চিত্রে কার্যের পরিমাণ বোঝা যায় কী দিয়ে ?
9. প্রত্যাবর্তক প্রক্রিয়া কাকে বলে ? কোনো প্রক্রিয়া প্রত্যাবর্তক হতে হলে কী কী শর্ত মান্য হতে হয় ?
10. অপ্রত্যাবর্তী তাপগতীয় পরিবর্তনের দুটি উদাহরণ দিন।
11. তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রটি লিখুন।
12. কেলভিন পরম স্কেল কাকে বলে ?
13. কার্নো উপপাদ্য বিবৃত করুন।
14. ক্লসিয়াসের উপপাদ্য বিবৃত করুন।
15. এন্ট্রপি কী এবং এর ভৌত তাৎপর্য কী ?
16. কোনো তন্ত্রে প্রত্যাবর্তী রূদ্ধতাপ পরিবর্তন হলে, তার এন্ট্রপির পরিবর্তন কী হবে ?
17. প্রত্যাবর্তক ও অপ্রত্যাবর্তক প্রক্রিয়ায় এন্ট্রপির পরিবর্তন কীরূপ হয় ?
18. একটি সাইকেলের চাকার টিউবের ভালভ্ খুলে গেলে নির্গতমান বাতাসের উষ্মতা কমে যায় কেন ?
19. সমোষ্ণ ও রূদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় একই আয়তন প্রসারণে কৃতকার্যের পরিমাণ কোন্ ক্ষেত্রে বেশী হবে।
20. জুল-টমসন ক্রিয়া সম্পর্কিত উৎক্রম উষ্মতা কাকে বলে ?
21. এন্ট্রপি পরিবর্তনের সাপেক্ষে তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র বিবৃত করুন।

22. জুল-টমসন শীতলতা কী ?

23. সমোষ্ম প্রক্রিয়ায় কোনো তন্ত্রের অভ্যন্তরীন শক্তির কী পরিবর্তন হবে ?

24. গ্যাসের সমোষ্ম প্রক্রিয়ায় এন্ট্রপি পরিবর্তন হিসাব করুন।

25. কোনো তন্ত্র তাপশক্তি গ্রহণ করলে-এর অভ্যন্তরীণ শক্তির পরিবর্তন সবসময়ে হবে কি ?

● **(iii) রচনা-ধর্মী প্রশ্ন :**

1. **(a)** তাপগতীয় সাম্য কাকে বলে ?

   (b) তাপগতিবিদ্যায় অবস্থার চলরাশি বলতে কী বোঝায় ? এদের প্রকৃতি আলোচনা করুন।

2. **(a)** তাপগতিবিদ্যার আদি সূত্রটি বিবৃত করুন এবং এখান থেকে উষ্মতার ধারণা কীভাবে আসে তা আলোচনা করুন।

   (b) কোনো তাপগতীয় তন্ত্রের অভ্যন্তরীণ শক্তি বলতে কী বোঝায় ? অভ্যন্তরীণ শক্তি কি অবস্থার অপেক্ষক ? ব্যাখ্যা করুন। আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে অভ্যন্তরীণ শক্তি -আয়তন ও উষ্মতার ওপর কীভাবে নির্ভরশীল ?

3. **(a)** তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রটি বিবৃত করুন। আদর্শ গ্যাসের রূদ্ধতাপ পরিবর্তন হলে গ্যাসের আয়তন ও চাপের মধ্যে সম্পর্কের রাশিমালা নির্ধারণ করুন।

   (b) গ্যাসের সমোষ্ম প্রসারণের জন্য কৃতকার্যের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

4. **(a)** সমোষ্ম ও রূদ্ধতাপ পরিবর্তনের ভিতর পার্থক্য নির্ধারণ করুন। রূদ্ধতাপ পরিবর্তনে কোনো আদর্শ গ্যাসের চাপ ও উষ্মতার মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করুন।

   (b) দেখান যে আদর্শ গ্যাসের (P – V) চিত্রের যে কোনো বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত রূদ্ধতাপ লেখ ঐ বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত সমোষ্ম লেখ অপেক্ষা বেশী খাড়া।

5. **(a)** কোনো আদর্শ গ্যাসের দুটি আপেক্ষিক তাপের সংজ্ঞা দিন। তাদের সম্পর্ক নির্ণয় করুন।

   (b) গ্যাসের রূদ্ধতাপ পরিবর্তনে কৃতকার্যের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

6. **(a)** তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রটি লিখুন।

   (b) (P–V) চিত্র সহযোগে কার্নো ইঞ্জিনের কার্যপ্রণালী বর্ণনা করুন। এই ইঞ্জিনের কর্ম দক্ষতা নির্ণয় করুন।

7. কার্নো ইঞ্জিনের দক্ষতার ধারণা থেকে কেলভিন পরমস্কেল কীভাবে পাওয়া যায় ? পরমস্কেল বলে কেন ? বাস্তবে এই স্কেল পাওয়া যায় কি ?

8. **(a)** ক্লসিয়াসের উপপাদ্যটি বিবৃত করুন। এখান থেকে এন্ট্রপি পরিবর্তনের ধারণা দিন।

   (b) কার্নো চক্রে এন্ট্রপি পরিবর্তন কত হয় ?

   (c) তাপ পরিবহনে এন্ট্রপি বৃদ্ধি গণনা করুন।

9. **(a)** এন্ট্রপির ভৌত ধারণা দিন।

   (b) এন্ট্রপি সাপেক্ষে ক্লসিয়াসের তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র বিবৃত করুন।

10. **(a)** দেখান যে জুল-টমসনের প্রবাহরোধী পরীক্ষায় এনথ্যালপি স্থির থাকে।

(b) ভ্যানডারওয়াল্‌স গ্যাসের বেলায় উৎক্রম উষ্ণতার রাশিমালাটি লিখুন।

(c) সাধারণ তাপমাত্রায় হাইড্রোজেন ও হিলিয়াম গ্যাস জুল-টমসন প্রসারণে উষ্ণ হয় কেন ?

● **(iv) গাণিতিক প্রশ্ন :**

1. 15°C এ কিছু পরিমাণ শুষ্ক বায়ুকে রুদ্ধতাপে সংকুচিত করে আয়তন একচতুর্থাংশ করা হল। অন্তিম উষ্ণতা কত হবে ? দেওয়া আছে $\gamma = 1{\cdot}4$।

2. এক বায়ুমণ্ডল চাপে 1 gm জল ফুটিয়ে 1671 cc স্টীমে পরিণত করা হল। বাষ্পীভবনের লীনতাপ 2268 J/gm। বাহ্যিক কার্য ও অভ্যন্তরীণ শক্তি বৃদ্ধির পরিমাণ কত হবে ?

3. 27°C উষ্ণতায় 20 gm হাইড্রোজেন গ্যাস সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় সংকোচন করে আয়তনকে একচতুর্থাংশ করা হল। কার্যের পরিমাণ কত ? $R = 8{\cdot}31$ J/mol.K।

4. এক গ্রাম অণু পরিমাণ কোনো গ্যাসের প্রাথমিক উষ্ণতা ও চাপ যথাক্রমে 273 K ও 1 বায়ুমণ্ডল। সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় এর আয়তন দ্বিগুণ করা হলে প্রসারণের জন্য কী পরিমাণ তাপ গ্যাসে প্রবেশ করে ? দেওয়া আছে $R = 8{\cdot}3$ J/gm/mole.K।

5. প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় 1 গ্রাম বায়ুকে রূদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় সংনমিত করে অর্ধেক আয়তনে আনা হল। কৃতকার্যের পরিমাণ কত ? দেওয়া আছে প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় বায়ুর ঘনত্ব = 0·00129 gm/cc ; $\gamma = 1{\cdot}4$ এবং $(2)^{0\cdot4} = 1{\cdot}319$।

6. 27°C উষ্ণতায় কোনো আদর্শ গ্যাসকে হঠাৎ সংনমিত করে ওর চাপ প্রাথমিক চাপের তুলনায় 27গুণ করা হল। $\gamma = 1{\cdot}5$ হলে উষ্ণতা বৃদ্ধি কত হবে ?

7. 100°C ও 10°C এর মধ্যে ক্রিয়াশীল একটি কার্নো ইঞ্জিনে একটি চক্রে কার্যের পরিমাণ 1200 Joule হলে উষ্ণতায় কী পরিমাণ তাপ গৃহীত হয়েছিল ?

8. একটি কার্নো ইঞ্জিনের তাপ গ্রাহকের উষ্ণতা 7°C এবং এর কর্মদক্ষতা 40%। ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা 50% বৃদ্ধি করতে হলে উচ্চ উষ্ণতার আধারের উষ্ণতা কত বৃদ্ধি করতে হবে ?

9. 27°C ও 157°C উষ্ণতাদ্বয়ের মধ্যে ক্রিয়াশীল একটি কার্নো ইঞ্জিনে 10,000 cal তাপ সরবরাহ করা হল। ইঞ্জিনটি কত পরিমাণ উপযোগী কার্য করতে সমর্থ হবে ?

10. 0°C-এ থাকা 2gm জলকে এর স্ফুটনাংক 100°C-এ উত্তপ্ত করলে এন্ট্রপি বৃদ্ধি কত হবে ? জলের আ. তা. = 4·2 J/gm.K।

11. উষ্ণতা স্থির অবস্থায় 20gm বরফ গলে জলে পরিণত হল। এন্ট্রপি পরিবর্তন কত হবে ? বরফ গলনের লীনতাপ = 336 J/gm।

12. 0°C উষ্ণতায় 1 gm জলকে 100°C পর্যন্ত উত্তপ্ত হল ; এবং এই উষ্ণতায় একে বাষ্পীভূত করলে এন্ট্রপি পরিবর্তন কত হবে। জলের আ. তা. = 4·25 J/gm, বাষ্পীভবনের লীনতাপ = 2100 J/K।

13. – 10°C এর 1 gm বরফকে 100° স্টীমে পরিণত করা হল। এন্ট্রপি বৃদ্ধির পরিমাণ কত ? রবফের আ. তা. = 201 J/gm, জলের আ. তা. = 4·2 J/gm বরফ গলনের লীন তাপ = 336 J/gm, স্টীমের লীনতাপ = 2268 J/gm।

14. 0°C এর 50 gm জল 80°C এর সমভর জলের সঙ্গে মেশানো হলে এন্ট্রপি বৃদ্ধি কত হবে ? জলের আ. তা. = 4·2 J/gm.

15. 25Ω রোধের মধ্য দিয়ে 1s ধরে 10A তড়িৎপ্রবাহ পাঠানো হল। কিন্তু উষ্মতা 27°C এ স্থির ছিল।

(a) রোধের এন্ট্রপি পরিবর্তন কত ?

(b) বিশ্বের এন্ট্রপি পরিবর্তন কত ?

6.27 গাণিতিক প্রশ্নের উত্তর ঃ

1. উঃ 2·88.44°C

[ইঙ্গিত : $T_1V_1^{\gamma-1}$ $T_2V_2^{\gamma-1}$; T_1 = 273 + 15 = 288 K. γ = 1.4

∴ T_2 = ? t_2 = (T_2 − 273)°C]

2. উঃ 169·3 J ; 2098·7 J

[ইঙ্গিত : $\Delta W = \int_{v_1}^{v_2} P\,dV = P(v_2 - v_1) = 1{\cdot}014 \times 10^5 \times 1670 \times 10^{-3} = 169{\cdot}3$ J

$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = 540 \times 4{\cdot}2 - 169{\cdot}3 = 2098{\cdot}7$ J]

3. উঃ $-\ 3{\cdot}46 \times 10^4$ J

[ইঙ্গিত : $\Delta W = \int_{v_1}^{v_2} P\,dV = nRT \int_{v_1}^{v_2} \frac{dV}{V} = nRT\ln\frac{V_2}{V_1}$

$= \frac{20}{2} \times 8{\cdot}31 \times (273 + 17)\ \ln.\ \frac{1}{4} = -\ 3{\cdot}46 \times 10^4$ J]

4. উঃ 1570·6 J

5. উঃ − 62·6 J

6. উঃ 600°C

7. উঃ $4{\cdot}973 \times 10^3$J

8. উঃ 233·33°C

[ইঙ্গিত : $0{\cdot}4 = 1 - \frac{273+7}{T_1} \rightarrow T_1 = 466{\cdot}67$ K

η, 50% বৃদ্ধি হলে নতুন η হবে 0·6

∴ $0{\cdot}6 = 1 - \frac{280}{T_1}$; $T_1' = 700$ K]

9. উঃ $1{\cdot}27 \times 10^4$ J

10. উঃ $2{\cdot}62$ J/K

11. উঃ $24{\cdot}6$ J/K

12. উঃ $6{\cdot}941$ J/K

13. উঃ $8{\cdot}7$ J/K

14. উঃ $3{\cdot}48$ J/K

15. উঃ 0 ; $8{\cdot}33$ J/K

6.28 সহায়ক গ্রন্থাবলি ঃ

1. Heat and Thermodynamics — Zemansky and Dittman.
2. A Treatise on Heat — Saha and Srivastava.
3. তাপগতিবিদ্যা — অশোক ঘোষ।
4. Thermal Physics — Garg, Bansal, Ghosh.
5. Study Material : Elective Physics Honours EPH 05 (Heat and Thermodynamics) Netaji Subhash Open University.

——

একক 7 ❑ তাপের বিকিরণ ও পরিবহণ (Radiation and Conduction of Heat)

গঠন

7.1 প্রস্তাবনা ঃ

উষ্ণতার পার্থক্য থাকলে উষ্ণত্তর বস্তু থেকে শীতলতর বস্তুর দিকে অথবা একই বস্তুর মধ্যে উষ্ণতর অংশ থেকে শীতলতর অংশে তাপশক্তি সঞ্চালিত হয়। উষ্ণতার পার্থক্য অবসান না হওয়া পর্যন্ত এই সঞ্চালন চলতে থাকে। তাপ সঞ্চালনের পদ্ধতি তিনটি : (i) বিকিরণ (radiation), (ii) পরিবহণ (conduction), (iii) পরিচলন (convection)। এ বিষয়ে মাধ্যমিক ও উচ্চমাধ্যমিক পর্যায়ে আপনারা জেনেছেন।

এই এককে আমরা বিকিরণ ও পরিবহন পদ্ধতির সঙ্গে পরিচিত হব।

উদ্দেশ্য : এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন—

- বিকীর্ণ তাপের প্রকৃতি।
- কৃষ্ণবস্তু ও শুভ্রবস্তু কাকে বলে।
- প্রিভোস্টের তাপ বিনিময় তত্ত্ব।
- কির্কফ-এর সূত্র।
- ফেরির কৃষ্ণবস্তু।
- কির্কফ-এর সূত্রের সাহায্যে ফ্রাউনহফার রেখার ব্যাখ্যা।
- পূর্ণ বিকিরণে স্টেকান বোলৎস্‌মান সূত্র ও ঐ নিউটনের শীতলন সূত্র।
- প্ল্যাঙ্কের বিকিরণ সূত্র।
- সৌর ধ্রুবক ও সূর্যের উষ্ণতা।
- ফেরির পূর্ণ বিকিরণ পাইরোমিটার এবং আলোক পাইরোমিটার।
- তাপ পরিবহন ও তাপ পরিবাহিতা।
- তাপের ঋজুরেখ প্রবাহ ঃ একমাত্রিক ফুরিয়ার সমীকরণ।
- ইন্‌জেন্‌হজের পরীক্ষা ঃ বিভিন্ন পদার্থের তাপ পরিবাহিতার তুলনা।
- (i) বেলনাকার পরীক্ষা ঃ (ii) গোলকাকার খোলক এবং (iii) চাকতি—ব্যবহার করে কুপরিবাহী পদার্থের তাপ পরিবাহিতা পরিমাপ।

7.2 বিকিরণ ঃ

তাপ সঞ্চালনের তিনটি পদ্ধতির মধ্যে পরিবহন ও পরিচলন পদ্ধতিতে জড় মাধ্যমের প্রয়োজন হয়। মাধ্যমের উষ্ণতারও পরিবর্তন হয়। আর বিকিরণ পদ্ধতিতে তাপ সঞ্চালনের কোনো জড় মাধ্যমের প্রয়োজন হয় না। তাই বলা যায় শূন্য মাধ্যমে বা মাধ্যম থাকলে তার সাহায্য ছাড়া একস্থান থেকে অন্যস্থানে তাপ সঞ্চালনের পদ্ধতি হল বিকিরণ।

বিকিরণ বলতে যেমন তাপ সঞ্চালনের একটি প্রক্রিয়া বা প্রণালী বোঝায়, তেমনি যে শক্তি কোনো পদার্থ থেকে নির্গত হয়ে বিকিরণ প্রক্রিয়ায় সঞ্চালিত হয় তাকেও বিকিরণ বলা হয়। যে পদার্থ তাপ বিকিরণ করে বা শক্তি নির্গত করে তাকে তাপ বিকিরক (heat radiator) বা শুধু বিকিরক বলা হয়। বিকীর্ণ শক্তি কোনো বস্তুর উপর আপতিত হলে সাধারণভাবে বস্তুটি যদি তাপ শোষণ করে তবে বস্তুটি উত্তপ্ত হয়ে ওঠে। বস্তুটির উত্তপ্ত হয়ে ওঠার প্রক্রিয়াকে কাজে লাগিয়ে বিকিরণ শক্তি পরিমাপের বিভিন্ন যন্ত্রাদি উদ্ভাবিত হয়েছে। বিভিন্ন পরীক্ষার মাধ্যমে প্রমাণিত হয়েছে তাপ সঞ্জাত বিকিরণের প্রকৃতি তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ এবং আলোর অনুরূপ।

উষ্ণতার জন্য যে বিকিরণ হয় তাকে তাপীয় বিকিরণ (thermal radiation) বলা হয়। এছাড়া গ্যাসের মধ্যে উচ্চ বিভবে তড়িৎ প্রবাহ পাঠিয়ে গ্যাসকে উদ্দীপিত করে বিকিরণ পাওয়া যায়। এই বিকিরণ তাপীয় বিকিরণ থেকে পৃথক। সেই বিষয়টি আধুনিক পদার্থবিদ্যায় বিশেষ করে পরমাণু সংক্রান্ত বিষয়ে আলোচনা করা হয়। আমরা এখানে তাপীয় বিকিরণের সঙ্গেই পরিচিত হব। তাপীয় বিকিরণের বর্ণালী পর্যবেক্ষণ ও তার বিশ্লেষণ এবং বর্ণালীর প্রকৃতি ইত্যাদি সম্পর্কে গবেষণা করতে গিয়ে বর্ণালীবীক্ষণ বিদ্যা (Spectroscopy) ও জ্যোতি—পদার্থবিদ্যা (Astrophysics) বিষয়ে যেমন অনেক অগ্রগতি হয়েছে তেমনি বিকিরণ কণিকার (radiation quanta) অস্তিত্বের ধারণা কোয়ান্টাম তত্ত্বের (Quantum theory) জন্ম দিয়েছে। বলা যায় আধুনিক পদার্থবিদ্যার সূত্রপাতে বিকিরণ নিয়ে গবেষণা এক অন্যতম ভূমিকা পালন করেছে।

7.3 বিকীর্ণ তাপের প্রকৃতি (Nature of Radiant Heat) ঃ

তাপ গ্রহণে বস্তুর আয়তন বৃদ্ধি, রোধ বৃদ্ধি, তাপীয় তড়িৎ উৎপাদন ইত্যাদিকে কাজে লাগিয়ে, তাপীয় বিকিরণ পরিমাপ করার জন্য বিভিন্ন যন্ত্রাদি প্রস্তুত করা হয়। এদের মধ্যে উল্লেখযোগ্য—ভেদদর্শী বায়ু থার্মোমিটার (Differential Air thermometer), থার্মোপাইল (Thermopile), বোলোমিটার (Bolometer) রেডিও মাইক্রোমিটার (Radiomicrometer) ইত্যাদি।

এই সব যন্ত্রাদির সাহায্যে পরীক্ষায় দেখা যায় বিকীর্ণ তাপও আলো সমধর্মী। ধর্মগুলি নিম্নরূপ ঃ

(i) বিকীর্ণ তাপ সরল রেখায় চলে।

(ii) বিকীর্ণ তাপ শূন্যস্থানে আলোর সমবেগে চলে।

(iii) বিকীর্ণ তাপের তীব্রতা (intersity) দূরত্বের বর্গের ব্যাস্তানুপাত সূত্র মেনে চলে।

(iv) বিকীর্ণ তাপ আলোকের প্রতিফলন ও প্রতিসরণের সূত্র মেনে চলে।

অন্যান্য ধর্ম : আলোর অন্যান্য ধর্ম যেমন ব্যতিচার (interference), অপবর্তন (diffraction), সমবর্তন (polarisation), আলোক—তড়িৎক্রিয়া (photo-electric effect), ফটোগ্রাফিক ফিল্মের উপর ক্রিয়া (photographic action), বিক্ষেপণ (scattering) ইত্যাদি বিকীর্ণ তাপের ক্ষেত্রেও দেখা যায়। বিশেষ ধরণের ফটোগ্রাফিক প্লেট ব্যবহার করে সম্পূর্ণ অন্ধকার ঘরে একটি উত্তপ্ত বস্তুর ছবি তোলা যায়। অতএব বিকীর্ণ তাপ হলো আলোর মতই তড়িৎচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ।

7.4 তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গের শ্রেণী বিভাগ (Classification of Electromagnetic Waves) ঃ

বিকীর্ণ তাপও আলো সমধর্মী। বিকীর্ণ তাপ আলোর মত আমাদের চোখে দেখার অনুভূতি জাগায় না। এছাড়া অন্য সব বিষয়ে বিকীর্ণ তাপ আলোর মত আচরণ করে। আলোর মত বিকীর্ণ তাপও এক ধরনের তির্যক তরঙ্গ। এই ধরনের তরঙ্গকে তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ (electromagnetic wave) বলে। বিকীর্ণ তাপ ও অলোর মূল পার্থক্য হল বিকীর্ণ তাপের তরঙ্গদৈর্ঘ্য দৃষ্টিগ্রাহ্য আলোর তরঙ্গদৈর্ঘ্য অপেক্ষা বেশী বা বিকীর্ণ তাপের কম্পাঙ্ক দৃষ্টিগ্রাহ্য আলোর কম্পাঙ্ক অপেক্ষা কম। দৃষ্টিগ্রাহ্য সূর্যরশ্মিকে কাচের প্রিজমের মধ্য দিয়ে পাঠালে যে বর্ণালী দেখতে পাওয়া যায় তা বেগুনী থেকে লাল রশ্মি পর্যন্ত বিস্তৃত। এর তরঙ্গদৈর্ঘ্যের পাল্লা প্রায় 4×10^{-7}m থেকে 8×10^{-7}m পর্যন্ত। সূর্যরশ্মি থেকে প্রাপ্ত এই বর্ণালীর বাইরেও বিকিরণ আছে যা খালি চোখে ধরা পড়ে না। বিকীর্ণ তাপ পরিমাপের যন্ত্রে এই পাল্লার দুদিকেই বিকিরণ ধরা পড়ে। লাল আলোর তরঙ্গদৈর্ঘ্যের থেকে বেশী তরঙ্গদৈর্ঘ্যের (বা কম কম্পাঙ্কের) বিকিরণকে অবলোহিত (infra-red) বিকিরণ বলে। তেমনি বেগুনী আলোর থেকে কম তরঙ্গদৈর্ঘ্যের (বা বেশী কম্পাঙ্কের) বিকিরণকে বলা হয় অতি বেগুনী (ultra-violet) বিকিরণ। তরঙ্গদৈর্ঘ্যের পাল্লা অনুযায়ী সমস্ত বিকিরণকে বিভিন্ন নামে চিহ্নিত করা হয়। সব মিলিয়ে তড়িচ্চুম্বকীয় বর্ণালীর তরঙ্গ দৈর্ঘ্য $\lambda = 0$ থেকে $\lambda = \infty$ পর্যন্ত বিস্তৃত। এর খুব ক্ষুদ্র অংশই দৃষ্টিগ্রাহ্য আলো। নিম্নের সারণিতে তরঙ্গদৈর্ঘ্য অনুসারে শ্রেণী বিভাগ দেখানো হল। এই শ্রেণী বিভাগ খুব নির্দিষ্ট নয়। মোটামুটিভাবে এদের এভাবে চিহ্নিত করা হয়।

সারণি—7.1 : তড়িচ্চুম্বকীয় বর্ণালী (Eleetromagnetic spectrum)

তরঙ্গ দৈর্ঘ্য λ (wavelength m)	**নামকরণ (nomenclature)**	**উৎস (source of generation)**
10^{-13}–10^{-12}	গামা রশ্মি (γ-rays)	তেজস্ক্রিয় পদার্থ
10^{-12}–10^{-9}	এক্সরশ্মি (x-rays)	উচ্চ পারমানবিক সংখ্যা বিশিষ্ট ধাতুর উপর উচ্চ শক্তির ইলেকট্রনের আপতন

10^{-9}–10^{-7}	অতি বেগুনী রশ্মি (ultra-violet rays)	গ্যাসের মধ্যে তড়িৎমোচন এবং
4×10^{-7}–8×10^{-7}	দৃশ্যমান আলো (visible light)	ভাস্বর কঠিন পদার্থ (Incandescent solid)
10^{-6}–10^{-4}	অবলোহিত রশ্মি (Intra-rad rays)	
10^{-4}–10^{-1}	মাইক্রোওয়েভ (Micro waves)	ম্যাগনেট্রন, ক্লাইস্ট্রন (Magnetron, Klystron)
1 to 10^{3}	বেতার তরঙ্গ (Radio waves)	ইলেকট্রনীয় স্পন্দক (Electromic oscillater)

7.5 তাপের বিকিরণ, শোষণ, প্রতিফলন, প্রতিসরণ; কৃষ্ণবস্তু ও শুভ্রবস্তু (Emission, Absorption, Reflection, Refraction of Heat; Black Body and White Body) ঃ

কোনো বস্তু থেকে তাপ বিকিরণের হার বস্তুটির (i) উষ্ণতা ও (ii) পৃষ্ঠতলের প্রকৃতির ওপর নির্ভর করে।

(i) উষ্ণতা কম হলে বিকিরণের হার কম ও উষ্ণতা বাড়লে বিকিরণের হার বেশী হয়।

(ii) একই উষ্ণতায় কালো ও অমসৃণ তল থেকে সবচেয়ে তাড়াতাড়ি এবং সাদা ও মসৃণ তল থেকে সবচেয়ে ধীরে ধীরে তাপ বিকিরণ হয়। সমান উষ্ণতায় একটি কালো ও সাদা বস্তু রেখে দিলে পরিপার্শ্ব কম উষ্ণতায় থাকলে কালো বস্তুটি দ্রুত হারে তাপ বিকিরণ করবে।

পরীক্ষায় দেখা গেছে কম উষ্ণতায় কোনো বস্তু থেকে প্রধানত দীর্ঘ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিকিরণ নির্গত হয়। উষ্ণতা বাড়াতে থাকলে বেশী বেশী করে ক্ষুদ্রতর তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিকিরণ নির্গত হতে থাকে। কোনো বস্তুকে উত্তপ্ত করলে সেটি প্রথমে কেবল তাপ রশ্মি বা অবলোহিত রশ্মি বিকিরণ করে; সে সময়ে ঐ বস্তু থেকে দৃষ্টিগ্রাহ্য আলো নির্গত হয় না। ক্রমশ উষ্ণতা বাড়াতে থাকলে একসময় বস্তুটি দীপ্তিমান হয়ে ওঠে; এই অবস্থায় প্রথমে লোহিততপ্ত (red hot) ও পরে আরো উত্তপ্ত হলে শ্বেততপ্ত (white hot) হয়ে যায়। অর্থাৎ প্রথমে বস্তুটি থেকে লাল আলো ও পরে আরো উত্তপ্ত অবস্থায় সাদা আলো নির্গত হয়। উষ্ণতা আরো বাড়ালে বস্তুটি নীলতপ্ত (blue hot) হয়ে যায় এই কারণে সিরিয়াস (Sirius) এবং ভেগা (vega) নক্ষত্র দুটিকে নীল দেখায়।

কোনো নির্দিষ্ট তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিকীর্ণ তাপ কোনো বস্তুর উপর পড়লে—

(i) কিছু অংশ শোষিত হয়

(ii) কিছু অংশ প্রতিফলিত হয়

(iii) বাকি অংশ প্রতিসৃত হয়।

এই অংশগুলির পরিমাণ বস্তুর ধর্ম ও পৃষ্ঠতলের প্রকৃতির ওপর নির্ভর করে। এগুলি আবার বিকিরণের তরঙ্গদৈর্ঘ্যের ওপরেও নির্ভর করে। নির্দিষ্ট তরঙ্গদৈর্ঘ্যের (λ) ক্ষেত্রে আপতিত বিকিরণের a_λ অংশ শোষিত, r_λ অংশ প্রতিফলিত এবং t_λ অংশ অতিক্রান্ত হলে

$$r_\lambda + a_\lambda + t_\lambda = 1 \quad \text{..........................} \quad (7{\cdot}1)$$

● **আদর্শ কৃষ্ণবস্তু (Perfectly black body) :** যে বস্তুর ক্ষেত্রে $a_\lambda = 1$ এবং $r_\lambda = t_\lambda = 0$, তাকে আদর্শ কৃষ্ণবস্তু বলে।

অর্থাৎ যে বস্তু আপতিত বিকিরণের সবটুকুই (সমস্ত তরঙ্গদৈর্ঘ্যের) শোষণ করে নেয়, কোনো অংশকে প্রতিফলিত বা অতিক্রান্ত করে না তাকে আদর্শ কৃষ্ণবস্তু বলে।

ভুসা কালি (lamp black) এবং প্লাটিনাম ভুসা (platinum black) আদর্শ কৃষ্ণবস্তুর খুব কাছাকাছি। এরা দৃশ্যগ্রাহ্য আলোর যথাক্রমে 96% এবং 98% শোষণ করে। প্রকৃতপক্ষে কোনো বস্তুই আদর্শ কৃষ্ণবস্তু হয় না।

● **আদর্শ শুভ্রবস্তু (Perfectly white body) :**

যে বস্তুর ক্ষেত্রে $r_\lambda = 1$ এবং $a_\lambda = t_\lambda = 0$, তাকে আদর্শ শুভ্রবস্তু বলে।

অর্থাৎ যে বস্তু আপতিত বিকিরণের সবটুকুই প্রতিফলিত করে, কোনো অংশকে শোষণ বা অতিক্রান্ত করে না তাকে আদর্শ শুভ্রবস্তু বলে।

এই ব্যাপ্ত প্রতিফলন (diffused reflection) হলে বস্তু প্রায় শুভ্র হতে পারে। আদর্শ কৃষ্ণবস্তুর মতো আদর্শ শুভ্রবস্তুও বাস্তবে পাওয়া যায় না। সাদা কে অনেকাংশে শুভ্র বলা যায়।

7.6 তাপভেদ্য ও তাপ-অভেদ্য বস্তু; সবুজায়ন কক্ষ (Diathermanous and Athermanous Substances; Green House) ঃ

● **তাপভেদ্য ও তাপ-অভেদ্য বস্তু :** কোনো কোনো বস্তুর মধ্য দিয়ে আপতিত বিকীর্ণ তাপ প্রায় সমস্ত অংশটাই সঞ্চালিত হয়ে যায়। এই সব বস্তুকে তাপভেদ্য বা বিকীর্ণ তাপ সাপেক্ষে স্বচ্ছ বলা হয়, কোয়ার্জ, NaCl, KCl ইত্যাদি তাপভেদ্য বস্তুর উদাহরণ। অপরপক্ষে কোনো কোনো বস্তুর মধ্য দিয়ে আপতিত বিকীর্ণ তাপের প্রায় কোনো অংশই অতিক্রান্ত হয় না। এদের তাপ-অভেদ্য বা বিকীর্ণ তাপ সাপেক্ষে অস্বচ্ছ বস্তু বলা হয়।

দৃষ্টিগ্রাহ্য আলোর বেলায় বস্তুর মধ্য দিয়ে যদি সমস্ত আলো উত্তরিত হয় তাদের স্বচ্ছ (transparent) এবং কোনো অংশই উত্তরিত না হলে তাদের অস্বচ্ছ (opaque) পদার্থ বলা হয়। কোনো বিশেষ বর্ণের আলো প্রতিসৃত

হলে সেই পদার্থ রঙিন হয়। কোনো বস্তু একটি দৃষ্টিগ্রাহ্য আলোর বেলায় স্বচ্ছ হলেও অবলোহিত রশ্মির বেলায় অস্বচ্ছ হতে পারে।

● **সবুজায়ন কক্ষ (green house) :** কাচের ভিতর দিয়ে ছোটো তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিকিরণ (তাপ তরঙ্গ) প্রতিসৃত হতে পারে কিন্তু বড় তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিকীর্ণ তাপ যেতে পারে না। অর্থাৎ কাচ ছোট তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিকীর্ণ তাপের ক্ষেত্রে স্বচ্ছ কিন্তু বড় তরঙ্গদৈর্ঘ্যে অস্বচ্ছ। কাচের এই বিশেষ ধর্মকে কাজে লাগিয়ে শীত প্রধান দেশে গাছপালা ইত্যাদিকে বেশী ঠান্ডা থেকে বাঁচিয়ে রাখার জন্য কাচের ঘর তৈরী করা হয়। একে সবুজায়ন কক্ষ বলা হয়। সূর্য থেকে আগত ক্ষুদ্র তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিকিরণ কাচের তৈরী ঘরে কাচের মধ্য দিয়ে প্রবেশ করে। ঐ তাপে উত্তপ্ত হওয়ার পর ঐ ঘরের মধ্যে থাকা গাছপালা ইত্যাদি যখন তাপ বিকিরণ করে তখন তাপমাত্রা কম বলে ঐ বিকিরণের তরঙ্গদৈর্ঘ্যে বেশী হয়। এগুলি কাচ ভেদ করে বাইরে আসতে পারে না। ঘরের মধ্যে আবদ্ধ হয়ে পড়ে। তখন ঘরের উষ্ণতা বৃদ্ধি পায় এবং গাছপালা শীতের হাত থেকে রক্ষা পায়।

7.7 প্রিভোস্টের তাপ বিনিময় তত্ত্ব এবং বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা (Prevost's Theory of Heat Exchange and Emissive Power of a Body) ঃ

প্রিভোস্ট-এর তত্ত্ব অনুসারে : **'সকল বস্তু সকল উষ্ণতায় (পরম শূন্যের চেয়ে বেশী) তাপ বিকিরণ করে, বিকিরণের পরিমাণ বস্তুর উষ্ণতা বৃদ্ধির সঙ্গে বৃদ্ধি পায়। পারিপার্শ্বিক বস্তুর উপস্থিতির উপর বস্তুর তাপ বিকিরণের পরিমাণের কোনো পরিবর্তন হয় না। বস্তুর উষ্ণতা বৃদ্ধি বা হ্রাস বস্তুর সঙ্গে পরিপার্শ্বের মধ্যে বিকিরণের বিনিময়ের উপর নির্ভর করে।'**

বরফ বা উনুন দুটিই তাদের উষ্ণতা অনুযায়ী তাপ বিকিরণ করে। স্বভাবতই বরফের তুলনায় উনুনের বিকিরণ অনেক বেশী। বরফের পাশে দাঁড়ালে আমাদের শরীর যে তাপ বিকিরণ করে তা বরফের বিকিরণের তুলনায় বেশী। ফলে শরীর যত তাপ দিয়ে দেয়, তুলনায় বরফ থেকে পায় কম। তাই বরফকে ঠান্ডা মনে হয়। আবার উনুন আমাদের শরীরের বিকিরণের তুলনায় বেশী বিকিরণ দেয়। তাই উনুনের পাশে দাঁড়ালে গরম অনুভব করি। কোনো বস্তু ঠান্ডা কি গরম তা নির্ভর করে পরিপার্শ্বের সঙ্গে কী পরিমাণ বিকিরণের বিনিময় হচ্ছে তার উপর। যে বস্তু তাপ দেয় বেশী ও নেয় কম সেটি হল উষ্ণ বস্তু; বিপরীত ক্রমে যে বস্তু তাপ নেয় বেশী ও দেয় কম তা হল শীতল বস্তু। যখন দুটি বস্তু সমান উষ্ণতায় আছে তখনও দুটি বস্তুই বিকিরণ বিনিময় করছে এবং এর পরিমাণ সমান।

● **বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা** : লেসলির পরীক্ষা থেকে জানা যায় কালো বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা সবথেকে বেশী ও চকচকে বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা সব থেকে কম। পরীক্ষায় আরো জানা যায় বিকিরণ ক্ষমতা ও শোষণ ক্ষমতা একই সঙ্গে পরিবর্তিত হয়। দেখা যায় : **'ভালো শোষকই ভালো বিকিরক ও খারাপ শোষকই খারাপ বিকিরক' (good absorbers are good radiators and poor absorbers are poor radiators),** পরে কির্কফ তাপ গতিবিদ্যার প্রয়োগে এর সত্যতা গাণিতিক পদ্ধতিতে প্রমাণ করেন।

7.8 কয়েকটি প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা (Some Important Definitions) ঃ

কোনো বস্তুকে উত্তপ্ত করলে এর তল থেকে চারদিকে সমস্ত তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিকিরণ ছড়িয়ে পড়ে। বিকিরণের প্রকৃতি বস্তুর ভৌত অবস্থার উপর নির্ভর করে।

(i) **বিকিরণ ক্ষমতা (Emissive power) e_λ : কোনো বস্তুর একক ক্ষেত্রফল থেকে প্রতি সেকেণ্ডে লম্বভাবে একক ঘনকোণে λ ও $\lambda + d_\lambda$ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের মধ্যে যে শক্তি বিকিরণ করে তাকে ঐ তরঙ্গদৈর্ঘ্য পাল্লার মধ্যে বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা (e_λ) বলে।**

যদি কোনো বস্তু dA ক্ষেত্র থেকে dt সেকেণ্ডে লম্বভাবে $d\omega$ ঘনকোণে λ ও $\lambda + d_\lambda$ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের মধ্যে $u_\lambda\ d_\lambda$ শক্তি বিকিরণ করে, তা হলে

$$e_\lambda d_\lambda = \frac{u_\lambda d_\lambda}{dt\, d\omega\, d\mathrm{A}} \quad \text{..........................} \quad (7\cdot2)$$

(ii) শোষণ ক্ষমতা (Absorptive power) a_λ : কোনো বস্তুর উপর নির্দিষ্ট তরঙ্গদৈর্ঘ্যের আপতিত বিকিরণের যত অংশ শোষিত হয় তাকে ঐ তরঙ্গদৈর্ঘ্যে বস্তুর শোষণ ক্ষমতা বলে।

যদি একক সময়ে ও একক ক্ষেত্রফলে λ ও $\lambda + d_\lambda$ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের মধ্যে $d\mathrm{Q}_\lambda$ পরিমাণ বিকিরণ আপতিত হয় ও শোষিত অংশ $a_\lambda\ d\mathrm{Q}_\lambda$ হয়, তবে a_λ হল শোষণ ক্ষমতা।

কৃষ্ণবস্তুর ক্ষেত্রে সমস্ত তরঙ্গদৈর্ঘ্যের জন্য $a_\lambda = 1$, অন্যান্য বস্তুর ক্ষেত্রে a_λ নির্ভর করে বস্তুর প্রকৃতির উপর।

7.9 কির্কফ-এর সূত্র (Kirchhoff's Law) ঃ

কোনো নির্দিষ্ট উষ্ণতায় নির্দিষ্ট তরঙ্গদৈর্ঘ্যের ক্ষেত্রে কোনো বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা ও শোষণ ক্ষমতার অনুপাত ধ্রুবক হয় এবং এই অনুপাত ঐ তাপমাত্রার আদর্শ কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণ ক্ষমতার সমান হয়।

যদি কোনো উষ্ণতায় কোনো বস্তুর λ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিকিরণের জন্য বিকিরণ ক্ষমতা e_λ ও শোষণ ক্ষমতা a_λ হয় এবং ঐ উষ্ণতায়ও ঐ তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের ক্ষেত্রে আদর্শ কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা E_λ হয় তবে,

$$\frac{e_\lambda}{a_\lambda} = \mathrm{E}_\lambda = \text{ ধ্রুবক।}$$

অর্থাৎ বিকিরণ ক্ষমতা যতগুণ বেশী শোষণ ক্ষমতাও ততগুণ বেশী। কোনো বস্তুর উষ্ণতার জন্য যে বিকিরণ পাওয়া যায় সেখানেই এই সূত্র প্রযোজ্য হয়। মোক্ষণ নলে তড়িৎপ্রবাহ পাঠিয়ে বিভিন্ন পদার্থের যে বর্ণালী পাওয়া যায় তার কারণ ভিন্ন, সেখানে এই সূত্র প্রযোজ্য নয়।

● **প্রমাণ** : এই সহজ প্রমাণ নিয়ে আলোচনা করা যাক্। মনে করুন একটি ফাঁপা আবদ্ধ পাত্র নির্দিষ্ট উষ্ণতায় রাখা আছে। মনে করি আবদ্ধ পাত্রটি λ ও $\lambda + d_\lambda$ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের পাল্লার মধ্যে বিকিরণে পূর্ণ। আবদ্ধ পাত্রটির মধ্যে একটি বস্তু রাখা হল। বস্তুটি কিছুক্ষণের মধ্যে তাপীয় সাম্যে আসবে। ধরি বস্তুটির বিকিরণ ক্ষমতা ও শোষণ ক্ষমতা যথাক্রমে e_λ ও a_λ। পাত্রের দেওয়াল থেকে বিকিরণ এসে বস্তুর উপর পড়ছে। আবার বস্তুও বিকিরণ

করছে। একক ক্ষেত্রফলে λ ও $\lambda + d_{\lambda}$ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের মধ্যে প্রতি সেকেন্ডে dQ_{λ} বিকিরণ বস্তুর উপর আপতিত হলে একক ক্ষেত্রফলে শোষিত শক্তির হার = $a_{\lambda}dQ_{\lambda}$। একক ক্ষেত্রফলে বস্তু কর্তৃক বিকিরিত শক্তির হার = $e_{\lambda}d_{\lambda}$। সাম্যাবস্থায় এ দুটি সমান।

$\therefore \; e_{\lambda}d_{\lambda} = a_{\lambda}dQ_{\lambda}$

বা $\dfrac{e_{\lambda}}{a_{\lambda}} = \dfrac{dQ_{\lambda}}{d_{\lambda}}$....................(7·3)

বস্তুটির বদলে কোনো কৃষ্ণবস্তু ঐ আবদ্ধ পাত্রের মধ্যে রাখলে সেক্ষেত্রে

$a_{\lambda} = 1,\ e_{\lambda} = E_{\lambda}$ (কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা)

তখন $E_{\lambda} = \dfrac{dQ_{\lambda}}{d_{\lambda}}$....................(7·4)

অতএব $\dfrac{e_{\lambda}}{a_{\lambda}} = E_{\lambda} =$ কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা........(7·5)

সমীকরণ (7·4) থেকে পাই $E_{\lambda}d_{\lambda} = dQ_{\lambda}$।

বলা যায় পাত্রের দেওয়ালের বিকিরণ ক্ষমতা কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণ ক্ষমতার সমান। নির্দিষ্ট উষ্ণতায় কোনো বদ্ধ পাত্রের মধ্যে ঐ উষ্ণতায় কৃষ্ণবস্তু বিকিরণে পূর্ণ। এই বিকিরণ ক্ষমতা ভিতরে থাকা কোনো বস্তুর উপর নির্ভর করে না। অতএব যে কোনো ফাঁপা পাত্রের মধ্যে থাকা বিকিরণ কৃষ্ণবস্তু বিকিরণের অনুরূপ।

নিম্নোক্ত উপায়েও এটি প্রমাণ করা যায়। অন্য কোনো বদ্ধ পাত্রের দেওয়ালের বিকিরণ ক্ষমতা $\dfrac{dQ\lambda'}{d\lambda}$ হলে, তার মধ্যে কৃষ্ণবস্তু বসিয়ে আগের মত প্রমাণ করা যায় $E_{\lambda}d_{\lambda} = dQ\lambda'$, অতএব E_{λ} একটি ধ্রুবক।

অতএব কির্কফ্-এর সূত্র হল $\dfrac{e_{\lambda}}{a_{\lambda}} = E_{\lambda} =$ কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা।

এই সূত্রটি প্রমাণের জন্য ফাঁপা আবদ্ধ পাত্রের মধ্যে বস্তুটি আছে ধরে নেওয়া হয়েছে। যেহেতু কোনো বস্তুর e_{λ} ও a_{λ} পরিপার্শ্বের উপর নির্ভর করে না, তাই এই সম্পর্ক সব ক্ষেত্রে সত্য।

অর্থাৎ সব বস্তুর ক্ষেত্রে ও সব অবস্থায় এই সূত্রটি প্রযোজ্য।

কির্কফ্-এর সূত্র থেকে দুটি গুরুত্বপূর্ণ সিদ্ধান্ত পাওয়া যায়ঃ

(i) কোনো নির্দিষ্ট উষ্ণতায় রক্ষিত বদ্ধ ফাঁপা পাত্রের ভিতরের বিকিরণ ও কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণ একই। এর মধ্যে যে কোনো বস্তু রাখলে এই বিকিরণের চরিত্র পাল্টাবে না। পাত্রের উপাদানের প্রকৃতি ও আকারের উপর এই বিকিরণ নির্ভর করে না। সব অবস্থায় এর বিকিরণ কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণই। এবং

(ii) যে বস্তুর a_λ বেশী তার e_λ বেশী। অর্থাৎ ভালো শোষকই ভালো বিকিরক বা বিপরীতক্রমে খারাপ শোষক খারাপ বিকিরক।

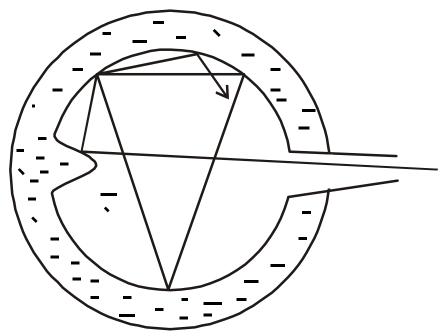
7.10 কৃষ্ণবস্তু ও কৃষ্ণবস্তু বিকিরণ (Black Body and Black Body Radiation) ঃ

বাস্তবে কোনো বস্তুই আদর্শ কৃষ্ণবস্তু নয়। কির্কফ্-এর সূত্র থেকে দেখা গেল কোনো নির্দিষ্ট উষ্ণতায় বন্ধ ফাঁপা পাত্রের ভিতরের বিকিরণই কৃষ্ণবস্তু বিকিরণ। এই নীতির সাহায্যে কৃষ্ণবস্তু বাস্তবে পাওয়া সম্ভব হয়েছে। বহুল ব্যবহৃত একটি কৃষ্ণবস্তু সম্পর্কে আলোচনা করা যাক্।

● **ফেরির কৃষ্ণবস্তু (Fery's black body) :** ফেরির কৃষ্ণবস্তু হলো দুটি দেয়ালযুক্ত একটি ধাতব খোলক। এর অভ্যন্তরে ভুসোকালি লাগানো থাকে। বহিপৃষ্ঠ ভালোভাবে চকচকে করা হয়। O হল বিকিরণের প্রবেশ পথ (চিত্র-7·1)।

O-এর বিপরীত দিকে গোলকের অভ্যন্তরে শঙ্কু আকৃতির একটি অভিক্ষিপ্ত অংশ রাখা হয়। দুটি দেওয়ালের ভিতরের অংশ বায়ুশূন্য রাখা হয়, ফলে পরিচলন ও পরিবহন খুব কম হয়। কোনো বিকিরণ O মুখ দিয়ে ভিতরের প্রবেশ করলে বার বার প্রতিফলনে এটি সম্পূর্ণ শোষিত হয়ে যায়।

ছিদ্রের ঠিক বিপরীত দিকে পাত্রের দেওয়ালের শঙ্কু আকৃতির অভিক্ষিপ্ত অংশটি থাকার ফলে ছিদ্রের অক্ষ বরাবর আপতিত বিকিরণ প্রতিফলিত হয়ে আবার ছিদ্র দিয়ে পাত্র থেকে বেরিয়ে আসতে পারে না; প্রতিফলিত হয়ে বিভিন্ন দিকে চলে যায়। এভাবে ছিদ্রের উপর আপতিত বিকিরণের সবটুকু শোষিত হয়ে যায়। অর্থাৎ ছিদ্রটি আদর্শ কৃষ্ণবস্তুর মত আচরণ করে। তেমনি কানো বস্তুকে এর মধ্যে রাখলে বস্তুটির প্রকৃতি যাই হোক না কেন এর থেকে বিকিরণ কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণই হবে। অর্থাৎ সমস্ত বস্তুই এই বন্ধ পাত্রের মধ্যে থাকলে তাদের নিজস্ব চরিত্র হারিয়ে ফেলে। এর মধ্যে কোনো দর্পণ বসালে এটি দেওয়াল থেকে আসা কৃষ্ণবস্তু বিকিরণই প্রতিফলিত করবে। ফলে প্রাপ্ত বিকিরণ কৃষ্ণবস্তু বিকিরণই হবে। বন্ধ পাত্রের দেওয়াল কালো না করলেও এটি কৃষ্ণবস্তুর মতই আচরণ করবে। দেওয়াল কালো করলে সাম্যাবস্থা তাড়াতাড়ি প্রতিষ্ঠিত হবে। ছিদ্র যত ছোটো হবে তত এটি আদর্শ কৃষ্ণবস্তুর মত আচরণ করবে। ছিদ্র বড় হলে তাপীয় সাম্য ব্যাহত হবে। ছিদ্র বড় হলে কিছু সংশোধনের প্রয়োজন হয়। বিজ্ঞানী ফেরি এভাবে কৃষ্ণবস্তু তৈরি করেছিলেন বলে একে ফেরির কৃষ্ণবস্তু বলা হয়।



চিত্র 7·1 ফেরীর কৃষ্ণ বস্তু

● **কৃষ্ণবস্তু বিকিরণ বা পূর্ণ বিকিরণ** : আদর্শ কৃষ্ণবস্তু যে কোনো তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিকিরণের আদর্শ শোষক।

অতএব এটি সবরকম তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিকিরণের আদর্শ বিকিরকও হবে। অর্থাৎ আদর্শ কৃষ্ণবস্তু থেকে নির্গত বিকিরণে সব তরঙ্গদৈর্ঘ্যই বর্তমান থাকে। এজন্য আদর্শ কৃষ্ণবস্তু থেকে নির্গত বিকিরণকে পূর্ণ বিকিরণ (total or full radiation) বা কৃষ্ণবস্তু বিকিরণ (black body radiation) বলা হয়। নির্গত বিকিরণের প্রকৃতি পাত্রের উপাদানের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে না। শুধুমাত্র পাত্রের উষ্ণতার উপর নির্ভর করে। পূর্ণ বিকিরণের উৎস রূপে পরীক্ষাগারে ফেরীর কৃষ্ণবস্তু ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়।

7.11 কির্কফ্-এর সূত্রের গুণগত পরীক্ষা (Qualitative Proof of Kirchhoff's Law) ঃ

কির্কফ্-এর সূত্র থেকে আমরা দেখলাম : ভালো শোষক ভালো বিকিরক ও খারাপ শোষক খারাপ বিকিরক। কোনো বিশেষ তরঙ্গের বিকিরণ যদি কোনো বস্তুর দ্বারা শোষিত হয় তবে উষ্ণ অবস্থায় ঐ বস্তু ঐ বিশেষ তরঙ্গের বিকিরণ নির্গত করবে। নিম্নে বিবৃত দু একটি সাধারণ উদাহরণ থেকে এই সূত্রের সত্যতা সহজে বোঝা যায়।

(i) একটি সাদা চিনামাটির কোনো বস্তু খণ্ডের কিছুটা অংশ ভুসোকালি লাগিয়ে উচ্চ উষ্ণতায় (প্রায় $1000^{\circ}C$) উত্তপ্ত করে তাড়াতাড়ি অন্ধকার ঘরে নিয়ে গেলে কালি লাগানো অংশটি সাদা অংশের তুলনায় বেশী উজ্জ্বল দেখাবে। কালো অংশটি ভালো শোষক বলে এখন বেশী বিকিরণ দিচ্ছে। তাই ঐ অংশের ঔজ্জ্বল্য বেশি। তুলনায় সাদা অংশ ভালো শোষক নয় বলে ভালো বিকিরকও নয়—তাই এই অংশের ঔজ্জ্বল্য কম হয়েছে।

(ii) সূর্যের আলো লাল কাচের ভিতর দিয়ে যাওয়ার সময় লাল ভিন্ন অন্যান্য বর্ণের আলোক শোষিত হয়। লালের পরিপূরক আলো সবুজ। অর্থাৎ লাল কাচ সবুজ বর্ণের আলোক তরঙ্গকে সম্পূর্ণভাবে শোষণ করে। লাল কাচকে উচ্চ উষ্ণতায় উত্তপ্ত করে অন্ধকার ঘরে নিয়ে গেলে কাচটিকে সবুজ আলো বিকিরণ করতে দেখা যাবে। কোনো বস্তু যে বর্ণের আলো শোষণ করে উপযুক্ত অবস্থায় ঐ বর্ণের আলো বিকিরণ করে। বিপরীতক্রমে ভালো বিকিরক উপযুক্ত অবস্থায় ভালো শোষক।

এছাড়া পরীক্ষার সাহায্যে এই সূত্রের পরিমাণ-গত সত্যতা প্রমাণ করা হয়েছে।

7.12 কির্কফ সূত্রের প্রয়োগ (Applications of Kirchhoff's Law) ঃ

জ্যোর্তিবিজ্ঞান সম্পর্কিত পদার্থবিদ্যায় ও বর্ণালী বিজ্ঞানের (astrophysics and spcetroscopy) গবেষণায় এই সূত্রের প্রয়োগ বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য।

(i) সূর্যরশ্মির বর্ণালী বিশ্লেষণে **নিউটন** প্রিজম ব্যবহার করে যে-বর্ণালী পেয়েছিলেন তা ছিল নিরবচ্ছিন্ন বর্ণালী (continuons spectrum)। পরে উন্নততর যন্ত্রের সাহায্যে **ফ্রাউনহফার** (Fraunhoffer) সৌর বর্ণালীর মধ্যে বেশ কয়েকটি কালো রেখা দেখতে পান। এগুলিকে শোষণ বর্ণালী (absorption spectrum) বলা হয়। সৌর বর্ণালীতে এই রেখাগুলির উৎপত্তির কারণ ব্যাখ্যা তিনি দিতে পারেননি। এগুলির গুরুত্ব অনুধাবন করে এদের

তরঙ্গদৈর্ঘ্য পরিমাপ করেন ও A, B, C, D... ইত্যাদি অক্ষর দিয়ে চিহ্নিত করেন। এদের ফ্রাউনহফার রেখা বলা হয়। ফ্রাউনহফার প্রায় 500 টির মত রেখা দেখেছিলেন। বর্তমানে আরো উন্নতর যন্ত্রে প্রায় 20,000 এর মত রেখা দেখা গেছে। কির্কফ্-এর সূত্রের সাহায্যে এই রেখাগুলির উৎপত্তির কারণ ব্যাখ্যা সম্ভব হয়েছে। পরীক্ষাগারে সোডিয়ামকে উত্তেজিত করে যে নিঃসরণ বর্ণালী (emission spectrum) পাওয়া যায় তাতে দেখা যায় ফ্রাউনহফারের চিহ্নিত D_1 ও D_2 রেখার তরঙ্গদৈর্ঘ্যের সঙ্গে এই সোডিয়াম নিঃসৃত দুটি আলোর তরঙ্গদৈর্ঘ্য সমান। কির্কফ্-এর সূত্রানুসারে সূর্যের বহির্দেশে সোডিয়ামের উপস্থিতিই কালো রেখার উৎপত্তির কারণ। সূর্যের কেন্দ্রে যে অংশে উষ্মতা ও চাপ সবথেকে বেশী তাকে বলে আলোকমণ্ডল (photosphere)। অনুমান করা হয় এই আলোকমণ্ডল থেকে সব বর্ণের আলোই নির্গত হয়। ওখানে পদার্থ কোনো আণবিক অবস্থায় নেই। আলোকমণ্ডলের বাইরের দিকে থাকে তুলনামূলকভাবে কম উষ্মতার বর্ণমন্ডল (chromosphere)। বর্ণমন্ডলে পদার্থ আণবিক অবস্থায় থাকে, অর্থাৎ বিভিন্ন মৌল এই অঞ্চলে গ্যাসীয় অবস্থায় আছে। আলোকমণ্ডল থেকে নির্গত নিরবচ্ছিন্ন বর্ণালীর আলোক বর্ণমন্ডলের মধ্য দিয়ে যাওয়ার সময়, ঐ অঞ্চলের বিশেষ বিশেষ মৌলগুলি তাদের প্রকৃতি অনুযায়ী নির্দিষ্ট তরঙ্গদৈর্ঘ্যের আলো শোষণ করে। যে-আলো শোষিত হয় না, তার তুলনায় এদের তীব্রতা কম হওয়ায় বর্ণালীতে ঐ সব তরঙ্গদৈর্ঘ্যের অবস্থানে কোন আলো পাওয়া যায় না। ঐ সব অবস্থানে কালো রেখা দেখা যায়, যাদের যৌথ ভাবে বলে শোষণ বর্ণালী। সোডিয়ামের কথা বিবেচনা করলে বলা যায়, D_1 ও D_2 আলো বর্ণমণ্ডলে উপস্থিত সোডিয়াম দ্বারা শোষিত হয়েছে। সেইজন্য D_1, D_2 ফ্রাউনহফার রেখা কালো রেখা রূপে দেখা যায়। এভাবে বর্ণমণ্ডলে সোডিয়ামের অস্তিত্বের প্রমাণ পাওয়া গেল। সূর্যালোকের শোষণ বর্ণালী ও পরীক্ষাগারে বিভিন্ন মৌলের নিঃসরণ বর্ণালীর তুলনামূলক বিশ্লেষণ করে সূর্যের বর্ণমণ্ডলে কী কী মৌল আছে তা জানা যায়। সূর্যে আমাদের পৃথিবীর বেশীর ভাগ মৌলের অস্তিত্ব পাওয়া যায়। বস্তুত পৃথিবীতে হিলিয়াম গ্যাসের আবিষ্কারের আগেই সূর্যের বর্ণমণ্ডলে এর সন্ধান পাওয়া গেছিল। কির্কফ্-এর সূত্রের সত্যতা প্রশ্নাতিত ভাবে প্রমাণিত হয়েছিল পূর্ণ সূর্যগ্রহণের সময় বর্ণমণ্ডল থেকে নির্গত আলোর বিশ্লেষণ করে। পূর্ণ সূর্যগ্রহণের সময় আলোকমণ্ডল চাঁদের আড়ালে ঢাকা পড়ে যায়। সে সময়ে বর্ণমণ্ডলের থেকে নির্গত আলোয় বিজ্ঞানীরা দেখেন যে সৌর বর্ণালীতে পূর্বের কালো রেখাগুলি উজ্জ্বল হয়েছে। এ সময়ে আলোকমণ্ডলের তীব্র আলো সরাসরি যন্ত্রে আসছে না। বর্ণমণ্ডল থেকেই আলো আসছে। শোষণকারী মৌলগুলি এখন ঐ বিশেষ বিশেষ আলো নির্গত করছে। [আলোকমণ্ডলের উপস্থিতিতেও শোষণকারী মৌলগুলি এইসব আলোক নিঃসরণ করে। কিন্তু দুর্বল তীব্রতা হেতু তাদের কালো দেখায়।]

সূর্যের মত অন্যান্য নক্ষত্রের বর্ণালী বিশ্লেষণ করে কী কী মৌল ঐসব নক্ষত্রে উপস্থিত আছে তা আমরা পৃথিবীতে বসেই জানতে পারছি। এভাবে জ্যোর্তিবিজ্ঞান সম্পর্কিত পদার্থবিদ্যার গবেষণার অগ্রগতি সম্ভব হয়েছে।

(ii) বর্ণালী বিজ্ঞানে কির্কফ্-এর সূত্রের প্রয়োগ পরমাণুর গঠন জানার পক্ষে সহায়ক হয়েছে। কোনো মৌলের পরমাণু উত্তেজিত হলে বিশেষ কয়েকটি দৃশ্য বা অদৃশ্য বিকিরণ সব সময়ে নির্গত করে। এদের কম্পাঙ্ক নির্দিষ্ট কিছু নিয়ম মেনে চলে। পরমাণু একটি নির্দিষ্ট নিয়ম মেনে গঠিত না হলে এটি সম্ভব হত না। কোনো পরমাণু তার বিশেষ গঠনের জন্যই বিশেষ বিশেষ রশ্মি বিকিরণ করে। এভাবে পরমাণুর গঠন গবেষণায় এই সূত্র সহায়ক হয়েছে।

7.13 কৃষ্ণবস্তু থেকে পূর্ণ বিকিরণ : স্টেফান বোলৎসমান সূত্র (Total Radation from a Black Body–Stefan Boltzmann Law) ঃ

কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণ নিয়ে টিনড্‌ল (Tyndall) ডুলোঁ (Dulong) ও পেতি (petit) বিভিন্ন পরীক্ষা করেন। এই সব পরীক্ষার ফল থেকে 1879 খ্রিষ্টাব্দে জে. স্টেফান (J. Stefan) একটি অভিজ্ঞতালব্ধ (empirical) সূত্র নির্ণয় করেন। তাপগতিবিদ্যার সাহায্যে 1884 খ্রিস্টাব্দে বোলৎস্‌মান এই সূত্র প্রমাণ করেন। এই সূত্রটি কেবলমাত্র পূর্ণ বিকিরণের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। এই সূত্রটি স্টিফান-বোলৎসমান সূত্র নামে পরিচিত। সূত্রটি হল—''কোনো আদর্শ কৃষ্ণবস্তুর প্রতি একক ক্ষেত্রফল থেকে প্রতি সেকেণ্ডে বিকীর্ণ সকল তরঙ্গদৈর্ঘ্যের শক্তির মোট পরিমাণ E ঐ বস্তুর পরম উষ্ণতা T-এর চতুর্থ ঘাতের সমানুপাতিক।

$E \propto T^4$

বা $E = \tau T^4$.................(7·6)

সমানুপাতিক ধ্রুবক τ কে স্টেফান ধ্রুবক (Stefan's constant) বলা হয়। পরীক্ষালব্ধ τ এর মান আদর্শ গ্যাসের বেলায় গে-লুসাক ও জুলের পরীক্ষা (Gay-lussac's and Joule's experiment) থেকে জানা যায়—

$$\left(\frac{\delta U}{\delta V}\right)_T = 0$$

অতএব আদর্শ গ্যাসের বেলায়, $C_P - C_V = P\left(\frac{\delta V}{\delta T}\right)_T$

আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ হলো, $PV = RT$

$$\therefore \quad P\left(\frac{\delta V}{\delta T}\right)_P = R$$

অতএব $C_P - C_V = R$ ....(6·18)

6·9 গ্যাসের সমোষ্ণ পরিবর্তন : (Isothermal changes of gases) :

স্থির উষ্ণতায় গ্যাসের চাপ এবং আয়তনের পরিবর্তন হলে এই পরিবর্তনকে সমোষ্ণ পরিবর্তন বলে।

উষ্ণতা স্থির থাকে বলে এই পরিবর্তনে $dT = 0$। স্বাভাবিকভাবে উষ্ণতা স্থির রাখতে এই পরিবর্তনে তাপের আদানপ্রদান হবে।

সমোষ্ণ পরিবর্তন কীভাবে করা যায় একটি উদাহরণ নিয়ে আমরা আলোচনা করব। মনে করি একটি ধাতব চোঙের মধ্যে নির্দিষ্ট উষ্ণতার কিছু পরিমাণ গ্যাস আছে। চোঙের খোলামুখে ঘর্ষণহীন ভাবে চলতে পারে তেমন একটি ধাতব পিষ্টন আটকানো আছে। এবার গ্যাসটিকে খুব ধীরে ধীরে প্রসারিত হতে দেওয়া হল। এর ফলে

গ্যাস কিছু পরিমাণ কার্য করবে। এই কার্য করার জন্য গ্যাসের অভ্যন্তরীণ শক্তি এবং সাথে সাথে ওর উষ্মতা কমতে শুরু করবে। ধাতব চোঙের দেওয়াল সুপরিবাহী হওয়ায় পরিপার্শ্ব থেকে তাপ দেওয়ালের মধ্য দিয়ে গ্যাসে প্রবাহিত হবে। এতে গ্যাসের উষ্মতা স্থির থাকতে চাইবে। ক্রিয়াটি খুব ধীরে ধীরে সংগঠিত হলে উষ্মতা স্থির থাকবে ধরে নেওয়া যায়। এই ধরনের পরিবর্তনই সমোষ্ম প্রসারণ (isothermal expansion)।

একইভাবে গ্যাসটিকে খুব ধীরে ধীরে সংনমিত করতে থাকলে গ্যাসের উপর কিছু পরিমাণ কার্য করা হতে থাকবে, ফলে গ্যাসের অভ্যন্তরীণ শক্তি ও সাথে সাথে ওর উষ্মতা বাড়তে থাকবে। চোঙের দেওয়াল সুপরিবাহী হওয়ায়, তাপ সঙ্গে সঙ্গে গ্যাস থেকে পরিপার্শ্বে প্রবাহিত হয়ে যাবে। ফলে ওর উষ্মতা প্রায় স্থিরই থাকবে। এই ধরণের পরিবর্তনকে সমোষ্ম সংকোচন (isothermal compression) বলা হয়।

এই আলোচনা থেকে আপনারা জানতে পারলেন—সমোষ্ম পরিবর্তনের জন্য গ্যাস (তন্ত্র) ও পরিপার্শ্বের মধ্যে তাপ $5{\cdot}67\times10^{-8}\ Wm^{-2}\ k^{-4}$।

T কেলভিন উষ্মতায় কোনো কৃষ্ণবস্তু T_0k উষ্মতার পরিপার্শ্বের মধ্যে থাকলে $(T>T_0)$, বিকিরণের ফলে কৃষ্ণবস্তুর প্রতি একক ক্ষেত্রফল থেকে মোট শক্তিক্ষয়ের হার হবে

$$E = \sigma\ (T^4 - T_0^4) \quad \text{........................}(7{\cdot}7)$$

কৃষ্ণবস্তুটি পরিপার্শ্ব থেকে কম উষ্মতায় থাকলে শক্তি লাভ করে। সে ক্ষেত্রেও এই সমীকরণটি প্রযোজ্য হবে।

কৃষ্ণবস্তু ছাড়া অন্যান্য বস্তুর বেলায় বিকীর্ণ শক্তির পরিমাণ (7·6) সমীকরণে প্রদত্ত মান অপেক্ষা কম হয়। সেক্ষেত্রে

$$E = \in\sigma T^4 \text{.............}(7{\cdot}8)$$

$\in$ একটি ধ্রুবক। বস্তুর পৃষ্ঠদেশের প্রকৃতির ওপর নির্ভর করে এর মান 0 থেকে 1 এর মধ্যে হয়, আদর্শ প্রতিফলক তলের $t = 0$ এবং আদর্শ কৃষ্ণবস্তুর ক্ষেত্রে $\in = 1$, এই ধ্রুবককে বস্তুর পৃষ্ঠদেশের আপেক্ষিক বিকিরণ ক্ষমতা (emissivity) বলা হয়।

● **স্টেফানের সূত্র থেকে নিউটনের শীতলন সূত্র (Newtn's law of cooling from stefan's law) :**

মনে করি কোনো কৃষ্ণবস্তুর উষ্মতা T_1k এবং এই উষ্মতা পরিপার্শ্বের উষ্মতা T_0k থেকে সামান্য বেশি। স্টেফান-বোলৎসমান সূত্র অনুসারে এই বস্তুর প্রতিএকক ক্ষেত্রফল থেকে মোট তাপক্ষয়ের হার

$$E = \sigma\ (T_1^4 - T_0^4)$$
$$= \sigma\ (T_1^2 + T_0^2)\ (T_1 + T_0)\ (T - T_0)$$

এখানে T_1 ও T_0 এর মান কাছাকছি হওয়ায় উষ্মতার অল্প পরিবর্তনে ডানদিকের সবথেকে সুবেদি অংশ হচ্ছে $(T_1 - T_0)$। তুলনায় $(T_1^2 + T_0^2)\ (T_1 + T_0)$ প্রায় স্থির থাকে। অতএব লেখা যায়—

$$E = k\ (T_1 - T_0)$$

যেখানে $k' = \sigma\ (T_1^2 + T_0^2)\ (T_1 + T_0)$

অতএব $E \propto (T_1 - T_0)$...............(7·9)

অর্থাৎ পরিপার্শ্বের সঙ্গে কোনো কৃষ্ণবস্তুর উষ্ণতার পার্থক্য হলে বিকিরণের জন্য ঐ বস্তু থেকে তাপক্ষয়ের হার ঐ উষ্ণতা পার্থক্যের সমানুপাতিক হয়, এটিই **নিউটনের শীতলন** সূত্র। সেলসিয়াস স্কেলে ও পরম স্কেলে উষ্ণতার পার্থক্যের মান সমান হয়। অতএব

$E \propto (\theta_1 - \theta_0)$ বা $E \propto \theta$...............(7·10)

এখানে θ_1 এবং θ_0 সেলসিয়াস স্কেলে যথাক্রমে কৃষ্ণবস্তু ও পরিপার্শ্বের উষ্ণতা। $\theta_1 - \theta_0 = \theta$ = উষ্ণতার পার্থক্য।

স্টেফানের সূত্রের মত নিউটনের সূত্রও কৃষ্ণবস্তু ছাড়া অন্যান্য বস্তুর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হয়; কিন্তু তখন সমানুপাতিক ধ্রুবকের মান পৃথক হয়, এই মান বস্তুর পৃষ্ঠদেশের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে।

7.14 প্লাঙ্ক-এর বিকিরণ সূত্র (Planck's Radiation Law) ঃ

পূর্ণ বিকিরণ উষ্ণতার সঙ্গে কীভাবে পরিবর্তিত হয় তা আপনারা স্টেফান বোলৎসমান সূত্র থেকে জেনেছেন। এই বিকিরণে বিকীর্ণ তাপের সমস্ত তরঙ্গদৈর্ঘ্যই উপস্থিত থাকে। বিভিন্ন তরঙ্গদৈর্ঘ্যের মধ্যে শক্তি কীভাবে বন্টিত হয় সে সম্পর্কে বিজ্ঞানী ভিন্ (Wien) সর্বপ্রথম তাত্ত্বিক আলোচনা করেন এবং তাপগতিবিদ্যার সাহায্যে এই বন্টন সূত্র নির্ণয় করেন। পরীক্ষায় দেখা যায় ভিন্-এর সূত্র কম তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিকিরণের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য, বেশী তরঙ্গদৈর্ঘ্যে এটি প্রযোজ্য নয়। রেলি-জিন্স (Rayleigh-Jeans) ম্যাক্সওয়েল আলোর তড়িচ্চুম্বকীয় তত্ত্বের (Maxwell's Electromagnetic Theory) সাহায্যে এর ব্যাখ্যার চেষ্টা করেন। তাঁরা যে সূত্র দেন— দেখা যায় সেটি দীর্ঘ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিকিরণের ক্ষেত্রে পরীক্ষালব্ধ ফলের সঙ্গে মিলে যায় কিন্তু ক্ষুদ্র তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিকিরণের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হয় না।

এর পর মাক্স্ প্লাঙ্ক 1900 খ্রিস্টাব্দে তাঁর যুগান্তকারী তত্ত্বের সাহায্যে বিকিরণে শক্তি বন্টনের সঠিক সূত্র দিতে সমর্থ হলেন। তাঁর তত্ত্ব অনুসারে— বিকিরণের শক্তি পদার্থে যখন আদানপ্রদান হয়— সেটি নিরবচ্ছিন্নভবে হয় না। শক্তির বিনিময় হয় শক্তির গুচ্ছ বা কোয়ান্টাম বা আলোক কণিকার মাধ্যমে। এই শক্তিগুচ্ছ বা কেয়ান্টামকে ফোটন (photon) বলা হয়। এই তত্ত্বকে বলা হয় আলোকের কোয়ান্টাম তত্ত্ব (qnantum theory of light)। এতদিন ধারণা ছিল তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ নিরবচ্ছিন্ন। কোয়ান্টাম তত্ত্বে এর বিপরীত ধারণা—কোয়ান্টাম বা ফোটনের মাধ্যমে শক্তি বিনিময় হয়। এই তত্ত্বের সাহায্যে তিনি যে শক্তি বণ্টনের সূত্র দিলেন তা পরীক্ষালবধ্ধ ফলের সঙ্গে সম্পূর্ণ সঙ্গতি পূর্ণ।

কোনো নির্দিষ্ট কম্পাঙ্ক (γ) বিশিষ্ট বিকিরণের সকল কোয়ান্টামের শক্তি অভিন্ন হয় এবং এই শক্তি ($\in$), কম্পাঙ্ক (γ)-এর সমানুপাতিক অর্থাৎ $\in = h\gamma$, এখানে h একটি আনুপাতিক ধ্রুবক, একে প্লাঙ্ক-এর ধ্রুবক (Planck's constant) বা ক্রিয়ার কোয়ান্টাম (quantum of action) বলে। প্লাঙ্ক-এর তত্ত্ব অনুযায়ী বিকিরণের কম্পাঙ্ক γ হলে শক্তির নিঃসরণ $\in = h\gamma$ পরিমাণের গুণিতক হয় অর্থাৎ শক্তি পরিমাণ হয় $\in, 2\in, 3\in, ...n\in,....$

ইত্যাদি; কখনোই $\in$ এর কোনো ভগ্নাংশ হিসাবে নিঃসরণ হয় না। এই কোয়ান্টাম তত্ত্ব প্রয়োগ করে প্লাঙ্ক, শক্তি বন্টনের যে রাশিমালা প্রতিষ্ঠা করেন তা হল

$$E_\lambda d_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{h\gamma}{kT}} - 1} d\lambda \quad ....(7 \cdot 11)$$

এখানে $E_\lambda d_\lambda$ হল T উষ্ণতায় রক্ষিত কৃষ্ণবস্তু বিকিরণে λ ও $\lambda + d_\lambda$ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের মধ্যে বিকিরণ শক্তি, k হল বোল্ৎস্‌মান ধ্রুবক। c হল শূন্য মাধ্যমে আলোর বেগ।

এই রাশিমালার সাহায্যে পরীক্ষালব্ধ শক্তিবন্টনের কম ও বেশী সমস্ত তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের লেখচিত্রকে ব্যাখ্যা করা সম্ভব হল। পরীক্ষা করে h এর মান পাওয়া যায়

$6 \cdot 63 \times 10^{-34}$ J·S = $4 \cdot 14 \times 10^{-15}$ ev.s

প্লাঙ্ক-এর তত্ত্বের সাহায্যে শুধুমাত্র বিকিরণকে সঠিকভাবে ব্যাখ্যা করা গেল তা নয়—আধুনিক পদার্থবিদ্যার বিভিন্ন শাখায় এর প্রয়োগ এবং বিভিন্ন ঘটনাকে ব্যাখ্যা করা এর সাহায্যে সম্ভব হল।

7.15 সৌর ধ্রুবক ও সূর্যের উষ্ণতা (Solar Constant and Temperature of the Sun) ঃ

● **সৌর ধ্রুবক** : সূর্য থেকে পৃথিবীর গড় দূরত্বে সূর্যরশ্মির সঙ্গে লম্বভাবে একটি আদর্শ কৃষ্ণতল রাখলে ঐ তলের প্রতি বর্গ সেন্টিমিটার ক্ষেত্রফলের উপর বায়ুমণ্ডলের অবর্তমানে প্রতি মিনিটে গড়ে যে পরিমাণ তাপশক্তি (বিকিরণ) আপতিত হয় তাকে সৌর ধ্রুবক বলে।

সৌর ধ্রুবকের মান পাইরহেলিও মিটার (Pyrheliometer) যন্ত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়, এই ধ্রুবকের মান প্রায় $1 \cdot 937$ cal/cm^2 min; এস. আই. এককে এর মান প্রায় 1356 J/m^{2}s।

● **সূর্যের উষ্ণতা** : সূর্যকে r ব্যাসার্ধ এবং T উষ্ণতা বিশিষ্ট আদর্শ কৃষ্ণবস্তু ধরে নিলে স্টেফানের সূত্রানুসারে সূর্য থেকে পৃথিবীর গড় দূরত্ব R-কে ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি সমকেন্দ্রিক গোলক কল্পনা করলে, সূর্য থেকে বিকীর্ণ তাপ গোলকের পৃষ্ঠের সব জায়গায় সুষমভাবে লম্বদিকে আপতিত হবে।

গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = $4\pi R^2$। অতএব সৌরধ্রুবক

$$S = \frac{4\pi r^2 \sigma T^4}{4\pi R^2} \times 60 \qquad \text{[CGS এককে]}$$

বা $$T = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{S}{\sigma} \times \frac{1}{60}$$

SI এককে $T = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \times \frac{S}{\sigma}$................(7·12)

R, r, S এবং σ র মান বসালে পাওয়া যায় T ≃ 5723 K

7.16 বিকিরণ পাইরোমিতি (Radiation Pyrometry) ঃ

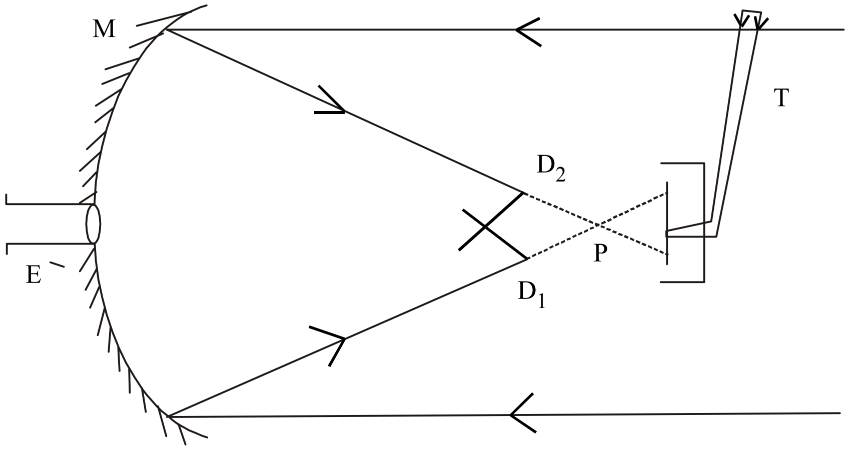
অতি উচ্চ উষ্ণতা পরিমাপের পদ্ধতিকে পাইরোমিতি বলে এবং এর জন্য ব্যবহৃত যন্ত্রকে পাইরোমিটার (Pyrometer) বলা হয়। বিকিরণের সূত্র প্রয়োগ করে যে যন্ত্র ব্যবহার করা হয় তাকে বলা হয় বিকিরণ পাইরোমিটার (radiation pyrometer)। (i) স্টেফানের সূত্র প্রয়োগ করে উষ্ণতা পরিমাপের যন্ত্রকে বলা হয় **পূর্ণ বিকিরণ পাইরোমিটার**। (total radiation pyrometer) (ii) আবার নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যে বিকীর্ণ শক্তি পরিমাপ করে প্ল্যাঙ্কে-এর সূত্র প্রয়োগ করে উষ্ণতা পরিমাপের যন্ত্রকে বলা হয় দীপ্ত পাইরোমিটার বা বর্ণালী পাইরোমিটার (optical pyrometer বা spectral pyrometer)।

পাইরোমিটারের সাহায্যে যে বস্তুর উষ্ণতা মাপা হয়, তার সংস্পর্শে পাইরোমিটারটি রাখতে হয় না। ফলে দূর থেকে উষ্ণতা মাপা যায় এবং যে কোনো উচ্চ উষ্ণতা মাপা যায়। পূর্ণ বিকিরণ সূত্র ব্যবহার করে উষ্ণতা মাপা হয় বলে কৃষ্ণবস্তুর উষ্ণতা সঠিকভাবে এই সব যন্ত্রাদির সাহায্যে মাপা যায়। অকৃষ্ণবস্তুর উষ্ণতা সঠিকভাবে মাপা যায় না। এক্ষেত্রে বিকিরকের প্রকৃত উষ্ণতা পরিমাপের পরিবর্তে যে উষ্ণতায় কৃষ্ণ বিকিরক থেকে একই পরিমাণ বিকিরণ আসবে সেই উষ্ণতাই পরিমাপ করা হয়। এই উষ্ণতাকে ঐ বিকিরকের 'কৃষ্ণ বিকিরণ উষ্ণতা' (black body temperature) বলা হয়।

(a) ফেরির পূর্ণ বিকিরণ পাইরোমিটার (Ferry's Total Radiation Pyrometer) :

ফেরি উদ্ভাবিত এই পাইরোমিটারের মূল নীতি হল পূর্ণ বিকিরণ পরিমাপ করে স্টেফানের সূত্রের সাহায্যে উষ্ণতা পরিমাপ করা। বহু দূরে অবস্থিত যে বস্তুর উষ্ণতা মাপতে হবে সেই বস্তু থেকে আগত বিকিরণকে একটি বড় অবতল দর্পণ M-এর উপর ফেলা হয় (চিত্র 7·2)। বিকিরণ অবতল দর্পণে প্রতিফলিত হয়ে দর্পণের সামনে রাখা কালো পাত P এর উপর কেন্দ্রীভূত হয়। একটি ধাতব পাত দিয়ে P পাতকে সরাসরি আসা বিকিরণ থেকে আড়াল করা হয়। দর্পণকে প্রয়োজন মত সামনে পিছনে করে তীক্ষ্ণভাবে ফোকাস করা হয়। সঠিক ফোকাস করার জন্য P পাতের ঠিক সামনে দুটি অর্ধবৃত্তাকার দর্পণ D_1, D_2 পরস্পরের সঙ্গে 5° থেকে 10° কোণে আনত ভাবে রাখা হয়। এদের ক্ষেত্রে প্রায় 0·75 mm ব্যাসার্ধের একটি ছিদ্র পথ থাকে। এই ছিদ্রের মধ্য দিয়ে বিকিরণ P পাতের ওপর পড়ে। অবতল দর্পণের মাঝখানে থাকা অভিনেত্র (eye-piece) E এর সাহায্যে প্রতিবিম্ব দেখা হয়, সঠিকভাবে ফোকাস হলে M অবতল দর্পণে প্রতিফলিত বিকিরণ, পুনরায় D_1, D_2 অর্ধবৃত্তাকার দর্পণে প্রতিফলিত হয়ে একটি পূর্ণ বৃত্তাকার প্রতিবিম্ব গঠন করে [চিত্র 7·2 (a)]। সঠিক ফোকাস না হলে দুটি দর্পণের মধ্যে সামান্য কোণ থাকায় অর্ধবৃত্তাকার প্রতিবিম্ব দুটিকে পৃথকভাবে দেখা যাবে [চিত্র 7·2 (b)]। অবতল দর্পণ সামনে পিছনে সরিয়ে সঠিক ফোকাস করা হয়। P পাতের পিছনের দিকে একটি তাপযুগ্ম T-এর একটি সংযোগ

যুক্ত থাকে। অন্য সংযোগটি একটি সুবেদী মিলি ভোল্টমিটারের যুক্ত থাকে। এর বিক্ষেপ থেকে P পাতে প্রতিবিম্বের প্রাবল্য পরিমাপ করা হয়। M দর্পণ দ্বারা গঠিত প্রতিবিম্বের আকার যদি D_1, D_2 দর্পণ দুটির মাঝের ছিদ্রের থেকে সবসময় বড় হয় তবে P পাতে প্রতিবিম্বের প্রাবল্য বস্তুর দূরত্বের উপর নির্ভর করে না। উৎসের উষ্মতা TK, পাতের উষ্মতা T_rK ও মিলিভোল্টমিটারের পাঠ V হলে, $V = a\ (T^b - T_r^b)$



চিত্র 7·2 কেরীর পূর্ণ বিকিরণ পাইরোমিটার

ধ্রুবক a এর মান স্টেফান ধ্রুবক, দর্পণের প্রতিফলন ক্ষমতা ও তাপযুগ্মের শোষণ ক্ষমতার উপর নির্ভর করে। b এর মান 3·8 থেকে 4·2 এর মধ্যে হয়। b এর মানের এই পার্থক্য বিভিন্ন কারণে হয়ে থাকে। যেমন—

(i) তাপযুগ্মে উদ্ভূত তড়িচ্চালক বল উষ্মতার পার্থক্যের সঙ্গে পুরোপুরি সমানুপাতিক হয় না।

(ii) বিক্ষিপ্ত প্রতিফলনের উপস্থিতি।

(iii) তাপযুগ্মের তারের মধ্য দিয়ে তাপের সঞ্চালনে, শীতল সংযোগের উষ্মতা বৃদ্ধি।

(iv) উষ্ম সংযোগের তাপক্ষয় উষ্মতার পার্থক্যের সঙ্গে সমানুপাতিক না হওয়া।

এই সমস্ত কারণে কৃষ্ণবস্তু রেখে প্রমাণ থার্মোমিটারের সাহায্যে পাইরোমিটার অংশাংকিত করা হয়। পরে অজানা উষ্মতা পরিমাপ করা হয়।

(b) আলোক পাইরোমিটার বা বর্ণালী পাইরোমিটার (Optical pyrometer or speectral pyrometer) :

মূলনীতি : উষ্মবস্তুর বিকিরণ-বর্ণালীর অতিক্ষুদ্র তরঙ্গদৈর্ঘ্যের পাল্লা $\lambda - \lambda + d\lambda$ এর মধ্যে তীব্রতাকে কোনো প্রমাণ বাতির একই তরঙ্গদৈর্ঘ্যের পাল্লার মধ্যে বিকিরণের তীব্রতার সঙ্গে তুলনা করে প্ল্যাংকের এর সূত্রের সাহায্যে উষ্মতা নির্ণয় করা হয়।

কোনো কৃষ্ম বিকিরণের উষ্মতা T হলে, এর পৃষ্ঠতলের একক ক্ষেত্র থেকে তরঙ্গদৈর্ঘ্য $\lambda - \lambda + d\lambda$ পাল্লার মধ্যে বিকীর্ণ শক্তির হার, প্ল্যাংকের-এর সূত্র অনুযায়ী $E_\lambda d_\lambda = \dfrac{C_1 d_\lambda}{\lambda 5\left(e^{\frac{C_2}{\lambda T - 1}}\right)}$

বা, $E_\lambda = \dfrac{C_1}{\lambda 5\left(e^{\frac{C_2}{\lambda T - 1}}\right)}$

C_1 ও C_2 ধ্রুবক। পরীক্ষায় দেখা যায় $C_2 \approx 1 \cdot 44$। অথবা $e^{\frac{C_2}{\lambda T}}$ এর মান 1-এর থেকে অনেক বেশী। $e^{\frac{C_2}{\lambda T}}$ তুলনায় 1 কে উপেক্ষা করা যায়।

$$\therefore \quad E_\lambda = C_1 \lambda^{-5} e^{\frac{-C_2}{\lambda T}} \qquad \text{[এটি ভীনের সূত্র]}$$

এখন যদি প্রমাণ বাতির উষ্মতা T' ও একই তরঙ্গদৈর্ঘ্যের পাল্লায় প্রাবল্য E'_λ হয়, তবে

$$E'_\lambda = C_1 \lambda^{-5} e^{\frac{-C_2}{\lambda T'}}$$

$$\therefore \quad \frac{E_\lambda}{E'_\lambda} = e\left(\frac{C_2}{\lambda T'} - \frac{C_2}{\lambda T}\right) = e\frac{C_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)$$

$$\text{বা} \quad \ln\frac{E_\lambda}{E'_\lambda} = \frac{C_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)$$

দুটি পদ্ধতিতে তীব্রতা তুলনা করা হয়। সেই অনুযায়ী দু ধরনের আলোক পাইরোমিটার তৈরী করা হয়।

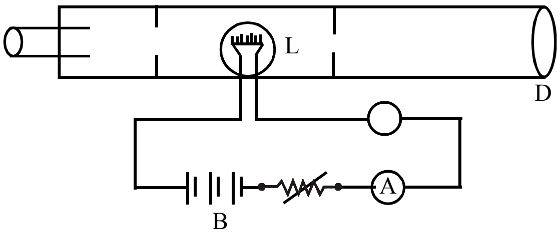
(i) অদৃশ্য ফিলামেন্ট পাইরোমিটার (Disappearing filament pyrometer) : প্রমাণ বাতির তীব্রতা নিয়ন্ত্রণ করে তাপীয় উৎস থেকে প্রাপ্ত বিকিরণের সঙ্গে সমান করা হয়।

(ii) সমবর্তন পাইরোমিটার (Polansing pyrometer) : প্রমাণ বাতির বিকিরণ তীব্রতা স্থির রেখে তাপীয় উৎস থেকে আসা বিকিরণ নিয়ন্ত্রণ করে বিকিরণ তীব্রতা সমান করা হয়।

আমরা এখানে অদৃশ্য ফিলামেন্ট পাইরোমিটারের মূলনীতি আলোচনা করব।

● **(i) অদৃশ্য ফিলামেন্ট পাইরোমিটার :**

এই পাইরোমিটারে তাপীয় উৎস থেকে আসা বিকিরণের তীব্রতা স্থির রেখে একটি প্রমাণ বাতির তীব্রতা নিয়ন্ত্রণ করে, দুটি তীব্রতা সমান করা হয়। প্রথমে মর্স (Morse) এটি তৈরী করেন। পরবর্তীকালে হলবর্ণ (Holborn), কার্লবাম (Kurlbaum) প্রমুখের প্রচেষ্টায় এই যন্ত্রের অনেক উন্নতি সাধিত হয়।



চিত্র 7·3 অদৃশ্যমান ফিলামেন্ট পাইরোমিটার

চিত্র 7·3-এ এর একটি নক্‌শা দেখানো হয়েছে। এটি মূলত একটি দূরবীক্ষণ যন্ত্র। এর বজ্র তারের (crosswire) অবস্থানে একটি বাতি L থাকে। বাতিটিকে ব্যাটারী B এর সাহায্যে তড়িৎপ্রবাহ পাঠিয়ে উত্তপ্ত করার ব্যবস্থা থাকে। তড়িৎপ্রবাহ নিয়ন্ত্রণ করে বাতির ঔজ্জ্বল্য নিয়ন্ত্রণ করা যায়। অভিলক্ষ্য D-এর অবস্থান পরিবর্তন করে তাপীয় উৎসের বিকিরণকে বাতির ফিলামেন্টে ফোকাস করা হয়। ওখানে তাপীয় উৎসের একটি তাপ প্রতিবিম্ব (heat image) তৈরী হয়। অভিনেত্র A-এর সামনে একটি লাল ফিল্টার কাচ লাগিয়ে এর মধ্য দিয়ে বাতিকে দেখা হয়। এবার বাতির তড়িৎপ্রবাহ নিয়ন্ত্রণ করে ফিলামেন্ট ও উৎসের প্রতিবিম্বের ঔজ্জ্বল্য সমান করা হয়। দুটির ঔজ্জ্বল্য সমান হলে ওদের পৃথক করা যাবে না। ফিল্টারের সাহায্যে নির্দিষ্ট তরঙ্গদৈর্ঘ্যের আলো তুলনা করা হয়।

সঠিকভাবে অংশাংকিত করে অ্যামমিটারে তড়িৎপ্রবাহ মাত্রা থেকে তাপমাত্রা সরাসরি জানা যায়।

উৎসের উষ্মতা T ও বিকিরণ ক্ষমতা E_λ এবং ফিলামেন্টের উষ্মতা T' ও বিকিরণ ক্ষমতা E'_λ হলে

$$\ln\frac{E_\lambda}{E'_\lambda} = \frac{C_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)$$

যখন $E_\lambda = E'_\lambda$

$$0 = \frac{C_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)$$

$$\therefore\ T = T'$$

অতএব ফিলামেন্টের উষ্মতাই তাপীয় উৎসের উষ্মতা।

7.17 তাপ পরিবহন ঃ

যে পদ্ধতিতে তাপ কোনো বস্তুর উষ্মতর অংশ থেকে শীতলতর অংশে সঞ্চালিত হয় কিন্তু বস্তুর কণাগুলির স্থানের কোনো পরিবর্তন হয় না তাকে তাপ পরিবহন বলা হয়। বস্তুর কণাগুলির সাহায্যে এই প্রক্রিয়া চলে। ধাতবদণ্ডের এক প্রান্ত উত্তপ্ত করলে ধীরে ধীরে অন্য প্রান্তে তাপ সঞ্চালিত হয়। অন্য প্রান্তটি উত্তপ্ত হয়ে ওঠে। ধাতব বস্তুর কণাগুলি দৃঢ়ভাবে পদার্থের মধ্যে আবদ্ধ থাকে। তাপশক্তি প্রযুক্ত হলে এগুলি এদের অবস্থানের সাপেক্ষে স্পন্দিত হতে থাকে। যেহেতু অণুগুলি পরস্পরের সঙ্গে স্থিতিস্থাপকভাবে সংযুক্ত তাই এই কম্পন সঞ্চালিত হয় এদের মধ্য দিয়ে। এই কম্পনের অর্থাৎ যান্ত্রিক শক্তির সাহায্যে অণুগুলি আবার তাদের পাশের অণুগুলিতে তাপশক্তি সঞ্চালিত করে। ক্রমে ক্রমে শীতলতর অংশে তাপ সঞ্চালিত হয়, এতে অণুগুলির স্থানচ্যুতি হয় না।

7.18 তাপের সুপরিবাহী ও কুপরিবাহী পদার্থ (Good Conductors and Bad Conducturs of Heat) ঃ

যে-সব পদার্থের মধ্য দিয়ে তাপ সহজে পরিবাহিত হয় তাদের **সুপরিবাহী** এবং যে সব পদার্থের মধ্য দিয়ে তাপ সহজে পরিবাহিত হয় না, তাদের **কুপরিবাহী** বা **অন্তরক** (insulator) বলে।

সাধারণত সব ধাতুই সুপরিবাহী। রূপার তাপ পরিবহন ক্ষমতা সব থেকে বেশী; এর পরে তামা ও অ্যালুমিনিয়ামের স্থান। গ্রানাইট অধাতু হলেও সুপরিবাহী। তরলের মধ্যে একমাত্র পারদ সুপরিবাহী।

আবার ধাতু মাত্রেই তড়িৎ সুপরিবাহী। প্রতিটি ধাতুর মধ্যে অসংখ্য মুক্ত ইলেকট্রনের অস্তিত্ব থেকে এই ধর্ম ব্যাখ্যা করা যায়। পরমাণুর মধ্যে দূরতম কক্ষের ইলেকট্রনগুলি বিভিন্ন কারণে পরমাণু থেকে সহজেই বিচ্ছিন্ন হয়ে পড়ে। ধাতুর মধ্যে এই ইলেকট্রনগুলি আদর্শ গ্যাসের অণুর মত সম্পূর্ণ এলোমেলোভাবে ঘুরে বেড়ায়। এই জন্য এদের মুক্ত ইলেকট্রন বলে। প্রকৃতপক্ষে এগুলি পরমাণুর সঙ্গে খুব কম বল দ্বারা আবধ্ব থাকে। তাপ পরিবহন প্রক্রিয়ায় ধাতুর অণুগুলির সঙ্গে সঙ্গে এই প্রায় মুক্ত ইলেকট্রনগুলিও অংশ নেয়। এজন্য ধাতুমাত্রেই তাপের সুপরিবাহী হয়।

কর্ক, কাঠ, কাচ, রবার, কাগজ তুলা, চামড়া, পশম, ফেলট ইত্যাদি তাপের কুপরিবাহী। পারদ ছাড়া অন্য সব তরলই তাপের কুপরিবাহী। সব গ্যাসই তাপের কুপরিবাহী। শূন্যস্থানের মধ্য দিয়ে তাপ পরিবহন হয় না। তাই শূন্যস্থান আদর্শ কুপরিবাহী।

7.19 তাপ পরিবাহিতা (Themal Conductivity) ঃ

ধরি একটি আয়তাকার পাতের বেধ x এবং ক্ষেত্রফল A; এর দুটি পৃষ্ঠতলের উষ্ণতা যথাক্রমে θ_1 ও θ_2 (চিত্র 7·4)। $\theta_1 > \theta_2$ হলে θ_1 দিক থেকে θ_2 এর দিকে তাপ পরিবাহিত হবে।

পরীক্ষায় দেখা যায়—পাতের তলের লম্বদিকে পরিবাহিত তাপ Q,

(i) তলের ক্ষেত্রফল A-র সমানুপাতিক

(ii) দুটি তলের উষ্ণতার পার্থক্য $(\theta_1 - \theta_2)$-এর সমানুপাতিক

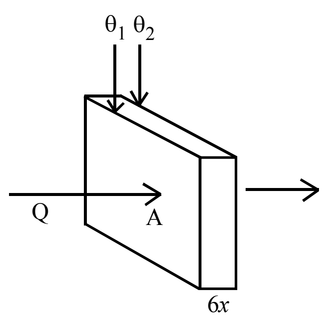
(iii) পাতের বেধ x-এর ব্যাস্তানুপাতিক।

এবং (iv) তাপপ্রবাহের সময়ের সমানুপাতিক।

অতএব $$Q \propto A\frac{(\theta_1 - \theta_2)}{x} \cdot t$$

পাতের বেধ খুব ক্ষুদ্র dx, উষ্ণতার পার্থক্য $d\theta$ এবং dt সময়ে dQ পরিমাণ তাপ পরিবাহিত হলে তাপ পরিবহনের হার

$$\frac{dQ}{dt} \propto -A\frac{d\theta}{dx} \quad \text{বা} \quad \frac{dQ}{dt} = -KA\frac{d\theta}{dx}$$



চিত্র 7·4 তাপ পরিবহন তলের লম্বদিকে

K একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক। একে তাপ-পরিবাহিতা বলে। এর মান পাতের উপাদানের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে।

$A = 1$, $\frac{d\theta}{dx} = 1$ হলে একক সময়ে পরিবাহিত তাপই হল এর পরিবাহিত K_1

K-এর একক এস আইতে $Jm^{-1}K^{-1}S^{-1}$ বা $Wm^{-1}K^{-1}$ বা Wm^{-1} $°C^{-1}$ সিজি এস পদ্ধতিতে $Calcm^{-1}$ $°C^{-1}S^{-1}$

[এস আই একক = $4{\cdot}2 \times 10^2$ সি জি এস একক]

তাপের সুপরিবাহী পদার্থের ক্ষেত্রে K এর মান বেশী এবং কুপরিবাহী পদার্থের ক্ষেত্রে K এর মান কম। আদর্শ পরিবাহীর ক্ষেত্রে $K = \infty$ এবং আদর্শ কুপরিবাহীর ক্ষেত্রে $K = 0$ হয়। বাস্তবে কোনো পদার্থের তাপ পরিবাহিতা এদুটি চরম মানের সমান হয় না। উষ্ণতা পরিবর্তনে পদার্থের তাপ পরিবাহিতা সামান্য হারে পরিবর্তিত হয়। উষ্ণতা বাড়লে কঠিন ও তরল পদার্থের তাপ পরিবাহিতা কমে, কিন্তু গ্যাসের তাপ পরিবাহিতা বাড়ে।

সারণি 7·1

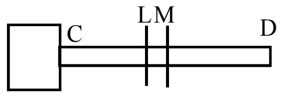
কয়েকটি পদার্থের তাপ পরিবাহিতা (এস আই এককে)

পদার্থ	তাপ পরিবাহিতা 0°C উষ্ণতা	পদার্থ	পরিবাহিতা
রূপা	$4{\cdot}07 \times 10^2$	কাচ	1·05
তামা	$3{\cdot}864 \times 10^2$	জল	0·546
অ্যালুমিনিয়াম	$2{\cdot}016 \times 10^2$	কর্ক	0·42
ঢালাই লোহা	46·2	উল	0·42
সীসা	33·6	কাঠ	0·126
পারদ	0·016	বায়ু	0·0252

7.20 দণ্ড বরাবর তাপের ঋজুরেখ প্রবাহ ঃ ফুরিয়ে-এর সমীকরণ (এক মাত্রিক) (Rectilinear Propagation of Heat along a Bar. Fourier's Equation (One Dimensional) :

সুষম প্রস্থচ্ছেদের একটি লম্বা ধাতব দণ্ডের একটি প্রান্ত উচ্চ উষ্ণতায় রাখা আছে। উষ্ণতর প্রান্ত থেকে তাপ সরলরেখায় শীতলতর প্রান্তের দিকে পরিবাহিত হবে, দণ্ডের দৈর্ঘ্যের সঙ্গে লম্বচ্ছেদগুলি হবে সমোষ্ণ তল।

মনে করি দণ্ডের দৈর্ঘ্য x-অক্ষ বরাবর আছে (চিত্র 7·5)। দণ্ডটির C প্রান্ত উচ্চ উষ্ণতায় আছে। C বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে x দূরত্বে δx বেধের LM একটি অনুপ্রস্থচ্ছেদস্তর বিবেচনা করা হল। ধরি পারিপার্শ্বিকের তুলনায় L বিন্দুতে উষ্ণতা θ। δx খুব ছোটো হলে $x+\delta x$ দূরত্বে (M বিন্দুতে) উষ্ণতা হবে $\theta+\frac{d\theta}{dx}\delta x$। দণ্ডটির প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল A এবং এর উপাদানের তাপ পরিবাহিতা K হলে, L ছেদ দিয়ে স্তরটির মধ্যে পরিবাহিত তাপের হার হবে $-\mathrm{KA}\frac{d\theta}{dx}$



7·5 চিত্র তাপের ঋজুরেখ প্রবাহ

এবং M ছেদের মধ্য দিয়ে স্তরটি থেকে বহির্গত তাপের হার হবে

$$-\mathrm{KA}\ \frac{d}{dx}\left(\theta+\frac{d\theta}{dx}\delta x\right)$$

স্তরটির মধ্যে মোট তাপ সঞ্চয়ের হার

$$=-\mathrm{KA}\frac{d\theta}{dx}-\left\{-\mathrm{KA}\frac{d}{dx}\left(\theta+\frac{d\theta}{dx}\delta x\right)\right\}$$

$$=-\mathrm{KA}\frac{d^2\theta}{dx^2}\delta x$$

(A) পরিবর্তনশীল অবস্থা ঃ পরিবর্তনশীল অবস্থায় গৃহীত তাপের (i) কিছু অংশ স্তরটির উষ্ণতা বৃদ্ধিতে ব্যয় হয় এবং (n) বাকি অংশ স্তরটির পৃষ্ঠতল থেকে বিকিরিত হয়।

দণ্ডের উপাদানের ঘনত্ব ρ, আপেক্ষিক তাপ s ও উষ্ণতা বৃদ্ধির হার $\frac{d\theta}{dt}$ হলে উষ্ণতা বৃদ্ধিতে ব্যয়িত তাপের হার $\mathrm{A}\delta x\rho s\frac{d\theta}{dt}$ ।

LM স্তরটির পরিধি p হলে উন্মুক্ত তলের ক্ষেত্র $p\delta x$ উন্মক্ত তলের বিকিরণ ক্ষমতা (একক ক্ষেত্রফলে একক পরিমাণ উষ্মতার পার্থক্যের জন্য বিকিরণ) E, পারিপার্শ্বিক থেকে অতিরিক্ত উষ্ণতা θ হলে, নিউটনের শীতলনের সূত্র থেকে বিকিরিত তাপের হার হবে

$$\mathrm{E}p\delta x\theta$$

শোষিত ও বিকিরিত তাপের হারের যোগফল লব্ধতাপের হারের সঙ্গে সমান অতএব,

$$KA\frac{d^2\theta}{dx^2}\delta x = A\delta x\rho s\frac{d\theta}{dt} + Ep\delta x\theta$$

বা, $$\frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{\rho s}\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{Ep}{A\rho s}\theta$$

বা, $$\frac{d\theta}{dt} = \lambda\frac{d^2\theta}{dx^2} - \mu\theta$$

এখানে $\lambda = \frac{K}{\rho s}$, $\mu = \frac{Ep}{A\rho s}$ ।

λ কে বলা হয় তাপ ব্যাপনতা বা তাপমাত্রিক পরিবাহিতা (thermal diffusivity or thermometric conductivity)। পরিবর্তনশীল অবস্থায় উষ্ণতা বৃদ্ধির হার তাপ ব্যাপনতার সাহায্যে পরিমাপ করা হয়। (7·13) সমীকরণকে এক মাত্রিক অর্থাৎ ঋজুরেখ তাপ প্রবাহের ফুরিয়ার সমীকরণ বলে।

বিকিরণের দরুণ তাপক্ষয় উপেক্ষা করলে অর্থাৎ চারদিক থেকে বিকিরণ হতে না দিলে E=0 হয়। তখন সমীকরণটি হবে $\frac{d\theta}{dt} = \lambda\frac{d^2\theta}{dx^2}$ .... (7·14)

(B) (স্থিত অবস্থা বা স্থিতিশীল অবস্থা) ঃ বেশ কিছুক্ষণ পরে দণ্ডের প্রতিটি বিন্দুতে উষ্ণতা স্থির হয়। তখন $\frac{\theta}{dt} = 0$ । (7·13) সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{\mu}{h}\theta = m^2\theta \quad .... \quad (7\cdot 15)$$

এখানে $m^2 = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{Eb}{KA}$

অবস্থা I স্থিত অবস্থায় পৃষ্ঠতল থেকে বিকিরণ উপেক্ষণীয় হলে $\mu = 0$, তখন সমীকরণটির পরিবর্তিত রূপ হবে

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = 0 \quad .... \quad (7\cdot 16)$$

দুবার সমাকলন করে এর সমাধান হবে

$$\theta = Ax + B \quad .... \quad (7\cdot 17)$$

এখানে A ও B দুটি ধ্রুবক।

সীমাশর্ত থেকে A ও B এর মান নির্ণয় করা যায়

সীমশর্ত ঃ যখন $x = 0$, $\theta = \theta_0$ .... (i)

$x = \lambda$, $\theta = \theta_1$ .... (ii)

প্রথম শর্তানুসারে $\theta_0 = B$

$\theta = Ax + \theta_0$

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $\theta_1 = Al + \theta_0$

বা, $$A = -\left(\frac{\theta_0 - \theta_1}{l}\right)$$

অতএব $$\theta = \theta_0 - \left(\frac{\theta_0 - \theta_1}{l}\right)x \quad .... (7\cdot18)$$

এই অবস্থায় অতিরিক্ত উষ্ণতা θ কে y-অক্ষ ও মূলবিন্দু থেকে দূরত্বকে x-অক্ষ ধরে লেখচিত্র আঁকলে একটি সরলরেখা পাওয়া যায় যার গতি হয় ঋণাত্মক (চিত্র 7·6)

অবস্থা II ঃ স্থির অবস্থায় পৃষ্ঠতল থেকে বিকিরণ উপেক্ষনীয় না হলে সমীকরণ (7·15)

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = m^2\theta$$

ধরি এর সমাধান $\theta = A'e^{nx}$

দুবার অবকলন করে পাই $\dfrac{d^2\theta}{dx^2} = A'n^2e^{nx} = n^2\theta$

$\therefore\ n^2 = m^2$ বা $n = \pm m$

অতএব সমাধান হল $\theta = Ae^{mx} + Be^{-mx}$ .... (17·19)

A ও B হল ধ্রুবক।

সীমাশর্ত থেকে A ও B এর মান নির্ণয় করা যায়

সীমাশর্ত ঃ যখন $x = 0$, $\theta = \theta_0$ .... (i)

$x = \propto$, $\theta = 0$ .... (ii)

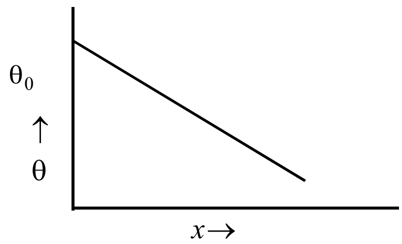
দুটি সীমাশর্ত বসিয়ে পাই

$\theta_0 = A + B$ ও $O = Ae^{m\alpha}$

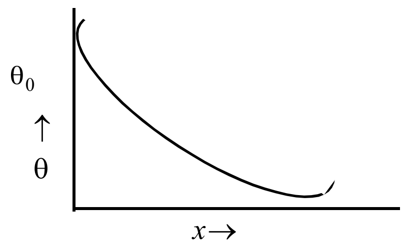
যেহেতু $e^{m\propto} \neq 0$, $A = 0$

$B = \theta_0$

অতএব $\theta = \theta_0 e^{-mx}$ .... (7·20)



7·6 স্থির অবস্থায় বিকিরণ নাহলে দূরত্বের সঙ্গে উষ্ণতার পরিবর্তন।

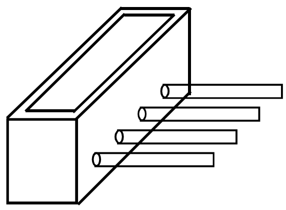


7·6 স্থির অবস্থায় বিকিরণ হলে দূরত্বের সঙ্গে উষ্ণতার পরিবর্তন।

অতিরিক্ত উষ্ণতা θ কে y অক্ষে ও মূল বিন্দু থেকে x অক্ষ ধরে আঁকলে এক্সপোনের্নশিয়াল সূত্র (7·20 সমীকরণ) মেনে দূরত্বর সঙ্গে অতিরিক্ত উষ্ণতা কমতে থাকবে (চিত্র 7·6)

7.21 ইন্‌জেন্‌হজের পরীক্ষা ঃ বিভিন্ন পদার্থের তাপ পরিবাহিতার î Ãÿ ò± (Ingenhousz's Experiment) : Comparison of Thermal Conductively of Different Substances) :

বিভিন্ন পরিবাহী পদার্থের যেমন সীসা, তামা, লোহা, বিসমার্থ ইত্যাদি) সমান দৈর্ঘ্যের ও প্রস্থচ্ছেদের দণ্ড নেওয়া হয়। দণ্ডগুলির পৃষ্ঠতল সমানভাবে পালিশ করে সমানভাবে পুরু মোমের পাতলা প্রলেপ দেওয়া হয়। এগুলি একটি পাত্রের অভ্যন্তরে অংশত (চিত্র 7·7) প্রবেশ করানোর ব্যবস্থা থাকে। পাত্রের মধ্যে গরম জল ঢাললে দেখা যাবে দণ্ডগুলিতে তাপ পরিবাহিত হয়ে মোম গলতে শুরু করেছে। প্রথমের দিকে পরিবর্তন অবস্থায় যে পদার্থের তাপ ব্যাপনতা বেশী সেই পদার্থের দণ্ডে দ্রুত পরিবাহিত হতে দেখা যায় ও তুলনামূলকভাবে বেশীদূর পর্যন্ত মোম গলে যাবে। যেমন তামার তুলনায় বিসমাথের পরিবাহিতা কম কিন্তু তাপ ব্যাপনতা বেশী হওয়ায় তামার তুলনায় বিসমাথে তাপপ্রবাহ বেশী হয়।



7·7 ইন্‌জেন্‌হদের পরীক্ষা

কিছুক্ষণ পরে ধীরে ধীরে স্থির অবস্থায় এলে দেখা যায় তামার তাপ পরিবাহিতা বেশী হওয়ার তামার দণ্ডে বেশীদূর পর্যন্ত মোম গলছে।

ধরি স্থির অবস্থায় বিভিন্ন পদার্থের দণ্ডের যে পর্যন্ত মোম গলেছে তাদের দূরত্ব l, l_2, l_3 .... ইত্যাদি এবং এদের m এর মান যথাক্রমে m_1 m_2 m_3 ইত্যাদি; গরমজলের উষ্ণতা θ_0 ও মোমের গলনাঙ্ক θ_1। প্রত্যেকটি দণ্ডের যে দূরত্ব পর্যন্ত মোম গলেছে সেখানে উষ্ণতা θ_1। দণ্ডগুলি যথেষ্ট লম্বা হলে, মুক্ত প্রান্তের উষ্ণতা সমান ও পরিবার্শ্বের থেকে এর পার্থক্য শূন্য হবে। অতএব (7·20) সমীকরণ অনুসারে

$$\theta_1 = \theta_0 e^{-mx} \qquad \text{বা, } \frac{\theta_1}{\theta_0} = e^{-mx} = \text{ ধ্রুবক}$$

অতএব বিভিন্ন দণ্ডের ক্ষেত্রে

$m, l_1 = m_2 l_2 = m_3 l_3$ = ধ্রুবক।

দণ্ডগুলির উপাদানের পরিবাহিতা K_1, K_2, K_3 ইত্যাদি হলে

$$\sqrt{\frac{Ep}{K_1 A}} l_1 = \sqrt{\frac{Ep}{K_2 A}} l_2 = \sqrt{\frac{Ep}{K_3 A}} l_3 = \text{ .... ধ্রুবক}$$

এখানে প্রত্যেকটি দণ্ডের পরিধি p, প্রস্থছেদের ক্ষেত্রফল A ও বিকিরণ ক্ষমতা E সমান। অতএব

$$\frac{l_1}{\sqrt{K_1}} = \frac{l_2}{\sqrt{K_2}} = \frac{l_3}{\sqrt{K_3}} = \text{ .... ধ্রুবক}$$

বা, $\frac{K_1}{l_1^2} = \frac{K_2}{l_1^2} = \frac{K_3}{l_3^2} =$ .... ধ্রুবক (7·21)

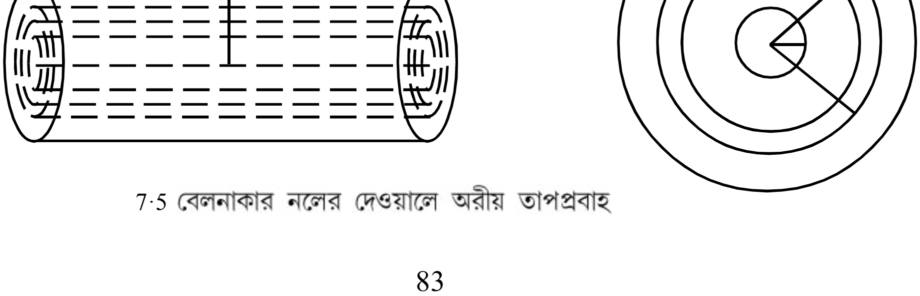
অর্থাৎ দণ্ডের উপাদানের পরিবাহিতা মোমগলনের দৈর্ঘ্যের বর্গের ব্যাস্তানুপাতিক, এই সমীকরণের সাহায্যে মোম গলনের দূরত্ব মেপে বিভিন্ন ধাতুর পরিবাহিতা তুলনা করা যায় অথবা কোনো দণ্ডের উপাদানের পরিবাহিতা জানা থাকলে পরোক্ষ পদ্ধতিতে অন্যাটির তাপ পরিবাহিতা নির্ণয় করা যায়।

7.22 কুপরিবাহী পদার্থের তাপ পরিবাহিতা পরিমাপ্ (Measurement of Conductively of Bad Conductors) :

সুপরিবাহী পদার্থের দীর্ঘ দণ্ড ব্যবহার করে তার এক প্রান্ত উচ্চ উষ্ণতায় রেখে বিভিন্ন দূরত্বে উষ্ণতা ও পরিবাহিতা তাপ পরিমাপ করে ঐ পদার্থের তাপ পরিবাহিতা নির্ণয় করা যায়। কিন্তু কুপরিবাহী পদার্থের তাপ পরিবাহিতা ঐভাবে নির্ণয় করা যায় না। এক্ষেত্রে পরিবাহিত তাপের তুলনায় দণ্ডের পৃষ্ঠতল থেকে বিকিরিত তাপের পরিমাণ বেশ বেশী। তাই বেশী দূরত্ব পর্যন্ত তাপ পরিবাহিত হয় না। কাচ, কাঠ, কর্ক, এজবেসটস্ প্রভৃতি কুপরিবাহী পদার্থের বেলায় পাতলা বেলনাকার খোলক, গোলকীয় খোলক বা প্লেট ব্যবহার করা হয় যাতে পরিবাহিত তাপ পরিমাপযোগ্য হয়।

7.23 বেলনাকার নলের দেওয়ালে অরীয় তাপপ্রবাহ (Radial Flow of Heat at the Walls of a Cylindrical Tube) :

কুপরিবাহী পদার্থের (কাচ, রবার ইত্যাদি) তৈরী একটি বেলনাকার নলের মনে করি ভিতরের ও বাইরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1 ও r_2 এবং দৈর্ঘ্য l। (চিত্র 7·8)। নলের ভিতরের অংশ অক্ষ বরাবর তড়িৎপ্রবাহ, উষ্ণ জল বা স্টীম পাঠিয়ে নির্দিষ্ট উষ্ণতায় রাখা হয়। নলের ব্যাসার্ধ বরাবর তাপ পরিবাহিত হয়। স্থির অবস্থায় ভিতরের (r_1 দূরত্বে) ও বাহিরের (r_2 দূরত্বে) উষ্ণতা ধরি যথাক্রমে θ_1 ও θ_2 ($\theta_1 > \theta_2$)। সমষ্ণোতলগুলি বেলনাকার। অক্ষ থেকে r দূরত্বে dr পুরু একটি সমাক্ষীয় বেলনাকার খোলকে ধরি r ও $3r + dr$ ও দূরত্বে উষ্ণতা যথাক্রমে θ ও $\theta + d\theta$। এর মধ্যে দিয়ে তাপ



7·5 বেলনাকার নলের দেওয়ালে অরীয় তাপপ্রবাহ

পরিবহনের হার

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = -KA\frac{d\theta}{dr} = -K.2\pi rl\frac{d\theta}{dr}$$

K ও A $(=2\pi rl)$ যথাক্রমে উপাদানের পরিবাহিত ও বেলনাকার পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল।

$$\therefore \quad \dot{Q}\frac{dr}{r} = -2\pi Kld\theta$$

এখানে সীমাশর্ত হল যখন $\quad r = r_1 \quad \theta = \theta_1$ .... (i)

$r = r_2, \quad \theta = \theta_2$ .... (ii)

নিশ্চিত সমাকলন করে পাই,

$$\dot{Q}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = -2\pi Kl\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta$$

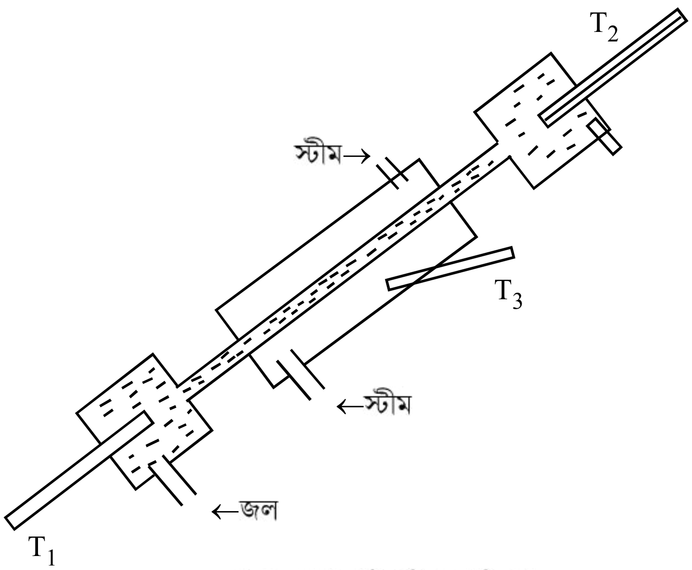
বা, $\dot{Q}\ln\frac{r_2}{r_1} = 2\pi Kl(\theta_1 - \theta_2)$

বা, $$K = \frac{\dot{Q}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi l(\theta_1 - \theta_2)} \quad .... \quad (7.22)$$

ডানদিকের রাশিগুলি পরিমাপ করে পদার্থের তাপ পরিবাহিতা নির্ণয় করা যায়।

কাচের তাপ পরিবাহিতা নির্ণয় ঃ

একটি স্টিম জ্যাকেট (J) এর মধ্যে কাচের নলটি রাখা হয় (চিত্র 7·9) নলের মধ্য দিয়ে জল ও জ্যাকেটের মধ্য দিয়ে স্টিম পাঠান হয়, T_1 ও T_2 থার্মোমিটার দিয়ে আগত ও নির্গত জলের উষ্ণতা মাপা হয়। T_3 থার্মোমিটার দিয়ে স্টিমের উষ্ণতা মাপা হয়। কাচের নলের মধ্যে একটি পেঁচানো তার রাখা হয় ও সমগ্র ব্যবস্থাটিকে অল্প আনত রাখা হয় যাতে জল নলের মধ্যে যাওয়ার সময় ভিতরের দেওয়ালের সঙ্গে ভালোভাবে



7·9 কাচের তাপ পরিবাহিতা পরিমাপ

সংস্পর্শে আসতে পারে। প্রথমে জ্যাকেটের মধ্যে স্টিম ও নলের মধ্যে নির্দিষ্ট বেগে জল পাঠানো হয়। কাচের দেওয়ালের মধ্যে তাপ বাহিরের দেওয়াল থেকে ভিতরের দেওয়ালে পরিবাহিত হয়ে জলকে উত্তপ্ত করবে। স্থির অবস্থায় কাচের দেওয়ালের মধ্য দিয়ে পরিবাহিত তাপের হার ও জল দ্বারা বাহিত তাপের হার সমান হবে। থার্মোমিটারগুলির উষ্ণতা স্থির হবে।

মনেকরি T_1 ও T_2 থার্মোমিটারের পাঠ যথাক্রমে θ_1 ও θ_2। θ_1 ও θ_2 এর পার্থক্য 10ºC এর মতো রাখা হয়, নির্দিষ্ট t সময়ে M পরিমাণ জল প্রবাহিত হলে, জলপ্রবাহের হার $m = \frac{M}{t}$ জলের আপেক্ষিক তাপ s হলে জলদ্বারা বাহিত তাপের হার = $ms(\theta_1 – \theta_1)$ নলের ভিতরের গড় উষ্ণতা $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ । স্টীমের উষ্ণতা θ_3 থেকে $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ গড় উষ্ণতায় তাপ পরিবাহিত হচ্ছে। নলের ভিতরের ও বাহিরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1 3r_2 এবং দৈর্ঘ্য l হলে, তাপ পরিবহনের হার

$$\dot{Q} = \frac{2\pi Kl\left(\theta_3 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = ms(\theta_2 - \theta_1)$$

(তাপক্ষয় উপেক্ষা করা হয়েছে)

অতএব পরিবাহিতা

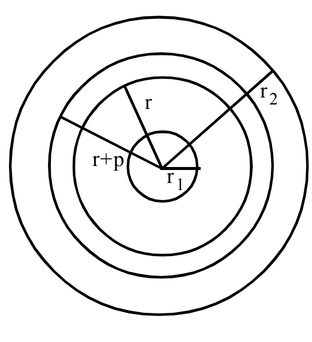
$$K = \frac{ms(\theta_2 - \theta_1)\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi l\left(\theta_3 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} \quad \text{..............} \quad (7\cdot23)$$

সমীকরণ (7·23) থেকে K -এর মান নির্ণয় করা যায়।

7.24 গোলকাকার খোলকে অরীয় তাপপ্রবাহ (Radial Flow of Heat in a Spherical Shell) :

কুপরিবাহী পদার্থের একটি খোলকের কেন্দ্রে (চিত্র 7·10) একটি তাপের উৎস রাখা হয়। তড়িৎ প্রবাহের সাহায্যে শক্তি প্রযুক্ত হয়। ব্যাসার্ধ বরাবর তাপ বাহিরের দিকে প্রবাহিত হয়। কিছুক্ষণের মধ্যে ব্যাবস্থাটির উষ্ণতা স্থির অবস্থায় আসবে।

মনে করি খোলকের ভিতরের ও বাহিরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1 ও r_2 এবং স্থির উষ্ণতা যথাক্রমে θ_1 ও θ_2 ($\theta_1 > \theta_2$)। এখানে সমোষ্ণতলগুলি সমকেন্দ্রিয় গোলীয় তল। r_1 ব্যাসার্ধের ও dr বেধের একটি সমকেন্দ্রিক খোলক বিবেচনা করা হল। স্থির অবস্থায়



7·10 গোলকাকার খোলকে অরীয় তাপ প্রবাহ

খোলকটির ভিতরের ও বাইরের পৃষ্ঠের উষ্ণতা ধরি যথাক্রমে θ ও (θ–dθ)। খোলক দিয়ে তাপ পরিবহনের হার

$$\dot{Q} = -KA\frac{d\theta}{dr} = -K4\pi r^2\frac{d\theta}{dr}$$

এখানে $A = 4\pi r^2 =$ গোলীয় তলের ক্ষেত্রফল

K = উপাদানের তাপ পরিবাহিতা

বা, $\dot{Q}\dfrac{dr}{r^2} = -K4\pi d\theta$

সীমাশর্ত হল, যখন $r = r_1,\ \theta = \theta_1$ .... (i)

$r = r_2,\ \theta = \theta_2$ .... (ii)

নিশ্চিত সমাকলন করে পাই

$$\dot{Q}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -4\pi K\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta$$

বা, $\dot{Q}\left[\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right] = 4\pi K(\theta_2 - \theta_1)$

বা, $\dot{Q}\dfrac{r_2 - r_1}{r / r_2} = 4\pi K(\theta_1 - \theta_2)$

$$\therefore\ K = \frac{\dot{Q}}{4\pi(\theta_1 - \theta_2)}\cdot\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \quad .... (7.24)$$

স্থির অবস্থায় V ভোল্ট বিভব প্রভেদে I অ্যামপিয়ার তড়িৎপ্রবাহ মাত্রা হলে, শক্তি গ্রহণের হার $\dot{Q} = VI$

$$K = \frac{VI}{4\pi(\theta_1 - \theta_2)}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \quad .... (7\cdot25)$$

এই সমীকরণ থেকে K এর মান নির্ণয় করা যায়, কুপরিবাহী পদার্থ সাধারণত যেগুলি গুঁড়ো অবস্থায় পাওয়া যায় যেমন বালি, কর্ক, অ্যাজবেসটস্ গুঁড়ো, ইত্যাদি গোলীয় খোলকের মধ্যে রেখে এই পদ্ধতিতে এদের তাপ পরিবাহিতা নির্ণয় করা যায়।

7.25 'লী' এর চাকতি পদ্ধতিতে কুপরিবাহী পদার্থের পরিবাহিতা নির্ণয় (Determination of Thermal Conduction of Bad Conductor by Lee's Disc Method)

লী ও চার্লটন (Charlton) এই পদ্ধতিতে চাকতি আকারের কুপরিবাহী পদার্থের পরিবাহিতা নির্ণয় করেন। 7.11 নং চিত্রে এই পরীক্ষা ব্যবস্থাটির বিভিন্ন অংশ দেখানো হয়েছে। একটি স্টীম প্রকোষ্ঠ C-এর নিচের অংশে একটি ধাতব চাকতি A যুক্ত আছে। যে পদার্থের তাপ পরিবাহিতা নির্ণয় করতে হবে তার চাকতি B-কে A

চাকতি ও অন্য একটি ধাতব চাকতি D -এর মধ্যে রাখা হয়। A, B ও D -এর ব্যাস প্রায় সমান রাখা হয়। A ও D চাকতির মধ্যে গর্ত করে T_1 ও T_2 থার্মোমিটার রাখার ব্যবস্থা করা হয়। সমস্ত ব্যবস্থাটি চেন দিয়ে স্ট্যাণ্ডে ঝোলানো থাকে। স্টীম C প্রাকোষ্ঠে E প্রবেশ দ্বার দিয়ে প্রবেশ করে ও F নির্গম দ্বার দিয়ে বেরিয়ে যায়। দীর্ঘ রবারের নল দিয়ে স্টীম আসা যাওয়ার নিয়ন্ত্রণ করা হয়। স্টীম পাঠানোর কিছু সময় পরে থার্মোমিটারের পাঠ আর বাড়বে না। সেটি স্থির অবস্থা, এই অবস্থায় T_1-এর পাঠ T_2 এর পাঠের থেকে বেশী হবে। ধরি এই পাঠ যথাক্রমে θ_1 ও θ_2 । ঐ উষ্মতা পার্থক্যের জন্য কুপরিবাহী চাকতির মধ্য দিয়ে পরিবাহিত তাপ নীচের D চাকতি থেকে বিকিরণের সঙ্গে সমান। বিকিরিত তাপের পরিমাণ নির্ণয়ের জন্য একটি সহায়ক পরীক্ষা করা হয়। এই পরীক্ষায় D চাকতিকে এর পূর্বের স্থির অবস্থায় উষ্মতার থেকে সামান্য উচ্চতর উষ্মতায় (প্রায় 5ºC) এনে, B চাকতিকে উপরে রেখে ষ্টীম প্রকোষ্ঠের ষ্টীম বন্ধ করে D চাকতির শীতলনের উষ্মতা সময়ের সঙ্গে পরিমাপ করা হয়। উষ্মতা-সময় শীতলন লেখ থেকে D চাকতির স্থির উষ্মতায় (θ_2) স্পর্শক টেনে শীতলতার হার $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\theta_2}$ নির্ণয় করা হয়। B চাকতির বেধ d, ক্ষেত্রফল A ও এর উপাদানের তাপ পরিবাহিতা K হলে, B চাকতি দিয়ে পরিবাহিত তাপের হার

$$\dot{Q} = \frac{KA(\theta_1 - \theta_2)}{d}$$

D চাকতির ভর m, উপাদানের আপেক্ষিক তাপ S, শীতলতার হার $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\theta_2}$ হলে, বিকিরিত তাপের হার

$$\dot{Q}' = ms\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\theta_2}$$

স্থির অবস্থায় $\dot{Q} = \dot{Q}'$

অতএব, $$\frac{KA(\theta_1 - \theta_2)}{d} = ms\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\theta_2}$$

বা, $$K = \frac{msd\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\theta_2}}{A(\theta_1 - \theta_2)} \quad \text{..................} \quad (7{\cdot}26)$$

এই সমীকরণের সাহায্যে K এর মান নির্ণয় করা হয়।

7.26 গণিতিক উদাহরণ

উদাহণ 1. নিম্নলিখিত তথ্য থেকে সূর্যের পৃষ্ঠতলের গড় উষ্ণতা নির্ণয় করুন। সৌর ধ্রুবক = 1360 W/m^2, স্টেফান ধ্রুবক = $5{\cdot}67\times10^{-8}$ wm^{2}K^{-1}, সূর্য্যের গড় ব্যাসার্ধ =$7{\cdot}0\times10^8$m, সূর্য ও পৃথিবীর মধ্যে গড় দূরত্ব = $1{\cdot}49\times10^{11}$m

সমাধান : এখানে S=1360 w/m^2, $\sigma=5{\cdot}67\times10^{-8}$Wm^{2}K^{-1}

সূর্যের ব্যাসার্ধ $R_S = 7{\cdot}0\times10^8$m সূর্য ও পৃথিবীর মধ্যে গড় দূরত্ব

$r_{SE} = 1{\cdot}44\times10^{11}$m

স্টেফানের সূত্রানুযায়ী, সূর্য থেকে বিকিরিত তাপের হার

$= 4\pi R_S^2 \sigma T^4$

পৃথিবী পৃষ্ঠে একক ক্ষেত্রফলে আপতিত তাপের হার

$$S = \frac{4\pi R_S^2 \sigma T^4}{4\pi r_{SE}^2}$$

$$\therefore\ T^4 = \frac{S}{\sigma}\left(\frac{r_{SE}}{R_S}\right)^2 = \frac{1360}{5'67\times10^{-8}}\cdot\left(\frac{1\cdot49\times10^{11}}{7\cdot0\times10^{8}}\right)^2$$

$$\therefore\ T = 5741\cdot6\text{K}$$

উদাহরণ 2. 27° এর পরিবার্শ্বের মধ্যে 227°C উষ্ণতায় রক্ষিত 10 cm ব্যাসের কোনো গোলক প্রতি সেকেণ্ডে কী পরিমাণ শক্তি নির্গত করে। দেওয়া আছে $\sigma = 5{\cdot}67\times10^{-8}\text{Wm}^2\text{K}^{-4}$

সমাধান : প্রতি সেকেণ্ডে বিকীর্ণ তাপ

$$E = 4\pi r^2\sigma(T^4 - T_0^4)$$

$$= 4\pi(0\cdot05)^2\times5\cdot67\times10^{-8}(500^4 - 300^4)$$

$$= 96\cdot9\,\text{W}$$

উদাহরণ 3. কাছাকাছি থাকা দুটি বড় সমকেন্দ্রিক গোলক (দুটিই কৃষ্ণবস্তু বিকিরক) 400K ও 600K উষ্ণতায় আছে। দুটি গোলকের মাঝের স্থান বায়ুশূন্য করা হয়েছে। এদের মধ্যে শক্তি প্রদানের হার কত? দেওয়া আছে $\sigma = 5{\cdot}672\times10^{-8}$ MKS একক।

সমাধান : গোলকদুটির মধ্যে একক ক্ষেত্রফলে শক্তি প্রদানের হার

$$E = \sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

$$= 5\cdot672\times10^{-8}(600^4 - 400^4)$$

$$= 5899\ \text{Watt/m}^2$$

উদাহরণ 4. একটি কৃষ্ণবস্তুর প্রারম্ভিক উষ্ণতা 300ºC ; একে বরফাচ্ছাদিত বায়ুশূন্য একটি বেষ্টনীর মধ্যে রেখে শীতল হতে দেওয়া হল। এর শীতলতার হার 0·35ºC/S, বস্তুর ভর আপেক্ষিক তাপ ও তলক্ষেত্র যথাক্রমে 32 g, 0·1 এবং $8\times10^{-4}\text{m}^2$ হলে স্টেফানের ধ্রুবকের মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $\dfrac{d\theta}{dt} = 0\cdot35^\circ$C/S আপেক্ষিক তাপ S = 0·1×4200/J/kg, ভর m = 0.032 kg, তলক্ষেত্র $A = 8\times10^{-4}\text{m}^2$

বিকীর্ণ তাপের হার $\frac{d\theta}{dt} = ms\frac{d\theta}{dt} = \sigma A\left(T_1^4 - T_0^4\right)$

বা, $0.032\times0.1\times4200\times0.35 = \sigma\times8\times10^{-4}(573^4-273^4)$

$$\therefore\ \sigma = \frac{0.032\times0.1\times4200\times0\cdot35}{8\times10^{-4}\times(573^4-273^4)} = 5\cdot75\times10^{-8}\,w/m^2K^4$$

উদাহরণ 5. মনে করুন সূর্য 7.5×10^8m ব্যাসার্ধের একটি গোলক। এর পৃষ্ঠতলের উষ্ণতা 5727ºC এবং এটি স্টেফান সূত্রানুযায়ী শক্তি বিকিরণ করছে। সূর্যের কেন্দ্র থেকে 1.5×10^{11}m দূরে একটি গ্রহ আপতিত সৌর শক্তি সম্পূর্ণ শোষণ করছে এবং নিজের পৃষ্ঠতল থেকে স্টেফান সূত্রানুযায়ী শক্তি বিকীর্ণ করছে। এর সাম্য উষ্ণতা কত?

সমাধান : দেওয়া আছে সূর্যের ব্যাসার্ধ $R_S=7\cdot5\times10^8$m

এর পৃষ্ঠতলের উষ্ণতা $T_S = 5727+273 = 6000$k

সূর্য থেকে গ্রহের দূরত্ব $r_{SE} = 1\times5\times10^{11}$m

স্টেফান ধ্রুবক = σ (ধরি)

গ্রহটির উষ্ণতা = T_p ও ব্যাসার্ধ = r_p

সূর্য থেকে r_{SE} দূরত্বে একক ক্ষেত্রফলে বিকর্ণ তাপের হার

$$= \frac{r\pi R_S^2\sigma_S^4}{4\pi r_{SE}^2} = \left(\frac{R_S}{r_{SE}}\right)^2 \sigma T_S{}^4$$

বিকিরণের দিকে গ্রহটির প্রক্ষিপ্ত ক্ষেত্রফল $= \pi r_p^2$

অতএব গ্রহটি কর্তৃক গৃহীত তাপের হার $= \left(\frac{R_S}{r_{SE}}\right)^2 \sigma T_S^4 \times \pi r_p^2$ .... (i)

স্টেফানের সূত্রানুযায়ী গ্রহটির সম্পূর্ণতল থেকে বিকীর্ণ তাপের হার $= 4\pi r_p^2\sigma T_p^4$ ..... (ii)

তাপীয় সাম্যে আছে বলে (i) ও (ii) সমীকরণ পরস্পর সমান

অতএব, $\left(\frac{R_S}{R_{SE}}\right)^2 \sigma T_S^4 \pi r_p^2 = 4\pi r_p^2 \sigma Tp^4$

বা, $T_p^4 = \left(\frac{R_S}{r_{SE}}\right)^2 \frac{T_S{}^4}{4} = \left(\frac{7\cdot5\times10^8}{1\cdot5\times10^{11}}\right)^2 \frac{(6000)^4}{4}$

$\therefore\ T_4 = 300K$

উদাহরণ 6. পৃথিবী থেকে দেখা সূর্যের গড় কৌণিক ব্যাসার্ধ $4\cdot649\times10^{-3}$ রেডিয়ান, স্টেফান ধ্রুবক

$5{\cdot}67\times10^{-8}$ $wm^{-2}K^{-4}$ হলে সৌর ধ্রুবকের মান কত হবে? (সূর্যের কার্যকরী উষ্ণতা 5732K)

সমাধান : ধরি সূর্যের ব্যাস R_S সূর্য থেকে পৃথিবীর গড় দূরত্ব R_{SE}

অতএব সূর্যের কৌণিক ব্যাসার্ধ $\theta = \frac{R_S}{R_{SE}} = 4 \cdot 64 \times 10^{-3}$ রেডিয়ান।

সূর্য কর্তৃক বিকীর্ণ তাপের হার $= 4\pi R_S^2 \sigma T^4$

$\sigma =$ স্টেফান ধ্রুবক $T =$ সূর্যের কার্যকরী উষ্ণতা

$$S = \frac{4\pi R_S^2 \sigma T^4}{4\pi r_{SE}^2} = \left(\frac{R_S}{r_{SE}}\right)^2 \sigma T^4 = \theta^2 \sigma T^4$$

$=(4.649\times10^{-3})^2 \times 5.67\times10^{-8}\times(5732)^4$

$= 1322.9$ w/m^2

উদাহরণ 7. ওরিয়ন কনস্টেলেশন (Orion Constellation) এর একটি নক্ষত্রের জ্যোতি তীব্রতা (luminous intensity) আমাদের সূর্যের 17,000 গুণ। সূর্যের পৃষ্ঠের উষ্ণতা 6000K হলে ঐ নক্ষত্রের উষ্ণতা কত?

সমাধান : নক্ষত্র ও সূর্যের তীব্রতা যথাক্রমে E_1 ও E_2 এবং উষ্ণতা যথাক্রমে T_1 ও T_2 হলে

$E_1 = \sigma T_1^4 \cdot E_1 = \sigma T_1^4$

(পারিবার্শ্বিকের উষ্ণতা উপেক্ষা করা হয়েছে)

$\therefore \frac{E_1}{E_2} = \frac{T_2^4}{T_2^4}$ বা, $T_1^4 = \frac{E_1}{E_2}.T_2^4$

$\therefore T_1^4 = 17000 \times (6000)^4$

$\therefore T_1 = 68511{\cdot}5K$

উদাহরণ 8. কোনো জলাশয়ের ওপর 5 cm পুরু বরফ জমে আছে এবং জলাশয়ের উপরের বায়ুর উষ্ণতা -20^oC। কত সময়ে বরফ স্তরের বেধ দ্বিগুণ হবে? প্রয়োজনীয় রাশিমালা উৎপাদন করুন। দেওয়া আছে বরফের তাপ পরিবাহিতা = 2^o1 SI একক, বরফের ঘনত্ব = 910 kg/m^3, বরফ গলনের লীনতাপ $=3.36\times10^5$ J/kg

সমাধান : মনে করি জলাশয়ের উপরে বায়ুমণ্ডলের উষ্ণতা $-\theta^o C$ এবং যে কোনো সময়ে জলের উপর জমা বরফের স্তরের বেধ x বরফস্তরের ঠিক নিচে জলের উষ্ণতা 0°C। বরফস্তরের মধ্য দিয়ে জল থেকে বায়ুমণ্ডলে তাপ পরিবাহিত হয় ও জল লীনতাপ ছেড়ে দিয়ে বরফে পরিণত হয়। ধরি বরফের তাপ পরিবাহিতা K, জলাশয়ের উপর তলের ক্ষেত্রফল A, dt সময়ে জল থেকে বায়ুমণ্ডলে পরিবাহিত তাপ

$$d\theta = \frac{KA\theta}{x} dt$$

ধরি বরফের লীন তাপ L এবং O°C উষ্ণতায় ঘনত্ব ρ। dQ পরিমাণ তাপ ক্ষয়ের জন্য উৎপন্ন বরফের ভর

$$dm = \frac{d\theta}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{KA}\theta}{\mathrm{L}x}dt$$

বরফস্তরের বেধ dt সময়ে dx পরিমাণ বাড়লে

$$dx = \frac{dm}{\rho \mathrm{A}} = \frac{\mathrm{K}\theta}{\mathrm{PL}x}dt$$

বা, $\dfrac{\mathrm{PL}x}{\mathrm{K}\theta}dx = dt$

বরফস্তর t সময়ে x_1 থেকে বেড়ে x_2 হলে, নিশ্চিত সমাকলন করে পাই

ঝ $\dfrac{\mathrm{PL}}{\mathrm{K}\theta}\int_{x_1}^{x_2} x dx = \int_0^t dt$ বা, $\dfrac{\mathrm{PL}}{\mathrm{K}\theta}\dfrac{(x_2{}^2 - x_1^2)}{2} = t$

$$\therefore\ t = \frac{\mathrm{PL}}{2\mathrm{K}\theta}(x_2^2 - x_1^2)$$

এখানে দেওয়া আছে,

x_1 = 0.05m, x_2 = 0.1m, θ=20ºC. K=2·1 SI unit

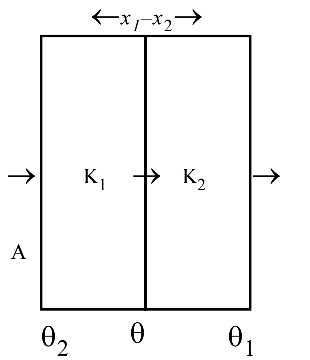
ρ=910 kg/m^3, L = 3·36×10^5 J/kg

$$\therefore t = \frac{910 \times 3\cdot 36 \times 10^5 \times \{(0\cdot 1)^2 - (0\cdot 05)^2\}}{2 \times 2\cdot 1 \times 20} = 27300 = 7s35m$$

উদাহরণ 9. একটি চেম্বারের দেওয়াল অপরিবাহী ইট দিয়ে তৈরী এবং এর বেধ 0.08 m । এর ভিতরের দেওয়াল 0.04 m কর্ক দিয়ে আবৃত। যদি চেম্বারের ভিতরের উষ্ণতা 10ºC এবং বাইরের উষ্ণতা 20ºC হয় তবে সংযোগ স্থলের উষ্ণতা কত হবে?

[ইটের K=0.168 SI একক ও কর্কের K=0.042 S.I একক]

সমাধান ঃ ধরি ইট ও কর্কের বেধ যথাক্রমে x_1 ও x_2 ও তাপ পরিবাহিতা যথাক্রমে K_1 ও K_2 বাইরের ও ভিতরের উষ্ণতা যথাক্রমে θ_2 ও θ_1 এবং সংযোগস্থলের উষ্ণতা θ (θ_2>θ>θ_1) দুটির ক্ষেত্রফল A। দুটিতে তাপ পরিবহণের হার সমান



$$\therefore\ \mathrm{Q} = \frac{\mathrm{K}_1\mathrm{A}(\theta_1 - \theta)}{x_1} = \frac{\mathrm{K}_2\mathrm{A}(\theta - \theta_1)}{x_2}$$

বা, $\therefore\ \dfrac{\theta_2 - \theta}{x_1/\mathrm{K}_1} = \dfrac{\theta - \theta_1}{x_2/\mathrm{K}_2}$

বা, $\theta\left(\dfrac{1}{x_2/\mathrm{K}_2} + \dfrac{1}{x_1/\mathrm{K}_1}\right) = \dfrac{\theta_2}{x_1/\mathrm{K}_1} + \dfrac{\theta_1}{x_2/\mathrm{K}_2}$

বা, $\theta\left(\frac{K_2}{x_2}+\frac{K_1}{x_1}\right)=\frac{K_1\theta_2}{x_1}+\frac{K_2\theta_1}{x_2}$

বা $\theta=\frac{K_1\theta_2 x_2+K_2\theta_1 x_1}{K_2 x_1+K_1 x_2}$

দেওয়া আছে, K_1 = 0.168 SI unit, K_2 = 0.042 SI unit

x_1 = 0.08 m, x_2 = 0.04 m

θ_2 = 20ºC θ_1 = 10ºC

$$\theta=\frac{0\cdot168\times20\times0\cdot04+0\cdot042\times10\times0\cdot08}{0\cdot042\times0\cdot08+0\cdot168\times0\cdot04}=\frac{0\cdot168}{0\cdot01008}=16\cdot67^{o}C$$

উদাহরণ 10. একটি লম্বা ধাতুদণ্ডের একটি প্রান্ত 100ºC উষ্ণতার উৎসের সংস্পর্শে আছে। স্থির অবস্থায় উৎস থেকে 0·1 m দূরে একটি বিন্দুতে উষ্ণতা 60ºC, 0·2 m দূরে অপর একটি বিন্দুতে উষ্ণতা কত হবে? (দণ্ডের পৃষ্ঠতল থেকে বিকিরণ উপেক্ষনীয়)

সমাধান ঃ স্থির অবস্থায় পৃষ্ঠতল থেকে বিকিরণ উপেক্ষা করলে ফুরিয়ারের সমীকরণ হয়

$\frac{d^2\theta}{dx^2}=0$, θ হল x দূরত্বের উষ্ণতা

সীমাশর্ত বসিয়ে এর সমাধান $\theta=\theta_0-\frac{\theta_0-\theta_1}{l}.x$

এখানে θ_0 = উৎসের উষ্ণতা, $\theta_1=l$ দূরত্বে উষ্ণতা দেওয়া আছে, $\theta_0=100^{o}\mathrm{C}$ $\theta_1=60^{o}\mathrm{C}, l=0\cdot1m$, $x=0.2m$

$\therefore\ \theta=100-\frac{100-60}{0\cdot1}\times0\cdot2=20^{o}\mathrm{C}$

উদাহরণ 11. $2\times10^{-6}\Omega m$ রোধাঙ্ক যুক্ত 1 mm ব্যাসের একটি তারে 10A তড়িৎপ্রবাহ হচ্ছে। একটি 1 cm ব্যাসের বেলনাকার কুপরিবাহী পদার্থ দিয়ে এটি ঢেকে দেওয়া আছে। কুপরিবাহী পদার্থের পরিবাহিতা 0·252 W/m^{o}C কুপরিবাহী বেলনের ভিতর ও বাহিরের উষ্ণতার পার্থক্য কত?

সমাধান ঃ (7.22) সমীকরণ অনুসারে বেলনাকার কুপরিবাহীর মধ্যে অরীয় তাপপ্রবাহের হার

$$\dot{Q}=\frac{2\pi Kl(\theta_1-\theta_2)}{m\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

বা, $$\theta_1-\theta_2=\frac{\dot{Q}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi Kl}$$

এখানে $r_1=5\times10^{-4}m,\ r_2=5\times10^{-3}m,\ K=0\cdot252\ \mathrm{wm^{-1}{}^{\circ}C^{-1}}$

তরিৎ প্রবাহের সাহায্যে lm দৈর্ঘ্যের তারে তাপ উৎপাদনের হার

$$\dot{Q} = i^2 R = i^2 \frac{\rho l}{A} = (10)^2 \times \frac{2 \times 10^{-6} \times l}{\pi(5 \times 10^{-4})^2}$$

$$= 254 \cdot 65 l \text{W}$$

$\therefore$ তাপমাত্রার পার্থক্য, $\theta_1 - \theta_2 = 254 \cdot 65\, l \times \dfrac{\ln\left(\dfrac{5 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-4}}\right)}{2\pi \times 0 \cdot 252 l}$

$= 370 \cdot 32^\circ\text{C}$

উদাহরণ 12. 0·012 m পুরু লোহার পাত দিয়ে তৈরী একটি বয়লারের বাহিরের ও ভিতরের উষ্ণতা যথাক্রমে 120ºC ও 100ºC প্রতি ঘণ্টায় কী পরিমাণ জল বাষ্পীভূত হবে। দেওয়া আছে বয়লারে গরম করার ক্ষেত্রফল 5m^2 লোহার তাপ পরিবাহিতা 84 SI একক, জলের বাষ্পীভবনের লীনতাপ = $2 \cdot 268 \times 10^6$J/kg

mkg জল 1 ঘণ্টায় বাষ্পীভূত হলে

$$Q = KA = \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{x} t = mL$$

$$\therefore\ m = \frac{KA\ (\theta_2 - \theta_1)t}{Lx}$$

$$= \frac{84 \times 5 \times 20 \times 60 \times 60}{2 \cdot 268 \times 10^6 \times 0 \cdot 012} = 1 \cdot 11 \times 10^3 \text{ kg}$$

উদাহরণ 13. 5 cm ও 15 cm ব্যাসার্ধের দুটি সমকেন্দ্রিক গোলকীয় খোলকের ভিতরের স্থান কাঠকয়লা দিয়ে ভর্তি আছে। কেন্দ্রে রক্ষিত একটি হিটারে 10.8W হারে শক্তি প্রযুক্ত হচ্ছে। দুটি গোলকের মধ্যে উষ্ণতার পার্থক্য 50ºC হলে, কাঠ কয়লার তাপ পরিবাহিতা কত।

সমাধান ঃ (7·24) সমীকরণ অনুসারে

$$K = \frac{\dot{Q}}{4\pi(\theta_1 - \theta_2)} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$= \frac{10 \cdot 8}{4\pi 50} \cdot \frac{0 \cdot 15 - 0 \cdot 05}{0 \cdot 05 \times 0 \cdot 15} = 0 \cdot 229 \text{ wm}^{-1}\text{deg}^{-1}$$

উদাহরণ 14. 0·3 m দীর্ঘ একটি কাচ নলের বহিস্থ ব্যাস 0·01 m এবং অভ্যন্তরের ব্যাস 8×10^{-3} মি। এই নলের ভিতর দিয়ে প্রতি মিনিটে 0·5 kg জল প্রবাহিত হচ্ছে। নলটির বাইরে চারপাশ ঘিরে 760 mm পারদের চাপে স্টীম আছে। ফলে নলের মধ্য দিয়ে প্রবাহিত হওয়ার সময় জলের উষ্ণতা 20ºC থেকে 30ºC হচ্ছে। কাচের তাপপরিবাহীতা কত?

সমাধান ঃ (7·23) সমীকরণ ব্যবহার করে পাই

$$K = \frac{ms(\theta_2 - \theta_1)\ln\left(r_2/r_1\right)}{2\pi l\left(\theta_3 - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}$$

এখানে $m = 0{\cdot}5/60$ kg/s জল প্রবাহের হার

$\theta_1 = 20°C$, $\theta_2 = 30°C$, $r_1 = 4\times10^{-3}m$, $r_2 = 5\times10^{-3}m$, $\theta_3 = 100°C$

$l = 0{\cdot}3m$, $S = 4200$ J/kg

$$\therefore\ K = \frac{0\cdot5}{60}\times\frac{4200(30-20)}{2\pi\times0\cdot3\times(100-25)}\ln\left(\frac{5\times10^{-3}}{4\times10^{-3}}\right) = 0\cdot552 \text{ S.I. একক।}$$

7.27 প্রশ্নাবলি

(i) বিষয়মুখী প্রশ্ন ঃ

1. কোনো ধাতব দণ্ডের এক প্রান্ত উনুনে ধরলে অপর প্রান্ত উষ্ণ হয়ে ওঠে। কী পদ্ধতিতে তাপ সঞ্চালিত হয়?
2. উনুনের উপরে হাত রাখলে খুব গরম মনে হয় কী পদ্ধতিতে তাপ সঞ্চালিত হয়?
3. উনুনের পাশে হাত রাখলে গরম অনুভব করা যায়। কী পদ্ধতিতে তাপ সঞ্চালিত হয়?
4. সূর্য থেকে তাপ পৃথিবীতে কী পদ্ধতিতে সঞ্চালিত হয়?
5. বিকীর্ণ তাপের দুটি ধর্মের উল্লেখ করুন।
6. দৃশ্যমান আলোর তরঙ্গদৈর্ঘ্যের মোটামুটি পাল্লা লিখুন।
7. আদর্শ কৃষ্ণবস্তু কাকে বলে?
8. আদর্শ শুভ্রবস্তু কাকে বলে?
9. তামা ও কাচ—কার তাপ পরিবাহিতা বেশী?
10. তাপ পরিবহনের ক্ষেত্রে স্থির অবস্থা বলতে কী বোঝায়?

(ii) সংক্ষিপ্ত উত্তরের প্রশ্ন ঃ

1. তাপ সঞ্চালনের বিকিরণ পদ্ধতি কাকে বলে?
2. কৃষ্ণবস্তু বলতে কী বোঝায়?
3. প্রিভাস্টের তাপ বিনিময় তত্ত্ব কী?
4. কৃষ্ণবস্তু বিকিরণের সংজ্ঞা দিন।
5. একটি উত্তম বিকিরক, একটি উত্তম শোষকও —ব্যাখ্যা করুন।
6. কৃষ্ণবস্তু কাকে বলে? কোনো বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা ও শোষণ ক্ষমতা বলতে কী বোঝায়?
7. 'গ্রীণ হাউস' বা সবুজায়ন কক্ষ কাকে বলে?
8. স্টেফানের সূত্রটি বিবৃত করুন।

9. স্টেফানের সূত্র থেকে নিউটনের শীতলন সূত্র পাওয়া যায় কীভাবে?
10. তাপ ভেদ্য ও তাপ অভেদ্য বস্তু কাকে বলে?
11. ফ্রাউনহফার রেখা কাকে বলে? এর উৎপত্তির কারণ কী?
12. বিকিরণ পাইরোমিটারের নীতি কী?
13. সৌর ধ্রুবক কাকে বলে?
14. তাপ পরিবাহিতার সংজ্ঞা দিন। CGS ও SI পদ্ধতিতে এর একক কী?
15. তাপ পরিবাহিতার মাত্রা নির্ণয় করুন।
16. একটি মোটা কাচের পাত্রে ও একটি পাতলা কাচের পাত্রে ফুটন্ত জল ঢাললে কোন্‌টি ফেটে যাওয়ার সম্ভাবনা বেশী? যুক্তি সহ উত্তর দিন।
17. তাপ পরিবাহিতা ও তাপ ব্যাপনতার মধ্যে সম্পর্ক কী?
18. তাপ প্রবাহে পরিবর্তনশীল অবস্থা বলতে কী বোঝায়।
19. একটি কাঠের টুকরো ও একটি ধাতুর টুকরো একই উষ্ণতায় আছে এদের স্পর্শ করলে কীরূপ বোধ হবে?
20. সবুজায়ন কক্ষ কাকে বলে?

(iii) রচনাধর্মী প্রশ্ন ঃ

1. (a) কোনো বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা ও শোষণ ক্ষমতা বলতে কী বোঝায়?

   (b) বস্তুর বিকিরণ ও শোষণ ক্ষমতা সম্পর্কিত কির্কফ-এর সূত্রটি বিবৃত করে ব্যাখ্যা করুন। কৃষ্ণবস্তু কী? বাস্তবে কীভাবে কৃষ্ণবস্তু প্রস্তুত করা যায়?
2. কৃষ্ণবস্তু কাকে বলে? কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণ সম্পর্কিত স্টেফান বোলৎস্‌মান সূত্রটি বিবৃত করুন ও ব্যাখ্যা করুন। সূত্রটি থেকে নিউটনের শীতলন সূত্র কীভাবে উৎপাদন করা যায়?
3. (a) শোষণ ক্ষমতা কাকে বলে? এর থেকে কৃষ্ণবস্তুর সংজ্ঞা দিন।

   (b) সৌর ধ্রুবক কী?

   (c) স্টেফান সূত্র থেকে সূর্যের উষ্ণতা কীভাবে পরিমাপ করা যায় ব্যাখ্যা করুন।
4. (a) কির্কফ-এর সূত্র থেকে সৌরবর্ণালীতে ফ্রাউন হফার রেখার উৎপত্তি ব্যাখ্যা করুন।

   (b) প্ল্যাঙ্কের বিকিরণ সূত্রটি লিখুন। তাপ বিকিরণের কোয়ান্টাম তত্ত্বের মূল ধারনা সংক্ষেপে বিবৃত করুন।
5. (a) ফেরির বিকিরণ পাইরোমিটারের সাহায্যে উষ্ণতা পরিমাপের পদ্ধতি সংক্ষেপে বর্ণনা করুন।

   (b) অদৃশ্য ফিলামেন্ট পাইরোমিটার নীতি সংক্ষেপে বর্ণনা করুন।
6. তাপের সরলরৈখিক প্রবাহ সম্পর্কিত ফুরিয়ে-এর সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা করুন। তাপ ব্যাপনতা কাকে বলে? স্থির অবস্থায় সমীকরণটি সমাধান করুন। কীভাবে বিভিন্ন দণ্ডের তাপ পরিবাহিতা তুলনা করা হয়।

7. একটি সমসত্ব ফাঁপা চোঙের ভিতর ও বাহিরের তল দুটি নির্দিষ্ট ভিন্ন উষ্ণতায় থাকলে সেটির মধ্য দিয়ে তাপ প্রবাহের হার নির্ণয় করুন।
8. একটি গোলকীয় খোলকের ভিতরের ও বাইরের তল একটি নির্দিষ্ট পার্থক্যে রাখা আছে। অরীয় তাপ প্রবাহ থেকে তাপ পরিবাহিতার রাশিমালা নির্ণয় করুন।
9. চাকতির আকারে কুপরিবাহী পদার্থের তাপ পরিবাহিতা নির্ণয়ে লী-এর পদ্ধতি মূলতত্ত্ব সহ সংক্ষেপে বর্ণনা করুন।
10. (a) দুটি বস্তুর মধ্যে একটির তাপ পরিবাহিতা অন্যটির চেয়ে কম হলেও তাপ ব্যাপনতা অন্যটির চেয়ে বেশী হতে পারে কিংবা এর বিপরীতটিও সত্য হতে পারে। ব্যাখ্যা করুন।

    (b) K_1 ও K_2 তাপ পরিবাহিতার দুটি সমআকৃতির প্লেট যুক্ত করে দ্বিগুণ রোধের একটি প্লেটে পরিণত করা হল। দেখান যে এই যুগ্ম প্লেটের তাপ পরিবাহিতা হবে $2K_1K_2/(K_1+K_2)$

(iv) গাণিতিক প্রশ্ন ঃ

1. 0·01 ব্যাসার্ধের একটি গোলক আদর্শ কৃষ্ণবস্তুর মত আচরণ করে। এটি 873K উষ্ণতায় রাখা আছে। এর তল থেকে শক্তি বিকিরণের হার কত হবে? ($\sigma=5{\cdot}762\times10^{-8}m^{-2}K^{-4}$)
2. একটি ঘরের উষ্ণতা 20ºC। 100ºC ও 30ºC-এর দুটি কৃষ্ণবস্তু এই ঘরের মধ্যে আছে। দুটি বস্তুর তাপ হ্রাসের অনুপাত কত হবে?
3. দুটি বড় সমকেন্দ্রিক কাছাকাছি থাকা গোলকের (দুটিকে কৃষ্ণবস্তু ধরা যায়) উষ্ণতা যথাক্রমে 400K এবং 600 K। দুটি গোলকের মধ্যস্থান বায়ু শূন্য হলে দুটি উষ্ণতার মধ্যে মোট শক্তি বিনিময়ের মান কত হবে? ($\sigma=5{\cdot}762\times10^{-8}$MKS)
4. পৃথিবী সূর্য থেকে 8·23J/cm^{2}min হারে বিকিরণ শক্তি আহরণ করে। সূর্য কৃষ্ণবস্তুর মতো শক্তি বিকিরণ করে ধরে নিয়ে সৌর পৃষ্ঠের উষ্ণতা নির্ধারণ করুন। পৃথিবীপৃষ্ঠে সূর্য 0·53º কোণ করে এবম স্টেফান ধ্রুবক $=5{\cdot}67\times10^{-8}Wm^{-2}K^{-4}$)
5. একটি কালো রং-করা ছোটো গোলক অন্তর্গ্রহ স্থানে এমন জায়গায় রাখা আছে যেখানে সূর্যের কৌণিক ব্যাস $\theta=0{\cdot}57^o$। ধরে নিন সূর্য 6000K উষ্ণতার কৃষ্ণবস্তুর মতো আচরণ করে এবং ক্ষুদ্র গোলকটি একটি আদর্শ তাপশোষক ও তাপপরিবাহী। গোলকটির সাম্যাবস্থার উষ্ণতা নির্ণয় করুন।
6. সূর্য থেকে বিকীর্ণ তাপ পৃথিবীতে 1400 Wm^{-2} হারে এসে পৌঁছায়। সূর্যের উষ্ণতা নির্ণয় করুন। সূর্যের ব্যাসার্ধ$=7\times10^8$mg পৃথিবীর কক্ষের ব্যাসার্ধ $1{\cdot}5\times10^{11}$m, $\sigma=5{\cdot}7\times10^{-8}$ Wm^{-2}K^{-4}
7. সূর্য যদি 6000K উষ্ণতায় উত্তপ্ত আদর্শ কৃষ্ণবস্তুর ন্যায় আচরণ করে, তবে প্লুটো গ্রহের উপরিতলের উষ্ণতা নির্ণয় করুন। সূর্য থেকে প্লুটোর দূরত্ব, সূর্য থেকে পৃথিবীর দূরত্বের 40 গুণ। সূর্যের ব্যাসার্ধ $=7\times10^8$m এবং পৃথিবী থেকে সূর্যের দূরত্ব $1{\cdot}5\times10^{11}$m।
8. একটি জলাশয়ে 0·04m পুরু বরফ জমে আছে। উপরের বায়ুর উষ্মতা 261K। কী হারে বরফ জমতে থাকবে?

দেওয়া আছে k (বরফ) = $2{\cdot}184\ wm^{-1}K^{-1}$, বরফের ঘনত্ব = $920\ kgm^{-3}$
লীনতাপ = $333\ kJ\ hg^{-1}$

9. একটি জলাশয়ের উপরের বায়ুর উষ্ণতা –10ºC। জলতলে 4cm পুরু বরফের স্তর জমতে কত সময় লাগবে? দেওয়া আছে বরফের ঘনত্ব = $920\ kg/m^3$. বরফ গলনের লীন তাপ =$3{\cdot}36{\times}10^5 J/kg$; বরফের তাপ পরিবাহিতা = 0·84 MKS একক।
10. একটি ফলক 4 cm এবং 2 cm বেধের দুটি ভিন্ন উপাদানের সমান্তরাল পাত দিয়ে তৈরী। উপাদান দুটির তাপ পরিবাহিতা যথাক্রমে 226·8 ও 147 S.I. একক। ফলকটির বিপরীত পৃষ্ঠের উষ্ণতা 100º এবং 30º সেলিসিয়াস হলে দুই উপাদানের মধ্যবর্তী তলের উষ্ণতা কত হবে?
11. একটি রবার নলের মধ্য দিয়ে 120ºC এ স্টীম প্রবাহিত হচ্ছে। এর বাইরের উষ্ণতার 20ºC রবারের তাপ পরিবাহিতা $0{\cdot}1848\ Wm^{-1}K^{-1}$। এর ভিতরের ও বাইরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে $6{\times}10^{-3}$ m ও $11{\times}10^{-3}$m। 1m দৈর্ঘ্য তাপক্ষারের পরিমাণ কত?
12. 0·04m এবং 0·05m পুরু দুটি ধাতব ফলক দিয়ে একটি যুগ্ম ফলক তৈরী হয়েছে। দুটি ধাতুর পরিবাহিতা যথাক্রমে 151·2 এবং $54{\cdot}6\ Wm^{-1}K^{-1}$ প্রথম ফলকের মুক্ত তলের উষ্ণতা 100ºC ও দ্বিতীয় ফলকের মুক্ত তলের উষ্ণতা 0ºC হলে এদের সংযোগস্থলের উষ্ণতা কত?
13. 0·544m দীর্ঘ এবং যথাক্রমে $0{\cdot}3675{\times}10^{-2}$m ও $0{\cdot}9775{\times}10^{-2}$m অন্তর্ব্যাসার্ধ ও বহির্ব্যাসার্ধ যুক্ত একটি কাচ নলকে স্টিম জ্যাকেট দিয়ে বেষ্টন করা হল। নলের ভিতর দিয়ে প্রবাহিত জলধারার প্রবেশ মুখে ও নির্গম মুখে উষ্মতা যথাক্রমে 13·8ºC ও 28·4ºC। কাচের পরিবাহিতা $0{\cdot}6468\ wm^{-1}K^{-1}$ হলে নলের ভিতর দিয়ে জলপ্রবাহের হার কত?
14. সমকেন্দ্রিক দুটি ফাঁপা গোলকের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 0·05m এবং 0·15m। এদের মধ্যবর্তী স্থান কুপরিবাহী একটি গুঁড়ো পদার্থ দিয়ে ভর্তি করা আছে। কেন্দ্রে রক্ষিত একটি বৈদ্যুতিক হিটার 10·8 W হারে শক্তি শক্তি উৎপাদান করলে, গোলকদ্বয়ের পৃষ্ঠতলের উষ্ণতা পার্থক্য 50ºC হয়। ঐ পদার্থটির তাপ পরিবাহিতা কত?
15. একটি ফাঁপা চোঙাকৃতি অ্যালুমিনিয়াম পরিবাহীর দৈর্ঘ 0·05m। অভ্যন্তরীন ও বাইরের ব্যাস যথাক্রমে 0·03m এবং 0·06m। নলের অক্ষ বরাবর রক্ষিত একটি কুণ্ডলি দিয়ে 10 W ক্ষমতা সরবরাহ করে উত্তপ্ত করা হচ্ছে। এর ভিতরের ও বাইরের উষ্ণতা পার্থক্য কত হবে। অ্যালুমিনিয়ামের পরিবাহিতা = 210MKS একক।

7.28 গাণিতিক প্রশ্নের উত্তর ঃ

1. 42·06 W
2. 11·32
3. $5899\ W/m^2$

4. 5799K (ইঙ্গিত - সূর্য্যের ব্যাসার্ধ $(0\cdot{}^{53}\!/_{2})^{o}$ বা $\left(\frac{\pi}{180}\times 0\cdot\frac{53}{2}\right)$ rad কোণ করে।
5. 299·2K
6. 5800K
7. 45·8K (উদাহরণ 5 দেখুন)
8. $2\cdot139\times10^{-6}$ m/s (উদাহরণ 8 দেখুন)
9. 8h 10m 40s
10. 64·48ºC (উদাহরণ 9 দেখুন)
11. 191·56 W/M
12. 77·39ºC (উদাহরণ 9 দেখুন)
13. $2\cdot91\times10^{-6}$ m^3/s
14. 0·229 SI একক
15. 0·105ºC

7.29 সহায়ক গ্রন্থাবলী

1. A Treatise on Heat—Saha and Srivastava
2. College Physic—A.B. Gupta
3. Study Material : Elective Physics Honours EPH 05 (Heat and Thermodynamics) Netaji Sabhas Open University.
4. Advenced Text book on Heat—P.K. Chakrabarty.

একক 8 ❑ কম্পন, তরঙ্গ ও শব্দবিজ্ঞান (Vibrations, Waves and Acoustics)

গঠন

8.1 প্রস্তাবনা ঃ

এই এককের আলোচ্য বিষয় হলো শব্দবিজ্ঞান, অর্থাৎ, যে বিজ্ঞানে শব্দ তথা ধ্বনির উৎপাদন, নিয়ন্ত্রণ, সঞ্চার, গ্রহণ, প্রভাব প্রভৃতি আলোচনা করা হয়। এই শব্দ বা ধ্বনির উৎপাদনের মূল উৎস হলো কোন জড় মাধ্যমের কম্পন। শব্দের সঞ্চার বলতে বুঝায় এই কম্পনের সঞ্চার, যাকে বলে তরঙ্গ। এই তরঙ্গের উৎপাদন, নিয়ন্ত্রণ, সঞ্চার, গ্রহণ এবং এই তরঙ্গের প্রভাব, অভিক্রিয়া প্রভৃতি বিষয়ে আলোচনা করা হয় শব্দবিজ্ঞানে। তরঙ্গ সম্পর্কে প্রাথমিক ধারণাকে অর্জন করতে জানা দরকার কম্পনের গতিবিজ্ঞান। সরলতম কম্পনগতি হলো সরলদোল গতি। এই গতি সম্পর্কে আলোচনা দ্বারা শুরু করা হবে এই এককটি। এই এককটি পাঠের উদ্দেশ্য এরূপ ঃ

উদ্দেশ্য : এই অধ্যায় পাঠ করে আপনি জানতে পারবেন—

- সরল দোলগতির সমীকরণ ও তার সমাধান।
- সরল দোলগতিসম্পন্ন কণার স্থিতিশক্তি, গতিশক্তি ও মোট শক্তির রাশিমালা,
- সরল দোলগতির দু'একটি উদাহরণ,
- দুটি সরল দোলগতির উপরিপাতের ফলে বিভিন্ন লব্ধি গতি,
- অবমন্দিত সরল দোলগতি,
- পরবশ কম্পন ও অনুনাদ,
- সরল দোলীয় সমতল চলতরঙ্গের সমীকরণ,
- তরঙ্গের উপরিপাতের ফলে ব্যতিচার, স্থানুতরঙ্গ সৃষ্টি,
- কোনো মাধ্যমে ও টান করা তারে যথাক্রমে অণুদৈর্ঘ্য ও তির্যক্ তরঙ্গের রাশিমালা,
- ডপলার ক্রিয়া,
- শব্দ-শক্তির পরিমাপের একক: বেল ও ডেসিবেল।

8.2 পর্যাবৃত্ত গতি ও দোলন (Periodic Motion and Oscillasion) ঃ

বস্তু বা বস্তুকণার যে গতি নির্দিষ্ট সময় অন্তর পুনরাবৃত্ত হয় তাকেই পর্যাবৃত্ত গতি বলে। সূর্যের চারপাশে গ্রহগুলির গতি, সরল দোলকের গতি, টান করা তারে কম্পনের ফলে এর বিভিন্ন বিন্দুর গতি প্রভৃতি সবই পর্যাবৃত্ত গতি। এই গতিগুলির সঙ্গে আমরা পরিচিত।

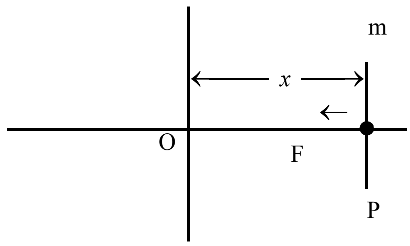
কম্পনশীল বস্তুকণা একই পথে বারবার যাওয়া আসা করলে যে পর্যাবৃত্ত গতি পাওয়া যায় তাকে দোলন বা কম্পন বলা হয়। জলের উপর যে তরঙ্গ আমরা দেখতে পাই সেখানেও জলের কণাগুলো একটি নির্দিষ্ট অবস্থানের দুদিকে ওঠানামা করতে থাকে। আমরা এখানে দোলনগতি নিয়েই আলোচনা করব।

8.3 সরল দোলগতি (Simple Harmonic Motion) ঃ

দোলন গতির সরলতম গতি হল সরল দোলগতি। **বস্তুকণার উপর প্রযুক্ত বল যদি সব সময় সাম্যাবস্থার দিকে ক্রিয়াশীল হয় এবং সাম্যাবস্থা থেকে দূরত্বের বা সরণের সমানুপাতিক হয় তবে সেই গতিকে সরল দোলগতি বা সরল সমঞ্জস গতি বলা হয়।**

সরল দোলগতির সমীকরণ :

মনে করি সরল দোলগতিতে থাকা কোনো বস্তু কণা কোন সময়ে মূল বিন্দু O থেকে x দূরত্বে P বিন্দুতে আছে (চিত্র 8·1)। O বিন্দুকে ধরি সাম্য বিন্দু।



চিত্র 8·1 সরল দোলগতি

বস্তুকণার ভর m। বস্তুকণার উপর প্রত্যানয়ক বল (restoring force) ধরি F। সরল দোল গতির শর্তানুসারে

$$F \propto -x$$

বা, $F = -kx$ ....(1)

(k = একটি ধ্রুবক)

বা, $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$

বা, $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}x$

বা, $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ ....(2)

($\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} =$ ধ্রুবক)

অতএব বলা যায় কোন বস্তুর ত্বরণ ঐ বস্তুর সরণের সঙ্গে সমানুপাতিক হলে এবং গতি সাম্যাবস্থান অভিমুখী হলে ঐ বস্তুর গতি সরল দোলগতি হবে।

মনে করি এই সমীকরণের সমাধান—

$x = Ae^{\propto t}$, A ও $\propto$ ধ্রুবক

$\therefore \dfrac{dx}{dt} = A \propto e^{\propto t}$, $\dfrac{d^2x}{dt^2} = A \propto^2 e^{\propto t}$

(2) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$Ae^{\propto t}\left(\propto^2 + \omega^2\right) = 0$$

t এর সব মানের জন্য $Ae^{\propto t}$ এর মান শূন্য হতে পারে না, অতএব $\propto^2 + \omega^2 = 0$

বা, $\propto = \pm i\omega$

অতএব অবকল সমীকরণ (2) এর সমাধান

$$x = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$$

A_1 ও A_2 ধ্রুবক।

বা, $x = A_1 (\cos \omega t + i \sin \omega t) + A_2 (\cos \omega t - i \sin \omega t)$

$= (A_1+A_2) \cos \omega t + i (A_1-A_2) \sin \omega t$

$= A \cos \omega t + B \sin \omega t$

যেখানে $A_1+A_2=A$

$i(A_1-A_2)=B$

ধরি $A = a\cos\in$, $B = a\sin\in$

a ও $\in$ দুটি ধ্রুবক।

$$\therefore \quad x = a\cos\in\cos\omega t + a\sin\in\sin\omega t$$

বা, $x = a\cos(\omega t - \in)$ ....(3)

এবং $a = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\tan\in = \dfrac{B}{A}$

সমীকরণ (3)-কে বলে সরল দোলগতির সরণ সমীকরণ।

বিস্তার (amplitude) : সরণের সর্বোচ্চ মান হতে পারে '+ a', যখন $(\omega t - \in) = 0,\ 2\pi,\ 4\pi$ ইত্যাদি। আবার সর্বনিম্ন মান হতে পারে '$-a$', যখন $(\omega t - \in) = 0,\ 3\pi, 5\pi$ ইত্যাদি। অর্থাৎ কণাটি $x = 0$ অবস্থান থেকে দুদিকে সর্বাধিক $|a|$ পর্যন্ত বিস্তৃত হতে পারে। 'a' কে বিস্তার বলা হয়। অর্থাৎ সরণের সর্বোচ্চ মান হল বিস্তার।

পর্যায়কাল (time period) : (3) নং সমীকরণ থেকে দেখা যায়

$$x = a\cos(\omega t - \in) = a\cos[2\pi + \omega t - \in] = a\cos(4\pi + \omega t - t)$$

= .... ইত্যাদি

বা $x = a\cos(\omega t - \in) = a\cos\left[\omega\left(t + \dfrac{2\pi}{\omega}\right) - \in\right]$

$$= a\cos\left[\omega\left(t+\frac{4\pi}{\omega}\right)-\in\right]=\ldots\ldots.. \text{ ইত্যাদি}$$

$$= a\cos(\omega t'-\in) = a\cos(\omega t''-\in) = \ldots\ldots.$$

অর্থাৎ সময় t, t', t''......ইত্যাদিতে কম্পনশীল কণাটি সমদশায় থাকে, যেখানে $t' = t+\frac{2\pi}{\omega}$, $t'' = t+\frac{4\pi}{\omega}$..... ইত্যাদি। এখন পরপর সমদশায় থাকার জন্য প্রয়োজনীয় সময়ের ব্যবধানকে বলে কম্পনের পর্যায়কাল T অর্থাৎ

$$\mathrm{T} = t'-t = t''-t' = \ldots\ldots = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\therefore \mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{কণার ভর}}{\text{একক সরণের অবস্থানে ক্রিয়াশীল বল}}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{1}{\text{একক সরণের অবস্থানে বস্তুর ত্বরণ}}}$$

দশা (phase) : কণাটির অবস্থান, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদি অর্থাৎ কণাটির অবস্থা সম্পূর্ণ জানা যায় $(\omega t-\in)$ থেকে। তাই একে দশা বলা হয়, $t = 0$ সময়ে দশা হয় $\in$; $\in$ কে বলা হয় প্রাথমিক দশা বা ইপক্ (epoch)।

কম্পাঙ্ক (frequency) : $\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = 2\pi f$; $\frac{1}{\mathrm{T}} = f$ হল কম্পাঙ্ক = প্রতি সেকেণ্ডে কম্পনের সংখ্যা। এর একক হল হার্ৎস (Hertz, সংক্ষেপে $\mathrm{H_Z}$) = প্রতি সেকেণ্ডে কম্পন সংখ্যা।

কৌণিক কম্পাঙ্ক (angular frequency) : ω রাশিটি একক সময়ে দশার পার্থক্য সূচিত করে। একে বলা হয় কৌণিক কম্পাঙ্ক বা কৌণিক বেগ।

8.4 সরল দোলগতিসম্পন্ন কণার যান্ত্রিক শক্তি ঃ

সরল দোলগতিতে থাকা বস্তু-কণার মোট যান্ত্রিক শক্তি হল এর গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির যোগফল।

বস্তু কণার কোনো সময়ে সরণ $x = a\cos(\omega t-\in)$

অতএব বেগ $v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\omega a\sin(\omega t-\in)$

$$\therefore \text{ গতিশক্তি } \mathrm{E}_k = -\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\omega t-\in)$$

$$= \frac{1}{2}ma^2\omega^2\left[1-\cos^2(\omega t-\in)\right]$$

$$= \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 \left(a^2 - x^2\right)$$

গতিশক্তির সর্বোচ্চমান $E_{k\max} = \frac{1}{2} \cdot m\omega^2 a^2$; যখন $x = 0$ অর্থাৎ কণাটি যখন সাম্যাবস্থানের মধ্য দিয়ে যায়।

আবার গতিশক্তি $E_k = 0$ হয় যখন $x = a$ অর্থাৎ কণাটি যখন স্থির থাকে।

স্থিতিশক্তি : কোনো অবস্থানে বস্তুকণাটিকে প্রত্যানয়ক বলের বিরুধে নিয়ে আসতে যে পরিমাণ কার্য করতে হয় তাই হল ঐ অবস্থানে কণাটির স্থিতিশক্তি।

সাম্যাবস্থান থেকে x দূরত্বে আনতে কার্য বা x দূরত্বে স্থিতিশক্তি

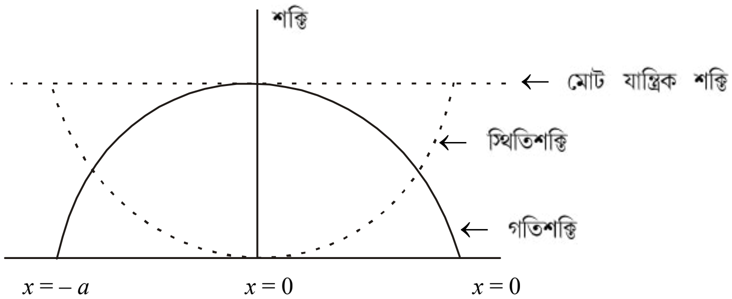
$$E_p = \int_0^x -F dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

স্থিতিশক্তির সর্বোচ্চমান $E_{p\max} = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$; যখন $x = a$, অর্থাৎ কণাটি যখন সর্বোচ্চ সরণের অবস্থানে (বিস্তারে) থাকে।

আবার স্থিতিশক্তি $E_p = 0$ হয় যখন $x = 0$ অর্থাৎ কণাটি যখন সাম্যাবস্থানে থাকে।

মোট যান্ত্রিক শক্তি, $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(a^2 - x^2\right) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 = \frac{1}{2} ka^2$

মোট যান্ত্রিক শক্তি x বা সময়ের ওপর নির্ভর করে না। অর্থাৎ যান্ত্রিক শক্তি সংরক্ষিত হয়। মোট যান্ত্রিক শক্তি -সর্বোচ্চ গতি শক্তি বা সর্বোচ্চ স্থিতিশক্তির সমান। (8·2 নং চিত্রে এটি দেখানো হয়েছে।)



চিত্র 8·2 সরল দোলগতিতে থাকা কণার শক্তি

একটি পর্যায়কালে গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির গড় মান :

গড় গতিশক্তি $= \dfrac{\int_0^T \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \, dt}{\int_0^T dt} = \dfrac{m}{2T} \int_0^T a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - \epsilon) \, dt$

$$= \frac{m}{2\mathrm{T}} a^2 \omega^2 \frac{\mathrm{T}}{2} = \frac{1}{4} m a^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \mathrm{E}_{k\max}$$

গড় স্থিতি শক্তি $= \dfrac{\int_0^{\mathrm{T}} \frac{1}{2} k x^2 dt}{\int_0^{\mathrm{T}} dt} = \dfrac{k}{2\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} a^2 \cos^2(\omega t - \in) dt$

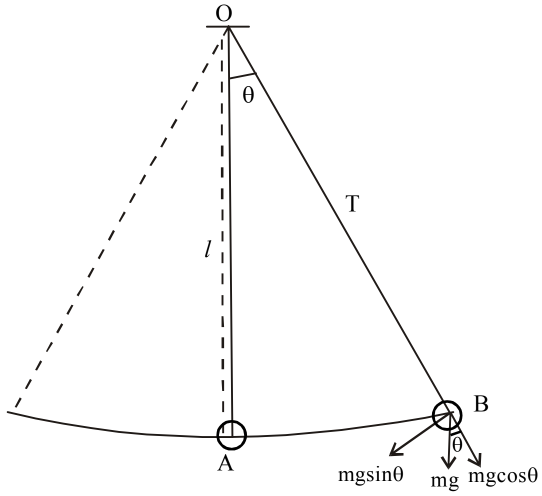
$$= \frac{k}{2\mathrm{T}} \cdot a^2 \cdot \frac{\mathrm{T}}{2} = \frac{1}{4} k a^2 = \frac{1}{4} m \omega^2 a^2 = \frac{1}{2} \mathrm{E}_{\mathrm{p}\max}$$

অতএব মোট গড় যান্ত্রিক শক্তি $= \dfrac{1}{4} m a^2 \omega^2 + \dfrac{1}{4} m a^2 \omega^2 = \dfrac{1}{2} m a^2 \omega^2$

$$= \mathrm{E}_{k\max} = \mathrm{E}_{p\max}$$

8.5 সরল দোলগতির উদাহরণ ঃ

1. সরল দোলক : ভরহীন অপ্রসার্য এবং সম্পূর্ণ নমনীয় সুতার সাহায্যে কোনো বিন্দুভরকে কোনো দৃঢ় অবলম্বন থেকে ঝুলিয়ে দিলে তাকে আদর্শ সরল দোলক বলা হয়। পরীক্ষাগারে হালকা অপ্রসার্য সিল্ক-সুতার সাহায্যে ক্ষুদ্র ভারী ধাতব গোলক কোনো দৃঢ় অবলম্বন থেকে ঝুলিয়ে সরল দোলক তৈরী করা হয়।



চিত্র 8·3 সরল দোলক

ধরি O বিন্দু থেকে l দৈর্ঘ্যের সুতার সাহায্যে একটি r ব্যাসার্ধের ধাতব গোলক পিণ্ড (bob) ঝুলানো আছে (চিত্র 8·3)। সাম্যাবস্থান A থেকে খুব অল্প দূরত্ব B অবস্থানে নিয়ে ছেড়ে দিলে এটি A বিন্দুর দুদিকে গতিশীল হবে। l যথেষ্ট দীর্ঘ ($l >> r$) এবং θ যথেষ্ট ক্ষুদ্র হলে পিণ্ডটি মোটামুটি অনুভূমিক সরল রেখায় (ধরি x-অক্ষ বরাবর) গতিশীল বলে ধরা যায়। পিণ্ডের ভর m ও অভিকর্ষজ ত্বরণ g হলে ওর ওপর অভিকর্ষজ বল mg। এর একটি উপাংশ $mg \cos\theta$ সুতার টান T কে প্রশমিত করে অন্য লম্ব উপাংশ $mg \sin\theta$ প্রত্যানয়ক বল হিসাবে পিণ্ডের ওপর ক্রিয়া করে। সাম্যাবস্থানে চলে আসার পর পিণ্ডটি বিপরীত দিকে গতিজাড্যের জন্য চলতে শুরু করে। বিপরীত দিকে যাওয়ার সময় এর বিপরীত দিকে একইভাবে প্রত্যানয়ক বল ক্রিয়া করতে থাকে। ফলে একসময় পিণ্ডটির গতি রুদ্ধ হয় এবং ঐ বলের প্রভাবে–A অভিমুখে গতি পায়। এইভাবে A অবস্থানের উভয় দিকে পিণ্ডটি দুলতে থাকে। বল ক্রিয়াশীল থাকায় এই দোলনের বিস্তার ধীরে ধীরে কমতে থাকে। কোনোও বাধা না থাকলে এটির অনন্তকাল দুলতে থাকার কথা।

যে কোনো B অবস্থানে প্রত্যায়নক বল $F = mg\sin\theta \approx mg\theta = mg\frac{x}{l}$

কিন্তু $F = -mx = -m\frac{d^2x}{dt^2}$ [θ খুব ছোটো]

বা, $m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\frac{x}{l}$ (AB = x = সরণ)

বা, $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-g}{l}x$

বা, $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

$\therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

অতএব দোলকের দোলন কাল, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

2. স্প্রিং দ্বারা আলম্বিত ভর :

মনে করি একটি পূর্ণ স্থিতিস্থাপক হালকা স্প্রিং একটি দৃঢ় অবলম্বন থেকে ঝুলানো আছে। এর নিচের প্রান্তে একটি m ভর আবন্ধ অবস্থায় আছে। ভরটি চাপালে মনে করি দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি হয় l (চিত্র 8·4)। এই বিবৃতির জন্য প্রত্যানয়ক বল = Kl (k = স্প্রিং ধ্রুবক)। সাম্যাবস্থায় $\therefore$ mg = + Kl

এবার যদি ভরটিকে নিচের দিকে খুব অল্প z দূরত্ব টেনে ছেড়ে দেওয়া হয় তবে ভরটি উল্লম্ব রেখা বরাবর দুলতে থাকবে। স্প্রিং এর ভর উপেক্ষা করলে এবং z এর মান ক্ষুদ্র হলে, m ভরের উপর ঊর্ধমুখী প্রত্যানয়ক বল = $-kz$. অতএব m এর ত্বরণ $\frac{d^2z}{dt^2}$ হলে

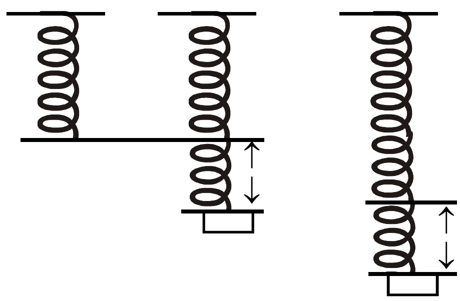
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -kz$$

$\therefore$ $m\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{mg}{l}z$

বা, $\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{g}{l}z$

বা, $\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z,$

যখন $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$



চিত্র 8·4 স্পিং দ্বারা আলম্বিত ভর

অতএব ভরটির গতি সরল দোলগতি, এর পর্যায়কাল $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

8.6 দুটি সরল দোলগতির উপরিপাত ঃ

একটি বস্তু কণার উপর একই সঙ্গে দুটি দোলগতি সৃষ্টিকারী বল ক্রিয়া করলে বস্তুকণার চূড়ান্ত গতি এদের যোগফলের উপর নির্ভর করে। আলোক ও শব্দের বেলায় ব্যতিচার স্বরকম্প ইত্যাদি আমরা যে দেখি তা দুটি সরল দোলগতির সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত। কয়েকটি বিশেষক্ষেত্রে এই গতি সম্পর্কে আলোচনা করা হলো।

(a) দুটি সমরেখ, সমকম্পাঙ্ক কিন্তু ভিন্ন বিস্তার ও ভিন্ন দশার সরল দোলগতির উপরিপাত :

মনে করি দুটি সরল দোলগতির সমীকরণ $x_1 = a \cos \omega t$

$$x_2 = b\cos(\omega t - \propto)$$

প্রথমটির সাপেক্ষে দ্বিতীয়টি $\propto$ দশায় পিছিয়ে আছে।

এদের লব্ধি সরণ হবে,

$$x = x_1 + x_2 = a\cos\omega t + b\cos(\omega t - \propto)$$

$$= a\cos\omega t + b(\cos\omega t\cos\propto + \sin\omega t\sin\propto)$$

$$= (a + b\cos\propto)\cos\omega t + (b\sin\propto)\sin\omega t$$

$$= \mathrm{A}\cos\delta\cos\omega t + \mathrm{A}\sin\delta\sin\omega t$$

বা $x = \mathrm{A}\cos(\omega t - \delta)$

এখানে A ও δ দুটি ধ্রুবক এবং

$$\mathrm{A}\cos\delta = a + b\cos\propto, \mathrm{A}\sin\delta = b\sin\propto$$

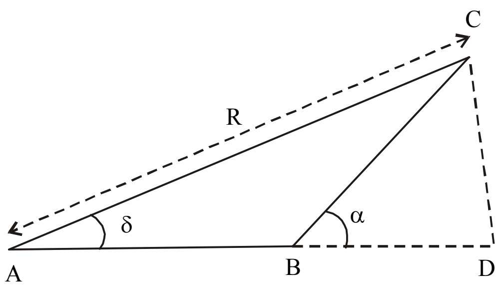
$$\therefore \quad \mathrm{A}^2 = (a + b\cos\propto)^2 + b^2\sin^2\propto = a^2 + b^2 + 2ab\cos\propto$$

ও $\tan\delta = \dfrac{b\sin\propto}{a + b\cos\propto}$

অতএব $\mathrm{A} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\propto}$ এবং

$$\delta = \tan^{-1}\frac{b\sin\propto}{a + b\cos\propto}$$

অতএব, $x = \mathrm{A}\cos(\omega t - \delta)$, লব্ধি সরল দোলগতিকে প্রকাশ করছে। এর কম্পাঙ্ক যে দুটি সরল দোলগতির লব্ধি তাদের কম্পাঙ্কের সমান। এর বিস্তার A, এবং প্রথমটি থেকে লব্ধি দোলগতির দশা δ পিছিয়ে আছে।



চিত্র 8·5 দুটি সরল দোলগতির বিস্তারের লব্দি বিস্তার

লেখচিত্রে এই দুটি সরল দোলগতির বিস্তার ও লব্ধি দোলগতির বিস্তার সহজে প্রকাশ করা যায় (চিত্র 8·5)।

AB = a, BC = b মান নিয়ে দুটি সরল রেখা টানা হল। এদের মধ্যে বহিস্থ কোণ $\propto$। $\angle CAB = \delta$ AC = (R ধরি) হবে লব্ধি সরল দোলগতির বিস্তার।

$\therefore R^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\propto$ । এখানে বিস্তার ভেক্টরের মতো আচরণ করে। এই প্রক্রিয়া বারবার প্রয়োগ করে দু'এর বেশী সরল দোলগতি সহজে যোগ করে চূড়ান্ত বিস্তার পাওয়া যায়।

(b) দুটি সমরেখ প্রায় সমান কম্পাঙ্ক (সমান নয়), ভিন্ন বিস্তারের সরল দোলগতির উপরিপাত,

মনে করি দুটি সরল দোলগতির কম্পাঙ্ক যথাক্রমে m ও $m + n$; n এর মান খুব কম।

$x_1 = a \cos 2\pi mt = a \cos ft$

$x_2 = b \cos 2\pi (m+n) t = b \cos (f+p) t$

যেখানে, $f = 2\pi m$, $p = 2\pi n$

অতএব লব্ধি হবে

$$x = x_1 + x_2 = a\cos ft + b\cos(f+p)t$$

$$= a\cos ft + b(\cos ft \cos pt - \sin ft \sin pt)$$

$$= \cos ft(a + b\cos pt) - \sin ft(b\sin pt)$$

$$= \cos ft \, A\sin\theta - \sin ft \, A\cos\theta$$

$$= A\cos(ft + \theta)$$

যেখানে $A\sin\theta = a + b\cos pt$, $A\cos\theta = b\sin pt$

এখানে A ও θ ধ্রুবক নয়, তাই লব্ধি সরণ সরল দোলগতি প্রকাশ করে না,

$$A^2 = (a + b\cos pt)^2 + b^2\sin^2 pt$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab\cos pt$$

এখন, $pt = 0, 2\pi, 4\pi, ...$ ইত্যাদি হলে $\cos pt = 1$ হয়

তখন $A^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$

বা $A = a+b$

অর্থাৎ সময় $t = \frac{2\pi}{p} \times$ পূর্ণ সংখ্যা (বা $\frac{\pi}{p} \times$ যুগ্ম পূর্ণ সংখ্যা) হলে, লব্ধ গতির বিস্তার সর্বোচ্চ হয়, $A = a+b$

আবার, $pt = \pi, 3\pi, 5\pi, ...$ ইত্যাদি হলে $\cos pt = -1$ হয়,

তখন $A = a-b$

অর্থাৎ সময় $\frac{\pi}{p} \times$ বিজোড় পূর্ণসংখ্যা হলে বিস্তার সর্বনিম্ন হয়; $A = a-b$।

সময়ের সঙ্গে লব্ধি গতির বিস্তার সর্বোচ্চ $(a+b)$ থেকে সর্বনিম্ন $(a-b)$ পর্যন্ত পরিবর্তিত হতে থাকে। পরপর দুটি সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন বিস্তারের মধ্যে সময়ের ব্যবধান $= \dfrac{2\pi}{p}$

(8·6) চিত্রে A ও B দুটি সরল দোলগতির কম্পাঙ্কের অনুপাত 4:5। C এদের লব্ধি। দুটি পরপর সর্বোচ্চ (বা সর্বনিম্ন) মানের মধ্যে A-র কম্পন হয় 4 বার আর B-র কম্পন হয় 5 বার। স্বর্ণবিদ্যায় এরকম কাছাকাছি দুটি কম্পাঙ্কের শব্দের উপরিপাতের ফলে শব্দের বৃদ্ধি ও হ্রাস পাওয়াকে **স্বরকম্প** বা বীট (beat) বলা হয়। স্বরকম্পের কম্পাঙ্ক দুটি কম্পাঙ্কের বিয়োগফলের সঙ্গে সমান।

(c) পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়াশীল সমকম্পাঙ্কের কিন্তু ভিন্ন দশা ও ভিন্ন বিস্তারের দুটি সরল দোলগতির উপরিপাত।

মনে করি x-অক্ষ বরাবর দুটি সরল দোলগতি একটি বস্তুকণার উপর একই সঙ্গে প্রযুক্ত হয়েছে। এদের সমীকরণ

$x = a\cos\omega t$ ....(A)

$y = b\cos(\omega t - \propto)$ ....(B)

সমীকরণ (A) থেকে পাই $\dfrac{x}{a} = \cos\omega t$ এবং সমীকরণ (B) থেকে পাই

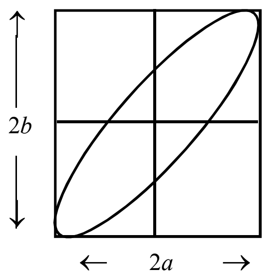
$$\frac{y}{b} = \cos\omega t\cos\alpha + \sin\omega t\sin\alpha$$

বা, $$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\cos\alpha + \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sin\alpha$$

বা, $$\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\cos\alpha\right)^2 = \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin^2\alpha$$

বা, $$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}\cos^2\alpha - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha = \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin^2\alpha$$

বা, $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha = \sin^2\alpha$$



চিত্র 8·7 হেলানো উপবৃত্ত

এটি 2a ও 2b আয়তক্ষেত্রের মধ্যে প্রধানত একটি হেলানো উপবৃত্তের (inclined ellipse) সমীকরণ (চিত্র 8·7)। কণাটির তাৎক্ষণিক অবস্থান a,b ও α এর মানের উপর নির্ভর করে।

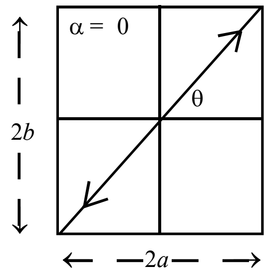
বিশেষ ক্ষেত্রসমূহ :

(I) যখন $\alpha = 0$, অর্থাৎ দুটি গতির দশা সমান—

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}=0$$

বা, $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=0$

বা, $y=\frac{b}{a}x$



চিত্র 8·8 সরল রৈখিক গতি

এটি মূল বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ।

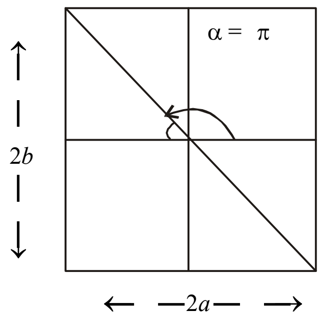
লব্ধ গতি সরলরেখায় হবে যা x-অক্ষের সঙ্গে $\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$ কোণে নত। এর বিস্তার $\sqrt{a^2+b^2}$ (চিত্র 8·8)।

(II) যখন $\alpha = \pi$, অর্থাৎ দুটি গতির দশা বিপরীত।—

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2xy}{ab}=0$$

বা, $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=0$

বা, $y=-\frac{b}{a}x$



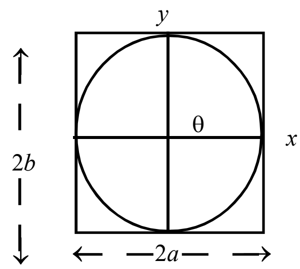
চিত্র 8·9 সরল রৈখিক গতি

এটিও মূল বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ। লব্ধগতি সরলরেখায় হবে যা x-অক্ষের সঙ্গে $\theta=\tan^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right)$ কোণে আনত (চিত্র 8·9)।

(III) যখন $\alpha=\frac{\pi}{2}$, অর্থাৎ দুটি গতির দশা পার্থক্য $\frac{\pi}{2}$।—

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

এটি একটি উপবৃত্তের সমীকরণ যার দীর্ঘাক্ষ হ্রস্বাক্ষ যথাক্রমে $2a$ ও $2b$ (চিত্র 8·10)।



চিত্র 8·10 উপবৃত্তাকার গতি

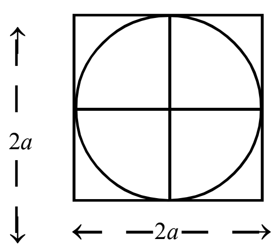
(IV) যখন $\alpha=\frac{\pi}{2}$ ও $a = b$।

$$x^2+y^2=a^2$$

এটি একটি বৃত্তের সমীকরণ। বৃত্তের ব্যাসার্ধ a।

লব্ধি গতি বৃত্তাকার হবে।

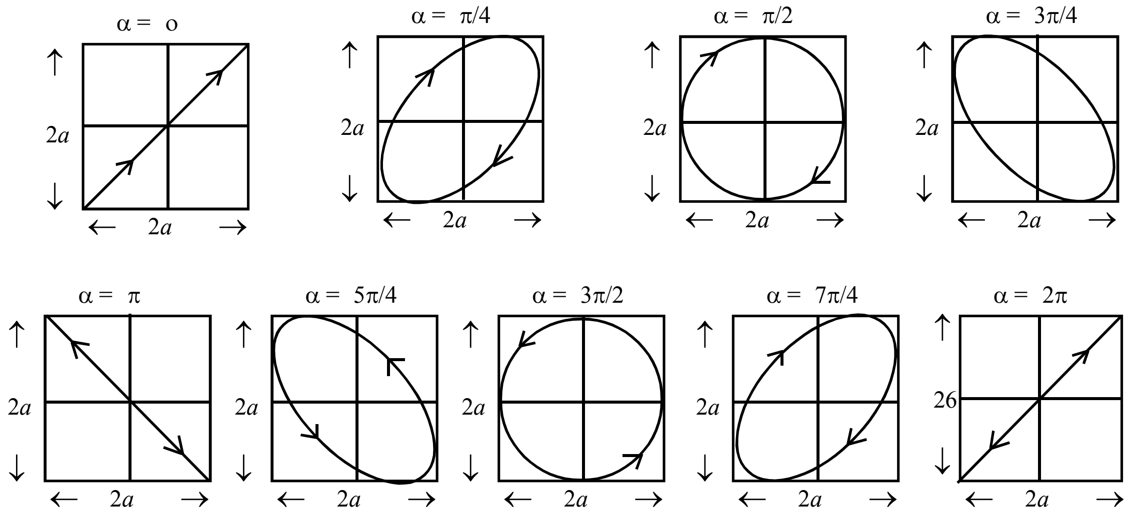
বিপরীতক্রমে বলা যায় কোনো সুষম বৃত্তগতি দুটি সমান কিন্তু $\frac{\pi}{2}$ দশা পার্থক্য যুক্ত সরল দোলগতির সমন্বয়ের ফল।



চিত্র 8·11 বৃত্তাকারগতি

আবার দুটি সমান ও বিপরীতমুখী বৃত্তাকার গতি সংযোজিত হলে তাদের লব্ধি একটি রৈখিক সরল দোলগতি হবে যার বিস্তার যে কোনো একটি বৃত্তগতির বিস্তারের দ্বিগুণ।

নিচের চিত্রে (চিত্র 8·12), $a = b$ ধরে $\alpha = 0\ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$ বিভিন্ন দশা পার্থক্যে লব্ধ গতিগুলি পর পর দেখানো হয়েছে।

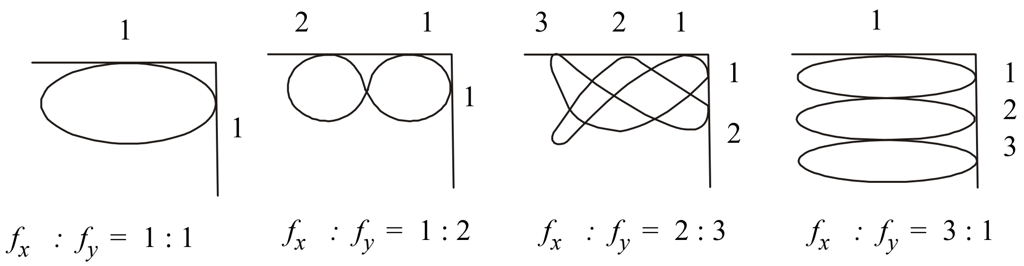


চিত্র 8·12 α–এর বিভিন্ন মানে লব্ধ গতি, যখন $a = b$

লিসাজু চিত্র (Lissajous curves) :

পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়াশীল দুটি সরল দোলগতির সংযোজনের ফলে লব্ধগতির যে চিত্র পাওয়া যায় তাকে 'লিসাজু' চিত্র বলে। আমরা দেখেছি দুটি লম্বভাবে ক্রিয়াশীল সমান কম্পাঙ্কের ও সমান বিস্তারের সরল দোলগতির লব্ধি সাধারণভাবে উপবৃত্তাকার হয়। দশা পার্থক্যের উপর নির্ভর করে এটি সরলরেখা ও বৃত্তের আকার ধারণ করে।

দুটি সরল দোলগতির কম্পাঙ্ক সরল অনুপাতে যেমন 1:2, 3:2, 1:3 ইত্যাদি হলে আরো জটিল লিসাজু চিত্র পাওয়া যায় যার কয়েকটি চিত্র-8·13-এ দেখানো হল।



চিত্র 8·13 বিভিন্ন লিসাজু

এই লিসাজু চিত্রগুলি থেকে দুটি সরল দোলগতির কম্পাঙ্কের অনুপাত নিখুঁতভাবে পাওয়া যায়। চিত্রগুলি অনুভূমিক ও উল্লম্ব রেখাগুলিকে কতগুলি বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। সেগুলি থেকে কম্পাঙ্কের অনুপাত পাওয়া যায়।

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{y\text{-অক্ষে স্পর্শ বিন্দুর সংখ্যা } (ny)}{x\text{-অক্ষে স্পর্শ বিন্দুর সংখ্যা } (nx)} = \frac{\eta_y}{\eta_x}$$

ক্যাথোড রশ্মি ওসিলোস্কোপের সাহায্যে লিসাজু চিত্রগুলি সহজে দেখা যায়। দুটি সরল দোলগতির বিভিন্ন কম্পাঙ্কের পরিবর্তী ভোল্টেজ অভিলম্ব তড়িৎক্ষেত্র উৎপাদনকারী দুই জোড়া পাতে প্রয়োগ করলে, পর্দায় লিসাজু চিত্রগুলি দেখতে পাওয়া যায়।

8.7 অবমন্দিত সরল দোলগতি (Damped Simple Harmomic Motion) ঃ

সরল দোলগতি আলোচনার সময় আমরা ধরে নিয়েছিলাম কোনো বাধাদানকারী বল বা অপচয়ী বল উপস্থিত নেই। সেক্ষেত্রে সরল দোলগতির যে সমীকরণটি (সমীকরণ 2) আমরা পেয়েছিলাম তাকে বলতে পারি মুক্ত (free) সরল দোলগতি। কিন্তু বাস্তবে বাধাদানকারী বল বা অপচয়ী বল থাকেই। সরল দোলক বা স্প্রিং এর গতি আলোচনায় দেখা যায় এর গতি কখনোই থেমে যাবে না। বায়ুর বাধা ও অন্যান্য অপচয়ী বলের উপস্থিতির জন্য দেখা যায় এদের বিস্তার সময়ের সঙ্গে কমতে থাকে। একসময় পুরোপুরি থেমে যায়। এই ধরনের দোলগতিকে অবমন্দিত দোলগতি বলা হয়। এক্ষেত্রে প্রাথমিকভাবে যে শক্তি প্রযুক্ত হয় তা মাধ্যমের সান্দ্রতা বল ও অন্যান্য ঘর্ষণজনিত বল ইত্যাদির জন্য ব্যয়িত হয়ে যায়। বস্তু বা কণার গতি কম হলে ধরা যায় অবমন্দন বল (damping force) কণার বেগের সঙ্গে সমানুপাতিক। সমীকরণ (2) এর পরিবর্তিত রূপ হবে—

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}$$

এখানে $-kx$ হল প্রত্যানয়ক বল ও $-\gamma\frac{dx}{dt}$ হল অবমন্দন বল; $m\frac{d^2x}{dt^2}$ হল জাড্যবল। k ও γ ধ্রুবক ও m হল ভর।

অতএব $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt}$

বা, $\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$ ....(4)

এখানে $2b = \frac{\gamma}{m}, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

মনে করি সমীকরণ (4) এর পরীক্ষামূলক (trial) সমাধান

$$x = ce^{\propto t}$$

$\therefore \dfrac{dx}{dt} = \propto ce^{\propto t}, \dfrac{d^2x}{dt^2} = \propto^2 ce^{\propto t}$

4 নং সমীকরণে বসিয়ে পাই—

$ce^{\propto t}\left(\propto^2 + 2b\propto + \omega^2\right) = 0$

বা, $\alpha^2 + 2b\alpha + \omega^2 = 0$

$\therefore \alpha = \dfrac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4\omega^2}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$

অতএব সমীকরণটির সাধারণ সমাধান হবে

$$x = c_1 e^{\left(-b+\sqrt{b^2-\omega^2}\right)t} + c_2 e^{\left(-b-\sqrt{b^2-\omega^2}\right)t}$$

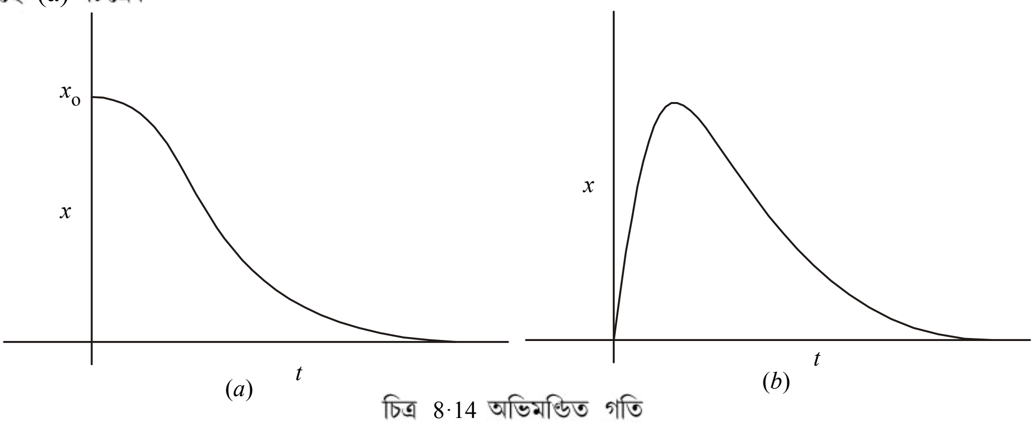
$$= e^{-bt}\left(c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t}\right) \qquad \text{..................(5)}$$

$$\beta = \sqrt{b^2 - \omega^2}$$

অবমন্দনের মানের উপর নির্ভর করে সমাধানটির তিনটি ভিন্ন চরিত্র-বৈশিষ্ট্য পাওয়া যায়।

(i) অতি অবমন্দিত (Over damped) :

অবমন্দন অত্যন্ত বেশী হলে $b >> \omega$। সেক্ষেত্রে $\sqrt{b^2 - \omega^2}$ বাস্তব এবং এর মান b এর থেকে কম। $b > \sqrt{b^2 - \omega^2}$ বা $b > \beta$। অতএব $-b + \beta$ ও $-(b + \beta)$ দুটিই ঋণাত্মক এবং বাস্তব। এর অর্থ সমীকরণ (5) এ দোলগতি থাকবে না এবং সরণ x সময়ের সঙ্গে কমতে থাকবে। অর্থাৎ বস্তুটিকে একবার নিজের সাম্যাবস্থান থেকে সরিয়ে দিলে কোনো দোলন ছাড়াই সূচকীয়ভাবে (exponentially) ধীরে ধীরে সাম্যাবস্থানে চলে আসবে। এই রকম গতিকে অতি অবমন্দিত গতি (over damped motion) বলা হয়। (8·14) নং চিত্রে এই গতি দেখানো হয়েছে (a) চিত্রে।



চিত্র 8·14 অভিমন্ডিত গতি

বস্তুটিকে সাম্যাবস্থান থেকে x_0 দূরত্বে নিয়ে ছেড়ে দিলে সরণ সময়ের সঙ্গে সুচকীয় ভংগিতে ধীরে ধীরে কমে আসতে থাকে দেখানো হয়েছে। (b) চিত্রে বস্তুটিকে সাম্যাবস্থা থেকে একটি গতিবেগে প্রক্ষিপ্ত করলে সরণ

কেমনভাবে কমে আসতে থাকে দেখানো হয়েছে। সান্দ্রতরলের মধ্যে সরল দোলকের গতি এবং চলকুণ্ডলী গ্যাল-ভ্যানোমিটারের দুটি প্রান্ত সংযুক্ত করলে কুণ্ডলীর গতি অতি অবমন্দিত গতির উদাহরণ।

(ii) লঘু অবমন্দিত গতি (Lightly damped motion) :

ধরা যাক অবমন্দনের মান এত কম, যে $b<\omega$। সেক্ষেত্রে $\beta = \sqrt{b^2 - \omega^2}$ কাল্পনিক (imaginary) রাশি। ধরি $\beta = \sqrt{1}\sqrt{\omega^2 - b^2} = i\phi$, $\phi = \sqrt{\omega^2 - b^2}$ একটি বাস্তব রাশি। সেক্ষেত্রে

$$x = e^{-bt}\left(c_1 e^{i\phi t} + c_2 e^{-i\phi t}\right)$$

$$= e^{-bt}\left[c_1(\cos\phi t + i\sin\phi t) + c_2(\cos\phi t - i\sin\phi t)\right]$$

$$= e^{-bt}\left[(c_1 + c_2)\cos\phi t + i(c_1 - c_2)\sin\phi t\right]$$

$$= e^{-bt}\left[\mathrm{D}\cos\phi t\sin\delta + \mathrm{D}\sin\phi t\cos\delta\right]$$

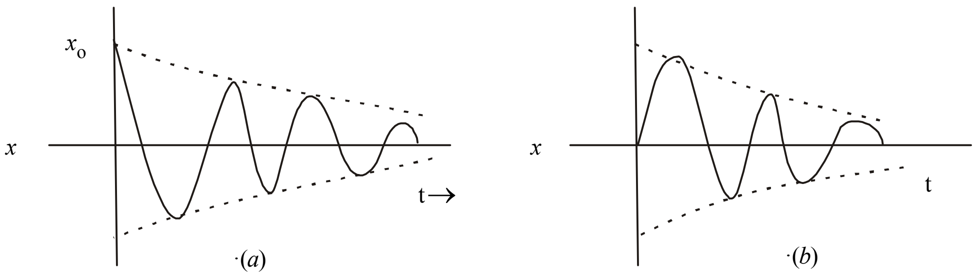
$$= \mathrm{D}e^{-bt}\sin(\phi t + \delta) \quad ....(6) \quad \begin{bmatrix} c_1 + c_2 = \mathrm{D}\sin\delta \\ i(c_1 - c_2) = \mathrm{D}\cos\delta \end{bmatrix}$$

অবমন্দিত গতির বেগ, $\dfrac{dx}{dt} = \mathrm{D}e^{-bt}\phi\cos(\phi t + \delta) - \mathrm{D}e^{-bt}b\sin(\phi t + \delta)$

δ ও D এর মান প্রাথমিক শর্ত থেকে পাওয়া যায়।

সমীকরণ (6) একটি সরল দোলগতিকে প্রকাশ করছে যার কম্পাঙ্ক $\dfrac{\phi}{2\pi}$ এবং বিস্তার e^{-bt} এর সমানুপাতিক। একে অবমন্দিত সরল দোলগতি বলা হয়। বাস্তবে প্রায়ই এরকম গতি আমরা দেখতে পাই। বায়ুর মধ্যে সরল দোলকের গতি, তুলাযন্ত্রের পাত্রের দোলন ইত্যাদি এরকম অবমন্দিত সরল দোলগতির উদাহরণ। এই অবমন্দনের ফলে বিস্তার সময়ের সঙ্গে সূচকীয়ভাবে কমতে থাকে এবং কম্পাঙ্ক $f = \dfrac{\phi}{2\pi} = \sqrt{\dfrac{\omega^2 - b^2}{2\pi}} = \dfrac{\omega}{2\pi}\sqrt{1 - \dfrac{b^2}{\omega^2}}$ ।

মন্দন না থাকলে এর কম্পাঙ্ক হত $f_o = \dfrac{\omega}{2\pi}$ । অর্থাৎ $f < f$o। মন্দন থাকার ফলে এর কম্পাঙ্ক কমে যায় বা দোলনকাল বেড়ে যায়।



চিত্র 8·15 অবমন্দিত সরল দোলগতি

8·15 (a) চিত্রে সাম্যাবস্থান থেকে একদিকে নিয়ে ছেড়ে দিলে বস্তুটির যে গতি হবে এবং 8·15 (b) চিত্রে প্রাথমিক গতিবেগে প্রক্ষিপ্ত করলে যে গতি হবে তা দেখানো হয়েছে।

(iii) ক্রান্তীয় অবমন্দন (Critical damping) :

যখন b = ω, তখন সমাধান হয় $x=(c_1+c_2)e^{-bt}=\mathrm{A}e^{-bt}$ $(c_1+c_2=\mathrm{A}=$ একটি ধ্রুবক)

আপাতভাবে এটি অতিমন্দিত অবস্থাকে প্রকাশ করছে বলে মনে হয়। অতিমন্দিত অবস্থা থেকে এটি পৃথক দেখার জন্য মনে করি $\sqrt{b^2-\omega^2}$ প্রায় শূন্য কিন্তু শূন্য নয়। সেক্ষেত্রে মনে করি $h=\sqrt{b^2-\omega^2}$ এবং $h\to 0$। তখন সমাধান হয়,

$$x=c_1e^{(-b+h)t}+c_2e^{(-b-h)t}$$

$$=e^{-bt}\left(c_1e^{ht}+c_2e^{-ht}\right)$$

e^{ht} ও e^{-ht} এর বিস্তৃতি নিয়ে এবং ht এর উচ্চ ঘাত উপেক্ষা করে পাই

$$x=e^{-bt}\left[c_1(1+ht)+c_2(1-ht)\right]$$

$$=e^{-bt}\left[(c_1+c_2)+(c_1-c_2)ht\right]$$

$$=e^{-bt}[\mathrm{A}+\mathrm{B}ht] \quad \text{..................(7)}$$

A ও B দুটি পৃথক ধ্রুবক।

এর থেকে বোঝা যায় এক্ষেত্রে বস্তুটি অত্যন্ত বেশী অবমন্দনের অবস্থার (b>>ω) তুলনায় দ্রুততার সঙ্গে তার সাম্যাবস্থানে চলে আসতে চায়। যেহেতু b>ω হলে গতি হবে অতি অবমন্দিত এবং b<ω হলে গতি হবে দোলন গতি (সেক্ষেত্রে বিস্তার ও কম্পাঙ্ক সময়ের সঙ্গে কমে যায়) তাই b=ω অবস্থার গতিকে ক্রান্তীয় অবমন্দিত গতি বলা হয় এবং b কে বলে ক্রান্তীয় অবমন্দন গুণক (Critical damping coefficient)।

8.8 পরবশ কম্পন ও অনুনাদ (Forced Vibration and Resonance) ঃ

আমরা এর আগে মুক্ত কম্পন ও অবমন্দিত কম্পন আলোচনা করেছি। এখন আমরা পরবশ কম্পন ও অনুনাদ নিয়ে আলোচনা করব। কোনো কম্পনশীল বস্তুর উপর বাইরে থেকে নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কের ও বিস্তারের পর্যাবৃত্ত বল প্রযুক্ত হলে বস্তুটি প্রথমে নিজের স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক (natural frequency) নিয়ে কম্পিত হতে থাকে। সময়ের সংগে ঐ কম্পন হ্রাস পেতে থাকে এবং এক সময় বস্তুটি প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্ক অনুযায়ী কম্পিত হতে থাকে। একেই পরবশ কম্পন বলে। পরবশ কম্পনের বিস্তার সাধারণত কম হয়। প্রথমে আমরা পরবশ কম্পন নিয়ে আলোচনা করব। পরে অনুনাদ নিয়ে আলোচনায় যাব।

মনে করি ω কৌণিক কম্পাঙ্কের একটি বল m ভরের বস্তুর উপর প্রযুক্ত হচ্ছে। মনে করি কোনো নির্দিষ্ট সময়ে বস্তুটির সরণ x। বস্তুর উপর নিম্নলিখিত বলগুলি ক্রিয়াশীল হবে।

(i) প্রত্যানয়ক বল = $-kx$, k হল একক সরণের জন্য প্রত্যানয়ক বল।

(ii) অবমন্দন বল $= -\gamma \dfrac{dx}{dt}$, γ হল একক বেগের জন্য অবমন্দন বল।

(iii) প্রযুক্ত পর্যাবৃত্ত বল = F sin ωt, F হল প্রযুক্ত পর্যাবৃত্ত বলের বিস্তার।

অতএব পরবশ কম্পনের সমীকরণ হবে—

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + \mathrm{F}\sin\omega t \quad ....(8)$$

বা, $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} = \frac{\mathrm{F}}{m}\sin\omega t$$

বা, $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f\sin\omega t \quad ....(9)$$

এখানে $2b = \dfrac{\gamma}{m}$, $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, ও $f = \dfrac{\mathrm{F}}{m}$।

এই সমীকরণের সমাধান দুটি অংশে বিভক্ত করা যায়, একটি হবে পূরক অপেক্ষক (complementary function)।

মনে করি তখন $x = x_1$; এবং সমীকরণ হবে

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2b\frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2 x_1 = 0 \quad ....(10)$$

অন্য সমাধান হবে $x = x_2$ বিশেষ সমাকল (particular integral) সমাধান। সেক্ষেত্রে সমীকরণ হবে,

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + 2b\frac{dx_2}{dt} + \omega_0^2 x_2 = f\sin\omega t \quad ....(11)$$

অতএব

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) + 2b\frac{d}{dt}(x_1 + x_2) + \omega_0^2(x_1 + x_2) = f\sin\omega t \quad ....(12)$$

আমরা আগেই দেখেছি অবমন্দন লঘু হলে, সমাধান x_1 হবে

$$x_1 = \mathrm{D}e^{-bt}\sin(\phi t + \delta) = \mathrm{D}e^{-bt}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - b^2}\,t + \delta\right) \quad ....(13)$$

D ও δ হলো ধ্রুবক।

এবার বিশেষ সমাধান x_2 নির্ণয় করতে হবে। আমরা জেনেছি যে স্থায়ী অবস্থায় উপনীত হলে বস্তুটি প্রযুক্ত পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্ক অনুযায়ী কম্পিত হবে। এর জন্য ধরি (11) নং সমীকরণের সমাধান হবে,

$$x_2 = \mathrm{A}\sin(\omega t - \alpha)$$

$$\therefore \frac{dx_2}{dt} = \mathrm{A}\omega\cos(\omega t - \alpha) \text{ ও } \frac{d^2x_2}{dt^2} = -\mathrm{A}\omega^2\sin(\omega t - \alpha)$$

(11) নং সমীকরণে এই মানগুলি বসিয়ে পাই,

$$-A\omega^2 \sin(\omega t-\alpha)+2bA\omega\cos(\omega t-\alpha)+\omega_0^2 A\sin(\omega t-\alpha) \quad = f\sin\omega t$$

বা, $$A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\sin(\omega t-\alpha)+2bA\omega\cos(\omega t-\alpha) \quad = f\sin\left[(\omega t-\alpha)+\alpha\right]$$

বা, $$A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\sin(\omega t-\alpha)+2bA\omega\cos(\omega t-\alpha)=f\sin(\omega t-\alpha)\cos\alpha+f\cos(\omega t-\propto)\sin\alpha$$

সমীকরণটি t এর সব মানের জন্যই সিদ্ধ। অতএব উভয় দিকের $\sin(\omega t-\alpha)$ ও $\cos(\omega t-\alpha)$ এর সহগগুলি পরস্পর সমান হবে।

অতএব $A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)=f\cos\alpha$

$$2bA\omega=f\sin\alpha$$

বর্গ করে ও যোগ করে পাই,

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4b^2\omega^2}} \\ \text{ভাগ করে পাই, } \tan\alpha &= \frac{2b\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \end{aligned}\right\} \text{...........(14) (ক)}$$

অতএব পরবশ কম্পনের সাধারণ সমাধান—

$$x=De^{-bt}\sin(\phi t+\delta)+A\sin(\omega t-\alpha) \quad \text{...........(14)}$$

যেখানে সমীকরণ 13 (ক) থেকে A এবং α জানা যাবে।

সমাধানের প্রথম অংশটিতে e^{-bt} পদ থাকায় সময়ের সঙ্গে $\frac{\phi}{2\pi}$ কম্পাঙ্কের দোলন অংশটির মান হ্রাস পেতে থাকে। অপর অংশটি প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্ক $\frac{\omega}{2\pi}$ অনুসারে স্থির বিস্তার A তে কম্পিত হতে থাকে। বেশ কিছু সময় পরে শুধু দ্বিতীয় পদটিই থাকবে। তখন,

$$x=A\sin(\omega t-\alpha)$$

এটি A বিস্তারের সরল দোলগতি যার কম্পাঙ্ক $\frac{\omega}{2\pi}$ এবং প্রযুক্ত বলের সঙ্গে একটি α দশা পার্থক্যে পিছিয়ে থাকে। এটিই বস্তুর পরবশ কম্পন। $\sqrt{\omega_0^2-b^2}$ ও ω এর মান কাছাকাছি হলে স্বাভাবিক কম্পন ও পরবশ কম্পনের ফলে প্রথমের দিকে স্বরকম্প হলেও পরের দিকে স্বাভাবিক কম্পন কমে গিয়ে পরবশ কম্পনেই বস্তু কম্পিত হতে থাকবে।

পরবশ কম্পনে কম্পনরত বস্তুটির বেগ হবে

$$v = \frac{dx}{dt} = \mathrm{A}\omega\cos(\omega t - \alpha)$$

$$= \mathrm{A}\omega\sin\left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \mathrm{A}\omega\sin(\omega t - \psi)$$

বেগও সরল সমঞ্জসভাবে পরিবর্তিত হয়। এর বিস্তার $\mathrm{A}\omega$ ও কম্পাঙ্ক $\frac{\omega}{2\pi}$ এবং প্রযুক্ত পর্যাবৃত্ত বলের সঙ্গে দশা পার্থক্য $\psi = \alpha - \frac{\pi}{2}$।

অনুনাদ : এবার আমরা অনুনাদ নিয়ে আলোচনা করব।

(a) বিস্তার অনুনাদ (amplitude resonance) : যখন প্রযুক্ত পর্যাবৃত্ত বলের ফলে বস্তুটি সর্বোচ্চ বিস্তারে কম্পিত হয় তখন বলা হয় বস্তুটির বিস্তার অনুনাদ হয়েছে।

পরবশ কম্পনের বিস্তার

$$\mathrm{A} = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2}}$$

যখন $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2$ এর মান সর্বনিম্ন হয় তখনই বিস্তার সর্বোচ্চ হয়। এর প্রয়োজনীয় শর্ত

$$\frac{d}{d\omega}\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2\right] = 0$$

বা, $-4\omega\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 4b^2\omega = 0$

বা, $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - 2b^2 = 0$

বা, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}$

বা, $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}}{2\pi} < \frac{\omega_0}{2\pi}$

বিস্তার সর্বোচ্চ হয় যখন পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্ক $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}}{2\pi}$ হয়। এই কম্পাঙ্ক বস্তুর স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের থেকে সামান্য কম। যদি অবমন্দন না থাকে (b=0) তখন $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega_o}{2\pi}$

সেক্ষেত্রে পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্ক = বস্তুর স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক অর্থাৎ অবমন্দনের অনুপস্থিতিতে প্রযুক্ত বলের

কম্পাংক যদি বস্তুর স্বাভাবিক কম্পাংকের সমান হয় তবে বস্তুর কম্পনের বিস্তার হয় সর্বাধিক। একে বলে বিস্তার অনুনাদ।

(b) গতিবেগ অনুনাদ বা শক্তি অনুনাদ বা অনুনাদ (velocity resonance or energy resonance or resonance) :

পরবশ কম্পন স্থায়ী হলে, সরণ

$$x = \mathrm{A}\sin(\omega t - \alpha)$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \mathrm{A}\omega\cos(\omega t - \alpha)$$

তাৎক্ষণিক গতি শক্তি, $\mathrm{E} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\mathrm{A}^2\omega^2\cos^2(\omega t - \alpha)$

সর্বোচ্চ গতিশক্তি $\mathrm{E}_m = \frac{1}{2}m\mathrm{A}^2\omega^2$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{f^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}mf^2}{\omega_0^2\left(\frac{\omega_o}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 + 4b^2}$$

b এর যে কোনো বিশেষ মানের জন্য $\omega = \omega_0$ হলে গতিশক্তি সর্বোচ্চ হবে। অর্থাৎ যখন প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্ক বস্তুর স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সমান হয় তখনই বস্তুর গতিশক্তি সর্বোচ্চ হয়। একে বলা হয় গতিবেগ অনুনাদ বা শক্তি অনুনাদ বা শুধু অনুনাদ।

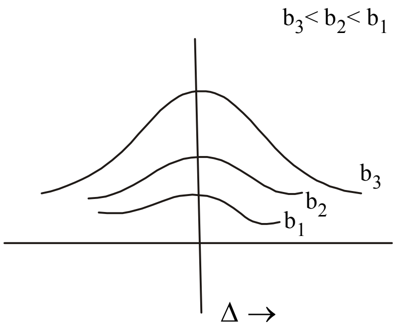
তখন $\mathrm{E}_m = -\frac{\frac{1}{2}mf^2}{4b^2}$

ধরা যাক্ $\frac{\omega_o}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_o} = \Delta$

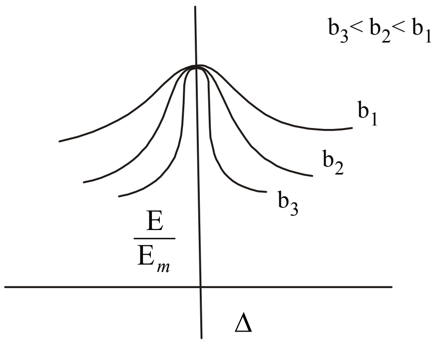
গতিশক্তি $\mathrm{E} = \frac{\frac{1}{2}mf^2}{\omega_0^2\Delta^2 + 4b^2}$

এবং অনুনাদে গতিশক্তি (সর্বোচ্চ) $\mathrm{E}_m = \frac{\frac{1}{2}mf^2}{4b^2}$

b এর মান কম হলে বা অবমন্দন কম হলে গতিশক্তি বেশী হবে। Δ এর সঙ্গে গতিশক্তির লেখ চিত্র 8·16র অনুরূপ হবে।



চিত্র 8·16



চিত্র 8·17

আবার $\dfrac{E}{E_m} = \dfrac{4b^2}{\omega_0^2\Delta^2 + 4b^2} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{\omega_0^2\Delta^2}{4b^2}}$

অবমন্দনের যে কোনো মানে, $\Delta = 0$ হলে $\dfrac{E}{E_m} = 1$ হবে, $\omega = \omega_0$ হলে বা অনুনাদে $\dfrac{E}{E_m} = 1$। Δ এর মান খুব বেশী হলে বা পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্ক ও বস্তুর স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের ব্যবধান অনেক বেশী হলে $\dfrac{E}{E_m} \rightarrow 0$।

Δ এর সঙ্গে $\dfrac{E}{E_m}$ এর পরিবর্তন 8·17 চিত্রে দেখানো হয়েছে। b এর মান যত কম হয় $\dfrac{E}{E_m}$ এর পরিবর্তন তত দ্রুত হয়।

- **পরবশ কম্পন ও অনুনাদে ক্ষমতা :**

প্রযুক্ত বলের প্রদত্ত ক্ষমতা :

শক্তি সরবরাহের হার বা ক্ষমতা $P = \dfrac{dw}{dt}$, w = কৃতকার্য।

এখন $dw = F dx. = F \sin \omega t \cdot A\omega \cos (\omega t - a) dt$

অতএব $P = \dfrac{dw}{dt} = F \sin \omega t \times A\,\omega \cos(\omega t - \alpha)$

$$= FA\omega \sin \omega t (\cos \omega t \cos \alpha + \sin \omega t \sin \alpha)$$

$$= FA\omega (\sin \omega t \cos \omega t \cos \alpha + \sin^2 \omega t \sin \alpha)$$

$$= FA\omega \left(\frac{1}{2} \sin 2\omega t \cos \alpha + \sin^2 \omega t \sin \alpha\right)$$

এখন, গড় প্রদত্ত ক্ষমতা $\langle P \rangle = \dfrac{\int_0^T dw}{\int_0^T dt} = \dfrac{1}{T}\int_0^T F\sin\omega t \times A\omega\cos(\omega t - \alpha)dt$

$$\langle P \rangle = FA\omega\left[\frac{\cos\alpha}{2T}\int_0^T \sin 2\omega t dt + \frac{\sin\alpha}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t dt\right]$$

$$= FA\omega\left[0 + \frac{\sin\alpha}{2}\right]$$

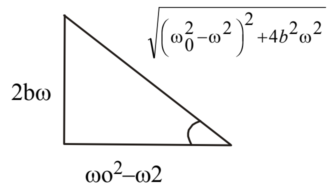
$$= \frac{FA\omega\sin\alpha}{2}$$

এই ক্ষমতা বস্তুর দোলন বজায় রাখতে ব্যয়িত হয়।

দেখানো যায় গড় শক্তিক্ষয়ের হার = গড় শক্তি সরবরাহের হার।

এখন $\tan\alpha = \dfrac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

পাশের চিত্র থেকে $\sin\alpha = \dfrac{2b\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2}}$



এবং $A = \dfrac{F}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2}}$

$$\therefore \quad \langle P \rangle = FA\omega\frac{\sin\alpha}{2}$$

$$= F\cdot\frac{F}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2}}\cdot\omega\cdot\frac{1}{2}\frac{2b\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2}}$$

$$= \frac{bF^2\omega^2}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2\right]}$$

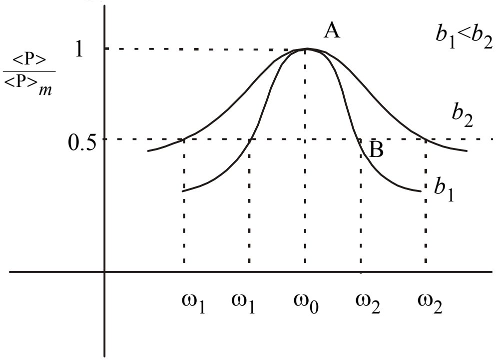
<P> এর মান সর্বোচ্চ $\langle P \rangle_m$ হয় যখন $\omega = \omega_0$ হয়।

$$\langle P \rangle_m = \frac{bF^2\omega^2}{m4b^2\omega^2} = \frac{F^2}{4bm}$$

b এর মান কম হলে, অর্থাৎ, অবমন্দন কম হলে এবং প্রযুক্ত বল বা চালক বলের কম্পাঙ্ক ω_0 থেকে সামান্য কম বা বেশী হলে $<P>$ এর মান $<P>_m$ এর থেকে দ্রুত কমে যায়।

8·18 চিত্রে A লেখ-এর তুলনায় B লেখ দ্রুত সর্বোচ্চমানের অর্ধেক হয়েছে। B এর বেলায় b_1 A এর বেলায় b_2 এর থেকে কম।

বলা হয় B লেখটির অনুনাদের তীক্ষ্ণতা Q (sharpness of resonance Q) বেশী। তীক্ষ্ণতা (Q) পরিমাপের জন্য সংজ্ঞা ব্যবহার করা হয় নিম্নরূপে—



চিত্র 8·18 $\frac{<P>}{<P>_m}$ এর লেখ

$$Q = \frac{\text{অনুনাদী কৌণিক কম্পাঙ্ক}}{\text{অর্ধক্ষমতার কৌণিক কম্পাঙ্কের ব্যাপ্তি}} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

এখন $\dfrac{<P>}{<P>_m} = \dfrac{bF^2\omega^2}{m\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2\right]} \cdot \dfrac{4bm}{F^2}$

$$= \frac{4b^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2}$$

যখন অনুপাতটি $\frac{1}{2}$ হয় তখন

$$\frac{1}{2} = \frac{4b^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2}$$

বা, $\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2 = 8b^2\omega^2$

বা, $\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 = 4b^2\omega^2$

$\therefore \; \omega_0^2 - \omega^2 = \pm 2b\omega$

এর থেকে দুটি দ্বিঘাত সমীকরণ পাওয়া যায়

$$\omega^2 + 2b\omega - \omega_0^2 = 0 \quad \text{.............(i)}$$

ও $\quad \omega^2 - 2b\omega - \omega_0^2 = 0 \quad$ ....(ii)

(i) থেকে পাই, $\omega = -b \pm \sqrt{b^2 + \omega_0^2}$

এর ধনাত্মক মান, $\omega_1 = \sqrt{b^2 + \omega_0^2} - b$

(ii) থেকে পাই, $\omega = b \pm \sqrt{b^2 + \omega_0^2}$

এর ধনাত্মক মান, $\omega_2 = \sqrt{b^2 + \omega_0^2} + b$

$\therefore \quad \omega_2 - \omega_1 = 2b$

$$\therefore \quad Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{2b}$$

(8·18 চিত্রে) b এর মান কম হলে লেখ অনেক তীক্ষ্ণভাবে সর্বোচ্চ মান অর্জন করে। এইজন্য Q কে বলে অনুনাদের তীক্ষ্ণতা।

Δ এর যে মানের জন্য গতিশক্তি অনুনাদের গতিশক্তির অর্ধেক হয়, দেখানো যায় Δ-এর সেই মানের জন্য $a = \frac{1}{\Delta}$ হবে।

$$E_m = \frac{1}{2}\frac{mf^2}{4b^2}$$

$$E = \frac{\frac{1}{2}mf^2}{\omega_0^2\Delta^2 + 4b^2} = \frac{E_m}{2} = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}mf^2}{4b^2}$$

বা, $\quad \omega_0^2\Delta^2 + 4b^2 = 8b^2$

বা, $\quad \Delta^2 = \frac{4b^2}{\omega_0^2}$

$$\therefore \quad \frac{1}{\Delta} = \pm\frac{\omega_0}{2b} = Q$$

8.9 তরঙ্গগতি (Wave Motion) ঃ

আমরা জানি ঢিল ছুঁড়লে বা বন্দুকের গুলি ছুঁড়লে, ঢিল বা বন্দুকের গুলি শক্তি বহন করে। এ ক্ষেত্রে বস্তুই শক্তি একস্থান থেকে অন্যস্থানে নিয়ে যাচ্ছে। এছাড়া আরো একটি পদ্ধতিতে শক্তি স্থানান্তরিত হতে পারে। তা হল তরঙ্গগতি। বায়ুর মধ্যে শব্দ সৃষ্টি করলে শব্দ একস্থান থেকে অন্যস্থানে ছড়িয়ে পড়ে। টান করা তারের এক প্রান্তে কম্পন সৃষ্টি করলে তার বরাবর অন্য প্রান্তে চলে যায়। জলের উপরতলে কোনো স্থানে আলোড়ন সৃষ্টি করলে, তা' ঐ স্থান থেকে অন্যত্র চলে যায়। এসব ক্ষেত্রে শক্তি স্থানান্তরিত হয়েছে—বায়ুর কণা, তারের

কণা, বা জলের কণা এদের সাহায্যে; তারা তাদের অবস্থানের এদিক ওদিক আন্দোলিত হয়েছে কিন্তু চূড়ান্তভাবে স্থানান্তরিত হয়নি। শক্তি স্থানান্তরের এই পদ্ধতিকে বলা হয় তরঙ্গগতি। সংক্ষেপে বললে দাঁড়ায়—যে পদ্ধতিতে মাধ্যমের কণার আন্দোলনের ফলে একস্থান থেকে অন্যস্থানে শক্তি স্থানান্তরিত হয় কিন্তু মাধ্যমের কণার চূড়ান্ত স্থানচ্যুতি হয় না—তাকে তরঙ্গগতি বলা হয়। মাধ্যমের কোনো কণাকে আন্দোলিত করলে স্থিতিস্থাপক ধর্মের জন্য এই আন্দোলন পাশের কণায় পর পর স্থানান্তরিত হয়। স্থিতিস্থাপক ধর্মের জন্য তরঙ্গ সৃষ্টি হয় বলে এদের স্থিতিস্থাপক তরঙ্গ (elastic wave) বলা হয়। এই ধরনের তরঙ্গের সাহায্যে একস্থান থেকে অন্যস্থানে শক্তি সঞ্চালিত হয়। এজন্য এদের চলতরঙ্গ বা গমনশীল তরঙ্গ (progressive wave) বলা হয়। বিস্তার খুব বেশী না হলে কণাগুলি সরল দোলগতিতে আন্দোলিত হয়। সেক্ষেত্রে তরঙ্গকে সরল দোলীয় (simple harmonic) তরঙ্গ বলা হয়।

তরঙ্গ দু'প্রকারের হতে পারে—**(i) তির্যক তরঙ্গ** (transvese wave),

(ii) অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ (longitudinal wave), তির্যক তরঙ্গে তরঙ্গগতির দিকের সঙ্গে লম্বভাবে মাধ্যমের কণাগুলি আন্দোলিত হয় এবং অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গে তরঙ্গগতির অভিমুখ বরাবর কণাগুলি আন্দোলিত হয়।

● **তরঙ্গ সম্পর্কিত কয়েকটি রাশি :**

(i) বিস্তার : তরঙ্গ গমনের ফলে মাধ্যমের কণাগুলির সাম্য অবস্থান থেকে সর্বোচ্চ সরণকে তরঙ্গের বিস্তার বলে। অর্থাৎ মাধ্যমের কণার বিস্তার এবং তরঙ্গ বিস্তার সমার্থক।

(ii) কম্পাঙ্ক : এক সেকেন্ডে কণাগুলি যতবার পূর্ণ আন্দোলন করে তাকে তরঙ্গের কম্পাঙ্ক বলে। প্রতি সেকেন্ডে যতগুলি পূর্ণ দৈর্ঘ্যের তরঙ্গ সৃষ্টি হয় তাকে বলে তরঙ্গের কম্পাংক। আন্দোলনের পর্যায়কাল T হলে,

কম্পাঙ্ক $n = \frac{1}{T}$,

(iii) দশা : কোনো নির্দিষ্ট স্থানে ও নির্দিষ্ট সময়ে কোনো কণার গতির অবস্থাকে তরঙ্গের দশা হিসাবে প্রকাশ করা হয়।

(iv) তরঙ্গদৈর্ঘ্য : একই দশায় থাকা নিকটতম দুটি কণার মধ্যে যে দূরত্ব তাকে তরঙ্গদৈর্ঘ্য বলা হয়।

î Âþ¼ Æãâ Ç λ ও তরঙ্গের কম্পাঙ্ক n হলে তরঙ্গের বেগ, $v = n\lambda$

(v) তরঙ্গ মুখ : যে মাধ্যমে তরঙ্গ অগ্রসর হয় সেই মাধ্যমের একই দশায় থাকা কাছাকাছি কণাগুলি যে তলে অবস্থান করে তাকে ঐ তরঙ্গের তরঙ্গমুখ বলে। তরঙ্গের গতির অভিমুখকে রশ্মি বলে। তরঙ্গমুখের লম্ব অভিমুখ হলো রশ্মির দিক। কোনো বিন্দু উৎস থেকে তরঙ্গ অগ্রসর হলে তরঙ্গমুখ গোলীয় হয়। বহুদূরে উৎস থাকলে তরঙ্গমুখ হয় সমতল। তখন রশ্মিগুলি সমান্তরাল হয়। চলতরঙ্গের তরঙ্গমুখ সমতল হলে তাকে সমতল চলতরঙ্গ বা সমতল অগ্রগামীতরঙ্গ (plane progressive wave) বলে।

● **চলতরঙ্গের বৈশিষ্ট্য (characteristics of progressive waves) :**

(i) মাধ্যমের কণাগুলির পর্যাবৃত্ত কম্পনের ফলে চলতরঙ্গ সৃষ্ট হয়। এতে মাধ্যমের কোনো অংশ স্থানান্তরিত হয় না। কণাগুলির কম্পনের সাহায্যে শক্তি সঞ্চালিত হয়। কণাগুলির কম্পন তরঙ্গপ্রবাহের অভিলম্ব দিকে হলে তির্যক তরঙ্গ ও তরঙ্গপ্রবাহের দিকে হলে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ সৃষ্ট হয়।

(ii) মাধ্যমের যে অংশ দিয়ে তরঙ্গ অগ্রসর হয় সেখানে প্রত্যেকটি কণা একইভাবে সরল দোলগতিতে আন্দোলিত

হয় কিন্তু এই আন্দোলনে সব কণার দশা সমান হয় না। সাধারণভাবে এক বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে দশার পার্থক্য থাকে।

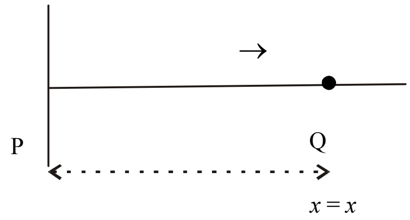
(iii) একই মাধ্যমে নির্দিষ্ট বেগে তরঙ্গ অগ্রসর হয়-একে তরঙ্গবেগ বলে। এই বেগ মাধ্যমের স্থিতিস্থাপকতা ও ঘনত্বের উপর নির্ভর করে। কণার বেগ পরিবর্তিত হয় কিন্তু তরঙ্গের বেগ স্থির থাকে।

(iv) তরঙ্গপ্রবাহের দিক বরাবর একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য বা তার গুণিতক অন্তর মাধ্যমের কণাগুলি সমদশায় থাকে। একে তরঙ্গদৈর্ঘ্য বলে। একটি তরঙ্গদৈর্ঘ্য অন্তর কণার গতিবেগ ও ত্বরণ একই হয়।

(v) কম্পাঙ্ক n ও তরঙ্গ দৈর্ঘ্য λ হলে তরঙ্গের বেগ, $v = n\lambda$।

8.10 সরলদোলীয় সমতল চলতরঙ্গের সমীকরণ (Equation of a Simple Harmonic Plane Progressive Wave) ঃ

মনে করি ধনাত্মক x অক্ষ বরাবর একটি সরলদোলীয় সমতল চলতরঙ্গ v গতিবেগ অগ্রসর হচ্ছে। যে কেনো t সময়ে মূল বিন্দু P অবস্থানে (x=0) কণার সরণ ধরি $y_1 = a \sin \omega t$ (চিত্র 8·10)। a হল বিস্তার ও ω হল কৌণিক কম্পাঙ্ক। ঐ একই t সময়ে মূল বিন্দু থেকে x দূরত্বে Q অবস্থানে কণার সরণ নির্ণয় করতে হলে দূরত্ব PQ অগ্রসর হওয়ার সময়কে হিসাবের মধ্যে আনতে হবে। এই সময় $t' = \frac{x}{v}$। বলা যায় Q বিন্দুতে t সময়ে সেই সরণই হবে যা P বিন্দুতে t' সময় আগে ছিল। অতএব Q বিন্দুতে সরণ হবে—



চিত্র 8·19

$$y = a\sin\omega(t - t') = a\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$
.................(14)

একেই সরল দোলীয় সমতল চলতরঙ্গের সমীকরণ হিসাবে গণ্য করা যায়। ঋণাত্মক x অক্ষের দিকে তরঙ্গ প্রবাহিত হলে তার সমীকরণ হবে

$$y = a\sin\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) \quad ....(15)$$

একইভাবে $y = a\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$ ও $y = a\cos\left(\omega t + \frac{x}{v}\right)$ যথাক্রমে ধনাত্মক x-অক্ষ বরাবর ও ঋণাত্মক x-অক্ষ বরাবর সরল দোলীয় সমতল চলতরঙ্গকে প্রকাশ করে।

(14) নং সমীকরণকে বিভিন্ন আকারে প্রকাশ করা যায়, যেমন

$$y = a\sin\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\left(t - \frac{x}{v}\right)$$
$$= a\sin\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} - \frac{2\pi x}{v\mathrm{T}}\right)$$

$$= a\sin 2\pi\left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$= a\sin(\omega t - kx), \qquad \left[k = \frac{2\pi}{\gamma}\right]$$

$$= a\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\mathrm{T}}t - x\right)$$

$$= a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

● **চলতরঙ্গের অবকল সমীকরণ :**

$$y = a\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = a\omega\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -a\omega^2\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a\omega}{\upsilon}\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a\omega^2}{v^2}\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2y}{dt^2} \qquad \text{................(16)}$$

এটিই নির্ণেয় অবকল সমীকরণ, এর থেকে বোঝা যায় যে কোনো অপেক্ষক $f(vt - x)$ বা $f(vt + x)$ এই সমীকরণের সমাধান। বলা যায় সাধারণ সমাধান

$$y = f(vt - x) + f(vt + x) \qquad \text{...............(17)}$$

8.11 কণার বেগ ও তরঙ্গবেগের সম্পর্ক (Relation Between Velocity of the Particle and Wave Velocity) ঃ

মাধ্যমের কণাগুলির আন্দোলনের ফলে তরঙ্গ কোনো মাধ্যমে নির্দিষ্ট বেগে অগ্রসর হয়। কণাগুলির বেগ ধনাত্মক, শূন্য ও ঋণাত্মক হতে পারে। কিন্তু নির্দিষ্ট মাধ্যমে তরঙ্গের বেগ কোনো দিকে নির্দিষ্ট থাকে। এই বেগকে তরঙ্গ বেগ (wave velocity) বা দশা বেগ (phase velocity) বলা হয়। আমরা আগে উল্লেখ করেছি এই বেগ মাধ্যমের স্থিতিস্থাপকতা ও ঘনত্বের উপর নির্ভর করে। তরঙ্গ বেগ v হলে সরণের সমীকরণ

$$y = a\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

কণার বেগ $\mathrm{V} = \frac{dy}{dt} = a\omega\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$

আবার $\frac{dy}{dx} = -\frac{a\omega}{v}\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$

$\therefore \quad \mathrm{V} = -v\frac{dy}{dx}$

$\therefore$ কণার বেগ = – তরঙ্গ বেগ × সরণ লেখ-এর নতিমাত্রা

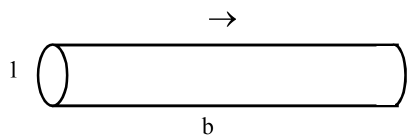
8.12 প্রাবল্য বা তীব্রতা (Intensity) ঃ

তরঙ্গমুখের একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে একক সময়ে লম্ব দিকে যে পরিমাণ শক্তি প্রবাহিত হয় তাকে তরঙ্গের প্রাবল্য বা তীব্রতা বলা হয়। একক সময়ে তরঙ্গ যায় v দূরত্ব, অতএব একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিকে একক সময়ে $v \times 1 = v$ আয়তনের মধ্যে (চিত্র 8·20) সমস্ত কণা সরল দোলগতিতে আন্দোলিত হয়। ধরি একক আয়তনে কণার সংখ্যা = n

এবং সরল দোলগতির জন্য প্রতিটি কণার শক্তি $\frac{1}{2}m\omega^2a^2$

$\therefore$ প্রাবল্য বা তীব্রতা $\mathrm{I} = \frac{1}{2}m\omega^2a^2vn$

বা, $\mathrm{I} = 2\pi^2 v\rho f^2 a^2 = ca^2 \quad (\because\ mn = \rho)$ = ঘনত্ব



চিত্র 8·20

c একটি ধ্রুবক।

তরঙ্গ নিয়ে আলোচনার সময় তীব্রতার পরিবর্তনই বিবেচনা করা হয়। তাই ধ্রুবক c কে অনেক সময় 1 ধরে নেওয়া হয়, তখন তীব্রতা I = a^2 লেখা যায়।

8.13 তরঙ্গের উপরিপাত (Superposition of Waves) ঃ

দুটি বা বেশী তরঙ্গ একই সময়ে কোনো মাধ্যমের মধ্য দিয়ে প্রবাহিত হলে মাধ্যমের যে কোনো কণার লব্ধি-সরণ প্রত্যেকটি পৃথকভাবে কণাটির যে সরণ সৃষ্টি করত, তাদের ভেক্টর যোগফলের সমান হবে।

মনে করি $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, ...$ইত্যাদি কোনো সময়ে একটি কণার উপর বিভিন্ন তরঙ্গের সরণ। উপরিপাত হলে লব্ধিসরণ হবে $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{y}_2 + \vec{y}_3 + ...$ ....(18)

একে তরঙ্গের উপরিপাতের নীতি বলে।

শব্দের বেলায় ব্যাতিচার, স্থাণুতরঙ্গ ও স্বরকম্প তরঙ্গের উপরিপাতের ফলে উৎপন্ন হয়।

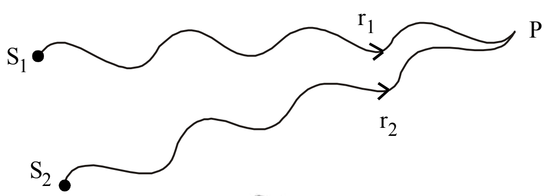
(a) শব্দের ব্যতিচার (interference of sound) : স্থির দশা পার্থক্যের একই কম্পাঙ্ক ও তরঙ্গদৈর্ঘ্যের দুটি শব্দতরঙ্গ কোনো মাধ্যমে একটি দিকে অগ্রসর হলে, ঐ তরঙ্গ দুটির উপরিপাতের ফলে কোনো স্থানে জোরালো শব্দ আবার কোনো স্থানে খুব কম শব্দ পাওয়া যায়। এই ঘটনাকে শব্দের ব্যতিচার বলে। শব্দ জোরালো হওয়াকে সংপোষী বা গঠনমূলক (constructive) ও শব্দ কম হওয়াকে বিনাশী (destructive) ব্যতিচার বলে। দুটি শব্দ তরঙ্গের বিস্তার সমান হলে কম শব্দের স্থান নিঃশব্দ হয়। ব্যতিচারের বেলায় শক্তির উৎপত্তি বা বিনাশ হয় না শুধুমাত্র বিনাশী স্থান থেকে শক্তি গঠনমূলক অবস্থানে স্থানান্তরিত হয়।

ধরি S_1 ও S_2 দুটি শব্দ উৎস থেকে শব্দ তরঙ্গ P বিন্দুতে মিলিত হয়েছে (চিত্র 8·24)।

S_1 ও S_2 থেকে P বিন্দুর দূরত্ব r_1 ও r_2 হলে t সময়ে দুই তরঙ্গজাত সরণ হবে

$$y_1 = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = b\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)$$



চিত্র 8·21

অতএব লব্ধি সরণ

$$y = y_1 + y_2$$

$$= a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) + b\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)$$

$$= a\sin\frac{2\pi t}{T}\cos\frac{2\pi r_1}{\lambda} - a\cos\frac{2\pi t}{T}\sin\frac{2\pi r_1}{\lambda} + b\sin\frac{2\pi t}{T}\cos\frac{2\pi r_2}{\lambda} - b\cos\frac{2\pi t}{T}\sin\frac{2\pi r_2}{\lambda}$$

$$= \sin\frac{2\pi t}{T}\left(a\cos\frac{2\pi r_1}{\lambda} + b\cos\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right) - \cos\frac{2\pi t}{T}\left(a\sin\frac{2\pi r_1}{\lambda} + b\sin\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)$$

$$= \sin\frac{2\pi t}{T}A\cos\delta - \cos\frac{2\pi t}{T}A\sin\delta$$

$$= A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \delta\right)$$

ধরা হয়েছে $A\cos\delta = a\cos\frac{2\pi r_1}{\lambda} + b\cos\frac{2\pi r_2}{\lambda}$

$$A\sin\delta = a\sin\frac{2\pi r_1}{\lambda} + b\sin\frac{2\pi r_2}{\lambda}$$

$$\therefore A^2 = \left(a\cos\frac{2\pi r_1}{\lambda} + b\cos\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)^2 + \left(a\sin\frac{2\pi r_1}{\lambda} + b\sin\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)^2$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab\left(\cos\frac{2\pi r_1}{\lambda}\cos\frac{2\pi r_1}{\lambda} + \sin\frac{2\pi r_1}{\lambda}\sin\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab\cos\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)$$

এবং $\tan\delta = \dfrac{a\sin\frac{2\pi r_1}{\lambda} + b\sin\frac{2\pi r_2}{\lambda}}{a\cos\frac{2\pi r_1}{\lambda} + b\cos\frac{2\pi r_2}{\lambda}}$

তীব্রতা I = cA^2

$$c\left[a^2 + b^2 + 2ab\cos\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)\right]$$

গঠমূলক ব্যতিচার :

I এর মান সর্বোচ্চ, I_{max} হবে যখন $\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = 2n\pi$

$n = 0, \pm 1, \ \pm 2,$ ইত্যাদি

বা, $r_1 - r_2 = n\lambda$

$$I_{max} = c(a + b)^2$$

এ ক্ষেত্রে দুটি তরঙ্গ সমদশায় আছে বলা হয়। তখন পথ পার্থক্য λ এর যে কোনো গুণিতক বা $\frac{\lambda}{2}$ এর যুগ্ম গুণিতক। সেক্ষেত্রে একটি তরঙ্গের তরঙ্গশীর্ষ অপর তরঙ্গশীর্ষের উপর বা একটির তরঙ্গপাদ অপরটির তরঙ্গপাদের উপর আপতিত হয়েছে।

বিনাশী ব্যতিচার :

I এর মান সর্বনিম্ন I_{min} হবে যখন $\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = (2n + 1)\pi$

$n = 0, \pm 1, \ \pm 2,$ ইত্যাদি

বা, $r_1 - r_2 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$

$$I_{min} = c(a - b)^2$$

এক্ষেত্রে দুটি তরঙ্গ বিপরীত দশায় আছে বলা হয়। তখন পথ পার্থক্য $\frac{\lambda}{2}$ এর অযুগ্ম গুণিতক। সেক্ষেত্রে একটি তরঙ্গের তরঙ্গশীর্ষ অপরটির তরঙ্গপাদের উপর বা বিপরীতক্রমে আবর্তিত হয়েছে।

শব্দের ব্যতিচারের শর্ত :

(i) উৎস দুটিকে দশা সম্বন্ধ (coherent) হতে হবে। দুটি উৎস থেকে উৎপন্ন তরঙ্গের মধ্যে দশা পার্থক্য স্থির থাকলে ওদের দশা সম্বন্ধ উৎস বলা হয়। উপরের আলোচনায় আমরা এই দশা পার্থক্য শূন্য ধরেছি।

(ii) দুটি তরঙ্গের কম্পাঙ্ক ও তরঙ্গদৈর্ঘ্য সমান হতে হবে।

(iii) বিনাশী অবস্থানে নৈঃশব্দ পেতে হলে দুটির বিস্তার সমান হতে হবে।

(b) স্থাণুতরঙ্গ (stationary wave) :

দুটি অভিন্ন চলতরঙ্গ একই মাধ্যমে পরস্পর বিপরীত দিক থেকে অগ্রসর হয়ে পরস্পরের উপর আপতিত হলে যে তরঙ্গের সৃষ্টি হয় তা মাধ্যমের যে অংশে আপতিত হয়েছে সেখানেই সীমাবদ্ধ থাকে। এ ধরনের তরঙ্গকে স্থাণুতরঙ্গ বলে। সমদূরত্বে থাকা কিছু বিন্দুতে কোনো কম্পন থাকে না তাদের বলা হয় নিস্পন্দ বিন্দু (nodes)। দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর ন্যূনতম দূরত্ব $\frac{\lambda}{2}$। আবার সমদূরত্বে থাকা কিছু বিন্দুতে কম্পন সবচেয়ে বেশী হয় এদের বলা হয় সুস্পন্দ বিন্দু (antinodes)। দুটি সুস্পন্দ বিন্দুর ন্যূনতম দূরত্ব $\frac{\lambda}{2}$।

মনে করি x-অক্ষের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দিকে দুটি অভিন্ন তরঙ্গ গমন করছে। অতএব, তাদের সমীকরণ হবে $y_1 = a\sin(\omega t - kx)$

$$y_2 = a\sin(\omega t + kx)$$

লব্ধি সরণের সমীকরণ $y = y_1 + y_2 = a\sin(\omega t - kx) + a\sin(\omega t + kx)$

$$= 2a\sin\omega t \cdot \cos kx$$

$$= (2a\cos kx)\sin\omega t$$

$$= \left(2a\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\sin\omega t = \mathrm{A}\sin\omega t$$

সমীকরণে $\sin(\omega t - kx)$ আকারের কোনো পদ না থাকায় এটি চলতরঙ্গকে প্রকাশ করছে না। এই সমীকরণটিই স্থাণুতরঙ্গকে প্রকাশ করছে। এই তরঙ্গের বিস্তার $\mathrm{A} = 2a\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$ ধ্রুবক নয়; এটি কোসাইন বক্রঅনুযায়ী পরিবর্তিত হয়। A-এর মান বিন্দুর অবস্থান x-এর উপর নির্ভর করে।

নিস্পন্দ বিন্দু : বিস্তারের মান শূন্য হলে বিন্দুগুলিতে কোনো আন্দোলন হয় না। এদের বলে নিস্পন্দ বিন্দু। বিস্তার শূন্য হয় যখন $\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = 0$ বা, $\frac{2\pi x}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; n যে কোনো গুণিতক

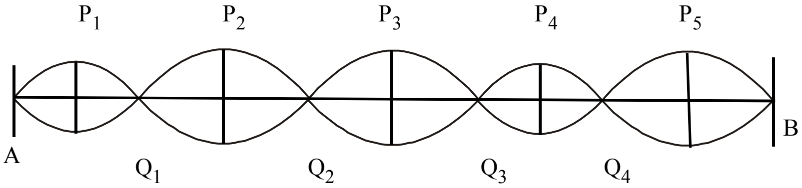
বা, $x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$

বা, $x=\frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, ...$

দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব $\frac{\lambda}{2}$, 8·22 নং চিত্রে $\theta_1, \theta_2.....$ ইত্যাদি নিস্পন্দ বিন্দু।

সুস্পন্দ বিন্দু :

বিস্তারের মান সর্বোচ্চ হলে বিন্দুগুলিতে আন্দোলন সবথেকে বেশী হয়। যে-সব বিন্দুতে বিস্তার সর্বোচ্চ তাদের বলে সুস্পন্দ বিন্দু (antinodes)। তখন $\cos\frac{2\pi x}{\lambda}=\pm 1$



চিত্র 8·22

বা, $\frac{2\pi x}{\lambda}=n\pi$ $\quad$ n যে কোনো গুণিতক

বা, $x=\frac{n\lambda}{2}$

বা, $x=0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, ...$

8·22 নং চিত্রে P_1, P_2, P_3,....... ইত্যাদি সুস্পন্দ বিন্দু।

● **স্থাণুতরঙ্গের বৈশিষ্ট্য (characteristics of stationary waves) :**

(i) কোনো মাধ্যমে দুটি অভিন্ন চলতরঙ্গ একই সরলরেখায় বিপরীত দিকে চলার সময় উপরিপাত হলে স্থাণুতরঙ্গের সৃষ্টি হয়। এটি মাধ্যমের ভেতর দিয়ে অগ্রসর হয় না। মাধ্যমের যে অঞ্চলে চলতরঙ্গ দুটির উপরিপাত হয়, সেই অঞ্চলে এটি আবদ্ধ থাকে। তির্যক বা অনুদৈর্ঘ্য—দু ধরনের তরঙ্গই স্থাণুতরঙ্গ সৃষ্টি করতে পারে।

(ii) স্থাণুতরঙ্গে মাধ্যমের কণাগুলির গতি বিভিন্ন স্থানে বিভিন্ন রকম হয়। কণাগুলি একই কম্পাঙ্ক নিয়ে সরল দোলগতিতে কম্পিত হলেও প্রতিটি কণার বিস্তার সমান হয় না। বিস্তার শূন্য থেকে একটি সর্বোচ্চ মান পর্যন্ত হয়। যে সব বিন্দুতে বিস্তার সব সময় শূন্য থাকে তাদের নিস্পন্দ বিন্দু ও যে সব বিন্দুতে বিস্তার সর্বোচ্চ হয় তাদের সুস্পন্দ বিন্দু বলে। পাশাপাশি দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর বা সুস্পন্দ বিন্দুর দূরত্ব তরঙ্গদৈর্ঘ্যের অর্ধেক।

(iii) পাশাপাশি দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যের সব কণা সমদশায় কম্পিত হয় কিন্তু বিস্তার বিভিন্ন হয়। ঠিক পরের দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর কণাগুলির মধ্যে 180° দশা পার্থক্য থাকে।

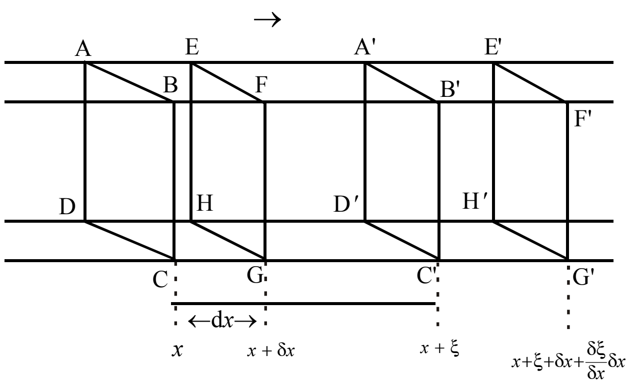
(iv) চাপ ও ঘনত্বের পরিবর্তন নিস্পন্দ বিন্দুতে সর্বাধিক হয় ও সুস্পন্দ বিন্দুতে সর্বনিম্ন হয়।

(c) **স্বরকম্প (beats) :** দুটি প্রায় সম বিস্তারের ও খুব কম কম্পাঙ্ক পার্থক্যের শব্দতরঙ্গ একই সরলরেখায় আপতিত হলে নির্দিষ্ট সময় অন্তর শব্দ বেশী ও কম জোরালো হয়। একে স্বরকম্প বলে। দুটি তরঙ্গের সাহায্যে দুটি কম্পনের উপরিপাত ঘটে। এ নিয়ে 8·7(b) অধ্যায়ে আলোচনা করা হয়েছে।

8.14 জড় মাধ্যমে অণুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের বেগ (Velocity of Longitudinal Waves in Material Medium) ঃ

আমরা জেনেছি মাধ্যমের স্থিতিস্থাপকতা ধর্মের জন্য তরঙ্গ সৃষ্টি হয়। আমরা এখন দেখব তরঙ্গের বেগ মাধ্যমের স্থিতিস্থাপকতা ও ঘনত্বের উপর নির্ভর করে।

মনে করি একটি অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ একটি মাধ্যমের মধ্য দিয়ে ধণাত্মক x-অক্ষ বরাবর অগ্রসর হচ্ছে। α ক্ষেত্রফলের যেকোনো ছেদ ABCD ও EFGH-এর অবস্থান যথাক্রমে x ও $x+\delta x$। দুটি ছেদের মাঝখানে δx বেধের মাধ্যমের একটি স্তর আবদ্ধ (চিত্র 8·23)। CG $= \delta x$। তরঙ্গের অগ্রগতির ফলে স্তরটি ডানদিকে স্থানান্তরিত হয়েছে। মনে করি ABCD স্তর ξ দূরত্বে A' B' C' D' অবস্থানে সরে গেছে। ধরি EFGH ছেদটির নতুন অবস্থান E' F' G' H'। এই নতুন অবস্থানের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে। A' B' C' D' এর এখন অবস্থান স্থানাঙ্ক $x+\xi$। E' F' G' H' এর অবস্থানের স্থানাঙ্ক হবে $x+\xi+\delta x+\frac{\partial \xi}{\partial x}\delta x$। ধরা হয়েছে δx এর তুলনায় ξ এর মান অনেক কম। অতএব $C'G' = \left(x+\xi+\delta x+\frac{\partial \xi}{\partial x}\delta x\right)-(x+\xi)$



চিত্র 8·23 জড় মাধ্যমে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের অগ্রগতি

$$= \delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x}\delta x$$

আবদ্ধ স্তরটির দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন (বৃদ্ধি) $= \frac{\partial \xi}{\partial x}\delta x$।

অভিলম্বদিকে কোনো পরিবর্তন না হওয়ায় স্তরটির আয়তন বৃদ্ধি $= \propto \frac{\partial \xi}{\partial x}\delta x$ । প্রাথমিক আয়তন $\propto \delta x$ ।

$\therefore$ আয়তন বিকৃতি $= \dfrac{\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}\delta x}{\alpha \delta x} = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$

ধরি আয়তন বিকার গুণাঙ্ক $= k$।

অতএব বিকৃতির জন্য অতিরিক্ত চাপ $P = -k\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$

চাপ বাড়লে আয়তন কমে যায় বলে ঋণাত্মক চিহ্ন যুক্ত হয়েছে।

মনে করি ABCD তলের উপর এই অতিরিক্ত চাপ = P

অতএব EFGH তলের উপর অতিরিক্ত চাপ

$$= P + \frac{\partial P}{\partial x}\delta x$$

$$= -k\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\delta x$$

$$= -k\frac{\partial \xi}{\partial x} - k\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\delta x$$

ABCD ও EFGH তলের মধ্যে চাপের পার্থক্য $= k\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\delta x$

অতএব এদের মধ্যে বলের পার্থক্য $= \propto k\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\delta x$

এটি হল δx বেধের স্তরের উপর একটি চলমান বল।

অর্থাৎ A' B' C' D' ও E' F' G' H' ছেদের মধ্যে আবদ্ধ স্তরের উপরও একই বল প্রযুক্ত আছে ধরা যায়।

মাধ্যমের ঘনত্ব ρ হলে, স্তরটির ভর $\propto \delta x\rho$ এবং ত্বরণ $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

এর উপর বল $= \propto \delta x \rho \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

অতএব $\propto k\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\delta x = \propto \delta x \rho \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

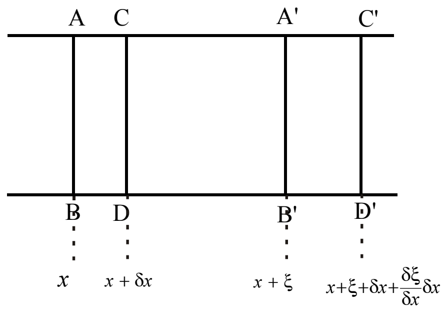
বা, $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \dfrac{k}{\rho} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

বা, $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

তরঙ্গের বেগ $v = \sqrt{\dfrac{k}{\rho}}$

8.15 কোনো কঠিন পদার্থের দণ্ডের মধ্য দিয়ে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের বেগ (Velocity of Longitudinal Wave in a Rod of Solid Material) ঃ

মনে করি একটি কঠিন দণ্ডের দৈর্ঘ্য ওর বেধের তুলনায় অনেক বড়। দণ্ডটির মধ্য দিয়ে তরঙ্গ অগ্রসর হওয়ার সময় অনুপ্রস্থচ্ছেদ দৈর্ঘ্য বরাবর আন্দোলিত হয়। ধরি দণ্ডটির প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল α । x ও $x + \delta x$ দূরত্বে যথাক্রমে AB ও CD দুটি লম্বচ্ছেদ। এদের মধ্যে δx বেধের একটি স্তর আবদ্ধ। অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের অগ্রগমনের ফলে মনে করি AB ছেদটি ξ দূরত্বে A' B' অবস্থানে এসেছে। A' B' এর অবস্থান $x + \xi$.। C' D' হবে CD ছেদের নতুন অবস্থান। এই অবস্থান হবে $x + \xi + \delta x + \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\delta x$ । (ধরা হয়েছে δx এর তুলনায় ξ খুব ক্ষুদ্র)।



চিত্র 8·24 দণ্ডের মধ্যে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ

স্তরটির পরিবর্তিত দৈর্ঘ্য $= \left(x + \xi + \delta x + \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\delta x\right) - (x + \xi)$

$$= \delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x}\delta x$$

স্তরটির দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন $= \delta x + \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\delta x - \delta x$

$$= \frac{\partial \xi}{\partial x}\delta x$$

অতএব অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি $= \dfrac{\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\delta x}{\delta x} = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$

এই বিকৃতির জন্য অতিরিক্ত চাপ $p=-\mathrm{Y}\dfrac{\partial\xi}{\partial x}$

Y = ইয়ং গুণাঙ্ক। চাপ বাড়লে দৈর্ঘ্য কমে যায় বলে ঋণাত্মক চিহ্ন যুক্ত হয়েছে।

মনে করি AB তলের উপর অতিরিক্ত চাপ = P

CD তলের উপর অতিরিক্ত চাপ $=\mathrm{P}+\dfrac{\partial p}{\partial x}\delta x$

$$=-\mathrm{Y}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\mathrm{Y}\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\delta x$$

$$=-\mathrm{Y}\frac{\partial\xi}{\partial x}-\mathrm{Y}\frac{\partial^2\xi}{\partial x_2}\delta x$$

দুটি তলের মধ্যে চাপের পার্থক্য $=\mathrm{Y}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x_2}\delta x$

$\therefore$ দুটি তলের মধ্যে বলের পার্থক্য $=\alpha\mathrm{Y}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\delta x$

δx স্তরের উপর এটি চলমান বল যা A' B' ও C' D' ছেদের মধ্যে আবদ্ধ স্তরের উপরও ক্রিয়া করছে ধরা যায়।

মাধ্যমের ঘনত্ব ρ হলে, স্তরটির ভর $=\alpha\delta x\rho$, এর ত্বরণ $=\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$

অতএব প্রযুক্ত বল $=\alpha\delta x\rho\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$

$$\therefore\quad \alpha\mathrm{Y}\,\partial x=\alpha\delta x\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

বা, $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\dfrac{\mathrm{Y}}{\rho}\,\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$

বা, $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=v^2\,\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$

$\therefore$ বেগ $v=\sqrt{\dfrac{\mathrm{Y}}{\rho}}$

8.16 বায়ুতে শব্দের বেগ (Velocity of Sound in Air) ঃ

(i) নিউটনের সূত্র : আমরা দেখেছি স্থিতিস্থাপক মাধ্যমে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের বেগ $v=\sqrt{\frac{k}{\rho}}$, k হল মাধ্যমের আয়তন বিকার গুণাঙ্ক, ρ হল ঘনত্ব। নিউটন এই সূত্র প্রতিষ্ঠা করেন বলে একে নিউটনের সূত্র বলা হয়।

বায়ুর মধ্যে শব্দ তরঙ্গ হল অনুদৈর্ঘ্য, বায়ুর জন্য তিনি অন্য একটি সমীকরণে উপনীত হন। নিউটন ধরে নেন বায়ুর মধ্যে শব্দতরঙ্গ অগ্রসর হওয়ার সময় গ্যাসীয় মাধ্যমে পর্যায়ক্রমে সংনমন ও অনুভবন হয়। এই প্রক্রিয়াটি ধীর প্রক্রিয়া বলে তিনি অনুমান করেন। ফলে বায়ুর মধ্যে এই পরিবর্তন সমোষ্ম (isothermal) প্রক্রিয়া বলে তিনি স্থির করেন। এক্ষেত্রে বয়েলের সূত্র $pv=$ ধ্রুবক প্রযোজ্য হয়, $p=$ চাপ, $v=$ আয়তন অবকলন করে পাই,

$$p\,dv+vdp=0$$

বা, $p=\dfrac{-dp}{\frac{dv}{v}}=\dfrac{\text{আয়তন পীড়ন}}{\text{আয়তন বিকৃতি}}=\mathrm{k}$, আয়তন বিকার গুণাঙ্ক

$\therefore$ বায়ুতে শব্দের বেগ $v=\sqrt{\frac{p}{\rho}}$

এটি হল বায়ুতে শব্দের বেগের নিউটনের সমীকরণ।

আবার প্রমাণ চাপে ও উষ্ণতায়,

äÂÂ, $p=0\cdot76\times13\cdot6\times10^3\times9\cdot8\ \ \mathrm{N/m^2}$

ঘনত্ব, $\rho=1\cdot293\ \ \mathrm{kg/m^3}$

$$\therefore\ \ v=\sqrt{\frac{0\cdot76\times13\cdot6\times10^3\times9\cdot8}{1\cdot293}}\cong280\,\mathrm{m/s}$$

কিন্তু পরীক্ষায় এই বেগ পাওয়া যায় 332 m/s। নিউটনের সূত্র প্রয়োগ করে বেগের যে মান পাওয়া যায় তা পরীক্ষালব্ধ মানের থেকে বেশ কম।

(2) লাপলাস-এর সংশোধন (Laplace's correction) : একশ বছরের বেশী সময় পরে ল্যাপলাস এই অসঙ্গতির কারণ ব্যাখ্যা করেন। শব্দ বিস্তারের সময় যে সংনমন ও তনুভাব হয় তা বেশ দ্রুত প্রক্রিয়া। বায়ু তাপের কুপরিবাহী বলে দ্রুত প্রক্রিয়ায় তাপের আদানপ্রদান প্রায় হয়ই না! অতএব ধরা যায় এই পরিবর্তন একটি রুদ্ধ তাপ (adiabatic) প্রক্রিয়া। সেক্ষেত্রে $pv^{\gamma}=$ ধ্রুবক, সমীকরণটি প্রযোজ্য হয়, γ হল স্থির চাপে ও স্থির আয়তনে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপের অনুপাত।

$pv^{\gamma}=$ ধ্রুবক সমীকরণকে অবকলন করে পাওয়া যায়,

$$v^{\gamma} dp + p\gamma\, v^{\gamma-1} dv = 0$$

বা, $\gamma p = \dfrac{-dp}{\dfrac{dv}{v}} = k =$ আয়তন বিকার গুণাঙ্ক। গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ, $v = \sqrt{\dfrac{\gamma p}{\rho}}$

বায়ুর ক্ষেত্রে $\gamma = 1 \cdot 41$ বসিয়ে পাওয়া যায় $v = 332 \cdot 5$ m/s।

এটি পরীক্ষালব্ধ মানের প্রায় সমান।

উপরের সমীকরণ থেকে দেখা যায় শব্দের বেগ কম্পাঙ্ক ও বিস্তারের উপর নির্ভর করে না। অবশ্য দেখা গেছে তীব্র শব্দের বেলায় বিস্তারের সঙ্গে বেগ বাড়ে।

8.17 শব্দের বেগের উপর চাপ, উষ্ণতা, ঘনত্ব ও আর্দ্রতার প্রভাব (Effect of Pressure, Temperature, Density and Humidity on the Velocity of Sound) ঃ

(i) চাপের প্রভাব : উষ্ণতা স্থির থাকলে গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ চাপের পরিবর্তনের উপর নির্ভর করে না।

উষ্ণতা স্থির থাকলে নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের ক্ষেত্রে বয়েলের সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $pv =$ ধ্রুবক। আবার ভর স্থির থাকলে $v \propto \dfrac{1}{\rho}$, $\rho =$ গ্যাসের ঘনত্ব।

$\therefore \dfrac{p}{\rho} =$ ধ্রুবক। শব্দের বেগ $v = \sqrt{\dfrac{\gamma p}{\rho}}$; অতএব **উষ্ণতা স্থির থাকলে গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ চাপের উপর নির্ভর করে না।**

(ii) উষ্ণতার প্রভাব : গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ ঐ গ্যাসের পরম উষ্ণতার বর্গমূলের সমানুপাতিক।

ধরি 0^{o}c ও t^{o}c উষ্ণতায় বায়ুর ঘনত্ব যথাক্রমে ρ_0 ও P_t; ঐ দুই উষ্ণতায় শব্দের বেগ যথাক্রমে v_0 এবং v_t হলে

$$\therefore\ v_0 = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho_o}} \quad ও \quad v_t = \sqrt{\frac{\gamma p}{pt}}$$

$$\therefore\ \frac{v_o}{v_t} = \sqrt{\frac{\rho_o}{p_o}}$$

চার্লস্-এর সূত্র থেকে জানি,

$\dfrac{\rho_o}{p_t} = \dfrac{T}{T_o}$, T ও T_o যথাক্রমে $t^{o}c$ ও O^{o}c উষ্ণতায় পরম স্কেলের উষ্ণতা

$$\therefore \quad \frac{v_t}{v_o} = \sqrt{\frac{T}{T_o}}$$

$$\therefore \quad v \alpha \sqrt{T}$$

আবার $\frac{v_t}{v_o} = \sqrt{\frac{t+273}{273}} = \sqrt{1+\frac{t}{273}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{273} = 1 + \frac{t}{546}$

$$\therefore \quad v = v_o\left(1+\frac{t}{546}\right)$$

$v_o = 332$ m/s ধরলে, $v_t = 332\left(1+\frac{t}{546}\right) = 332 + 0{\cdot}61 \times t \ m$

অর্থাৎ 1^oc উষ্মতা বৃদ্ধি বা হ্রাসের জন্য বায়ুতে 0^oc উষ্মতায় শব্দের বেগের প্রায় $0{\cdot}61m$ বৃদ্ধি বা হ্রাস পায়।

(iii) ঘনত্বের প্রভাব : মনে করি নির্দিষ্ট চাপ ও উষ্মতায় দুটি গ্যাসের ঘনত্ব যথাক্রমে ρ_1 ও ρ_2। দুটি গ্যাসের শব্দের বেগ যথাক্রমে v_1 ও v_2।

$\therefore v_1 = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho_1}}$ ও $v_2 = \sqrt{\frac{\gamma p}{p_2}}$ [ধরি গ্যাস দুটির ক্ষেত্রে γ সমান]

$$\therefore \quad \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

অর্থাৎ শব্দের বেগ গ্যাসের ঘনত্বের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক। যেমন, একই চাপ ও উষ্মতায় অক্সিজেন ও হাইড্রোজেন গ্যাসের ঘনত্বের অনুপাত 16:1 অতএব O_2 এবং H_2-এ বেগ v_o ও v_H হলে

$$\therefore \quad \frac{v_o}{v_H} = \sqrt{\frac{\rho_o}{\rho_H}} = \sqrt{\frac{16}{1}} = 4$$

$$\therefore \quad v_H = 4v_O$$

অক্সিজেনের মধ্যে শব্দের গতিবেগের 4 গুণ হবে হাইড্রোজেনে শব্দের গতিবেগ।

(iv) আর্দ্রতার প্রভাব : আর্দ্রতা বাড়লে বায়ুর ঘনত্ব কমে যায়। তাই শব্দের বেগও বেড়ে যায়।

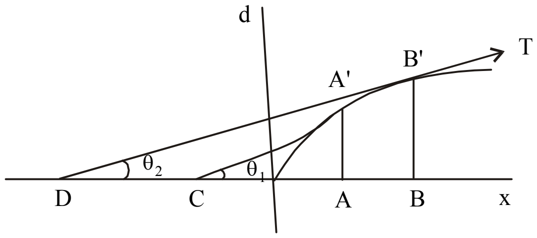
যদি t^oc উষ্মতায় এবং p চাপে আর্দ্র বায়ুতে শব্দের বেগ v_m হয় এবং একই উষ্মতা ও চাপে শুষ্ক বায়ুতে শব্দের বেগ v_d হয়, তবে প্রমাণ করা যায় $v_d = v_m\sqrt{\frac{p - 0\cdot 378f}{p}}$

f হল t^oc উষ্মতায় সংপৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ।

8.18 টান করা তারে তির্যক তরঙ্গ (Transverse Waves in a Stretched String) ঃ

কোনো পদার্থের সম্পূর্ণ নমনীয় সম ব্যাসের তন্তু যার ভর দৈর্ঘ্য বরাবর সুষমভাবে বন্টিত—তাকে আদর্শ তার বলে।

মনে করি এমন একটি আদর্শ তার x-অক্ষ বরাবর T টান দ্বারা (বল T) অনুভূমিকভাবে আবধ্ধ আছে। তারটির একক দৈর্ঘ্যের ভর m। তির্যক তরঙ্গের অগ্রগমনের কোনো সময়ে মনে করি AB = δx অংশ XY তলে স্থানান্তরিত হয়ে A' B' অবস্থানে এসেছে। A' ও B' এর স্থানাঙ্ক ধরি যথাক্রমে (x,y) ও $(x+\delta x, y+\delta y)$। আরো ধরি XY তলে তারটির কম্পনের সময় টান T স্থির থাকে ও সরণের মান খুব কম হয়, A' C ও B' D যথাক্রমে A' ও B' বিন্দুতে স্পর্শক। এই স্পর্শক দুটি x-অক্ষের সঙ্গে যথাক্রমে θ_1 ও θ_2 কোণে নত। A' C ও DB' দিকে টান T। y-অক্ষের দিকে A' বিন্দুতে টান = T sin θ। এবং B' বিন্দুতে টান = T sin θ_2।



চিত্র 8·25 তারে তির্যক তরঙ্গ

$\therefore$ A'B' অংশের উপর লব্ধি টান বা বল

$$= T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1$$

$$= T(\tan\theta_2 - \tan\theta_1) \qquad (\theta_1 \text{ ও } \theta_2 \text{ খুব ছোটো})$$

$$= T\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(y + \frac{\partial y}{\partial x}\delta x\right) - \frac{\partial y}{\partial x}\right\} \qquad [\tan\theta = \frac{dy}{dx} \text{ প্রয়োগ করে}]$$

$$= T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\delta x$$

AB অংশের তারের ভর $= m\delta x$। $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ ত্বরণ হলে এর উপর বল $= m\delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ $[y = f(\theta, t)]$

$$\therefore \quad T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\delta x = m\delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

বা, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{T}{m}\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

বা, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$\therefore$ বেগ $c = \sqrt{\dfrac{T}{m}}$

● **টান করা দুপ্রান্তে আবন্ধ তারে কম্পনের সমমেল সমূহ (Different harmonics in a stretched string fixed at two ends) :**

কোনো তারকে T টানে দুপ্রান্তে আবন্ধ রেখে তারের মধ্য বিন্দু অভিলম্ব দিকে টেনে ছেড়ে দিলে বা ওখানে আঘাত করলে যে তির্যক তরঙ্গের সৃষ্টি হয় তা তারের আবন্ধ প্রান্তের দিকে অগ্রসর হয়ে প্রতিফলিত হয়ে ফিরে আসে এবং উপরিপাতিত হয়ে স্থাণুতরঙ্গ সৃষ্টি করে। দুপ্রান্তে সবসময়ই নিস্পন্দ বিন্দু হয়। মাঝখানে একটি সুস্পন্দ বিন্দু হলে তারটি একটি লুপের আকার নেয় [চিত্র 8·26 (a)] সেক্ষেত্রে $l = \dfrac{\lambda}{2}$, $\lambda =$ তরঙ্গ দৈর্ঘ্য।

কম্পাঙ্ক $= n$ হলে, তরঙ্গ বেগ $v = n\lambda$ ।

আবার $v = \sqrt{\dfrac{T}{m}}$

$\therefore n\lambda = \sqrt{\dfrac{T}{m}}$ বা, $n = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{m}}$

এটি মূল সুরের (fundamental tone) কম্পাংক।

একইভাবে তারের $\dfrac{1}{4}$ অংশের বিন্দুকে টেনে ছেড়ে দিলে দুটি লুপের সৃষ্টি হয় (চিত্র 8·26 (b)) এক্ষেত্রে $l = \lambda$।

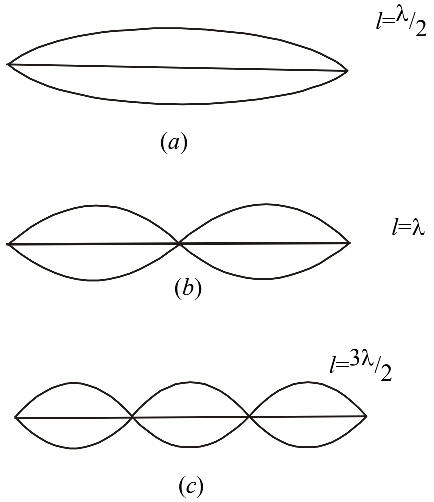
$\therefore$ কম্পাঙ্ক $n' = \dfrac{1}{l}\sqrt{\dfrac{T}{m}}$

এটি একটি উপসুরের (overtone) কম্পাংক। একে বলা হয় প্রথম সমমেল (first harmonic)।

$n' = 2n$

আবার তিনটি লুপ তৈরী হলে, দেখানো হয় এর কম্পাঙ্ক $n'' = 3n$

একে বলা হয় দ্বিতীয় সমমেল (second harmonic), এভাবে কম্পনের বিভিন্ন সমমেলগুলির কম্পাঙ্ক গণনা করা যায়। লক্ষণীয় যে এরূপ কম্পনে সমস্ত সমমেলগুলিই উপস্থিত থাকতে পারে।

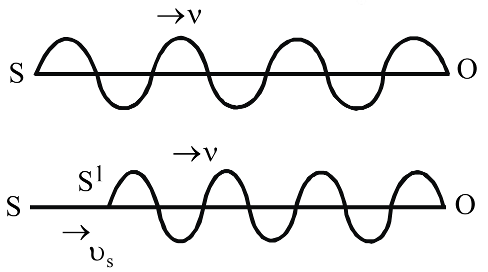


চিত্র 8·26 টান করা তারে সমমেল

8.19 ডপলার ক্রিয়া (Doppler Effect) :

শব্দের কোনো স্থির উৎস থেকে নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কের শব্দ নির্গত হচ্ছে ধরে নিন। মনে করুন দূরে কোনো পর্যবেক্ষক সেই শব্দ শুনছেন। পর্যবেক্ষক যদি স্থির থাকেন তাহলে উৎস থেকে যে কমাঙ্কের শব্দ নির্গত হচ্ছে পর্যবেক্ষক সেই কমাঙ্কের শব্দই শুনতে থাকবেন। এবার যদি পর্যবেক্ষক উৎসের দিকে একটি নির্দিষ্ট বেগে যেতে থাকেন, আগে সেকেণ্ডে যতগুলি শব্দতরঙ্গ তার কাছে আসছিল তার তুলনায় বেশী সংখ্যায় শব্দ তরঙ্গ তার কাছে আসবে। আগের তুলনায় কমাঙ্ক বেশী হবে। তেমনি নির্দিষ্ট বেগে উৎস থেকে দূরে চলে যেতে থাকলে কমাঙ্ক কমে যাবে । একইভাবে উৎস পর্যবেক্ষকের দিকে নির্দিষ্ট বেগে গমন করলে শ্রুত শব্দের কমাঙ্ক বৃদ্ধি পাবে এবং উৎস থেকে দূরে চলে যেতে থাকলে কমাঙ্ক হ্রাস পাবে। উৎস ও পর্যবেক্ষকের মধ্যে আপেক্ষিক বেগ থাকলে পর্যবেক্ষকের কাছে শ্রুত শব্দের কমাঙ্ক মূল শব্দের কম্পাঙ্ক থেকে বেশী বা কম হবে। পরস্পরের কাছে আসতে থাকলে কম্পাঙ্ক বৃদ্ধি পাবে ও পরস্পরের থেকে দূরে যেতে থাকলে কম্পাঙ্ক কমবে। একে ডপলার ক্রিয়া বলে। অস্ট্রীয় পদার্থবিদ ক্রিশ্চিয়ান যোহান ডপলার (1803-1853) এটি প্রথম প্রস্তাব করেন। পরে এটি পরীক্ষাগতভাবে প্রমাণিত হয়। তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গের বেলায়ও এটি প্রযোজ্য। কোন দ্রুতগামী ট্রেন বাঁশি দিতে দিতে এসে কোনো শ্রোতাকে পেরিয়ে চলে গেলে কম্পাঙ্ক হঠাৎ কমে যায়। কোনো দ্রুতগামী গাড়ি হর্ণ দিতে দিতে বা উড়ন্ত বিমান কোন স্থির শ্রোতাকে পেরিয়ে গেলে কম্পাঙ্ক হঠাৎ কমে যায়। এটি সহজে অনুভব করা যায়।

আমরা এখানে শব্দ তরঙ্গের ক্ষেত্রে ডপলার ক্রিয়া নিয়ে আলোচনা করব। আমরা প্রথমে (1) উৎস গতিশীল, পর্যবেক্ষক স্থির ও (2) উৎস স্থির, পর্যবেক্ষক গতিশীল দুটি ক্ষেত্র পৃথকভাবে বিবেচনা করব। পরে উৎস ও পর্যবেক্ষক উভয়েই গতিশীল অবস্থার বিষয় আলোচনা করা হবে।



চিত্র 8.27 উৎস পর্যবেক্ষকের দিকে গতিশীল

(1) উৎস গতিশীল, পর্যবেক্ষক স্থির (Source in motion ; observer stationary) :

মনে করি একটি শব্দতরঙ্গ উৎস s থেকে n কম্পাঙ্কের তরঙ্গ v বেগে ছড়িয়ে পড়ছে (চিত্র 8.17)। উৎস v_s বেগে পর্যবেক্ষক 0-এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে। $v_s < v$। উৎস স্থির অবস্থার কথা বিবেচনা করলে ধরি পর্যবেক্ষকের কাছে তরঙ্গের পৌঁছতে সময় লাগে t। $\therefore$ $SO = vt$ ওই সময়ে উৎস থেকে nt সংখ্যক তরঙ্গ নির্গত হয়েছে। এই তরঙ্গগুলি SO দূরত্বে বিস্তৃত। আবার $v = n\lambda$, λ হল তরঙ্গ দৈর্ঘ্য। এবার ধরি পর্যবেক্ষকের দিকে υ_s বেগে উৎসটি গতিশীল হল। t সময়ে এটি $ss' = v_s t$ দূরত্ব অতিক্রম করে। ফলে nt সংখ্যক তরঙ্গ S'O দূরত্বে বিস্তৃত হবে। তরঙ্গদৈর্ঘ্য কমে যাবে। পরিবর্তিত তরঙ্গ দৈর্ঘ্য

$$\lambda_1 = \frac{\nu t - v_s t}{nt} = \frac{\nu - v_s}{n} = \lambda \frac{\nu - v_s}{\nu} \quad [\because \nu = n\lambda\,] \text{ বা, } \lambda_1 = \lambda\left(1 - \frac{v_s}{\nu}\right)$$

পরিবর্তিত কম্পাঙ্ক n_1 হলে

$$n_1 = \frac{\nu}{\lambda_1} = n\frac{\nu}{\nu - v_s} = \frac{n}{1 - \frac{v_s}{\nu}} \qquad \therefore n_1 > n$$

কম্পাঙ্কের পরিবর্তন $\Delta n = n_1 - n = n\frac{\nu}{\nu - v_s} - n = \frac{nv_s}{\nu - v_s}$

এবার উৎস পর্যবেক্ষক থেকে দূরে v_s বেগে সরে যেতে থাকলে ঋনাত্মক v_s এর মান উপরের সমীকরণে বসিয়ে পরিবর্তিত তরঙ্গদৈর্ঘ্য ও কম্পাঙ্ক পাওয়া যায়।

$$\lambda_1 = \lambda\frac{\nu + v_s}{\nu} = \lambda\left(1 + \frac{v_s}{\nu}\right)$$

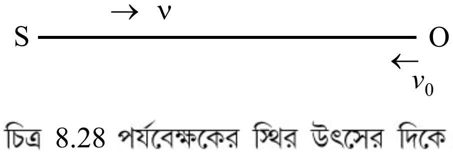
$$n_1 = n\frac{\nu}{\nu + v_s} = \frac{n}{1 + \frac{v_s}{\nu}} \quad \text{এক্ষেত্রে } n_1 < n$$

(2) উৎস স্থির, পর্যবেক্ষক গতিশীল (Source stationary ; observer in motion) :

মনেকরি উৎস s থেকে n কম্পাঙ্ক ও λ তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের তরঙ্গ ν বেগে অগ্রসর হচ্ছে। এবার ধরি O পর্যবেক্ষক v_0 বেগে s এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে (চিত্র 8.28)। পর্যবেক্ষক স্থির থাকলে n কম্পাঙ্কের শব্দই শুনতেন। পর্যবেক্ষক উৎসের দিকে অগ্রসর হওয়ার ফলে পর্যবেক্ষকের কাছে তরঙ্গের আপেক্ষিক বেগ হবে $(v + v_0)$। এতে তিনি কম্পাঙ্কের পরিবর্তন লক্ষ্য করবেন। পরিবর্তিত কম্পাঙ্ক n_2 হলে

$$n_2 = \frac{\nu + v_0}{\lambda} = \frac{\nu + v_0}{\frac{\nu}{n}} \qquad [\because \nu = n\lambda]$$

$$= \frac{n(\nu + v_0)}{\nu} = n\left(1 + \frac{v_0}{\nu}\right) \quad \therefore\ n_2 > n$$



চিত্র 8.28 পর্যবেক্ষকের স্থির উৎসের দিকে গতিশীল

পর্যবেক্ষক v_0 বেগে উৎসের থেকে দূরে যেতে থাকলে পরিবর্তিত কম্পাঙ্ক হবে

$n_2 = n\left(1 - \frac{v_0}{\mathrm{v}}\right)$ যেক্ষেত্রে $n_2 < n$

(3) উৎস ও পর্যবেক্ষক উভয়েই গতিশীল (Both the source and the observer are in motion) :

(a) উৎস v_s বেগে ও পর্যবেক্ষক v_0 বেগে একই দিকে গতিশীল

দুটি গতিকে পৃথকভাবে বিবেচনা করলে, স্থির পর্যবেক্ষকের দিকে উৎসের গতির জন্য পরিবর্তিত কম্পাঙ্ক হবে

$$n_1 = n\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{v} - v_s}$$

আবার পর্যবেক্ষকের গতির জন্য পরিবর্তিত কম্পাঙ্ক হবে

$$n_2 = n_1\frac{\mathrm{v} - v_0}{\mathrm{v}}$$

$\therefore$ দুটিকে একসঙ্গে বিবেচনা করলে পরিবর্তিত কম্পাঙ্ক

$$n_2 = n\frac{\mathrm{v} - v_0}{\mathrm{v} - \upsilon_s}$$

(b) উৎস v_s বেগে ও পর্যবেক্ষক v_o বেগে বিপরীত দিকে গতিশীল।

v_o ও v_s এর চিহ্ন বিপরীত করলেই আগের সমীকরণ থেকে পরিবর্তিত কম্পাঙ্ক পাওয়া যায়। পরিবর্তিত কম্পাঙ্ক

$$n = \frac{\mathrm{v} + v_0}{\mathrm{v} + v_s}$$

দ্রুতগামী গাড়ি, বিমান ইত্যাদির বেগ নির্ণয় করার জন্য ডপলার ক্রিয়া কাজে লাগানো হয়।

8.20 বেগ ও ডেসিবেল :

শব্দের তীব্রতার স্তর (intensity-level) পরিমাপের জন্য এদুটি একক ব্যবহার করা হয়।

কোনো প্রমাণ তীব্রতা I_0 ধরা হলে, কোনো শব্দের তীব্রতা I হলে বেল বা $\mathrm{B} = \log_{10}\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}$ এবং ডেসিবেল বা $d\mathrm{B} = 10\log_{10}\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}$ আন্তর্জাতিক সিদ্ধান্ত অনুযায়ী প্রমাণ তীব্রতার মান, 1000 H_z কম্পাঙ্কে $\mathrm{I}_0 = 10^{-12}\,wm^{-2}$ ধরা হয়।

অতএব প্রমাণ তীব্রতার $dB = 10\log_{10}\frac{I_0}{I_0} = 0$ ।

$I > I_0$ হলে dB ধনাত্মক;

$I < I_0$ হলে dB ঋনাত্মক।

8.21 সারাংশ

1. (a) সরল দোলগতির সমীকরণ :

$$F = -Kx \text{ বা, } \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$F =$ জাড্যবল, $-Kx =$ প্রত্যানয়ক বল, $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$, $m =$ বস্তুর ভর।

এই সমীকরণের সমাধান

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t = a\cos(\omega t - \in)$$

এখানে ω = স্বাভাবিক কৌণিক কম্পাঙ্ক,

$\in$ = প্রাথমিক দশা (ইপোক)

পর্যায়কাল $T = \frac{2\pi}{\omega}$, কম্পাঙ্ক $n = \frac{1}{T}$

2. সরল দোলগতির উপরিপাত :

দুটি সরল দোলগতির $x = a\cos\omega t$, $y = b\cos(\omega t - \propto)$ উপরিপাতিত হলে লব্ধি সমীকরণ হয়

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\propto = \sin^2\propto$$

সাধারণভাবে এই গতি উপবৃত্তাকার। ক্ষেত্র বিশেষে দশা পার্থক্যের উপর নির্ভর করে গতি সরলরেখীয় বা বৃত্তাকার হতে পারে। সাধারণত দুটি সরল দোলগতির কমাঙ্ক সরল অনুপাতে থাকলে বিভিন্ন আকৃতির লব্ধি গতি পাওয়া যায়—এদের লিসাজু চিত্র বলা হয়।

3. অবমন্দিত সরল দোলগতির সমীকরণ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - \gamma\frac{dx}{dt}$$

বা, $\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0$

এখানে $-\mathrm{K}x=$ প্রত্যানয়ক বল, $m\frac{d^2x}{dt^2}=$ জাড্যবল,

$2b=\frac{\lambda}{m}=$ একক ভরে অবমন্দন বল।

$\omega=\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{m}}$

সমীকরণটির সাধারণ সমাধান

$x=e^{-bt}\left(c_1e^{\beta t}+c_2e^{-\beta t}\right)$

$\beta=\sqrt{b^2-\omega^2}$

4. (a) পরবশ কম্পন : বাইরের থেকে কোনো বস্তুকে পর্যাবৃত্ত বল দিয়ে কম্পিত করলে, বস্তুটি প্রথমে নিজের স্বাভাবিক কম্পাঙ্কে কম্পিত হতে চায়। পরে পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্কে কম্পিত হয়। পরবশ কম্পনের সমীকরণ—

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\mathrm{K}_x-\gamma\frac{dx}{dt}+\mathrm{F}\sin\omega t$$

বা, $\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\mathrm{F}\sin\omega t$

$\mathrm{F}\sin\omega t=$ প্রযুক্ত পর্যাবৃত্ত বল, $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$, বস্তুর স্বাভাবিক কৌণিক কম্পাঙ্ক।

এই সমীকরণের সাধারণ সমাধান

$x=\mathrm{D}e^{-bt}\sin(\phi t+\delta)+\mathrm{A}\sin(\omega t-\propto)$

5. চলতরঙ্গের সমীকরণ

$y=a\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$ ধনাত্মক x -এর দিকে

$y=a\sin\omega\left(t+\frac{x}{v}\right)$ ঋনাত্মক x -এর দিকে

v হল তরঙ্গ গতি। চল তরঙ্গের অবকল সমীকরণ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

6. শব্দ তরঙ্গের উপরিপাতের বেলায় ব্যতিচার, স্থাণুতরঙ্গ ও স্বরকম্প উৎপন্ন হতে পারে।

(i) শব্দের ব্যতিচার :

প্রায় একদিকে দুটি শব্দ তরঙ্গ

$$y_1 = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{r_1}{\lambda}\right),\ \ y_2 = b\sin 2\pi\left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{r_2}{\lambda}\right)$$

অগ্রসর হলে, উপরিপাতের ফলে লব্ধি তরঙ্গ হয়

$$y = \mathrm{A}\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \delta\right)$$

যখন $\mathrm{A}^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)$

তীব্রতা $= c\mathrm{A}^2$

গঠনমূলক ব্যতিচারে, I = I max, তখন পথপার্থক্য $r_1 - r_2 = n\lambda$

বিনাশী ব্যতিচারে, $\mathrm{I} = \mathrm{I}_{\min}$, তখন পথপার্থক্য $r_1 - r_2 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$ যেখানে $n = 0, \pm 1, \pm 2,.......$ইত্যাদি

(ii) স্থাণুতরঙ্গ : বিপরীত দিকে সমবেগে দুটি অভিন্ন তরঙ্গ

$y_1 = a\sin(\omega t - k_x)$ ও $y_2 = a\sin(\omega t + k_x)$

অগ্রসর হয়ে উপরিপতিত হলে, লব্ধি তরঙ্গ

$$y = \left(2a\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\sin\omega t = \mathrm{A}\sin\omega t$$ এটি স্থাণুতরঙ্গ সমীকরণ।

7. (i) জড় মাধ্যমে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের বেগ

$v = \sqrt{\frac{k}{p}}$, K = মাধ্যমের আয়তন বিকার গুনাঙ্ক ρ = মাধ্যমের ঘনত্ব

(ii) কঠিন পদার্থের দণ্ডের মধ্যে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের বেগ

$\nu = \sqrt{\frac{\mathrm{Y}}{\rho}}$, Y = কঠিনের ইয়ং গুনাঙ্ক ρ = কঠিনের ঘনত্ব

(iii) বায়ুর মধ্যে শব্দের বেগ :

নিউটনের সমীকরণ $\nu = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$

নিউটন ধরে ছিলেন বায়ুতে শব্দ অগ্রসর হওয়ার সময় সমোষ্ণ পরিবর্তন হয়। এই সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত বেগ পরীক্ষালব্ধ বেগের থেকে কম হয়।

ল্যাপলাসের সংশোধিত সমীকরণ

$$\nu = \sqrt{\frac{\lambda\rho}{\rho}}, \quad \gamma \ = \text{দুটি আ. তাপের অনুপাত।}$$

ল্যাপলাস ধরেন এই পরিবর্তন রূদ্ধতাপ। এই সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত বেগ ও পরীক্ষালব্ধ বেগ প্রায় সমান।

8. টান করা তারে তির্যক তরঙ্গের বেগ

$\nu = \sqrt{\frac{T}{m}}$, T = তারের টান, m = তারের একক দৈর্ঘ্যের ভর।

টান করা তারে মূল সুরের কম্পাঙ্ক

$$n = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

সমমেল গুলির কম্পাঙ্ক হয় $2n$, $3n$,..........ইত্যাদি

9. ডপলার ক্রিয়া :

শব্দের উৎস ও পর্যবেক্ষকের মধ্যে আপেক্ষিক বেগ থাকলে পর্যবেক্ষকের কাছে শ্রুত শব্দের কম্পাঙ্ক প্রকৃত কম্পাঙ্কের থেকে বেশী বা কম অনুভূত হয়। পরস্পর কাছে এলে কম্পাঙ্ক বাড়ে আর পরস্পর দূরে গেলে কম্পাঙ্ক কমে।

(i) উৎস গতিশীল, পর্যবেক্ষক স্থির থাকলে শ্রুত কম্পাঙ্ক হবে

$n_1 = n\frac{\nu}{\nu \pm v_s}$ ν = শব্দের বেগ, v_s = উৎসের বেগ, n = প্রকৃত কম্পাঙ্ক। কাছে এলে ঋনাত্মক চিহ্ন, দূরে গেলে ধনাত্মক চিহ্ন হবে।

(ii) উৎস স্থির, পর্যবেক্ষক গতিশীল হলে, শ্রুত কম্পাঙ্ক হবে

$n_2 = n\left(\frac{\nu \pm v_0}{\nu}\right)$ ν = শব্দের বেগ, v_0 = পর্যবেক্ষকের বেগ, n = প্রকৃত কম্পাঙ্ক। কাছে এলে ধনাত্মক চিহ্ন ও দূরে গেলে ঋনাত্মক চিহ্ন হবে।

(iii) উভয়েই গতিশীল হলে সাধারণ নিয়মটি হবে

$$n_2 = n\frac{\nu \pm v_0}{\nu \pm v_s}$$

8.22 গাণিতিক উদাহরণ

উদাহরণ 1. m ভরের একটি কণার একমাত্রিক স্থিতিশক্তির রাশিমালা $U(x) = U_0(1-\cos ax)$, যেখানে U_0 ও a ধ্রুবক। সরণ খুব কম হলে এর পর্যায়কাল কী হবে?

সমাধান : বল $F = -\frac{dU}{dx} = -U_0 a \sin ax$

বা, $F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -U_0 a \sin ax$

সরণ খুব কম হলে, ax ক্ষুদ্র, সেক্ষেত্রে $\sin ax \simeq ax$

$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{u_0 a^2}{m}x = -\omega^2 x$

অতএব গতি হবে সরল দোলগতি।

এবং $\omega^2 = \frac{u_0 a^2}{m}$ বা $\omega = \sqrt{\frac{u_0 a^2}{m}}$

$\therefore$ পর্যায়কাল $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{u_0 a^2}}$

উদাহরণ 2. সরল দোলগতি সম্পন্ন একটি বস্তুর কম্পন বিস্তার 1 cm এবং কম্পাঙ্ক 12 H_z। যখন বস্তুর সরণ 0.5 cm তখন ওর বেগ কত?

সমাধান : ধরি $x = a\sin\omega t$

a = বিস্তার = 1 cm = 0.01m, ω = কৌণিক কম্পাঙ্ক $= 2\pi f = 2\pi \times 12$

বেগ $= \frac{dx}{dt} = a\omega\cos\omega t = a\omega\sqrt{1-\sin^2\omega t} = a\omega\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

$$= \omega\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$= 2\pi \times 12\sqrt{(0.01)^2 - (0.005)^2}$$

$$= 0.653 \text{ m/s}$$

উদাহরণ 3. একটি কম্পনশীল কণার সরণের সমীকরণ : $x = a\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)t + b\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)t$। a = 3cm,

$b = 4cm$। কণাটির (i) বিস্তার, (ii) প্রারম্ভিক দশা (iii) 1 সেকেন্ড সময় পরে সরণ, বেগ ও ত্বরণ কত হবে?

সমাধান : $x = a\sin\frac{\pi}{6}t + b\cos\frac{\pi}{6}t$

$$= A\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}t + A\sin\theta\frac{\pi}{6}t \quad [a = A\cos\theta, b = A\sin\theta]$$

$$= A\sin\left(\frac{\pi}{6}t + \theta\right)$$

অতএব গতি সরল দোলগতি। এর বিস্তার = A ও প্রারম্ভিক দশা = θ

(i) এখন $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(0.03)^2 + (0.04)^2} = 0.05\,m$

(ii) $\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \quad \therefore \theta = \tan^{-1}\frac{4}{3}$

(iii) $x = a\sin\frac{\pi}{6}t + b\cos\frac{\pi}{6}t$

t = 1s হলে, সরণ $x = 0.03\sin\frac{\pi}{6} + 0.04\cos\frac{\pi}{6}$

$$= 0.03\sin 30^0 + 0.04\cos 30^0$$

$$= 0.03 \times \frac{1}{2} + 0.04 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 0.015 + 0.0346 = 0.0496\,m$$

বেগ $v = \frac{dx}{dt} = a \times \frac{\pi}{6} \times \cos\frac{\pi}{6}\cdot t - b \times \frac{\pi}{6} \times \sin\frac{\pi}{6}t$

$$= 0.03 \times \frac{\pi}{6} \times \cos 30^0 - 0.04 \times \frac{\pi}{6} \times \sin 30^0$$

$$= 0.03 \times \frac{\pi}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 0.04 \times \frac{\pi}{6} \times \frac{1}{2}$$

$$= 0.01360 - 0.01047 = 3.13 \times 10^{-3}\,m/s$$

ত্বরণ $f = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \times \sin\frac{\pi}{6}t - b\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \cos\frac{\pi}{6}t$

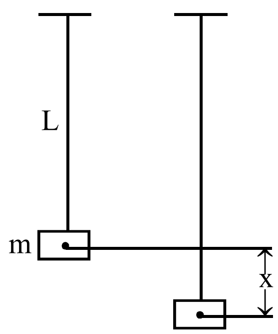
$$= -0.03\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \times \sin 30^0 - 0.04\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \cos 30^0$$

$$= -0.03 \times \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \times \frac{1}{2} - 0.04\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -4.11 \times 10^{-3} - 9.50 \times 10^{-3}$$
$$= -0.01361 \text{ m/s}^2$$

উদাহরণ 4. L দৈর্ঘ্যের ও A প্রস্থচ্ছেদের একটি স্থিতিস্থাপক ভারহীন তার দৃঢ় অবলম্বন থেকে ঝুলানো আছে। খোলা প্রান্তে m ভরের একটি বস্তুখণ্ড আটকানো আছে। তারের উপাদানের ইয়ং গুনাঙ্ক Y হলে, উলম্ব বরাবর এর দোলকের কম্পাঙ্ক কত হবে?

সমাধান : ব্যবস্থাটি চিত্রে দেখানো হয়েছে। m ভরটিকে x দৈর্ঘ্য নীচের দিকে টেনে ছেড়ে দিলে তারের মধ্যে প্রত্যানয়ক বল হবে ধরি F



$$\therefore \ Y = -\frac{\frac{F}{A}}{\frac{x}{L}} \quad \therefore \ F = -\frac{YA}{L}x$$

$\therefore F \propto -x$ অতএব বস্তুর গতি সরল দোলগতি

বস্তুর ত্বরণ $f = \frac{F}{m} = -\frac{YA}{mL}x = -\omega^2 x$ যখন $\omega = \sqrt{\frac{YA}{mL}}$

কমাঙ্ক, $n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{YA}{mL}}$

উদাহরণ 5. একটি সুষম প্রস্থচ্ছেদের বদ্ধপ্রান্ত বিশিষ্ট কাঠের চোঙ্ জলের মধ্যে l দৈর্ঘ্য ডুবিয়ে খাড়াভাবে ভাসছে। দেখান যে চোঙ্‌টিকে অল্প ডুবিয়ে ছেড়ে দিলে এটি সরল দোলগতিতে উপরে নীচে দুলতে থাকবে। এর দোলনকাল কত হবে?

সমাধান : মনে করি চোঙের প্রস্থচ্ছে A। দণ্ডটির ওজন = $lA\rho g$, জলের ঘনত্ব = ρ অতএব চোঙটির ভর = $lA\rho$।

x দৈর্ঘ্য ডুবিয়ে ছেড়েদিলে প্রত্যানয়ক বল $F = -xA\rho g$, অর্থাৎ $F \propto -x$, অতএব চোঙের গতি সরল দোলগতি।

$$\therefore \text{ চোঙটির ত্বরণ } f = \frac{-xA\rho g}{lA\rho} = \frac{-g}{l}x$$

বা, $f = -\omega^2 x$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

অতএব দোলনকাল $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

উদাহরণ 6. একটি বস্তু 0.04m দীর্ঘ সরলরেখা বরাবর সরল দোলগতি সম্পন্ন করছে। মধ্যবিন্দু অতিক্রম ßÔþõþü÷ûþõ¦™ÕÔþá ¿ ÅÕá 0.12 *m/s* হলে বস্তুটির দোলনকাল কত হবে?

সমাধান : মনে করি সরল দোলগতির সমীকরণ $x = a\sin\omega t$

$\therefore$ বেগ, $\frac{dx}{dt} = a\,\omega\cos\omega t = a\,\omega\sqrt{1-\sin^2\omega t}$

$$= a\omega\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \omega\sqrt{a^2-x^2}$$

দোলনের বিস্তার $a = \frac{0.04}{2} = 0.02\,m$

এবং মধ্যবিন্দুতে বেগ (অর্থাৎ $x = 0$ হলে) = 0.12 *m/s*

$\therefore\ 0.12 = \omega\sqrt{a^2-0} = \omega a = \omega \times 0.02$

$\therefore\ \omega = 6$ এখন দোলনকাল $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}s$

উদাহরণ 7. দুটি সুরশলাকা একসঙ্গে কম্পিত হলে সেকেন্ডে 6টি স্বরকম্প উৎপন্ন হয়। একটির কম্পাঙ্ক 560 Hz। অন্য সুরশলাকার বাহুতে কিছু মোম লাগালে স্বরকম্পের সংখ্যা কমে যায়। দ্বিতীয় সুরশলাকার কম্পাঙ্ক কত?

সমাধান : ধরা যাক মোম লাগালে কম্পাংক n হ্রাস পাবে। অতএব 566 H_z -এর সুরশলাকার ক্ষেত্রে স্বরকম্ব হবে (566–n)–560 = 6–n <6 এবং 544 H_z এর সুরশলাকার ক্ষেত্রে স্বরকম্প হবে 560–(544–n) = 6+n>6

অতএব দ্বিতীয় সুরশলাকার কম্পাংক হবে 566 H_z।

উদাহরণ 8. দুটি সরল দোলগতির সমীকরণ যথাক্রমে $x = 1.00\times10^{-2}\sin\omega t\,m$ এবং $y = 1.732\times10^{-2}\sin\omega t\,m$। একটি কণার উপর এই দুটি দোলগতি যুগপৎ ক্রিয়াশীল। লব্ধিগতির বিস্তার x অক্ষের সঙ্গে কত নতিকোণ সৃষ্টি করবে?

সমাধান : সমীকরণ দুটি

$$x = a\sin\omega t............(i)$$

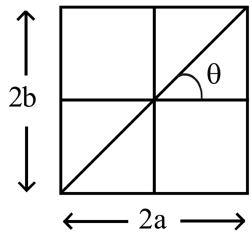
$$y = b\sin\omega t............(ii)$$

হলে লব্ধি গতির সমীকরণ (8.7 (6) অধ্যায়)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}=0$$

বা, $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=0$

বা, $y=\frac{b}{a}x$



এটি মূল বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ।

বিস্তার $=\sqrt{a^2+b^2}$ $=\sqrt{\left(1.00\times10^{-2}\right)^2+\left(1.732\times10^{-2}\right)^2}$

$=0.02\text{m}$

x অক্ষের সঙ্গে নতিকোণ $\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}=\tan^{-1}\frac{1.732\times10^{-2}}{1.00\times10^{-2}}=60°$

উদাহরণ 9. একটি লঘু অবমন্দিত সরল দোলগতির বিস্তার 0.08m থেকে 0.01m কমে আসতে সময় নেয় 200s। এই সময়ের মধ্যে ব্যবস্থাটি 80টি পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করে। দোলন কাল কত? এই দোলন কাল অনবমন্দিত দোলনকাল থেকে কতটা পৃথক?

সমাধান : অবমন্দিত দোলনকাল $\text{T}=\frac{200}{80}=2.5$ সে.

অবমন্দিত কম্পাঙ্ক $f=\frac{1}{2.5}=0.4\ \text{H}_\text{z}$

সমীকরণ (6) থেকে পাই

$$x=\text{D}e^{-bt}\sin(\phi t+\delta)$$

t_1 সময়ে সরণ $x_1=\text{D}e^{-bt_1}\sin(\phi t_1+\delta)$

$=\text{A}_1\sin(\phi t_1+\delta)$

t_2 সময়ে সরণ $x_2=\text{D}e^{-bt_2}\sin(\phi t_2+\delta)$

$=\text{A}_2\sin(\phi t_2+\delta)$

$\therefore$ দুটি বিস্তারের অনুপাত $\frac{\text{A}_1}{\text{A}_2}=e^{-b(t_1-t_2)}$

প্রদত্ত শর্তানুসারে $\frac{0.08}{0.01}=e^{+b\times200}$ $\quad\because\ t_2-t_1=200\text{s}$

বা, $8 = e^{+200b}$

বা, $+200b = \ln 8$

$\therefore\ b = 0.0103972$

অনবমন্দিত অবস্থায় কৌণিক কম্পাঙ্ক ω হলে

$$f = \frac{\sqrt{\omega^2 - b^2}}{2\pi}$$

বা, $\omega^2 = (2\pi f)^2 + b^2$

$$= (2\pi \times 0.4)^2 + (0.0103972)^2$$

$$= 6.3167$$

বা, $\omega = 2.51330$

$\therefore$ অনবমন্দিত দোলনকাল $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2.49997\,\text{s}$

$\therefore$ অনবমন্দিত দোলনকাল সামান্য বেশী প্রায় 3×10^{-5} সে.।

উদাহরণ 10. 200 H_z কম্পাঙ্কে কম্পনরত একটি সংস্থার 1000 বার কম্পনে বিস্তার প্রাথমিক মানের $\dfrac{1}{10}$ অংশ হয়। তীক্ষ্ণতার (Q) মান কত হবে?

সমাধান : অবমন্দিত কম্পনে বিস্তার লেখা যায় $D = D_0 e^{-bt}$

এখানে $D_0 =$ প্রাথমিক বিস্তার, $D = t$ সময় পরে বিস্তার

$$\therefore\ \frac{D}{D_0} = \frac{1}{10} = e^{-bt}$$

$f = 200\ H_z\ \ \therefore\ T = \dfrac{1}{200}$ সে.

$$\therefore\ t = 1000 \times T = \frac{1000}{200} = 5 \text{ সে.}$$

$$\therefore\ \frac{1}{10} = e^{-5b}$$

বা, $0.1 = e^{-5b}$

বা, $-5b = \ln 0.1$

$\therefore\ b = 0.461$

তীক্ষ্মতা, $Q = \frac{\omega_0}{2b} = \frac{2\pi \times 200}{2 \times 0.461} = 1363$

উদাহরণ 11. একটি তির্যক তরঙ্গের সমীকরণ $y = 0.008 \sin 2\pi\left(\frac{t}{0.3} - \frac{x}{0.3}\right)$ মি. এই তরঙ্গের বিস্তার, তরঙ্গদৈর্ঘ্য, তরঙ্গবেগ এবং কম্পাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমধান : চলতরঙ্গের সমীকরণ $y = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই,

বিস্তার a = 0.008 মি.
পর্যায়কাল T = 0.3 সে.
তরঙ্গ দৈর্ঘ্য λ = 0.3 মি.

$\therefore$ কম্পাঙ্ক $n = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.3} = 3.33 \ H_z$

তরঙ্গ বেগ $v = n\lambda = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.3}{0.3} = 1 \frac{\text{মি.}}{\text{সে.}}$

উদাহরণ 12. x অভিমুখে কোনো মাধ্যমে 2m/s বেগে একটি চলতরঙ্গ অগ্রসর হচ্ছে। $x = 0$ অবস্থানে t সময়ে একটি কণার সরণ $0.007 \sin 10\pi t\, m$ । $x = 0.6\,\text{m}$ অবস্থানে $1s$ পরে কণার সরণ কত হবে?

সমাধান : ধনাত্মক x দিকে চলতরঙ্গের সমীকরণ

$$y = a \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

এখানে $a = 0.007m$
$\omega = 10\pi$
$v = 2\ m/s$

$\therefore$ সরণ, $y = 0.007 \sin 10\pi\left(t - \frac{x}{2}\right)$

$\therefore$ x = 0.6m অবস্থানে $1s$ পরে কণার সরণ

$$y = 0.007 \sin 10\pi\left(1 - \frac{0.6}{2}\right) = 2.62 \times 10^{-3} m$$

উদাহরণ 13. শ্রুতি সাপেক্ষে একটি শব্দ উৎসের তীব্রতা $10^{-12}\ w/m^2$। শব্দের কম্পাঙ্ক 1000 হলে বায়ুকণার বিস্তার কত হবে? বায়ুর ঘনত্ব = 1.293 kg/m^3 এবং বায়ুতে শব্দের বেগ = 340 m/s।

সমাধান : তীব্রতা $I = 2\pi^2 v\rho f^2 a^2$

$$\therefore\ a^2 = \frac{I}{2\pi^2 v\rho f^2} = \frac{10^{-12}}{2\pi^2 \times 340 \times 1.293 \times (1000)^2}$$

$$\therefore\ a = 1.073 \times 10^{-11}\,\text{m}$$

উদাহরণ 14. একটি কম্পমান বস্তু থেকে শব্দ-নির্গত হয়ে দুটি ভিন্ন পথে অগ্রসর হয়ে এক বিন্দুতে মিলিত হল। ঐ পথদ্বয়ের পার্থক্য 0.12m অথবা 0.36m হলে ঐ বিন্দুতে নিঃশব্দতার সৃষ্টি হয়। বস্তুর কম্পাঙ্ক 1375 হলে বায়ুতে শব্দের বেগ কত?

সমাধান : কোন বিন্দুতে নিঃশব্দতার সৃষ্টি হওয়ার জন্য পথ পার্থক্য হতে হবে

$\Delta r = (2n+1)\dfrac{\lambda}{2}$ হলে, n = 0, 1, 2,..........

প্রথম নিঃশব্দতার জন্য, $0.12 = (2n+1)\dfrac{\lambda}{2}$

পরবর্তী নিঃশব্দতার জন্য, $0.36 = (2n+3)\dfrac{\lambda}{2}$ $\quad\therefore\ 0.24 = \lambda$

শব্দের বেগ $v = n\lambda = 1375 \times 0.24 = 330$ m/s

উদাহরণ 15. একটি স্থাণুতরঙ্গকে $y = 10\cos\dfrac{\pi x}{3}\sin 40\pi t\, m$ সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। যে দুটি পৃথক তরঙ্গের উপরিপাতে স্থাণুতরঙ্গটির উৎপত্তি হয়েছে, তাদের (i) বিস্তার, (ii) তরঙ্গদৈর্ঘ্য এবং গতিবেগ কী হবে? ঐ দুটি পৃথক তরঙ্গের সমীকরণও লিখুন।

সমাধান : যে দুটি অভিন্ন চলতরঙ্গ বিপরীতগামী হয়ে উপরিপাতিত হয়ে স্থাণুতরঙ্গ সৃষ্টি হয় ধরি ঐ দুটি হল

$$y_1 = a\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

ও $$y_2 = a\sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

স্থাণুতরঙ্গের সমীকরণ $y = y_1 + y_2 = 2a\cos\dfrac{2\pi x}{\lambda}\sin\omega t$

প্রশ্নানুসারে $y = 10\cos\dfrac{\pi x}{3}\sin 40\pi t\ \ m$

তুলনা করে পাই,

(*i*) $2a = 10$, বা, $a = 5\text{m}$ (বিস্তার)

(*ii*) $\dfrac{\pi x}{3} = \dfrac{2\pi x}{\lambda}$, বা $\lambda = 6\text{m}$ (তরঙ্গ দৈর্ঘ্য)

এবং $\omega = 40\pi$, বা $2\pi \times \dfrac{v}{\lambda} = 40\pi$

বা, $v = 20 \times \lambda = 20 \times 6 = 120\, m/s$ (তরঙ্গ বেগ)

$+x$ অভিমুখে চলতরঙ্গের সমীকরণ, $y_1 = 5\sin\left(40\pi t - \dfrac{2\pi x}{6}\right)$ m

$-x$ অভিমুখে চলতরঙ্গের সমীকরণ, $y_2 = 5\sin\left(40\pi t + \dfrac{2\pi x}{6}\right)$ m

উদাহরণ 16. ইস্পাতের ইয়ং গুনাঙ্ক 2.14×10^{11} N/m^2 এবং ঘনত্ব 7.8×10^3 kg/m^3 হলে, এর মধ্যে শব্দের বেগ কত?

সমাধান : শব্দের বেগ $v = \sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$

$$= \sqrt{\frac{2.14 \times 10^{11}}{7.8 \times 10^{3}}} = 5738 \text{ m/s}$$

উদারণ 17. 200 H_z কম্পাঙ্কের একটি শব্দতরঙ্গ হাইড্রোজেন গ্যাসের মধ্যে সৃষ্ট হল। বায়ুর মধ্যে শব্দের বেগ 335 m/s ও বায়ুর ঘনত্ব হাইড্রোজেনের ঘনত্বের 14.4 গুণ হলে বায়ুর মধ্যে এর তরঙ্গদৈর্ঘ্য কত?

সমাধান : $\dfrac{\nu_H}{\nu_{air}} = \sqrt{\dfrac{\rho_{air}}{\rho_H}} = \sqrt{\dfrac{14.4}{1}}$

এখানে হাইড্রোজেনের মধ্যে ও বায়ুর মধ্যে শব্দের বেগ যথাক্রমে ν_H ও ν_{air} এবং হাইড্রোজেনের ও বায়ুর ঘনত্ব যথাক্রমে ρ_H ও ρ_{air} ।

$\therefore\ \nu_H = 335 \times \sqrt{14.4}$ m/s

হাইড্রোজেনের মধ্যে তরঙ্গদৈর্ঘ্য $\lambda = \dfrac{\nu_H}{n} = \dfrac{335 \times \sqrt{14.4}}{200} = 6.36\,\text{m}$

উদাহরণ 18. বিদ্যুতের চমকের $6s$ পরে বজ্রের শব্দ শোনা গেল। বায়ুর তাপমাত্রা 30^0c হলে বিদ্যুৎ চমকের দূরত্ব নির্ণয় করুন। (0^0c তাপমাত্রায় বায়ুতে শব্দের বেগ 332 m/s)।

সমাধান : 30^0c এ বায়ুতে শব্দের বেগ

$$\nu_{30} = \nu_0\left(1+\frac{t}{546}\right) = 332\left(1+\frac{30}{546}\right) = 350.24 \text{ m/s}$$

বায়ুর মধ্যে শব্দের বেগের তুলনায় আলোকবেগ অত্যন্ত বেশী।

নির্ণেয় দূরত্ব, $s = \nu_{30} \times 6 = 350.24 \times 6 = 2101.4\text{m}$

উদাহরণ 19. বায়ুতে শব্দের বেগ 340 m/s এবং বায়ুর ঘনত্ব 1.22 kg/m^3 হলে ব্যারোমিটারে পারদস্তম্ভের উচ্চতা নির্ণয় করুন। (λ = 1.41)।

সমাধান : বায়ুতে শব্দের বেগের রাশিমালা

$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থে।

ধরি নির্ণেয় ব্যারোমিটার উচ্চতা = Hm।

$\therefore\ p = \text{H} \times 13.6 \times 10^3 \times 9.8 \quad \text{N/m}^2$

$$\therefore\ 340 = \sqrt{\frac{1.41 \times \text{H} \times 13.6 \times 10^3 \times 9.8}{1.22}}$$

$$\therefore\ \text{H} = \frac{(340)^2 \times 1.22}{1.41 \times 13.6 \times 10^3 \times 9.8}$$
$$= 0.75\text{m}$$

উদাহরণ 20. একটি টান দেওয়া তার মূলসুরে কম্পিত হওয়ার সময় ওর কম্পাঙ্ক হয় 30H_z। তারটির দৈর্ঘ্য 0.6m এবং তারের একক দৈর্ঘ্যের ভর = 0.05 kg/m হলে তির্যক তরঙ্গের গতিবেগ নির্ণয় করুন।

সমাধান : টান দেওয়া তারে তির্যক তরঙ্গের গতিবেগের রাশিমালা,

$\nu = \sqrt{\frac{\text{T}}{m}}$, T হল টান ও m হল একক দৈর্ঘ্যের ভর

$\therefore\ n\lambda = \sqrt{\frac{\text{T}}{m}}$, n হল কম্পাঙ্ক ও λ হল তরঙ্গদৈর্ঘ্য

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\lambda = 2l = 2 \times 0.6 = 1.2\text{m}$

$$\therefore\ 30\lambda = \sqrt{\frac{\text{T}}{m}}$$

অতএব $\nu = 30\lambda = 30 \times 1.2\,\text{m} = 36\,\text{m/s}$

উদাহরণ 21. 0.5m দৈর্ঘ্যের একটি তারে প্রতি সেকেণ্ডে 130 বার কম্পন হয়। দৈর্ঘ্য কমিয়ে 0.3m ও টান চারগুণ করা হলে পরিবর্তিত কম্পাঙ্ক কত হবে?

সমাধান : কম্পাঙ্ক $n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$, T = টান, m = একক দৈর্ঘ্যের ভর।

$$\therefore\ 130 = \frac{1}{2 \times 0.5}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

নির্ণেয় কম্পাঙ্ক $n' = \frac{1}{2 \times 0.3}\sqrt{\frac{4T}{m}}$

$$\therefore\ \frac{n'}{130} = \frac{0.5}{0.3}\sqrt{4} = \frac{10}{3}$$

$$n' = \frac{1300}{3} = 433.3\,H_z$$

উদাহরণ 22. যদি তারের টান 25kg বৃদ্ধি করলে কম্পাঙ্ক 3 : 2 অনুপাতে বৃদ্ধি পায় তবে প্রাথমিক টান কত ছিল?

সমাধান : কম্পাঙ্কের রাশিমালা,

$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$, T = টান (প্রাথমিক) m = একক দৈর্ঘ্যের ভর

ধরি প্রাথমিক ও অন্তিম কম্পাঙ্ক যথাক্রমে 2n ও 3n

শর্তানুসারে, $2n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$ ....(i)

এবং $3n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T+25}{m}}$ ....(ii)

$\therefore\ \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{T+25}{T}}$ বা, $\frac{9}{4} = \frac{T+25}{T}$

বা, $9T = 4T + 100$

বা, $5T = 100$

$\therefore\ T = 20\,\text{kg.}$ = প্রাথমিক টান

উদাহরণ 23. একটি ট্রেন 34 m/s বেগে রেলওয়ে স্টেশন পার হওয়ার সময় 500 H_Z কম্পাঙ্কে বাঁশি বাজাতে বাজাতে চলে যায়। প্লাটফর্মে অপেক্ষারত কোনো ব্যক্তির কাছে ঐ কম্পাঙ্ক কত মনে হবে? (i) যখন ট্রেনটি এগিয়ে আসে (ii) যখন চলে যায়। (বায়ুতে শব্দের বেগ = 340 m/s)।

সমাধান : (i) উৎস পর্যবেক্ষকের দিকে গতিশীল, পর্যবেক্ষক স্থির থাকলে পরিবর্তিত কম্পাঙ্ক

$$n' = n\frac{\nu}{\nu - v_s} = 500 \times \frac{340}{340-34} = 555.56\ \mathrm{H_z}$$

(ii) এক্ষেত্রে উৎস দূরে চলে যাচ্ছে। পর্যবেক্ষক স্থির পরিবর্তিত কম্পাঙ্ক

$$n'' = n\frac{\nu}{\nu + v_s} = 500 \times \frac{340}{340+34} = 454.50\ \mathrm{H_z}$$

8.23 প্রশ্নাবলি

(i) বিষয়মুখী প্রশ্ন

1. সরল দোলগতি কাকে বলে?
2. সরল দোলগতির সমীকরণ লিখুন।
3. পর্যাবৃত্ত গতি ও দোলনগতির পার্থক্য কী?
4. একটি দোলনগতির সমীকরণ $\frac{d^2x}{dt^2} + mx = 0$. গতিটির কম্পাঙ্ক কত?
5. সরল দোলগতিসম্পন্ন কণার সর্বোচ্চ গতিশক্তির মান কত? মোট শক্তির মানই বা কত?
6. দুটি পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়াশীল সমকম্পাঙ্ক ও সমবিস্তারের দোলগতির লব্ধি কোন্ অবস্থায় বৃত্তাকার হবে?
7. অবমন্দিত কম্পন বলতে কী বোঝায়?
8. ক্রান্তীয় অবমন্দন বলকে কী বোঝায়?
9. পরবশ কম্পন কী?
10. অনুনাদ কাকে বলে?
11. অনুনাদের তীক্ষ্নতা কাকে বলে?
12. অনুদৈর্ঘ্য ও তির্যক তরঙ্গ কাকে বলে?
13. একটি সরল দোলীয় সমতল চলতরঙ্গের সমীকরণ লিখুন।
14. চলতরঙ্গের অবকল সমীকরণটি লিখুন।
15. প্রাবল্য বা তীব্রতা কাকে বলে।
16. ব্যতিচারে গঠনমূলক ও বিনাশী ব্যতিচারের শর্ত লিখুন।
17. স্থাণুতরঙ্গ বলতে কী বোঝায়?

18. স্থাণুতরঙ্গে দুটি নিকটবর্তী (i) সুস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব কত? (ii) নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব কত?

20. জড় মাধ্যমে শব্দের গতিবেগের সমীকরণটি লিখুন।

21. বায়ুর মধ্যে শব্দের গতিবেগের ল্যাপলাসের সংশোধন সহ নিউটনের সূত্রটি লিখুন।

22. উষ্ণতা স্থির থাকলে গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ চাপের উপর কী ভাবে নির্ভর করে?

23. টান করা তারে তির্যক তরঙ্গের গতিবেগের রাশিমালাটি লিখুন।

24. টান করা তারে কোন্ কোন্ সমমেল উপস্থিত থাকে?

25. শব্দের উৎস ও পর্যবেক্ষক একই দিকে সমবেগে গতিশীল হলে কম্পাঙ্কের কী পরিবর্তন হবে?

26. বেল ও ডেসিবেল কীসের একক?

(ii) সংক্ষিপ্ত উত্তরের প্রশ্ন

1. (a) সরল দোলগতি কাকে বলে? (b) সরল দোলগতির বিস্তার, দোলনকাল ও দশা ব্যাখ্যা করুন।
2. সরল দোলগতিসম্পন্ন কণার যান্ত্রিক শক্তি নির্ণয় করুন।
3. পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়াশীল সমকম্পাঙ্কের ভিন্ন দশা ও ভিন্ন বিস্তারের দুটি সরল দোলগতির উপরিপাতের ফলে লব্ধি গতির সাধারণ সমীকরণ কোন্ জ্যামিতিক চিত্রকে প্রকাশ করে? এটি কখন সরল রৈখিক হয়?
4. অবমন্দিত কম্পন কাকে বলে?
5. পরবশ কম্পন ও অনুনাদ কাকে বলে?
6. অবমন্দিত সরল দোলগতি চিত্রসহযোগে ব্যাখ্যা করুন।
7. তরঙ্গগতি বলতে কী বোঝায়?
8. তরঙ্গমুখ কাকে বলে? বহুদূরে উৎস থাকলে........
9. তরঙ্গমুখের আকার কী হবে?
10. চলতরঙ্গের একটি সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করুন।
11. চলতরঙ্গের অবকল সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করুন।
12. তরঙ্গ উপরিপাত বলতে কী বোঝায়? লব্ধি সরণ কী হয়?
13. শব্দের ব্যতিচার কাকে বলে?
14. স্বরকম্প কাকে বলে?
15. স্থাণুতরঙ্গ কাকে বলে?
16. কোনো মাধ্যমে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের বেগ কোন্ কোন্ বিষয়ের উপর নির্ভর করে?

17. বায়ুতে শব্দের বেগের উপর উষ্ণতার প্রভাব ব্যাখ্যা করুন।

18. টান করা দুপ্রান্ত আবদ্ধতারে কম্পনের কোন্ কোন্ সমমেলগুলি পাওয়া যায় ব্যাখ্যা করুন।

19. ডপলার ক্রিয়া কাকে বলে?

20. বায়ুতে শব্দের বেগের উপর ঘনত্বের প্রভাব ব্যাখ্যা করুন।

(iii) রচনাধর্মী প্রশ্ন

1. সরল দোলগতির অবকল সমীকরণটি লিখুন এবং সমাধান করুন।

2. সরল দোলগতি কাকে বলে? দেখান যে বিস্তার কম হলে সরল দোলকের গতি সরল দোলগতি।

3. সরল দোলগতিসম্পন্ন কণার স্থিতিশক্তির ও গতিশক্তি নির্ণয় করুন। দেখান যে মোট যান্ত্রিক শক্তি ধ্রুবক।

4. দুটি সমরেখ, সমকম্পাঙ্ক কিন্তু ভিন্ন বিস্তার ও ভিন্ন দশার সরল দোলগতির উপরিপাতে প্রান্তগতির রাশিমালা নির্ণয় করুন। অবস্থা বিশেষে বিভিন্ন গতি কী কী হয় ব্যাখ্যা করুন।

5. লিসাজু চিত্র কাকে বলে? দুটি কম্পাঙ্কের অনুপাত 1:1 হলে সাধারণ ভাবে লিসাজু চিত্র কেমন হবে?

6. (a) বস্তুর অবমন্দিত কম্পনের ক্ষেত্রে অবকল সমীকরণ গঠন করে এর সমাধানের রাশিমালা নির্ণয় করুন।

   (b) অবমন্দনের বিভিন্ন মানে সরণের লেখা চিত্রগুলি এঁকে দেখান।

   (c) অবমন্দিত সরল দোলনে পর্যায়কালের কী পরিবর্তন হয়।

7. (a) পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়াশীল সমকম্পাঙ্কের ভিন্ন দশা ও ভিন্ন বিস্তারের দুটি সরল দোলগতির উপরিপাতের ফলে যে লব্ধি গতি পাওয়া যায় তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

   (b) কোন্ কোন্ শর্তে এই গতি সরলরেখীয় ও বৃত্তাকার হয়?

8. (a) পরবশ কম্পনের সমীকরণ গঠন করে এর সমাধানের রাশিমালা নির্ণয় করুন।

   (b) বিস্তার অনুবাদ ব্যাখ্যা করুন।

   (c) শক্তি অনুনাদ কাকে বলে ব্যাখা করুন।

9. (a) তরঙ্গগতি বলতে কী বোঝায়? একটি সমতল সরলদোলীয় তরঙ্গের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

   (b) চলতরঙ্গের বৈশিষ্ট্যগুলি সংক্ষেপে বর্ণনা করুন।

10. (a) চলতরঙ্গের ক্ষেত্রে কণার বেগ ও তরঙ্গবেগের একটি সম্পর্ক নির্ণয় করুন।

    (b) প্রাবল্য বা তীব্রতা বলতে কী বোঝায়? প্রাবল্যের একটি রাশিমালা নির্ণয় করুন।

11. (a) শব্দের ব্যতিচারের বেলায় দুটি তরঙ্গের উপরিপাতে যে লব্ধি তরঙ্গ পাওয়া যায় তার রাশিমালা নির্ণয় করুন।

    (b) গঠনমূলক ও বিনাশী ব্যতিচারের শর্তগুলি নির্ণয় করুন।

12. (a) স্থাণুতরঙ্গ কাকে বলে? সুস্পন্দ ও নিস্পন্দ বিন্দুর অবস্থানগুলি নির্ণয় করুন।

    (b) স্থানুতরঙ্গের বৈশিষ্ট্যগুলি সংক্ষেপে ব্যাখ্যা করুন।

13. (a) স্বরকম্প কীভাবে গঠিত হয় ব্যাখ্যা করুন।

    (b) স্বরকম্প ও স্থাণুতরঙ্গের পার্থক্য কী?

14. (a) জড় মাধ্যমে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের বেগের রাশিমালা নির্ণয় করুন।

    (b) মাধ্যমটি দণ্ডের আকারে থাকলে তার মধ্যে তরঙ্গবেগের রাশিমালা নির্ণয় করুন।

15. (a) গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগের রাশিমালা নির্ণয় করুন।

    (b) এই সম্পর্কে নিউটনের সূত্রটি আলোচনা করুন।

    (c) ল্যাপলাস-এর কী সংশোধন করেছিলেন?

16. (a) টান দেওয়া তারে তির্যক তরঙ্গের রাশিমালা নির্ণয় করুন।

    (b) দুই বদ্ধপ্রান্তবিশিষ্ট টান দেওয়া তারে কী কী বিভিন্ন সমমেলগুলি পাওয়া যায় ব্যাখ্যা করুন।

17. (a) ডপলার ক্রিয়া কাকে বলে?

    (b) একটি শব্দের উৎস স্থির শ্রোতার দিকে অগ্রসর হচ্ছে, আবার স্থির উৎসের দিকে শ্রোতা একই বেগে অগ্রসর হচ্ছে। কোন্ ক্ষেত্রে কম্পাঙ্ক পরিবর্তন বেশী হবে? প্রয়োজনীয় রাশিমালা নির্ণয় করুন।

(iv) গাণিতিক প্রশ্ন

1. প্রমাণ করুন যে একটি সমপ্রস্থচ্ছেদ যুক্ত U নলে তরল আংশিক পূর্ণ করে, কোনো বাহুতে কোনো উপায়ে নলটির যে-কোনো বাহুতে তরলের তলকে নামিয়ে ছেড়ে দিলে-তরলতল সরল দোলগতিতে ওঠানামা করতে থাকবে। এর পর্যায়কাল নির্ণয় করুন।

2. একটি স্প্রিং-এর সঙ্গে যুক্ত M ভরের দোলনকাল 2 সে.। বস্তুর ভর 2kg বাড়ালে দোলনকলি 1 সে. বৃদ্ধি পায়। হুকের সূত্র মান্য হচ্ছে ধরে প্রাথমিক ভর নির্ণয় করুন।

3. একটি সরল দোলগতিযুক্ত কণার গতির সমীকরণ $x = \mathrm{A}\sin(\omega t + \phi)$। কণার প্রাথমিক সরণ 0.03m ও প্রাথমিক বেগ ধনাত্মক x -অভিমুখে 0.06 m/s হলে, দোলকের বিস্তার এবং আদি দশা নির্ণয় করুন। কণার কৌণিক কম্পাঙ্ক 2 rad/s।

4. সরল দোলগতিতে গতিশীল একটি বস্তুর দোলনকাল 12 সে. এবং বিস্তার 0.1^{m}। সর্বশেষ প্রান্ত হতে যাত্রা শুরু করলে 14 সে. পরে দশা এবং সরণ কত হবে?

5. 3×10^{-3} kg ওজনের একটি টেষ্টটিউবের ব্যাস 2.0×10^{-2} m; ওর মধ্যে 7×10^{-3} kg পারদ ঢেলে ওটিকে জলে খাড়াভাবে ভাসানো হল। টেষ্টটিউবটিকে জলের ভিতর একটু চেপে ছেড়ে দেওয়া হল। দেখান যে এর দোলন সরলদোলগতি ; ঐ দোলনের দোলনকাল কত হবে?

6. 0.01 kg ভরের কণার ওপর প্রত্যানয়ক বল 10×10^{-3} N/m এবং বাধার বল 2×10^{-3} NS/m ক্রিয়া করছে। গতিটি কি দোলনগতি হবে? বাধার বল কত হলে ক্রান্তীয় অবমন্দন হবে।

7. একটি তির্যক তরঙ্গের সমীকরণ $y = 4\times10^{-3}\sin 2\pi\left(\frac{t}{0.4}-\frac{x}{0.3}\right)m$ । তরঙ্গটির বিস্তার, তরঙ্গদৈর্ঘ্য, তরঙ্গবেগ এবং কম্পাঙ্ক নির্ণয় করুন।

8. একটি লঘু অবমন্দিত সরল দোলগতিতে বিস্তার 0.04m থেকে 0.01m কমে আসতে সময় নেয় 100s। এই সময়ের মধ্যে ব্যবস্থাটি 100টি পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করে। দোলনকাল কত?

9. 100 H_z কম্পাঙ্কে কম্পনরত একটি ব্যবস্থার 100 বার কম্পনে বিস্তার প্রাথমিক মানের $\frac{1}{10}$ অংশ হয়। তীক্ষ্ণতার মান কত?

10. শব্দের কম্পাঙ্ক 1000, বায়ুর ঘনত্ব 1.293 kg/m^3 এবং বায়ুতে শব্দের বেগ 340 m/s বায়কণার কম্পনের বিস্তার 2.14×10^{-11}m হলে শব্দ উৎসের তীব্রতা কত হবে?

11. একটি কম্পনশীল সুরশলাকা থেকে উৎপন্ন শব্দ বায়ুতে দুটি ভিন্ন পথে চলে একটি বিন্দুতে মিলিত হল। যখন পথদ্বয়ের পার্থক্য 0.12m বা 0.36m হয় তখন ঐ বিন্দুতে কোনো শব্দ শোনা যায় না। বায়ুতে শব্দের বেগ 330 m/s হলে সুরশলাকাটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় করুন।

12. হাইড্রোজেনে 200 H_z কম্পাঙ্কের একটি শব্দ-সৃষ্টি করা হল। এই তরঙ্গের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন। বায়ুতে শব্দের বেগ 340 m/s এবং বায়ুর ঘনত্ব হাইড্রোজেনের 14.4 গুণ।

13. 1.08m দীর্ঘ এবং 1kgwt টানে অবস্থিত একটি তারের মূলসুরের কম্পাঙ্ক 256; যদি টান 4kgwt করা হয় তাহলে কম্পাঙ্ক পূর্বাপেক্ষা 32 বৃদ্ধি করতে হলে তারের দৈর্ঘ্য কত পরিবর্তন করতে হবে?

14. একটি সনোমিটার তারের টান 4গুণ হলে এবং দৈর্ঘ্য অর্ধেক হলে তারটির কম্পাঙ্ক কীভবে পরিবর্তিত হবে?

15. সমদৈর্ঘ্যের তিনটি তার A,B,C সনোমিটারের উপর টান দিয়ে আটকানো আছে। এদের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভরের অনুপাত 1:4:9, টানের অনুপাত 4:4:9। তাহলে মূল কম্পাঙ্কের অনুপাত কত?

16. দুটি এঞ্জিন বিপরীত দিক থেকে এসে পরস্পরকে অতিক্রম করে চলে গেল। একটি এঞ্জিন ক্রমাগত 540 H_z এর শব্দ উৎপাদন করছিল। এঞ্জিন দুটি পরস্পরকে অতিক্রম করবার পূর্বে ও পরে অপর এঞ্জিনের চালক কত কম্পাঙ্কের শব্দ শুনতে পাবেন। প্রত্যেক এঞ্জিনের গতিবেগ = 44 m/s এবং শব্দের গতিবেগ = 332 m/s।

8.24 গাণিতিক প্রশ্নের উত্তরমালা

2. 1.6 kg

3. $a = 0.042\text{m}, \ \in = \frac{\pi}{4}$

4. $\frac{7\pi}{3}$, 0.05m

5. $3.14s$

6. দোলনগতি, $2 \times 10^{-4} \frac{\text{NS}}{\text{m}}$

7. $a = 4 \times 10^{-3}, \lambda = 0.3m, v = 0.75m/s, n = 2.5H_z$

8. $0.9999979s$

9. 1365

10. 3.97×10^{-12} w/m^2

11. 1375

12. λ=6.44m

13. 0.84m বাড়াতে হবে

14. 4 গুণ

15. 2:1:1

16. 705 H_z, 413.6 H_z

8.25 সহায়ক গ্রন্থাবলী

1. Sound - K. Bhattacharya
2. Classical Physies - Dr. A. N. Konar
3. Teach Yourself Physies - N. N. Ghosh (Bharati Bhawan)
4. স্নাতক পদার্থ বিজ্ঞান - অধ্যাপক চিত্তরঞ্জন দাশগুপ্ত
5. Study Material - Elective Physies Honours EPH03, Oscillations, Wave and Acousties. Block–1 Netaji Subhas Open University

একক 9 ❑ জ্যামিতিক আলোক বিজ্ঞান (Geometrical Optics)

গঠন

9.1 প্রস্তাবনা ও উদ্দেশ্য ঃ

প্রস্তাবনা ঃ আলোক এক প্রকার বিকীর্ণ রশ্মি যা আমাদের চোখে আপতিত হয়ে বস্তুকে দেখার অনুভূতি জাগায়। আলোক নিজে অদৃশ্য। কোনো বস্তুকে আমরা দেখতে পাই যখন ওর ওপর আপতিত আলোক প্রতিফলিত হয়ে আমাদের চোখে এসে পড়ে। কোনো মাধ্যমে এবং দুটি মাধ্যমের বিভেদতলে আলোক কী ভাবে যাওয়া আসা করে বা আলোর প্রকৃতি কী এগুলি আলোকবিজ্ঞানে আলোচনা করা হয়। আলোকবিজ্ঞানকে প্রধানত দুভাগে ভাগ করা হয়। (i) জ্যামিতিক আলোকবিজ্ঞান (geometrical optics) এবং (ii) ভৌত আলোকবিজ্ঞান। (physical optics)। কোনো মাধ্যমে আলোক সরলরেখায় যায় এবং দুটি মাধ্যমের বিভেদতলে নির্দিষ্ট নিয়ম মেনে এর প্রতিফলন ও প্রতিসরণ হয়। এদের বিভিন্ন সূত্রগুলির প্রয়োগ নিয়ে আলোচনা করা হয় জ্যামিতিক আলোকবিজ্ঞানে আর আলোকের প্রকৃতি নিয়ে আলোচনা করা হয় ভৌত আলোকবিজ্ঞানে। এই এককে আমরা জ্যামিতিক আলোক বিজ্ঞানের কয়েকটি মূল নীতি ও তার প্রয়োগ নিয়ে আলোচনা করব। একই মাধ্যমে আলোক সরলরেখায় যায় নির্দ্দিষ্ট গতিবেগে। বিভিন্ন আলোক মাধ্যমে আলোকের গতিবেগ বিভিন্ন হয়, ফলে দুটি মাধ্যমের বিভেদতলে আলোক দিক পরিবর্তন করে। আলোকের প্রতিফলন ও প্রতিসরণ নির্দিষ্ট নিয়ম মেনে হয়ে থাকে। আমরা বিভিন্ন আলোকীয় যন্ত্রে লেন্স ব্যবহার করি। আমাদের দেখার জগতের সূক্ষ্ম বিষয়গুলি আমাদের কাছে প্রতীয়মান হয়। তাই আলোকের জ্যামিতিক বিজ্ঞান আমাদের কাছে বিশেষভাবে আলোচনার দাবি রাখে।

উদ্দেশ্য ঃ এই এককে জ্যামিতিক আলোকবিজ্ঞানের কয়েকটি বিশেষ বিষয়ে আলোচনা করা হবে।

(i) প্রথমে আমরা ফের্মার নীতি নিয়ে আলোচনা করব। এর থেকে কীভাবে আলোর প্রতিফলন ও প্রতিসরণের সূত্রগুলি পাওয়া যায় তা নিয়েও আলোচনা করা হয়। পক্ষান্তরে প্রতিফলন ও প্রতিসরণের সূত্র থেকেও কীভাবে ফের্মার নীতি প্রতিষ্ঠা করা যায় তা এই আলোচনা থেকে জানতে পারবেন।

(ii) গোলীয় প্রতিসারক তলে আলোর প্রতিসরণ নিয়ে আলোচনা করা হবে। এক্ষেত্রে বস্তু দূরত্ব ও প্রতিবিম্ব দূরত্বের সম্পর্কে, প্রথম ও দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস নিয়ে আলোচনা করা হবে। নিউটনের সমীকরণটি কীভাবে প্রতিষ্ঠা করা যায় তাও আলোচনা করা হবে। প্রতিবিম্বের বিবর্ধনের রাশিমালা কী হবে জানতে পারবেন।

(iii) গোলীয় প্রতিসারক তলে আলোর প্রতিসরণের সূত্র থেকে কীভাবে লেন্স সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করা যায় তা জানতে পারবেন। মুখ্য ফোকাস, লেন্সের ক্ষমতা এবং নিউটনের সমীকরণ সম্বন্ধে জানতে পারবেন।

(iv) দুটি পাতলা লেন্স সমবায় গঠিত হলে তাদের তুল্য ফোকাস দৈর্ঘ্যের রাশিমালা কীভাবে পাওয়া যায় তা জানতে পারবেন।

(v) একটা আলোক ব্যবহারে লেন্সে গঠিত প্রতিবিম্বের বিভিন্ন ত্রুটি দেখা যায় এদের একবর্ণী অপেরণ বা আইড্ল অপেরণ বলে। এগুলির বিষয় ও এগুলি কীভাবে দূর করা যায় বা কমানো যায় তা জানতে পারবেন।

(vi) লেন্সে সাদা আলো বিভিন্ন বর্ণে বিচ্ছুরিত হয়। ফলে গঠিত প্রতিবিম্বও রঙিন হয়। এই ত্রুটিকে বর্ণাপেরণ বলে। কীভাবে এর প্রতিকার করা যায়—এককটি পড়ে তা জানতে পারবেন।

9.2 ফের্মার নীতি (Femart's Principle) :

● **আলোক পথ ঃ** বিভিন্ন মাধ্যমে আলোকের গতিবেগ বিভিন্ন হয়। মাধ্যমে সাপেক্ষে পথ বিবেচনায় আলোক পথের কথা বিবেচনা করা হয়। মনে করি t সময়ে μ চরম প্রতিসরাঙ্কের কোনো মাধ্যমে আলোক v বেগে l পথ অতিক্রম করে। শূন্য মাধ্যমে আলোর বেগ v_0 হলে ধরি ঐ t সময়ে শূন্য মাধ্যমে আলোক l_0 পথ অতিক্রম করে।

$$\therefore\ t = \frac{l}{v} = \frac{l_o}{v_o}$$

বা, $l_o = \frac{v_o}{v} \cdot l = \mu . l$

l_o কে বলে মাধ্যমে অতিক্রান্ত l দূরত্বের আলোক পথ।

$\therefore$ আলোক পথ $l_0 = \mu l$= মাধ্যমের চরম প্রতিসরাঙ্ক $\times$ ঐ মাধ্যমে অতিক্রান্ত পথ।

বহুসংখ্যক মাধ্যম পরপর থাকলে ও তাদের চরম প্রতিসরাঙ্ক যথাক্রমে $\mu_1, \mu_2, ...$ এবং ঐ মাধ্যমগুলিতে অতিক্রান্ত পথ যথাক্রমে $l_1, l_2, ...$ ইত্যাদি হলে, মোট আলোক পথ

$$l_0 = \mu_1 l_1 + \mu_2 l_2 ..... = \sum \mu l$$

বিভিন্ন মাধ্যমে অতিক্রান্ত পথগুলি অতি ক্ষুদ্র হলে

$$l_o = \int \mu dl$$

● **ফের্মার নীতি ঃ** আলোক রশ্মি এক বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে যেতে যে পথ অনুসরণ করে তা পাশের অন্যান্য পথের তুলনায় ক্ষুদ্রতম (minimum) বা বৃহত্তম (maximum) বা স্থির মানের (stationary) হয়।

অর্থাৎ এক বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে যেতে মোট আলোক পথ

$l_0 = f\mu dl$= স্থির মান

বা, $\delta f\mu dl = 0$ .... (i)

আবার ঐ পথ অতিক্রম করতে মোট সময় t হলে

$$t = \frac{l_o}{v_o} = \frac{l}{v_o}\int \mu dl$$

অতএব ফের্মার নীতি থেকে পাই $\delta\left(\frac{1}{v_o}\int \mu dl\right) = 0$ বা, $\delta t = 0$ .... (2)

অর্থাৎ আলোকরশ্মি এক বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে যেতে যে সময় নেয় তা হয় ক্ষুদ্রতম বা বৃহত্তম বা স্থির মানের। জ্যামিতিক আলোকবিজ্ঞানে ফের্মার নীতি একটি মৌলিক নীতি হিসাবে পরিগণিত হয়। আলোর সরলরৈখিক গতি আলোর গমন পথের প্রত্যাবর্তিত হওয়ার নীতি আলোর প্রতিফলন প্রতিসরণ প্রভৃতি এর সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়।

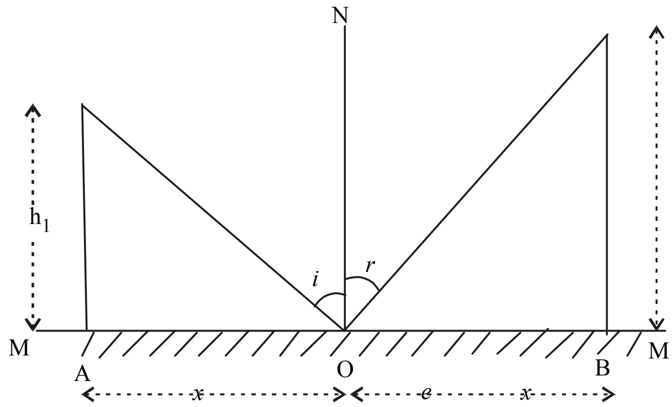
9.2.1 ফের্মার নীতির প্রয়োগ ঃ প্রতিফলন ও প্রতিসরণের সূত্র

- **ফের্মার নীতির প্রয়োগে প্রতিফলনের সূত্র ঃ**

মনে করি MM' একটি প্রতিফলক (চিত্র 9.1), P বিন্দু থেকে আলোকরশ্মি এসে O বিন্দুতে আপাতিত ও প্রতিফলিত হয়ে Q বিন্দুতে পৌঁছেছে। PO হল আপতিত রশ্মি ও OQ হল প্রতিফলিত রশ্মি। O আপতন বিন্দুতে প্রতিফলকের উপর ON অভিলম্ব। P ও Q বিন্দু থেকে MM' তলের উপর যথাক্রমে PA ও QB অভিলম্ব টানা হল।

আপতন কোণ $\angle PON = i$ প্রতিফলন কোণ $\angle NOQ = r$। ধরি PA = h_1 ও QB = h_2, AO=x এবং AB = e। অতএব OB = $e–x$, P ও Q বিন্দু দুটি নির্দিষ্ট হওয়ায় A & B বিন্দুদ্বয়ও নির্দিষ্ট।

অতএব e দূরত্বও নির্দিষ্ট। P বিন্দু থেকে Q বিন্দু পর্যন্ত আলোর পথের দূরত্ব $l = PO + OQ = \sqrt{h_1^2 + x^2} + \sqrt{h_2^2 + (e-x)^2}$



চিত্র 9·1 ফের্মার নীতি প্রয়োগ প্রতিফলনের সূত্র

ফার্মাটের নীতি অনুযায়ী l দূরত্ব ন্যূনতম। $\therefore \dfrac{dl}{dx} = 0$

বা, $\dfrac{1}{2}\left(h_1^2 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.2x - \dfrac{1}{2}\left[h_2^2 + (e-x)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.2(e-x) = 0$

বা, $\dfrac{x}{\sqrt{h_1^2 + xv}} = \dfrac{e-x}{\sqrt{h_2^2 + (e-x)^2}}$

বা, $\dfrac{AO}{PO} = \dfrac{OB}{OQ}$ বা $\sin\angle APO = \sin\angle BQO$

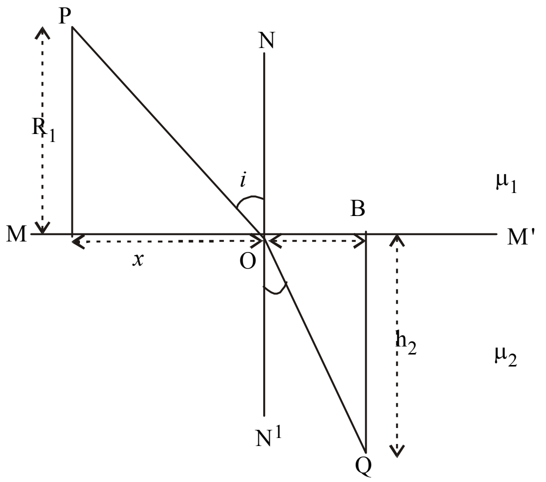
বা, $\angle APO = \angle BQO$ বা, $\angle PON = \angle NOQ$ বা, $i = r$

অতএব আপতন কোণ = প্রতিফলন কোণ, এটি প্রতিফলনের দ্বিতীয় সূত্র।

আবার (PO + OQ) ন্যূনতম হওয়ায় PO ও OQ দিয়ে অঙ্কিত সমতল MM′ প্রতিফলকের উপর লম্ব। ON রেখাও MM' প্রতিফলকের উপর লম্ব। ON রেখা তাই PO ও OQ দিয়ে অঙ্কিত সমতলেই থাকবে। অতএব আপতিত রশ্মি PO, প্রতিফলিত রশ্মি OQ ও প্রতিফলকের উপর আপতন বিন্দুতে অভিলম্ব ON একই সমতলে থাকে। এটি প্রতিফলনের প্রথম সূত্র। এভাবে ফের্মার নীতি থেকে প্রতিফলনের দুটি সূত্রই প্রতিষ্ঠা করা যায়।

● **ফের্মার নীতি থেকে প্রতিসরণের সূত্র ঃ** মনে করি MM′ দুটি মাধ্যমের বিভেদতল (চিত্র 9.2) বা প্রতিসারক তল। প্রথম মাধ্যমের P বিন্দু থেকে আলোকরশ্মি MM′ তলের উপর O বিন্দুতে আপতিত হয়েছে এবং OQ পথে প্রতিসৃত হয়ে Q বিন্দুতে পৌঁছেছে।

● O আপতন বিন্দু NON′ বিভেদতলের ওপর লম্ব, আপতন কোণ $\angle PON = i$ প্রতিসরণ কোণ $\angle N'OQ = r$। প্রথম ও দ্বিতীয় মাধ্যমের চরম প্রতিসরাঙ্ক যাথাক্রমে μ_1 ও μ_2। P ও Q বিন্দু থেকে MM′ বিভেদতলের ওপর PA ও QB লম্ব টানা হল। ধরি $PA = h_1$, $QB = h_2$, $AO = x$ ও $AB = e$, অতএব $OB = e-x$,। P ও Q বিন্দু দুটি নির্দিষ্ট হওয়ায় পাদবিন্দুদ্বয় A এবং B নির্দিষ্ট এবং এজন্য e দূরত্বও নির্দিষ্ট।



চিত্র 9·2 ফের্মার নীতি থেকে প্রতিসরণের সূত্র

P বিন্দু থেকে Q বিন্দু পর্যন্ত আলোক পথ

$$l = \mu_1 PO + \mu_2 OQ$$

$$= \mu_1\sqrt{h_1^2 + x^2} + \mu_2\sqrt{h_2^2 + (e-x)^2}$$

ফের্মার নীতি অনুসারে এই পথ ন্যূনতম বা চরম $\therefore \dfrac{dl}{dx} = 0$

বা, $\mu_1 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \mu_2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2(e-x)}{\sqrt{h_2^2 + (e-x)^2}} = 0$

বা, $\mu_1 \dfrac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \mu_2 \dfrac{e-x}{\sqrt{h_2^2 + (e-x)^2}}$

বা, $\mu_1 = \dfrac{AO}{PO} = \mu_2 \dfrac{OB}{OQ}$

বা, $\mu_1 \sin\angle APO = \mu_2 \sin\angle OQB$

বা, $\mu_1 \sin i = \mu_2 \sin r$

এটি প্রতিসরণের দ্বিতীয় সূত্র বা স্নেলের সূত্র।

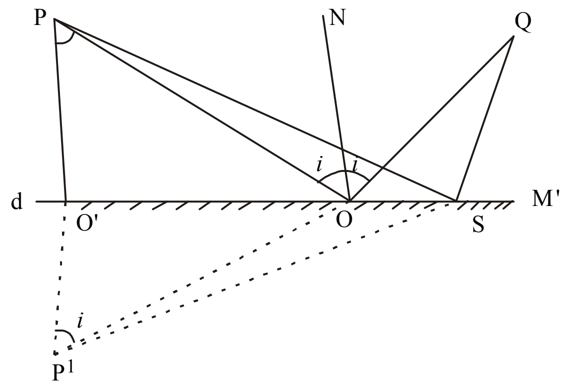
আবার (PO+OQ) ন্যূনতম হওয়ায় PO ও OQ দিয়ে অঙ্কিত সমতল MM' বিভেদতলের উপর লম্ব। NON' রেখাও MM' বিভেদতলের ওপর লম্ব। NON' রেখা তাই PO ও OQ দিয়ে অঙ্কিত সমতলেই থাকবে।

অতএব আপতিত রশ্মি PO, প্রতিসৃত রশ্মি OQ ও আপতন বিন্দুতে বিভেদতলের উপর অঙ্কিত অভিলম্ব NN' একই সমতলে থাকে। এটি প্রতিসরণের প্রথম সূত্র। এভাবে প্রতিসরণের সূত্র দুটি ফের্মার নীতির সাহায্যে প্রতিষ্ঠা করা যায়।

9.3 প্রতিফলনের ও প্রতিসরণের সূত্র থেকে ফের্মার নীতি ঃ

● **প্রতিফলনের সূত্র থেকে ফের্মার নীতি ঃ**

মনে করি MM′ একটি প্রতিফলকতল (চিত্র 9.3) P বিন্দু থেকে আগত PO আলোক রশ্মি O বিন্দুতে আপতিত হয়ে প্রতিফলনের সূত্র অনুযায়ী প্রতিফলিত হয়ে Q বিন্দুতে পৌঁছেছে। এই পথ দূরত্ব = PO + OQ। প্রতিফলকের ওপর S অপর যে কোনো একটি বিন্দু। ধরি PSQ অন্য একটি পথে আলো P থেকে S হয়ে Q বিন্দুতে পৌঁছেছে যেখানে প্রতিফলনের সূত্র মান্য হয়নি। প্রমাণ করতে হবে $(PO+OQ)<(PS+SQ)$। আপতন কোণ $\angle PON$ $\angle NOQ = i,$ QO কে বর্ধিত করলে ও P থেকে প্রতিফলকের ওপর লম্বভাবে আপতিত রশ্মি PO′ কে বর্ধিত করলে P′ বিন্দুতে মিলিত হয়। P′ হল Pএর প্রতিবিম্ব (অসদ), ∠PO′O ও ∠P′O′O বিবেচনা করলে ∠PO′O=∠P′O′O=সমকোণ, ∠O'PO=∠O′P′O=i, O'O সাধারণ বাহু। অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। সেক্ষেত্রে PO=P′O। একইভাবে প্রমাণ করা যায় PS=P′S



চিত্র 9·3 প্রতিফলনের সূত্র থেকে ফের্মার নীতি

এখন PO + OQ = P′O+OQ=P′Q.

Δ P'SQ বিবেচনা করলে

P'Q < (P'S+SQ)

বা (PO+OQ) < (PS+SQ)

আমরা ধরেছি প্রতিফলকের উপর S যে কোনো বিন্দু, যেখানে আপতিত হলে প্রতিফলনের সূত্র কার্যকরী হয় না। অতএব S এর O ভিন্ন যে কোনো অবস্থানে প্রমাণ করা যায় (PS+SQ)>(PO+OQ) অতএব (PQ+OQ) পথই হবে ন্যূনতম। এভাবে প্রতিফলনের সূত্র থেকে ফের্মার নীতি পাওয়া যায়।

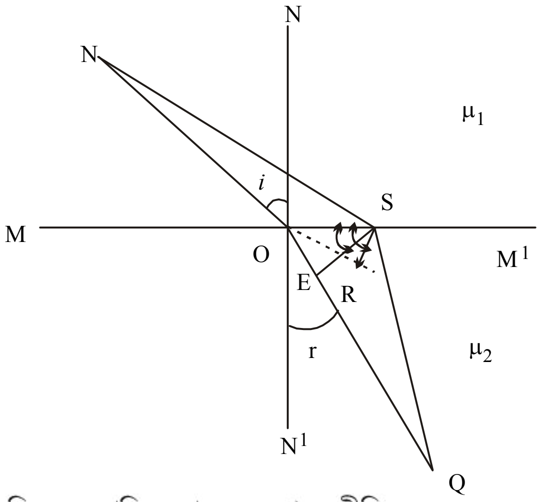
● **প্রতিসরণের সূত্র থেকে ফের্মার নীতি ঃ**

মনে করি μ_1 ও μ_2 প্রতিসরাঙ্কের দুটি মাধ্যমের বিভেদতল MM′ (চিত্র 9·4)। PO আলোকরশ্মি μ_1

প্রতিসরাঙ্কের প্রথম মাধ্যম থেকে μ_2 প্রতিসরাঙ্কের দ্বিতীয় মাধ্যমে যাওয়ার সময় দুটি মাধ্যমের বিভেদতলে O বিন্দু দিয়ে প্রতিসরণের সূত্র মেনে প্রতিসৃত হয়ে Q বিন্দুতে পৌঁছেছে। আপতন কোণ ও প্রতিসরণ কোণ যথাক্রমে i ও r। P বিন্দু থেকে Q পর্যন্ত আলোক পথ = $\mu_1 PO + \mu_2 OQ$ ফের্মার নীতি অনুযায়ী এই পথ ন্যূনতম। ধরি প্রতিসরণের সূত্র মান্য না করে বিভেদ তল MM', এর উপর S অন্য একটি বিন্দু দিয়ে P থেকে আলোক রশ্মি Q তে পৌঁছায়।

এই সময় আলোক পথ $= \mu_1 PS + \mu_2 SQ$ । প্রমাণ করতে হবে $(\mu_1 PO + \mu_2 OQ) < (\mu_1 PS + \mu_2 SQ)$

S বিন্দু থেকে OQ এর ওপর SE ও PO কে বর্ধিত করে তার ওপর SR লম্ব টানা হল। সহজে প্রমাণ করা যায় $\angle SOE = r$ ও $\angle OSR = i$



চিত্র 9·4 প্রতিসরণের সূত্র থেকে নীতি

স্নেলের সূত্রানুযায়ী $\dfrac{\sin i}{\sin r} = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}$

Δ OSR ও ΔOSE বিবেচনা করলে উপরের সমীকরণকে লেখা যায়

$$\frac{OR}{OS} / \frac{OE}{OS} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

বা, μ_1 OR = μ_2 OE .... (3)

প্রতিসরণের সূত্র মেনে প্রতিসরণের জন্য আলোকপথ

$$\begin{aligned}\mu_1 PO + \mu_2 OQ &= \mu_1 PO + \mu_2 (OE + EQ)\\ &= \mu_1 PO + \mu_2 OE + \mu_2 EQ\\ &= \mu_1 PO + \mu_1 OR + \mu_2 EQ \quad \text{(সমীকরণ (3) ব্যবহার করে)}\\ &= \mu_1 (PO + OR) + \mu_2 EQ\\ &= \mu_1 PR + \mu_2 EQ\end{aligned}$$

বিকল্প আলোকপথ = $\mu_1 PS + \mu_2 SQ$

ΔPRS ও ΔSQE দুটি সমকোণী ত্রিভুজে PS ও SQ অতিভূজ

অতএব, PR<PS ও EQ < SQ

বা, $(\mu_1 PR + \mu_2 EQ) < (\mu_1 PS + \mu_2 SQ)$

বা, $(\mu_1 PO + \mu_2 OQ) < (\mu_1 PS + \mu_2 SQ)$

প্রতিসারক তলের ওপর S যে কোনো বিন্দু যেখানে আলোক আপতিত হলে প্রতিসরণের সূত্র মান্য হয় না। প্রতি ক্ষেত্রেই দেখানো যায় প্রতিসরণের সূত্র মেনে আলোকপথ $(\mu_1 PO + \mu_2 OQ)$ ই ন্যূনতম হবে। প্রতিসরণের সূত্র থেকে ফের্মার নীতি এভাবে প্রতিষ্ঠা করা যায়।

9.4 গোলীয় তলে আলোর প্রতিসরণ (Refraction of Light at Spherical Surface)

গোলীয় তলে বা লেন্সের প্রতিসরণের ক্ষেত্রে আমরা উপাক্ষীয় (paraxial)—(অর্থাৎ প্রধান অক্ষের কাছাকাছি সমান্তরাল রশ্মিগুচ্ছ) রশ্মি নিয়ে আলোচনা করব। প্রথমে আমরা যে চিহ্নপ্রথা অনুসরণ করব সেটি জেনে নেবো।

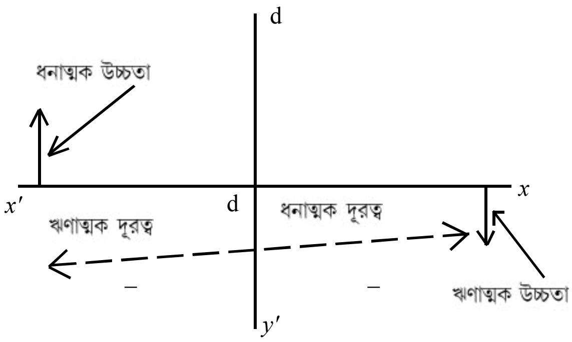
- চিহ্নপ্রথা (sign convention) :

বক্রতল, লেন্স ইত্যাদিতে প্রতিবিম্ব দূরত্ব, বক্রতা ব্যাসার্ধ, ফোকাস দূরত্ব ইত্যাদি পরিমাপে নতুন কার্তেজীয় চিহ্নপ্রথা (new cartesion sign convention) অনুসরণ করা হবে। এই নিয়ম নিম্নরূপ।

(i) আলোকরশ্মি সব সময় বাম দিক থেকে আপতিত হবে।

(ii) মূল বিন্দু থেকে ডান দিকে সমস্ত দূরত্ব ধনাত্মক ও বামদিকে ঋণাত্মক (চিত্র 9.5)।

(iii) অক্ষের অভিলম্বের উপরের দিকের উচ্চতা ধনাত্মক এবং নিচের দিকের উচ্চতা ঋণাত্মক।



চিত্র 9·5 নতুন কার্টেজীয় চিহ্ন প্রথা

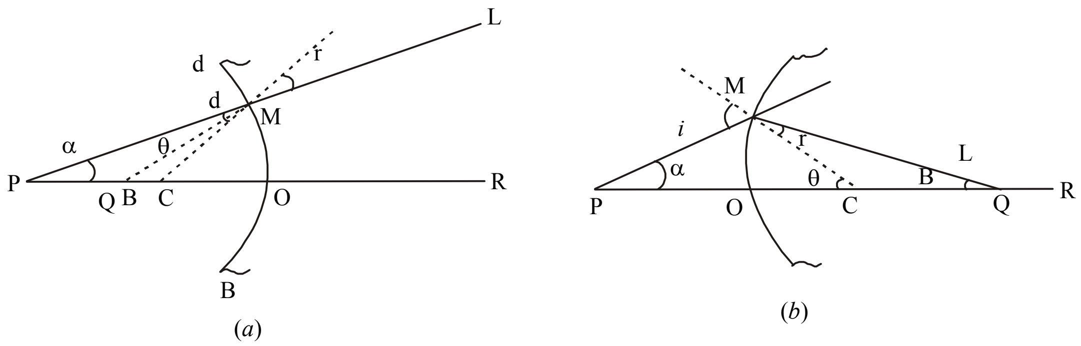
(iv) কোনো রশ্মি অক্ষের সঙ্গে যে কোণ করে তা ধনাত্মক হবে যদি অক্ষকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিয়ে আলোক রশ্মির সঙ্গে মিলানো যায়। বিপরীত দিকে অর্থাৎ ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে ঘুরাতে হলে কোণ হবে ঋণাত্মক।

(v) কোনো তলের উপর অভিলম্বের সঙ্গে আলোক রশ্মির কোণ ধণাত্মক হবে যদি অভিলম্বকে ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে ঘুরিয়ে আলোকরশ্মির উপর আনা যায়। বিপরীতক্রমে হবে ঋণাত্মক।

- **গোলীয় তলে আলোর প্রতিসরণ**

ধরি μ_1 ও μ_2 প্রতিসরাঙ্কের দুটি মাধ্যমের মধ্যে AB একটি গোলীয় বিভেদতল ($\mu_2>\mu_1$)। গোলীয় তলের যে অংশে আলো আপতিত হতে পারে তাকে বলে তলের উন্মেষ এবং উন্মেষের মধ্য বিন্দুকে মেরু বলা হয়। বক্রতা কেন্দ্র ও মেরুগামী সরলরেখা হল প্রধান অক্ষ। POR প্রধান অক্ষ এবং O হল মেরু। P একটি বিন্দু বস্তু প্রধান অক্ষের উপর অবস্থান করছে। PM একটি আলোকরশ্মি বিভেদতলের M বিন্দুতে আপতিত হয়ে ML পথে প্রতিসৃত হয়েছে। 9·6(a) চিত্রে বিভেদতল গোলীয় অবতল ও 9·6(b) চিত্রে বিভেদতল গোলীয় উত্তল। C হল বক্রতা কেন্দ্র। অবতল বিভেদতলের ক্ষেত্রে প্রতিসৃত রশ্মি প্রধান অক্ষ থেকে দূরে সরে যায় ও উত্তল বিভেদতলে প্রতিসৃত রশ্মি প্রধান অক্ষের দিকে বেঁকে আসে। আপতন কোণ = i ও প্রতিসরণ কোণ = r। অপর

একটি আলোরকরশ্মি PO অক্ষ বরাবর আপতিত হয়ে অক্ষ বরাবর OR পথে নির্গত হয়। 9·6(a) চিত্রে ML রশ্মিকে বিপরীতদিকে বর্ধিত করলে POR রশ্মির সঙ্গে Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে এবং 9·6 (b) চিত্রে ML রশ্মি POR রশ্মির সঙ্গে Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। 9·6(a) চিত্রে Q হল অসদবিম্ব ও 9·6(b) চিত্রে Q হল সদবিম্ব। আমরা মেরু O -কে মূল বিন্দু ধরে সমস্ত দৈর্ঘ্য পরিমাপ করব।



চিত্র 9·6 গোলীয় তলে আলোর প্রতিসরণ

স্নেলের সূত্রানুসারে $\mu_1 \sin i = \mu_2 \sin r$

ধরি $\angle PCM = \theta$

উপরের সমীকরণকে $\sin\theta$ দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\mu_1 \frac{\sin i}{\sin\theta} = \mu_2 \frac{\sin r}{\sin\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

(A) অবতল তলের ক্ষেত্রে

ΔPMC ও ΔQMC ত্রিভুজদুটি থেকে পাই

$$\frac{\sin i}{\sin\theta} = \frac{CP}{MP} \quad ও \quad \frac{\sin r}{\sin\theta} = \frac{CQ}{MQ}$$

সমীকরণ (4) এ এই মানগুলি বসিয়ে পাই,

$$\mu_1\left(\frac{CP}{MP}\right) = \mu_2\left(\frac{CQ}{MQ}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

PM রশ্মিকে উপক্ষীয় (প্রধান অক্ষের বেশ কাছে) ধরলে,

$MP \simeq OP$ ও $MP \simeq OQ$

$$\mu_1\left(\frac{CP}{OP}\right) = \mu_2\left(\frac{CQ}{OQ}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

এখন, OP = বস্তুদূরত্ব $= -u$

OQ = প্রতিবিম্বদূরত্ব = $-v$

OC = বক্রতা ব্যাসার্ধ = $-r$

উপরের সমীকরণকে লেখা যায়

$$\mu_1\left(\frac{OP-OC}{OP}\right)=\mu_2\left(\frac{OQ-OC}{OQ}\right)$$

বা, $\mu_1\left(\frac{-u+r}{-u}\right)=\mu_2\left(\frac{-v+r}{-v}\right)$

বা, $\mu_1\left(1-\frac{r}{u}\right)=\mu_2\left(1-\frac{r}{v}\right)$

বা, $\frac{\mu_2}{v}-\frac{\mu_1}{u}=\frac{\mu_2-\mu_1}{r}$ .... (7)

(B) উত্তল তলের ক্ষেত্রে

Δ PMC থেকে পাই, $\frac{\sin(180^\circ-i)}{\sin\theta}=\frac{CP}{MP}$

বা, $\frac{\sin i}{\sin\theta}=\frac{CP}{MP}$

Δ QMC থেকে পাই, $\frac{\sin r}{\sin(180^\circ-\theta)}=\frac{CQ}{MQ}$

বা, $\frac{\sin r}{\sin\theta}=\frac{CQ}{MQ}$

সমীকরণ (4) এ এই মান বসিয়ে পাই

$$\mu_1\left(\frac{CP}{MP}\right)=\mu_2\left(\frac{CQ}{MQ}\right) \quad .... (8)$$

PM রশ্মি উপাক্ষীয় বলে, M বিন্দু O বিন্দুর খুব কাছে আছে,

$\therefore$ $MP\simeq OP$ ও $MQ\simeq OQ$

8 নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\mu_1\left(\frac{CP}{OP}\right)=\mu_2\left(\frac{CQ}{OQ}\right) \quad .... (9)$$

এখন, OP = বস্তুদূরত্ব = $-u$

OQ = প্রতিবিম্বদূরত্ব = v

OC = বক্রতা ব্যাসার্ধ = r

উপরের সমীকরণ থেকে

$$\mu_1\left(\frac{OP+OC}{OP}\right)=\mu_2\left(\frac{OQ-OC}{OQ}\right)$$

বা, $\mu_1\left(\frac{-u+r}{-u}\right)=\mu_2\left(\frac{v-r}{v}\right)$

বা, $\mu_1\left(1-\frac{r}{u}\right)=\mu_2\left(1-\frac{r}{v}\right)$

বা, $\frac{\mu_2}{v}-\frac{\mu_1}{u}=\frac{\mu_2-\mu_1}{r}$ .... (10)

সমীকরণ (7) ও (10) অভিন্ন। এই সমীকরণ হল গোলীয়তলে প্রতিসরণে অনুবন্ধী ফোকাসদ্বয়ের (conjugate focii) সম্পর্ক। একে গোলীয়তলে প্রতিসরণে গসের (Gauss's) সমীকরণ বলে।

বস্তুকে সদ ধরে আমরা এই সমীকরণ পেয়েছি। তেমনি বস্তু অসদ ধরেও একই সমীকরণ পাওয়া যায়।

- **বিশেষ ক্ষেত্রে**

(i) প্রথম মাধ্যমে বায়ু হলে $\mu_1=1$। ধরি দ্বিতীয় মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক $\mu_2=\mu$।

$\therefore \frac{\mu}{v}-\frac{1}{u}=\frac{\mu-1}{r}$ .... (11)

সমীকরণ (10) বা (11) জ্যামিতিক আলোকবিজ্ঞানে খুবই গুরুত্বপূর্ণ। এই সমীকরণকে মৌলিক উপাক্ষীয় সমীকরণ (fundamental paraxial equation) বলা হয়।

(ii) প্রতিসারক তল সমতল হলে, $r=\alpha$ তখন

$\frac{\mu_2}{v}=\frac{\mu_1}{u}$। এই সম্পর্কটি সমতলে লম্বভাবে আপতিত রশ্মির ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

লেন্সের ক্ষেত্রে দুটি বক্রতল থাকে। সমীকরণ (10) ব্যবহার করে লেন্সের সমীকরণ নির্ণয় করা যায়।

প্রতিসারক তলের ক্ষমতা ঃ $\frac{\mu_2-\mu_1}{r}$ রাশিকে বলা হয় প্রতসারক তলের ক্ষমতা (P)

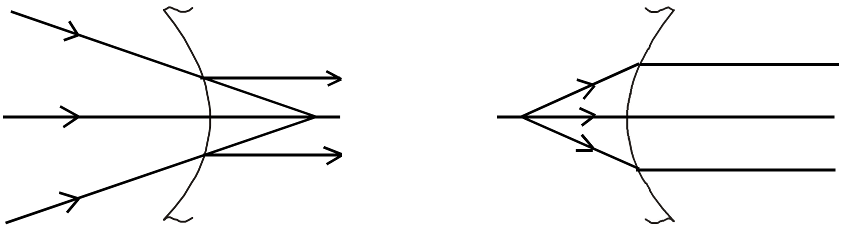
অতএবং ক্ষমতা $P=\frac{\mu_2-\mu_1}{r}=\frac{\mu_2}{v}-\frac{\mu_1}{u}$ .... (12)

r বা v ও u কে মিটার (m) এককে প্রকাশ করলে P এর একক কে বলা হয় ডায়প্টার (dioptre)।

9.5 গোলীয় প্রতিসারক তলের প্রথম ও দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস (1st and 2nd Principal Foci of a Spehrical Refracting Surface) :

(A) **প্রথম মুখ্য ফোকাস ঃ** গোলীয়তলের প্রধান অক্ষের ওপর অবস্থিত কোনো বিন্দুর দিকে অভিসারী রশ্মিগুচ্ছ

(অবতল গোলীয়তলের ক্ষেত্রে) অথবা প্রধান অক্ষের ওপর অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে অপসারী রশ্মিগুচ্ছ (উত্তল গোলীয়তলের ক্ষেত্রে) প্রতিসরণের পর প্রধান অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল হলে, প্রধান অক্ষের ওপর অবস্থিত ঐ বিন্দুকে প্রথম মুখ্য ফোকাস (first principal focus) বলে। মেরু থেকে ঐ বিন্দুর দূরত্বকে প্রথম মুখ্য ফোকাস দৈর্ঘ্য বলে। প্রথম মুখ্য ফোকাস F_1 ও মেরু O হলে, প্রথম মুখ্য ফেকাস দৈর্ঘ্য $OF_1 = f_1$ (চিত্র 9·7)



(*a*) অবতল তল (*b*) উত্তল তল

চিত্র 9·7 প্রথম মুখ্য ফোকাস

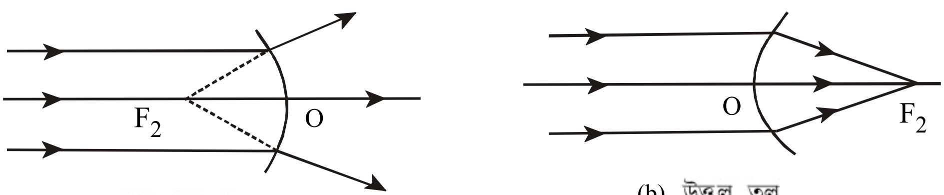
অর্থাৎ $u = f_1$, $v = \alpha$

$\therefore \dfrac{\mu_2}{\alpha} - \dfrac{\mu_1}{f_1} = \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{r}$ [10 নং সমীকরণ থেকে]

বা, $f_1 = \dfrac{-\mu_1 r}{\mu_2 - \mu_1}$ .... (13)

অবতল তলের ক্ষেত্রে r ঋণাত্মক হওয়ায় f_1 হয় ধনাত্মক; অর্থাৎ মেরুর ডানদিকে হবে মুখ্য ফোকাস F_1 এবং উত্তল তলের ক্ষেত্রে r ধনাত্মক হওয়ায় f_1 হয় ঋণাত্মক; অর্থাৎ মেরুর বামদিকে হবে প্রথম মুখ্য ফেকাস।

(B) **দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস ঃ** গোলীয়তলের প্রধান অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল রশ্মিগুচ্ছ প্রতিসরণের পর প্রধান অক্ষের ওপর অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে অপসৃত হচ্ছে বলে মনে হয় (অবতল তল) অথবা প্রধান অক্ষের ওপর অবস্থিত কোনো বিন্দুতে মিলিত হয় (উত্তল তল), তখন প্রধান অক্ষের ওপর অবস্থিত ঐ বিন্দুকে দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস (second principal focus) বলে। মেরু থেকে ঐ বিন্দুর দূরত্বকে



(a) অবতল তল (b) উত্তল তল

চিত্র 9.10 দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস

দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস দৈর্ঘ্য বলে। 9.10 চিত্রে F_2 হল দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস ও OF = f_2 = দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস দৈর্ঘ্য।

এক্ষেত্রে $u = \propto, \ v = f_2$

$$\therefore \ \frac{\mu_2}{f_2} - \frac{\mu_1}{\propto} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{r}$$ [10 নং সমীকরণ থেকে]

$$\text{বা, } f_2 = \frac{\mu_2 r}{\mu_2 - \mu_1} \quad \ldots \quad \ldots. \quad \ldots (14)$$

অবতল তলের ক্ষেত্রে r ঋণাত্মক হওয়ায় f_1 ঋণাত্মক এবং উত্তল তলের ক্ষেত্রে r ধনাত্মক হওয়ায় f_2 ধনাত্মক। (13) ও (14) সমীকরণ থেকে পাই,

$$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{\mu_1}{\mu_2}$$

আবার (10) নং সমীকরণ হল

$$\frac{\mu_2}{v} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{r}$$

$$\text{বা, } \frac{\mu_2 r}{\mu_2 - \mu_1} \cdot \frac{1}{v} - \frac{\mu_1 r}{\mu_2 - \mu_1} \cdot \frac{1}{u} = 1$$

$$\text{বা, } \frac{f_2}{v} + \frac{f_1}{u} = 1 \ \ldots \ \ldots \ (15)$$

9.6 গোলীয় তলের মুখ্য ফোকাস-বিন্দুদ্বয়কে মূল বিন্দু ধরে অনুবন্ধী ফোকাসদ্বয়ের সম্পর্ক : নিউটনের সমীকরণ ঃ

সমীকরণ, (15) থেকে

$uv - uf_2 - vf_1 = 0$

বা, $uv - uf_2 - vf_1 + f_1 f_2 = f_1 f_2$ [দুদিকে $f_1 f_2$ যোগ করে]

বা, $u(v - f_2) - f_1(v - f_2) = f_1 f_2$

বা, $(u - f_1)(v - f_2) = f_1 f_2$

ধরি প্রথম মুখ্য ফোকাস থেকে বস্তুদূরত্ব = U ও দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস থেকে প্রতিবিম্ব দূরত্ব = V_1

$\therefore \ u - f_1 = U$ ও $v - f_2 = V$

$\therefore\ UV = f_1 f_2 \qquad \ldots \qquad \ldots (16)$

এটিই হল প্রয়োজনীয় সম্পর্ক। এই সমীকরণকে নিউটনের সমীকরণ বলে।

9.6.1.জ্যামিতিক পদ্ধতিতে গোলীয়তলে প্রতিসরণে বিস্তৃত বস্তুর প্রতিবিম্ব গঠন ও তার বিবর্ধন নির্ণয় (Geometrical construction of the image of an extended object due to refraction in spherical surfaces and to find its magnification)

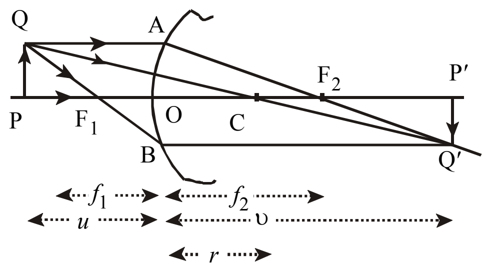
জ্যামিতিক পদ্ধতিতে গোলীয়তলে প্রতিসরণে কোনো বিস্তৃত বস্তুর প্রতিবিম্ব পেতে হলে বস্তুর কোনো বিন্দু থেকে আগত নিম্নলিখিত তিনটি রশ্মির মধ্যে যে কোনো দুটির গতিপথ অঙ্কন করতে হবে। এই তিনটি রশ্মির গতিপথ নির্দিষ্ট বলে এগুলি বিবেচনা করা হয়। অবশ্য প্রধান অক্ষের ওপর অবস্থিত বস্তু বিন্দুর প্রতিবিম্বের জন্য প্রধান অক্ষ বরাবর একটি রশ্মি বিবেচনা করা হয়।

(i) প্রতিসারক তলের বক্রতা কেন্দ্র অভিমুখী রশ্মি যা কোনো বিচ্যুতি ছাড়াই প্রতিসৃত হয়।

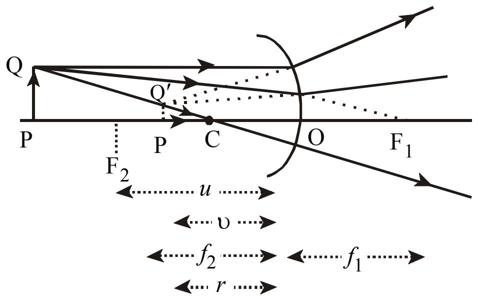
(ii) প্রধান অক্ষের সমান্তরাল রশ্মি যা (a) উত্তল গোলীয়তলে প্রতিসৃত হয়ে দ্বিতীয় ফোকাস বিন্দু দিয়ে যায়, বা (b) অবতল গোলীয়তলে প্রতিসৃত হয়ে দ্বিতীয় ফোকাস বিন্দু থেকে নির্গত হয় বলে মনে হয়।

(iii) প্রথম ফোকাস বিন্দুর মধ্য দিয়ে উত্তল গোলীয়তলে আপতিত রশ্মি বা ঐ বিন্দু অভিমুখে অবতল গোলীয়তলে আপতিত রশ্মি যা প্রতিসরণের পর প্রধান অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল হয়।

9.11 চিত্রে উত্তল ও অবতল গোলীয় প্রতিসারক তলে প্রতিবিম্ব গঠন দেখানো হয়েছে। প্রধান অক্ষের সঙ্গে লম্বভাবে অবস্থিত PQ বস্তুর প্রতিবিম্ব P′Q′ গঠিত হয়েছে। Q বিন্দু থেকে উপরে উল্লিখিত তিনটি আলোক-রশ্মি দেখানো হয়েছে। যে কোনো দুটি আলোকরশ্মির সাহায্যে এই প্রতিবিম্ব অঙ্কন করা যায়। এখানে উত্তল তলের ক্ষেত্রে প্রতিবিম্ব সদ ও অবতল তলের ক্ষেত্র প্রতিবিম্ব অসদ হয়েছে।



(a) উত্তলগোলীয় তল



(b) অবতলগোলীয় তল

চিত্র 9.11 গোলীয় প্রতিসারক তলে বিস্তৃত বস্তুর প্রতিবিম্ব

● **রৈখিক বা পার্শ্বীয় বিবর্ধন (Lateral or transverse magnification)**

মনে করি বস্তু ও প্রতিবিম্বের উচ্চতা যথাক্রমে y_1ও y_2।

উত্তল তলের ক্ষেত্র রৈখিক বিবর্ধন $m = \frac{y_2}{y_1} = \frac{-P'Q'}{PQ}$

$$= -\frac{CP'}{CP} = -\frac{v-r}{-u+r}$$

বা, $m = \frac{v-r}{u-r}$ ... . (i)

অবতল তলের ক্ষেত্রে

$$m = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{CP'}{CP} = \frac{-v+r}{-u+r} = \frac{v-r}{u-r} \quad \ldots \quad \ldots \text{(ii)}$$

আবার গোলীয় তলে প্রতিসরণের ক্ষেত্রে

$$\frac{\mu_2}{v} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{r}$$

বা, $\mu_1\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{u}\right) = \mu_2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{v}\right)$

বা, $\frac{\mu_1(u-r)}{ru} = \frac{\mu_2(v-r)}{rv}$

বা, $\frac{v-r}{u-r} = \frac{\mu_1 v}{\mu_2 u}$

$$\therefore \ m = \frac{\frac{v}{\mu_2}}{\frac{u}{\mu_1}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \text{(iii)}$$

● **কৌণিক বিবর্ধন (Angular magnification) :**

(9.6) চিত্র বিবেচনা করলে, কৌণিক বিবর্ধন

$$m_a = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{OM/-u}{OM/-v} = \frac{u}{v} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{1}{m} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{y_1}{y_2}$$

$$\therefore \ \mu_1 y_1 \alpha = \mu_2 y_2 \beta \quad \ldots \quad \ldots \text{(iv)}$$

অর্থাৎ গোলীয় তলে প্রতিসরণের ক্ষেত্রে myα গুণফল স্থির থাকে। এই সমীকরণকে উপাক্ষীয় রশ্মির ক্ষেত্রে হেল্‌মহোলৎস্ লাগ্রান্‌য্-এর (Helmholtz-Lagrange's) সমীকরণ বলে।

● **অনুদৈর্ঘ্য বা অক্ষীয় বিবর্ধন (Longitudiual or axial magnification) :**

প্রধান অক্ষের সমান্তরাল দিকে বিবর্ধনকে অনুদৈর্ঘ্য বা অক্ষীয় বিবর্ধন বলে।

অনুদৈর্ঘ্য বিবর্ধন, $l = \frac{dv}{du}$ যেখানে dv = প্রতিবিম্বের বেধ, du = বস্তুর বেধ

আবার $\frac{\mu_2}{v} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{r}$

অবকল করে,

$$-\mu_2 \frac{dv}{v_2} + \mu_1 \frac{du}{u_2} = 0$$

$$\text{বা, } \mu_2 \frac{dv}{v_2} = \mu_1 \frac{du}{u_2}$$

$$\text{বা, } \frac{dv}{du} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{v_2}{u_2}$$

$$\therefore\ l = \frac{dv}{du} = \left(\frac{\mu_1 v}{\mu_2 u}\right)^2 \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} = m^2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad \ldots \ldots \text{(v)}$$

ডানদিকের রাশিটি ধনাত্মক হওয়ায় অনুদৈর্ঘ্য বিবর্ধন সবসময়েই ধনাত্মক হয়, অর্থাৎ বস্তুর অবস্থানের কোনোদিকে সরণ হলে, একইদিকে প্রতিবিম্বের অবস্থানেরও সরণ হয়।

উপরের সমীকরণ থেকে দেখা যায় রৈখিক ও অনুদৈর্ঘ্য বিবর্ধন সমান নয়। তাই প্রতিবিম্বের ত্রিমাত্রিক আকার বস্তুর আকারের অনুরূপ হয় না।

9.7 লেন্স (Lens) ঃ

কোনো স্বচ্ছ আলোক মাধ্যমের একটি সীমিত অংশকে যদি এমন দুটি প্রতিসারক তল দ্বারা আবদ্ধ করা হয় যার অন্তত একটি তল গোলীয় বা বেলনাকার—তা হলে তাকে বলে লেন্স। যদি একটি বা উভয়তল গোলীয় হয় তবে তাকে বলে গোলীয় লেন্স (spherical lens), কিন্তু যদি ঐ তল হয় বেলনাকার তবে তাকে বলে বেলনাকার লেন্স (cylindrical lens)। এই উভয় প্রকার লেন্সকে দুটি প্রধান শ্রেণিতে ভাগ করা হয় ঃ উত্তল লেন্স (convex lens) এবং অবতল লেন্স (concave lens).

উত্তল লেন্স : যদি প্রতিসারক লেন্সের তলদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করে তবে তাকে বলে উত্তল লেন্স [চিত্র 9.11(a)]।

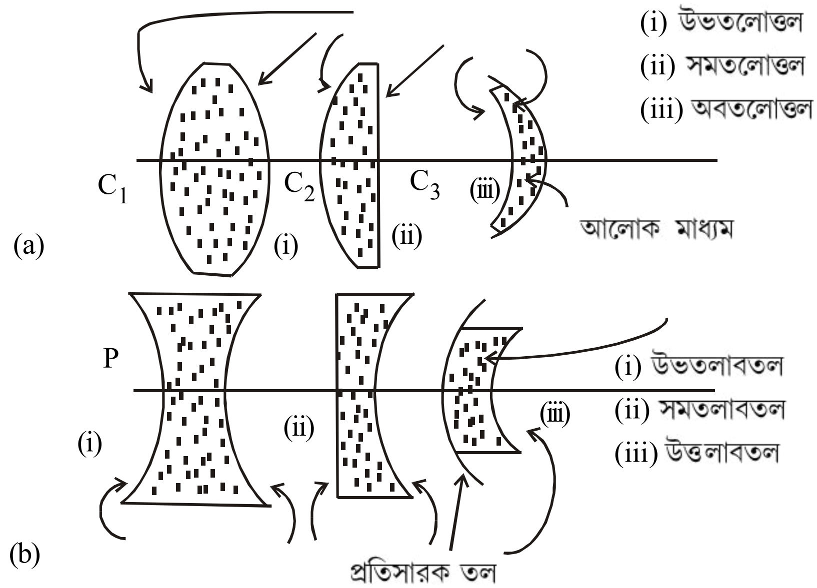
অবতল লেন্স : লেন্সের প্রতিসারক তলদ্বয় যদি পরস্পরকে ছেদ না করে তবে তাকে বলে অবতল লেন্স [চিত্র 9.11(b)]।

এই উভয় শ্রেণির লেন্স আবার তিন প্রকারের :

উত্তল লেন্স : উভতলোত্তল (double convex) সমতলোত্তল (plano-convex) এবং অবতলোত্তল (concavo-convex)।

অবতল লেন্স : উভতলাবতল (double concave) সমতলাবতল (plano-concave) এবং উত্তলাবতল convexo-concave)। [চিত্র 9.11]।

উভতলোত্তল ও উভতলাবতল লেন্সদ্বয়ের প্রতিসারক তলদ্বয়ের ব্যাসার্ধ সমান হলে তাদের যথাক্রমে সমোত্তল ও সমাবতল (equiconvex and equiconcave) লেন্স বলে।



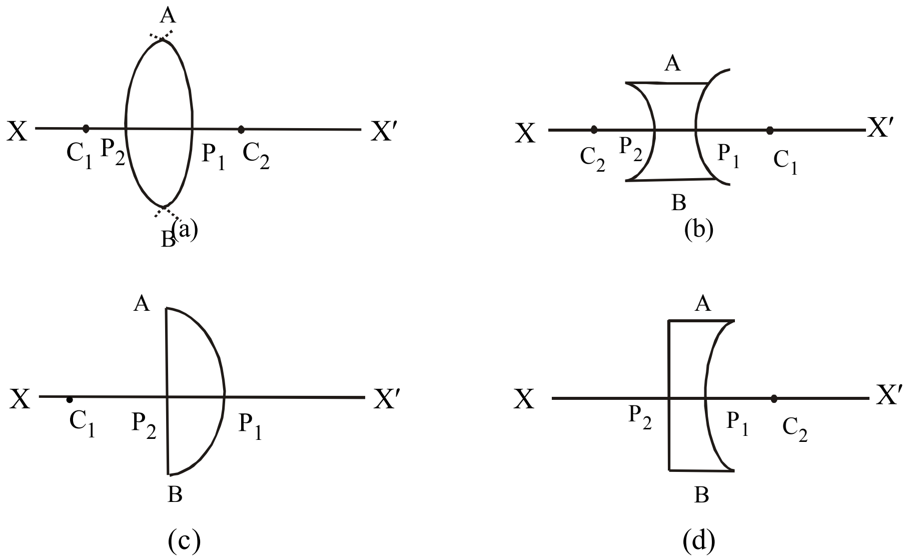
চিত্র-9.11 লেন্স

অবতল লেন্সও তিন প্রকারের হতে পারে [চিত্র 9.11 (c)]

(i) উভাবতল (double concave) (ii) সমতলাবতল (plano-concave) (iii) উত্তলাবতল (concave meniscus বা convexo concave)

● **কয়েকটি সংজ্ঞা**

(i) **প্রধান অক্ষ** (principal focus) : লেন্সের দুটি প্রতিসারক তলের বক্রতা কেন্দ্রের মধ্য দিয়ে অঙ্কিত সরলরেখাকে প্রধান অক্ষ বলা হয়।



চিত্র 9.12 প্রধান অক্ষ

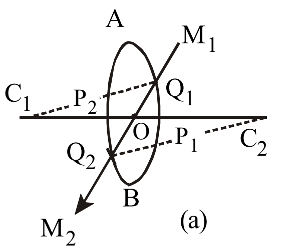
9.12 [(a), (b)] চিত্রে C_1ও C_2 যথাক্রমে AP_1B ও AP_2B দুটি প্রতিসারক তলের বক্রতা কেন্দ্র C_1 ও C_2 বিন্দু দুটির সংযোজী সরলরেখা XX′ হল প্রধান অক্ষ। সমতলোত্তল বা সমতলাবতল লেন্সে বক্রতলটির কেন্দ্র থেকে সমতলের উপর লম্ব রেখাই প্রধান অক্ষ [চিত্র 9.12 (c), (d)]।

(ii) লেন্সের বেধ (thickness of a lens): প্রধান অক্ষ বরাবর লেন্সের দুটি তলের দূরত্বই লেন্সের বেধ। চিত্র 9.12-এ P_1P_2 দূরত্ব হল লেন্সের বেধ।

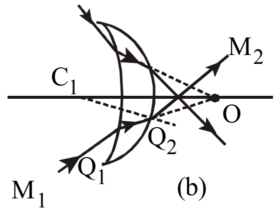
(iii) পাতলা লেন্স (thin lens) : কোনো লেন্সের বেধ যদি বস্তুদূরত্ব, প্রতিবিম্ব দূরত্ব ও দুটি বক্রতা ব্যাসার্ধের তুলনায় উপেক্ষনীয় হয় তবে ঐ লেন্সকে পাতলা লেন্স বলে।

(iv) উন্মেষ (aperture) : লেন্সের প্রতিসারক তলের যে বৃত্তাকার অংশ আলোর প্রতিসরণ ঘটায় তার ব্যাসকে বলে লেন্সের উন্মেষ। AB হল লেন্সের উন্মেষ।

আমরা এখানে পাতলা লেন্স ও ক্ষুদ্র উন্মেষের লেন্স নিয়ে আলোচনা করব। উন্মেষ ক্ষুদ্র হলে আপতিত ও প্রতিসৃত রশ্মিকে উপাক্ষীয় রশ্মি হিসাবে গণ্য করা যায়।



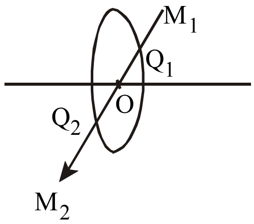
চিত্র 9.13 আলোক কেন্দ্র



(v) আলোক কেন্দ্র (optical centre) : লেন্সের উপর আপতিত ও নির্গত রশ্মি পরস্পর সমান্তরাল বলে লেন্স কর্তৃক প্রতিসৃত রশ্মি বা তার কতকাংশ প্রধান অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে বলে লেন্সের আলোক কেন্দ্র।

9.13 নং চিত্রে M_1Q_1 রশ্মি একটি লেন্সের AP_1B তলে Q_1 বিন্দুতে আপতিত হয়ে লেন্সের মধ্য দিয়ে

Q_1Q_2 পথে যায় এবং Q_2M_2 পথে দ্বিতীয়তল থেকে নির্গত হয়। নির্গত রশ্মি Q_2M_2 আপতিত রশ্মি M_1Q_1 এর সমান্তরাল। Q_1Q_2 রশ্মি প্রধান অক্ষ C_1C_2 কে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। O বিন্দু হল আলোক কেন্দ্র। M_1Q_1 ও M_2Q_2 রশ্মি দুটি সমান্তরাল হলেও এদের মধ্যে পার্শ্বসরণ হয়েছে। লেন্স পাতলা হলে এই সরণ খুব কম হয় ; তখন M_1Q_1, Q_1Q_2 ও Q_2M_2 একটি সরলরেখা বলে ধরে নেওয়া যায় (চিত্র 9.14)।



চিত্র 9.14 পাতলা লেন্সে আলোক কেন্দ্র

● **আলোক কেন্দ্র একটি স্থির বিন্দু** : 9.13 নং চিত্রে Q_1ও Q_2 বিন্দুতে একটি করে স্পর্শক তল টানা হল। যেহেতু সমান্তরাল তল যুক্ত কাচফলকে আপতিত ও নির্গত রশ্মি সমান্তরাল হয় তাই এখানে আপতিত M_1Q_1 রশ্মি ও নির্গত Q_2M_2 রশ্মি সমান্তরাল হওয়ায় ঐ দুটি স্পর্শক তল ও সমান্তরাল। C_1ও C_2 যথাক্রমে AP_1B ও AP_2B তলদুটির বক্রতা কেন্দ্র। C_1Q_1 ও C_2Q_2 দুটি ব্যাসার্ধও পরস্পর সমান্তরাল। কারণ C_1Q_1 ও C_2Q_2 যথাক্রমে Q_1 ও Q_2 বিন্দুতে দুটি সমান্তরাল স্পর্শক তলের উপর লম্ব। ধরি $C_1Q_1 = C_1P_1 = r_1$ ও $C_2Q_2 = C_2P_2 = r_2$। ΔC_1QO ও ΔC_2Q_2O দুটি সদৃশ

$$\therefore \quad \frac{C_1O}{C_2O} = \frac{C_1Q_1}{C_2Q_2} = \frac{r_1}{r_2} \qquad \dots \qquad \dots \quad (17)$$

কোনো লেন্সের বেলায় C_1ও C_2 এর অবস্থান স্থির থাকে। O বিন্দুটি C_1C_2 কে বক্রতা ব্যাসার্ধ দুটির অনুপাতে বিভক্ত করে।

সুতরাং কোনো লেন্সের আলোক কেন্দ্র O এর অবস্থানও নির্দিষ্ট।

আবার

$$\frac{C_1O}{C_2O} = \frac{C_1Q_1}{C_2Q_2} = \frac{C_1P_1}{C_2P_2}$$

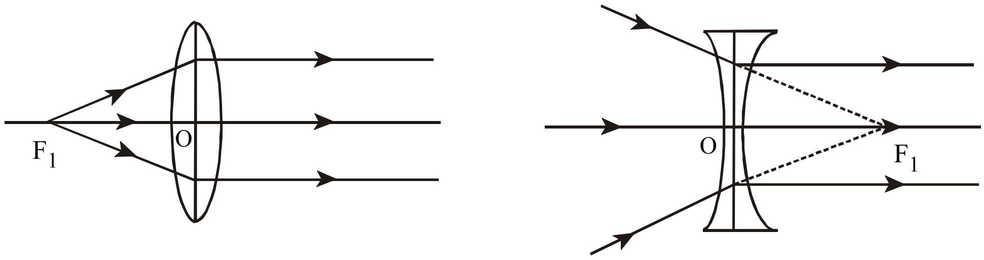
$$\therefore \quad \frac{C_1P_1}{C_2P_2} = \frac{C_1P_1 - C_1O}{C_2P_2 - C_2O} = \frac{P_1O}{P_2O}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{P_1O}{P_2O} = \frac{r_1}{r_2} \qquad \dots \qquad \dots \quad (18)$$

অতএব আলোক কেন্দ্র লেন্সের বেধকে বক্রতা ব্যাসার্ধ দুটির অনুপাতে বিভক্ত করে।

● **(vi) লেন্সের প্রথম ও দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস ও ফোকাস দৈর্ঘ্য (First and Second Principal Foci of a lens and Focal lengths) :**

(A) **প্রথম মুখ্য ফোকাস :** লেন্সের প্রধান অক্ষের ওপর অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে অপসারী রশ্মিগুচ্ছ (উত্তল লেন্সের ক্ষেত্রে)

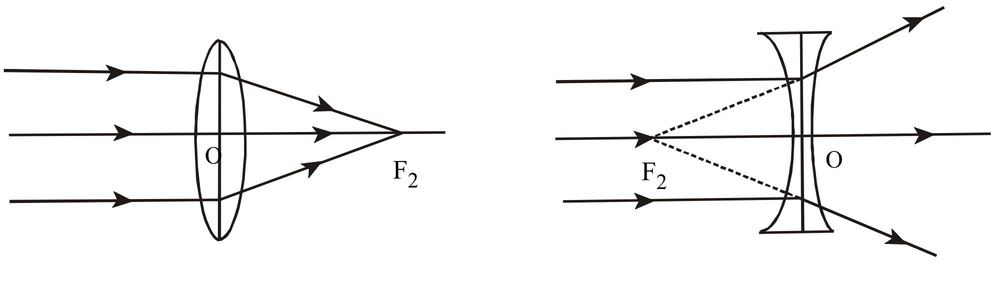


(a) উত্তল লেন্স (b) অবতল লেন্স

চিত্র 9.15. প্রথম মুখ্য ফোকাস

অথবা প্রধান অক্ষের ওপর অবস্থিত কোনো বিন্দুর দিকে অভিসারী রশ্মিগুচ্ছ (অবতল লেন্সের ক্ষেত্রে) লেন্সে প্রতিসরণের পর প্রধান অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল হলে, প্রধান অক্ষের ওপর অবস্থিত ঐ বিন্দুকে প্রথম মুখ্য ফোকাস বলে। আলোককেন্দ্র থেকে ঐ বিন্দুর দূরত্বকে প্রথম মুখ্য ফোকাসদৈর্ঘ্য বলে। চিত্র-9.15-এ F_1 প্রথম মুখ্য ফোকাস ও O আলোককেন্দ্র হলে প্রথম মুখ্য ফোকাস দৈর্ঘ্য $OF_1 = f_1$। উত্তল লেন্সের ক্ষেত্রে এটি ঋণাত্মক ও অবতল লেন্সের ক্ষেত্রে ধনাত্মক।

(B) **দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস :** লেন্সের প্রধান অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল রশ্মিগুচ্ছ লেন্সে আপতিত হয়ে লেন্সে প্রতিসরণের পর প্রধান অক্ষের ওপর অবস্থিত কোনো বিন্দুতে মিলিত হলে



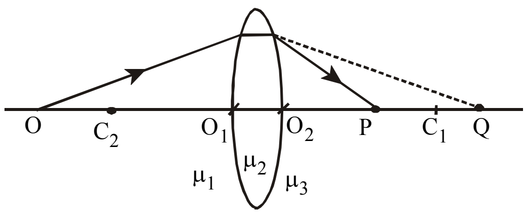
(a) উত্তল লেন্স (b) অবতল লেন্স

চিত্র 9.16 দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস

(উত্তল লেন্স) অথবা প্রধান অক্ষের ওপর অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে অপসৃত হচ্ছে বলে মনে হলে (অবতল লেন্স), প্রধান অক্ষের ওপর অবস্থিত ঐ বিন্দুকে দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস বলে। চিত্র-9.16-এ F_2 দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস ও O আলোককেন্দ্র। দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস দৈর্ঘ্য $OF_2 = f_2$। উত্তল লেন্সের ক্ষেত্রে এটি ধনাত্মক ও অবতল লেন্সের ক্ষেত্রে ঋণাত্মক।

9.8 পাতলা লেন্সের ক্ষেত্রে লেন্স সমীকরণ (Lens Equation for a Thin Lens) ঃ

মনে করুন একটি লেন্সের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক μ_2 , আপতন মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক μ_1, এবং নির্গমন মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক μ_3,। ধরি লেন্সটি উভতলোত্তল এবং বাম ও ডানদিকের পৃষ্ঠতলের বক্রতা ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1 ও r_2 (চিত্র 9.16)। $r_1 = O_1C_1$ ধনাত্মক ও $r_2 = O_2C_2$ ঋনাত্মক। O বস্তু-বিন্দু প্রধান অক্ষের উপর অবস্থিত। লেন্সের প্রথম তলে প্রতিসরণের পর যে প্রতিবিম্ব গঠিত হয় সেটি দ্বিতীয় তলের ক্ষেত্রে বস্তুর ন্যায় আচরণ করে। প্রথম তলে প্রতিসরণে O বস্তু বিন্দুর প্রতিবিম্ব হয় Q। অতএব



চিত্র 9.16 লেন্সে প্রতিসরণ

$$\frac{\mu_2}{v_1} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{r_1} \qquad \ldots \quad \ldots \; (19)$$

এখানে $u = OO_1$ = বস্তুদূরত্ব, এটি ঋণাত্মক

$v_1 = O_1Q$ = প্রতিবিম্বদূরত্ব, এটি ধনাত্মক।

লেন্সের দ্বিতীয় তলে প্রতিসরণের ক্ষেত্রে Q বিন্দু বস্তুর (অসদ্ বস্তু) মতো আচরণ করে। চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব ধরি P_1 অতএব

$$\frac{\mu_3}{v} - \frac{\mu_2}{v_1 - t} = \frac{\mu_3 - \mu_2}{r_2} \qquad \ldots \qquad \ldots \; (20)$$

এখানে $v_2 - t = O_2Q$ = বস্তু দূরত্ব

$v = O_2P$ = প্রতিবিম্বদূরত্ব

t = প্রতিসরণের স্থানে লেন্সের বেধ $\approx O_1O_2$

লেন্সের বেধ খুব কম হওয়ায় ও সমস্ত দূরত্ব আলোককেন্দ্র থেকে পরিমাপ করলে উপরের সমীকরণে f কে উপেক্ষা করা যায়। সেক্ষেত্রে,

$$\frac{\mu_3}{v} - \frac{\mu_2}{v_1} = \frac{\mu_3 - \mu_2}{r_2} \qquad \ldots \qquad \ldots . \; (21)$$

(19) ও (21) 'সমীকরণ থেকে

$$\frac{\mu_3}{v} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{r_1} + \frac{\mu_3 - \mu_2}{r_2} \qquad \ldots \qquad \ldots \; (22)$$

পাতলা লেন্সের বেলায় এটিই লেন্স সমীকরণ।

● **প্রথম ও দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস দৈর্ঘ্য** : মুখ্য ফোকাস দুটির সংজ্ঞা থেকে
$u = f_1$ (প্রথম মুখ্য ফোকাস দৈর্ঘ্য), যখন $v = \infty$
22 নং সমীকরণ থেকে,

$$-\frac{\mu_1}{f_1} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{r_1} + \frac{\mu_3 - \mu_2}{r_2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{f_1} = -\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{r_1} + \frac{\mu_3 - \mu_2}{r_2}\right) \quad \ldots \quad \ldots (23)$$

আবার $u = \infty$ হলে, $v = f_2$ (দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস দৈর্ঘ্য)

$$\therefore \quad \frac{\mu_3}{f_2} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{r_1} + \frac{\mu_3 - \mu_2}{r_2}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{\mu_3}\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{r_1} + \frac{\mu_3 - \mu_2}{r_2}\right) \quad \ldots \quad \ldots (24)$$

যদি লেন্সের দুদিকের মাধ্যমে একই হয় ও তার প্রতিসরাঙ্ক μ_1 হয়, সেক্ষেত্রে $\mu_3 = \mu_1$। অতএব,

$$\frac{1}{f_1} = -\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1}\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad \ldots \quad \ldots (25)$$

$$\text{এবং} \quad \frac{1}{f_2} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad \ldots \quad \ldots (26)$$

এক্ষেত্রে দুটি ফোকাস দৈর্ঘ্যের মান সমান। প্রতিবিম্ব গঠনে দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস কার্যকরী হয়। দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস দৈর্ঘ্যকে f লিখলে, $\frac{1}{f} = \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1}\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ ... (27)

তখন, 22 নং সমীকরণ হবে

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f} = \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1}\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad \ldots \quad \ldots (28)$$

এই সম্পর্ককে অনুবন্ধী ফোকাসদ্বয়ের সম্পর্ক বলে। কারণ আলোকের পথ প্রত্যাবর্তী বলে প্রতিবিম্বের অবস্থানে বস্তু রাখলে বস্তুর অবস্থানে প্রতিবিম্ব গঠিত হয়। একে লেন্স প্রস্তুতকারকের সূত্র (lens maker's formula) -ও বলা হয়। $\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$ ... (29)

সমীকরণটিকে গসের সমীকরণ (Gauss's equation) বলা হয়।

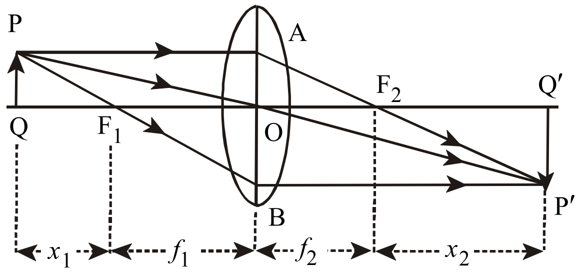
লেন্সের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক $\mu_2 = \mu$ এবং লেন্সটিকে বায়ুর মধ্যে $(\mu_1 = 1)$ বসানো হলে,

$$\frac{1}{f} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad \ldots \qquad \ldots (30)$$

সাধারণত সোডিয়াম D লাইনের প্রতিসরাঙ্ক ধরে, লেন্সের দুটি পৃষ্ঠতলের বক্রতা ব্যাসার্ধ পরিবর্তন করে বিভিন্ন ফোকাস দৈর্ঘ্যের লেন্স তৈরী করা হয়।

● **লেন্সের মুখ্য ফোকাসদ্বয়কে মূল বিন্দু ধরে অনুবন্ধী ফোকাসদ্বয়ের সম্পর্ক : নিউটনের সমীকরণ :**

AB একটি উত্তল লেন্সের (চিত্র 9.17) প্রধান অক্ষ QQ' এর উপর PQ বস্তুর সদ্‌বিম্ব P′Q গঠিত হয়েছে। P বিন্দু থেকে প্রধান অক্ষের সমান্তরাল PA রশ্মি প্রতিসৃত হয়ে দ্বিতীয় ফোকাস বিন্দু F_2-এর মধ্য দিয়ে গমন করে। PO রশ্মি আলোককেন্দ্রের মধ্য দিয়ে সোজাসুজি প্রতিসৃত হয়েছে। PB আলোক রশ্মি প্রথম ফোকাস F_1 এর মধ্য দিয়ে গিয়ে লেন্স কর্তৃক প্রতিসৃত হয়ে প্রধান অক্ষের সমান্তরালে নির্গত হয়েছে। এই নির্গত রশ্মিগুলি P′ বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। P' হল P-এর প্রতিবিম্ব।



চিত্র 9.17 মুখ্য ফোকাসদ্বয়কে মূল বিন্দু ধরে অনুবন্ধী ফোকাসদ্বয়ের সম্পর্ক।

প্রথম মুখ্য ফোকাস থেকে বস্তুদূরত্ব $F_1Q = -x_1$, দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস থেকে প্রতিবিম্ব দূরত্ব $F_2Q' = x_2$, চিহ্নপ্রথা অনুযায়ী বস্তুর উচ্চতা, PQ = y ও প্রতিবিম্বের উচ্চতা, P′Q′ = $-y'$।

ΔPQF_1 ও ΔF_1OB সদৃশ,

অতএব, $\dfrac{OB}{PQ} = \dfrac{OF_1}{F_1Q}$

বা, $\dfrac{P'Q'}{PQ} = \dfrac{OF_1}{F_1Q}$ $\qquad [\because OB = P'Q']$

বা, $\dfrac{-y'}{y} = \dfrac{-f_1}{-x_1}$ $\qquad \ldots \qquad \ldots$ (i)

এখানে F_1 কে মূল বিন্দু ধরা হয়েছে।

আবার $\Delta P'Q'F_2$ ও ΔF_2OA সদৃশ

অতএব, $\dfrac{P'Q'}{AO} = \dfrac{F_2Q'}{OF_2}$

বা, $\dfrac{P'Q'}{PQ} = \dfrac{F_2Q'}{OF_2}$ $\qquad [\because AO = PQ]$

বা, $\dfrac{-y'}{y} = \dfrac{x_2}{f_2}$ … … (ii)

(i) ও (ii) থেকে $\dfrac{-f_1}{-x_1} = \dfrac{x_2}{f_2}$ বা, $x_1x_2 = f_1f_2$ .... (31)

একে নিউটনের সমীকরণ বলা হয়।

$f_1 = f_2 = f$ হলে $x_1x_2 = f^2$

- **লেন্সের ক্ষমতা (Power of a lens) :**

লেন্সের অভিসৃতি (convergence) (উত্তললেন্সের ক্ষেত্রে) বা অপসৃতি (divergence) (অবতল লেন্সের ক্ষেত্রে) উৎপাদনের সামর্থ্যকে লেন্সের ক্ষমতা বলে। ফোকাস দৈর্ঘ্য যত কম হয় লেন্স তত বেশী অভিসারী বা অপসারী হয়। তাই ফোকাস দৈর্ঘ্যের অনোন্যককে লেন্সের ক্ষমতা বলা হয়। অতএব,

লেন্সের ক্ষমতা $= P = \dfrac{1}{f}$

f মিটারে পরিমাপ করা হলে ক্ষমতার একক হয় ডায়প্টার (dioptre) D।

9.9 উত্তল লেন্সে সদ্‌বিম্ব গঠনে বস্তু ও পর্দার ন্যূনতম দূরত্ব : (Minimum Distance between an Object and the Screen for a Real Image Formation by a Convex Lens) ঃ

ধরুন কোনো উত্তল লেন্সে সদ্‌বিম্ব গঠনের সময়, বস্তু দূরত্ব $= u$ ও প্রতিবিম্ব দূরত্ব $= v$। বস্তু ও পর্দার দূরত্ব, $D = u + v$ (চিত্র 9.18), D এর মান ন্যূনতম হবে যদি $\dfrac{dD}{du} = 0$ হয়।

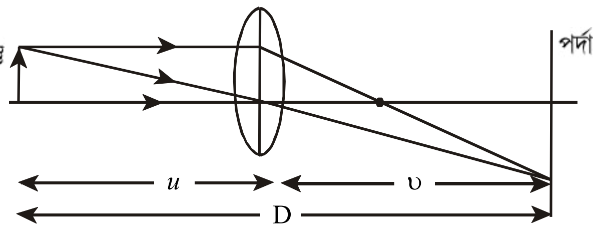
অর্থাৎ $\dfrac{d}{du}(u + v) = 0$

বা, $1 + \dfrac{dv}{du} = 0$

বা, $\dfrac{dv}{du} = -1$ … … (i)

লেন্স সমীকরণ থেকে,

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$$



চিত্র 9.18

উত্তল লেন্সে সদ্‌বিম্বের বেলায়, u = ঋণাত্মক ও v ও f ধনাত্মক

$$\therefore \quad \frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f} \quad .. \;...\; ... \;(ii)$$

u এর সাপেক্ষে অবকল করে, $-\dfrac{1}{v^2}\cdot\dfrac{dv}{du}-\dfrac{1}{u^2} = 0$

$$\therefore \quad \frac{dv}{du}=-\frac{v^2}{u^2} \quad ...\; ...\; ... \;(iii)$$

(i) ও (ii) নং সমীকরণ থেকে $-1 = -\dfrac{v^2}{u^2}$ বা, $u = \pm v$

(ii) নং সমীকরণে $u = v$ বসিয়ে

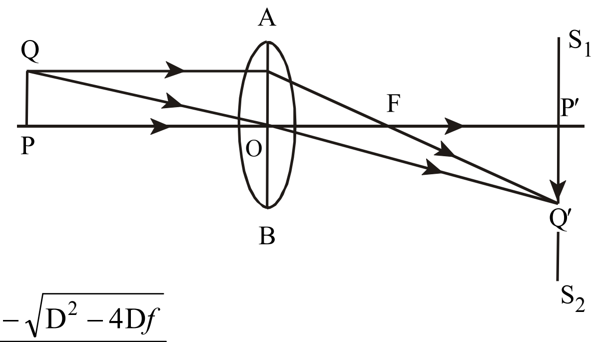
$$\frac{2}{u} = f, \text{ বা, } u = 2f = v$$

$$\therefore \; D = u + v = 4f \quad .... \;... \;(32)$$

$u = -v$ ধরলে f অসীম হয় [সমীকরণ (ii) থেকে]যা হতে পারে না। অতএব, উত্তল লেন্সে সদ্‌বিম্ব গঠনে বস্তু ও পর্দার ন্যূনতম দূরত্ব $D = 4f$।

● 9.9.1. উত্তল লেন্সের সাহায্যে স্থির পর্দার উপর কোনো স্থির বস্তুর সদ্‌বিম্ব প্রক্ষেপণের শর্ত (Condition for casting real images of a fixed object on a fixed screen by a convex lens):

ধরুন একটি বস্তু PQ এবং একটি পর্দা S_1S_2 পরস্পর থেকে D দূরত্বে আছে। এদের মধ্যে একটি উত্তল লেন্স AB বসানো হলো। লেন্সে প্রতিসরণের পর পর্দায় P′Q′ সদ্‌বিম্ব গঠিত হয়েছে। উত্তল লেন্সে সদ্‌বিম্ব গঠনের ক্ষেত্রে বস্তু দূরত্ব u ঋণাত্মক এবং প্রতিবিম্ব দূরত্ব v ও ফোকাস দূরত্ব f ধনাত্মক। সেক্ষেত্রে লেন্সের সমীকরণ হবে $\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{u}=\dfrac{1}{f}$



এখানে $D = u + v$, বা $v = D - u$

$$\therefore \quad \frac{1}{D-u}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f} \quad \text{বা,} \quad \frac{D}{u(D-u)}=\frac{1}{f}$$

বা, $u^2 - Du + Df = 0$

এই দ্বিঘাত সমীকরণটির দুটি বীজ

$$u_1 = \frac{D+\sqrt{D^2-4Df}}{2} \quad \text{ও} \quad u_2 = \frac{D-\sqrt{D^2-4Df}}{2}$$

(I) যখন $D^2 \geq 4Df$, বা $D \geq 4f$, তখন u_1 এবং u_2 উভয় বীজই বাস্তব। সুতরাং বস্তু ও পর্দার মধ্যবর্তী দূরত্ব লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্যের 4 গুণের বেশী হলে উত্তল লেন্সের দুটি অবস্থানে পর্দায় দুটি সদ্‌বিম্ব গঠিত হবে। কিন্তু $D = 4f$ হলে $u_1 = u_2$ হয়। অতএব কেবল একটি প্রতিবিম্ব পাওয়া যাবে।

(II) $D^2 < 4Df$ বা, $D < 4f$ হলে, উভয় বীজই কাল্পনিক, এক্ষেত্রে কোনো অবস্থানেই পর্দার উপর কোনো প্রতিবিম্ব গঠিত হবে না।

● **সরণ পদ্ধতিতে উত্তল লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য নির্ণয় :**

লেন্সের দুটি অবস্থানে পর্দায় সদ্‌বিম্ব গঠিত হলে

$$u_1 = \frac{D+\sqrt{D^2-4Df}}{2}; \; u_2 = \frac{D-\sqrt{D^2-4Df}}{2}$$

দুটি অবস্থানের মধ্যে সরণ ধরি x,

$$\therefore \; x = u_1 - u_2 = \sqrt{D^2-4Df}$$

বা, $x^2 = D^2 - 4Df$

$$\therefore \; f = \frac{D^2-x^2}{4D} \; \ldots \; \ldots \; (33)$$

বস্তু ও পর্দার মধ্যে দূরত্ব D জেনে ও লেন্সের যে দুটি অবস্থানে পর্দায় সদবিম্ব পাওয়া যায় তাদের সরণ x হলে উপরোক্ত সূত্রের সাহায্যে উত্তল লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যায়। একেই ফোকাস দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের সরণ পদ্ধতি (displacement method) বলা হয়।

● **বিবর্ধন :** উত্তল লেন্সের দুটি অবস্থানের জন্য পর্দায় সদ্‌বিম্ব পাওয়া যায়। ধরুন একটি অবস্থানে বস্তু দূরত্ব ও প্রতিবিম্ব দূরত্ব যথাক্রমে u_1 ও v_1।

অতএব $\dfrac{1}{v_1}+\dfrac{1}{u_1}=\dfrac{1}{f}$

বা, $1 + \dfrac{v_1}{u_1}=\dfrac{v_1}{f}$

এই অবস্থায় বিবর্ধন, $m_1 = \dfrac{v_1}{u_1}$

$$\therefore \; 1 + m_1 = \frac{v_1}{f} \qquad \ldots \qquad \ldots \; (i)$$

দ্বিতীয় অবস্থানে মনে করি বস্তু দূরত্ব ও প্রতিবিম্ব দূরত্ব যথাক্রমে u_2 ও v_2। অতএব

$$\frac{1}{v_2}+\frac{1}{u_2}=\frac{1}{f}$$

বা, $1 + \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_2}{f}$

এই অবস্থানে বিবর্ধন $m_2 = \frac{v_2}{u_2}$

$$\therefore\ 1 + m_2 = \frac{v_2}{f} \quad ...\ ....\ \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) থেকে

$$m_2 - m_1 = \frac{v_2 - v_1}{f} = \frac{x}{f}.\ [x = \text{লেন্সের সরণ}]$$

$$\therefore\ f = \frac{x}{m_2 - m_1} \quad ...\ ....\ (34)$$

এই সমীকরণ প্রয়োগ করেও উত্তল লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যায়।

● **উত্তল লেন্সের উপরোক্ত দুটি অবস্থানে বস্তু ও এর প্রতিবিম্বের অবস্থান বিনিময়যোগ্য : বিবর্ধন পরিমাপ করে বস্তুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় :**

আপনারা দেখলেন, উত্তল লেন্সের দুটি অবস্থানে যখন পর্দায় সদ্‌বিম্ব পাওয়া যায় তখন বস্তু দূরত্ব যথাক্রমে

$u_1 = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4Df}}{2}$ ও $u_2 = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4Df}}{2}$

প্রথম অবস্থানে প্রতিবিম্ব দূরত্ব $v_1 = D - u_1 = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4Df}}{2}$ ও দ্বিতীয় অবস্থানে প্রতিবিম্ব দূরত্ব $v_2 = D - u_2 = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4Df}}{2}$ অর্থাৎ $u_1 = v_2$ এবং $v_1 = u_2$। অর্থাৎ উত্তল লেন্সের দুটি অবস্থান যেখানে বস্তুর সদ্‌বিম্ব পর্দায় পাওয়া যায় সে দুটি অবস্থান বিনিময় যোগ্য।

বস্তুর দৈর্ঘ্য O এবং দুটি অবস্থানে প্রতিবিম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে I_1 ও I_2 হলে, এবং দুটি ক্ষেত্রে বিবর্ধন m_1 ও m_2 হলে,

$$m_1 = \frac{I_1}{O} = \frac{v_1}{u_1}$$

এবং $m_2 = \frac{I_2}{O} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{u_1}{v_1}$

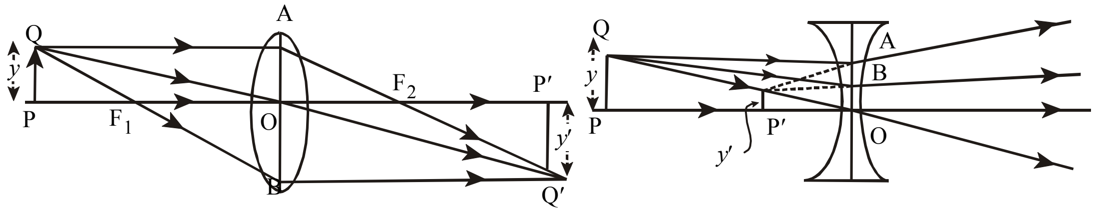
$$\therefore\ m_1 \times m_2 = \frac{I_1 I_2}{O^2} = 1$$

$$\therefore\ O = \sqrt{I_1 I_2} \quad .... \ ... \ (35)$$

এই সম্পর্কটির সাহায্যে দু'বার প্রতিবিম্বের দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে বস্তুর দৈর্ঘ্য গণনার সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

9.9.2 জ্যামিতিক পদ্ধতিতে পাতলা লেন্সের বেলায় কোনো বিস্তৃত বস্তুর প্রতিবিম্ব গঠন : রৈখিক ও অনুদৈর্ঘ্য বিবর্ধন :

পাতলা লেন্সের সাহায্যে গঠিত কোনো বিস্তৃত বস্তুর প্রতিবিম্বের অবস্থান জ্যামিতিক পদ্ধতিতে নির্ণয় করার জন্য বস্তুটির কোনো বিন্দু থেকে নিম্নলিখিত তিনটি রশ্মির মধ্য থেকে যেকোন দুটিকে বিবেচনা করা হয়। লেন্সে প্রতিসরণের পর ঐ রশ্মিগুলির গতিপথ নির্দিষ্ট থাকে। মনে করি (চিত্র 9.20) PQ বস্তুটি লম্বভাবে প্রধান অক্ষের উপর P বিন্দুতে আছে। P বিন্দু থেকে আগত রশ্মি আলোককেন্দ্র O এর মধ্য দিয়ে অক্ষ বরাবর প্রতিসৃত হয়ে যায়। Q বিন্দুর প্রতিবিম্ব পাওয়ার জন্য তিনটি রশ্মি বিবেচনা করা যায়। (i) প্রধান অক্ষের সমান্তরাল QA রশ্মি প্রতিসরণের পর দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস F_2 দিয়ে যায় (উত্তল লেন্স) অথবা F_2 থেকে অপসৃত হচ্ছে বলে মনে হয় (অবতল লেন্স)। (ii) আলোক কেন্দ্রগামী QO রশ্মি কোনোরূপ বিচ্যুতি ছাড়াই একই দিকে চলতে থাকে।



(a) উত্তল লেন্স (b) অবতল লেন্স

চিত্র 9.20 পাতলা লেন্সে বিস্তৃত বস্তুর প্রতিবিম্ব

(iii) প্রথম মুখ্য ফোকাস F_1 গামী রশ্মি লেন্সে প্রতিসরণের পর প্রধান অক্ষের সমান্তরাল হয়ে যায়। এই তিনটি রশ্মির যে কোনো দুটি বিবেচনা করলে Q′ বিন্দুতে প্রতিবিম্ব পাওয়া যায়। Q′ বিন্দু থেকে অক্ষের উপর অঙ্কিত অভিলম্ব Q′P′ হবে PQ এর প্রতিবিম্ব।

রৈখিক বা পার্শ্বীয় বিবর্ধন (Linear magnification) :

অক্ষের সঙ্গে লম্বভাবে অবস্থিত বিম্বের দৈর্ঘ্য বা উচ্চতা ও বস্তুর দৈর্ঘ্য বা উচ্চতার অনুপাতকে রৈখিক বিবর্ধন বলে।

চিত্র 9.20 অনুসারে, রৈখিক বিবর্ধন m হলে, উত্তল লেন্সের ক্ষেত্রে

ধরি $P'Q' = -y'$, প্রতিবিম্বের দৈর্ঘ্য

$PQ = y$, বস্তুর দৈর্ঘ্য

$P'O = v$, প্রতিবিম্ব দূরত্ব

PO = – u, বস্তু দূরত্ব।

$$m = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{P'O}{PO}$$

বা, $m = \frac{-y'}{y} = \frac{v}{-u}$ ... ... (i)

এখানে রৈখিক বিবর্ধন ঋণাত্মক। বলা হয় প্রতিবিম্ব হবে অবশীর্ষ পর্দা উল্টা প্রতিবিম্ব।

অবতল লেন্সের ক্ষেত্রে,

P′Q′ = y', প্রতিবিম্বের দৈর্ঘ্য

PQ = y, বস্তুর দৈর্ঘ্য

P′O = – v, প্রতিবিম্ব দূরত্ব

PO = – u, বস্তু দূরত্ব।

$$\therefore\ m = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{P'O}{PO}$$

বা, $m = \frac{y'}{y} = \frac{-v}{-u} = \frac{v}{u}$ ... ... (ii)

এখানে রৈখিক বিবর্ধন ধনাত্মক। এরূপক্ষেত্রে প্রতিবিম্ব সমশীর্ষ।

বিবর্ধন m ধনাত্মক হলে, প্রতিবিম্ব হয় অসদ্ ও অবশীর্ষ এবং ঋণাত্মক হলে প্রতিবিম্ব হয় সদ্ ও অবশীর্ষ।

অনুদৈর্ঘ্য বা অক্ষীয় বিবর্ধন (Longitudinal or axial magnification) :

প্রধান অক্ষের সমান্তরাল দিকে বিম্বের ও বস্তুর বিস্তৃতির অনুপাতকে অনুদৈর্ঘ্য বা অক্ষীয় বিবর্ধন বলে। অক্ষীয় বিবর্ধন $l = \frac{\Delta v}{\Delta u} = \frac{dv}{du}$।

লেন্সের সমীকরণ থেকে

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$$

$$\therefore\ -\frac{1}{v_2}\cdot\frac{dv}{du} + \frac{1}{u_2} = 0$$

$$\therefore\ \frac{dv}{du} = \frac{v^2}{u^2}$$

$$\therefore\ l = \frac{v_2}{u_2} = m^2 \quad .... \ ... \ (iii)$$

অনুদৈর্ঘ্য ও রৈখিক বিবর্ধন পৃথক হওয়ায় একটি ত্রিমাত্রিক বস্তুর প্রতিবিম্বের জ্যামিতিক আকার একরকম হবে না।

9.10 পাতলা লেন্সের সমবায় ও তুল্য লেন্স (Combination of Thin Lenses and Equivalent Lens) ঃ

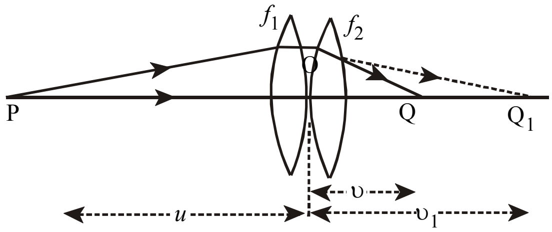
প্রতিবিম্বের ত্রুটি দূর করার জন্য অনেক সময় আলোক যন্ত্রে একাধিক লেন্স ব্যবহার করা হয়। একাধিক লেন্স ব্যবহার করে বস্তুর প্রতিবিম্ব গঠনের ব্যবস্থাকে **লেন্স সমবায়** বলে।

● **তুল্য লেন্স** : লেন্স সমবায় ব্যবহার করে কোনো বস্তুর যে প্রতিবিম্ব পাওয়া যায় যদি তার পরিবর্তে একটি লেন্স ব্যবহার করে ঐ বস্তুর একই বিবর্ধনের প্রতিবিম্ব একই অবস্থানে পাওয়া যায় তবে ঐ লেন্সকে সমবায়ের তুল্য লেন্স এবং এই তুল্য লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্যকে তুল্য ফোকাস দৈর্ঘ্য (equivalent focal length) বলে।

সমবিবর্ধিত ও একই অবস্থানে প্রতিবিম্ব গঠিত হলে এই তুল্যতাকে আদর্শ তুল্যতা (perfect equivalence) বলে। বাস্তবে দেখা যায় লেন্স সমবায়ে লেন্সগুলি পরস্পরের সংলগ্ন থাকলে এই আদর্শ তুল্যতা সম্ভব। কিন্তু লেন্সগুলি কিছু তফাতে থাকলে একটি একক লেন্স পাওয়া সম্ভব নয় যা একই অবস্থানে একই বিবর্ধনের প্রতিবিম্ব গঠন করতে পারে। এক্ষেত্রে কোনো কোনো একক লেন্স সমান বিবর্ধনের প্রতিবিম্ব গঠন করলে তাকেও তুল্য লেন্স বলা হয় যদিও এই তুল্যতা আদর্শ নয়। একে সীমিত তুল্যতা (restricted equivalence) বলা হয়। এখানে বিবর্ধন সমান হলেও প্রতিবিম্বের অবস্থান ভিন্ন হয়।

(A) দুটি সংলগ্ন পাতলা লেন্স সমবায়ের তুল্য ফোকাস দৈর্ঘ্য (Equivalent focal length of two thin lenses in contact) :

ধরা যাক, f_1 ও f_2 ফোকাস দৈর্ঘ্যের দুটি পাতলা উত্তল লেন্স সংলগ্ন অবস্থায় সমাক্ষীয়ভাবে লেন্স সমবায় গঠন করেছে। লেন্স দুটি পাতলা হওয়ায় এদের আলোক কেন্দ্র দুটি সমাপতিত বলে ধরা যায়। মনে করুন এই সমাপতিত আলোক কেন্দ্র O (চিত্র 9.21)। প্রধান অক্ষের ওপর P একটি বস্তু বিন্দু। দ্বিতীয় লেন্স না থাকলে প্রথম লেন্সে প্রতিসরণের পর Q_1 বিন্দুতে প্রতিবিম্ব গঠিত হত। কিন্তু আলোক রশ্মি দ্বিতীয় লেন্সে প্রতিসৃত হয়ে Q বিন্দুতে চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব গঠন করেছে। Q′ বিন্দু দ্বিতীয় লেন্সের ক্ষেত্রে অসদ্ বস্তু হিসাবে বিবেচ্য। প্রথম লেন্সে প্রতিসরণে PO = বস্তু দূরত্ব = $-u$, OQ′ = প্রতিবিম্ব দূরত্ব = v_1, ফোকাস দৈর্ঘ্য = f_1।



চিত্র 9.21 দুটি সংলগ্ন লেন্স

$$\therefore\ \frac{1}{v_1}-\frac{1}{-u}=\frac{1}{f_1} \quad \text{বা,} \quad \frac{1}{v_1}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f_1} \quad \dots\ \dots\ \text{(i)}$$

kকkকkকkকkকkকkক

দ্বিতীয় লেন্সে প্রতিসরণ বিবেচনা করলে, OQ' = বস্তু দূরত্ব = v_1, OQ = প্রতিবিম্ব দূরত্ব = v, ফোকাস দৈর্ঘ্য = f_2

$$\therefore \frac{1}{v}-\frac{1}{v_1}=\frac{1}{f_2} \ldots \ldots \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) থেকে,

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2} \ldots \ldots \text{(iii)}$$

তুল্য লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য F হলে, P বস্তু বিন্দুর প্রতিবিম্ব হবে Q এবং লেন্সটিকে উত্তল হতে হবে। সেক্ষেত্রে

PO = বস্তু দূরত্ব = – u. OQ = প্রতিবিম্ব দূরত্ব = v, ফোকাস দৈর্ঘ্য = F

$$\therefore \frac{1}{v}-\frac{1}{-u}=\frac{1}{\mathrm{F}} \text{ বা, } \frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{\mathrm{F}} \ldots \ldots \text{(iv)}$$

(iii) ও (iv) থেকে,

$$\frac{1}{\mathrm{F}}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2} \quad \ldots \ldots \text{(36)}$$

দু'য়ের অধিক লেন্স সংলগ্ন থাকলে লেন্স সমবায়ের তুল্য ফোকাস দৈর্ঘ্যের (F) সম্পর্ক হবে

$$\frac{1}{\mathrm{F}}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_3}+\cdots\cdots=\sum\frac{1}{f} \quad \ldots \ldots \text{(37)}$$

এদের ক্ষমতা লেখা যায়

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \ldots. \ldots. \text{(38)}$$

যেখানে P তুল্য লেন্সের ক্ষমতা এবং P_1, P_2 ইত্যাদি সংলগ্ন লেন্সগুলির ক্ষমতা।

উত্তল লেন্স সমূহের পরিবর্তে কতকগুলি অবতল লেন্স বা কতকগুলি উত্তল ও অবতল লেন্সের সংমিশ্রণেও সমবায় গঠন করা যায়। প্রতিক্ষেত্রেই তুল্য লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য সমীকরণ (37) থেকে পাওয়া যায়। সেক্ষেত্রে লেন্স অনুযায়ী ফোকাস দৈর্ঘ্যের উপযুক্ত চিহ্ন ব্যবহার করতে হবে।

(B) পরস্পর থেকে দূরে সমাক্ষীয়ভাবে অবস্থিত দুটি পাতলা লেন্স-সমবায়ের তুল্য ফোকাস দৈর্ঘ্য (Equivalent focal length of two co-axial thin lenses separated by a distance) :

এরূপ সমবায়ে আদর্শ তুল্যতা পাওয়া যায় না। এই সমবায় বস্তুর যে প্রতিবিম্ব গঠন করে, কোনো একক লেন্স যদি একই বিবর্ধনের প্রতিবিম্ব গঠন করে তবে ঐ লেন্সকে সমবায়ের তুল্য লেন্স বলা হয়। এই তুল্যতাকে সীমিত তুল্যতা বলে।

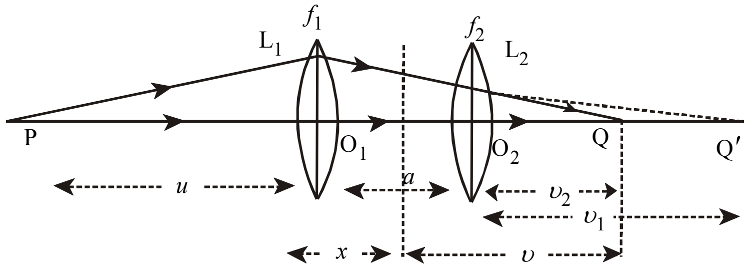
ধরুন, f_1 ও f_2 ফোকাস দৈর্ঘ্যের দুটি উত্তল লেন্স পরস্পর সামান্য দূরত্ব a ব্যবধানে একই প্রধান অক্ষের

ওপর বসানো আছে (চিত্র 9.22)। লেন্স দুটির আলোক কেন্দ্র যথাক্রমে O_1 ও O_2। প্রধান অক্ষের উপর P একটি বস্তু বিন্দু। প্রথম লেন্সে প্রতিসরণের পর Q′ বিন্দুতে এর প্রতিবিম্ব গঠিত হত। দ্বিতীয় লেন্সে প্রতিসরণের পর Q বিন্দুতে চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব গঠিত হয়েছে। Q′ বিন্দু দ্বিতীয় লেন্সের ক্ষেত্রে অদস্ বস্তুর মতো আচরণ করে। প্রথম লেন্সে প্রতিবিম্ব গঠনের ক্ষেত্রে

PO_1 = বস্তু দূরত্ব = $-u$, O_1Q' = প্রতিবিম্ব দূরত্ব = $a + v_1$

ফোকাস দূরত্ব = f_1

$$\therefore \quad \frac{1}{a+v_1} - \frac{1}{-u} = \frac{1}{f_1}$$



চিত্র 9.22. a দূরত্বে অবস্থিত দুটি লেন্স

বা, $$\frac{1}{a+v_1} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f_1} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \text{ (i)}$$

প্রথম লেন্সে বিবর্ধন, $$m_1 = \frac{a+v_1}{-u} \quad \ldots \quad \ldots \text{ (ii)}$$

(i) নং সমীকরণ থেকে,

$$\frac{u}{a+v_1} + 1 = \frac{u}{f_1}$$

বা, $$\frac{u}{a+v_1} = \frac{u}{f_1} - 1 = \frac{u-f_1}{f_1}$$

বা, $$\frac{a+v_1}{u} = \frac{f_1}{u-f_1}$$

$$\therefore \quad m_1 = -\frac{f_1}{u-f_1} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \text{ (iii)}$$

এবং $$v_1 = \frac{uf_1}{u-f_1} - a \quad \ldots . \quad .. \text{ (iv)}$$

দ্বিতীয় লেন্সে প্রতিসরণের ক্ষেত্রে

O_2Q_1 = বস্তু দূরত্ব = v_1

O_2Q = প্রতিবিম্ব দূরত্ব = v_2

ফোকাস দৈর্ঘ্য = f_2

$$\therefore \ \frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}=\frac{1}{f_2} \qquad \ldots \qquad \ldots \ (\text{v})$$

দ্বিতীয় লেন্সে বিবর্ধন, $m_2 = \dfrac{v_1}{v_2}$

(v) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$$\frac{v_1}{v_2}-1=\frac{v_1}{f_2}$$

বা, $\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{v_1}{f_2}+1$

বা, $\dfrac{v_2}{v_1}=\dfrac{f_2}{v_1+f_2}$

$$\therefore \ m_2 = \frac{v_2}{v_1}=\frac{f_2}{v_1+f_2}$$

(iv) নং সমীকরণ থেকে v_1 এর মান বসিয়ে

$$m_2 = \frac{f_2}{\dfrac{uf_1}{u-f_1}-a+f_2}=\frac{f_2(u-f_1)}{uf_1-ua+f_1a+uf_2-f_1f_2} \qquad \ldots \qquad \ldots \ (\text{vi})$$

ধরি তুল্য লেন্সের আলোককেন্দ্র O এর অবস্থান দুটি লেন্সের অবস্থানের মধ্যে প্রথম লেন্স L_1 থেকে x দূরত্ব এবং এর ফোকাস দৈর্ঘ্য F। দুটি লেন্সের তুল্য লেন্স উত্তল হবে অর্থাৎ F ধনাত্মক। এই লেন্স বিবেচনা করলে,

OP = বস্তু দূরত্ব = $-(u + x)$

OQ = প্রতিবিম্ব দূরত্ব = v

$$\therefore \ \frac{1}{v}-\frac{1}{-(u+x)}=\frac{1}{\text{F}} \ \text{বা,} \ \frac{1}{v}+\frac{1}{u+x}=\frac{1}{\text{F}} \qquad \ldots \qquad \ldots \ (\text{vii})$$

এই তুল্য লেন্সে বিবর্ধন, $m = \dfrac{v}{-(u+x)}$

(vii) নং সমীকরণ থেকে,

$$\frac{u+x}{v}+1=\frac{u+x}{\mathrm{F}}$$

বা, $\dfrac{u+x}{v}=\dfrac{u+x}{\mathrm{F}}-1=\dfrac{u+x-\mathrm{F}}{\mathrm{F}}$

বা, $\dfrac{v}{u+x}=\dfrac{\mathrm{F}}{u+x-\mathrm{F}}$

$$\therefore\ m = \frac{v}{-(u+x)}=\frac{-\mathrm{F}}{u+x-\mathrm{F}} \quad \ldots\ \ldots\ \text{(viii)}$$

দুটি লেন্সের পৃথক পৃথক বিবর্ধন m_1 ও m_2, মোট বিবর্ধন $m_1 \times m_2$ এবং তুল্য লেন্সের বিবর্ধন সমান হবে।

$\therefore\ m = m_1 \times m_2$

বা, $-\dfrac{\mathrm{F}}{u+x-\mathrm{F}}=-\dfrac{f_1}{u-f_1}\times\dfrac{f_2(u-f_1)}{uf_1-ua+f_1a+uf_2-f_1f_2}$

বা, $\dfrac{u+x-\mathrm{F}}{\mathrm{F}}=\dfrac{uf_1-ua+f_1a+uf_2-f_1f_2}{f_1f_2}$

বা, $\dfrac{u}{\mathrm{F}}+\dfrac{x}{\mathrm{F}}-1=\dfrac{u}{f_1f_2}(f_1+f_2-a)+\dfrac{a}{f_2}-1 \quad \ldots\ \ldots\ \text{(ix)}$

(ix) সমীকরণটি u এর যেকোনো মানের জন্য প্রাযোজ্য। সুতরাং যখন $u = 0$, তখন

$$\frac{x}{\mathrm{F}}=\frac{a}{f_2} \quad \ldots\ \ldots.\ (x)$$

(ix) সমীকরণে এই মান বসিয়ে,

$$\frac{u}{\mathrm{F}}=\frac{u}{f_1f_2}(f_1 + f_2 - a)$$

$$\therefore\ \frac{1}{\mathrm{F}}=\frac{f_1+f_2-a}{f_1f_2}$$

বা, $\dfrac{1}{\mathrm{F}}=\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}-\dfrac{a}{f_1f_2} \quad \ldots\ \ldots\ (39)$

এটিই হল তুল্য লেন্সের ফোকাস দূরত্বের সঙ্গে দুটি লেন্সের ফোকাস দূরত্ব ও ওদের মধ্যে ব্যবধানের সম্পর্ক।

(x) নং সমীকরণ থেকে,

$$x = \frac{a\mathrm{F}}{f_2} = \frac{af_1 f_2}{f_2(f_1 + f_2 - a)} = \frac{af_1}{f_1 + f_2 - a} \quad \ldots \quad \ldots (40)$$

x হল তুল্য লেন্সের অবস্থান। প্রথম লেন্সের পশ্চাতে এই অবস্থান।

দুটি লেন্সের অবস্থান পরিবর্তন করলে, প্রথম লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য হবে f_2। তখন তুল্য লেন্সের অবস্থান হবে f_2 ফোকাস দূরত্বের লেন্সের পশ্চাতে x' দূরত্বে,

$$x' = \frac{a\mathrm{F}}{f_1} \quad \ldots \quad \ldots (41)$$

প্রকৃতপক্ষে এই দুটি বিন্দুকে মুখ্য বিন্দু (principal points) বলা হয়। প্রধান অক্ষের উপর মুখ্য বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত তল দুটিকে মুখ্যতল (principal planes) বলা হয়।

দুটি লেন্স অবতল হলে চিহ্ন প্রথা ব্যবহার করে তুল্য লেন্সের ফোকাস দূরত্ব পাওয়া যায়। সেক্ষেত্রে f_1, f_2 ও F ঋণাত্মক। সমীকরণ (39) এ চিহ্ন পরিবর্তন করে পাই,

$$\frac{1}{-\mathrm{F}} = \frac{1}{-f_1} + \frac{1}{-f_2} - \frac{a}{-f_1 - f_2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\mathrm{F}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{a}{f_1 f_2} \quad \ldots \quad \ldots (42)$$

প্রথম লেন্স থেকে তুল্য লেন্সের অবস্থান হবে

$$x = \frac{-a\mathrm{F}}{-f_2} = \frac{a\mathrm{F}}{f_2} = \frac{af_1}{f_1 + f_2 + a} \quad \ldots \quad \ldots (43)$$

লেন্স দুটি সংলগ্ন থাকলে, $a = 0$, তুল্য ফোকাস দৈর্ঘ্য F,

$$\therefore \quad \frac{1}{\mathrm{F}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

এ সম্পর্কটি আপনারা আগেই পেয়েছেন।

———

9.11 একবর্ণী অপেরণ বা সাইড্‌ল্‌ অপেরণ (Monochromatic Aberration or Seidel Aberration) ঃ

একবর্ণী অপেরণ বা সাইড্‌ল্‌ অপেরণ (Monochromatic Aberration or Seidel Aberration)

কোনো আলোক যন্ত্রে বিস্তৃত বস্তু থেকে আগত একবর্ণী আলোর ক্ষেত্রে প্রতিবিম্ব গঠনে বিভিন্ন ত্রুটি লক্ষ্য করা যায়। এদের একবর্ণী অপেরণ বা সাইড্‌ল্‌ অপেরণ বলা হয়।

বক্রতল বা লেন্সে প্রতিসরণে আমরা যে সব সম্পর্ক পেয়েছি সেসব ক্ষেত্রে বস্তু থেকে আগত একবর্ণী রশ্মিগুচ্ছকে উপাক্ষীয় (paraxial) এবং প্রধান অক্ষের সঙ্গে খুব কম কোণে আপতিত হয়েছে ধরে নেওয়া হয়েছে। সেক্ষেত্রে স্নেলের সূত্র sin i = μ sin r প্রয়োগের সময় আপতন কোণ ও প্রতিসরণ কোণকে খুব ক্ষুদ্র ধরা হয়েছে। পরিবর্তিত স্নেলের সূত্র হবে $i = \mu r$। কিন্তু বস্তু বিস্তৃত হলে তার কিছু কিছু অংশ প্রধান অক্ষ থেকে দূরে থাকে। সেক্ষেত্রে বস্তুবিন্দুর প্রকৃত বিন্দুপ্রতিবিম্ব পাওয়া যায় না—কেবলমাত্র উপাক্ষীয় রশ্মির বেলায়ই বস্তুবিন্দুর প্রকৃত বিন্দুপ্রতিবিম্ব পাওয়া যায়। আলোক যন্ত্রে বড় উন্মেষের লেন্স ইত্যাদি ব্যবহার করা হয়। এর ফলে প্রতিবিম্বের ঔজ্জ্বলতা বৃদ্ধি পায়। কিন্তু উন্মেষের প্রান্তীয় (peripheral) রশ্মিগুচ্ছ প্রধান অক্ষের সঙ্গে বেশী কোণ করে আপতিত হয়। উপাক্ষীয় রশ্মির ক্ষেত্রে এবং কম কোণে আপতিত রশ্মির ক্ষেত্রে প্রাপ্ত সম্পর্ক সমূহ বড় উন্মেষ ও বেশী কোণে আপতিত রশ্মির ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হয় না। এক্ষেত্রে কিছু সংশোধনের প্রয়োজন হয়। sin$i$ এর বিস্তৃতি থেকে,

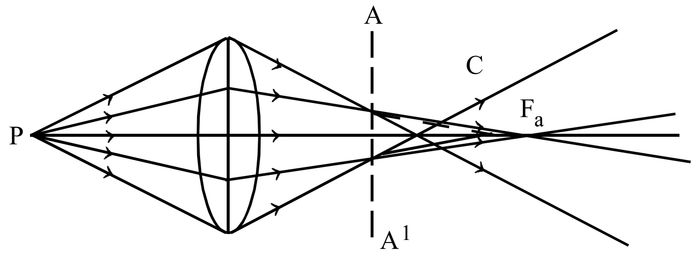
অর্থাৎ, $\sin i = i - \frac{i^3}{3!} + \frac{i^5}{5!} - \frac{i^7}{7!} + \ldots..$ ....(44)

থেকে উপাক্ষীয় রশ্মির ক্ষেত্রে sin i = i ধরে অর্থাৎ প্রথম ঘাত (first order) নিয়ে বিভিন্ন সম্পর্ক আমরা পেয়েছি। এই তত্ত্বকে প্রথম বর্গীয় বা ঘাতের তত্ত্ব (first order theory) বলা হয়।

প্রান্তীয় রশ্মির ক্ষেত্রে sin i = i ধরা যায় না। প্রথম বর্গীয় তত্ত্ব থেকে বিচ্যুতিকে বলা হয় অপেরণ। অর্থাৎ প্রান্তীয় রশ্মিসমূহের জন্য প্রতিবিম্ব গঠনে বিভিন্ন ত্রুটিই হল অপেরণ। এক বর্ণের যে কোনো আলোকেই এই ত্রুটি থাকে। এজন্য এদের একবর্ণী অপেরণও বলা হয়। দেখা যায় sin i এর বিস্তৃতির দ্বিতীয় পদ পর্যন্ত বা i এর তৃতীয় ঘাতের পদ বিবেচনায় আনলে তির্যকভাবে আপতিত রশ্মির প্রভাব মোটামুটি ব্যাখ্যা করা যায়। 1855 খ্রিষ্টাব্দে সাইড্‌ল্‌ (Seidel) এই তত্ত্ব দেন বলে এদের সাইড্‌ল অপেরণ বা তৃতীয় বর্গের তত্ত্ব (third order theory) বলা হয়। এই তত্ত্বে 5 টি ব্যাঞ্জক 5 টি অপেরণকে প্রকাশ করে। এই 5টি সাইড্‌ল্‌ বা একবর্ণী অপেরণ হল যথাক্রমে, (i) গোলাপেরণ (spherical aberration), (ii) কোমা (coma), (iii) অবিন্দুকত্ব (astigmatism), (iv) বক্রতা (curvature) ও (v) বিকৃতি (distortion)।

(i) গোলাপেরণ বা গোলীয় অপেরণ : লেন্সের উন্মেষ বড় হলে লেন্সে আপতিত প্রান্তীয় রশ্মিগুলির চ্যুতি উপাক্ষীয় রশ্মিগুলির তুলনায় বেশী হয়। প্রান্তীয় রশ্মিগুলি লেন্সের কাছে ও উপাক্ষীয় রশ্মিগুলি তুলনায় দূরে বস্তুর প্রতিবিম্ব গঠন করে। পর্দায় কোনোখানেই স্পষ্ট প্রতিবিম্ব পাওয়া যায় না। এই ত্রুটিকে গোলাপেরণ বা গোলীয় অপেরণ বলে।

ধরুন একটি উত্তল লেন্সের প্রধান অক্ষের উপর P একটি বস্তুবিন্দু (চিত্র 9·23 (a))। P বিন্দু থেকে আগত উপাক্ষীয় রশ্মিগুলি লেন্সে প্রতিসরণের পর প্রধান অক্ষের ওপর F_a বিন্দুতে মিলিত হয়।



চিত্র 9·23 সরল দোলক

প্রান্তীয় রশ্মিগুলি লেন্সের কাছে F_p-তে মিলিত হয়। লেন্সের মধ্যবর্তী অঞ্চলে আপতিত রশ্মিগুলি প্রতিসৃত হয়ে F_a ও F_p বিন্দুদুটির মধ্যবর্তী স্থানে মিলিত হয়। F_a বিন্দুতে প্রধান অক্ষের উপর লম্বভাবে একটি পর্দা রাখলে স্পষ্ট বিন্দুবিম্বের পরিবর্তে একটি বৃত্তাকার আলোকিত অঞ্চল পাওয়া যায় যার কেন্দ্রে ঔজ্জ্বল্য সব থেকে বেশী। কেন্দ্র থেকে দূরত্ব বেশী হলে ঔজ্জ্বল্য কমতে থাকে। পর্দাকে ক্রমশ F_a থেকে F_b এর দিকে নিয়ে গেলে বৃত্তাকার আলোকিত অঞ্চলটির ব্যাস ও ঔজ্জ্বল্যের প্রকৃতি পরিবর্তিত হতে থাকে। C অবস্থানে এর ব্যাস সব থেকে কম হয় এবং বৃত্তের সব জায়গায় ঔজ্জ্বল্যেও প্রায় সমান হয়। এটি P-এর প্রতিবিম্বের নিকটতম রূপ এবং এই বৃত্তকে ন্যূনতম অস্পষ্টতা বৃত্ত (circle of least confusion) বলে। পর্দার এই অবস্থানে সব থেকে ভালো প্রতিবিম্ব পাওয়া যায়। F_a থেকে F_p এর দিকে পর্দা নিয়ে যেতে থাকলে প্রান্তের দিকে ঔজ্জ্বল্য বাড়তে থাকে। C থেকে F_p-র দিকে যেতে থাকলে প্রান্তের দিকে উজ্জ্বল বলয় লক্ষ্য করা যায়। ন্যূনতম অস্পষ্টতা বৃত্তের ব্যাসার্ধকে তির্যক (lateral or transverse) গোলাপেরণের পরিমাপ ধরা হয়। আবার উপাক্ষীয় ও প্রান্তীয় রশ্মি কর্তৃক গঠিত প্রতিবিম্বদ্বয়ের অবস্থান F_a ও F_b-এর মধ্যে দূরত্বকে অনুদৈর্ঘ্য (longitudinl or axial) গোলাপেরণের পরিমাপ ধরা হয়। AA^1 থেকে F_a পর্যন্ত, প্রতিসৃত রশ্মিগুলির স্পর্শক তলকে (চিত্র 9·23 (a), (b) বলে কষ্টিক তল বা কিরণস্পর্শীতল (caustic curve) এবং এই প্রতিসৃত রশ্মিগুচ্ছকে ছেদকারী তলের উপর কষ্টিকতল যে কিরণ বলয় গঠন করে তাকে বলে কষ্টিক বক্র বা কিরণস্পর্শী বক্র। এই তলের প্রান্ত F_a বিন্দুকে কষ্টিক তলের কাস্প (cusp) বলে। 9·23 (b) চিত্রে কষ্টিক তলের একটি ছেদ দেখানো হয়েছে।

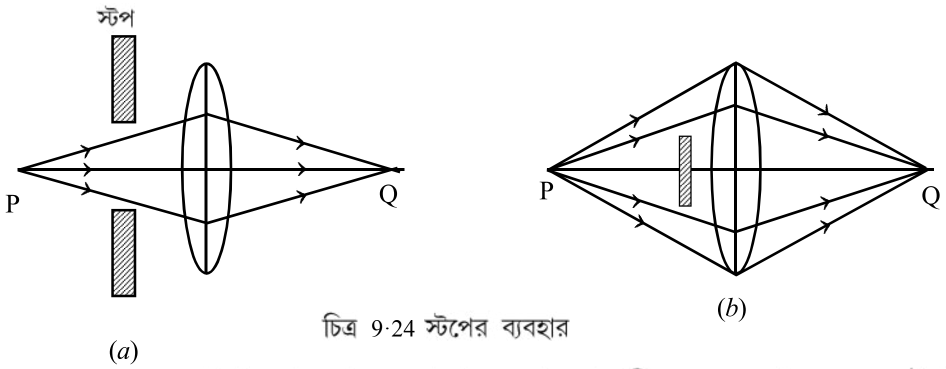
পরিমাণগতভাবে গোলাপেরণজনিত ত্রুটিকে তির্যক গোলাপেরণের মান দিয়ে সন্তোষজনকভাবে পরিমাপ করা যায়। কম অভিসারী আলোক রশ্মির ক্ষেত্রে অনুদৈর্ঘ্য গোলাপেরণ প্রতিবিম্ব গঠনে খুব গুরুত্বপূর্ণ হয় না; কিন্তু আলোকরশ্মি বেশী অভিসারী হলে এটি বেশী গুরুত্বপূর্ণ হয়।

উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক, লেন্সের বক্রতা ব্যাসার্ধ, বস্তু দূরত্ব, লেন্সের বিভিন্ন কার্যকরী বলয়ের ব্যাসার্ধ ইত্যাদির উপর গোলাপেরণের মান নির্ভর করে। অক্ষ থেকে দূরে অবস্থিত কোনো বস্তুবিন্দুর ক্ষেত্রে ও অক্ষের ওপর অবস্থিত কোনো বস্তুবিন্দুর ক্ষেত্রে গোলাপেরণের মান প্রায় সমান; সেজন্য অক্ষের ওপর অবস্থিত বস্তুবিন্দুর ক্ষেত্রে গোলাপেরণের মান সাধারণত নির্ণয় করা হয়।

● **গোলাপেরণ ন্যূনতম করার পদ্ধতি সমূহ :**

(a) উন্মেষ নিয়ন্ত্রক বা রোধকের ব্যবহার (Use of stop) : গোলাপেরণের কারণ হল প্রান্তীয় ও উপাক্ষীয় আলোকরশ্মিগুলির লেন্সে প্রতিসরণের পর একস্থানে মিলিত না হওয়া। যদি কোনো বস্তু থেকে আগত রশ্মিগুলির

হয় প্রান্তীয় বা উপাক্ষীয় অংশকে লেন্সে আপতনের পূর্বে আটকানো যায়, অর্থাৎ আপতিত হতে না দেওয়া হয়, তবে উভয় ক্ষেত্রে প্রতিবিম্ব স্পষ্ট হবে এবং গোলাপেরণের ত্রুটি কম হবে। প্রান্তীয় রশ্মিগুলি আটকানোর জন্য যে উন্মেষ রোধক (stop) ব্যবহার করা হয় তা বস্তুত একটি অস্বচ্ছ পর্দা যার মাঝখানে একটি ছোটছিদ্র থাকে।

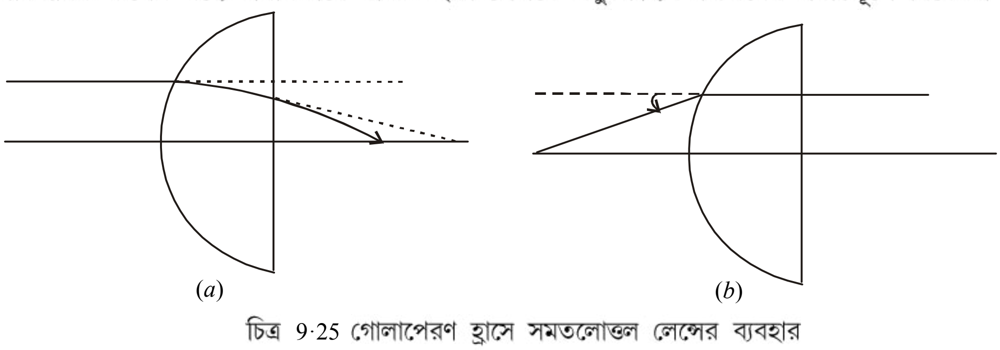


চিত্র 9·24 স্টপের ব্যবহার

একে বস্তু ও লেন্সের মাঝখানে এমনভাবে বসানো হয়, যাতে এর ছিদ্রের কেন্দ্র প্রধান অক্ষের উপর থাকে (চিত্র 9·24 (a))। এই ধরণের রোধক ব্যবহার করে গোলাপেরণের মান কম করা গেলেও প্রান্তীয় রশ্মিগুলি না থাকায় প্রতিবিম্বের ঔজ্জ্বল্য কম হয় এবং বিভেদন ক্ষমতা (resolving power) ও কমে যায়।

অন্য পদ্ধতিতে উপাক্ষীয় রশ্মিগুলিকে আটকানোর জন্য লেন্সের থেকে কম ব্যাসের একটি অস্বচ্ছ চাকতি ব্যবহার করা হয়। লেন্সের সামনে এমনভাবে এটি বসানো হয় যাতে এর কেন্দ্র প্রধান অক্ষের ওপর থাকে (চিত্র 9·24 (b))। বিজ্ঞানী লর্ড রেলি (Lord Rayleigh) এই স্টপের ধারণা দেন। এতে বিভেদন ক্ষমতা কমে না; ঔজ্জ্বল্য অবশ্য কমে যায়। বিশেষ উল্লেখ্য যে সঠিক অবস্থানে স্টপ না বসালে প্রতিবিম্ব গঠনের অন্য একটি বিকৃতি (distortion) উপস্থিত হয়, সেজন্য স্পট ব্যবহারের সময় সব থেকে উপযুক্ত অবস্থান সঠিকভাবে নির্ধারণ করতে হয়।

(b) সমতলোত্তল লেন্সের ব্যবহার (use of plano-convex lens) : লেন্সে গোলাপেরণে প্রান্তীয় রশ্মিগুলি উপাক্ষীয় রশ্মিগুলির থেকে বেশি কোণে বিচ্যুত হয়। প্রান্তীয় রশ্মিগুলির চ্যুতি ন্যূনতম করতে পারলে গোলাপেরণও ন্যূনতম হয়। প্রিজমের বেলায় আপতণ কোণ ও নির্গমন কোণ সমান হলে চ্যুতি ন্যূনতম হয়; তখন মোট চ্যুতি দুটি প্রতিসারক তলের মধ্যে সমানভাবে বন্টিত হয়। লেন্সকে বহু সংখ্যক প্রিজমের সমষ্টিরূপে বিবেচনা করা

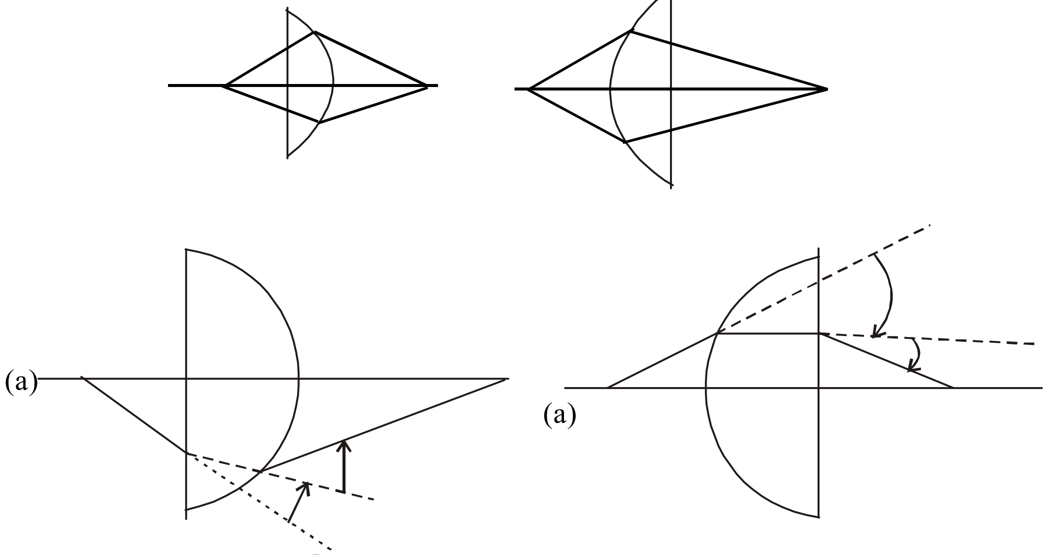


চিত্র 9·25 গোলাপেরণ হ্রাসে সমতলোত্তল লেন্সের ব্যবহার

যায় বলে প্রিজমের উক্ত ধর্মটি লেন্সের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য হয়। সাধারণভাবে, যখন কোনো লেন্সকে এমনভাবে নির্মাণ করা হয় বা ব্যবহার করা হয় যাতে রশ্মির মোট চ্যুতি, দুটি প্রতিসারক তলের মধ্যে প্রায় সমানভাবে বন্টিত হয় তখন গোলাপেরণ ন্যূনতম হয়।

দূরবীক্ষণ বা অণুবীক্ষণ যন্ত্রের অভিলক্ষ্য (Objective) হিসাবে প্রায়ই সমতলোত্তল লেন্স ব্যবহৃত হয়। দূরবীক্ষণের ক্ষেত্রে দূরের বস্তু থেকে আগত রশ্মিগুলি প্রায় সমান্তরাল হয় বলে, সমতলোত্তল লেন্সটির বক্রতলকে আপতিত সমান্তরাল রশ্মির দিকে রাখা হয়। ফলে প্রতিসরণের পর লেন্সের দুটি তলের মধ্যে চ্যুতি বন্টিত হয়ে প্রায় সমান হয় (চিত্র 9·25 (a)। অপরপক্ষে লেন্সের সমতল তলে ঐ রশ্মিগুচ্ছ আপতিত হলে ঐ তলে কোনো চ্যুতিই হয় না; সমস্ত চ্যুতিই বক্রতলে হয় (চিত্র 9·26 (a)। ফলে গোলাপেরণ দূরীভূত হয় না।

অণুবীক্ষণের ক্ষেত্রে অভিলক্ষ্যের খুব কাছে বস্তু থাকে। ফলে বস্তু থেকে আগত রশ্মি বেশী অপসারী হয়। এক্ষেত্রে লেন্সের সমতল তলকে আগত রশ্মিগুচ্ছের দিকে রাখা হয়। ফলে দুটি তলে চ্যুতি প্রায় সমান হয় (চিত্র 9·26 (a)।



চিত্র 9·24 অনুবীক্ষণ গোলাপেরণ হ্রাসে সমতলোত্তল লেন্সের ব্যবহার

অপরপক্ষে লেন্সের বক্রতল আগত রশ্মিগুচ্ছের দিকে রাখলে দুটি পৃষ্ঠতলে চ্যুতি সমান হয় না; সমতল পৃষ্ঠের তুলনায় বক্রতলে বেশী চ্যুতি হয়। ফলে গোলাপেরণ হ্রাস পায় না (চিত্র 9·26 (b)।

সাধারণ নীতি হল—আপতিত বা নির্গত রশ্মি যেটি প্রধান অক্ষের সঙ্গে বেশী সমান্তরাল সেইদিকে সমতোলত্তল লেন্সের উত্তল দিকটি রাখলে গোলাপেরণ কম হবে।

(c) উপযুক্ত বক্রতা ব্যাসার্ধযুক্ত লেন্সের ব্যবহার : অবম গোলাপেরণ লেন্স (Use of suitable radii of curvature : crossed lens) :

প্রমাণ করা যায়, একবর্ণী সমান্তরাল রশ্মিগুচ্ছ কোনো লেন্সে আপতিত হলে গোলাপেরণ ন্যূনতম হবে যদি দুটি বক্রতা ব্যাসার্ধ নিচের অনুপাতটি মান্য করে—

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{2\mu^2 - \mu - 4}{\mu(2\mu + 1)} \quad ....(45)$$

(i) অবম গোলাপেরণ লেন্স (crossed lens) : যদি লেন্সের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক $\mu = 1{\cdot}5$ হয়, উপরের সম্পর্ক থেকে, $\frac{r_1}{r_2} = -\frac{1}{6}$

অর্থাৎ $1{\cdot}5$ প্রতিসরাঙ্কের কোনো লেন্সে গোলাপেরণ ন্যূনতম হবে যদি বক্রতা ব্যাসার্ধের অনুপাত 1:6 হয়। যেহেতু r_1 আপতিত রশ্মির দিকের তলের বক্রতা ব্যাসার্ধ, তাই যে তলের বক্রতা ব্যাসার্ধ কম সেই তলটি আপতিত সমান্তরাল রশ্মির দিকে রাখতে হবে। ঋণাত্মক চিহ্ন থেকে বোঝা যায়, দুটি তলের বক্রতা ব্যাসার্ধ বিপরীত দিকে। অর্থাৎ লেন্সটি উভতলোত্তল হল উভতলবতল

(a) (b)

চিত্র 9·27 অমব গোলাপেরণ লেন্স

হতে হবে (চিত্র 9·27)। এই ধরণের লেন্সকে অবম গোলাপেরণ লেন্স বা ক্রস্‌ড লেন্স (crossed lens) বলে।

(ii) সমতলোত্তল লেন্সের ক্ষেত্রে যদি উত্তল তল আগত সমান্তরাল আলোকরশ্মির দিকে থাকে সেক্ষেত্রে r_1 ধনাত্মক ও $r_2 = \infty$; তখন $\frac{r_1}{r_2} = 0$ বা $2\mu^2 - \mu - 4 = 0$। সমাধান করে পাওয়া যায় $\mu = 1{\cdot}6861$; অর্থাৎ $1{\cdot}6861$ প্রতিসরাঙ্কের কোনো সমত্তলোত্তল লেন্সের উত্তল তল আগত সমান্তরাল রশ্মির দিকে রাখা হলে গোলাপেরণ ন্যূনতম হবে।

আবার সমতলটি যদি আগত সমান্তরাল রশ্মির দিকে থাকে, সেক্ষেত্রে, $r_1 = \infty$, $\therefore \mu(2\mu + 1) = 0$। সমাধান হল, $\mu = 0$ বা $-\frac{1}{2}$; এ দুটিই অসম্ভব। অর্থাৎ সমতলোত্তল লেন্সের সমতল দিকটি আগত সমান্তরাল আলোর দিকে রাখলে গোলাপেরণ ন্যূনতম হবে না।

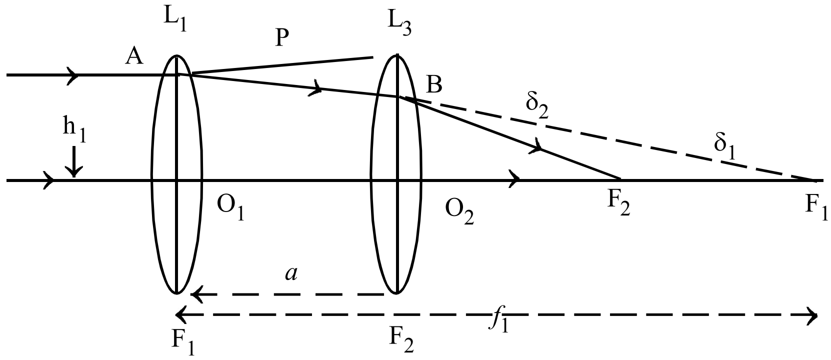
সাধারণভাবে—**আপতিত বা নির্গত রশ্মি যেটি প্রধান অক্ষের সঙ্গে বেশী সমান্তরাল সেই রশ্মির দিকে লেন্সের বেশী বক্রতলটি রাখলে গোলাপেরণ কম হবে।**

(d) দুটি উত্তল লেন্সের ব্যবহার (use of two convex lenses) :

নির্দিষ্ট ব্যবধানে রক্ষিত সমাক্ষীয় দুটি উত্তল লেন্সের ক্ষেত্রে যদি মোট চ্যুতি দুটি লেন্সের মধ্যে সমানভাবে বন্টিত হয় তা হলে চ্যুতি ন্যূনতম হয় ও গোলাপেরণও ন্যূনতম হয়।

ধরা যাক্‌, f_1 ও f_2 ফোকাস দূরত্বের ($f_1 > f_2$) দুটি উত্তল লেন্স যথাক্রমে L_1 ও L_2 অবস্থানে সমাক্ষভাবে

a ব্যবধানে রক্ষিত আছে। L_1 লেন্সটি আগত আলোকের দিকে আছে (চিত্র 9·28)। প্রধান অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল একটি আলোক রশ্মি প্রথম লেন্সের আলোক কেন্দ্র 0_1 থেকে h_1 উচ্চতায় A বিন্দুতে আপতিত হয়ে প্রতিসৃত হওয়ার পর দ্বিতীয় লেন্সের উপর



চিত্র 9·28 দুটি উত্তল লেন্সের ব্যবহারে ন্যূনতম গোলাপ্রেরণ

প্রধান অক্ষ থেকে h_2 উচ্চতায় B বিন্দুতে আপতিত হয়েছে। অত:পর রশ্মিটি দ্বিতীয় লেন্স কর্তৃক প্রতিসৃত হয়ে প্রধান অক্ষের উপর F_2 বিন্দুতে সমাক্ষীয় অপর একটি রশ্মির সাথে মিলিত হয়েছে।

প্রথম লেন্সে চ্যুতি, $\delta_1 = \frac{h_1}{f_1}$, $f_1 = 0_1 F_1$, দ্বিতীয় লেন্সে চ্যুতি $\delta_2 = \angle F_2 BF_1$, ন্যূনতম গোলাপেরণের শর্তানুসারে $\delta_1 = \delta_2$, ΔBF_2F_1 থেকে, $F_1F_2 = BF_2 = F_2O_2$ যেহেতু দ্বিতীয় লেন্সে আপতিত রশ্মি প্রায় উপাক্ষীয়। $BO_2 = h_2$-এর মানও খুব কম।

দ্বিতীয় লেন্সে, F_1 বিন্দু অসদ বস্তুবিন্দু ও চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব F_2 বিন্দুতে গঠিত হয়েছে।

$\therefore$ f_2-লেন্সের ক্ষেত্রে বস্তু দূরত্ব, $u = O_2F_1$, প্রতিবিম্ব দূরত্ব, $O_2F_2 = O_2F_1/2 = v$

ফোকাস দূরত্ব, f_2। অতএব লেন্স সমীকরণ

$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$ থেকে লেখা যায়

$$\frac{2}{F_1O_2} = \frac{1}{f_2}$$

বা, $\frac{1}{F_1O_2} - \frac{1}{F_1O_2} = \frac{1}{f_2}$ বা, $\frac{1}{F_1 0_2} = \frac{1}{f_2}$ বা, $F_1O_2 = f_2$

দুই লেন্সের মধ্যে দূরত্ব $a = O_1F_1 - O_2F_2 = f_1 - f_2$ ....(40)

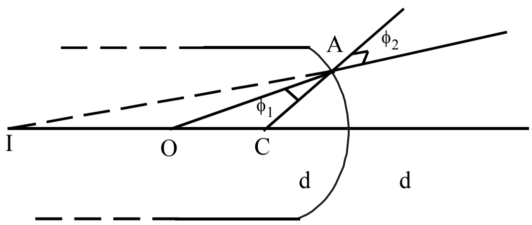
অর্থাৎ দুটি লেন্সের সমবায়ের ক্ষেত্রে ন্যূনতম গোলাপেরণের শর্ত হল সমাক্ষীয়ভাবে রক্ষিত লেন্স দুটির মধ্যে ব্যবধান তাদের ফোকাস দৈর্ঘ্যের পার্থক্যের সমান হতে হবে।

(e) দুটি সংলগ্ন উত্তল ও অবতল লেন্সের ব্যবহার (Use of convex lens and concave lens in contact) :

উত্তল লেন্স ও অবতল লেন্সের গোলাপেরণ পরস্পরের বিপরীতমুখী। অতএব উপযুক্ত উত্তল লেন্স ও অবতল লেন্স সংলগ্ন রেখে সমবায় গঠন করে গোলাপেরণ ন্যূনতম করা যায়।

(f) গোলীয় তলে অবিপথী বা অ্যাপ্লানাটিক বিন্দুর ব্যবহার (Use of aplanatic ponits of a spherical surface) :

একটি একক লেন্স সাধারণভাবে কখনোই গোলাপেরণ মুক্ত হয় না। কিন্তু গোলাকার প্রতিসারক তলের ক্ষেত্রে এর অক্ষের উপর এমন দুটি বিন্দু পাওয়া যায় যার একটিতে বস্তুবিন্দু থাকলে ওখান থেকে আগত আলোক-রশ্মি যে কোনো কোণে আপতিত হোক না কেন, প্রতিসরণের পর অক্ষের উপর অপর বিন্দুটি থেকে অপসৃত হয় বলে মনে হয়। এই বিন্দু দুটিকে অবিপথী বিন্দু বলে। তাই এই তলের উন্মেষ যত বড়ো হোক না কেন প্রথম অবিপথী বিন্দুতে বস্তু থাকলে দ্বিতীয় অবিপথী বিন্দুতে গঠিত প্রতিবিম্বে গোলাপেরণ থাকবে না। এরূপ ক্ষেত্রে প্রতিসারক তলটিকে বলে অবিপথী তল।



চিত্র 9·28 অবিপক্ষী বিন্দু

ধরুন একটি গোলীয় তল দিয়ে μ_1 ও μ_2 প্রতিসরাংকের দুটি মাধ্যম বিভাজিত। μ_2 মাধ্যমের তুলনায় μ_1 মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক, $\mu = \dfrac{\mu_1}{\mu_2}$ ।

গোলীয় তলের বক্রতা ব্যাসার্ধ, CA = r, বক্রতা কেন্দ্র থেকে $CO = \dfrac{r}{\mu}$ দূরত্বে কোনো বস্তুবিন্দু থেকে যে কোনো কোণে আলোকরশ্মি গোলীয় তলে আপতিত হলে দেখানো যায় I বিন্দুতে প্রতিবিম্ব গঠিত হবে এবং তখন CI = $r\mu$ হবে।

ধরুন, আপতন ও প্রতিসরণ কোণ যথাক্রমে ϕ_1 ও ϕ_2 স্নেলের সূত্রানুসারে, $\mu_1 \sin\phi_1 = \mu_2 \sin\phi_2$

বা, $$\frac{\sin\phi_2}{\sin\phi_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \mu \quad \text{...............(i)}$$

Δ ACO থেকে, $$\frac{\sin\angle AOC}{\sin\phi_1} = \frac{r}{CO} = \frac{r}{\frac{r}{\mu}} = \mu \quad \text{................(ii)}$$

(i) ও (ii) নং সমীকরণ থেকে,

$$\angle AOC = \phi_2 \quad ....(iii)$$

আবার Δ AOI থেকে,

$$\angle AOC = \angle AIO + \angle IAO$$

বা, $\phi_2 = \angle AIO + (\phi_2 - \phi_1)$

বা, $\phi_1 = \angle AIO \quad ....(iv)$

Δ AIC থেকে

$$\frac{\sin\angle CAI}{\sin\angle AIC} = \frac{CI}{AC}$$

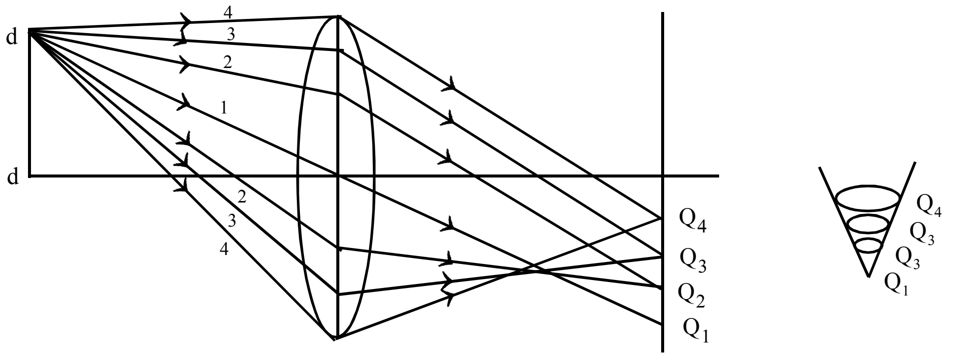
বা, $\dfrac{\sin\phi_2}{\sin\phi_1} = \dfrac{CI}{r}$, বা, $\mu = \dfrac{CI}{r} \quad \therefore\ CI = \mu r \quad ....(v)$

অতএব প্রতিবিম্ব দূরত্ব CI, আপতন কোণের উপর নির্ভর করে না। দেখানো যায় একবর্ণী আরেকটি অপেরণ কোমা (coma)ও অবিপথী বিন্দুদ্বয়ের ক্ষেত্রে দূরীভূত হয়।

গোলাপেরণ দূরীকরণে অবিপথী বিন্দুর ব্যবহার করা হয় উচ্চবিবর্ধন ক্ষমতাযুক্ত অণুবীক্ষণ যন্ত্রের অভিলক্ষ্যে।

(ii) কোমা (Coma) :

লেন্সের প্রধান অক্ষ থেকে কিছু দূরে বস্তুবিন্দু থাকলে ঐ বিন্দু থেকে আগত রশ্মিগুচ্ছ লেন্সের বিভিন্ন বলয়ের মধ্য দিয়ে প্রতিসৃত হয়ে যে প্রতিবিম্ব গঠন করে তাদের পার্শ্বীয় বিবর্ধন হয়। উপাক্ষীয় বলয়ের তুলনায় প্রান্তীয় বলয়গুলি বেশী বিবর্ধিত প্রতিবিম্ব গঠন করে। প্রতিবিম্বের আকার ধূমকেতুর (comet) coma বা পুচ্ছের মতো হয়। এই জন্য এই অপেরণকে কোমা (coma) বলা হয়। কোমা মূলত পার্শ্বীয় গোলাপেরণ। 9·28 চিত্রে বস্তু—বিন্দু Q এর প্রতিবিম্ব পর্দায় দেখানো হয়েছে। প্রধান রশ্মি (1) লেন্সের আলোককেন্দ্রের মধ্য দিয়ে প্রতিসৃত হয়ে Q_1 বিন্দুতে বিন্দু আকারের প্রতিবিম্ব গঠন করে, প্রান্তীয় রশ্মিগুলি (4,4) একটি বৃত্তের আকারের Q_4 প্রতিবিম্ব গঠন করে।



চিত্র 9·28 কোমা

1 3 4 এর মধ্যে থাকা বলয়গুলি কর্তৃক Q_2, Q_3 ইত্যাদি বৃত্তাকার প্রতিবিম্ব গঠন করে। Q_1 থেকে পর পর বৃত্তগুলি আকারে বড় হতে থাকে। প্রান্তীয় বলয়ের ক্ষেত্রে বিবর্ধন বেশী বলে এর জন্য প্রতিবিম্ব Q_4 সব থেকে বড় হয়। এই ধরনের প্রতিবিম্ব দেখতে ধুমকেতুর কোমার ন্যায়।

● **কোমা দূরীকরণ (Removal of Coma) :**

(a) কোনো লেন্সকে ন্যূনতম গোলাপেরণের জন্য প্রস্তুত করলে এর কোমাও কম হয়।

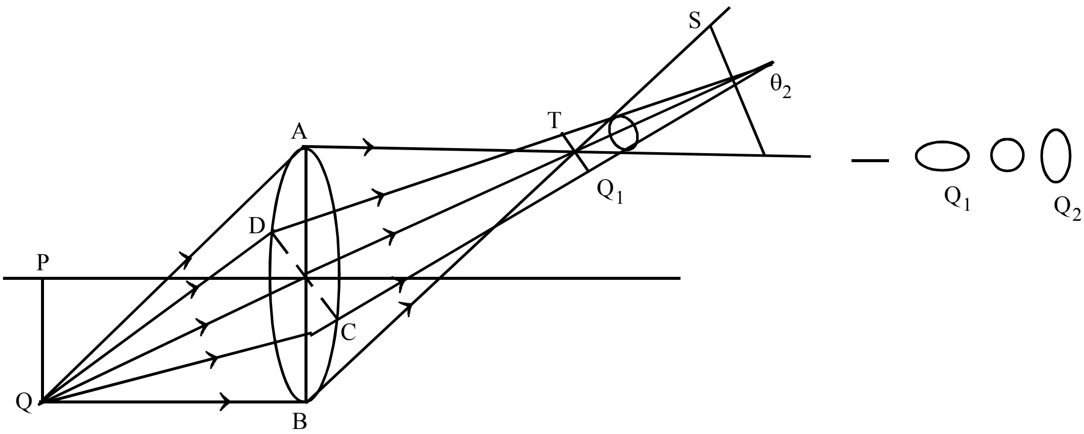
(b) দুটি পাতলা লেন্সকে সংলগ্ন রেখে লেন্সযুগ্ম তৈরী করে কোমা দূর করা যায়। কোন লেন্স বা লেন্স সমন্বয়ের ক্ষেত্রে অ্যাবির সাইনের শর্ত (Abbe's sine condition) পালিত হলে কোমা পুরোপুরি দূরীভূত হয়। শর্তটি নিম্নরূপ—

$$\mu_1 y_1 \sin\theta_1 = \mu_2 y_2 \sin\theta_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(47)$$

এখানে y_1 ও y_2 যথাক্রমে বস্তুর ও প্রতিবিম্বের উচ্চতা, μ_1 ও μ_2 বস্তু ও প্রতিবিম্ব যে মাধ্যমে আছে তাদের প্রতিসরাঙ্ক, θ_1 ও θ_2 আপতিত ও নির্গত রশ্মি প্রধান অক্ষের সঙ্গে যে কোণ করে তাদের মান।

(iii) অবিন্দুকত্ব (Astigmatism) :

কোনো আলোকতন্ত্র গোলাপেরণ ও কোমা ত্রুটি থেকে মুক্ত হলেও সাধারণত অক্ষ থেকে দূরের কোনো বস্তু-বিন্দুর স্পষ্ট প্রতিবিম্ব উৎপন্ন করতে পারে না। এরূপ বিন্দু উৎস থেকে আসা রশ্মিগুচ্ছ যখন লেন্স থেকে নির্গত হয় তখন তারা পরস্পর লম্ব দুটি ফোকাস রেখার মধ্য দিয়ে যায়।



চিত্র 9·29 অবিন্দুকত্ব

9·29 চিত্রে PQ একটি বস্তু, কাগজের তলে থাকা লেন্সের AB ব্যাসের বলয়ের মধ্য দিয়ে নির্গত আলো Q_1 বিন্দুতে T ফোকাস রেখা বরাবর Q এর একটি প্রতিবিম্ব গঠিত হয়, আবার কাগজের তলের সঙ্গে লম্বভাবে থাকা CD ব্যাসের জন্য Q_2 বিন্দুতে অন্য একটি S ফোকাস রেখায় গঠিত হয়। T ও S রেখাদুটি পরস্পর লম্ব। T রেখাকে বলা হয় অবিন্দুক কিরণের প্রথম ফোকাস রেখা বা মুখ্য ফোকাস রেখা (first focal line or tangential line) এবং S রেখাকে বলা হয় অবিন্দুক কিরণের দ্বিতীয় ফোকাস রেখা বা গৌণ ফোকাস রেখা (second focal line or sagHal line)। Q_1 ও Q_2 বিন্দুর মাঝখানে রশ্মিগুচ্ছের আকার সাধারণভাবে উপবৃত্তাকার হয়। এই দুই বিন্দুর মাঝে কোনো এক স্থানে উপবৃত্তের অক্ষ দুটি সমান হয়ে বৃত্তের আকার হয়। এই স্থানকে ন্যূনতম অস্পষ্টতা বৃত্ত (circle of least confusion) বলে।

● **অবিন্দুকত্ব দূরীকরণ :**

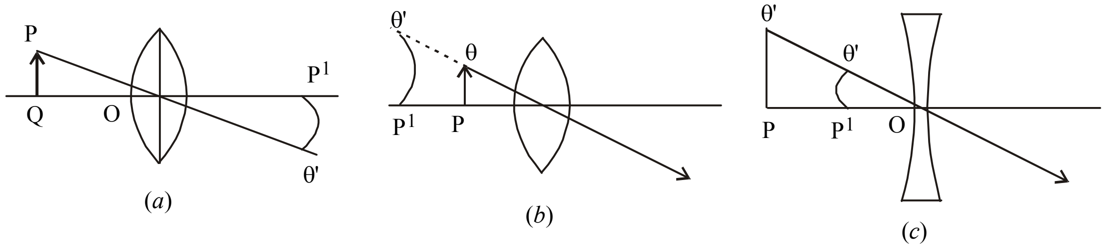
(a) স্টপ ব্যবহার (use of stop) : সমাক্ষ স্টপ ব্যবহার করে তির্যক রশ্মিগুলিকে লেন্সে আপতিত হতে না দিয়ে অবিন্দুকত্ব কমানো যায়। স্টপকে উপযুক্ত অবস্থানে বসাতে হয়। সাধারণত একটি লেন্সের বেলায় স্টপকে লেন্সের তলের খুব কাছে বসাতে হয় আর দুটি লেন্সের কোনো সমবায়ের বেলায় লেন্স দুটির মাঝখানে বসাতে হয়।

(b) উত্তল অবতল লেন্স ব্যবহার (use of convex and concave lens) : উত্তল ও অবতল লেন্সে অবিন্দুকত্ব বিপরীতমুখী হয়; তাই উত্তল ও অবতল লেন্সকে একটি উপযুক্ত ব্যবধানে রেখে সমবায় গঠন করলে অবিন্দুকত্ব অনেকটাই কমানো যায়। সেই অবস্থায় লেন্স সমবায় পিভ্যাল এর শর্ত (Petzval's condition) $\sum \frac{1}{\mu f} = 0$ মেনে চলে। দুটি লেন্সের বেলায়, $\frac{1}{\mu_1 f_1} + \frac{1}{\mu_2 f_2} = 0$, শর্তটি পালিত হতে হবে। μ_1 ও μ_2 যথাক্রমে এদের প্রতিসরাঙ্ক এবং f_1 ও f_2 এদের ফোকাস দূরত্ব।

(c) সম-চোঙাকৃতি লেন্স ব্যবহার (use of plano-cylindrical lens) : দুটি সম-চোঙাকৃতি লেন্স উপযুক্ত ব্যবধানে রেখে অবিন্দুকত্ব দূর করা যায়।

(d) টরিক লেন্স ব্যবহার (use of torric lens) : যে লেন্সের তল দুটির অনুভূমিক ও উল্লম্ব বক্রতা পৃথক তাকে টরিক লেন্স (tornic lens) বলে। টরিক লেন্স ব্যবহার করে অবিন্দুকত্ব দূর করা যায়।

(iv) বক্রতা (curvature) : গোলাপেরণ, কোমা ও অবিন্দুকত্ব কোনো লেন্সে উপস্থিত না থাকলেও কোনো বিস্তৃত বস্তুর প্রতিবিম্ব বক্র হতে পারে। এর কারণ হল অক্ষ থেকে দূরে অবস্থিত বস্তুবিন্দুগুলি তুলনামূলকভাবে লেন্স থেকে দূরে থাকে। অক্ষ থেকে দূরে থাকা বস্তুবিন্দুর প্রতিবিম্ব উপাক্ষীয় বস্তুবিন্দুর প্রতিবিম্বের তুলনায় লেন্সের কাছে গঠিত হয়। প্রতিবিম্বটি বক্র আকারের হয়। এই ত্রুটিকে **বক্রতা** বলা হয়। 9·30 (a) চিত্রে উত্তল লেন্সে সদবিম্বের ক্ষেত্রে বক্রতা দেখানো হয়েছে। এ ক্ষেত্রে অক্ষীয়



চিত্র 9·30 বক্রতা

বস্তুবিন্দু P এর প্রতিবিম্ব P' বিন্দুতে ও অক্ষ থেকে দূরের বস্তুবিন্দু Q এর প্রতিবিম্ব Q' বিন্দুতে গঠিত হয়েছে। OQ দূরত্ব OP দূরত্বের থেকে বেশী হওয়ায় OQ' দূরত্ব OP' এর থেকে কম হবে; কারণ বস্তু দূরত্ব বাড়লে প্রতিবিম্ব দূরত্ব কম হয়। Q' বিন্দু লেন্সের দিকে সরে আসে। PQ বস্তুর অন্যান্য বিন্দুগুলির প্রতিবিম্ব P'Q' বক্ররেখার ওপর গঠিত হয়। উত্তল লেন্সে অসদবিম্ব গঠনের বক্রতা 9;30 (b) তে দেখানো হয়েছে। এখানে বস্তু

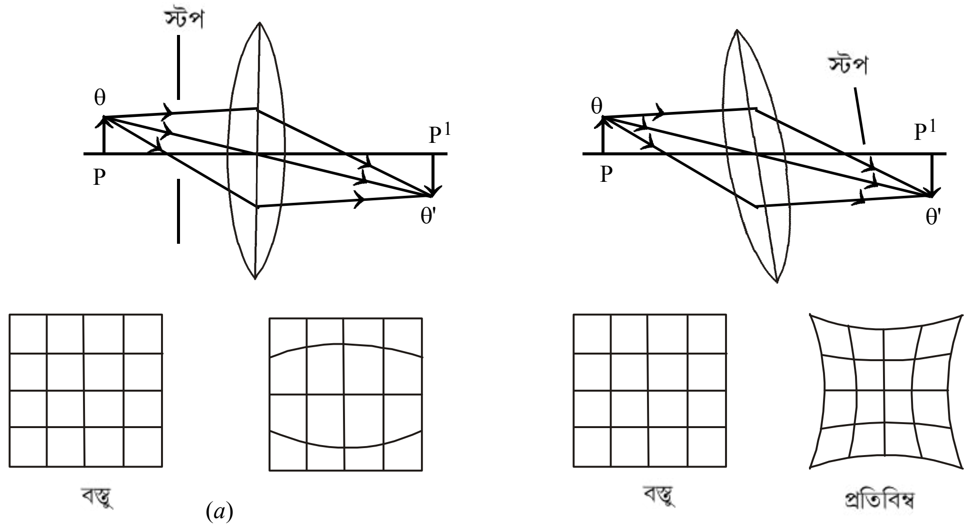
লেন্সের ফোকাস দূরত্বের মধ্যে অবস্থিত, বক্রতা লেন্স থেকে দূরের দিকে হয়। 9·30 (c) চিত্রে অবতল লেন্সে বক্রতা দেখানো হয়েছে।

● **বক্রতা দূরীকরণ : উত্তল অবতল লেন্স ব্যবহার (Use of convex and concave lenses) :**

পিভ্যালের শর্ত $\left(\sum \frac{1}{\mu f} = 0\right)$ প্রয়োগ করে উত্তল অবতল লেন্স সমবায়ের সাহায্যে বক্রতা কমানো যায়। একটি উত্তল ও একটি অবতল লেন্স নির্দিষ্ট ব্যবধানে রাখলে পিভ্যালের শর্তটি হবে, $\frac{1}{\mu_1 f_1} + \frac{1}{\mu_2 f_2} = 0$

(v) বিকৃতি (Distortion) :

লেন্সে অবিন্দুকত্ব, বক্রতা ইত্যাদি ত্রুটি ন্যূনতম করার জন্য স্টপ ব্যবহার করা হয়। এই স্টপ উপযুক্ত স্থানে না বসালে প্রতিবিম্ব স্পষ্ট হলেও প্রতিবিম্ব বিকৃত হয়ে যায়। এই ত্রুটিকে **বিকৃতি** বলে।



চিত্র 9·31 বিকৃতি

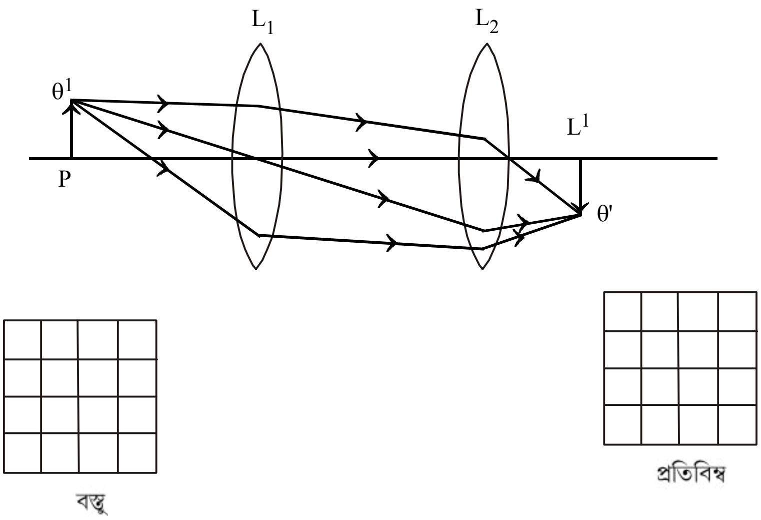
9·31 (a) চিত্রে দেখানো হয়েছে,—উত্তল লেন্সের সামনে স্টপ ব্যবহার করলে সদবিম্ব পিপা আকার (barrel shaped) হয়। 9·31 (b) চিত্রে দেখানো হয়েছে উত্তল লেন্সের পিছনে স্টপ ব্যবহার করলে সদবিম্ব ডমরু আকার (cushion shpaed) হয়।

● **বিকৃতি দূরীকরণ (Removal of distortion) :**

দুটি লেন্সের ব্যবহার (Use of two lenses) :

দুটি একই রকম লেন্সের সমবায়ের মাঝখানে স্টপ ব্যবহার করে (চিত্র 9·32) এই আকার দূর করা যায়।

প্রথম লেন্সের ডমরু আকার ত্রুটি ও দ্বিতীয় লেন্সের পিপা আকারের ত্রুটি পরস্পরের বিপরীত হওয়ায়, চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব বিকৃতি যুক্ত হয়।



চিত্র 9·32 দুটি লেন্সের সাহায্যে বিকৃতি দূরীকরণ

ছবি তোলার ভালো ক্যামেরায় এই ধরনের স্টপসহ লেন্স সমবায়ের ব্যবস্থা রাখা হয়।

9.12 আলোক রশ্মির বর্ণ বিচ্ছুরণ (Dispersion of Light Rays) ঃ

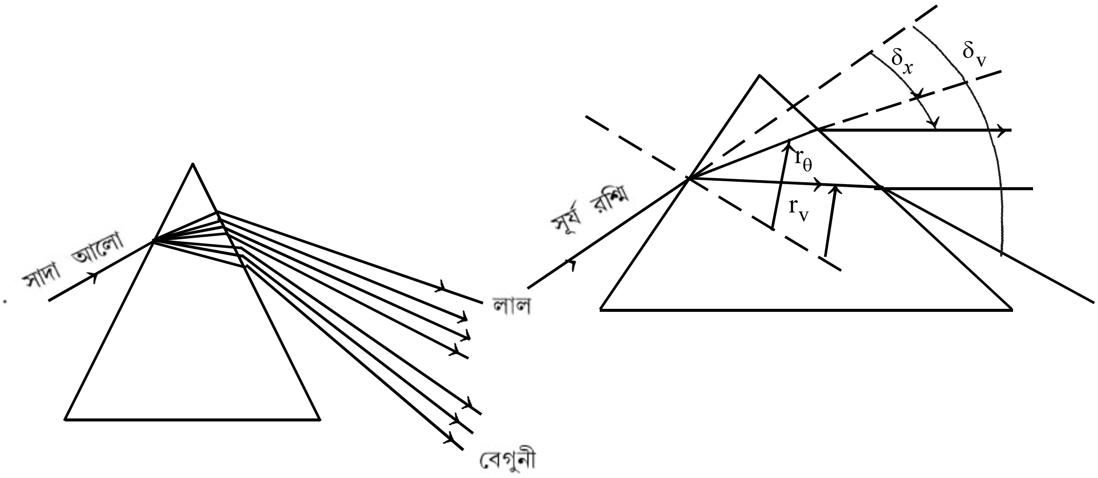
কোনো মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক (μ), আলোকের বর্ণ তথা কম্পাঙ্কের (γ) উপর বা আলোকের তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের $\left(\lambda = \frac{c}{\gamma}\right)$ উপর নির্ভর করে। যৌগিক আলো কোনো মাধ্যমে প্রতিসৃত হলে বিভিন্ন বর্ণের আলোর বিচ্যুতি বিভিন্ন হয়। প্রতিসরণের পর বিভিন্ন বর্ণের আলো পরস্পর থেকে পৃথক হয়ে যায়। প্রিজমের মধ্য দিয়ে প্রতিসৃত হলে এই বিচ্যুতি আরো বেশী হয়। বিভিন্ন বর্ণের আলো আরো বেশী পরস্পর থেকে দূরে ছড়িয়ে পড়ে। একে বর্ণ বিচ্ছুরণ (chromatic dispersion) বলে।

পরীক্ষায় দেখা যায় মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক আলোর তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের সঙ্গে কমতে থাকে। এ সম্পর্কিত ফরাসি গণিতজ্ঞ কচির সম্পর্ক (Canchy's rclation) হল—

$\mu = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + ...,$ A, B, C,...... ইত্যাদি ধ্রুবক এবং এদের মান পর পর দ্রুত হ্রাস পেতে থাকে।

প্রথম দুটি পদ বিবেচনা করলে সম্পর্কটি হয় $\mu = A + \frac{B}{\lambda^2}$

. ণ



চিত্র 9·32 প্রিজাম বিচ্ছুরণ

বেগুনী আলোর তরঙ্গদৈর্ঘ্য লাল আলোর থেকে কম হওয়ায় বেগুনী আলোর প্রতিসরাঙ্ক লাল আলোর থেকে বেশী। সেজন্য সাদা আলো (সূর্যের আলো) প্রিজমের মধ্য দিয়ে যাওয়ার পর বেগুনী আলোর চ্যুতি (δ_V) লাল আলোর চ্যুতির (δ_R) তুলনায় বেশী হয়। মনে করুন $\mu = \frac{\sin i}{\sin r}$। অন্যান্য মধ্যবর্তী আলো এদের মধ্যে অবস্থান করে (চিত্র 9·32)। তরঙ্গদৈর্ঘ্য বৃদ্ধির সঙ্গে প্রতিসরাঙ্ক কমে যাওয়ার সম্পর্ক প্রতিপালিত হলে বিচ্ছুরণকে স্বাভাবিক বর্ণ বিচ্ছুরণ (normal dispession) বলে। কোনো কোনো মাধ্যমে আলোকের বরণাত্মক অবশোষণ অঞ্চল (selective absorption region) থাকে অর্থাৎ বর্ণ বাছাই করে শোষণ করা অঞ্চল থাকে। সেক্ষেত্রে কচির সম্পর্কটি মান্য হয় না। তরঙ্গদৈর্ঘ্য বৃদ্ধির সঙ্গে প্রতিসরাঙ্ক অস্বাভাবিকভাবে বৃদ্ধি পায়। এই বিচ্ছুরণকে ব্যতিক্রান্ত বর্ণ বিচ্ছুরণ (anomalous dispersion) বলে।

● **কৌণিক বিচ্ছুরণ ও বর্ণ বিচ্ছুরণ ক্ষমতা (Angnlar dispersion and dispersive power) :**

সাদা আলো প্রিজমের মধ্য দিয়ে গেলে যে বর্ণালী পাওয়া যায়, সেই বর্ণালীর দুটি প্রান্তীয় আলোকরশ্মির বিচ্যুতির পার্থক্য বা এদের মধ্যে কোণের পার্থক্যকে **কৌণিক বিচ্ছুরণ** বলে। দুটি প্রান্তীয় রশ্মি লাল ও বেগুণি হলে এবং এদের R ও V দিয়ে চিহ্নিত করলে,

কৌণিক বিচ্ছুরণ, $\theta = \delta_V - \delta_R$

প্রিজম পাতলা ও আলোকরশ্মি প্রায় লম্বভাবে আপতিত হলে আলোকরশ্মির কৌণিক চ্যুতি $\delta = (\mu - 1)$ A, A হল প্রিজমের শীর্ষকোণ।

অতএব $\delta_V = (\mu_V - 1)A$ ও $\delta_R = (\mu_R - 1)$ A

কৌণিক বিচ্ছুরণ, $\theta = \delta_V - \delta_R = (\mu_V - \mu_R)$ A

বা, $\theta = d_\mu A$ ....(48)

যেখানে $= d\mu = \mu_V - \mu_R$

দুটি প্রান্তীয় আলোকরশ্মির মধ্যবর্তী হলুদ আলোকের একক বিচ্যুতির তুলনায় পাতলা প্রিজমের কৌণিক

বিচ্ছুরণকে প্রিজমের মাধ্যমের **বর্ণ বিচ্ছুরণ ক্ষমতা** বলে। মধ্যবর্তী আলোকের বিচ্যুতি প্রান্তীয় আলোকরশ্মির বিচ্যুতির গড়ের সঙ্গে প্রায় সমান হয়। লেখা যায় $\delta = \dfrac{\delta_V + \delta_R}{2} = \left(\dfrac{\mu_V + \mu_R}{2} - 1\right)A = (\mu - 1)A$

μ হল দুটি প্রতিসরাঙ্কের গড় মান $= \dfrac{\mu_V + \mu_R}{2}$

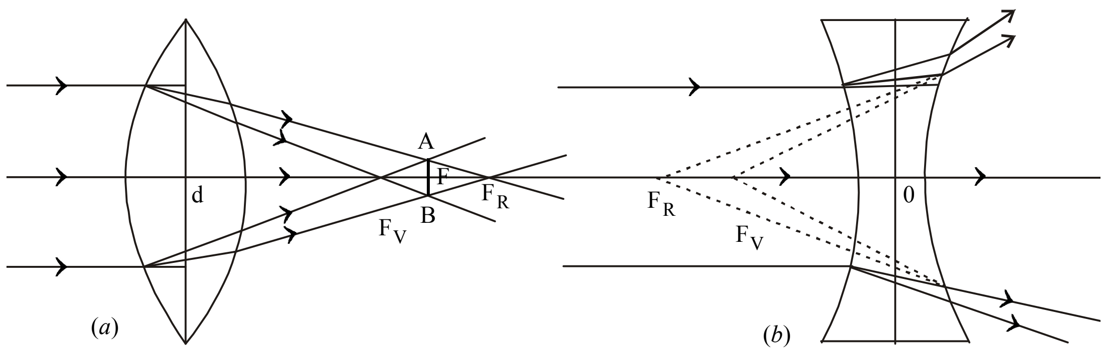
অতএব বর্ণ বিচ্ছুরণ ক্ষমতা $\omega = \dfrac{\delta_V - \delta_R}{\delta} = \dfrac{A d\mu}{(\mu - 1)A} = \dfrac{d\mu}{\mu - 1}$ ....(49)

9.13 বর্ণাপেরণ (Chromatic Aberration) ঃ

সাদা আলোর সমান্তরাল রশ্মিগুচ্ছ কোনো লেন্সে প্রধান অক্ষের সমান্তরালভাবে আপতিত হলে, প্রতিসরণের পর এটি বিভিন্ন বর্ণে বিশ্লিষ্ট হয় এবং প্রধান অক্ষের উপর বিভিন্ন বিন্দুতে মিলিত হয় (উত্তল লেন্স) বা অবতল লেন্সের ক্ষেত্রে বিভিন্ন বিন্দু থেকে অপসৃত হয় বলে মনে হয়। ফলে বস্তুর প্রতিবিম্বও হয় সাত বর্ণের সাত বিন্দুতে। লেন্সের এই ত্রুটিকে বর্ণাপেরণ বলে। লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্যের রাশিমালা হল

$$\frac{1}{f} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

আলোর বিভিন্ন বর্ণের জন্য লেন্সের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক (μ) বিভিন্ন হয়। লাল আলোর প্রতিসরাঙ্ক বেগুনী আলোর প্রতিসরাঙ্কের থেকে কম ($\mu_R < \mu_V$)। অতএব লাল আলোর ফোকাস দৈর্ঘ্য বেগুনী আলোর ফোকাস দৈর্ঘ্যের থেকে বেশী ($f_R > f_V$)



চিত্র 9·33 লেন্স বর্ণাপেরণ

উত্তল লেন্সের ক্ষেত্রে $OF_R = f_R$ ও $OF_V = f_V$ (চিত্র 9·33 (a))। F_R বিন্দুটি F_V বিন্দুর তুলনায় লেনন্স থেকে দূরে অবস্থিত। এই দুই বর্ণের মধ্যবর্তী বর্ণের রশ্মিগুলি F_R ও F_V বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী অঞ্চলে মিলিত হয়। অবতল লেন্সের ক্ষেত্রে বিশ্লিষ্ট বিভিন্ন বর্ণের রশ্মিগুলি বিভিন্ন বর্ণের ফোকাস বিন্দু থেকে অপসৃত হচ্ছে বলে

মনে হয়। কোনো বস্তুর প্রতিবিম্বও রঙিন হবে। এই ত্রুটিকে বর্ণাপেরণ বলে। উত্তল লেন্সের ক্ষেত্রে F_V বিন্দুতে পর্দা রাখলে কেন্দ্রে বেগুনী বিন্দু ও প্রান্তে লাল আলোর বৃত্ত এবং F_R বিন্দুতে পর্দা থাকলে কেন্দ্রে লাল বিন্দু ও প্রান্তে বেগুনী আলোর বৃত্ত পাওয়া যায়। দুটি বিন্দুতেই রঙিন প্রতিবিম্ব পাওয়া যায়; কোনো ক্ষেত্রেই স্পষ্ট বিন্দু বিম্ব পাওয়া যায় না। এই দুটি বিন্দুর মধ্যে AB অবস্থানে পর্দায় একটি সুষম আলোকিত বৃত্ত পাওয়া যায়; সব বর্ণের আলোর উপরিপাতের ফলে আলোক বৃত্তটি প্রায় সাদা হয়। এই বৃত্তকে ন্যূনতম অস্পষ্টতা বৃত্ত (circle of least confusion) বা ন্যূনতম বর্ণাপেরণ বৃত্ত (circle of least chromatic aberration) বলে। প্রধান অক্ষের ওপর দুটি ফোকাস F_R ও F_V এর মধ্যে দূরত্বকে **অনুদৈর্ঘ্য** (longitudinal) বর্ণাপেরণ হিসাবে ও ন্যূনতম অস্পষ্টতা বৃত্তের ব্যাসকে **তির্যক বর্ণাপেরণ** (lateral or axial)। হিসাবে পরিমাপ করা হয়। তির্যক বর্ণাপেরণ প্রতিবিম্বের বিবর্ধনের সঙ্গে সম্বন্ধ যুক্ত।

লেন্সের উন্মেষ বড়ো হলে অনুদৈর্ঘ্য বর্ণাপেরণ বেশী হয়। তির্যক বর্ণাপেরণ উন্মেষের উপর নির্ভর করে না। সাধারণ এ দুটির যে কোনো একটি সংশোধিত করলে মোটামুটিভাবে বর্ণাপেরণ কম হয়। উন্মেষ বড়ো ও দৃষ্টিক্ষেত্র (field of view) ছোটো হলে, অনুদৈর্ঘ্য বর্ণাপেরণের সংশোধন বেশি প্রয়োজন। উন্মেষ ছোটো ও দৃষ্টিক্ষেত্র বড়ো হলে তির্যক বর্ণাপেরণের সংশোধন বেশি প্রয়োজন।

দুটি (বা বেশি) লেন্সের সমবায় ব্যবহার করে বর্ণাপেরণ কমানো যায়। সেক্ষেত্রে একটি লেন্সের বিচ্ছুরণ অন্যটির বিচ্ছুরণকে প্রতিমিত করে।

- **লেন্সের অবর্ণতা (Achromatism of Lenses)**

(a) একটি একক লেন্সের অবর্ণতা (Achromatism of a single lens)

একটি লেন্সের বর্ণাপেরণের পরিমাণ হল লাল ও বেগুনী আলোর ফোকাস দূরত্বের মধ্যে পার্থক্য ($f_R - f_V$)। লেন্সটির বর্ণাপেরণ মুক্ত হওয়ার শর্ত হল $f_R - f_V = 0$

আবার $\dfrac{1}{f_V} - \dfrac{1}{f_R} = \dfrac{f_R - f_V}{f_V f_R}$

অতএব অবর্ণতার শর্ত হিসাবে লেখা যায় $\dfrac{1}{f_V} - \dfrac{1}{f_R} = 0$

বা, $\dfrac{d}{d\lambda}\left(\dfrac{1}{f}\right) = 0$

অর্থাৎ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের সঙ্গে ফোকাস দূরত্ব f বা তার আন্যোন্যক $\left(\dfrac{1}{f}\right)$ এর পরিবর্তন শূন্য হবে।

আবার $\dfrac{1}{f} = (\mu - 1)\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$

$$\therefore \quad \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{d\mu}{d\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

বা, $d\left(\dfrac{1}{f}\right) = d\mu\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) = \dfrac{d\mu}{\mu - 1} \cdot (\mu - 1)\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) = \dfrac{\omega}{f}$

অর্থাৎ লেন্সটিকে অবর্ণক হতে হলে $d\left(\frac{1}{f}\right)=\frac{\omega}{f}=0$ হতে হবে।

যেহেতু $\omega \neq 0,$ শর্তানুসারে $f=\infty$। অর্থাৎ এটি আর লেন্স থাকল না। অতএব নির্দিষ্ট ফোকাস দৈর্ঘ্যের কোনো একক লেন্স অবর্ণ হতে পারে না।

(b) পরস্পর সংলগ্ন দুটি লেন্সের সমবায়ের অবর্ণতা (Achromatism of two lenses in contact) :

f_1 ও f_2 ফোকাস দৈর্ঘ্যের দুটি লেন্স সংলগ্ন থেকে সমবায় গঠন করলে এবং তাদের তুল্য লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য F হলে, $\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$

লাল আলো ও বেগুনী আলোর জন্য তুল্য লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে F_R ও F_V হলে, বর্ণাপেরণের পরিমাপ হয় $F_R - F_V$।

আবার $\frac{1}{F_V}-\frac{1}{F_R}=\frac{F_R-F_V}{F_V F_R}$

সমবায়ের অবর্ণতার শর্ত, $F_R-F_V=0$ বা, $\frac{1}{F_V}-\frac{1}{F_R}=0$

অথবা, $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{F}\right)=0$ বা, $d\left(\frac{1}{F}\right)=0$

এখন $\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$

$\therefore\ d\left(\frac{1}{F}\right)=d\left(\frac{1}{f_1}\right)+d\left(\frac{1}{f_2}\right)$

প্রথম লেন্সটির ক্ষেত্রে

$$\frac{1}{f_1}=(\mu_1-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\therefore\ d\left(\frac{1}{f_1}\right)=d\mu_1\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{d\mu_1}{\mu_1-1}(\mu_1-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

বা, $d\left(\frac{1}{f_1}\right)=\frac{\omega_1}{f_1},\ \omega_1=\frac{d\mu_1}{\mu_1-1}=$ প্রথম লেন্সের বর্ণ বিচ্ছুরণ ক্ষমতা।

একই ভাবে দ্বিতীয় লেন্সের বর্ণ বিচ্ছুরণ ক্ষমতা ω_2 হলে, $d\left(\frac{1}{f_2}\right)=\frac{\omega_2}{f_2}$

অতএব অবর্ণতার শর্ত হয় $d\left(\frac{1}{F}\right)=d\left(\frac{1}{f_1}\right)+d\left(\frac{1}{f_2}\right)=0$

বা, $\frac{\omega_1}{f_1}+\frac{\omega_2}{f_2}=0$ ....(50)

উপরের শর্তটিকে লেখা যায়, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{f_1}{f_2}$ ω_1 ও ω_2 ধনাত্মক, অতএব f_1 ও f_2 বিপরীত চিহ্নের হতে হবে। অর্থাৎ লেন্সদুটির একটি উত্তল হলে অপরটি হবে অবতল।

● **বিশেষ আলোচনা**

(i) লেন্স দুটি একই উপাদানের হলে, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ (ধরি), সেক্ষেত্রে $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} = 0$। তখন সমবায়টি লেন্সের মতো ক্রিয়া করে না; একটি সমতল কাচ প্লেটের মতো ক্রিয়া করে। অর্থাৎ একই উপাদানের দুটি লেন্স সংলগ্ন রেখে গঠিত সমবায়কে অবর্ণক করা যায় না।

(ii) **অবর্ণক লেন্স-যুগ্ম (Achromatic doublet) :** দুটি লেন্সকে সংলগ্ন রেখে লেন্স সমবায়কে অবর্ণক করতে হলে পৃথক উপাদানের লেন্স প্রয়োজন। সাধারণত ক্রাউন কাচের উভোত্তল লেন্স ও ফ্লিন্টকাচের সমতলাবতল লেন্স নির্বাচন করা হয় যাতে, $\frac{\omega_1}{f_1} + \frac{\omega_2}{f_2} = 0$ শর্ত পালিত হয়। ক্রাউন কাচের বর্ণ বিচ্ছুরণ ক্ষমতা (ধরি ω_1) কম হওয়ায় ওর ফোকাস দৈর্ঘ্য (f_1) কম হয়। আর ফ্লিন্ট কাচের বর্ণ বিচ্ছুরণ ক্ষমতা (ω_2) বেশী হওয়ায় ওর ফোকাস দৈর্ঘ্য (f_2) বেশী হয়। সমলাবতল লেন্সটির অবতল পৃষ্ঠকে উত্তল লেন্সের দিকে রেখে কানাডা বালসাম (canada balsam) দিয়ে জোড়া লাগিয়ে সমবায়টি তৈরী করা হয়, এই সমবায়ই অবর্ণক লেন্স-যুগ্ম। এই লেন্স-যুগ্মের উত্তল তলটি বেশি সমান্তরাল আলোর দিকে রাখলে গোলাপেরণও কম হয়।

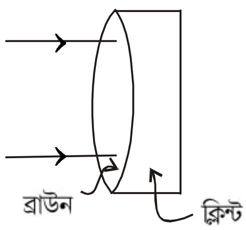
(iii) এই শর্ত প্রান্তীয় বর্ণ দুটির জন্য প্রযোজ্য হয়। অন্যান্য বর্ণের আলোকের বেলায় কম বেশী বর্ণাপেরণ থেকে যায়।

(iv) শর্তটিতে বস্তু দূরত্ব u এর কোনো উল্লেখ নেই। অতব বস্তুর যে কোনো অবস্থানে এই শর্ত প্রযোজ্য।

(v) দুটির বেশি লেন্স সংলগ্ন রেখে অবর্ণক সমবায় গঠন করলে, অবর্ণতার শর্ত হয়,

$$\frac{\omega_1}{f_1} + \frac{\omega_2}{f_2} + \frac{\omega_3}{f_3} + \ldots\ldots = 0$$

বা, $$\sum \frac{\omega}{f} = 0$$



চিত্র 9·34 অবর্ণক লেন্স-যুগ্ম

● **ব্যবহার** : বিভিন্ন বীক্ষণ যন্ত্রে (যেমন দূরবীক্ষণ) অভিলক্ষ্য হিসাবে অবর্ণক লেন্স যুগ্ম ব্যবহার করা হয়।

(e) নির্দিষ্ট ব্যবধানে রক্ষিত দুটি লেন্স সমবায় (combination of two lenses separated by a distance) :

f_1 ও f_2 ফোকাস দূরত্বের দুটি উত্তল লেন্স a দূরত্বের ব্যবধানে সমাক্ষীয় ভাবে থাকলে এবং ওদের তুল্য ফোকাস দূরত্ব F হলে, $\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{a}{f_1 f_2}$

এই সমবায়ের অবর্ণতার শর্ত

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\mathrm{F}}\right)=0 \quad \text{বা} \quad d\left(\frac{1}{\mathrm{F}}\right)=0$$

$$\therefore \quad d\left(\frac{1}{\mathrm{F}}\right)=d\left(\frac{1}{f_1}\right)+d\left(\frac{1}{f_2}\right)-\frac{a}{f_1}d\left(\frac{1}{f_2}\right)-\frac{a}{f_2}d\left(\frac{1}{f_1}\right)=0$$

প্রথম লেন্সটি বিবেচনা করলে, $\frac{1}{f_1}=(\mu_1-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$

$$\therefore \quad d\left(\frac{1}{f_1}\right)=d\mu_1\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1}\right)=\frac{d\mu_1}{\mu_1-1}\cdot(\mu_1-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$=\frac{\omega_1}{f_1}$$ [ω_1 = প্রথম লেন্সের বর্ণ বিচ্ছুরণ ক্ষমতা]

একইভাবে দ্বিতীয় লেন্সের বেলায় $d\left(\frac{1}{f_2}\right)=\frac{\omega_2}{f_2}$

অতএব অবর্ণতার শর্ত $\frac{\omega_1}{f_1}+\frac{\omega_2}{f_2}-\frac{a\omega_2}{f_1f_2}-\frac{a\omega_1}{f_1f_2}=0$

বা, $\frac{\omega_1}{f_1}+\frac{\omega_2}{f_2}-\frac{a}{f_1f_2}(\omega_1+\omega_2)=0$ ....(51)

● **বিশেষ আলোচনা :**

(i) লেন্স দুটি একই উপাদানের হলে, $\omega_1=\omega_2=\omega$.

তখন অবর্ণতার শর্ত হবে $\frac{\omega}{f_1}+\frac{\omega}{f_2}-\frac{2a\omega}{f_1f_2}=0 \quad \frac{\omega}{f_1}+\frac{\omega}{f_2}-\frac{2a\omega}{f_2}=0$

বা, $\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{2a}{f_1f_2}=0$ ....(52)

দুটি লেন্সই উত্তল হলে, f_1 ও f_2 ধনাত্মক। সেক্ষেত্রে $\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{2a}{f_1f_2}$

বা, $f_1+f_2=2a$ বা $a=\frac{f_1+f_2}{2}$ ....(53)

অর্থাৎ একই উপাদানের দুটি লেন্সের (উত্তল) ব্যবধান ফোকাস দূরত্ব দুটির যোগফলের অর্ধেক হলে সমবায়টি অবর্ণক হবে।

হাইগেন্‌স এর অভিকেন্দ্রকে (eye-piece) এই নীতি প্রয়োগে বর্ণাপেরণমুক্ত করা হয়।

(ii) $a=\frac{f_1+f_2}{2}$ শর্তে বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতার কোন উল্লেখ না থাকায় এই শর্তটি সমস্ত বর্ণের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য অর্থাৎ এই শর্তে গঠিত সমবায় সমস্ত বর্ণের জন্য অবর্ণক হবে।

(iii) উপরের শর্ত থেকে বোঝা যায় দুটি লেন্স উত্তল হবে ; অথবা দুটি লেন্সের একটি অবতল হলে, উত্তল লেন্সটির ফোকাস দূরত্ব অবতল লেন্সের ফোকাস দূরত্বের থেকে বেশি হতে হবে।

9.14 সারাংশ ঃ

(i) ফার্মাটের নীতি :

$$\delta\int \mu dl = 0,\ \ \mu dl = \text{ অতিক্ষুদ্র আলোকীয় পথ।}$$

আলোক রশ্মি এক বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে যে যে আলোকীয় পথ অণুসরণ করে তা স্থির মানের হয়।

(2) (i) গোলীয় প্রতিসারক তলে আলোর প্রতিসরণের রাশিমালা

$$\frac{\mu_2}{v} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{r}$$

(ii) প্রতিসারক তলের ক্ষমতা, $p = \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{r}$

(iii) প্রথম মুখ্য ফোকাস দূরত্ব, $f_1 = \dfrac{-\mu_1 r}{\mu_2 - \mu_1}$

দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস দূরত্ব, $f_2 = \dfrac{\mu_2 r}{\mu_2 - \mu_1}$

(iv) মুখ্য ফোকাসদ্বয়কে মূল বিন্দু ধরে অনুবন্ধী ফোকাসদ্বয়ের সম্পর্ক—

$$\mathrm{UV} = f_1 f_2$$

একে নিউটনের সমীকরণ বলে।

(v) গোলীয় প্রতিসারক তলে রৈখিক বা পার্শ্বীয় বিবর্ধন, $m = \dfrac{\frac{v}{\mu_2}}{\frac{u}{\mu_1}}$

কৌণিক বিবর্ধন, $m_a = \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\mu_1}{\mu_2}\dfrac{y_1}{y_2}$

বা, $\mu_1 y_1 \alpha = \mu_2 y_2 \beta$

অনুদৈর্ঘ্য বিবর্ধন, $l = m^2 \dfrac{\mu_2}{\mu_1}$

(3) (i) পাতলা লেন্সের ক্ষেত্রে লেন্স সমীকরণ $\frac{1}{f}=\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1}\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$

একে লেন্স প্রস্তুতকারকের সম্পর্ক বলে।

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$$

একে গসের সমীকরণ বলে।

এখানে f দ্বিতীয় ফোকাস দৈর্ঘ্য।

প্রথম মুখ্য ফোকাস দৈর্ঘ্য f_1 হলে $\frac{1}{f_1}=-\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1}\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$

(ii) লেন্সের মুখ্য ফোকাসদ্বয়কে মূলবিন্দু ধরে অনুবন্ধী ফোকাসদ্বয়ের সম্পর্ক বা নিউটনের সমীকরণ—

$$x_1\ x_2 = f_1 f_2$$

x_1 ও x_2 যথাক্রমে বস্তু দূরত্ব (প্রথম মুখ্য ফোকাস থেকে) ও প্রতিবিম্ব দূরত্ব (দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস থেকে) f_1 ও f_2 প্রথম ও দ্বিতীয় ফোকাস দৈর্ঘ্য

(iii) লেন্সের ক্ষমতা, $\mathrm{P}=\frac{1}{f}$

f মিটার এককে প্রকাশিত হয়ে P এর একক ডায়প্টার

(iv) উত্তল লেন্সের দুটি অবস্থানে সদবিম্ব পেতে হলে বস্তু ও পর্দার মধ্যে দূরত্ব $D>4f$ হতে হবে, এবং $f=\frac{D^2-x^2}{4D}$, x হল সদবিম্ব পাওয়ার দুটি অবস্থানের মধ্য দূরত্ব।

(v) লেন্সে রৈখিক বিবর্ধন $m=\frac{v}{u}$

অনুদৈর্ঘ্য বিবর্ধন $l = m^2$

(vi) দুটি লেন্স সংলগ্ন থেকে লেন্স যুগ্ম গঠন করলে, এবং তুল্য ফোকাস দূরত্ব F হলে, $\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$

তুল্য ক্ষমতা $P = P_1 + P_2$, P_1 ও P_2 যথাক্রমে দুটি লেন্সের ক্ষমতা।

(vii) f_1 ও f_2 ফোকাস দৈর্ঘ্যের দুটি লেন্স a ব্যবধানে থাকলে এবং তাদের তুল্য লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য F হলে, $\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{a}{f_1 f_2}$

(4) একবর্ণী অপেরণ বা সাইড্‌ল্ অপেরণ

(i) গোলাপেরণ : লেন্সের উন্মেষ বড়ো হলে উপাক্ষীয় রাশি লেন্সের দূরে ও প্রান্তীয় রশ্মি লেন্সের কাছে প্রতিবিম্ব গঠন করে। পর্দায় কোনোখানেই স্পষ্ট প্রতিবিম্ব পাওয়া যায় না।

গোলাপেরণ ন্যূনতম করার পদ্ধতি :

(a) স্টপের ব্যবহার (b) সমতলোত্তল লেন্সের ব্যবহার (c) উপযুক্ত বক্রতা ব্যাসার্ধযুক্ত লেন্সের ব্যবহার (d) দুটি উত্তল লেন্সের ব্যবহার সেক্ষেত্রে ব্যবধান $a = f_1 - f_2$। (e) দুটি সংলগ্ন উত্তল ও অবতল লেন্সের ব্যবহার (f) গোলীয় তলে অবিপথী বা অ্যাপ্লানাটিক বিন্দুর ব্যবহার।

(ii) কোমা : লেন্সের বিভিন্ন বলয়গুলি বিভিন্ন আকৃতির প্রতিবিম্ব গঠন করে। প্রতিবিম্ব সরু থেকে মোটা আকারের হয়।

কোমা দূরীকরণ : (a) ন্যূনতম গোলাপেরণ হলে, কোমাও কম হয়।

(b) অ্যাবির সাইনের শর্ত পালিত হলে কোমা দূরীভূত হয়।

(iii) অবিন্দুকত্ব : কোনো বিন্দুবস্তুর প্রতিবিম্ব কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে হয় না, লম্বভাবে দুটি রেখায় হয় ও এদের মধ্যে বিভিন্ন বৃত্তীয় আকারের হয়। লেন্সের বিভিন্ন বলয়ে বিভিন্ন বেধ থাকার জন্য এই ত্রুটি আসে।

অবিন্দুকত্ব দূরীকরণ : (a) স্টপের ব্যবহার (b) উত্তল অবতল লেন্স ব্যবহার (c) সমচোঙাকৃতি লেন্স ব্যবহার (d) টরিক লেন্স—(যার দুটি তলের অনুভূমিক ও উল্লম্ব বক্রতা পৃথক) ব্যবহার।

(iv) বক্রতা : বিস্তৃত বস্তুর প্রতিবিম্ব অক্ষ থেকে দূরে গঠিত হলে বেঁকে যায়।

দূরীকরণ : উত্তল অবতল লেন্স ব্যবহার।

(v) বিকৃতি : প্রতিবিম্ব সঠিক আকারের হয় না, স্টপ ব্যবহারে হয় পিপা আকার বা ডমরু আকারের প্রতিবিম্ব গঠিত হয়।

দূরীকরণ : দুটি লেন্স ও তাদের মাঝে স্টপ ব্যবহার করে।

(5) বর্ণাপেরণ : লেন্সে সাদা আলো পড়লে বিভিন্ন বর্ণের বিচ্ছুরণের ফলে বিভিন্ন স্থানে বিভিন্ন বর্ণের প্রতিবিম্ব গঠিত হয়।

বর্ণাপেরণ দূরীকরণ :

(a) পরস্পর সংলগ্ন দুটি লেন্স সমবায়। তখন অবর্ণতার শর্ত $\frac{\omega_1}{f_1} + \frac{\omega_2}{f_2} = 0$

ω_1, ω_2 দুটি লেন্সের বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা, f_1 ও f_2 ওদের ফোকাস দৈর্ঘ্য। [বর্ণ বিচ্ছুরণ ক্ষমতা $\omega = \frac{d\mu}{\mu - 1}$]

এই শর্ত ব্যবহারে অবর্ণক লেন্সযুগ্ম তৈরী করা হয়।

(b) নির্দিষ্ট ব্যবধানে রক্ষিত দুটি লেন্সের সমবায়। সেক্ষেত্রে অবর্ণতার শর্ত

$$\frac{\omega_1}{f_1} + \frac{\omega_2}{f_2} - \frac{a}{ff_1}(\omega_1 + \omega_2) = 0$$

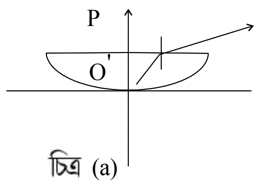
a হল লেন্স দুটির মধ্যে ব্যবধান।

দুটি লেন্স একই উপাদানের ও উত্তল হলে $a = \frac{f_1 + f_2}{2}$ শর্তটি পালিত হয়।

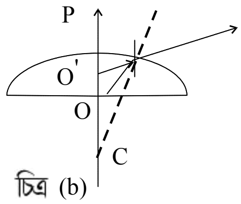
9.15 গাণিতিক উদাহরণ

উদাহরণ 1. সমতল পৃষ্ঠ থেকে অভিলম্বভাবে দেখলে একটি সমতল-উত্তল কাচখন্ডের সর্বোচ্চ বেধ মনে হয় 4.8×10^{-2}m। কিন্তু বক্রতল থেকে অভিলম্বভাবে দেখলে এই বেধ মনে হয় 6.0×10^{-2}m। কাচখন্ডটির সর্বোচ্চ বেধ 7.2×10^{-2}m হলে, ওর (i) প্রতিসরাঙ্ক এবং (ii) বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

সমাধান :



চিত্র (a)



চিত্র (b)

(a) চিত্রে সমতল পৃষ্ঠ থেকে দেখার সময় ধরি বস্তুদূরত্ব $=P_0$ ও আপাত বেধ PO′। কাচের প্রতিসারঙ্ক ধরি μ_1 ও বায়ুর প্রতিসারঙ্ক $\mu_2 = 1$।

বস্তু দুরত্ব $PO = u = -7.2 \times 10^{-2} m$

প্রতিবিম্ব দূরত্ব $PO' = v = -4 \cdot 8 \times 10^{-2} m$

বক্রতা ব্যাসার্ধ, $r = \alpha$ (সমতল পৃষ্ঠে প্রতিসরণ)

$\therefore \dfrac{\mu_2}{v} - \dfrac{\mu_1}{u} = \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{r}$ সমীকরণ থেকে পাই

$$\frac{1}{-4.8 \times 10^{-2}} - \frac{\mu_1}{-7.2 \times 10^{-2}} = \frac{1-\mu_1}{\alpha} = 0$$

$$\therefore \mu_1 = \frac{7.2 \times 10^{-2}}{4.8 \times 10^{-2}} = 1.5$$

(b) চিত্রে প্ররিসরণ হয়েছে বক্রতলে।

বস্তুদুরত্ব $u = -7.2 \times 10^{-2} m$

প্রতিবিম্বদূরত্ব, $v = -6 \times 10^{-2} m$

বক্রতা ব্যাসার্ধ $= r$ (ধরি)

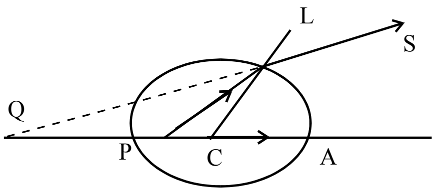
$\therefore \dfrac{\mu_2}{v} - \dfrac{\mu_1}{u} = \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{r}$ সমীকরণ থেকে পাই

$$\frac{1}{-6 \times 10^{-2}} - \frac{1.5}{-7.2 \times 10^{-2}} = \frac{1-1.5}{r}$$

বা, $-\dfrac{1}{6\times10^{-2}}+\dfrac{1.5}{7.2\times10^{-2}}=\dfrac{0.5}{r} \qquad \therefore r=12\times12\times10^{-2}\,m$

উদাহরণ 2. একটি 10.0×10^{-2}m ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কাচের গোলকের গায়ে লাল কালির একটি বিন্দুকে গোলকের মধ্য দিয়ে ঠিক বিপরীত পৃষ্ঠ থেকে সোজাসুজি দেখলে কোথায় কী পরিমাণ বিবর্ধিত দেখা যাবে? (কাচের প্রতিসরাঙ্ক =1.5)।

সমাধান : মনে করি (চিত্রে) P হল কালির বিন্দু। PL উপাক্ষীয় রশ্মি প্রতিসৃত হয়ে LS পথে প্রতিসৃত হয়েছে। Q বিন্দুতে প্রতিবিম্ব গঠিত হয়েছে। L বিন্দুটি A বিন্দুর খুব কাছে।



বস্তুদূরত্ব $\mathrm{PL}=u\approx-20\times10^{-2}\,m$

বক্রতা ব্যাসার্ধ $\mathrm{CL}=-10\times10^{-2}\,m$

কাচের প্রতিসরাঙ্ক $\mu_1=1.5$ বায়ুর প্রতিসরাঙ্ক $\mu_2=1$

বস্তুদূরত্ব (ধরি) v। বক্রতলে প্রতিসরণের সমীকরণ

$$\frac{\mu_2}{v}-\frac{\mu_1}{u}=\frac{\mu_2-\mu_1}{r}$$

$$\therefore\ \frac{1}{v}-\frac{1.5}{-20\times10^{-2}}=\frac{1-1.5}{-10\times10^{-2}}$$

বা, $\dfrac{1}{v}+\dfrac{1.5}{20\times10^{-2}}=\dfrac{-0.5}{-10\times10^{-2}}$

$$\therefore\ \frac{1}{v}=5-7\cdot5=-2\cdot5 \qquad \therefore\ v=-0.4m$$

ঋণাত্মক চিহ্ন থেকে বোঝা যায় প্রতিবিম্ব Q অসদ।

বিবর্ধন $m=\dfrac{v/\mu_2}{u/\mu_1}=\dfrac{-0.4}{1}\times\dfrac{1.5}{-0.2}=3$

$\therefore$ প্রতিবিম্ব 3 গুণ বর্ধিত হবে।

উদাহরণ 3. কাচ $(\mu=1.5)$ দিয়ে তৈরী একটি সমতলোত্তল কাগজ চাপার (paper weight) ব্যাস 12×10^{-2}m। বক্রতলের জন্য এর প্রথম ও দ্বিতীয় ফোকাস দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন। (a) যখন এটি বায়ুতে থাকে, (b) যখন এটি জলের $(\mu=1.33)$ মধ্যে থাকে।

সমাধান : গোলীয় তলটি উত্তল। বক্রতা ব্যাসার্ধ $=+6\times10^{-2}\,m$।

প্রথম ও দ্বিতীয় ফোকাস দৈর্ঘ্যের রাশিমালা যথাক্রমে,

$$f_1 = \frac{-\mu_1 r}{\mu_2 - \mu_1} \quad ও \quad f_2 = \frac{\mu_2 r}{\mu_2 - \mu_1}$$

(a) যখন বায়ুর মধ্যে থাকে

$\mu_1 = 1, \mu_2 = 1.5$

$\therefore$ প্রথম ফোকাস দৈর্ঘ্য $f_1 = \frac{-1 \times 6 \times 10^{-2}}{1.5 - 1} = \frac{-6 \times 10^{-2}}{0.5} = -12 \times 10^{-2}\, m$

দ্বিতীয় ফোকাস দৈর্ঘ্য $f_2 = \frac{1.5 \times 6 \times 10^{-2}}{1.5 - 1} = \frac{1.5 \times 6 \times 10^{-2}}{0.5} = 18 \times 10^{-2}\, m$

(b) যখন জলের মধ্যে থাকে,

$\mu_1 = 1.33,\ \mu_2 = 1.5$

প্রথম ফোকাস দৈর্ঘ্য $f_1 = \frac{-1.33 \times 6 \times 10^{-2}}{1.5 - 1.33} = -46.9 \times 10^{-2}\, m$

দ্বিতীয় ফোকাস দৈর্ঘ্য $f_2 = \frac{1.5 \times 6 \times 10^{-2}}{1.5 - 1.33} = 52.9 \times 10^{-2}\, m$

উদাহরণ 4. একটি কাচখণ্ডের আপতন তলটি অবতল। এর বক্রতা ব্যাসার্ধ 0.03m। 2×10^{-2} উচ্চতার একটি ক্ষুদ্র বস্তু অবতল তলের শীর্ষবিন্দু থেকে 0.1m দূরে বায়ুতে আছে। কাচের প্রতিসারঙ্ক 1.5 হলে নিম্নলিখিত রাশিগুলি নির্ণয় করুন।

(a) প্রথম ও দ্বিতীয় ফোকাস দৈর্ঘ্য, (b) প্রতিবিম্ব দূরত্ব, (c) পার্শ্বীয় বিবর্ধন ও প্রতিবিম্বের উচ্চতা, (d) তলটির ক্ষমতা।

সমাধান : এখানে $\mu_1 = 1.0, \mu_2 = 1.5, u = -0.1m, \quad r = -0.03m$

(a) প্রথম মুখ্য ফোকাস দৈর্ঘ্য, $f_1 = \frac{-\mu_1 r}{\mu_2 - \mu_1} = \frac{-1 \times (-0.03)}{1.5 - 1.0} = +0.06m$

দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস দৈর্ঘ্য, $f_2 = \frac{\mu_2 r}{\mu_2 - \mu_1} = \frac{1.5 \times (-0.03)}{1.5 - 1.0} = -0.09m$

(b) ধরি v = প্রতিবিম্ব দূরত্ব, বস্তু দূরত্ব u এর সঙ্গে সম্পর্ক,

$$\frac{\mu_2}{v} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{r}$$

$$\therefore \frac{1.5}{v} - \frac{1.0}{-0.1} = \frac{1.5-1.0}{-0.03} = -16.667$$

$$\therefore \frac{1.5}{v} = -16.667 - 10 = -26.667$$

$$\therefore v = \frac{1.5}{-26.667} = -0.0562m$$

(c) পার্শ্বীয় বিবর্ধন $m = \frac{v/\mu_2}{u/\mu_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{v}{u} = \frac{1.0}{1.5} - \frac{0.0562}{-0.1}$

প্রতিবিম্বের উচ্চতা y_2 ও বস্তুর উচ্চতা $y_1 = 2\times10^{-2}m$ হলে

$m = \frac{y_2}{y_1} \therefore \frac{y_2}{2\times10^{-2}} = 0.375 \quad \therefore y_2 = 2\times10^{-2}\times0.375$

$= 7.5\times10^{-3}m$

(d) তলটির ক্ষমতা $P = \frac{\mu_2-\mu_1}{r} = \frac{1.5-1.0}{-0.03} = -16.67D$

উদাহরণ 5. $2\times10^{-2}m$ ব্যাসের একটি কাচ গোলকের অভ্যন্তরে কেন্দ্র থেকে $0.5\times10^{-2}m$ দূরে একটি ক্ষুদ্র বায়ু বুদ্বুদ আছে। বুদ্বুদটিকে ব্যাস বরাবর দেখলে প্রতিবিম্বের অবস্থান ও বিবর্ধন কী হবে? কাচের প্রতিসারঙ্ক =1.5।

সমাধান : পৃষ্ঠতল থেকে ব্যাস বরাবর দেখলে মেরু থেকে বুদ্বুদের দুটি দূরত্ব হতে পারে, (a) $0.5\times10^{-2}m$ ও (b) $1.5\times10^{-2}m$। দুটি ক্ষেত্রেই কাচ থেকে বায়ুতে প্রতিসরণ হয়েছে এবং তলটি অবতল।

(a) যখন মেরু থেকে বুদ্বুদ $0.5\times10^{-2}m$ দূরে আছে (চিত্র a)

$u = -0.5\times10^{-2}m,\ r = -1\times10^{-2}m,\ \mu_1 = 1.5,\ \mu_2 = 1$

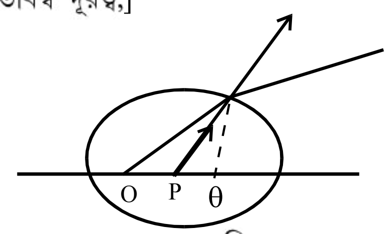
বক্রতলে প্রতিসরণের ক্ষেত্রে

$$\frac{\mu_2}{v} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu_2-\mu_1}{r}$$

[v = প্রতিবিম্ব দূরত্ব,]

$$\therefore \frac{1}{v} - \frac{1.5}{-0.5\times10^{-2}} = \frac{1-1.5}{-1\times10^{-2}}$$

বা $\frac{1}{v} + 3\times10^{2} = 0.5\times10^{2}$



চিত্র (a)

বা, $\frac{1}{v} = -2.5 \times 10^2 \quad \therefore v = -4 \times 10^{-3} m$

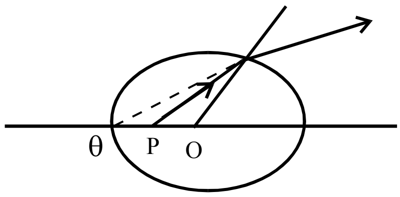
অতএব প্রতিবিম্ব দূরত্ব $-4 \times 10^{-3} m$ মেরু থেকে বাম দিকে অর্থাৎ কেন্দ্র থেকে $1 \times 10^{-2} - 4 \times 10^{-3} = 6 \times 10^{-3} m$ দূরে দর্শকের দিকে প্রতিবিম্ব গঠিত হবে।

রৈখিক বিবর্ধন, $m = \frac{\mu_1 v}{\mu_2 u} = \frac{1.5}{1} \times \frac{-4 \times 10^{-3}}{-5 \times 10^{-3}} = 1.2$

(b) যখন বুদ্বুদটি মেরু থেকে $1.5 \times 10^{-2} m$ দূরে আছে (চিত্র (b)

$u = -1.5 \times 10^{-2} m, r = -1 \times 10^{-2} m, \mu_1 = 1.5, \mu_2 = 1.$

প্রতিবিম্ব দূরত্ব $= v$



চিত্র (b)

$$\therefore \frac{\mu_2}{v} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{r}$$

বা, $\frac{1}{v} - \frac{1.5}{-1.5 \times 10^{-2}} = \frac{1 - 1.5}{-1 \times 10^{-2}}$

বা, $\frac{1}{v} + 1 \times 10^2 = 0.5 \times 10^2, \quad \frac{1}{v} = -0.5 \times 10^2$

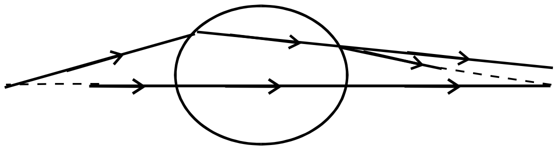
$\therefore v = -0.02m$

অতএব দর্শক থেকে দূরে কেন্দ্র থেকে 0.01m দূরের প্রতিবিম্ব গঠিত হয়।

রৈখিক বিবর্ধন $m = \frac{\mu_1 v}{\mu_2 u} = \frac{1.5}{1} \times \frac{-0.02}{-0.015} = 2$

উদাহরণ 6. 0.05m ব্যাসার্ধের একটি কাচ গোলক থেকে 0.05m দূরে এর ব্যাসের উপর একটি বস্তু রাখা আছে। কাচ গোলকের ভিতর দিয়ে প্রতিসরণের ফলে প্রতিবিম্বের অবস্থান কোথায় হবে? কাচের প্রতিসরাঙ্ক =1.5।

সমাধান : কাচের গোলকের প্রথম তলে প্রতিসরণের পর ধরি প্রতিবিম্ব দূরত্ব হবে v। চিত্রানুসারে $u = -0.5m, r = 0.05m, \mu_1 = 1, \mu = 1.5$


k–u=0.5m → 0.05m

$$\therefore \frac{\mu_2}{v} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{r}$$

বা, $\frac{1.5}{v} - \frac{1}{-0.5} = \frac{1.5 - 1}{0.05} = 10$

$\therefore \dfrac{1.5}{v} = 10 - 2 = 8 \qquad \therefore v = \dfrac{1.5}{8} = 0.1875m$

এটি ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত, অতএব প্রতিবিম্ব হবে সদ।

¿i Âûpî ÆÜ õpîŽÆS õ¦'Ãöp $u = 0.1875$ — গোলকের ব্যাস $= 0.1875 - 0.1 = 0.0875m$

$\mu_1 = 1.5, \mu_2 = 1, r = -0.05m$ প্রতিবিম্ব দূরত্ব $= v'$ (ধরি)

$$\therefore \frac{\mu_2}{v} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{r}$$

বা $\dfrac{1}{v'} - \dfrac{1.5}{0.0875} = \dfrac{1 - 1.5}{-0.05} = 10$

$$\therefore \frac{1}{v'} = 10 + 17.14 = 27.14$$

$$\therefore v' = 0.0368m$$

এটি ধনাত্মক হওয়ায় প্রতিবিম্ব গোলকটির অপর পৃষ্ঠ থেকে 0.0368m দূরে হবে ও প্রতিবিম্ব হবে সদ।

উদাহরণ 7. একটি পাতলা সমতলোত্তল লেন্সের সমতল তলে পারদ প্রলেপ দিলে এটি 0.28m ফোকাস দৈর্ঘ্যের অবতল দর্পনের মতো কাজ করে। লেন্সের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক নির্ণয় করুন।

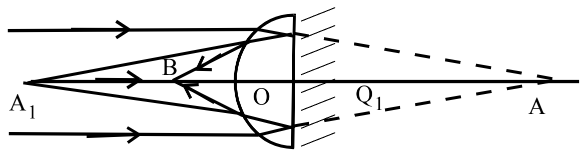
সমাধান : যখন সমতল তলকে পারদ প্রলেপযুক্ত করা হয় তখন অসীম থেকে আলোকরশ্মি এসে প্রথমে উত্তল তলে প্রতিসরণ ও পরে সমতলে প্রতিফলিত হয়। অতঃপর প্রতিফলিত রশ্মি অবতল তলে প্রতিসৃত হয়ে 0.28m দূরে B বিন্দুতে মিলিত হয় (চিত্র a)।

উত্তল তলে প্রতিসরণে, $v = OA, \ u = \alpha,$

$\mu_1 = 1, \ \mu_2 = \mu$ (ধরি) = লেন্সের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক।

বক্রতাব্যাসার্ধ $= r$ (ধরি)।

$$\therefore \frac{\mu_2}{v} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{r}$$



চিত্র (a)

বা, $\dfrac{\mu}{v} - \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{\mu - 1}{r} \qquad \therefore v = \dfrac{\mu r}{\mu - 1} = OA$

কিন্তু, সমতল দর্পনে প্রতিফলিত হয়ে O_1A এর সমান দূরে A বিন্দুতে প্রতিবিম্ব গঠিত হওয়ার কথা। কিন্তু লেন্স কর্তৃক প্রতিসৃত হয়ে B বিন্দুতে প্রতিবিম্ব গঠিত হয়। লেন্স পাতলা বলে ধরা যায় $O_1A = O_1A_1 = OA_1$; অবতল তলে প্রতিসরণের পর OB দূরত্বে প্রতিবিম্ব গঠিত হয়েছে।

OB=প্রতিবিম্ব দূরত্ব $= 0.28\text{m}$। বস্তু দূরত্ব $= OA_1 \simeq OA = \dfrac{\mu r}{\mu - 1}$, বক্রতা বাস্যার্ধ $= -\,r$।

$$\therefore\ \frac{\mu_2}{v} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{r}$$ থেকে

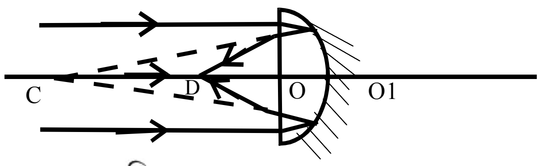
$$\frac{1}{OB} - \frac{\mu}{OA_1} = \frac{1-\mu}{-r}$$

বা, $$\frac{1}{0.28} - \frac{\mu(\mu-1)}{\mu r} = \frac{\mu - 1}{r}$$

বা, $$\frac{1}{0.28} - \frac{\mu - 1}{r} = \frac{\mu - 1}{r}$$

বা, $$\frac{1}{0.28} = \frac{2(\mu - 1)}{r}$$

বা, $0.56(\mu - 1) = r$ – – – – – – – – – (i)



চিত্র (b)

এবার ধরা যাক বক্রতল পারদ প্রলেপ যুক্ত (চিত্র(b))। প্রথম তলে (সমতল) প্রধান অক্ষের সমান্তরাল রশ্মিগুলি কোনো চ্যুতি ছাড়াই প্রতিসৃত হবে। বক্রতলে প্রতিফলিত হয়ে C বিন্দুতে রশ্মিগুলি মিলিত হতে চায়, সমতলে প্রতিসরণের পর D বিন্দুতে রশ্মিগুলি মিলিত হয়।

$\therefore\ OD = 0.10\text{m}.\ O_1C =$ বক্রতলের ফোকাস দৈর্ঘ্য $= \dfrac{r}{2}$

লেন্স পাতলা বলে, $O_1C \simeq OC = \dfrac{r}{2}$

সমতলে প্রতিসরণে $u = \dfrac{r}{2},\quad v = OD = 0.1\text{m},\quad \mu_1 = \mu,\ \mu_2 = 1$

বক্রতা ব্যাসার্ধ $= \alpha$

$$\therefore\ \frac{\mu_2}{v} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{r}$$ থেকে

$$\frac{1}{0.10} - \frac{\mu}{r/2} = \frac{1-\mu}{\alpha} = 0$$

$$\therefore\ \frac{1}{0.10} = \frac{2\mu}{r}$$

$\therefore\ 0.20\mu = r$

(i) ও (ii) নং সমীকরণ থেকে, $0.56(\mu - 1) = 0.20\mu$

বা, $0.36\mu = 0.56\ \therefore \mu = \frac{0.56}{0.36} = 1.556$

উদাহরণ 8. একটি উভোত্তল লেন্সের বক্রতা ব্যাসার্ধদ্বয় যথাক্রমে 0.20m ও 0.40m এবং ফোকাস দৈর্ঘ্য 0.20m। এর উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক কত?

সমাধান: লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য ও প্রতিসরাঙ্কের সম্পর্ক,

$\frac{1}{f} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$; r_1 ও r_2 যথাক্রমে বক্রতা ব্যাসার্ধদ্বয়।

$f = 0.20m,\ r_1 = 0.20m,\ r_2 = -0.40m$ ।

$$\therefore\ \frac{1}{0.20} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{0.20} - \frac{1}{-0.40}\right) = (\mu - 1)\frac{3}{0.40}$$

$$\therefore\ (\mu - 1) = \frac{1}{0.20} \times \frac{0.40}{3} = \frac{2}{3} \qquad \therefore\ \mu = 1.67$$

উদাহরণ 9. একটি কাচের লেন্সের বায়ুতে ফোকাস দূরত্ব 0.20m । জলের মধ্যে থাকলে এর ফোকাস দূরত্ব কত হবে? (জলের $\mu = \frac{4}{3}$ ও কাচের $\mu = \frac{3}{2}$)

সমাধান : লেন্সের সমীকরণ $\frac{1}{f} = \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1}\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

f = ফোকাস দৈর্ঘ্য μ_2 = লেন্সের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক, μ_1 = বাইরের মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক, r_1 ও r_2 যথাক্রমে বক্রতা ব্যাসার্ধ। যখন বায়ুর মধ্যে থাকে তখন,

$$\frac{1}{0.20} = \left(\frac{3/2 - 1}{1}\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\therefore\ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{0.10}$$

জলের মধ্যে থাকলে $\frac{1}{f'} = \left(\frac{\frac{3}{2} - \frac{4}{3}}{\frac{4}{3}}\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

$= \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{0.10} = \frac{1}{0.80}$ [(i) নং সমীকরণ থেকে]

$\therefore \ f' = 0.80m$

অর্থাৎ জলের মধ্যে ফোকাস দূরত্ব $0.80m$

উদাহরণ 10. এমন একটি লেন্সের প্রকৃতি এবং ফোকাস দূরত্ব নির্ণয় করুন যা একটি 0.25m ফোকাস দূরত্ব সম্পন্ন অবতল লেন্সের সঙ্গে সমবায়ে থেকে 0.25m দূরে রাখলে ঐ বস্তুর যে বাস্তব প্রতিবিম্ব গঠিত হয় তার বিবর্ধন 3।

সমাধান : প্রতিবিম্ব বাস্তব হলে এটি অবশীর্ষ হবে এবং বিবর্ধন m হবে ঋণাত্মক।

প্রশ্নানুসারে, $m = \frac{v}{u}$

বা, $-3 = \frac{v}{-0.25}$ $\quad \therefore \ v = 0.75m$

ধরি সমবায়ের ফোকাস দূরত্ব $= \mathrm{F}$

$\therefore \ \frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{\mathrm{F}}$ $\qquad$ বা, $\frac{1}{0.75} - \frac{1}{-0.25} = \frac{1}{\mathrm{F}}$

$\therefore \ \frac{1}{\mathrm{F}} = \frac{1}{0.75} + \frac{1}{0.25}$ $\qquad \therefore \ \mathrm{F} = \frac{0.75}{4} m$

যেহেতু F ধনাত্মক, সমবায়টি উত্তল লেন্সের মতো কাজ করে। লেন্স সমবায়ের একটি অবতল ($f_2 = -0.25$ m), অন্যটির ফোকাস দূরত্ব f_1 হলে,

$\frac{1}{\mathrm{F}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ $\quad \therefore \ \frac{4}{0.75} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{-0.25}$

বা, $\frac{1}{f_1} = \frac{4}{0.75} + \frac{1}{0.25} = \frac{7}{0.75}$

$\therefore \ f_1 = \frac{0.75}{7} = 0.1071m$

অর্থাৎ অপর লেন্সটি উত্তল ও ওর ফোকাস দূরত্ব 0.1071m।

উদাহরণ 11. একটি উত্তল লেন্স থেকে 0.90m দূরে একটি বস্তু রাখলে লেন্স থেকে 0.45m দূরে একটি পর্দায় সদবিম্ব গঠিত হয়। উত্তল লেন্সের সংস্পর্শে একটি অবতল লেন্স বসালে সদবিম্ব পাওয়ার জন্য পর্দাটিকে আরো 0.75m দূরে নিয়ে যেতে হয়। অবতল লেন্সেটির ফোকাস দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

সমাধান : একক উত্তল লেন্সের বেলায়

$u = -0.9m, v = 0.45m$ ফোকাস দূরত্ব $= f_1$ (ধরি)

$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{7}$ সমীকরণ থেকে,

$\frac{1}{0.45} - \frac{1}{-0.90} = \frac{1}{f_1}$ বা, $\frac{1}{0.45} + \frac{1}{0.90} = \frac{1}{f_1}$

বা, $\frac{3}{0.90} = \frac{1}{f_1}$ $\quad \therefore \; f_1 = 0.30m$

তুল্য লেন্সের বেলায়,

$u = -0.90m, \; v = 0.45 + 0.75 = 1.20m$ ফোকাস দূরত্ব $=$ F (ধরি)

$$\therefore \; \frac{1}{\text{F}} = \frac{1}{v} - \frac{1}{u}$$

বা $\therefore \; \frac{1}{\text{F}} = \frac{1}{1.20} - \frac{1}{-0.90} = \frac{1}{1.20} + \frac{1}{0.90} = 1.944$

$$\therefore \; \text{F} = 0.514\text{m}$$

অবতল লেন্সের ফোকাস দূরত্ব $= f_2$ (ধরি)

$$\therefore \; \frac{1}{\text{F}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

বা, $1.944 = \frac{1}{0.30} + \frac{1}{f_2}$

$$\therefore \; \frac{1}{f_2} = 1.944 - \frac{1}{0.30} = -1.389$$

$\therefore \; f_2 = -0.72m =$ অবতল লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য।

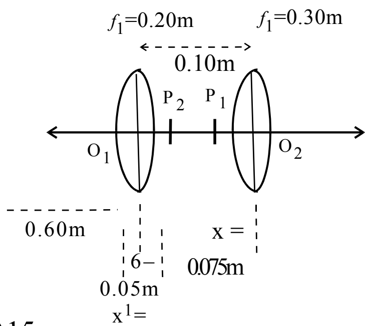
উদাহরণ 12. 0.20m ফোকাস দৈর্ঘ্যের একটি পাতলা উত্তল লেন্স থেকে 0.06m তফাতে একটি বস্তু রাখা হয়েছে। প্রথম লেন্স থেকে 0.10m তফাতে 0.30m ফোকাস দৈর্ঘ্যের আর একটি পাতলা উত্তল লেন্স রাখা হল। দ্বিতীয় লেন্স থেকে চূড়ান্ত প্রতিবিম্বের দূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান : দেওয়া আছে $f_1 = 0.20m, \; f_2 = 0.30m,$ ব্যবধান $a = 0.10m$

তুল্য ফোকাস দৈর্ঘ্য F হলে,

$$\frac{1}{\text{F}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{a}{f_1 f_2}$$

$$= \frac{1}{0.20} + \frac{1}{0.30} - \frac{0.10}{0.20 \times 0.30} = 6.667$$



$F = 0.15\text{m}$

দ্বিতীয় মুখ্যতলের দূরত্ব (দ্বিতীয় লেন্স থেকে), (চিত্রে)

$$x = \frac{-a\text{F}}{f_1} = -\frac{0.10 \times 0.15}{0.20} = -0.075m = \text{O}_2\text{P}_2$$

প্রথম মুখ্য তলের দূরত্ব (প্রথম লেন্স থেকে), $x' = \dfrac{a\text{F}}{f_2} = \dfrac{0.1 \times 0.15}{0.30} = 0.05m = \text{O}_1\text{P}_1$

তুল্য লেন্স বিবেচনা করলে,

বস্তুদূরত্ব $\text{U} = -(0.60 + 0.05) = -0.65m$

প্রতিবিম্বদূরত্ব (দ্বিতীয় মুখ্য তল থেকে) $= \text{V}$, $\text{F} = 0.15\text{m}$

$\therefore \ \dfrac{1}{\text{V}} - \dfrac{1}{\text{U}} = \dfrac{1}{\text{F}}$ বা, $\dfrac{1}{\text{V}} - \dfrac{1}{-0.65} = \dfrac{1}{0.15}$

$\therefore \ \dfrac{1}{\text{V}} = \dfrac{1}{0.15} - \dfrac{1}{0.65} = 5.128 \qquad \therefore \ \text{V} = 0.195\text{m}$

অর্থাৎ দ্বিতীয় লেন্স থেকে প্রতিবিম্ব দূরত্ব = 0.195 – 0.075 = 0.12m

বিকল্প পদ্ধতি: প্রথম লেন্সের ক্ষেত্রে $u = -0.60m, \ f = 0.20m$

প্রতিবিম্বদূরত্ব = v (ধরি) লেন্সের সমীকরণ $\dfrac{1}{v} - \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{f}$

বা, $\dfrac{1}{v} - \dfrac{1}{-0.60} = \dfrac{1}{0.20}$ বা, $\dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{0.20} - \dfrac{1}{0.60}$

$\therefore \ v = 0.30m$

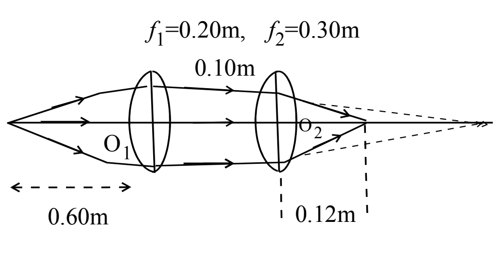
প্রথম লেন্সের প্রতিবিম্ব দ্বিতীয় লেন্সে বস্তুর মতো কাজ করে

দ্বিতীয় লেন্সে

$u = (0.30 - 0.10) = 0.20m, \ f = 0.30m$

দ্বিতীয় লেন্সের ক্ষেত্রে প্রতিবিম্ব দূরত্ব ধরি v'

$\therefore \ \dfrac{1}{v} - \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{f}$ বা, $\dfrac{1}{v'} - \dfrac{1}{0.20} = \dfrac{1}{0.30}$



বা, $\frac{1}{v'}=\frac{1}{0.30}+\frac{1}{0.20}$ $\quad \therefore\ v'=0.12m$

দ্বিতীয় লেন্স থেকে 0.12m দূরে প্রতিবিম্ব গঠিত হবে।

উদাহরণ 13. 0.20m এবং 0.15m ফোকাস দৈর্ঘ্যের দুটি পাতলা উত্তল লেন্স একই অক্ষের উপর পবস্পর থেকে 0.10m তফাতে আছে। ওদের তুল্য ফোকাস দৈর্ঘ্য এবং তুল্য লেন্সের অবস্থান নির্ণয় করুন।

সমাধান : f_1 ও f_2 ফোকাস দৈর্ঘ্যর দুটি লেন্স a ব্যবধানে থাকলে তাদের সমবায়ের তুল্যমান ফোকাস দৈর্ঘ্য F হলে,

$$\frac{1}{\mathrm{F}}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{a}{f_1 f_2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\mathrm{F}}=\frac{1}{0.20}+\frac{1}{0.15}-\frac{0.10}{0.20\times 0.15}=8.333$$

$$\therefore\ \mathrm{F}=0.12\mathrm{m}$$

প্রথম লেন্স থেকে (0.20 ফোকাস দৈর্ঘ্যের) তুল্য লেন্সের অবস্থান

$$x=\frac{a\mathrm{F}}{f_2}=\frac{0.10\times 0.12}{0.15}=0.08m$$

লেন্স দুটির অবস্থান পরিবর্তন করলে, 0.15m ফোকাস দৈর্ঘ্যের লেন্স থেকে তুল্য লেন্সের অবস্থান হবে

$$x'=\frac{a\mathrm{F}}{f_1}=\frac{0.10\times 0.12}{0.20}=0.06m$$

উদাহরণ 14. পরস্পর সংলগ্ন একটি ক্রাউন কাচের উভোত্তল লেন্স এবং একটি ফ্লিন্ট কাচের উভাবতল লেন্স দিয়ে 0.60m ফোকাস দৈর্ঘ্যের একটি অভিসারী অবর্ণক লেন্স সমবায় প্রস্তুত করা হয়েছে। ক্রাউন কাচ ও ফ্লিণ্ট কাচের বর্ণ বিচ্ছুরণ ক্ষমতা যথাক্রমে 0.03 এবং 0.05 হয়, তবে ঐ লেন্সদুটির ফোকাস দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

সমাধান : ধরি, ক্রাউন কাচ ও ফ্লিন্ট কাচের উত্তল ও অবতল লেন্সের ফোকাস দূরত্ব যথাক্রমে f_1 ও f_2। সমবায়টি অবর্ণক বলে,

$$\frac{\omega_1}{f_1}+\frac{\omega_2}{f_2}=0 \quad \text{এখানে, } \omega_1=0.03,\ \omega_2=0.05$$

$$\therefore\ \frac{0.03}{f_1}+\frac{0.05}{f_2}=0 \qquad 0.03f_2=-0.05f_1$$

$\therefore\ f_2 = -\frac{5}{3}f_1$ (f_1 ধনাত্মক ও f_2 ঋণাত্মক)

আবার তুল্যমান ফোকাস দৈর্ঘ্য F = 0·60m ।

$\therefore\ \frac{1}{F_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ $\therefore\ \frac{1}{0.60} = \frac{1}{f_1} - \frac{3}{5f_1} = \frac{1}{f_1}\left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{2}{5f_1}$

$\therefore\ f_1 = \frac{2}{5} \times 0.60 = 0.24m$

এবং $f_2 = -\frac{5}{3} \times 0.24 = 0.40m$

উদাহরণ 15. লাল ও বেগুনী আলোর জন্য ক্রাউন কাচের প্রতিসরাঙ্ক যথাক্রমে 1.515 ও 1.523 এবং ফ্লিন্ট কাচের প্রতিসরাঙ্ক যথাক্রমে 1.614 ও 1.632। একটি 0.30m ফোকাস দৈর্ঘ্যের সমতলোত্তল লেন্সযুগ্ম তৈরী করতে হলে লেন্সদুটির তলগুলির বক্রতা ব্যাসার্ধ কী কী হবে?

সমাধান: ক্রাউন কাচের বিচ্ছুরণ ক্ষমতা, $\omega_1 = \frac{\mu_v - \mu_r}{\mu - 1} = \frac{1.523 - 1.515}{\frac{1.523 + 1.515}{2} - 1}$

$$= \frac{0.008}{1.519 - 1} = 0.0154$$

ফ্লিন্ট কাচের বিচ্ছুরণ ক্ষমতা, $\omega_2 = \frac{1.632 - 1.614}{\frac{1.632 + 1.614}{2} - 1} = \frac{0.018}{1.623 - 1} = 0.0289$

ধরি, ক্রাউন কাচের লেন্সটি উভোত্তল এবং ফ্লিন্ট কাচের লেন্সটি সমতলাবতল। দুটির ফোকাস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে f_1 ও f_2 । দুটি লেন্স সংলগ্ন অবস্থায় অবর্ণক হয়েছে।

$\therefore\ \frac{\omega_1}{f_1} + \frac{\omega_2}{f_2} = 0$ বা, $\frac{0.0154}{f_1} + \frac{0.0289}{f_2} = 0$

$\therefore\ f_2 = -\frac{0.0289}{0.0154}f_1 = -\frac{289}{154}f_1$

লেন্স যুগ্মের ফোকাস দৈর্ঘ্য F= 0.30m (অভিসারী)

$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ থেকে

$$\frac{1}{0.30}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{f_1}-\frac{154}{289f_1}=\left(1-\frac{159}{289}\right)\frac{1}{f_1}$$

$\therefore\ f_1=\left(\frac{289-154}{289}\right)\times 0.30=0.1401$ (উত্তল) এবং $f_2=\frac{-289}{154}\times 0.1401=-0.2630m$ (অবতল)

প্রথমে সমতলাবতল লেন্সটি বিবেচনা করলে, এর সমতল তলের বক্রতা ব্যাসার্ধ $=\alpha$, দ্বিতীয় তলের বক্রতা ব্যাসার্ধ = r_2 (ধরি)।

$\frac{1}{f}=(\mu-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$ সমীকরণ থেকে

$\frac{1}{0.2630}=(1.623-1)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{r_2}\right)=-\frac{0.623}{r_2}$ [$\mu=$গড় প্রতিসরাঙ্ক]

$\therefore\ r_2=0.623\times 0.2630=0.1638m$

সমতলাবতল লেন্সের অবতল তলের বক্রতা ব্যাসার্ধ ও উভোত্তল লেন্সের যে দিকটি অবতল লেন্সের দিকে থাকে তার বক্রতা ব্যাসার্ধ পরস্পর সমান। অতএব উভোত্তল লেন্সের একটি তলের (ধরি প্রথমতল) বক্রতা ব্যাসার্ধ $r_1'=0.1638m$ । দ্বিতায়টির বক্রতা ব্যাসার্ধ ধরি r_2' ।

$\frac{1}{f}=(\mu-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$ সমীকরণ থেকে

$\frac{1}{0.1401}=(1.519-1)\left(\frac{1}{0.1638}-\frac{1}{r_2'}\right)$ [$\mu=$গড় প্রতিসরাঙ্ক]

$$=0.519\left(\frac{1}{0.1638}-\frac{1}{r_2'}\right)$$

বা, $\frac{1}{0.1638}-\frac{1}{r_2'}=\frac{1}{0.1401\times 0.519}$

বা, $\frac{1}{r_2'}=\frac{1}{0.1638}-\frac{1}{0.1401\times 0.519}=-\frac{1}{0.1308}$

$\therefore\ r_2'=-0.1308m$

অতএব সমতলাবতল লেন্সের বক্রতলের ব্যাসার্ধ 0.1638m এবং উভোত্তল লেন্সের দুটি তলের বক্রতা ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 1.1638m ও 0.1308m।

উদাহরন 16. লাল ও বেগুনী আলোর জন্য ক্রাউন কাচের প্রতিসরাঙ্ক যথাক্রমে 1.553 ও 1.567। ঐ কাচের তৈরী একটি উত্তল লেন্সের অক্ষের সমান্তরাল সাদা আলোক রশ্মিগুচ্ছ আপতিত হলে এবং দুইতলের বক্রতা ব্যাসার্ধদ্বয় যথাক্রমে 0.30m ও 0.20m হলে, ঐ লেন্সের ক্ষেত্রে ও ঐদুটি আলোর জন্য অনুদৈর্ঘ্য বর্ণাপেরণের মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: ক্রাউন কাচের বর্ণ বিচ্ছুরণ ক্ষমতা

$$\omega = \frac{\mu_v - \mu_r}{\mu - 1} = \frac{1.567 - 1.553}{\frac{1.567 + 1.553}{2} - 1} = \frac{0.014}{0.56} = 0.025$$

লেন্সটির ফোকাস দূরত্ব f হলে

$$\frac{1}{f} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = (1.56 - 1)\left(\frac{1}{0.30} - \frac{1}{0.20}\right) \quad [\ 1.56 = \text{গড় প্রতিসরাঙ্ক}\ ]$$

$$= 0.56\left(\frac{1}{0.30} + \frac{1}{0.20}\right) = 4.667 \qquad \therefore f = 0.2143m$$

অনুদৈর্ঘ্য বর্ণাপেরণ $= f_r - f_v = \omega f = 0.025 \times 0.443 = 5.358 \times 10^{-3} m$

উদাহরণ 17. একই উপাদানের দুটি পাতলা উত্তল লেন্সের সমবায়ের তুল্য ফোকাস দৈর্ঘ্য 0.40m; এই সমবায়টিতে গোলাপেরণ ও বর্ণাপেরন ন্যূনতম হলে, লেন্স দুটির ফোকাস দৈর্ঘ্য ও এদের মধ্যে ব্যবধান কত?

সমাধান : ধরি লেন্সদুটির ফোকাস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে f_1 ও f_2 এবং এদের মধ্যে ব্যবধান a।

ন্যূনতম গোলাপেরণের শর্ত, $a = f_1 - f_2$

ন্যূনতম বর্ণাগেরনের শর্ত, $a = \frac{f_1 + f_2}{2}$

$$\therefore f_1 = \frac{3}{2}a,\ f_2 = \frac{a}{2}$$

তুল্যমান ফোকাস দৈর্ঘ্য F হলে,

$$\frac{1}{\text{F}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{a}{f_1 f_2} = \frac{f_1 + f_2 - a}{f_1 f_2}$$

$$\therefore \frac{1}{0.40} = \frac{\frac{39}{2} + \frac{a}{2} - a}{\frac{39}{2} \times \frac{a}{2}} = \frac{4}{3a}$$

$$\therefore a = \frac{4}{3} \times 0.40 = 0.533m$$

$$\therefore f_1 = \frac{3}{2} \times 0.533 = 0.80m$$

$$f_2 = \frac{1}{2} \times 0.533 = 0.266\ m$$

9.16 প্রশ্নাবলী :

(I) অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরের প্রশ্ন :

1. আলোকীয় পথ কাকে বলে!
2. গোলীয় প্রতিসারক তলের ক্ষমতা পরিমাপের রাশিটি কি?
3. গোলীয় তলে প্রতিসরণে নিউটনের সমীকরণটি লিখুন।
4. গোলীয় তলে প্রতিসরণে বস্তু দূরত্ব ও প্রতিবিম্ব দূরত্বের মধ্যে সম্পর্কের রাশিমালাটি লিখুন।
5. পার্শ্বীয় বা রৈখিক বিবর্ধন কাকে বলে!
6. লেন্সের আলোককেন্দ্র কাকে বলে?
7. কোনো লেন্সের ফোকাস দূরত্ব কোন্ কোন্ রাশির উপর নির্ভর করে?
8. লেন্স প্রস্তুতকারকের সমীকরণটি লিখুন।
9. কাচ নির্মিত উত্তম লেন্সকে জলের মধ্যে রাখলে ফোকাস দৈর্ঘ্য বাড়বে না কমবে?
10. উত্তল লেন্সের দুটি অবস্থানে সদ প্রতিবিম্ব পেতে হলে বস্তু ও পর্দার মধ্যে দূরত্ব কত হওয়া উচিত।
11. একটি লেন্সযুগ্মের ফোকাস দৈর্ঘ্যের রাশিমালাটি লিখুন।
12. লেন্সের ক্ষমতা কাকে বলে? এর একক কী?
13. নির্দিষ্ট দূরত্বে অবস্থানরত দুটি লেন্স সমবায়ের ফোকাস দৈর্ঘ্যের রাশিমালাটি লিখুন।
14. কোনো প্রিজমে বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতার রাশিমালা কী?
15. একটি একক লেন্সকে অবর্ণক করা যায় কী?
16. ক্রস্‌ড্ লেন্স কাকে বলে?

17. নির্দিষ্ট দূরত্বে থাকা দুটি লেন্সের অবর্ণতার শর্তটি লিখুন।

18. পরস্পর সংলগ্ন দুটি পাতলা লেন্সের অবর্ণতার শর্তটি লিখুন।

19.নির্দিষ্ট দূরত্বে থাকা দুটি লেন্সের সমবায়ে অবর্ণতার শর্ত কি?

20. অবর্ণক লেন্সযুগ্ম কাকে বলে?

(II) সংক্ষিপ্ত উত্তরের প্রশ্ন : (Short answer type questions) :

1. আলোকীয় পথ বলতে কী বোঝায়? এর মান কীভাবে নির্ণয় করা যায়?

2. ফের্মার নীতিটি কী?

3. কোনো সমসত্ত্ব মাধ্যমে আলোক সরলরেখায় যায় – ফের্মার নীতির সাহায্যে ব্যাখ্যা করবেন কী ভাবে?

4. গোলীয় তল প্রতিসরণে প্রথম ও দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস দূরত্ব সমান হতে পারে কী?

5. দুটি সমাক্ষীয় উত্তল লেন্সের প্রথমটির আপতিত রশ্মি ও দ্বিতীয়টি থেকে নির্গত রশ্মি লেন্সদুটির প্রধান অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল হলে লেন্সদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব কত?

6. পৃথক পৃথক ভাবে একটি অবতল দর্পন ও একটি উত্তল লেন্সকে জলের মধ্যে নিমজ্জিত করলে ওদের ফোকাস দৈর্ঘ্যের কী পরিবর্তন হবে?

7. ডায়প্টার এর সংজ্ঞা দিন। একটি লেন্সের ক্ষমতা +2D হলে এর প্রকৃতি কী ও ফোকাস দৈর্ঘ্য কত?

8. কোনো লেন্সের ক্ষমতার একক কী? কোনো লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য 0.333 m হলে, এটির ক্ষমতা কত?

9. একটি বড় কাচের চৌপলের মধ্যে সরু উত্তল লেন্স আকারের একটি বায়ু বুদ্বুদ আছে। এটি আলোক রশ্মিকে কী ভাবে প্রভাবিত করবে।

10. কী শর্তে একটি অভিসারী লেন্স অপসারী লেন্সের মতো আচরণ করবে?

11. কাচের ($\mu = 1{\cdot}5$) তৈরী উত্তল লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য 0.30m । যদি লেন্সটিকে জলের মধ্যে রাখা হয় তাহলে লেন্সটির ফোকাস দৈর্ঘ্য কত হবে?

12. গোলাপেরণ কী?

13. লেন্সে বর্ণাপেরণ কীভাবে সৃষ্টি হয়?

14. একই উপাদানের দুটি পাতলা লেন্স পরস্পরের সংস্পর্শে একটি বর্ণাপেরণ-মুক্ত লেন্স যুগ্ম গঠন করতে পারে না। ব্যাখ্যা করুন।

15. অবিপথী বা অ্যাপ্লানাটিক বিন্দুদ্বয় বলতে কী বোঝায়?

16. ক্রস্‌ড্ লেন্স কাকে বলে!

17. কোমা কাকে বলে?

18. অবিন্দুকত্ব কাকে বলে?

19. গোলাপেরণ নূন্যতম করার জন্য সাধারণভাবে সমতলোত্তল লেন্স ব্যবহার করা যায়। এর কারণ কী? বস্তু দূরে থাকলে অভিলক্ষ্যে ব্যবহৃত সমতলোত্তল লেন্সটির সমতলদিকটিকে কোন্‌দিকে রাখা হয়?

20. দুটি উত্তল লেন্সকে কত ব্যবধানে রাখলে গোলাপেরণ ন্যূনতম হবে?

(III) রচনাধর্মী প্রশ্ন (Essay type questions) :

1. ফের্মার নীতি বিবৃত করুন এবং তা থেকে প্রতিফলনের সূত্র ও প্রতিসরণে স্নেলের সূত্র প্রতিষ্ঠা করুন।

2. প্রতিফলন ও প্রতিসরণের সূত্র থেকে ফের্মার নীতি প্রতিষ্ঠা করুন।

3. গোলীয় তলে প্রতিসরণের ক্ষেত্রে বস্তু দূরত্ব ও প্রতিবিম্ব দূরত্বের সম্পর্কের রাশিমালা নির্ণয় করুন।

4. গোলীয় তলে প্রতিসরণের ক্ষেত্রে প্রথম ও দ্বিতীয় ফোকাস দৈর্ঘ্যের রাশিমালা নির্ণয় করুন এবং নিউটনের সমীকরণটি কীভাবে পাওয়া যায় দেখান।

5. গোলীয় তলে প্রতিসরণের সমীকরণ ধরে নিয়ে পাতলা লেন্সের ক্ষেত্রে লেন্স সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা করুন। লেন্সের ক্ষমতা কাকে বলে? এর একক কী?

6. বস্তু ও পর্দার মধ্যে দূরত্ব কোনো উত্তল লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্যের 4 গুণের বেশী হলে লেন্সটির দুটি অবস্থানে পর্দায় সদবিম্ব গঠিত হয় – প্রমাণ করুন। এই নীতির সাহায্যে ফোকাস দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের রাশিমালা নির্ণয় করুন।

7. দুটি সংলগ্ন পাতলা লেন্সের সমবায়ের তুল্য ফোকাস দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন। গঠনকারী ক্ষমতার সম্পর্কটিও নির্ণয় করুন।

8. তুল্য লেন্স কী? বাতাসে নির্দিষ্ট দূরত্বে অবস্থিত দুটি পাতলা লেন্সের তুল্যমান ফোকাস দূরত্বের রাশিমালাটি উৎপাদন করুন। তুল্য লেন্সের অবস্থানটিও নির্ণয় করুন।

9. গোলাপেরণ কাকে বলে? গোলাপেরণ ন্যূনতম করার পদ্ধতিগুলি সংক্ষেপে বর্ণনা করুন।

10. কোমা ও অবিন্দুকত্ব ব্যাখ্যা করুন। এগুলি ন্যূনতম করার পদ্ধতিগুলি সংক্ষেপে বর্ণনা করুন।

11. বক্রতা ও বিকৃতি কাকে বলে? এগুলি দূর করার পদ্ধতিগুলি সংক্ষেপে আলোচনা করুন।

12. (a) লেন্সে বর্ণাপেরণের কারণ ব্যাখ্যা করুন।

(b) নির্দিষ্ট দূরত্বে অবস্থিত দুটি লেন্সের অবর্ণতার শর্ত নির্ণয় করুন।

13. (a) লেন্সদুটি সংলগ্ন থাকলে অবর্ণতার শর্ত কী হবে?

(b) সমান্তরাল রশ্মির ক্ষেত্রে কোনো লেন্সের অনুদৈর্ঘ্য বর্ণাপেরণ লেন্সের উপাদানের বর্ণ বিচ্ছুরণ ক্ষমতা ও লেন্সের গড় ফোকাস দৈর্ঘ্যের গুণফলের সমান - প্রমাণ করুন।

(IV) গাণিতিক প্রশ্ন:

1. 0.05 ব্যাসার্ধের একটি কাচের গোলকের উপর একটি অতি ক্ষুদ্র কাগজ খন্ডাংশ আটকে আছে। (a) বিপরীত দিক থেকে কাচের মধ্য দিয়ে দেখলে প্রতিবিম্বের অবস্থান কোথায় হবে? (b) অসীমে কোনো বস্তু থাকলে গোলকটি কোথায় প্রতিবিম্ব গঠন করবে? (কাচের প্রতিসরাঙ্ক 1.5)।

2. একটি কাচের গোলকের কেন্দ্র থেকে 5×10^{-3}m দূরে একটি ক্ষুদ্র বায়ু বুদ্বুদ আছে। গোলকটির ব্যাস 5×10^{-2} m ও এর উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক 1.5। ব্যাস বরাবর উপাক্ষীয় রশ্মির জন্য বুদ্বুদটির প্রতিবিম্বের অবস্থান ও প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

3. সমতল পৃষ্ঠ থেকে অভিলম্বভাবে দেখলে একটি কাচের সমতল-উত্তল লেন্সের সর্বোচ্চ বেধ মনে হয় 2.4×10^{-2} m। আবার বক্রতল থেকে অক্ষ বরাবর দেখলে বেধ হয় 3.0×10^{-2}m। লেন্সটির অক্ষ বরাবর বেধ 3.6×10^{-2}m । (a) কাচের প্রতিসরাঙ্ক ও (b) বক্রতলের বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

4. 0.10m ব্যাসযুক্ত একটি কাচ গোলকের মধ্যে একটি বায়ুবুদ্বুদ আছে। বুদ্বুদ ও গোলকের কেন্দ্র এক সরলরেখায় দেখলে মনে হয়। বুদ্বুদটি গোলকের পৃষ্ঠ থেকে 2.0×10^{-2}m দূরে আছে। বুদ্বুদটির প্রকৃত দূরত্ব কত? (কাচের প্রতিসরাঙ্ক =1.5)।

5. 1.33 এবং 1.50 প্রতিসরাঙ্কের দুটি মাধ্যমের বিভেদতলে একটি 0.2m ব্যাসার্ধের উত্তল তল (উত্তল তলটি 1.33 প্রতিসরাঙ্কের মাধ্যমের দিকে) আছে। প্রতিসারক তল থেকে 2.4m দূরে কোনো বস্তু থাকলে, প্রতিবিম্বের অবস্থান ও প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

6. একটি কাচের অর্ধ গোলকের ব্যাসার্ধ 0.03m; এর সমতল তলের সামনে 0.04m দূরে একটি বস্তু আছে। কাচের প্রতিসরাঙ্ক 1.5 হলে প্রতিবিম্বের অবস্থান নির্ণয় করুন।

7. কাচের তৈরী একটি সমোত্তল লেন্সের প্রত্যেক পৃষ্ঠতলের বক্রতা ব্যাসার্ধ 0.5m । বায়ুতে ও জলের মধ্যে এর ফোকাস দূরত্ব নির্ণয় করুন। কাচ ও জলে প্রতিসরাঙ্ক যথাক্রমে 1.5 ও 4/3।

8. কাচের তৈরী একটি উত্তল লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য 0.1m। জলের মধ্যে নিমজ্জিত করলে এর ফোকাস দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন কত হবে? কাচের ও জলের প্রতিসারঙ্ক যথাক্রমে 1.50 ও 1.33 ।

9. একটি 0.20m ফোকাস দৈর্ঘ্যের অভিসারী লেন্স ও 0.10m ফোকাস দৈর্ঘ্যের অপসারী লেন্স 0.15m ব্যবধানে রক্ষিত আছে। তুল্য লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য এবং অভিসারী লেন্সটি আলোর দিকে থাকলে তুল্য লেন্সের অবস্থান নির্ণয় করুন।

10. একটি উভোত্তল লেন্সের উপদানের প্রতিসরাঙ্ক 1.5। যদি পৃষ্ঠতলের বক্রতা ব্যাসার্ধ 0.05m থেকে 0.06m করা হয়, তা হলে লেন্সের ক্ষমতার কী পরিবর্তন হবে?

11. একই উপাদানের দুটি লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে f এবং $3f$ সমাক্ষীয়ভাবে কত ব্যবধানে রাখলে সমবায়টি গোলাপেরণ ও বর্ণাপেরণ মুক্ত হয়?

12. একই উপাদানের দুটি লেন্সের সাহায্যে 0.30m ফোকাস দৈর্ঘ্যের একটি অভিসারী অবর্ণক সমবায় গঠন করতে হবে। লেন্সদ্বয়ের একটি 0.20m ফোকাস দৈর্ঘ্যের অভিসারী লেন্স। অন্যটির ফোকাস দৈর্ঘ্য ও লেন্সদুটির ব্যবধান নির্ণয় করুন।

13. f_1 ও f_2 ফোকাস দৈর্ঘ্যের একই উপাদনের দুটি পাতলা উত্তল লেন্স সমাক্ষভাবে পরস্পর থেকে a ব্যবধানে আছে। এদের তুল্যলেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য $0{\cdot}30m$। এই সমবায়ে গোলাপেরণ ও বর্ণাপেরণ ন্যূনতম হতে হলে এদের ফোকাস দূরত্ব (f_1, f_2) ও ব্যবধান (a) কত হতে হবে?

14. লাল ও নীল বর্ণের আলোক রশ্মির বেলায় ক্রাউন কাচের প্রতিসরাঙ্ক যথাক্রমে 1.517 ও 1.523; ঐ বর্ণদ্বয়ের সাপেক্ষে ক্রাউন কাচের বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা নির্ণয় করুন।

15. 0.20m ফোকাস দৈর্ঘ্যের একটি অবর্ণক লেন্সযুগ্ম (Achromatic doublet) তৈরীর জন্য একটি অবতল লেন্সের (ω=0.2, μ=1.6) সঙ্গে একটি সমতলোত্তল লেন্স (ω=0.1, μ=1.5) ব্যবহার করা হল, সমতলটিকে প্রথম তল ধরে বাকিতলগুলির বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

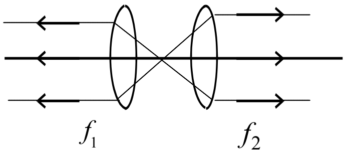
16. দু' ধরনের কাচের বিচ্ছুরণ ক্ষমতার অনুপাত 2:3। এই দু ধরনের কাচ থেকে তৈরী দুটি লেন্সের সাহায্যে 0.20m ফোকাস দৈর্ঘ্যের একটি অবর্ণক অভিলক্ষ্য তৈরী করতে হবে। লেন্সদুটির ফোকাস দৈর্ঘ্য কত হবে?

9.17 উত্তরমালা

(ii) সংক্ষিপ্ত উত্তরের প্রশ্ন

4. $f_1 = -\dfrac{\mu_1 r}{\mu_2 - \mu_1}$, $f_2 = -\dfrac{\mu_2 r}{\mu_2 - \mu_1}$, সমান নয়

5.



$\therefore$ a = $|f_1| + |f_2|$

6. দর্পনের ফোকাস দৈর্ঘ্যের কোনো পরিবর্তন হয় না। উত্তল লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য বাড়বে।

7. 0.5m

8. –3D

9. বায়ুর লেন্সটি অপসারী

10. লেন্সের μ যদি বাইরের মাধ্যমের μ থেকে কম হয়।

11. 0·852m

(iv) গাণিতিক প্রশ্ন

1. (a) 0.20m দূরে (যে তল দিয়ে দেখা হচ্ছে সেখান থেকে)

(b) গোলকের বাইরে গোলকের তল থেকে 0.025 m দূরে।

2. পৃষ্ঠতল থেকে 3.33×10^{-2}m ও 1.8×10^{-2}m দূরে, দুটিই অসদ,

3. μ=1.5, r=6.0×10^{-2}m।

4. দেখার দিকের মেরু থেকে 2.5×10^{-2}m দূরে।

5. 5.07m মেরু থেকে 1.5 প্রতিসরাঙ্কের মাধ্যমের মধ্যে, সদ।

6. অসীম

7. 0.5m, 2m

8. 0.29m

9. 0.40m, –0.30m (দ্বিতীয় লেন্স থেকে)

10. 3.34 D

11. 2f

12. 0·60m, 0.40m

13. f_1 = 1.00m, f_2= 0.333m, a = 0·667m

14. 0.0115

15. r (সমোত্তল) =0.1m , r (সমতলাবতল) = 0.12m

16. 6.67×10^{-2}m, –0.10m

9.18 সহায়ক গ্রন্থাবলী

1. Geometrical and physical optics — Longhurst.
2. Optics — A. K. Ghatak
4. Optics — Hecht
5. LIght — K. G. Majumdar.
6. Optics — Genkins and White.

একক 10 ❑ আলোক যন্ত্র

গঠন

10.1 প্রস্তাবনা ঃ

বৈজ্ঞানিক গবেষনায় আলোকের ভূমিকা অবিসংবাদিত। জ্যামিতিক আলোক বিজ্ঞানের অন্যতম মুখ্য উদ্দেশ্য হল দক্ষতাযুক্ত বিভিন্ন ধরণের আলোক যন্ত্র উদ্ভাবন ও নির্মাণ করা। প্রাকৃতিক নিয়মাবলি সম্পর্কে গবেষণার জন্য এই সব যন্ত্রের ব্যবহার অপরিহার্য। দর্পণ, লেখ, প্রিজম প্রভৃতির সাহায্যে প্রতিবিম্ব গঠনসংক্রান্ত নীতিগুলি বিভিন্ন আলোক যন্ত্র উদ্ভাবনে প্রয়োগ করা হয়। সব আলোক যন্ত্রকে মোটামুটি চারটি প্রধান ভাগে ভাগ করা যায়।

(i) প্রতিবিম্ব গঠন সম্পর্কীয় যন্ত্রাদি (Image forming instruments) : এই ধরনের যন্ত্রাদির প্রধান কাজ হল কোনো বস্তুর যতদূর সম্ভব যথাযথ প্রতিবিম্ব গঠন। প্রতিবিম্ব থেকে বস্তুর বিষয়ে জানাই এর উদ্দেশ্য। বিবর্ধক কাচ, যৌগিক অনুবীক্ষণ যন্ত্র, দূরবীক্ষণ যন্ত্র, ক্যামেরা ইত্যাদি এই শাখার অন্তর্ভুক্ত।

(ii) বর্ণালী গঠন সম্পর্কীয় যন্ত্রাদি (Spectram forming instruments) : স্পেকট্রোমিটার, ব্যতিচারমাপী (interferometers), গ্রেটিং প্রভৃতি এই শাখায় পড়ে। এগুলির মূল্য উদ্দেশ্য হল এদের সাহায্যে উৎস থেকে আগত বিকিরণের বিশ্লেষণ।

(iii) দীপ্তিমাপক বা ফটোমিটার (photometers) : এইসব যন্ত্রাদির সাহায্যে আলোকশক্তির পরিমাণ পরিমাপ করা হয়।

(iv) প্রতিসরাঙ্কমাপী (Refractometer) : এই সব যন্ত্রাদির সাহায্যে মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক পরিমাপ করা হয়।

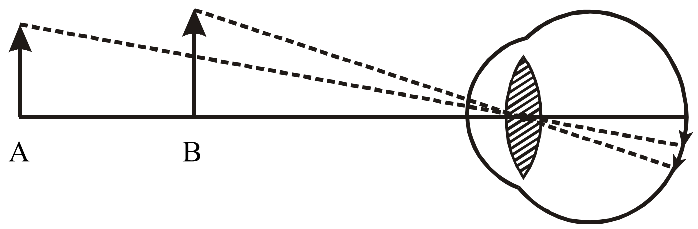
উদ্দেশ্য ঃ

এই এককে আমরা প্রতিবিম্ব গঠন সম্পর্কিত দুটি যন্ত্রের বিষয়ে আলোচনা করব। এদুটি হল অনুবীক্ষণ যন্ত্র ও দূরবীক্ষণ যন্ত্র। এই একক থেকে অনুবীক্ষণ ও দূরবীক্ষণ যন্ত্রের গঠন ও কার্যাবলী জানতে পারবেন। কাছের বস্তুকে বিবর্ধিত করে দেখা হল অনুবীক্ষণ যন্ত্রের কাজ আর দূরের বস্তুকে বিবর্ধিত করে দেখা হল দূরবীক্ষণ যন্ত্রের কাজ। যদিও শুধুমাত্র বিবর্ধনই কোনো বস্তু সর্ম্পকে সম্যক ধারণা দেয় না। এর প্রতিটি অংশ কত স্পষ্টভাবে দেখা যায় তাও খুব গুরুত্বপূর্ণ। কত কাছাকাছি থাকা দুটি বস্তুকে স্পষ্ট দেখা যায় তা পরিমাপ করা হয় যন্ত্রের বিশ্লেষণ ক্ষমতা দিয়ে। এই এককে বিশ্লেষণ ক্ষমতা নিয়ে কোনো আলোচনা হবে না। সেটি ভৌত আলোকবিজ্ঞানে আলোচনা করা হয়। আমরা এখানে বিবর্ধন নিয়েই আলোচনা করব।

অনুবীক্ষণ বা দূরবীক্ষণ যন্ত্রে মূলত থাকে অভিলক্ষ্য ও অভিনেত্র। এগুলি অপেরণ মুক্ত করার জন্য একক লেন্স ব্যবহার না করে লেন্স সমবায় ব্যবহার করা হয়। অভিনেত্র নিয়ে আলোচনা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। র‍্যাম্‌সনেডন ও হাইগ্‌ন্‌স অভিনেত্র নিয়ে আমরা আলোচনা করব। এই দুটি অভিনেত্রের গঠন ও কার্যাবলী এই এককটি পড়ে আপনারা জানতে পারবেন।

10.2 বীক্ষণ কোণ বা দর্শন কোণ; বিবর্ধন ক্ষমতা বা কৌণিক বিবর্ধন : (Visual Angle; Magnifying Power or Angular Magnification) :

যখন কোনো বস্তুকে আমরা দেখি তখন তার আকার কী হবে তা নির্ভর করে বস্তুটি চোখে কী পরিমাণ কোণ তৈরী করেছে তার উপর। যেমন (চিত্র 10.1) A অবস্থানে কোনো বস্তু চোখে যে কোণ উৎপন্ন করে, B অবস্থানে একই বস্তু তদপেক্ষা বৃহত্তর কোণ উৎপন্ন করে। B অবস্থানে বস্তু থাকলে রেটিনায় বা অক্ষিপটে প্রতিবিম্বের আকার বড়ো হয়। ফলে প্রতিবিম্ব বড়ো হয়। এজন্যই বস্তুকেও বড় দেখায়। দূরের বস্তু ক্ষুদ্রাকার দেখায় এজন্যই।



চিত্র 10.1 বীক্ষণ কোণ

বীক্ষণ কোণ : কোনো বস্তু চোখে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে বীক্ষণ কোণ বা দর্শন কোণ বলে।

রেটিনায় গঠিত প্রতিবিম্বের আকার বীক্ষণ কোণের সমানুপাতিক, অর্থাৎ বীক্ষণ কোণই ঠিক করে দেয় বস্তুর আকার চোখে কী হবে। বস্তুকে চোখের কাছে নিয়ে এলে বীক্ষণ কোণ বড় হয়, বস্তুর আকারও বড় মনে হয়। এই কাছে নিয়ে আসার একটি সীমা আছে। স্পষ্ট দর্শনের ন্যূনতম দূরত্ব D (প্রায় 25 cm) অপেক্ষা কম দূরত্বে বস্তুকে চোখের কাছে আনলে আর তাকে স্পষ্টভাবে দেখা যায় না। বীক্ষণ কোণ বাড়িয়ে বিবর্ধিত প্রতিবিম্ব দেখার জন্য আমরা বিভিন্ন আলোক যন্ত্র ব্যবহার করি। বীক্ষণ কোণকে কতগুণ বাড়ানো যায় তা পরিমাপ করা হয় বিবর্ধন ক্ষমতা বা কৌণিক বিবর্ধন দিয়ে।

বিবর্ধন ক্ষমতা বা কৌণিক বিবর্ধন :

কোনো আলোক যন্ত্রের সাহায্যে বস্তুর প্রতিবিম্ব দেখার সময় চোখে বস্তুর প্রতিবিম্ব যে বীক্ষণ কোণ উৎপন্ন করে এবং স্পষ্ট দর্শণের ন্যূনতম দূরত্বে বস্তু থাকলে যে বীক্ষণ কোণ উৎপন্ন হত তাদের অনুপাতকে ঐ যন্ত্রের বিবর্ধন ক্ষমতা বা কৌণিক বিবর্ধন বলে।

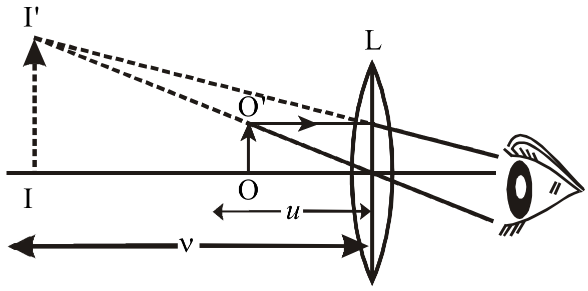
$$\text{বিবর্ধন ক্ষমতা} = \frac{\text{প্রতিবিম্ব কর্তৃক উৎপন্ন বীক্ষণ কোণ}}{\text{স্পষ্ট দর্শণের ন্যূনতম দূরত্বে অবস্থিত বস্তু কর্তৃক উৎপন্ন বীক্ষণ কোণ}}$$

আগের এককে (একক 9) আলোচিত রৈখিক বিবর্ধনের সঙ্গে বিবর্ধন ক্ষমতার পার্থক্য আছে। আলোক যন্ত্রের ক্ষেত্রে রৈখিক বিবর্ধনের ধারনা সম্পূর্ণ অপ্রাসঙ্গিক। কারণ এক্ষেত্রে বস্তুর বা প্রতিবিম্বের প্রকৃত আকার গুরুত্বপূর্ণ হয় না, এদের আপাত আকারই বিবেচনা করা হয়। উদাহরণস্বরূপ দূরবীক্ষণ যন্ত্রে গঠিত প্রতিবিম্বের আকার দূরের বস্তুটির প্রকৃত আকারের তুলনায় যথেষ্ট ক্ষুদ্র তবুও প্রতিবিম্বটিকে বড় দেখায়, কারণ এর বীক্ষণ কোণ অপেক্ষাকৃত বড়।

10.3 সরল অনুবীক্ষণ যন্ত্র বা বিবর্ধক কাচ : (আতস কাচ) (Simple Microscope or Magnifying Glass) :

সরল অনুবীক্ষণ যন্ত্র বা বিবর্ধক কাচ (আতস কাচ) হল একটি উত্তল লেন্স। উত্তল লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্যের মধ্যে কোনো বস্তু থাকলে অসদ, বিবর্ধিত ও সমশীর্ষ প্রতিবিম্ব পাওয়া যায়। ধরুন, একটি উত্তল লেন্স L এর ফোকাস দৈর্ঘ্যের মধ্যে একটি ক্ষুদ্র বস্তু OO′ রাখা আছে। অপর দিক থেকে দেখলে একটি অসদ্ বিবর্ধিত সমশীর্ষ

প্রতিবিম্ব I I′ দৃষ্টিগোচর হবে (চিত্র 10.2)। চোখকে লেন্সের কাছে এনে এই প্রতিবিম্বটি দেখা হয়। স্পষ্ট দর্শণের জন্য প্রতিবিম্বটি চোখের নিকট বিন্দু এবং অসীমের মধ্যে যে কোনো দূরত্বে গঠিত হওয়া প্রয়োজন। কম ফোকাস দৈর্ঘ্যের উত্তল লেন্সে বিবর্ধন বেশী।



চিত্র 10.2 সরল অণুবীক্ষণ যন্ত্র বা বিবর্ধক কাচ

বিবর্ধন ক্ষমতা : ধরা যাক, OO′ বস্তুটি লেন্স থেকে u দূরত্বে অবস্থিত। u এর মান লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য f থেকে কম। লেন্স থেকে v দূরত্বে I I′ অসদবিম্ব গঠিত হয়েছে। লেন্সের খুব কাছে চোখ রাখা হয় বলে প্রতিবিম্ব দ্বারা চোখে উৎপন্ন কোণ $\approx \frac{\text{II}'}{v}$। খালি চোখে স্পষ্টভাবে দেখতে হলে বস্তুকে স্পষ্ট দর্শণের ন্যূনতম দূরত্বে (D) রাখা প্রয়োজন। সে অবস্থায় বস্তু চোখে যে কোণ উৎপন্ন করে তা হল $\frac{\text{OO}'}{\text{D}}$। অতএব, সরল অনুবীক্ষণ যন্ত্রের বা আতস কাচের বিবর্ধন ক্ষমতা, $m = \frac{\text{II}'/v}{\text{OO}'/\text{D}} = \frac{\text{II}'}{\text{OO}'} \times \frac{\text{D}}{v}$

চিত্র থেকে, $\frac{\text{II}'}{\text{OO}'} = \frac{v}{u}$

$$\therefore\ m = \frac{v}{u} \times \frac{\text{D}}{v} = \frac{\text{D}}{u} \quad \text{.....................................(1)}$$

অর্থাৎ বিবর্ধন ক্ষমতা বস্তুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে।

উত্তল লেন্সে প্রতিবিম্ব অসদ হওয়ায়, u ও v ঋনাত্মক, f ধনাত্মক।

চিহ্ন সংশোধন করে লেন্স সমীকরণ $\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$ থেকে হবে $\frac{1}{-v} - \frac{1}{-u} = \frac{1}{f}$ বা, $\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = -\frac{1}{f}$

$$\therefore\ \frac{\text{D}}{u} = \frac{\text{D}}{v} + \frac{\text{D}}{f}$$

$$\therefore\ m = \frac{\text{D}}{v} + \frac{\text{D}}{f} \quad \text{..(2)}$$

সুতরাং বিবর্ধন ক্ষমতা ধ্রুবক নয়, প্রতিবিম্বের দূরত্বের উপরও এটি নির্ভর করে যা বস্তুর অবস্থান নির্ভর। আমরা দুটি চরম পরিস্থিতির আলোচনা করব।

(i) নিকট বিন্দুতে অবস্থিত প্রতিবিম্ব : এক্ষেত্রে $v = \text{D}$

$$\therefore\ m=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}}+\frac{\mathrm{D}}{f}=1+\frac{\mathrm{D}}{f}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(ii) অসীমে অবস্থিত প্রতিবিম্ব : এক্ষেত্রে $v=\infty$

$$\therefore\ m=\frac{\mathrm{D}}{\infty}+\frac{\mathrm{D}}{f}=\frac{\mathrm{D}}{f}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

এর থেকে দেখা যাচ্ছে নিকট বিন্দু থেকে অসীম দূরত্ব পর্যন্ত লেন্সের বা সরল অনুবীক্ষণ যন্ত্রের বিবর্ধন ক্ষমতা যথাক্রমে $1+\frac{\mathrm{D}}{f}$ থেকে $\frac{\mathrm{D}}{f}$ এই দুই চরম মানের মধ্যে পরিবর্তিত হয়। সুতরাং সর্বাধিক বিবর্ধনের জন্য বস্তুকে এমন অবস্থানে রাখতে হবে যাতে চোখের নিকট বিন্দুতে এর প্রতিবিম্ব গঠিত হয়। যেহেতু $m=\frac{\mathrm{D}}{u}$, অতএব $\frac{1}{u}=\frac{1}{\mathrm{D}}+\frac{1}{f}$ বা $u=\frac{f\,\mathrm{D}}{f+\mathrm{D}}$ হল সর্বাধিক বিবর্ধনের জন্য বস্তু দূরত্ব।

(3) ও (4) নং সমীকরণ থেকে বোঝা যায়— লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য কমিয়ে বিবর্ধন ক্ষমতা প্রয়োজন মতো বাড়ানো যায়। কিন্তু বেশী ক্ষমতাযুক্ত লেন্স বেশ পুরু হয় এবং পুরু লেন্সে স্পষ্ট প্রতিবিম্ব গঠিত হয় না এবং প্রতিবিম্বে বক্রতা ও বিকৃতি ঘটে। তাই লেন্সের বিবর্ধন ক্ষমতা একটি সীমার পরে আর বাড়ানো যায় না।

চোখের সর্বোত্তম অবস্থান : বস্তুর বিপরীত দিকে লেন্স থেকে a দূরত্বে চোখ রাখলে বিবর্ধন ক্ষমতা হয়

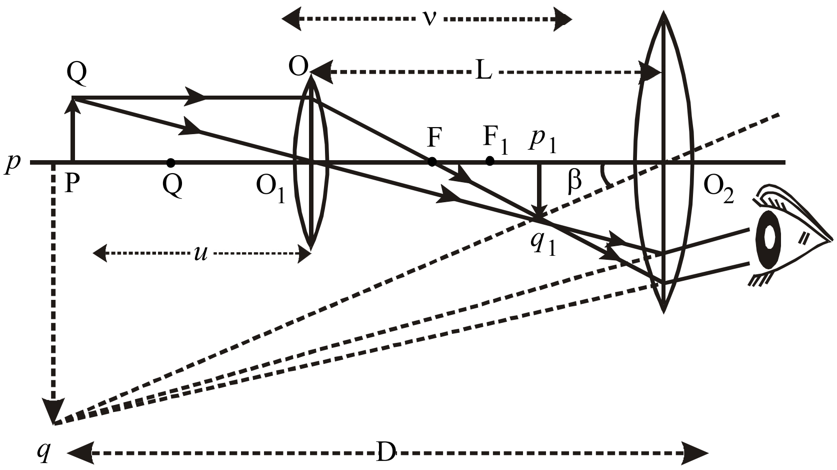
$$m=\frac{v}{u}=1+\frac{v}{f}=1+\frac{\mathrm{D}-a}{f}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

অতএব $a=0$ হলে বিবর্ধন ক্ষমতা সবথেকে বেশী হয়। অর্থাৎ চোখ তখন লেন্সের খুব কাছে থাকলেই বিবর্ধন ক্ষমতা বেশী হয়।

বিবর্ধক কাচের অবর্ণতা : বর্ণাপেরণের জন্য আতস কাচে উৎপন্ন প্রতিবিম্বও বিভিন্ন বর্ণের হবে। কিন্তু চোখকে লেন্সের খুব কাছে রাখলে এই বর্ণাপেরণ তত বেশী হয় না। কারণ তখন লেন্সের আলোক কেন্দ্র, বস্তুবিন্দু O′ ও I′ (চিত্র 10.2) একই সরলরেখায় অবস্থান করে এবং চোখে বিভিন্ন বর্ণের আলোর প্রতিবিম্ব একই বীক্ষণ কোণ উৎপন্ন করে। এই প্রতিবিম্বগুলির বিবর্ধনও একই রকম হয়। রেটিনার ওপর এগুলি উপরিপাতিত হয়ে অবর্ণক প্রতিবিম্ব গঠন করে।

10.4 যৌগিক অনুবীক্ষণ যন্ত্র (Compound Microscope) :

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে আমরা দেখলাম একটি উত্তল লেন্সের বিবর্ধন ক্ষমতা সীমিত। দুটি লেন্স ব্যবহার করে আরো বেশী বিবর্ধন ক্ষমতা পাওয়া যায়। যৌগিক অনুবীক্ষণ যন্ত্রে এই নীতি ব্যবহৃত হয়। 1610 খ্রীষ্টাব্দে গ্যাল্-আলিও এই যন্ত্র আবিষ্কার করেন। আধুনিক অনুবীক্ষণ যন্ত্রে 2000X (2000 গুণ) পর্যন্ত বিবর্ধন পাওয়া সম্ভব। উদ্ভিদ ও প্রাণী-শরীর বিজ্ঞানে গবেষণার ক্ষেত্রে এই যন্ত্রের অবদান অবিসংবাদিত।



চিত্র 10.3 যৌগিক অণুবীক্ষণ যন্ত্র

যৌগিক অনুবীক্ষণ যন্ত্রে মূলত দুটি সমাক্ষীয়, স্বল্প ফোকাস দৈর্ঘ্যের উত্তল লেন্স থাকে (চিত্র 10.3)। বস্তুর দিকে অবস্থিত লেন্স (0) কে অভিলক্ষ্য (objective) এবং চোখের দিকে অবস্থিত লেন্স (E) কে অভিনেত্র (eye-piece) বলে। প্রকৃতপক্ষে বিভিন্ন অপেরণ নিবারণের জন্য অভিলক্ষ্য ও অভিনেত্র একক লেন্সের না হয়ে লেন্স সমবায়ের হয়। অভিলক্ষ্য ও অভিনেত্র নিয়ে পরে আমরা বিশদ আলোচনা করব। আপাতত এদুটি একক লেন্স ধরে এর বিবর্ধন ক্ষমতা বিশ্লেষণ করবো।

অভিনেত্রের তুলনায় অভিলক্ষ্যের ফোকাস দৈর্ঘ্য ও উন্মেষ উভয়ই অপেক্ষাকৃত ছোটো হয়। এই দুই লেন্সের মধ্যে দূরত্ব L কে বাড়ানো কমানোর ব্যবস্থা থাকে। অভিলক্ষ্য ও অভিনেত্র দুটি পৃথক ফাঁপানলের দুপ্রান্তে আটকানো থাকে। একটি নলের মধ্যে অন্যটি ঠিকমতো বসানো থাকে। আবার সমগ্র যন্ত্রটিকেও র‍্যাক-পিনিয়ন (rack and pinion) ব্যবস্থার সাহায্যে অভিলক্ষ্যের সামনে অবস্থিত ক্ষুদ্রবস্তুর দিকে এগিয়ে পিছিয়ে বিশেষ অবস্থানে বস্তুর স্পষ্ট প্রতিবিম্ব দেখা হয়। বস্তুটিকে উত্তমরূপে আলোকিত করার ব্যবস্থা থাকে। PQ বস্তু অভিলক্ষ্যের সামনে মুখ্য ফোকাস F' থেকে সামান্য দূরে থাকে যাতে অভিলক্ষ্য বস্তুর একটি সদ্, অবশীর্ষ ও বিবর্ধিত প্রতিবিম্ব p_1q_1 অভিনেত্রের সামনে গঠন করে। অভিনেত্রটি এমন অবস্থানে থাকে যাতে এর প্রথম মুখ্য ফোকাস F_1 এর ভিতরে প্রতিবিম্বটি গঠিত হয়। তখন এটি একটি বিবর্ধক কাচের মতো আচরণ করে এবং p_1q_1 এর বিবর্ধিত অসদবিম্ব pq গঠন করে। pq হল অনুবীক্ষণ যন্ত্রে গঠিত অন্তিম প্রতিবিম্ব। প্রতিবিম্বটি বস্তু সাপেক্ষে অবশীর্ষ এবং চোখের নিকট বিন্দু (D) এবং দূরবিন্দু (∞)-এর মধ্যবর্তী যে কোনো স্থানে গঠিত হতে পারে।

বিবর্ধন ক্ষমতা :

$$\text{বিবর্ধন ক্ষমতা, } m = \frac{\text{অন্তিম প্রতিবিম্ব কর্তৃক চোখে সৃষ্ট বীক্ষণ কোণ } (\beta)}{\text{স্পষ্ট দর্শণের ন্যূনতম দূরত্বে অবস্থিত বস্তু কর্তৃক সৃষ্ট বীক্ষণ কোণ } (\infty)}$$

$$= \frac{\angle pO_2q}{PQ/D} = \frac{\angle p_1O_2q_1}{PQ/D} = \frac{p_1q_1/p_1O_2}{PQ/D}$$

$$\therefore\ m = \frac{p_1q_1}{\mathrm{PQ}} \times \frac{\mathrm{D}}{p_1\mathrm{O}_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

D হল স্পষ্ট দর্শনের ন্যূনতম দূরত্ব।

$\frac{p_1q_1}{\mathrm{PQ}} = m_o =$ অভিলক্ষ্য কর্তৃক সৃষ্ট বিবর্ধন

$\frac{\mathrm{D}}{p_1\mathrm{O}_2} = m_e =$ অভিনেত্র কর্তৃক সৃষ্ট বিবর্ধন, যখন অন্তিম প্রতিবিম্ব স্পষ্ট দর্শণের ন্যূতম দূরত্বে গঠিত হয়।

$$\therefore\ m = m_0 \times m_e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

অবার অভিলক্ষ্য থেকে PQ এর দূরত্ব $= u$ ও মধ্যবর্তী প্রতিবিম্ব p_1q_1 এর দূরত্ব $= v$ হলে,

$$m_0 = \frac{p_1q_1}{\mathrm{PQ}} = \frac{v}{u}$$

অভিনেত্রটি বিবর্ধক কাচ হিসাবে আচরণ করে। নিকট বিন্দুতে গঠিত প্রতিবিম্বের ক্ষেত্রে

$m_e = 1 + \frac{\mathrm{D}}{fe}$, fe হল অভিনেত্রের ফোকাস দৈর্ঘ্য।

$$\therefore\ m = \frac{v}{u}\left(1 + \frac{\mathrm{D}}{fe}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

অভিলক্ষ্যের ফোকাস দৈর্ঘ্য f_0 হলে, লেন্সের সমীকরণ থেকে,

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{-u} = \frac{1}{f_0}$$

বা, $\frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f_0}$

$$\therefore\ \frac{v}{u} = \left(\frac{v}{f_0} - 1\right)$$

$$\therefore\ m = \left(\frac{v}{f_0} - 1\right)\left(1 + \frac{\mathrm{D}}{fe}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

অনুবীক্ষণ যন্ত্রের অভিলক্ষ্য এবং অভিনেত্রের মাঝের দূরত্ব L কে সাধারণভাবে নলের দৈর্ঘ্য বলা হয়। মধ্যবর্তী প্রতিবিম্ব p_1q_1 নলের প্রায় শেষপ্রান্তে অভিনেত্রের ঠিক সামনে গঠিত হয় বলে, ধরা যায় $v \simeq \mathrm{L}$।

আবার L এর তুলনায় f_0 র মান খুব কম হয়।

$$\therefore\ \left(\frac{v}{f_0} - 1\right) \simeq \left(\frac{\mathrm{L}}{f_0} - 1\right) \simeq \frac{\mathrm{L}}{f_0}, \text{ কারণ } \frac{\mathrm{L}}{f_0} >> 1$$

$$\therefore\ m = \frac{L}{f_0}\left(1 + \frac{D}{fe}\right)$$

আবার D এর তুলনায় fe এর মান খুব ছোট বলে $\frac{D}{fe} >> 1$

$$\therefore\ m = \frac{L}{f_0} \times \frac{D}{fe} \quad ....(10)$$

অতএব অনুবীক্ষণ যন্ত্রের m বাড়বে যদি (i) অভিলক্ষ্যের ফোকাস দৈর্ঘ্য f_0 ছোটো হয়, (ii) অভিনেত্রের ফোকাস দৈর্ঘ্য fe ছোটো হয়, এবং (iii) যন্ত্রের নলের দৈর্ঘ্য L বড় হয়। নলের দৈর্ঘ্য খুব বেশী বড় করা সম্ভব নয়। সেক্ষেত্রে এটি নাড়াচাড়া করা অসুবিধাজনক হয়। বাস্তবে নলের দৈর্ঘ্য 20-25 cm এর মধ্যে রাখা হয় এবং বিভিন্ন বিবর্ধনের জন্য বিভিন্ন ফোকাস দৈর্ঘ্যের অভিলক্ষ্য ব্যবহার করা হয়। সাধারণত অভিনেত্রের ফোকাস দৈর্ঘ্য ও উন্মেষের তুলনায় অভিলক্ষ্যের ফোকাস দৈর্ঘ্য ও উন্মেষ ছোটো রাখা হয়।

অনুবীক্ষণ যন্ত্রে প্রতিবিম্বের বিবর্ধন খুব বেশী হয় বলে ওর ঔজ্জ্বল্য বেশ কমে যায়। সেজন্য বস্তুকে আলোকের সাহায্যে যথেষ্ট উজ্জ্বল করার ব্যবস্থা রাখা হয়।

প্রতিবিম্ব গঠনে বিভিন্ন অপেরণ উপস্থিত হয়। এগুলি ন্যূনতম করার জন্য আধুনিক উচ্চ ক্ষমতাযুক্ত অনুবীক্ষণ যন্ত্রে আট থেকে দশটি লেন্সের সমন্বয়ে গঠিত অভিলক্ষ্য এবং দুই বা ততোধিক লেন্সের সমন্বয়ে গঠিত অভিনেত্র ব্যবহার করা হয়।

10.5 দূরবীক্ষণ যন্ত্র (Telescopes) :

কোনো বস্তুর আকার বড় হলেও দূর থেকে দেখলে তাকে খুব ছোট ও অস্পষ্ট দেখায়। দূরবর্তী বস্তুকে বড় ও স্পষ্টভাবে দেখার জন্য দূরবীক্ষণ যন্ত্র ব্যবহার করা হয়। এই যন্ত্রের সাহায্যে বস্তুর একটি অসদ্ ও স্পষ্ট প্রতিবিম্ব গঠন করা হয় যা দর্শকের চোখে বস্তুর থেকে বৃহত্তর বীক্ষণ কোণ উৎপন্ন করে। ফলে একে অনেক বড়ো দেখায়। যৌগিক অনুবীক্ষণ যন্ত্রের মতো দূরবীক্ষণে মূলত দুটি অংশ থাকে—যথা অভিলক্ষ্য ও অভিনেত্র। অভিলক্ষ্য দূরের বস্তুর একটি সদ্, অবশীর্ষ ও ক্ষুদ্রতর প্রতিবিম্ব গঠন করে এবং অভিনেত্র একটি আতস কাচের মতো এই প্রতিবিম্বের অসদ্ ও বিবর্ধিত প্রতিবিম্ব গঠন করে।

দূরবীক্ষণ সাধারণত দুই শ্রেণীর হয়—(i) প্রতিসারক দূরবীক্ষণ (refracting telescope) এবং (ii) প্রতিফলক দূরবীক্ষণ (reflecting telescope)। প্রতিসারক দূরবীক্ষণে অভিলক্ষ্য একটি লেন্স বা একাধিক লেন্স সমন্বয়ে গঠিত। এই লেন্সের বা লেন্স সমন্বয়ের ফোকাস দৈর্ঘ্য বেশী ও উন্মেষও বড় হয়। আর প্রতিফলক দূরবীক্ষণে অভিলক্ষ্য হিসাবে একটি বড় অবতল অথবা অধিবৃত্তীয় দর্পন ব্যবহার করা হয়। জ্যোতিষ্কসমূহের বিষয়াদি পর্যবেক্ষণের জন্য বা গবেষণার জন্য প্রতিফলক দূরবীক্ষণের ব্যবহার অনেক বেশী। এর সুবিধাগুলি—(i) প্রতিফলকে বর্ণাপেরণ থাকে না। (ii) অধিবৃত্তাকার প্রতিফলক ব্যবহার করে গোলাপেরণ মুক্ত প্রতিবিম্ব গঠন করা যায়। (iii) বৃহৎ উন্মেষের প্রতিফলক ববহারে প্রতিবিম্বের উজ্জ্বলতা ও বিশ্লেষণী ক্ষমতা (resolving power) বেশী করা যায়। কিন্তু প্রতিসারক

দূরবীক্ষণের জন্য বৃহৎ আকারের লেন্স তৈরী করা খুবই কষ্টসাধ্য, তাছাড়া কাচের লেন্সে বেশী পরিমাণ আলোক শোষিত হয় এবং ফলত প্রতিবিম্বের উজ্জ্বলতা হ্রাস পায়। আমরা এখানে প্রতিসারক দূরবীক্ষণ যন্ত্রের মূলনীতি আলোচনা করব।

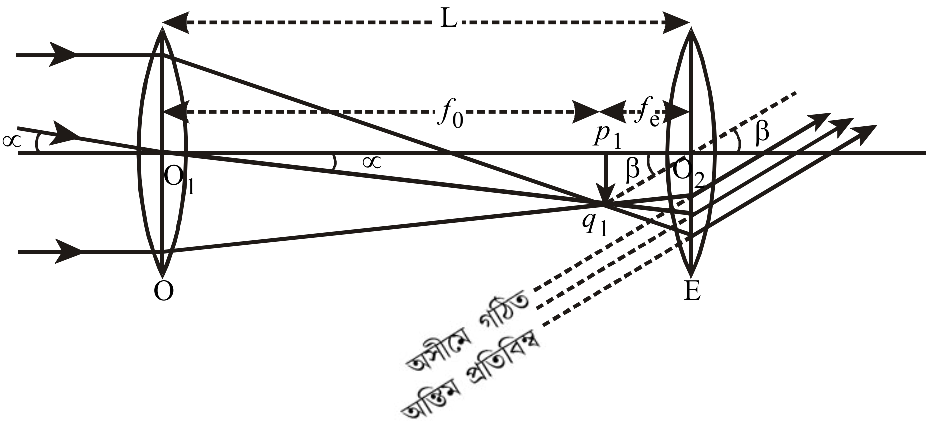
দূরবীক্ষণ যন্ত্রের আরো দুটি ভাগ আছে—

(i) নভোদূরবীন বা নভোবীক্ষণ যন্ত্র (astronomical telescope) এবং

(ii) ভূদূরবীন বা ভূ-বীক্ষণ যন্ত্র (terrestrial telescope)। নভোবীক্ষণ যন্ত্রের সাহায্যে জ্যোতিষ্ক ইত্যাদি পর্যবেক্ষণ করা হয়। এই যন্ত্রে অন্তিম প্রতিবিম্ব বস্তু সাপেক্ষে অবশীর্ষ হয়। ভূ-বীক্ষণ যন্ত্রে বস্তুর সমশীর্ষ অন্তিম প্রতিবিম্ব গঠিত হয়। এটি ভূপৃষ্ঠে দূরের বস্তু দেখার জন্য ব্যবহার করা হয়।

10.6 প্রতিসারক নভোবীক্ষণ যন্ত্র (Refracting Astronomical Telescope) :

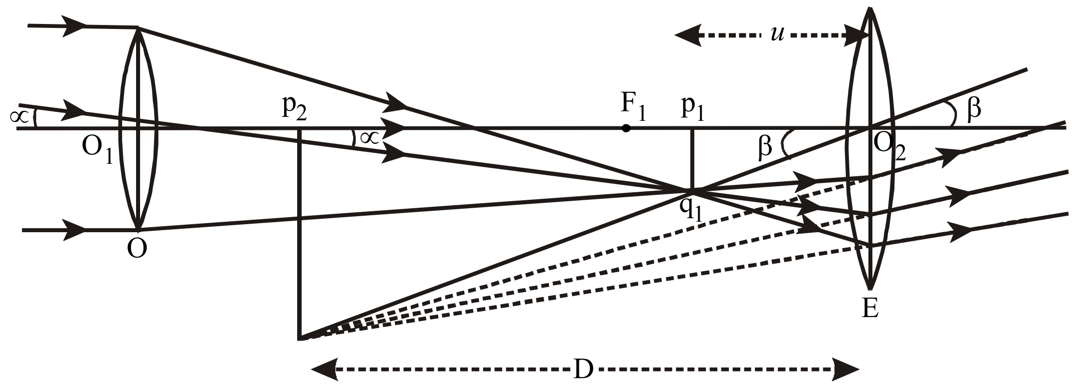
সরলতম প্রতিসারক নভোবীক্ষণ যন্ত্রে বেশী ফোকাস দৈর্ঘ্যের ও বড়ো উন্মেষের একটি উত্তল লেন্স O কে অভিলক্ষ্য এবং কম ফোকাস দৈর্ঘ্যের ও ছোটো উন্মেষের একটি উত্তল লেন্স E কে অভিনেত্র হিসাবে ব্যবহার করা হয় (চিত্র 10.4)। চিত্রে এই দুটি লেন্সকে একক লেন্স হিসাবে দেখানো হয়েছে। প্রকৃতপক্ষে এগুলি লেন্স সমবায়ে গঠিত বিভিন্ন অপেরণকে হ্রাস করার জন্য। নভোবীক্ষণ যন্ত্রে কোনো দূরবর্তী বস্তুর যেকোন বিন্দু থেকে যে আলোক রশ্মিগুচ্ছ এসে অভিলক্ষ্যে আবর্তিত হয় সেগুলি প্রায় সমান্তরাল।



চিত্র 10.4 নভোবীক্ষণ যন্ত্র ঃ স্বাভাবিক দৃষ্টি

এইসব রশ্মিগুচ্ছ অভিলক্ষ্য লেন্সে প্রতিসৃত হয়ে তার ফোকাসতলে বস্তুটির একটি সদ্, অবশীর্ষ ও ক্ষুদ্র প্রতিবিম্ব p_1q_1 গঠন করে; O_1p_1 অভিলক্ষ্যের ফোকাস দৈর্ঘ্য। এই প্রতিবিম্ব গঠনের পর তার থেকে আলোক রশ্মিগুচ্ছ অভিনেত্রের মধ্য দিয়ে গমন করে। অভিনেত্রটিকে এমনভাবে বসানো হয় যাতে এর প্রথম মুখ্য ফোকাস p_1 বিন্দুতে সমাপতিত হয়। ফলে প্রতিসরণের পর রশ্মিগুচ্ছ সমান্তরাল হয়। অভিলক্ষ্যের আলোককেন্দ্র O_2 বিন্দু দিয়ে

নির্গত রশ্মি q_1O_1(কাল্পনিক) কোনো চ্যুতি ছাড়াই অভিনেত্র দিয়ে প্রতিসৃত হয়। প্রতিসৃত রশ্মিগুচ্ছ এই রশ্মির সমান্তরাল হয়। প্রতিসৃত রশ্মিগুচ্ছকে পিছনের দিকে বর্ধিত করলে এগুলি অসীমে মিলিত হয়। অসীমে বস্তুর একটি বিবর্ধিত, অবশীর্ষ, অসদবিম্ব গঠিত হয়। অভিনেত্রের পিছনে চোখ রাখলে প্রতিবিম্বকে অক্লেশে অর্থাৎ সামান্যতম উপযোজন (accomodation) ছাড়াই দেখতে পাওয়া যায়। এই অবস্থায় দূরবীক্ষণ যন্ত্রটিকে অসীমে ফোকাস করা হয়েছে (focussed for infinity) বা স্বাভাবিক দৃষ্টির জন্য সমযোজিত (adjusted for normal vision) বলা হয়। অবার অন্তিম অসদবিম্বকে স্পষ্ট দর্শনের ন্যূনতম দূরত্বে (D) দেখলে তখন বলা হয় দূরবীক্ষণটি স্পষ্ট দৃষ্টির জন্য সমযোজিত (adjusted for distinct vision) বলা হয়। সেক্ষেত্রে p_1O_2 দূরত্ব অভিনেত্রের ফোকাস দৈর্ঘ্য fe এর থেকে কম হবে (চিত্র 10.5)। অন্তিম প্রতিবিম্ব p_2q_2 এর দূরত্ব হবে D। প্রতিবিম্ব p_1q_1 সাপেক্ষে বিবর্ধিত অসদ্ ও অবশীর্ষ। এই দুই অবস্থানের মাঝে যেকোনো স্থানে প্রতিবিম্ব গঠন করা যায়।



চিত্র 10.5 নভোবীক্ষণ ঃ স্পষ্ট দৃষ্টি

বিবর্ধন ক্ষমতা : চোখে অন্তিম প্রতিবিম্ব দ্বারা উৎপন্ন বীক্ষণ কোণ এবং বস্তু দ্বারা উৎপন্ন বীক্ষণ কোণের অনুপাতকে দূরবীক্ষণের বিবর্ধন ক্ষমতা বলে।

$$\text{বিবর্ধন ক্ষমতা, } m = \frac{\textit{অন্তিম প্রতিবিম্ব দ্বারা উৎপন্ন কোণ}}{\text{বস্তু দ্বারা উৎপন্ন কোণ}} = \frac{\beta}{\propto}$$

m এর মান অন্তিম প্রতিবিম্বের অবস্থানের উপর নির্ভরশীল। আমরা দুটি চরম পরিস্থিতি দিয়ে আলোচনা করব।

(i) স্বাভাবিক দৃষ্টি (Normal vision) : 10.4 নং চিত্রে $O_1p_1 = f_0 =$ অভিলক্ষ্যের ফোকাস দৈর্ঘ্য এবং $p_1O_2 = fe$ অভিনেত্রের ফোকাস দৈর্ঘ্য। $\propto$ ও β ক্ষুদ্র মানের হয়।

$$m = \frac{\beta}{\propto} = \frac{p_1q_1 / p_1O_2}{p_1q_1 / p_1O_1} = \frac{p_1O_1}{p_1O_2} = \frac{f_0}{fe} \text{ ....(11)}$$

অতএব বিবর্ধন ক্ষমতা বেশী হবে যদি অভিলক্ষ্যের ফোকাস দৈর্ঘ্য বেশী ও অভিনেত্রের ফোকাস দৈর্ঘ্য কম হয়।

আভিনেত্র ও অভিলক্ষ্যের মধ্যবর্তী দূরত্ব অর্থাৎ দূরবীক্ষণের দৈর্ঘ্য L হলে,

$L = fo + fe$ ....(12)

(ii) স্পষ্ট দৃষ্টি (Distinct vision) : এক্ষেত্রে অন্তিম প্রতিবিম্ব চোখের নিকট বিন্দুতে গঠিত হয়। 10.5 নং চিত্র থেকে, $p_2O_2 = D$। ধরা যাক্, $p_1O_2 = u$।

$$\therefore\ m = \frac{\beta}{\propto} = \frac{p_1q_1 / u}{p_1q_1 / f_0} = \frac{f_0}{u}$$

অভিনেত্রের ক্ষেত্রে, $p_1O_2 = -u =$ বস্তুদূরত্ব, $p_2O_2 = -D =$ প্রতিবিম্ব দূরত্ব। $fe =$ ফোকাস দৈর্ঘ্য।

লেন্সের সমীকরণ থেকে,

$$\frac{1}{-D} - \frac{1}{-u} = \frac{1}{fe}$$

বা, $$\frac{1}{D} - \frac{1}{u} = -\frac{1}{fe}$$

বা, $$\frac{1}{u} = \frac{1}{D} + \frac{1}{fe} = \frac{D + fe}{Dfe}$$

$$\therefore\ m = \frac{f_0}{fe} \times \frac{D + fe}{D} = \frac{f_0}{fe}\left(1 + \frac{fe}{D}\right) \text{......................(13)}$$

$D \to \propto$ হলে, $m = \dfrac{f_0}{fe}$, একটি স্বাভাবিক দৃষ্টির ক্ষেত্রে বিবর্ধন ক্ষমতার রাশিমালা।

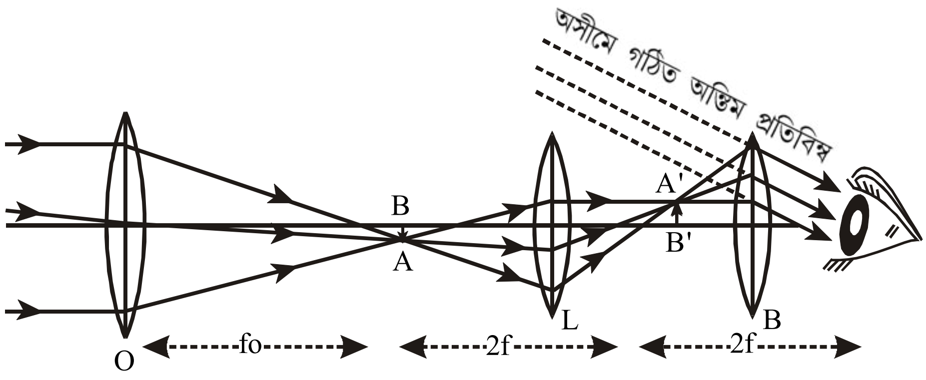
স্পষ্ট দর্শনের ক্ষেত্রে দূরবীক্ষণের দৈর্ঘ্য

$$L = f_0 + u = f_0 + \frac{Dfe}{D + fe} \text{............................(14)}$$

প্রতিবিম্বের ঔজ্জ্বল্য ও বিশ্লেষণী ক্ষমতা বৃদ্ধির জন্য বড় উন্মেষের অভিলক্ষ্য লেন্স ব্যবহার করা হয়। অভিনেত্রের উন্মেষ খুব ছোটো হওয়া প্রয়োজন যাতে নির্গত আলোর কোনো অংশ চোখের বাইরে চলে না যায়। অন্যথায় প্রতিবিম্বের ঔজ্জ্বল্য কমে যায়। অভিলক্ষ্যের ফোকাসতলে ফটোগ্রাফিক প্লেট রেখে বেশি সময় ধরে অলোক সম্পাতের দ্বারা অনুজ্জ্বল বস্তুর আলোকচিত্র নেওয়া যায়। তখন দূরবীক্ষণ যন্ত্র একটি দীর্ঘ ফোকাস দৈর্ঘ্যের ক্যামেরার মতো কাজ করে।

10.7 ভূ-দূরবীন বা ভূ-বীক্ষণ যন্ত্র (Terrestrial Telescope) :

নভোবীক্ষণ যন্ত্রে প্রতিবিম্ব বস্তু সাপেক্ষে অবশীর্ষ হয়, গ্রহ, নক্ষত্রাদি জ্যোতিষ্কের গবেষণায় এতে কোনো অসুবিধা হয় না। কিন্তু ভূ-পৃষ্ঠের বস্তুরাজিকে এই যন্ত্রে দেখলে অবশীর্ষ প্রতিবিম্ব দেখা যাবে যা আমাদের অভ্যস্থতার পরিপন্থী। তাই ভূ-বীক্ষণ যন্ত্রে সমশীর্ষ প্রতিবিম্ব পাওয়ার ব্যবস্থা করা হয়।



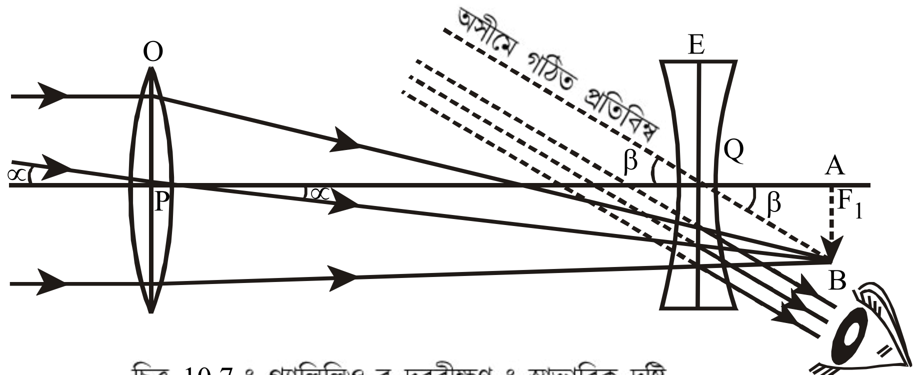
চিত্র 10.6 ঃ ভূ-বীক্ষণ যন্ত্র

নভোবীক্ষণ যন্ত্রে অভিলক্ষ্য ও অভিনেত্রের মধ্যে তৃতীয় একটি উত্তল লেন্স বসিয়ে একে ভূ-বীক্ষণ যন্ত্রে পরিণত করা যায়। এই তৃতীয় লেন্সটিকে সমশীর্ষকারী (ereeting) লেন্স বলে।

10.6 চিত্রে f ফোকাস দৈর্ঘ্যের সমশীর্ষকারী উত্তল লেন্স L, অভিলক্ষ্যের ফোকাস দৈর্ঘ্য f_0 দূরত্ব থেকে $2f$ দূরে বসানো হয়েছে। অভিলক্ষ্য দ্বারা গঠিত প্রতিবিম্ব AB, L উত্তল লেন্সের বিপরীত দিকে সদ্, অবশীর্ষ ও একই আকারের প্রতিবিম্ব A′B′গঠন করে। ফলে মোট বিবর্ধন একই থাকে। কিন্তু দূরবীক্ষণের দৈর্ঘ্য $4f$ বেড়ে যায়।

গ্যালিলিওর দূরবীক্ষণ (Galileo's telescope) :

এই যন্ত্রে অবশীর্ষ প্রতিবিম্বকে সমশীর্ষ করার জন্য একটি অবতল লেন্সকে অভিনেত্র হিসাবে ব্যবহার করা



চিত্র 10.7 ঃ গ্যালিলিও-র দূরবীক্ষণ ঃ স্বাভাবিক দৃষ্টি

হয় (চিত্র 10.7)। দেখানো যায় গ্যালিলিও-র দৃষ্টি ক্ষেত্র (field of vision) খুবই কম হয়।

10.8 অভিলক্ষ্য (Objective) :

আমরা আগেই উল্লেখ করেছি বর্ণাপেরণ ও একবর্ণীয় আপেরণগুলি যথাসম্ভব কম করার জন্য অভিলক্ষ্য হিসাবে

একক লেন্সের বদলে দুই বা ততোধিক লেন্সের সমবায় ব্যবহার করা হয়। সাধারণত একটি বা দুটি অবর্ণক লেন্স যুগ্ম (achromatic doublet) অভিলক্ষ্য হিসাবে ব্যবহৃত হয়।

উচ্চক্ষমতার অনুবীক্ষণ যন্ত্রে গোলাপেরণ ও কোমা ন্যূনতম করার জন্য সিডার তেল (Cedar oil) ব্যবহার করে অবিপথী ফোকাসদ্বয়ের নীতি প্রয়োগ করা হয়। অনুবীক্ষণ যন্ত্রের অভিলক্ষ্যে আলোক বেশী তির্যকভাবে আপতিত হয় বলে অন্যান্য একবর্ণীয় অপেরণ কমানোর চেষ্টা করা হয়।

দূরবীক্ষণে কৌণিক দৃষ্টিক্ষেত্র কম বলে অবিন্দুকত্ব, বক্রতা ও বিকৃতির পরিমাণ কমই থাকে।

10.9 অভিনেত্র (Eye-piece) :

অনুবীক্ষণ ও দূরবীক্ষণ যন্ত্রের মতো অলোক যন্ত্রে অভিলক্ষ্য বস্তুর অবস্থানের বিপরীত দিকে বস্তুর সদ্‌বিম্ব গঠন করে। আর অভিনেত্র আতস কাচের মতো ঐ সদবিম্বকে বিবর্ধিত অসদবিম্বে রূপান্তরিত করে। সাধারণত দুটি লেন্স নির্দিষ্ট ব্যবধানে রেখে একটি লেন্স সমবায় গঠন করা হয় যা অভিনেত্র হিসাবে ক্রিয়া করে। যে লেন্স অভিলক্ষ্যের দিকে থাকে তাকে বলা হয় ক্ষেত্র লেন্স বা অভিক্ষেত্র লেন্স (field lens) এবং যে লেন্সটি চোখের দিকে থাকে তাকে বলা হয় বীক্ষণ লেন্স বা নেত্র লেন্স (eye-lens)। ক্ষেত্র লেন্স বেশী পরিমাণে আলোকরশ্মি সংগ্রহ করে বীক্ষণ লেন্স দিয়ে পাঠায় এবং বীক্ষণ লেন্স অভিলক্ষ্য দ্বারা গঠিত বিম্বটিকে বিবর্ধিত করে। তুলনায় বীক্ষণ লেন্স অভিলক্ষ্য থেকে দূরে থাকায় বেশী তির্যকরশ্মিগুলি সরাসরি বীক্ষণ লেন্সে পড়তে পারে না। আবার ক্ষেত্র লেন্স তুলনায় অভিলক্ষ্যের কাছে থাকায় ঐ তির্যকরশ্মিগুলির বেশীর ভাগই এর দ্বারা সংগৃহীত হয় ও পরে বীক্ষন লেন্সে পড়ে। এতে দৃষ্টিক্ষেত্র যেমন বৃদ্ধি পায় তেমনি ঔজ্জ্বল্যও বৃদ্ধি পায়। দৃষ্টিক্ষেত্র বলতে বোঝায় যন্ত্রের সাহায্যে যে অঞ্চলটি একসঙ্গে দেখা যায় বা চোখে যে পরিমাণ কোণ তৈরী করে। ক্ষেত্র লেন্স না থাকলে বৃহৎ উন্মেষের বীক্ষন লেন্স ব্যবহার করতে হত। সেক্ষেত্রে বক্রতা, অবিন্দুকত্ব, বিকৃতি ও পার্শ্বীয় বর্ণাপেরণ ত্রুটিগুলি বেশী হত। তাছাড়া দুটি লেন্সের যথাযথ সমবায় ব্যবহার করে গোলাপেরণ ও বর্ণাপেরণ হ্রাস করার ব্যবস্থা করা যায়। যে দুটি অভিনেত্র বহুলভাবে ব্যবহৃত হয়—তা হল

(i) র‍্যামস্‌ডেন অভিনেত্র ও (ii) হাইগেনস্‌ অভিনেত্র।

(i) র‍্যামস্‌ডেন অভিনেত্র (Ramsden eye-piece) :

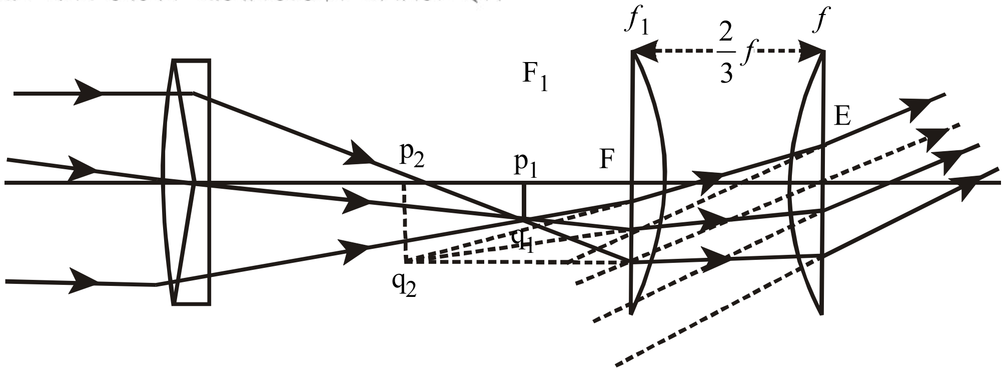
এই অভিনেত্রে দুটি সমান ফোকাস দৈর্ঘ্যের সমতলোত্তল লেন্সকে এদের ফোকাস দৈর্ঘ্যের $\frac{2}{3}$ গুণ দূরে স্থাপন করা হয়। ফোকাস দৈর্ঘ্য f হলে ওদের মধ্যে ব্যবধান হবে $\frac{2f}{3}$। সমাক্ষীয় লেন্স দুটির বক্রতল পরস্পরের মুখোমুখি অবস্থায় রেখে সমন্বয়টি গঠন করা হয়। লেন্স দুটি ক্রাউন কাচের হয়। অভিলক্ষ্য দ্বারা গঠিত সদ্‌ ও অবশীর্ষ প্রতিবিম্ব এই লেন্স সমবায়ের প্রথম মুখ্য ফোকাস তলে অবস্থান করে। এই প্রথম মুখ্য ফেকাসতল ক্ষেত্র লেন্সের সামনে $\frac{f}{4}$ দূরত্বে থাকে। ঐ প্রতিবিম্ব থেকে অপসারী রশ্মিগুচ্ছ বীক্ষণ লেন্সের মধ্য দিয়ে অপসৃত হয়ে সমান্তরাল রশ্মিগুচ্ছে পরিণত হয়। অভিনেত্রের প্রথম মুখ্য ফোকাসতলে ক্রস তার (cross wire) বা স্কেল রেখে প্রতিবিম্বের পরিমাপ করা যায়। লেন্স সমন্বয়ের তুল্য ফোকাস দূরত্ব F হলে

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f} - \frac{\frac{2}{3}f}{f^2} = \frac{2}{f} - \frac{2}{3f} = \frac{4}{3f}$$

$$\therefore\ F = \frac{3f}{4}$$

তুল্যলেন্সের অবস্থান $x = \frac{aF}{f} = \frac{\frac{2}{3}f \cdot \frac{3}{4}f}{f} = \frac{f}{2}$

এটি প্রথম লেন্সের আলোককেন্দ্রের ডানদিকে হয়।



চিত্র 10.8 ঃ রাম্‌স্‌ডেন অভিনেত্র ঃ স্বাভাবিক দৃষ্টি

10.8 চিত্রে একটি দূরবীক্ষণ যন্ত্রে র‍্যামস্‌ডেন অভিনেত্র দেখানো হয়েছে। অভিলক্ষ্যের সাহায্যে গঠিত অবশীর্ষ প্রতিবিম্ব হল p_1q_1। F ও E যথাক্রমে ক্ষেত্র লেন্স ও বীক্ষণ লেন্স। অভিনেত্র দিয়ে প্রতিসৃত হওয়ার পর স্বাভাবিক দর্শনে রশ্মিগুচ্ছ সমান্তরাল হয়েছে। অতএব স্বাভাবিক দর্শনের বেলায়— $p_2\,E = f$ । ক্ষেত্র লেন্সের বেলায়, বস্তুদূরত্ব ধরা যাক্ u, প্রতিবিম্ব দূরত্ব $-Fp_2 = -\left(f - \frac{2}{3}f\right) = -\frac{f}{3}$ । লেন্স সমীকরণ $\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$

অতএব, $\frac{3}{-f} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$ বা, $\frac{1}{u} = -\frac{4}{f}$ $\therefore\ u = -\frac{f}{4}$

অর্থাৎ অভিলক্ষ্য দ্বারা গঠিত প্রতিবিম্ব ক্ষেত্র লেন্সের সামনে $\frac{f}{4}$ দূরত্বে আছে। এটাই হল p_1q_1 প্রতিবিম্বের অবস্থান। এই অবস্থানে ক্রস তার বা স্কেল বসিয়ে প্রতিবিম্বের আকার পরিমাপ করা যায়। ক্রস তার বা স্কেল প্রতিবিম্ব p_1q_1 এর মতোই দুটি লেন্সের সাহায্যে বিবর্ধিত হয়। তাই এই অভিনেত্রের সাহায্যে প্রতিবিম্বের সঠিক পরিমাপ সম্ভব হয়। ক্রস তার বা স্কেল বসিয়ে পরিমাপ করা যায় বলে এই অভিনেত্রকে ধনাত্মক (positive) অভিনেত্র বলা হয়।

প্রতিবিম্ব গঠনে ত্রুটি : এই অভিনেত্রে বর্ণাপেরণ বা গোলাপেরণ কোনোটিই ন্যূনতম হয় না।

বর্ণাপেরণ ন্যূনতম হওয়ার শর্ত হল, দুটি লেন্সের মধ্যে ব্যবধান হবে

$$a = \frac{f_1 + f_2}{2}, \text{ অর্থাৎ } a = \frac{f + f}{2} = f$$

দুটি লেন্সের মধ্যে ব্যবধান $a = f$ হলে স্বাভাবিক দর্শনে অভিলক্ষ্য দ্বারা গঠিত প্রতিবিম্ব p_1q_1 গঠিত হয় ক্ষেত্র লেন্সের সংস্পর্শে। সে অবস্থায় লেন্সের গায়ে লেগে থাকা ধুলিকণা বা লেন্সের গায়ে কোনো আঁচড়ের দাগ দুটি লেন্সের দ্বারা বিবর্ধিত হয়ে প্রতিবিম্বকে অস্পষ্ট করে দিত। এটি যাতে না হয় সেজন্য এর মধ্যে ব্যবধান f থেকে একটু কমিয়ে $\frac{2}{3}f$ করা হয়। ফলে বর্ণাপেরণ এক্ষেত্রে ন্যূনতম নয়।

আবার গোলাপেরণ ন্যূনতম হওয়ার শর্ত, দুটি লেন্সের ব্যবধান $a = f_1 - f_2$ হবে। এখানে $a = f - f = 0$। কিন্তু এখানে ব্যবধান রাখা হয়েছে $\frac{2f}{3}$। ফলে গোলাপেরণও ন্যূনতম নয়। তা সত্ত্বেও 10.8 চিত্রের মতো দুটি সমতলোত্তল লেন্স ব্যবহার করার ফলে চারটি তলে মোট বিচ্যুতি প্রায় সমান চার ভাগে ভাগ হয়ে যায়। ফলে গোলাপেরণ অনেকটাই কম হয়। এই অবস্থায় কোমাও কম হয়। খুব সরু রশ্মিগুচ্ছ অভিনেত্রের মধ্য দিয়ে যাওয়ার ফলে গোলাপেরণ ও অবিন্দুকত্বের ন্যূনতম অস্পষ্টতা বৃত্ত যথেষ্ট ছোটো হয়। বর্ণাপেরণ ও গোলাপেরণ ন্যূনতম না হলেও এই অভিনেত্র দ্বারা পরিমাপ করা সম্ভব বলে এটি বহুলভাবে ব্যবহৃত হয়। বর্ণাপেরণ আরো কম করার জন্য বীক্ষণ লেন্সকে পৃথকভাবে অবর্ণক লেন্স যুগ্মের মতো তৈরী করা হয়।

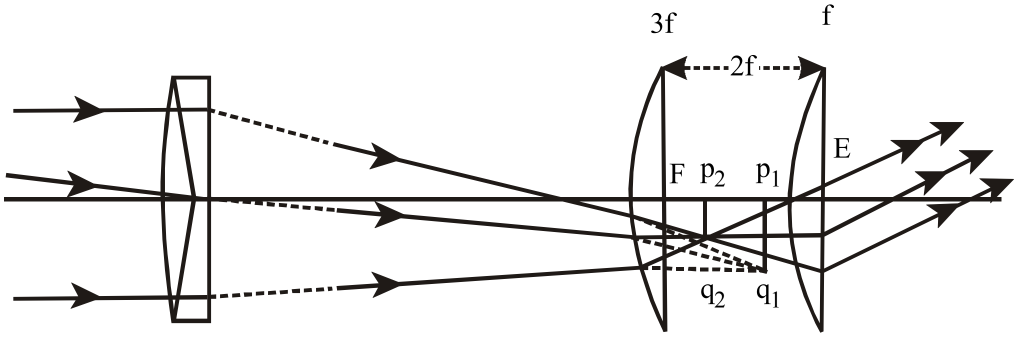
সংক্ষেপে সুবিধা ও অসুবিধাগুলি নিম্নরূপ :

সুবিধা : (i) ক্ষেত্র লেন্স থাকায় দৃষ্টিক্ষেত্র বেশ বড়ো হয়। (ii) ক্রস তার বা স্কেল ব্যবহার করে সঠিক পরিমাপ সম্ভব।

অসুবিধা : বর্ণাপেরণ ও গোলাপেরণ কোনোটিই ন্যূনতম নয়।

(ii) হাইগেন্‌স অভিনেত্র (Huygen's eye-piece) :

এই অভিনেত্র একই উপাদানের দুটি সমাক্ষীয় সমতলোত্তল লেন্স দিয়ে গঠিত। লেন্স দুটি সাধারণত ক্রাউন কাচ দিয়ে তৈরী। এদের বক্রতল অভিলক্ষ্যের দিকে থাকে। ক্ষেত্র লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য বীক্ষণ লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্যের 3 গুণ এবং এদের মধ্যে ব্যবধান রাখা হয় বীক্ষণ লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্যের 2 গুণ। অর্থাৎ বীক্ষণ লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য f হলে, ক্ষেত্র লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য $3f$ এবং এদের মধ্যে ব্যবধান $2f$। চিত্র 10.9 এ হাইগেন্‌স



চিত্র 10.9 ঃ হাইগেনস অভিনেত্র ঃ স্বাভাবিক দৃষ্টি

অভিনেত্র দেখানো হয়েছে। অভিলক্ষ্য থেকে আগত রশ্মিগুচ্ছ ক্ষেত্র লেন্স ও বীক্ষণ লেন্সের মাঝে প্রতিবিম্ব গঠন করে ক্ষেত্র লেন্সের কাছে অভিলক্ষ্য দ্বারা গঠিত প্রতিবিম্ব p_1q_1 অসদ বস্তুর মতো কাজ করে। ক্ষেত্র লেন্সটি একটি সদ্ ও ক্ষুদ্রতর প্রতিবিম্ব p_2q_2 গঠন করে। স্বাভাবিক দৃষ্টির বেলায় এই প্রতিবিম্ব বীক্ষণ লেন্সের (E) ফোকাস তলে গঠিত হয়। ফলে এই লেন্সে প্রতিসৃত হয়ে রশ্মিগুচ্ছ সমান্তরাল হয়।

দুটি লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $3f$ ও f এবং এদের মধ্যে ব্যবধান $2f$। তুল্য ফোকাস দৈর্ঘ্য F_1 হলে

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{3f} + \frac{1}{f} - \frac{2f}{3f \cdot f} = \frac{2}{3f} \qquad \therefore\ F_1 = \frac{3f}{2}$$

প্রথম লেন্স তথা ক্ষেত্র লেন্স F এর ডানদিকে তুল্য লেন্সের অবস্থান হয়

$$x = \frac{aF_1}{f_2} = \frac{2f \cdot \frac{3f}{2}}{f} = 3f$$

স্বাভাবিক দৃষ্টিতে বীক্ষণ লেন্স থেকে প্রতিসৃত রশ্মিগুচ্ছ সমান্তরাল হয়। অর্থাৎ $Ep_2 = f$, এখন $EF = a = 2f$; ক্ষেত্র লেন্সের বেলায় বস্তুদূরত্ব $F p_1 = u$ (ধরুন) প্রতিবিম্ব দূরত্ব, $v = Fp_2 = a - f = 2f - f = f$, ক্ষেত্র লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য $3f$। লেন্স সমীকরণ $\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$ থেকে পাই

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{u} = \frac{1}{3f} \quad \therefore\ \frac{1}{u} = \frac{1}{f} - \frac{1}{3f} = \frac{2}{3f} \quad \therefore\ u = \frac{3f}{2}$$

অতএব অভিলক্ষ্য দ্বারা গঠিত প্রথম প্রতিবিম্ব p_1q_1 এর অবস্থান হয় ক্ষেত্র লেন্স থেকে $\frac{3f}{2}$ দূরত্বে। স্বাভাবিক দৃষ্টিতে ক্ষেত্র লেন্স দ্বারা গঠিত প্রতিবিম্ব p_2q_2 বীক্ষণ লেন্সের ফোকাস তলে গঠিত হয়। প্রতিবিম্ব পরিমাপ করতে হলে ক্রস তার বা স্কেল p_2q_2 অবস্থানে বসাতে হবে। যান্ত্রিকভাবে এটি স্থাপন করা খুবই কষ্টসাধ্য। আবার যদি কোনো ক্রস তার বা স্কেল ঐ অবস্থানে বসানো যায় তার থেকে আগত আলোকরশ্মি শুধুমাত্র বীক্ষণ লেন্সের মধ্য দিয়ে প্রতিসৃত হবে এবং এই লেন্সের দ্বারাই বিবর্ধিত হবে, ক্ষেত্র লেন্স দ্বারা বিবর্ধিত হবে না। প্রথম প্রতিবিম্ব p_1q_1 যেভাবে বিবর্ধিত হবে সেভাবে ক্রস তার বা স্কেল বিবর্ধিত হবে না। তাই প্রকৃত পরিমাপ পাওয়া যাবে না। আবার বীক্ষণ লেন্স একটি একক লেন্স বলে অপেরণ মুক্ত প্রতিবিম্ব গঠন করতে পারে না। ক্রস তার বা স্কেলের প্রতিবিম্ব হবে বিকৃত এবং প্রতিবিম্বে বক্রতারও উপস্থিতি থাকবে। সাধারণত হাইগেনস্ অভিনেত্রে ক্রস তার বা স্কেল ব্যবহার করা হয় না। ক্রস তার ব্যবহার করা যায় না বলে এই অভিনেত্রকে ঋনাত্মক লেন্স বলে।

প্রতিবিম্ব গঠনে ত্রুটিসমূহ :

বর্ণাপেরণ ন্যূনতম হওয়ার শর্ত হল, দুটি লেন্সের মধ্যে ব্যবধান হবে $a = 3f - f = 2f$; এখানে এটি পালিত

হয়েছে। আবার ন্যূনতম গোলাপেরণের শর্ত হল, দুটি লেন্সের মধ্যে দূরত্ব হবে $a = \frac{3f + f}{2} = 2f$; এটিও এখানে পালিত হয়েছে। তাই এই অভিনেত্রে বর্ণাপেরণ ও গোলাপেরণ ন্যূনতম। তাছাড়া র‍্যামসডেন অভিনেত্রের তুলনায় কোমাও কম হয়। র‍্যামস্‌ডেন অভিনেত্রে অবিন্দুকত্ব ও বিকৃতি যে পরিমাণে থাকে এখানেও এদের পরিমাণ প্রায় একই। কিন্তু র‍্যামস্‌ডেন অভিনেত্রের তুলনায় এই অভিনেত্রে বক্রতা ও অক্ষীয় বর্ণাপেরণ বেশী। দৃষ্টিক্ষেত্র দুটি অভিনেত্রে প্রায় সমান। সংক্ষেপে সুবিধা ও অসুবিধাগুলি নিম্নরূপ :

সুবিধা : (i) ন্যূনতম বর্ণাপেরণ ও গোলাপেরণের শর্ত এখানে পালিত হয়।

(ii) দৃষ্টিক্ষেত্র বেশ বিস্তৃত—প্রায় র‍্যামস্‌ডেন অভিনেত্রের সমান।

অসুবিধা : এখানে ক্রস তার বা স্কেল ব্যবহার করে প্রতিবিম্ব পরিমাপ করা যায় না। শুধুমাত্র পর্যবেক্ষণ করা যায়।

10.10 সারাংশ :

1. সরল অনুবীক্ষণ যন্ত্র হল কম ফোকাস দৈর্ঘ্যের একটি উত্তল লেন্স। সরল অনুবীক্ষণ যন্ত্রের বিবর্ধন, $m = \frac{D}{v} + \frac{D}{f}$

(i) প্রতিবিম্ব নিকট বিন্দুতে (D) গঠিত হলে, $m = 1 + \frac{D}{f}$; চোখ লেন্স থেকে a দূরত্বে থাকলে, $m = 1 + \frac{D - a}{f}$

(ii) প্রতিবিম্ব অসীমে গঠিত হলে, $m = \frac{D}{f}$

2. যৌগিক অনুবীক্ষণ যন্ত্র :

বিবর্ধন ক্ষমতা, $m = \frac{v}{u}\left(1 + \frac{D}{f_e}\right)$

$$= \left(\frac{v}{f_0} - 1\right)\left(1 + \frac{D}{f_e}\right)$$

নলের দৈর্ঘ্য L হলে

$$m \simeq \frac{L}{f_0}\left(1 + \frac{D}{f_e}\right)$$

$$\simeq \frac{L}{f_0} \times \frac{D}{f_e}$$

3. প্রতিসারক নভোবীক্ষণ যন্ত্র :

(i) স্বাভাবিক দৃষ্টিতে বিবর্ধন ক্ষমতা, $m = \frac{f_0}{f_e}$; স্বাভাবিক দৃষ্টিতে দূরবীক্ষণ যন্ত্রের দৈর্ঘ্য, $L = f_0 + f_e$

(ii) স্পষ্ট দৃষ্টিতে বিবর্ধন ক্ষমতা, $m = \frac{f_0}{f_e}\left(1 + \frac{f_e}{D}\right)$; স্পষ্ট দৃষ্টিতে দূরবীক্ষণের দৈর্ঘ্য, $L = f_0 + \frac{Df_e}{D + f_e}$

4. অভিলক্ষ্য : অনুবীক্ষণ বা দূরবীক্ষণ যন্ত্রে একটি বা দুটি অবর্ণক লেন্স যুগ্ম অভিলক্ষ্য হিসাবে ব্যবহৃত হয়। এতে বর্ণাপেরণ ও একবর্ণীয় অপেরণগুলি যথাসম্ভব কম হয়।

5. অভিনেত্র : অভিনেত্র সাধারণত দুটি লেন্স দিয়ে তৈরী করা হয়। এর ফলে প্রতিবিম্বের ঔজ্জ্বল্য ও দৃষ্টিক্ষেত্র বেশী হয় ও বর্ণাপেরণ ও গোলাপেরণ কম হয়। অন্যান্য একবর্ণীয় অপেরণগুলিও কম হয়।

সাধারণত দুধরনের অভিনেত্র ব্যবহৃত হয়।

(i) র‍্যাম্‌সডেন অভিনেত্র : দুটি সমান ফোকাস দৈর্ঘ্যের সমতলোত্তল লেন্স ওদের ফোকাস দৈর্ঘ্যের $\frac{2}{3}$ গুণ ব্যবধানে বসানো হয়। অর্থাৎ ওদের ফোকাস দৈর্ঘ্য f হলে, ওদের মধ্যে ব্যবধান $\frac{2f}{3}$ । বক্রতল দুটি পরস্পরের মুখোমুখি রেখে ওদের বসানো হয়।

এক্ষেত্রে গোলাপেরণ বা বর্ণাপেরণ ন্যূনতম হয় না। কিন্তু ক্রস তার বা স্কেলের সাহায্যে প্রতিবিম্বের আকার পরিমাপ করা যায়।

(ii) হাইগেনস্‌ অভিনেত্র : দুটি সমতলোত্তল লেন্স দিয়ে এটি তৈরী। এদের বক্রতল দুটি অভিলক্ষ্যের দিকে থাকে। ক্ষেত্র লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য বীক্ষণ লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্যের তিনগুণ হয় ও এদের মধ্যে ব্যবধান হয় বীক্ষণ লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ। অর্থাৎ বীক্ষণ লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য f হলে, ক্ষেত্র লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য হয় $3f$ এবং ওদের মধ্যে ব্যবধান হয় $2f$ ।

এই অভিনেত্রে বর্ণাপেরণ ও গোলাপেরণ ন্যূনতম হয় কিন্তু ক্রস তার বা স্কেল ব্যবহার করে প্রতিবিম্বের আকার পরিমাপ করা যায় না।

10.11 গাণিতিক উদাহরণ :

উদাহরণ 1. একটি যৌগিক অনুবীক্ষণ যন্ত্রের অভিলক্ষ্য ও অভিনেত্রের ফোকাস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $1 \times 10^{-2} m$ ও $5 \times 10^{-2} m$ । অভিলক্ষ্য থেকে $1 \cdot 1 \times 10^{-2} m$ দূরে অবস্থিত কোনো বস্তু চোখ থেকে $25 \times 10^{-2} m$ দূরে চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব গঠন করে। যন্ত্রটির বিবর্ধন ও লেন্স দুটির (অভিলক্ষ্য ও অভিনেত্র) ব্যবধান কত?

সমাধান : অভিলক্ষ্যের ক্ষেত্রে বস্তু দূরত্ব $u = -1 \cdot 1 \times 10^{-2} m$, $f = 1 \times 10^{-2} m$ প্রতিবিম্ব দূরত্ব v ধরি।

$\therefore \frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$ সমীকরণ থেকে পাই

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{-1\cdot 1\times 10^{-2}}=\frac{1}{1\times 10^{-2}} \text{ বা, } \frac{1}{v}=10^2-\frac{10^2}{1\cdot 1}=10^2\left(1-\frac{10}{11}\right)=\frac{1}{11\times 10^{-2}}$$

$\therefore v=11\times 10^{-2} m$

অভিলক্ষ্য দ্বারা বিবর্ধন $|m_o|=\frac{v}{u}=\frac{11\times 10^{-2}}{1\cdot 1\times 10^{-2}}=10$

অভিনেত্রের ক্ষেত্রে বিবর্ধন $|m_e|=1+\frac{D}{f}=1+\frac{25\times 10^{-2}}{5\times 10^{-2}}=6$

$\therefore$ মোট বিবর্ধন $|m|=|m_o|\times|m_e|=10\times 6=60$

অভিনেত্রের ক্ষেত্রে বস্তুদূরত্ব ধরি u, প্রতিবিম্ব দূরত্ব $v=-25\times 10^{-2} m$, $f=5\times 10^{-2} m$

$\therefore \frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$ থেকে

$$\frac{1}{-25\times 10^{-2}}-\frac{1}{u}=\frac{1}{5\times 10^{-2}} \text{ বা, } \frac{1}{u}=\frac{1}{-25\times 10^{-2}}-\frac{1}{5\times 10^{-2}}=-\frac{6}{25\times 10^{-2}}$$

$\therefore u=-\frac{25}{6}\times 10^{-2} m$

লেন্স দুটির ব্যবধান $=\left(11+\frac{25}{6}\right)\times 10^{-2} m=0\cdot 1517 m$

উদাহরণ 2. একটি যৌগিক অনুবীক্ষণ যন্ত্রে অভিলক্ষ্য এবং অভিনেত্রের ফোকাস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2\times 10^{-2} m$ এবং $2\cdot 75\times 10^{-2} m$ এবং এদের মধ্যে দূরত্ব $0\cdot 15m$। অন্তিম প্রতিবিম্ব অভিনেত্র থেকে $0\cdot 25m$ দূরে গঠিত হলে বিবর্ধন ক্ষমতা নির্ণয় করুন।

সমাধান : অভিনেত্রের বেলায় প্রতিবিম্ব দূরত্ব $v=-0\cdot 25m$, $f=0\cdot 0275m$। বস্তুদূরত্ব ধরি u।

$$\therefore \frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f} \text{ বা, } \frac{1}{-0\cdot 25}-\frac{1}{u}=\frac{1}{0\cdot 0275} \text{ বা, } \frac{1}{u}=-\frac{1}{0\cdot 25}-\frac{1}{0\cdot 0275}$$

$\therefore \frac{1}{u}=-40\cdot 36 \quad \therefore u=0\cdot 0248 m$

অভিনেত্র দ্বারা বিবর্ধন $|m_e|=\frac{v}{u}=\frac{0\cdot 25}{0\cdot 0248}=10\cdot 08$

দুট লেন্সের মধ্যে দূরত্ব $= 0\cdot15m$

$\therefore$ অভিলক্ষ্য দ্বারা গঠিত প্রতিবিম্ব দূরত্ব $= 0\cdot15 - 0\cdot0248 = 0\cdot1252m = v'$

বস্তুদূরত্ব ধরি u', $f' = 0\cdot02m$

$\therefore \dfrac{1}{v'} - \dfrac{1}{u'} = \dfrac{1}{f'}$ বা, $\dfrac{1}{0\cdot1252} - \dfrac{1}{u'} = \dfrac{1}{0\cdot02}$ বা, $\dfrac{1}{u'} = \dfrac{1}{0\cdot1252} - \dfrac{1}{0\cdot02} = -42\cdot01$

$\therefore u' = -0\cdot0238m$

অভিনেত্র দ্বারা বিবর্ধন $|m_o| = \dfrac{0\cdot1252}{0\cdot0238} = 5\cdot26$

মোট বিবর্ধন, $|m| = |m_o| \times |m_e| = 5\cdot26 \times 10\cdot08 = 53\cdot02$

উদাহরণ 3. একটি যৌগিক অনুবীক্ষণ যন্ত্রের অভিলক্ষ্য এবং অভিনেত্র পাতলা লেন্স দিয়ে গঠিত বলে ধরা যায়; এদের ফোকাস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $1\cdot5\times10^{-2}m$ এবং $3\cdot0\times10^{-2}m$। যদি এদের অন্তবর্তী দূরত্ব $0\cdot16m$ হয় এবং প্রতিবিম্ব অভিনেত্র থেকে $0\cdot25m$ দূরে গঠিত হয়, তা'হলে (a) বস্তুর অবস্থান ও (b) বিবর্ধন নির্ণয় করুন।

সমাধান : অভিনেত্রের বেলায় প্রতিবিম্ব দূরত্ব, $v = -0\cdot25m$।

ফোকাস দৈর্ঘ্য, $f = 0\cdot03m$, বস্তু দূরত্ব ধরি u।

$\therefore \dfrac{1}{v} - \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{f}$ থেকে পাই,

$\dfrac{1}{-0\cdot25} - \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{0\cdot03}$ বা, $\dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{-0\cdot25} - \dfrac{1}{0\cdot03} = -37\cdot33$

$\therefore u = -0\cdot0268m$

অভিলক্ষ্যের বেলায় প্রতিবিম্ব দূরত্ব $v_1 = 0\cdot16 - 0\cdot0268 = 0\cdot1332m$।

ধরি বস্তু দূরত্ব u_1 এবং ফোকাস দূরত্ব, $f_1 = 0\cdot015m$।

$\therefore \dfrac{1}{v} - \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{f}$ থেকে পাই,

$\dfrac{1}{0\cdot1332} - \dfrac{1}{u_1} = \dfrac{1}{0\cdot015}$ বা, $\dfrac{1}{u_1} = \dfrac{1}{0\cdot1332} - \dfrac{1}{0\cdot015}$ বা, $u_1 = 0\cdot0169m$

(a) বস্তুটি অভিলক্ষ্যের সামনে $0\cdot0169m$ দূরে অবস্থিত

(b) বিবর্ধন $m = \left(\dfrac{v_1}{fo} - 1\right)\left(1 + \dfrac{D}{fe}\right) = \left(\dfrac{0\cdot1332}{0\cdot015} - 1\right)\left(1 + \dfrac{0\cdot25}{0\cdot03}\right) = 73\cdot55$

উদাহরণ 4. $0.1m$ ও $0.01m$ ফোকাস দৈর্ঘ্যের দুটি উত্তল লেন্স দিয়ে একটি দূরবীক্ষণ যন্ত্র গঠিত। এর অভিলক্ষ্য

থেকে 1m দূরে একটি স্কেলকে ফোকাস করা হল। চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব চোখ থেকে 0.25m দূরে গঠিত হলে এর বিবর্ধন নির্ণয় করুন।

সমাধান : অভিলক্ষ্যের বেলায়, বস্তুদূরত্ব $u = -1m, f = 0\cdot1m$ প্রতিবিম্ব দূরত্ব ধরি v।

$$\therefore \frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f} \text{ বা, } \frac{1}{v}-\frac{1}{-1}=\frac{1}{0\cdot1} \text{ বা, } \frac{1}{v}=-1+10=9$$

$$\therefore v=\frac{1}{9}m \text{ ।}$$

অভিলক্ষ্যের দ্বারা বিবর্ধন, $|m_1|=\frac{v}{u}=\frac{1}{9}\times1=\frac{1}{9}$

অভিনেত্রের বেলায়, প্রতিবিম্ব দূরত্ব $v=-0\cdot25m, f=0\cdot01m$, বস্তু দূরত্ব $=u$ (ধরি); এই অবস্থানেই অভিলক্ষ্য দ্বারা গঠিত প্রতিবিম্বটি আছে।

$$\therefore \frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f} \text{ বা, } \frac{1}{-0\cdot25}-\frac{1}{u}=\frac{1}{0\cdot01} \text{ বা, } \frac{1}{u}=-\frac{1}{0\cdot25}-\frac{1}{0\cdot01}=-104$$

$$\therefore u=-\frac{1}{104}m$$

$\therefore$ অভিনেত্র দ্বারা বিবর্ধন $|m_2|=\frac{v}{u}=0\cdot25\times104=26$

$\therefore$ মোট বিবর্ধন, $m=|m_1|\times|m_2|=\frac{1}{9}\times26=2\cdot89$

উদাহরণ 5. একটি দূরবীক্ষণ যন্ত্রের অভিলক্ষ্য ও অভিনেত্রের ফোকাস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $0\cdot1m$ ও $0\cdot01m$। 0.60m দূরের কোনো বস্তুকে ফোকাস করা হলে চূড়ান্ত্র প্রতিবিম্ব চোখ থেকে 0.1m দূরে গঠিত হয়। দূরবীক্ষণ যন্ত্রটির দৈর্ঘ্য ও এর বিবর্ধন গণনা করুন।

সমাধান : অভিলক্ষ্যের বেলায়, $u=-0\cdot6m$, $f=0\cdot1m$ প্রতিবিম্ব দূরত্ব v (ধরি)।

$$\therefore \frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f} \text{ বা, } \frac{1}{v}-\frac{1}{-0\cdot6}=\frac{1}{0\cdot1} \text{ বা, } \frac{1}{v}=\frac{1}{0\cdot1}-\frac{1}{0\cdot6}$$

$$\therefore v=0\cdot12m$$

$\therefore$ অভিলক্ষ্যের দ্বারা বিবর্ধন $|m_1|=\frac{v}{u}=\frac{0\cdot12}{0\cdot60}=0\cdot2$ । অভিনেত্রের বেলায়, $v=-0\cdot1m$, $f=0\cdot01m$, বস্তু দূরত্ব (u) ধরি।

$$\therefore \frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f} \text{ বা, } \frac{1}{-0\cdot1}-\frac{1}{u}-\frac{1}{0\cdot01}$$

বা, $\dfrac{1}{u}=-\dfrac{1}{0\cdot01}-\dfrac{1}{0\cdot1}=-110$

$\therefore\ u=-\dfrac{1}{110}m$

$\therefore$ অভিনেত্র দ্বারা বিবর্ধন $|m_2|=\dfrac{v}{u}=0\cdot1\times110=11$

$\therefore$ মোট বিবর্ধন $|m|=|m_1|\times|m_2|=0\cdot2\times11=2\cdot2$

নলের দৈর্ঘ্য $=\left(0\cdot12+\dfrac{1}{110}\right)=0\cdot1291m$

উদাহরণ 6. একই উপাদানের দুটি পাতলা সমতলোত্তল লেন্স $0\cdot10m$ ব্যবধানে রেখে একটি হাইগেনস্ অভিনেত্র গঠন করা হয়েছে। অভিনেত্রটি গোলাপেরণ এবং বর্ণাপেরণ মুক্তির শর্ত পুরোপুরি মেনে চললে (i) লেন্স দুটি ফোকাস দৈর্ঘ্য, (ii) অভিনেত্রের তুল্য ফোকাস দৈর্ঘ্য, (iii) অসীম দূরত্বে এবং স্পষ্ট দর্শনের ক্ষেত্রে বিবর্ধন নির্ধারণ করুন।

সমাধান : ধরি দুটি লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে f_1 ও f_2।

গোলাপেরণ ন্যূনতম, $\therefore\ f_1-f_2=0\cdot1..............(i)$

বর্ণাপেরণ ন্যূনতম, $\therefore\ \dfrac{f_1+f_2}{2}=0\cdot1..............(ii)$

সমাধান করে পাই, $f_1=0\cdot15m$ ও $f_2=0\cdot05m$

তুল্য ফোকাস দৈর্ঘ্য F হলে,

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{a}{f_1f_2}$$

বা, $\dfrac{1}{F}=\dfrac{1}{0\cdot15}+\dfrac{1}{0\cdot05}-\dfrac{0\cdot10}{0\cdot15\times0\cdot05}=13\cdot333$

$\therefore\ F=0\cdot075m$

স্বাভাবিক দর্শনে বিবর্ধন, $m_1=\dfrac{D}{f}=\dfrac{0\cdot25}{0\cdot075}=3\cdot333$

স্পষ্ট দর্শনে বিবর্ধন, $m_2=1+\dfrac{D}{f}=1+\dfrac{0\cdot25}{0\cdot075}=4\cdot333$

উদাহরণ 7. সূর্য থেকে আগত রশ্মি একটি র‍্যামসডেন অভিনেত্রে আপতিত হয়েছে। প্রতিটি লেন্সের ফোকাস দূরত্ব $0\cdot03m$ হলে প্রতিবিম্ব কোথায় গঠিত হবে? তুল্যলেন্সের ফোকাস দূরত্ব কত? এর অবস্থান কোথায় হবে?

সমাধান : দুটি লেন্সের ব্যবধান $=\frac{2}{3}f=\frac{2}{3}\times 0\cdot 03=0\cdot 02m$ $(=u)$ যেহেতু অসীম থেকে আলো আসছে ধরা যায়, প্রথম লেন্সে প্রতিসৃত হয়ে এর ফোকাসে প্রতিবিম্ব গঠিত হবে। অর্থাৎ প্রথম লেন্স থেকে 0·03m দূরে প্রতিবিম্ব গঠিত হবে। দ্বিতীয় লেন্সের ক্ষেত্রে এটি অসদ বস্তুর মত কাজ করবে। অতএব দ্বিতীয় লেন্সের ক্ষেত্রে বস্তু দূরত্ব $u=f-a=0\cdot 03-0\cdot 02=0\cdot 01m$ । $f=0\cdot 03m$ প্রতিবিম্ব দূরত্ব ধরি v।

$$\therefore \frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f}, \text{ বা, } \frac{1}{v}-\frac{1}{0\cdot 01}=\frac{1}{0\cdot 03} \text{ বা, } \frac{1}{v}=\frac{1}{0\cdot 01}+\frac{1}{0\cdot 03}$$

$$\therefore v=7\cdot 5\times 10^{-3}m$$

অর্থাৎ অন্তিম প্রতিবিম্ব দ্বিতীয় লেন্স থেকে $7\cdot 5\times 10^{-3}m$ দূরে গঠিত হবে। তুল্য ফোকাস দৈর্ঘ্য F হলে,

$$\frac{1}{\mathrm{F}}=\frac{1}{0\cdot 03}+\frac{1}{0\cdot 03}-\frac{0\cdot 02}{0\cdot 03\times 0\cdot 03}=44\cdot 44$$

$$\therefore \mathrm{F}=0\cdot 0225m$$

তুল্য লেন্সের অবস্থান দ্বিতীয় লেন্স থেকে x হলে

$$x=-\frac{a\mathrm{F}}{f_1}=-\frac{0\cdot 02\times 0\cdot 0225}{0\cdot 03}=-0\cdot 015m$$

অর্থাৎ তুল্য লেন্সের অবস্থান দ্বিতীয় লেন্স থেকে $0\cdot 015m$ বাম দিকে।

তুল্য লেন্স থেকে প্রতিবিম্ব দূরত্ব $=\left(0\cdot 015+7\cdot 5\times 10^{-3}\right)m$

$$=0\cdot 0225m$$

10.12 প্রশ্নাবলি :

(i) সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :

1. সরল অনুবীক্ষণ কাকে বলে?
2. অনুবীক্ষণ যন্ত্র কাকে বলে?
3. দূরবীক্ষণ যন্ত্র কাকে বলে?
4. অভিলক্ষ্য ও অভিনেত্র কাকে বলে?
5. অনুবীক্ষণ যন্ত্রের বিবর্ধন ক্ষমতা কাকে বলে?
6. দূরবীক্ষণ যন্ত্রের বিবর্ধন ক্ষমতা কাকে বলে?
7. স্বাভাবিক দৃষ্টি ও স্পষ্ট দৃষ্টি কাকে বলে?

8. বীক্ষণ কোণ কাকে বলে?
9. অভিলক্ষ্য একক লেন্স হয় না কেন?
10. অভিনেত্র একক লেন্স হয় না কেন?
11. প্রতিবিম্বের দৈর্ঘ্য পরিমাপ করতে হলে কোন্ অভিনেত্র ব্যবহার করবেন?
12. কোন্ অভিনেত্রে গোলাপেরণ ও বর্ণাপেরণ ন্যূনতম হয়?
13. নভোবীক্ষণ ও ভূ-বীক্ষণ যন্ত্রের পার্থক্য কী?

(ii) সংক্ষিপ্ত উত্তরের প্রশ্ন

1. যৌগিক অভিনেত্র ব্যবহারের সুবিধা কী?
2. অনুবীক্ষণ যন্ত্রের বিবর্ধন বলতে কী বোঝায়? যৌগিক অনুবীক্ষণ যন্ত্রের বিবর্ধন কোন্ কোন্ বিষয়ের উপর নির্ভর করে?
3. স্পেকট্রোমিটার যন্ত্রে র‍্যাম্‌স্‌ডেন অভিনেত্র ব্যবহার করা হয় কেন?
4. হাইগেনস্ অভিনেত্রের ক্ষেত্র লেন্স ও বীক্ষণ লেন্সের ফোকাস দূরত্বের মধে সম্বন্ধ কী?
5. দূরবীক্ষণ ও অনুবীক্ষণ যন্ত্রের মধ্যে উল্লেখযোগ্য পার্থক্যগুলি লিখুন।
6. ন্যূনতম বর্ণাপেরণ ও ন্যূনতম গোলাপেরণের জন্য একটি অভিনেত্রের লেন্স দুটির মধ্যে দূরত্ব কী কী?
7. বাহির থেকে দেখে একটি দূরবীক্ষণ যন্ত্র ও একটি অনুবীক্ষণ যন্ত্রকে সনাক্ত করবেন কী ভাবে?
8. দূরবীক্ষণ যন্ত্রের বিবর্ধন ক্ষমতা বলতে কী বোঝায়? স্বাভাবিক দৃষ্টিতে এর মান কী? বিবর্ধন ক্ষমতা বাড়ানো যায় কী ভাবে?
9. দূরবীক্ষণ যন্ত্রে অভিনেত্রের তুলনায় অভিলক্ষ্যের উন্মেষ ও ফোকাস দৈর্ঘ্য বড়ো করা হয় কেন?
10. র‍্যাম্‌স্‌ডেন অভিনেত্রে ক্ষেত্র লেন্স ও বীক্ষণ লেন্সের মধ্যে ব্যবধান কত রাখা হয়? কীভাবে লেন্স দুটি রাখা হয়?
11. হাইগেনস্ অভিনেত্র ব্যবহার করে পরিমাপ করা যায় না কেন?

(iii) রচনাধর্মী প্রশ্ন :

1. বীক্ষণ কোণ ও বিবর্ধন ক্ষমতা কাকে বলে? একটি সরল অনুবীক্ষণ যন্ত্র বর্ণনা করুন। এর বিবর্ধন ক্ষমতা রাশিমালা স্পষ্ট দৃষ্টিতে কী হবে? বিবর্ধন ক্ষমতা চোখের কোন্ অবস্থানে সব থেকে বেশী হবে এবং কেন? এর দ্বারা গঠিত প্রতিবিম্ব কি অবর্ণক হবে? কারণসহ ব্যাখ্যা করুন।
2. একটি পরিষ্কার চিত্র সহযোগে যৌগিক অনুবীক্ষণ যন্ত্রের গঠন ও কার্যপ্রণালী ব্যাখ্যা করুন। যন্ত্রের বিবর্ধক ক্ষমতা কীসের উপর নির্ভর করে? এর একটি রাশিমালা নির্ণয় করুন।
3. একটি যৌগিক অনুবীক্ষণ যন্ত্রের মধ্য দিয়ে আলোকরশ্মির গতিপথের চিত্র অঙ্কন করুন। প্রতিবিম্ব স্পষ্ট দর্শনের ন্যূনতম দূরত্বে গঠিত হলে, বিবর্ধক ক্ষমতা নির্ধারণ করুন। এই অনুবীক্ষণ যন্ত্রের সাহায্যে পরিমাপ করতে হলে কী ধরনের অভিনেত্র ব্যবহার করবেন এবং কেন করবেন?
4. পরিষ্কার চিত্র সহযোগে একটি নভোবীক্ষণ যন্ত্রের গঠন ও মূলতত্ত্ব বর্ণনা করুন।
5. গোলাপেরণ ও বর্ণাপেরণ দূরীভূত হয়েছে এমন একটি অভিনেত্র বর্ণনা করে ওর মধ্যে আলোকরশ্মির পথ রেখাঙ্কনের সাহায্যে দেখান। এই অভিনেত্রকে ঋনাত্মক অভিনেত্র বলা হয় কেন?

6. হাইগেন্‌স্‌-এর অভিনেত্রের কার্যনীতি ব্যাখা করুন। এতে কেন স্কেল ব্যবহার করা যায় না? র‍্যামস্‌ডেন অভিনেত্রের সঙ্গে এর পার্থক্য উল্লেখ করুন।

7. (a) যৌগিক অভিনেত্র কাকে বলে?

   (b) র‍্যাম্‌স্‌ডেন অভিনেত্রের কার্যনীতি ব্যাখ্যা করুন। একে ধনাত্মক অভিনেত্র বলা হয় কেন?

8. রেখাচিত্রের সাহায্যে র‍্যাম্‌স্‌ডেন ও হাইগেন্‌স্‌ অভিনেত্র বর্ণনা করুন। এদের সুবিধা অসুবিধা তুলনা করুন।

9. একটি পরিষ্কার চিত্রে রাম্‌স্‌ডেন অভিনেত্রের গঠন ও কার্যপ্রণালী ব্যাখ্যা করুন। এর তুল্য ফোকাস দৈর্ঘ্য কত হবে? একে ধনাত্মক অভিনেত্র বলা হয় কেন? এর সুবিধা অসুবিধাগুলি কী কী?

(iv) গাণিতিক প্রশ্ন :

1. একটি অনুবীক্ষণ যন্ত্রে অভিলক্ষ্য ও অভিনেত্রের ফোকাস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2\cdot0\times10^{-2}m$ ও $4\times10^{-2}m$। কোনো বস্তু লেন্স থেকে $3\times10^{-2}m$ দূরে থাকলে, স্পষ্ট দৃষ্টিতে অভিলক্ষ্য ও অভিনেত্রের দূরত্ব কত হবে?

2. কোনো অনুবীক্ষণ যন্ত্র $1\cdot0\times10^{-2}m$ ও $2\cdot0\times10^{-2}m$ ফোকাস দৈর্ঘ্যের অভিলক্ষ্য এবং অভিনেত্র দ্বারা গঠিত। অভিলক্ষ্য থেকে $1\cdot1\times10^{-2}m$ দূরে একটি বস্তু রাখা হল। যদি অন্তিম প্রতিবিম্ব চোখ থেকে 0·25m দূরে দেখা যায় তবে অভিলক্ষ্য এবং অভিনেত্রের অন্তবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করুন। উৎপন্ন বিবর্ধন কত?

3. কোনো অনুবীক্ষণ যন্ত্র যথাক্রমে $5\cdot0\times10^{-3}m$ এবং $1\cdot5\times10^{-2}m$ ফোকাস দৈর্ঘ্যের অভিলক্ষ্য এবং অভিনেত্র দ্বারা গঠিত। স্পষ্ট দর্শনের ন্যূনতম দূরত্ব $0\cdot25m$ ধরে বিবর্ধক ক্ষমতা 500 হতে হলে অভিলক্ষ্য এবং অভিনেত্রের প্রয়োজনীয় ব্যবধান নির্ণয় করুন।

4. কোনো অনুবীক্ষণ যন্ত্রের অভিলক্ষ্য এবং অভিনেত্রের ফোকাস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2\cdot0\times10^{-2}m$ এবং $5\cdot0\times10^{-2}m$, এদের পারস্পরিক দূরত্ব $0\cdot20m$। কোনো বস্তুর প্রতিবিম্ব অভিনেত্র থেকে $0\cdot25m$ দূরে দেখা গেলে অভিলক্ষ্য থেকে বস্তুটির দূরত্ব কত?

5. একটি দূরবীক্ষণ যন্ত্র $1\cdot00m$ ও $5\cdot00\times10^{-2}m$ ফোকাস দৈর্ঘ্যের দুটি লেন্স দিয়ে গঠিত। (a) স্বাভাবিক দৃষ্টি ও (b) স্পষ্ট দৃষ্টির ক্ষেত্রে এর বিবর্ধন ক্ষমতা নির্ণয় করুন।

6. একটি দূরবীক্ষণ যন্ত্রের অভিলক্ষ্য এবং অভিনেত্রের ফোকাস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $0\cdot10m$ এবং $0\cdot01m$। অভিলক্ষ্য থেকে $0\cdot60m$ দূরে একটি বস্তুর প্রতি দূরবীক্ষণটি ফোকাস করলে প্রতিবিম্ব চোখ থেকে $0\cdot10m$ দূরে গঠিত হয়। দূরবীক্ষণ নলের দৈর্ঘ্য এবং বিবর্ধন নির্ণয় করুন।

7. একটি নভোবীক্ষণ যন্ত্রের অভিলক্ষ্য এবং অভিনেত্রের ফোকাস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $1\cdot20m$ এবং $0\cdot005m$। স্বাভাবিক দৃষ্টি ও স্পষ্ট দৃষ্টিতে বিবর্ধন ও নলের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

8. কোনো দূরবীক্ষণের অভিলক্ষ্য এবং অভিনেত্র যথাক্রমে $2\cdot00m$ এবং $0\cdot050m$ ফোকাস দৈর্ঘ্যের উত্তল লেন্স দিয়ে গঠিত। অভিলক্ষ্য থেকে $34m$ দূরে অবস্থিত কোনো বস্তুর প্রতিবিম্ব চোখ থেকে $0\cdot24m$ দূরে গঠিত হয়। দূরবীক্ষণ যন্ত্রটির দৈর্ঘ্য এবং উৎপন্ন বিবর্ধন করুন।

9. একটি র‍্যাম্‌স্‌ডেন অভিনেত্রের উভয় লেন্সের ফোকাস দৈর্ঘ্য $3\cdot2\times10^{-2}m$ এবং এগুলি $2\cdot4\times10^{-2}m$ ব্যবধানে রাখা আছে, অভিনেত্রটির তুল্য ফোকাস দৈর্ঘ্য কত হবে?

10. একটি হাইগেন্‌স্‌ অভিনেত্রে লেন্সগুলির ফোকাস দূরত্ব যথাক্রমে $0\cdot015m$ এবং $5\times10^{-3}m$। যদি গোলীয় অপেরণ ও বর্ণাপেরণ দূরীভূত হয়ে তাকে। তবে এর তুল্য ফোকাস দূরত্ব নির্ণয় করুন।

11. $6\times10^{-2}m$ এবং $2\times10^{-2}m$ ফোকাস দৈর্ঘ্যের এবং একই উপাদানের তৈরী দুটি সমতলোত্তল লেন্স দিয়ে একটি হাইগেনস্‌ অভিনেত্র গঠন করা হয়েছে। এই অভিনেত্রের তুল্য ফোকাস দৈর্ঘ্য কত? অসীম দূরত্বে দর্শনের বেলায় ক্ষেত্র লেন্সের অবস্থান কী হবে?

12. একটি র‍্যাম্‌স্‌ডেন অভিনেত্র একই উপাদানের দুটি পাতলা সমতলোত্তল লেন্স $2\times10^{-2}m$ ব্যবধানে রেখে গঠন করা হয়েছে। লেন্স দুটির প্রত্যেকটির ফোকাস দৈর্ঘ্য $2\cdot5\times10^{-2}m$ হলে (i) অভিনেত্রের তুল্য ফোকাস দৈর্ঘ্য। (ii) অসীম দূরত্বে এবং স্পষ্ট দর্শন ফোকাসিং এর বেলায় বিবর্ধন, (iii) অসীম দূরত্বে দর্শনের জন্য ক্ষেত্র লেন্সের অবস্থান নির্ণয় করুন।

10.13 গাণিতিক প্রশ্নের উত্তর :

1. $0\cdot0945m$
2. $0\cdot1285m$, 135
3. $0\cdot1607m$
4. $2\cdot29\times10^{-2}m$
5. (a) 20, (b) 24
6. $0\cdot129m$, $2\cdot2$
7. 240, $1\cdot205m$, $244\cdot8$, $1\cdot2049m$
8. $2\cdot167m$, 51
9. $2\cdot56\times10^{-2}m$
10. $7\cdot5\times10^{-3}m$
11. (i) $3\times10^{-2}m$ (ii) অভিলক্ষ্যের ফোকাস তল থেকে $3\times10^{-2}m$ পিছনে।
12. (i) $2\cdot08\times10^{-2}m$
    (ii) 12, 13
    (iii) অভিলক্ষ্যের ফোকাস তল থেকে $6\cdot25\times10^{-3}$m দূরে।

10.14 সহায়ক গ্রন্থাবলি :

1. Light—K. G. Majumdar
2. Geometrical and Physical Optics—R. S. Longhurst
3. Fundamentals of Optics—Jenkins and White
4. Optics—E. Hlecht